

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XLII N 9

Нижний Новгород

1999

С о д е р ж а н и е

- Моченёва О. С., Токман М. Д. Об одном методе определения преимущественной ориентации кристаллических частиц в облаках по данным поляризационных измерений в диапазоне миллиметровых волн..... 839
- Боярский Д. А., Тихонов В. В. Учёт стратиграфии снежного покрова при моделировании его излучательной способности в СВЧ диапазоне 845
- Гайкович К. П., Черняева М. Б. Обратные задачи лимбового дистанционного зондирования атмосферы в некорректной постановке..... 858
- Неганов В. А., Осипов О. В. Отражение электромагнитных волн от плоских киральных структур 870
- Михайлов Г. Д., Кутышев С. Н., Кирьянов О. Е. Эффективная площадь рассеяния зеркальной антенны с диэлектрическим обтекателем 879
- Скулкин С. П., Турчин В. И. Импульсное переходное поле зеркальной антенны в ближней зоне 886
- Авдеев В. Б., Пискунов К. П. Достижимые уровни уменьшения коэффициента отражения радиоволн от аэродинамического объекта, прикрытого поглощающим плазменным образованием 893
- Бобков Ю. А., Уткин Г. А. Об одном методе решения функционального уравнения с переменным запаздыванием 900
- Соколов С. В., Коляда Ю. И., Долгополый П. В. О решении задачи апостериорного синтеза оптимального управления нелинейными стохастическими структурами..... 906
- Мальцев А. А., Зимина С. В. Некоторые точные результаты статистического анализа многоканальных адаптивных систем с непрерывными градиентными алгоритмами 914
- Музычук О. В. Прямой метод численного анализа релаксации вероятностных характеристик броуновского движения 922

УДК 551.501.8

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕИМУЩЕСТВЕННОЙ ОРИЕНТАЦИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ОБЛАКАХ ПО ДАННЫМ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В ДИАПАЗОНЕ МИЛЛИМЕТРОВЫХ ВОЛН

О. С. Моченева, М. Д. Токман

В работе предложена методика анализа поляризационных характеристик рассеяния микроволнового излучения облачными частицами с различными распределениями по размерам, форме и ориентации в пространстве. Найдена комбинация параметров Стокса, малочувствительная к распределению рассеивающих частиц по размерам и эксцентриситету и весьма чувствительная к их распределению по ориентации в пространстве.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы появился ряд работ, в которых обсуждается использование мощных электронных мазеров микроволнового диапазона в атмосферных исследованиях [1, 2, 3]. Метеорадар, использующий миллиметровое излучение, может быть гораздо чувствительнее традиционных приборов дециметрового и сантиметрового диапазона вследствие сильной зависимости Рэлеевского сечения рассеяния излучения на аэрозолях от частоты [1]. В то же время по сравнению с оптическими лидарами микроволновое излучение обладает существенно большей проникающей способностью. В настоящее время общепризнано, что область применимости миллиметровых устройств включает широкий класс атмосферных объектов (главным образом облака), непроницаемых для оптического зондирования и в то же время слабоблочно традиционными СВЧ-метеорадарами.

Примеры эффективного использования даже сравнительно маломощного микроволнового излучения для зондирования облачности приведены в большом числе работ (см. обзор [4]). Отметим также работу [3], где мощный мазер на циклотронном резонансе использовался для исследования рассеяния в ясной атмосфере.

Представляется весьма заманчивым использовать присущее миллиметровому диапазону сочетание высокой чувствительности мониторинга и высокой проникающей способности излучения для определения ориентации кристаллов в облаке по поляризационным измерениям рассеянного излучения [5]. Такие измерения, в частности, могут быть использованы в исследованиях атмосферного электричества. В основе этой идеи лежит тот факт, что несферические ледяные облачные кристаллы существенно меняют свою ориентацию в зависимости от соотношения действующих на них гравитационных, аэродинамических и электрических сил. Однако необходимым условием реализации подобных измерений является подробное рассмотрение влияния размеров и формы кристаллов и их ориентации в пространстве на величину рассеянного сигнала в различных поляризациях. Известные работы, содержащие описание рассеяния микроволнового излучения на кристаллах типичных форм (столбиков и пластин) (см. например [6, 7]), рассматривают только распределение по ориентации, считающееся характерным для невозмущенной облачности [8] (плоскости пластин и длинные оси столбиков расположены горизонтально). В [7], кроме того, рассматривалось изотропное в пространстве распределение кристаллов по ориентациям. Если мы ставим задачу диагностики исследования атмосферного электричества по результатам экспериментального определения ориентации частиц, этого явно не достаточно. Известно, что электрическое поле в атмосфере стремится ориентировать частицы вертикально [5], поэтому нельзя обойтись без рассмотрения различных типов ориентации частиц вблизи вертикали.

О. С. Моченева, М. Д. Токман

839

Целью настоящей работы является исследование зависимости поляризационных характеристик рассеянного сигнала от распределения частиц по пространственной ориентации и обсуждение возможностей соответствующего эксперимента при использовании в качестве источника излучения мощного электронного мазера. Необходимо отметить, что в силу сложности решения обратной задачи важно предложить постановку эксперимента, соответствующую максимально наглядной интерпретации данных.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЛАКОВ. ОЦЕНКА РАССЕЯНИЯ НА ОБЛАЧНЫХ ЧАСТИЦАХ НА ОСНОВНОЙ И КРОСС-ПОЛЯРИЗАЦИЯХ

Радиолокационная отражаемость Z единицы объема облака (обычно выражаемая в $\text{мм}^6\text{м}^{-3}$)* связана с радиолокационным сечением рассеяния σ_b единицы объема облака (измеряется в $1/\text{м}$) следующим соотношением [9]:

$$\sigma_b = \frac{\pi^5}{\lambda^4} 10^{-18} |K|^2 Z, \quad (1)$$

где $|K|^2 = \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2$, ε — диэлектрическая проницаемость вещества облачной частицы, а λ — длина волны в метрах. В случае идентичных сферических частиц, диаметр которых меньше длины волны, $Z = ND^6$, где D — диаметр сферы в миллиметрах, а N — концентрация частиц в м^{-3} . Если имеется распределение частиц по размерам $n(D)$, отражаемость записывается следующим образом:

$$Z = \int_0^{\infty} n(D) D^6 dD \quad (2)$$

Для облака несферических частиц соотношение (1) определяет эквивалентную отражаемость Z_e [4]. Для несферических частиц отражаемость зависит не только от размера и концентрации частиц, но и от их формы, поляризации излучения и от ориентации частиц относительно направления зондирования. Известно [9], что ледяные кристаллы в облаках могут иметь сложную форму, но для оценок можно свести все многообразие к двум основным типам — столбчатые кристаллы (иглы и столбики) и пластинчатые [10]. В [6] было предпринято подробное исследование возможностей упрощения задачи рассеяния на таких частицах, что позволило сделать вывод о том, что при длине волны излучения порядка 3 мм и максимальном размере кристаллов, не превышающем 1500 мкм, вполне оправданным является моделирование кристаллов вытянутыми и сплюснутыми сфероидами с различными отношениями главных осей. Более того, при таких длинах волн вплоть до максимального размера кристаллов $800 \div 1000$ мкм с хорошей точностью можно рассматривать рассеяние как рэлеевское рассеяние на сфероидах, отношение главных осей которых соответствует тем же величинам в реальных кристаллах. Мы будем рассматривать следующие типы кристаллов и соответствующие им эмпирические выражения для соотношений размеров частиц [11]:

В табл. 1. L — больший размер кристалла (длина — для столбиков и игл, диаметр — для толстых и тонких пластин), h — меньший размер кристалла; все размеры даны в мкм.

Что касается ориентации частиц в пространстве, мы будем рассматривать следующие случаи.

1. Распределение, считающееся типичным для невозмущенного облака, — столбчатые кристаллы ориентированы длинной осью в горизонтальной плоскости с равномерным распределением по азимутальному углу, плоскости пластинчатых кристаллов расположены горизонтально [8].

2. Распределение, устанавливающееся при выстраивании частиц вдоль электрического поля в атмосфере [5] — длинные оси или плоскости кристаллов ориентированы вертикально.

*Мы следуем терминологии, используемой в [4].

Т а б л и ц а 1

Форма кристалла	h, мкм
Иглы	$1,099L^{0,61078}$
Столбики	$-8,479 + 1,002L - 0,00234L^2, L \leq 200$ мкм $11,3L^{0,414}, L > 200$ мкм
Тонкие пластины (II)	$2,02L^{0,449}$
Толстые пластины (I)	$0,402L^{1,018}$

3. Распределение, которое можно считать переходным между случаями 1) и 2) — функция распределения ориентации длинных осей кристаллов пропорциональной $\cos^2\theta$, где θ — угол отклонения большей оси сфероида от вертикали (в азимутальной плоскости распределение равномерное).

4. Изотропное в пространстве распределение по ориентации частиц.

Выражения, описывающие рассеяние электромагнитных волн на несферических и произвольно ориентированных частицах, являются достаточно громоздкими, поэтому приводить их здесь мы не будем.

Говоря о возможностях поляризационных измерений, мы будем рассматривать две величины: отношение отражаемостей на двух основных поляризациях Z_{vv}/Z_{hh} и отношение сечений рассеяния на кросс- и основной поляризациях (вертикальной и горизонтальной) (линейное деполаризационное отношение (LDR) для моностатического зондирования. Уточним, что горизонтальной мы считаем поляризацию излучения, когда вектор E расположен в горизонтальной плоскости.

На рис. 1 показаны зависимости этих величин от угла зондирования при отношении осей кристаллов $L/h = 5$ (угол зондирования отсчитывается от горизонта).

Видно, что величина рассеяния на кросс-поляризации примерно на два порядка меньше, чем на основной поляризации, что требует и соответствующего увеличения чувствительности приема. Кроме того, из рисунка видно, что вертикальное зондирование не дает возможности получить информацию из различия рассеяния в основных поляризациях, тогда как информативность рассеяния в кросс-поляризации растет с увеличением угла наблюдения.

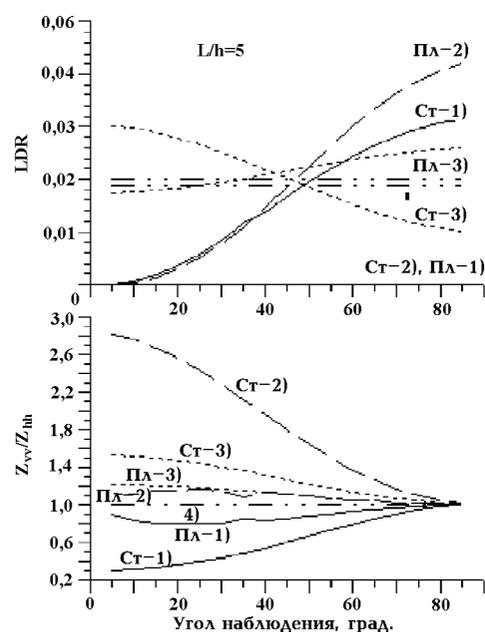


Рис. 1.

2. ДЕПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ ДИАГРАММА

Сами по себе величины LDR и Z_{vv}/Z_{hh} определяются как структурой распределения частиц по ориентации в пространстве, так и распределением частиц по эксцентриситету, поэтому интерпретация подобных измерений, вообще говоря, весьма неоднозначна. Эффективным эвристическим методом анализа подобных измерений может служить построение диаграммы зависимости LDR от отношения Z_{vv}/Z_{hh} для различных эксцентриситетов (см. рис. 2). Положение экспериментальных точек относительно "разделительных линий" диаграммы может служить достаточно надежным указанием на преимущественную ориентацию частиц.

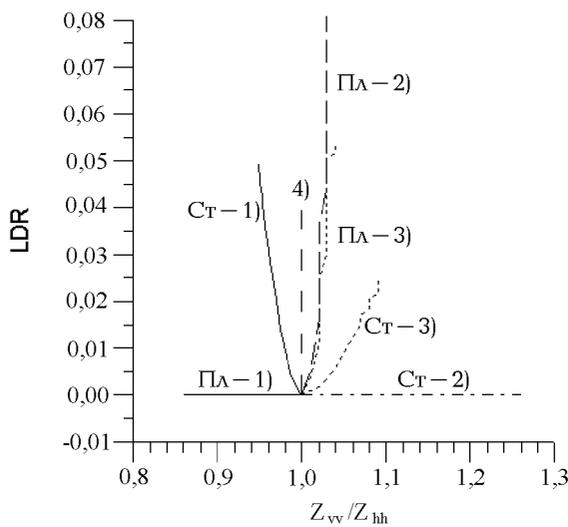


Рис. 2.

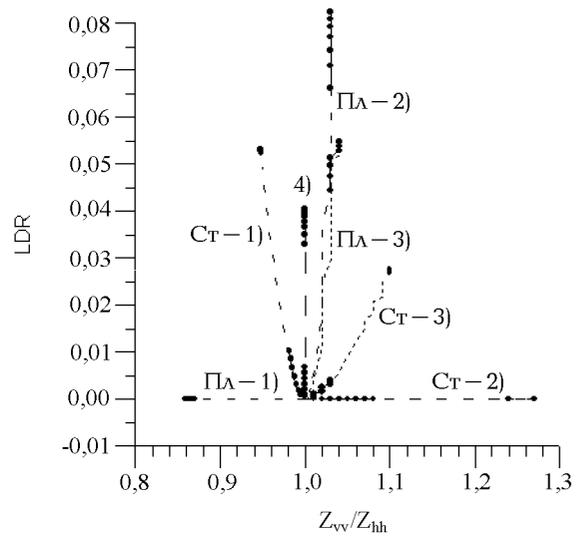


Рис. 3.

Особенно важно отметить, что структура такой диаграммы (будем называть ее деполаризационной) практически не зависит от распределения частиц по размерам. Распределение частиц по размерам в реальном облаке часто описывается модифицированным Γ -распределением первого порядка [6]:

$$n(D) \approx \alpha D^a e^{-bD}, b = \frac{\alpha + 3,67}{D_m}, \alpha = 1,$$

где D — диаметр эквивалентной сферы, D_m — медианный диаметр объемного распределения, α — параметр, описывающий ширину распределения. Результаты оценок отношений Z_{vv}/Z_{hh} и LDR, сделанных для облака, в котором существует распределение кристаллов по размерам при различных значениях параметра D_m (в интервале $40 \div 100$ мкм [12]), приведены на рис. 3 кружками. Там же пунктиром показаны те же зависимости, что и на рис. 2. Видно, что учет распределения частиц по размерам не влияет на отношения величин рассеянных сигналов на различных поляризациях, т.е. оценки, сделанные без учета распределения частиц по размерам, позволяют интерпретировать и результаты измерения рассеяния в реальном облаке. Заметим, что последний результат весьма нетривиален, т.к. использованная выше зависимость $h(L)$ задает различные распределения частиц по эксцентриситету для различных распределений по диаметру эквивалентной сферы. Хотя эффективность деполаризации весьма сильно зависит от эксцентриситета частиц, структура деполаризационной диаграммы, как оказалось, определяется в основном ориентацией частиц.

Такая универсальность деполаризационной диаграммы не случайна. Рассмотрим, например, набор из N различных эллипсоидов, ориентированных в одном направлении. Ясно, что в приближении некогерентного рассеяния эта система будет рассеивать плоскую волну как N аналогично ориентированных идентичных эллипсоидов при выполнении условия

$$\alpha_{0(x,y,z)}^2 = N^{-1} \sum_{j=1}^N \alpha_{j(x,y,z)}^2,$$

где $\alpha_{j(x,y,z)}$ — компоненты тензора поляризуемости j -той частицы в системе координат, связанной с частицей; $\alpha_{0(x,y,z)}$ — компоненты тензора поляризуемости частиц монодисперсного аэрозоля. Отсюда

следует, что если распределения по ориентации и эксцентриситету независимы*, то поляризационная диаграмма облака одинаковых частиц и облака частиц, имеющих распределение общего вида по размерам идентичны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представляется весьма важным, что такая универсальная деполяризационная диаграмма может быть относительно легко рассчитана для любого угла наблюдения, для любых распределений частиц по ориентации. Кроме того, проведенные расчеты показали, что на вид диаграммы не влияет также учет наличия воздушных пузырьков внутри ледяного кристалла. Единственным ограничением для использования данной методики является невозможность одновременного описания частиц с поглощением и без поглощения (например при появлении на части ледяных кристаллов водяной пленки).

Именно в силу всех вышеизложенных обстоятельств использование данной диаграммы представляется нам важным и полезным. Мы полагаем, что особенно успешно описанная методика сможет быть применена при рассмотрении изменений ориентации частиц в облаке, происходящих за время наблюдения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 98–02–17198).

ЛИТЕРАТУРА

1. Manheimer W. M. // *Phys. Plasmas*. 1994. V. 1. № 5. P. 1721.
2. Manheimer W. M., Mesyats G. A., Petelin M. I. — In: *Proc. 2nd Int. Conf. Strong Microwaves in Plasmas*. IAP. N. Novgorod. 1993. V. 2. P. 632.
3. Быков Ю. В., Дрягин Ю. А., Еремеев А. Г., Кукин Л. М., Лебский Ю. В., Моченева О. С., Токман М. Д. // *Известия АН, ФАО*. 1996. Т. 32. № 1. С. 84.
4. Mead J. B., Pazmany A. L., Sekelsky S. M., McIntosh R. E. Millimeter-wave radars for remotely sensing clouds and precipitation // *Proc. of IEEE*. 1994. V. 82. № 12. P. 1981.
5. McEwan N. J., Alves A. P., Dissanayake A. W. // *Ann. Telecommunic.* 1981. V. 36. № 1-2. P. 102.
6. Schneider T. L., Stephens G. L. // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1995. V. 52. № 23. P. 4367.
7. Tang C., Aydin K. // *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing*. 1995. V. 33. № 1. P. 93.
8. Cho H-R., Iribarne J. V., Richards W. G. // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1981. V. 38. № 5. P. 1111.
9. Мазин И. П., Шметер С. М. *Облака. Строение и физика образования*. — Л.: Гидрометеиздат. 1983. 279 с.
10. Огути Т. // *ТИИЭР*. 1983. Т. 71. № 9. С. 6.
11. Auer A. H., Veal D. L. // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1970. V. 27. P. 919.
12. Matrosov S. Y., Heymsfield A. J., Interieri J. M., Orr B. W., Snider J. B. // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1981. V. 52. № 23. P. 4128.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г.Н.Новгород, Россия

Поступила в редакцию
2 июля 1998 г.

*Именно предположение о независимости этих распределений позволяет рассматривать монодисперсный аэрозоль для моделирования деполяризационной диаграммы.

**ON METHOD FOR DETERMINING PREDOMINANT ORIENTATION OF CRYSTAL PARTICLES IN CLOUDS BY
VIRTUE OF POLARIZATION MEASUREMENTS IN MM-WAVE BAND**

O. S. Mocheneva and M. D. Tokman

In this paper we propose a technique aimed at analysis of polarization characteristics of microwave radiation scattered by cloud particles with various distributions over size, shape, and orientation. We have found a combination of the Stokes parameters that is almost independent of size and eccentricity distributions of scattering particles. On the other hand, this combination is strongly dependent on orientation distribution of cloud particles.

УЧЕТ СТРАТИГРАФИИ СНЕЖНОГО ПОКРОВА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЕГО ИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ В СВЧ ДИАПАЗОНЕ

Д. А. Боярский, В. В. Тихонов

В данной работе обсуждается структурно-зависимая модель излучательной способности снежного покрова. Восходящее и нисходящее излучение внутри снежного слоя предполагалось диффузным и использовалась двухпоточковая теория Кубелки и Мунка. Снежный покров представлялся средой, состоящей из дискретных рассеивателей. В случае сухого снега рассеивателями являлись зерна льда. Для влажного снега в качестве моделей рассеивающей среды рассматривались смесь зерен льда и водяных капель, а также смесь зерен льда, покрытых водяной оболочкой, и водяных капель. Предполагалось, что рассеиватели имеют сферическую форму и их размеры подчинены логарифмически нормальному распределению. Расчеты радиояркостной температуры снежного покрова на почве проведены с использованием данных гляциологических измерений его физических параметров и микроструктуры. Результаты расчетов сопоставлены с результатами измерений радиояркостной температуры при различных состояниях снежного покрова.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое практическое значение имеет задача получения точной и оперативной информации о состоянии снежного покрова и динамике протекающих в нем физических процессов. Гляциологические методы наблюдения не всегда позволяют решить эту задачу, кроме того, во многих районах эти наблюдения связаны с огромными техническими трудностями и являются небезопасными (например в местах формирования лавин). Поэтому все большее распространение получают дистанционные методы исследования состояния снежного покрова. Среди них — исследования снежного покрова в СВЧ диапазоне с целью восстановления физических характеристик снежной среды по ее радиофизическим параметрам [1].

Проводимые в настоящее время измерения радиофизических параметров снежного покрова, включающие съемку со спутников и самолетов, показывают, что радиояркостная температура сильно зависит от физических параметров снега: плотности, толщины снежного покрова, влажности, размера ледяных зерен и дисперсии их размера. Характер этой зависимости определяется стратиграфией снежной толщи [2, 3].

Снижение радиояркостной температуры системы почва—снег—атмосфера на частоте $f = 19,5$ ГГц и особенно на частоте $f = 37,5$ ГГц в течение одной зимы вследствие роста среднего размера кристаллов льда, сглаживание зависимости радиояркостной температуры на частоте $f = 3,95$ ГГц от угла визирования в результате появления слоя глубинной изморози, различный вид частотных зависимостей радиояркостной температуры снега при различной структуре снежного покрова [4, 5] — это только несколько примеров, показывающих, какое значительное влияние стратиграфия снежного покрова оказывает на его микроволновой сигнал.

Таким образом, для надежной интерпретации данных дистанционного зондирования необходим учет слоистости и структуры снега. Количественное восстановление физических параметров снежного покрова по данным дистанционного зондирования требует создания электродинамической модели снежного покрова, позволяющей описать его излучательную способность с учетом стратиграфии.

Д. А. Боярский, В. В. Тихонов

С электродинамической точки зрения снег представляет собой сильно рассеивающую среду, состоящую из дискретных рассеивателей — зерен льда. Микроволновое излучение, проходящее сквозь снежную толщу, поглощается и рассеивается снежными кристаллами. Однако в настоящее время отсутствует общая теория взаимодействия электромагнитного излучения со средой, состоящей из рассеивателей [6].

Излучательная способность снежного покрова чаще всего определяется путем решения уравнения переноса излучения. Существует два способа представления неоднородной среды, которой является снежный покров, и, следовательно, два подхода к расчету коэффициентов уравнения переноса излучения. В одном случае рассеивающая среда рассматривается как непрерывное объемно-неоднородное пространство (см., например, [7]), в другом — состоит из дискретных некоррелированных и когерентно невзаимодействующих рассеивателей. В качестве рассеивателей для сухого снега принимают зерна льда [4, 8, 9], для влажного снега — зерна льда, покрытые пленкой воды [10, 11, 12], или смесь зерен льда и водяных капель различного радиуса [12].

Отметим, что несмотря на отсутствие общей теории, некоторые модели излучательной способности сухого снежного покрова показывают соответствие экспериментальным результатам [13, 14]. Однако данные модели не исчерпывают все многообразие состояний снежной среды. Появление влаги во время таяния снежной среды приводит к значительному изменению ее физических и, следовательно, радиофизических характеристик.

Одной из причин расхождения экспериментальных и теоретических результатов (см., например, [12]) является, на наш взгляд, усреднение реальной стратиграфии снежного покрова, когда реальная стратиграфия заменяется одним или двумя слоями с усредненными параметрами слоев. Последнее утверждение совпадает с результатами работы [15], где на конкретных примерах показано, что большинство физических свойств снежного покрова прямо зависит от его слоистой структуры и наличия отчетливых горизонтов в толще снега. Использование усредненных по всей толще характеристик снега, как отмечается в [15], может привести к неверной интерпретации данных дистанционного зондирования. В этом смысле, более строгими являются электродинамические модели сухого снежного покрова, предложенные в работах [9, 13, 14], учитывающие структурные и стратиграфические особенности снежного покрова. В работах [9, 14] исследовалось влияние распределения зерен льда по размеру на излучательные характеристики снежного покрова. Анализ результатов данных работ показывает, что яркостная температура снега T_y сильно зависит от его статистических характеристик — среднего размера и дисперсии размера ледяных зерен. Авторы [9, 14] отмечают, что излучательная способность снежного покрова, рассчитанная с учетом распределения зерен по размеру, существенно отличается от случая, когда такое распределение не учитывалось. Значительный рост радиояркостной температуры в коротковолновой части СВЧ диапазона, связанный с распределением частиц по размеру, по мнению авторов [9, 14] отражает тот факт, что по мере роста дисперсии вклад в поглощение за счет мелких частиц возрастает, в то время как влияние крупных зерен не приводит к заметному эффекту, поскольку их альbedo стремится к своему предельному значению.

Главной задачей настоящей работы являлось построение структурно-зависимой модели излучательной способности снежного покрова на почве. Восходящее и нисходящее излучение внутри снежного слоя предполагалось диффузным и использовалась двухпотоковая теория Кубелки и Мунка. Снежный покров в случае сухого снега представлялся средой, состоящей из льда и воздуха, в случае влажного снега — из льда, воздуха и воды. Предполагалось, что включения льда и воды имеют сферическую форму с логарифмически нормальным распределением по размеру. Для описания влажного снега мы использовали две модели: модель I — воздушная среда, содержащая ледяные зерна и капли воды, и модель II — воздушная среда, содержащая ледяные зерна, покрытые пленкой воды, и капли воды. Каждому случаю пространственного распределения водной компоненты соответствуют свои эффективные коэффициенты поглощения и рассеяния электромагнитного излучения.

Расчеты радиояркой температуры снежного покрова на почве проведены с использованием данных гляциологических измерений его стратиграфии и структуры. Результаты расчетов сопоставлены с результатами измерений $T_{\text{я}}$ снежного покрова, которые проводились при одновременном контроле физических параметров снега.

1. МОДЕЛЬ

Микроволновое излучение снежного покрова, лежащего на поверхности земли, определяется в основном вкладом двух компонент: излучения слоя снега и излучения подстилающей поверхности. Оба вклада подвержены влиянию границ раздела воздух—снег и снег—земля, а также поглощения и рассеяния излучения в снежной толще. Преобладание эффектов рассеяния или поглощения электромагнитного излучения в снежном покрове определяется длиной волны излучения и размерами ледяных кристаллов, образующих снежный покров. Экспериментальные исследования и расчеты по теории Ми показывают, что эффекты рассеяния излучения преобладают над потерями на частотах выше 10 ГГц при размерах зерен льда 1 мм [16, 17]. В этой ситуации, когда рассеяние доминирует над поглощением, естественно описывать формирование и распространение излучения в среде с помощью уравнения переноса излучения (см., например, [18]).

В двухпоточковом приближении теории переноса излучения [18]

$$\begin{aligned}dT_+/d\tau &= -(K + S)T_+ + ST_- + KT_0, \\dT_-/d\tau &= (K + S)T_- - ST_+ - KT_0, \\K &= 2(1 - \omega_0) = 2\sigma_a/\sigma_t, \quad S = (\omega_0 - \omega_1/4),\end{aligned}\tag{1}$$

где T_- и T_+ — радиояркие температуры, соответствующие потокам энергии, распространяющимся соответственно вверх и вниз, T_0 — физическая температура снежного покрова, $d\tau = n\sigma_t dx$, τ — оптическая толщина, n — число рассеивающих частиц в единице объема, x — вертикальная координата, K и S — безразмерные эффективные коэффициенты поглощения и рассеяния, σ_a и σ_t — сечения поглощения и экстинкции, ω_0 — альbedo рассеивателя, ω_1 — первый коэффициент разложения фазовой функции рассеивателя в двойной ряд по полиномам Лежандра. Сечения поглощения и экстинкции отдельного рассеивателя вычисляются по теории Ми. Считая, что среда плоскопараллельна, запишем граничные условия для слоя снега на поверхности земли:

$$T_+(0) = (1 - R_1)T_{\text{н}} + T_-(0)R_1, \quad T_-(\tau_0) = R_2T_+(\tau_0) + (1 - R_2)T_{\text{п}},$$

где R_1 и R_2 — коэффициенты отражения соответственно на границах воздух—снег и снег—земля, $T_{\text{н}}$ — яркостная температура неба, $T_{\text{п}}$ — яркостная температура почвы, $\tau_0 = n\sigma_t x_0$ — оптическая толщина снежного слоя, x_0 — геометрическая толщина снежного слоя. Распределение размера r ледяных зерен учитывается при определении переменных K , S , σ_t :

$$K = \int_0^{\infty} K(r)\phi(r) dr, \quad S = \int_0^{\infty} S(r)\phi(r) dr, \quad \sigma_t = \int_0^{\infty} \sigma_t(r)\phi(r) dr,$$

где $\phi(r)$ — плотность вероятности логарифмически нормального распределения.

Появление влаги в снежном покрове во время таяния приводит к значительному изменению его физических и, следовательно, радиофизических характеристик. Для правильного описания взаимодействия электромагнитного излучения с влажной снежной средой необходимо знать пространственное распределение водной компоненты. Однако этот вопрос в настоящее время изучен недостаточно хорошо. Известно, что вода собирается в снежных порах и образует мениски между ледяными зернами [19].

h_0 — высота места наблюдения над уровнем моря, $\gamma(h)$ складывается из поглощения в кислороде и водяном паре [23, 24]. Для произвольного угла зондирования зависимость интегрального поглощения ξ от зенитного угла θ в плоскостом приближении аппроксимируется соотношением [25]

$$\xi = \begin{cases} \xi \sec \theta, & 0 \leq \theta < 0,4\pi, \\ \xi \sec(0,4\pi), & 0,4\pi \leq \theta < \pi/2. \end{cases}$$

Радиояркость температуры почвы определялась из следующего выражения:

$$T_{\text{п}} = (1 - R)T_{\text{ф}},$$

где R — коэффициент отражения по мощности на границе снег–земля, $T_{\text{ф}}$ — физическая температура почвы.

2. СРАВНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для решения вопроса о применимости предложенных моделей и изучения связи физических характеристик снежного покрова с его радиояркостью температурой нами был проведен комплексный наземный эксперимент, в ходе которого одновременно определялись физические и радиофизические характеристики снежного покрова. Радиометры, работающие на частотах 3,95 ГГц, 19,5 ГГц, 37,5 ГГц и 150 ГГц, использовались для измерения радиояркости температуры. Детальное исследование структуры снежного покрова, его влажности и размера ледяных зерен проводилось стандартными гляциологическими методами.

Используя данные измерений физических параметров и микроструктуры снежного покрова, мы провели расчет радиояркости температуры сухого и влажного снега по нашей модели излучательной способности и сопоставили результаты расчетов с данными радиометрических измерений. Для сравнительного анализа были выбраны дни, когда проводились послойные измерения как плотности и температуры, так и параметров структуры снежного покрова. Физические параметры снега определялись как функция высоты от уровня почвы в середине каждого слоя снежной толщи. Для каждого слоя снега определялась гистограмма распределения размера зерен льда. При расчетах эти данные аппроксимировались логарифмически нормальным распределением со статистическими характеристиками (средний размер и дисперсия размера зерен льда), полученными из гистограмм.

2.1. Расчет радиояркости температуры сухого снежного покрова

Радиояркость температуру сухого снежного покрова, лежащего на почве, мы рассчитывали путем решения системы $2n$ линейных уравнений (3) для структуры, содержащей n слоев. Для сухой снежной среды эффективные коэффициенты поглощения K_n и рассеяния S_n выражаются через сечения поглощения, экстинкции и альбедо ледяных зерен соответствующего слоя.

Нами проведено сравнение экспериментальных и рассчитанных по двухпоточковой модели радиояркости температур сухого снежного покрова за сезоны измерений 1987–1988 гг. и 1989 г. Характеристики снежного покрова, а также температура воздуха $t_{\text{возд}}$ для выбранных 12-ти дней измерений представлены в табл. 1. Для каждого слоя толщиной h_n даны его физическая температура T_0 , плотность ρ , средний радиус ледяных зерен r и дисперсия размера зерен σ . Расположение строк в каждой ячейке соответствует расположению слоев снежного покрова.

На рис. 1 представлены рассчитанные по нашей модели (*) и экспериментальные (◇) значения радиояркости температуры снежного покрова для частоты $f = 19,5$ ГГц. Пунктирные линии соответствуют 5-ти процентному отклонению от экспериментальных значений. Как видно из рис. 1, различия

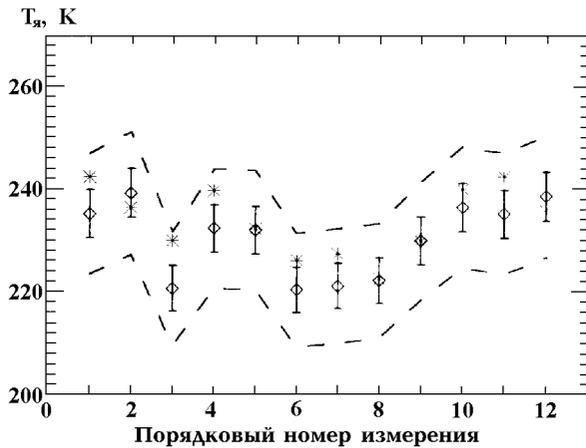


Рис. 1. Рассчитанные по модели и экспериментальные значения радиояростной температуры сухого снежного покрова.

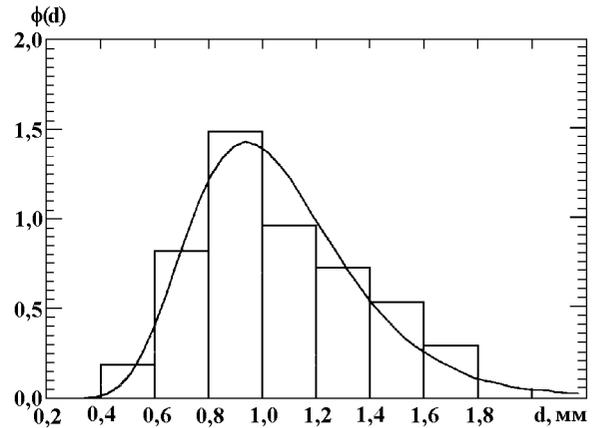


Рис. 2. Гистограмма и логарифмически нормальная функция распределения диаметра d ледяных зерен в одном из слоев снежной толщи.

между экспериментальными и модельными значениями радиояростной температуры не превышают 5%.

2.2. Расчет радиояростной температуры влажного снежного покрова

Радиояростная температура влажного снега определялась также путем решения системы уравнений (3) при условии, что эффективные коэффициенты поглощения K_n и рассеяния S_n определяются выражениями (2), которые соответствуют либо среде, состоящей из ледяных зерен и водяных капель, либо среде, состоящей из ледяных зерен, покрытых оболочкой воды, и водяных капель. Входными параметрами моделей, как и в случае сухого снега, являлись данные гляциологических измерений физических характеристик и микроструктуры слоев снежного покрова. Реальная гистограмма распределения размера ледяных зерен аппроксимировалась логарифмически нормальным распределением. В качестве примера на рис. 2 приведены гистограмма распределения размера ледяных зерен одного из слоев толщи снежного покрова, а также логарифмически нормальная функция с параметрами, полученными из гистограммы (средний диаметр ледяных зерен $d_{cp} = 1,06$ мм, дисперсия размеров ледяных зерен $\sigma = 29,11\%$).

Для сравнения экспериментальных данных с результатами расчетов мы выбрали те из измеренных нами временных зависимостей радиояростной температуры снежного покрова на почве, которые были получены при одновременном контроле за состоянием снежной толщи в различные моменты времени выбранного ряда наблюдений. Один из таких рядов наблюдений, проведенный на частотах 3,95 ГГц (\times), 19,5 ГГц (\triangle), 37,5 ГГц (\square) и 150 ГГц (\diamond) с 17:00 21.03.89 до 8:00 22.03.89, приведен на рис. 3. За время наблюдений температура воздуха понизилась от 0° до $-5,5^\circ$ С (рис. 4), что привело к вымораживанию верхних слоев снежного покрова и значительному падению их влажности. За изменением влажности верхних слоев снега в период проведения наблюдений можно проследить по табл. 2, где приведены физические параметры снежного покрова, определявшиеся в 18:00, 21:00 21.03.89 и в 7:00 22.03.89. В табл. 1 влажность соответствует объемной влажности снежного слоя, ρ — плотность снега, r — средний радиус ледяных зерен. Во время проведения данного ряда измерений температура почвы равнялась 0° С. Уменьшение влажности верхних слоев снежной толщи вызвало падение радиояростной температуры на частотах 19,5 ГГц, 37,5 ГГц и 150 ГГц и практически не отразилось на T_y на частоте 3,95 ГГц (рис. 3). Отметим, что радиометрическая чувствительность к изменению влажности снежного

Таблица 1

Характеристики сухого снежного покрова

№ п/п	Дата $t_{\text{возд}}, ^\circ\text{C}$	h_n , см	T_0 , К	ρ , г/см ³	r , см	σ , %
1	03.12.87 $t_{\text{возд}} = -0,6$	14	268	0,299	0,036	34
		10	267	0,370	0,080	27
		27	269	0,320	0,038	33
2	07.01.88 $t_{\text{возд}} = -5,3$	43	266	0,144	0,016	32
		40	268	0,170	0,019	28
		25	270	0,350	0,040	30
3	17.01.88 $t_{\text{возд}} = -9,0$	45	264	0,210	0,019	30
		35	269	0,283	0,027	26
		24	271	0,320	0,044	28
		32	272	0,370	0,045	28
4	26.01.88 $t_{\text{возд}} = -11,2$	31	271	0,081	0,005	37
		49	269	0,255	0,016	31
		50	267	0,342	0,022	29
		23	271	0,328	0,030	27
		22	272	0,393	0,047	31
5	17.02.88 $t_{\text{возд}} = -10,8$	26	264	0,200	0,007	27
		16	267	0,414	0,017	35
		32	269	0,310	0,039	34
		40	270	0,340	0,031	30
		42	272	0,397	0,056	29
6	24.02.88 $t_{\text{возд}} = -8,0$	66	270	0,144	0,007	32
		18	270	0,227	0,009	29
		12	270	0,331	0,022	24
		70	271	0,381	0,036	30
		42	272	0,376	0,051	31
7	03.03.88 $t_{\text{возд}} = -8,0$	40	270	0,087	0,002	35
		35	270	0,191	0,016	36
		39	271	0,327	0,021	32
		63	271	0,374	0,039	36
		43	272	0,356	0,075	35
8	16.03.88 $t_{\text{возд}} = -5,7$	23	272	0,220	0,008	33
		42	270	0,260	0,016	30
		65	270	0,370	0,029	27
		40	271	0,430	0,041	28
		35	272	0,360	0,072	33
9	10.01.89 $t_{\text{возд}} = -8,8$	9	262	0,050	0,005	35
		10	265	0,280	0,008	33
		55	266	0,300	0,023	29
		64	269	0,400	0,034	29
10	24.01.89 $t_{\text{возд}} = -9,6$	50	264	0,330	0,022	34
		50	269	0,436	0,031	33
		20	271	0,500	0,039	30
11	29.01.89 $t_{\text{возд}} = -11,2$	50	264	0,337	0,020	32
		70	270	0,466	0,043	30
12	14.02.89 $t_{\text{возд}} = -13,8$	53	261	0,290	0,015	27
		51	265	0,400	0,042	30
		16	269	0,300	0,062	33

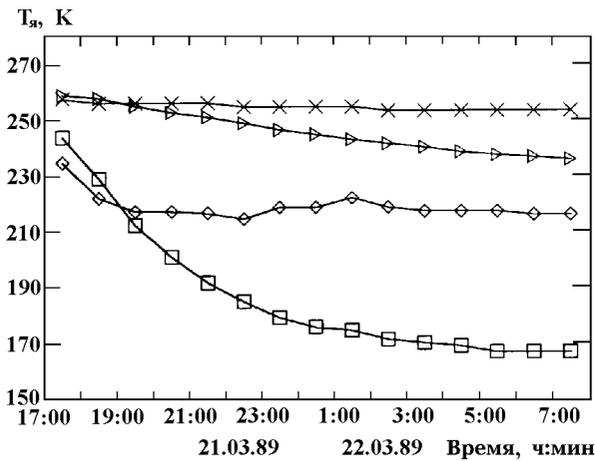


Рис. 3. Экспериментальные зависимости радиояростной температуры влажного снежного покрова от времени при уменьшении влажности верхних слоев снега.

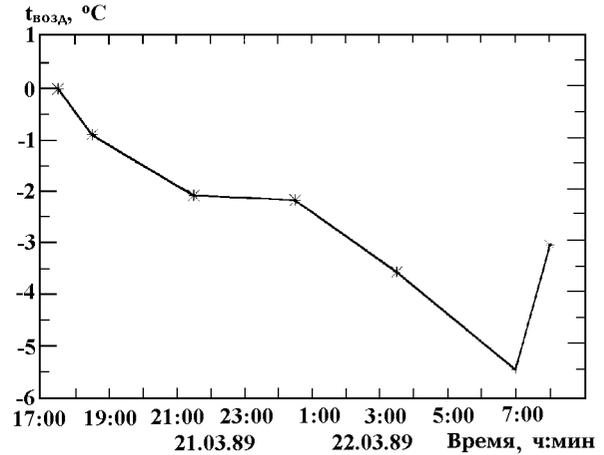


Рис. 4. Изменение температуры воздуха в период проведения эксперимента.

покрова значительно выше на частоте $f = 37,5$ ГГц, чем на частотах 3,95 ГГц, 19,5 ГГц и 150 ГГц.

На рис. 5 приведены частотные зависимости $T_{я}$, полученные экспериментально (\diamond) и рассчитанные по моделям I и II в моменты проведения измерений (рис. 5а — 18:00 21.03.89, рис. 5б — 21:00 21.03.89, рис. 5в — 7:00 22.03.89) с учетом и без учета отражения излучения на границах слоев. Сравнение приведенных зависимостей показывает хорошее согласие между экспериментальными и теоретическими значениями радиояростных температур на всех частотах измерений. Для того, чтобы показать вклад излучения атмосферы в яркостную температуру снежного покрова, на рис. 6 представлена рассчитанная зависимость $T_{н}$ в момент времени 7:00 22.03.89.

Как видно из графиков, зависимости, полученные по моделям I и II, практически совпадают между собой на частотах выше 7 ГГц и существенно отличаются на более низких частотах. Эти различия, на наш взгляд, связаны с особенностями структурного представления снежной среды в предложенных моделях. Поскольку диэлектрическая проницаемость воды гораздо выше диэлектрической проницаемости льда во всем рассматриваемом интервале частот, то ее объемное содержание и пространственное распределение в снегу главным образом и определяет величину радиояростной температуры снежного покрова. На высоких частотах глубина формирования излучения $h_{н}$ составляет доли сантиметра (см. рис. 7), и пространственное распределение влаги (капли, оболочки ледяных зерен и их размеры) не дает существенного вклада в $T_{я}$ снежного покрова, а все определяется только объемным содержанием воды в снегу. Напротив, на частотах ниже 7 ГГц глубина формирования излучения составляет единицы и десятки сантиметров (см. рис. 7), и здесь значительный вклад в радиояростную температуру снежного покрова дает пространственное распределение воды в снегу. Как видно из графиков (см. рис. 5), зависимость, полученная по модели II, где снежная среда представляется в виде частиц льда с водяной оболочкой и капель воды, лежит значительно выше зависимости, полученной по модели I, в которой снег представляется в виде частиц льда и капель воды, поскольку частицы льда с водяной оболочкой вносят больший вклад в поглощение излучения, чем просто частицы льда. Таким образом, по экспериментальным значениям $T_{я}$, полученным в диапазоне $2 \div 6$ ГГц, с помощью предложенных моделей можно судить не только об объемном содержании влаги в снежном покрове, но и делать выводы о ее распределении в виде капель или оболочек зерен льда. Несовпадение $T_{я}$ на частоте $f = 37,5$ ГГц в 21:00 21.03.89 связано, на наш взгляд, с погрешностями в определении параметров

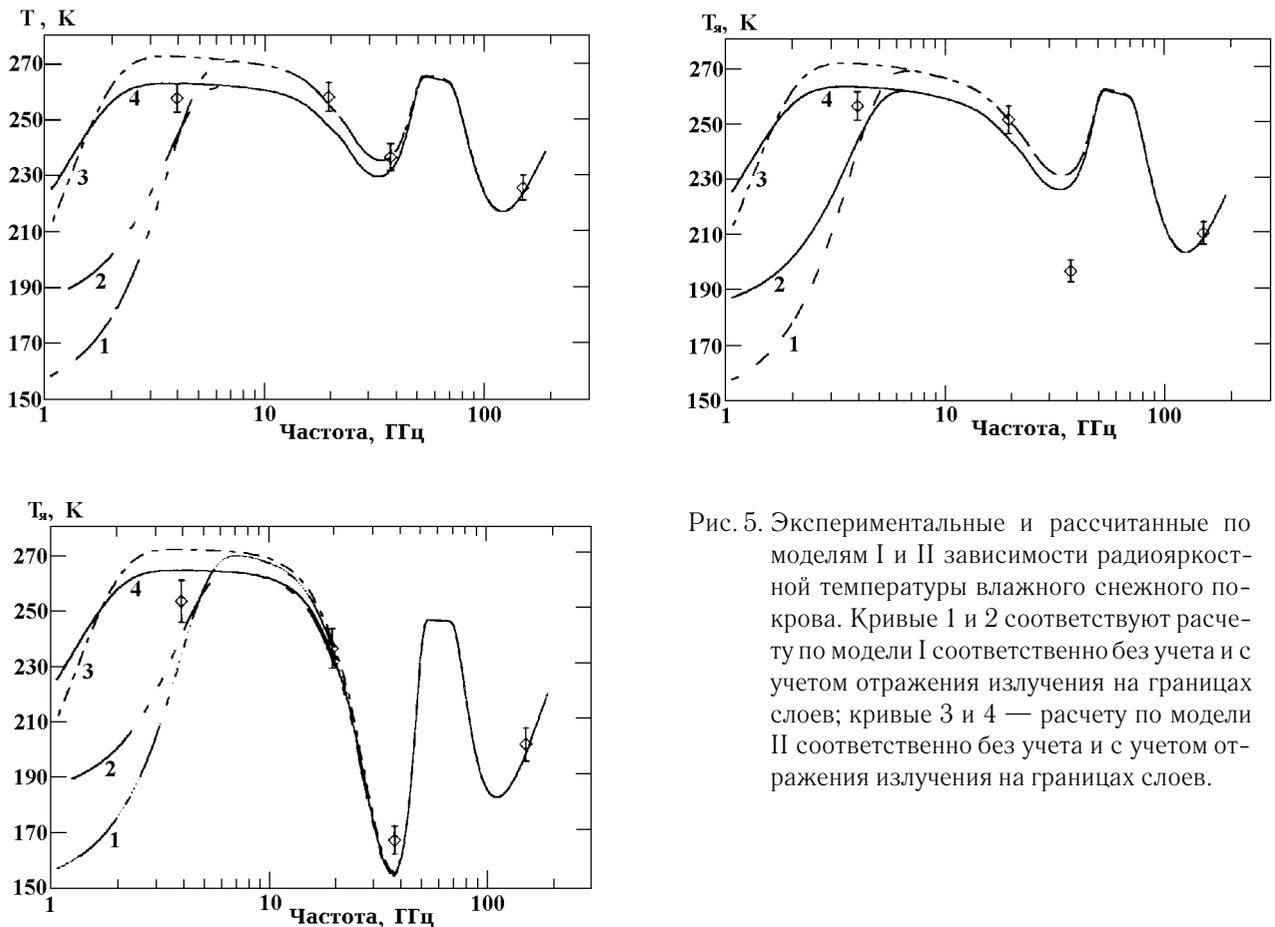


Рис. 5. Экспериментальные и рассчитанные по моделям I и II зависимости радиояркостной температуры влажного снежного покрова. Кривые 1 и 2 соответствуют расчету по модели I соответственно без учета и с учетом отражения излучения на границах слоев; кривые 3 и 4 — расчету по модели II соответственно без учета и с учетом отражения излучения на границах слоев.

снежного покрова на данный момент времени, что при быстром падении радиояркостной температуры (рис. 3) в момент вымораживания верхних слоев снега привело к несовпадению экспериментального и рассчитанного значения $T_{я}$. Пик на теоретической зависимости в области 60 ГГц обязан линии поглощения кислорода.

На рис. 8 представлены экспериментальные значения (\diamond) и частотные зависимости $T_{я}$, рассчитанные по модели II в моменты проведения измерений (рис. 8а — в 18:00 21.03.89, рис. 8б — в 7:00 22.03.89), показанные пунктирной линией. Здесь же приведены теоретические зависимости $T_{я}$, рассчитанные по модели II при условии, что слоистая структура снежного покрова игнорируется и снежная толщина представляется одним слоем со средними характеристиками (сплошная линия):

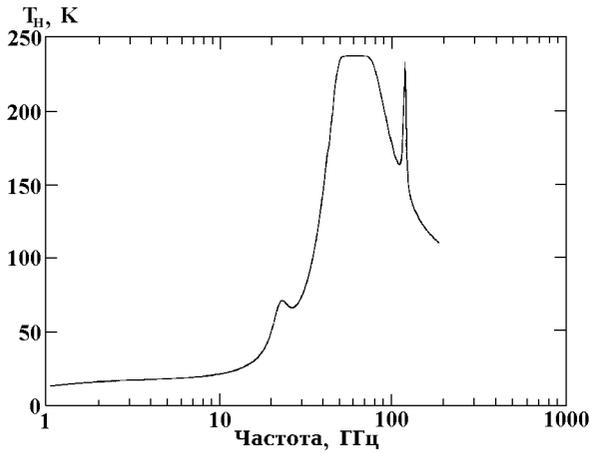


Рис. 6. Рассчитанная зависимость радиояростной температуры неба.

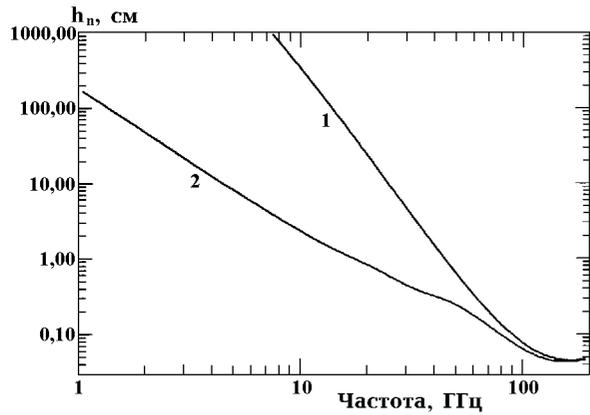


Рис. 7. Зависимость глубины формирования излучения от частоты для сухого (кривая 1) и влажного (кривая 2) снежного покрова.

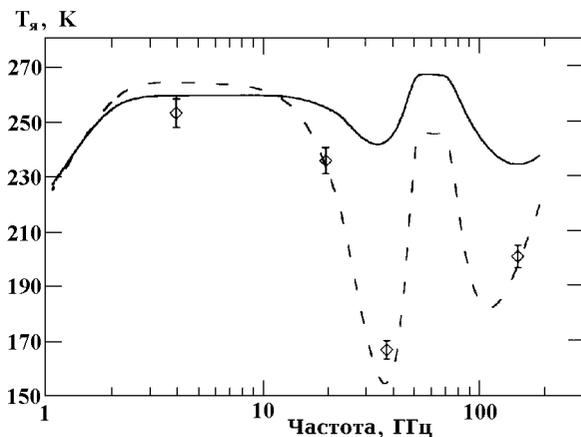
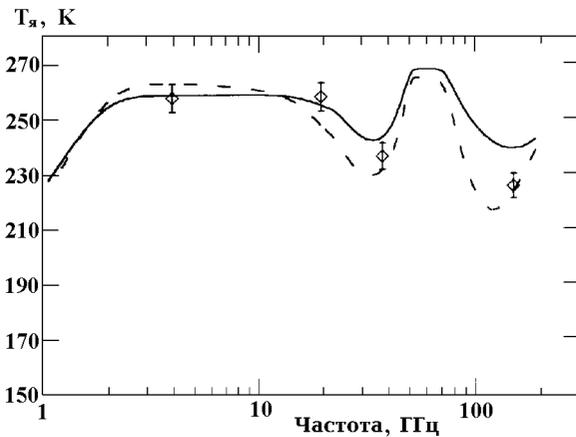


Рис. 8. Экспериментальные и рассчитанные по модели II зависимости радиояростной температуры влажного снежного покрова с усредненными и не усредненными структурными параметрами снега.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i h_i}{\sum_{i=1}^n h_i},$$

где y — усредняемый параметр, n — число слоев, h_i — толщина i -го слоя. Приведенные на рис. 8 два момента измерений выбраны неслучайно: в 18:00 21.03.89 влажность верхнего слоя снега составляла 5,3%, а в 7:00 22.03.89 из-за падения температуры воздуха произошло вымораживание верхнего слоя и его влажность равнялась нулю (см. табл. 2). В случае отличной от нуля влажности верхнего слоя замена реальной структуры снежного покрова одним слоем со средними физическими параметрами не приводит к существенному изменению $T_{\text{я}}$. Напротив, при вымораживании верхнего слоя снега глубина формирования излучения превышает толщину слоя снега почти во всем диапазоне частот и различие $T_{\text{я}}$ для слоистой и усредненной структуры значительно.

Т а б л и ц а 2

Физические параметры влажного снега 21–22.03.

Номер слоя	Толщина слоя, см	Влажность, %			Температура, °С			ρ , г/см ³	r , см
		18:00	21:00	7:00	18:00	21:00	7:00		
1	13	5,3	3,9	0,0	0,0	-0,5	-3,5	0,364	0,13
2	40	7,1	6,4	6,1	0,0	-0,3	-1,0	0,430	0,05
3	30	6,7	6,7	6,7	0,0	0,0	0,0	0,430	0,04
4	30	2,8	2,8	2,8	0,0	0,0	0,0	0,430	0,04

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчеты показали, что совпадение экспериментальных и теоретических зависимостей $T_{\text{я}}$ сухого и влажного снега от частоты достигается при учете микроструктуры и слоистости снежного покрова. Радиояркая температура сухого снежного покрова, определенная по двухпоточковой модели теории переноса излучения, совпадает с точностью до 5% с экспериментальными данными. Анализ результатов расчетов радиояркой температуры влажного снежного покрова показывает, что согласие с экспериментальными результатами определения $T_{\text{я}}$ при всех значениях влажности снега, наблюдаемых в проведенных экспериментах, достигается при использовании как модели I, так и модели II вплоть до частоты 7 ГГц. На более низких частотах зависимости, полученные с помощью моделей I и II, существенно отличаются друг от друга, и правильность той или иной модели необходимо проверить экспериментально.

Таким образом, в двухпоточковом приближении теории переноса излучения [18] созданы модели излучательной способности влажного снежного покрова. При учете влияния пространственного распределения водной компоненты модели позволяют количественно описать экспериментальные зависимости радиояркой температуры снега от его влажности, структуры и стратиграфии до частот $f = 150$ ГГц и согласовать результаты контактных гляциологических измерений параметров реального снега с результатами радиометрических измерений частотного спектра собственного излучения.

Решение части прямой задачи дистанционного зондирования снежного покрова на основе предложенных моделей позволяет приступить к созданию обоснованных методик решения ряда обратных задач дистанционного зондирования снежного покрова, например определения влагозапаса и влажности.

Авторы благодарят В. Г. Мировского за организацию эксперимента, А. Ш. Шамбу за разработку и конструирование радиометров, В. В. Дмитриева за обработку экспериментальных данных, сотрудников Тбилисского метеорологического института за предоставленные данные по стратификации снежного покрова, а также искренне признательны Н. Ю. Комаровой за помощь в оформлении статьи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 98–05–64612).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. Н., Гусева Е. В., Ушакова Л. А. и др. // Материалы гляциологических исследований. 1990. Вып. 68. С. 26.
2. Masahito S., Tadashi S. M. // Proc. NIPR Symp. Polar Meteorol. and Glaciol. 1991. № 4. P. 132.
3. Mätzler C., Hühppi R. // Adv. Space Res. 1989. V. 9. № 1. P. 253.
4. Boyarskii D. A., Dmitriev V. V., Etkin V. S. et al. // J. of Electromagn. Waves and Appl. 1993. V. 7. № 7. P. 959.

5. Боярский Д. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1997. Т. 40. № 8. С. 1050.
6. Ishimaru A. // Proc. IEEE. 1991. V. 79. № 10. P. 1359.
7. Stogrin A. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1986. V. GE-24. № 2. P. 220.
8. Tsang L., Kong J. A., Shue J. C., Shing R. // J. Geophys. Res. 1979. V. 84. № B10. P. 5669.
9. Дмитриев В. В., Клиорин Н. И., Мировский В. Г., Эткин В. С. // ДАН. 1987. Т. 297. № 6. С. 1363.
10. Tiuri M. E. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1982. V. 20. № 1. P. 51.
11. Tiuri M. E., Schultz H. — In: NASA Workshop on the Microwave Remote Sens. of Snowpack Prop. Ft. Collins. Colorado, 20–22 May 1980. P. 225.
12. Davis R. E., Dozier J., Chang A. T. C. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 1987. V. 25. № 6. P. 751.
13. West R. D., Winebrenner D. P., Tsang L. — In: Proc. Int. Geoscience and Remote Sensing Symp. (IGARSS'94) — Pasadena, California, USA, 1994. V. 3. P. 1297.
14. Дмитриев В. В., Клиорин Н. И., Мировский В. Г., Эткин В. С. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 9. С. 1020.
15. Colbeck S. C. // Rev. Geophys. 1991. V. 21. № 1. P. 81.
16. Hallikainen M. T. — In: Int. Geosci. Remote Sensing Symp. (IGARSS'85) — N.Y, 1985. V. 2. P. 848.
17. Ulaby F. T., Moore R. K., Fung A. K. Microwave Remote Sensing: Active and Passive. V. 1 and 3. — Dedham. MA: Artech House, 1985.
18. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981. — 597 с.
19. Colbeck S. C. // Seasonal Snowcovers: Physics, Chemistry, Hydrology. NATO ASI Series, 1987. P. 1.
20. Boyarskii D. A., Tikhonov V. V., Kleeorin N. I., Mirovskii V. G. // J. of Electromagnetic Waves and Appl. 1994. V. 8. № 11. P. 1395.
21. Боярский Д. А., Мировский В. Г., Тихонов В. В. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 10. С. 1479.
22. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. — М.: Мир, 1986. — 664 с.
23. Цейтлин Н. М. Применение методов радиоастрономии в антенной технике. — М.: Сов.радио, 1966. — 213 с.
24. Жевакин С. А., Троицкий В. С. // Радиотехника и электроника. 1959. Т. 4. № 1. С. 21.
25. Шутко А. М. СВЧ радиометрия водной поверхности и почвогрунтов. — М.: Наука, 1986. — 189 с.

Институт космических
исследований РАН,
г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
13 июля 1998 г.

MODELLING VHF EMISSIVITY OF SNOW COVER WITH ACCOUNT OF ITS STRATIGRAPHY*D. A. Boyarskii and V. V. Tikhonov*

In this paper, we discuss a model emissivity of snow cover taking into account its structure. We assume that upward and downward radiation inside a snow layer are diffuse and apply two-flux theory by Kubelka and Munk. Snow cover is modelled by a medium comprising discrete scatterers. In the case of dry snow, scatterers are ice grains. Wet snow is modelled by a mixture of ice grains (with or without water envelopes) and water drops. We assume that scatterers are spherical particles that have lognormal distribution over size. Brightness temperature of radio emission from snow cover on the soil is calculated using data of glaciological measurements of physical parameters and microstructure of snow. Results of calculations are compared to measurements of brightness temperature of radio emission from various types of snow covers.

УДК 525.73;520.16;551.521.32:629.78

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИМБОВОГО ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ В НЕКОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ

К. П. Гайкович, М. Б. Черняева

В работе рассмотрены обратные задачи лимбовой рефрактометрии и СВЧ зондирования. Обычно задачи этого типа сводятся к интегральным уравнениям типа Абеля и решаются с помощью известного обратного преобразования. Вместе с тем, существуют такие варианты постановки задачи, для которых невозможно найти решение указанным методом. В частности, это случаи, когда измеряемая величина известна лишь на части интервала прицельных высот, на котором ищется решение. Для рефрактометрии такой случай неизбежно возникает, когда имеет место волноводная стратификация атмосферы. Другими примерами некорректной постановки задачи являются обратная задача лимбового СВЧ зондирования с учетом конечной ширины диаграммы направленности или задача восстановления профиля газовой компоненты в фиксированном направлении по спектру теплового излучения. В работе предложены методы решения такого рода задач, основанные на принципе обобщенной невязки Тихонова, и представлены результаты численного моделирования восстановления высотного профиля показателя преломления в обратной задаче рефрактометрии и профиля озона в обратных задачах СВЧ зондирования.

ВВЕДЕНИЕ

Лимбовые измерения — измерения на просвет одного из параметров излучения в зависимости от высоты перигея луча над поверхностью планеты. Если измеряется рефракция электромагнитных волн, то соответствующая обратная задача состоит в решении интегрального уравнения типа Абеля с помощью его хорошо известного обратного преобразования. Высотный профиль индекса рефракции определяется как интеграл по интервалу прицельных высот от измеренной зависимости рефракции. Рефрактометрические методы дистанционного зондирования атмосферы находят все более широкое применение по мере развития космических исследований и их приложений к решению проблем метеорологии, связи и навигации. Восстановление высотного профиля показателя преломления по вкладу атмосферы в доплеровский сдвиг сигнала, излучаемого с космического аппарата, широко использовалось при радиопросвечивании атмосфер планет Солнечной системы [1–9] и Земли [10–19]. В ситуации, когда как источник, так и приемник расположены вне исследуемой атмосферы, задача решается путем применения обратного преобразования Абеля к наблюдаемой зависимости измеряемой величины от прицельного параметра. К аналогичному способу решения сводится задача и в случае внутриатмосферных лимбовых измерений рефракции для восстановления профиля показателя преломления на высотах, меньших уровня наблюдателя [19–22].

Интерес представляет решение обратной задачи лимбовой рефрактометрии в предположении, что высотный интервал восстановления шире, чем интервал высот лучевых перигеев, для которых известна рефракция. Такая постановка приводит уже к некорректной обратной задаче. Наиболее интересный ее вариант — это когда рефракционная зависимость может быть измерена только до некоторого определенного уровня, а высотный профиль индекса рефракции должен быть восстановлен не только в этом слое, но также в высотной области над этим слоем. Возможна постановка задачи для случаев, когда зависимость рефракции известна для двух или более высотных интервалов. Здесь уже точное решение уравнения Абеля неприменимо и мы имеем некорректную задачу для интегрального уравнения 1-го

рода. Здесь следует отметить, что к некорректным задачам относится также обратная задача астрономической рефракции (задача восстановления профиля индекса рефракции по данным наземных измерений рефракции в зависимости от угла места источника), которая сводится к решению уравнения Фредгольма 1-го рода [23–29].

К аналогичным некорректным постановкам приводит и задача лимбового СВЧ зондирования, т. е. задача восстановления профилей концентрации газовых составляющих атмосферы по измерениям теплового излучения в их спектральных линиях на просвет (или по измерениям излучения другого спутника, проходящего через атмосферу) в зависимости от высоты перигея луча. Методы спутниковых лимбовых измерений развиваются с целью решения проблемы глобального мониторинга атмосферы. К настоящему времени уже выполнены такие измерения ряда малых газовых составляющих (озон, CO , HNO_3) [30–34] и получены первые результаты восстановления высотного профиля озона. При этом для восстановления профиля использовался статистический подход [35]. Вместе с тем исследовались возможности решения задачи лимбового СВЧ зондирования без привлечения статистической информации. Такие исследования начались применительно к слабой линии водяного пара на длине волны 1,35 см [35], где благодаря отсутствию экспоненциального фактора ослабления в ядре интегрального уравнения оказалось возможным свести задачу к интегральному уравнению типа Абеля и получить решение в виде его обратного преобразования так же, как в обратной задаче лимбовой рефрактометрии.

Следует отметить, что, строго говоря, полученное решение содержало производную от яркостной температуры по прицельному расстоянию, а вычисление производной по экспериментальным данным, как известно, является слабо некорректной задачей [36]. В [35] эта проблема решалась путем сглаживания данных полиномами, степень которых последовательно возрастала до значения, при котором среднеквадратичное отклонение данных от полиномиальной кривой достигало уровня погрешности измерений. В [37] для решения задачи в условиях значительного поглощения при измерениях в сильных линиях, когда соответствующее интегральное уравнение становится нелинейным, был разработан итерационный алгоритм, в котором на каждом шаге численно решалось линеаризованное уравнение типа Вольтерра 1-го рода, в ядро которого на первом шаге подставлялся средний профиль газовой компоненты. Слабая некорректность уравнения Вольтерра также преодолевалась путем сглаживания данных полиномами.

Для задачи лимбового СВЧ зондирования в более общей постановке, в частности при учете конечной ширины луча диаграммы направленности, такой достаточно простой подход становится невозможным. В этом случае соответствующее линеаризованное уравнение представляет собой уже интегральное уравнение с постоянными пределами интегрирования типа Фредгольма 1-го рода, которое является сильно некорректным. Постановки задачи, также приводящие к сильной некорректности, включают случаи, когда зависимость измеряемого излучения от высоты перигея луча известна лишь на части (или частях) интервала высот восстановления и (или) когда шаг измерений по высоте много больше шага высотной дискретизации восстанавливаемого профиля.

Поскольку время, требуемое на процедуру сканирования, может существенно ограничивать точность измерений, интерес представляет задача восстановления профиля концентрации по спектру теплового излучения, измеряемому на фиксированном прицельном расстоянии. В этом случае сохраняется преимущество лимбового зондирования, связанное с отсутствием влияния излучения подстилающей поверхности, но задача также становится сильно некорректной, близкой к задаче восстановления профиля по наземным измерениям спектра теплового излучения в линии озона, рассмотренной в [38]. В [38] нелинейная обратная задача была успешно решена итерационным методом, аналогичным [37], но на каждом шаге итерационного процесса соответствующее линеаризованное уравнение, представлявшее собой уравнение Фредгольма 1-го рода, решалось методом обобщенной невязки Тихонова [36].

1. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЛИМБОВОЙ РЕФРАКТОМЕТРИИ

Для лимбовых измерений обратная задача рефракции сводится к следующему интегральному уравнению:

$$10^{-6} \int_{r_h}^{r_{\max}} \frac{dN(r)}{dh} \frac{-2r_h}{\sqrt{(nr)^2 - (n_h r_h)^2}} dr = \varepsilon(r_h), \quad (1)$$

где $r_0 \leq r_h \leq r_{\max}$, $r = r_s + h$, r_s — радиус Земли, r_h — прицельное геоцентрическое расстояние луча, r_{\max} — верхняя граница атмосферы, h — высота над поверхностью земли, $N = 10^6(n - 1)$ — индекс рефракции, n — показатель преломления, $n_h = n(r_h)$, $\varepsilon(r_h)$ — величина рефракции. В случае отсутствия волновода нелинейное уравнение (1) может быть выражено в линейной форме:

$$10^{-6} \int_{p_h}^{p_{\max}} \frac{dN(p)}{dp} \frac{-2p_h}{\sqrt{p^2 - p_h^2}} dp = \varepsilon(p_h), \quad (2)$$

где $p_0 \leq p_h \leq p_{\max}$, $p_h = n_h r_h$, $p_{\max} = r_{\max}$, $p = nr$, $p_0 = n_0 r_0$, $n_0 = n(r_0)$. В случае корректной постановки задачи, когда зависимость рефракции известна на всем интервале восстановления, уравнение (2) имеет точное решение

$$N(p) = 10^6 \int_p^{p_{\max}} \varepsilon(p_h) \frac{dp_h}{\pi \sqrt{p_h^2 - p^2}}, \quad (3)$$

где $p_0 \leq p_h \leq p_{\max}$.

Используя соотношение $h = \frac{p}{1 + 10^{-6}N(p)} - r_0$, профиль $N(p)$ пересчитывается в высотный профиль $N(h)$. Из уравнения (1), которое зависит от производной индекса рефракции легко видеть, что искомый профиль определяется с точностью до произвольного постоянного сдвига, т. е., строго говоря, даже в исходной постановке задача лимбовой рефрактометрии может рассматриваться как некорректная. При получении точного решения задачи с помощью обратного преобразования Абеля используется дополнительное условие $N(\infty) = 0$, а интервал информативных высот увеличивается путем использования стандартной модели атмосферы (см., например, [19]). В случае численного решения уравнения (1) также необходимо добавить условие на верхней границе интервала восстановления. Лучше всего задать это дополнительное условие в виде равенства индекса рефракции на верхней границе соответствующему значению модельного или среднего профиля, а решение искать как отклонение от такого профиля [13].

Пусть правая часть уравнения (1) известна в области $0 \leq h \leq h_1$, $h_1 \leq h_{\max}$. Решение уравнения (1) в области $h_1 \leq h \leq h_{\max}$ представляет собой типичную некорректную задачу такого же типа, что и обратная задача астрономической рефракции для случая наземных измерений, рассматриваемая в [23–29]. Легко показать, что эта задача сложнее, чем решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Действительно, если профиль индекса рефракции $N(p)$ также считается известным в области $p_0 \leq p \leq p_1$, где $p_1 = r_1 n(r_1)$, задача легко сводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$10^{-6} \int_{p_1}^{p_{\max}} \frac{dN(p)}{dp} \frac{-2p_h}{\sqrt{p^2 - p_h^2}} dp = \varepsilon'(p_h), \quad (4)$$

где

$$\varepsilon'(p_h) = \varepsilon(p_h) - 10^{-6} \int_{p_h}^{p_1} \frac{dN(p)}{dp} \frac{-2p_h}{\sqrt{p^2 - p_h^2}} dp, \quad p_0 \leq p_h \leq p_1.$$

Такая задача неустойчива по отношению к малым погрешностям в определении правой части (4) и требует для своего решения использования той или иной дополнительной (априорной) информации о точном решении. Специфика этой информации и способ ее математического использования определяет конкретный метод регуляризации решения (см. [36, 39]).

Если же решать задачу восстановления индекса рефракции на всем интервале $p_0 \leq p \leq p_{\max}$, то уравнение (2) также будет некорректным уравнением 1-го рода, но его тип не имеет специального названия. Можно ожидать, что для слоя $p_0 \leq p \ll p_1$ задача будет близка по типу к уравнениям Вольтерра 1-го рода с переменным пределом интегрирования, а для интервала $p_1 \ll p < p_{\max}$ — к уравнениям Фредгольма 1-го рода с постоянными пределами интегрирования. В промежуточной области, в окрестности значения $p = p_1$, свойства решения могут иметь некоторый особенный переходный характер.

Чтобы восстановить высотный профиль индекса рефракции в области $0 \leq h \leq h_{\max}$ при известных измерениях рефракции в области $0 \leq h \leq h_1$, уравнение (1) решалось численно методом обобщенной невязки Тихонова [25] в предположении принадлежности точного решения к классу квадратично интегрируемых функций с квадратично интегрируемыми производными. Результаты численного эксперимента дают точность восстановления высотного профиля для разных величин ошибки измерения рефракции.

На рис. 1а представлен пример типичного восстановления (пунктир) из линейного уравнения (2) реального зондового профиля индекса рефракции в радиодиапазоне (сплошная линия) в случае, когда измерения рефракции известны в области $0 \leq h \leq 5$ км, а ошибка измерения угла рефракции $\delta\varepsilon = 5''$. Видно, что специфическая особенность профиля выше верхнего уровня измерений ($h_1 = 5$ км) хорошо восстанавливается.

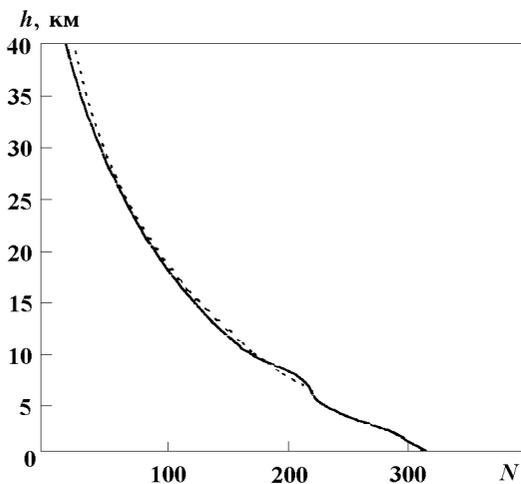


Рис. 1а.

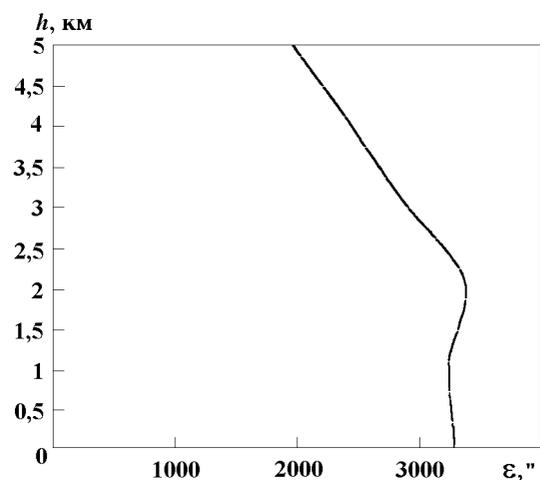


Рис. 1б.

На рис. 1б показана зависимость угла рефракции ε от высоты в интервале измерений, соответствующая исходному профилю на рис. 1а. Наиболее интересен случай, когда выше верхнего уровня измерений рефракции существует область атмосферного волновода. В этой области измерения рефракции отсутствуют или искажаются из-за влияния дифракции на резком градиенте показателя преломления. Более того, линейное уравнение (2) неприменимо при наличии волноводной области. Здесь при решении необходимо использовать итерационную процедуру для нелинейного уравнения (1), подставляя в ядро уравнения стандартный (или средний) профиль показателя преломления на первом шаге итерационного процесса.

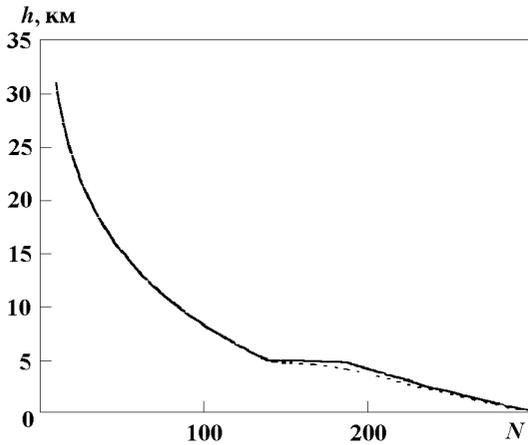


Рис. 2а.

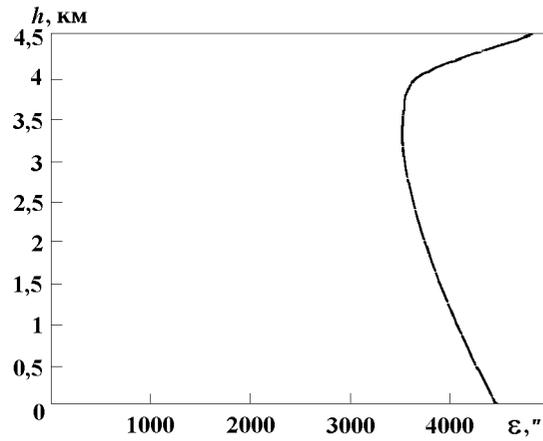


Рис. 2б.

Пример восстановления профиля индекса рефракции из нелинейного уравнения (1) для случая волноводной стратификации показан на рис. 2а. Волноводное распределение индекса рефракции успешно восстанавливается даже при более высоком моделируемом уровне ошибок измерений угла рефракции ($\delta\varepsilon = 15''$) благодаря тому, что в этом случае велико и само изменение рефракции, обусловленное наличием волновода. На рис. 2б можно видеть резкое возрастание рефракции вблизи нижней границы волновода (в приближении геометрической оптики рефракция в этой точке стремится к бесконечности). Верхняя граница измерений определяется таким образом, чтобы можно было использовать для анализа исходное уравнение (1), полученное в геооптическом приближении.

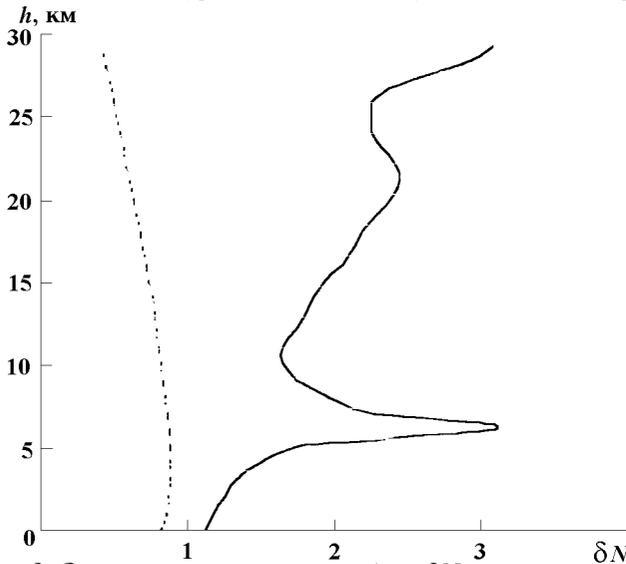


Рис. 3. Среднеквадратичная ошибка δN восстановления профиля индекса рефракции по измерениям рефракции до высоты 5 км (сплошная линия) и по измерениям во всем интервале высот (пунктир)

Наиболее объективным подходом к оценке точности решения обратных задач является численное моделирование по замкнутой схеме с использованием ансамблей зондовых данных. При таком подходе для каждого профиля из ансамбля данных вычисляется рефракция, добавляется нормально распределенная случайная погрешность с заданным стандартным отклонением, решается обратная задача и определяется величина среднеквадратичного отклонения восстановленных профилей от исходных. На рис. 3 представлен результат такого анализа для уровня моделируемой ошибки измерения рефракции $5''$. Решение искалось в виде отклонения от среднего по ансамблю профиля с использованием измерений рефракции в радиодиапазоне до прицельной высоты 5 км. Так же, как в работах [13–

14, 27–29], использовался ансамбль, соответствующий летним условиям европейской территории РФ. На рис. 3 для сравнения представлены также результаты оценки точности восстановления профиля индекса рефракции по измерениям рефракции во всем интервале высот. Можно видеть, что до верхнего уровня использованных измерений (высоты 5 км) точность решения близка к точности решения корректной задачи лимбового зондирования во всем интервале высот. Выше уровня 5 км, где задача приобретает свойства, близкие к свойствам уравнения Фредгольма 1-го рода, погрешность решения

возрастает и примерно соответствует точности решения обратной задачи астрономической рефракции [27–29]. В переходной области происходит существенный рост погрешности решения до уровня, сравнимого с естественными вариациями, которые составляют примерно $2 \div 3\%$ от среднего значения индекса рефракции. С точки зрения практического использования метода следует отметить, что из лимбовых измерений могут выпадать лишь сравнительно узкие интервалы по прицельному параметру и, разумеется, не представляется оправданным восстанавливать профиль далеко за пределами интервала прицельных высот измерений.

2. ЛИМБОВОЕ СВЧ ЗОНДИРОВАНИЕ

Решение обратной задачи лимбового зондирования в постановке [37] сводится к уравнению для яркостной температуры теплового излучения с переменным нижним пределом интегрирования, которым является высота r_0 точки перигея луча (длина волны может изменяться в зависимости от этого параметра),

$$T_B(r_0, \lambda) = \int_{r_0}^{\infty} u(r)K(r, r_0, \lambda, u) dr, \quad (5)$$

где $T_B(r_0, \lambda)$ — радиояркостная температура, зависящая от высоты r_0 точки перигея луча и длины волны λ , u — концентрация соответствующей газовой компоненты, K — нелинейное ядро. Для решения задачи в [37] применялся итерационный метод, в котором на каждом шаге методом прямого обращения решалось соответствующее линейризованное уравнение типа Вольтерра 1-го рода. Такая задача является слабо некорректной, близкой по типу к задаче вычисления производной по экспериментальным данным со случайной погрешностью. Для стабилизации решения применялся метод сглаживания зависимости яркостной температуры от прицельной высоты полиномами, степень которых зависела от уровня погрешности измерений. Такой способ, вполне оправданный с практической точки зрения, тем не менее, является одним из методов регуляризации “по здравому смыслу”, поэтому одной из целей данной работы являлось сравнение результатов такого упрощенного подхода с результатами последовательного подхода к решению некорректных задач, сводящихся к уравнениям 1-го рода [36]. Поскольку при решении некорректных задач ошибка восстановления не пропорциональна погрешности данных и может быть определена только путем численного моделирования, был проведен соответствующий численный анализ. Этот анализ показал, что точность решения несколько возрастает по сравнению с результатами [37], особенно для сложных распределений концентрации газовой компоненты.

На рис. 4 и 5 представлен пример численного восстановления профиля концентрации озона $\bar{U}_{O_3}(r)$, выраженной в миллионных долях отношения парциальных давлений озона и воздуха, с особенностью на высоте 50 км. Можно видеть, что применение метода обобщенной невязки Тихонова на каждом шаге итерационного процесса позволяет восстановить исходный профиль с лучшей точностью при большем уровне погрешности (погрешность составляет 1 К в методе Тихонова и 0,5 К — в методе прямого обращения со сглаживанием). Стрелками показан интервал прицельных высот “измерений”, сплошная линия соответствует исходному профилю концентрации озона.

На рис. 6 представлена зависимость яркостной температуры принимаемого излучения от прицельной высоты для исходного профиля концентрации озона, приведенного на рис. 4 и рис. 5.

Метод допускает обобщение задачи для случая, когда учитывается конечная ширина диаграммы направленности. Если форма проинтегрированной по азимуту диаграммы направленности в вертикальной плоскости описывается функцией $\Phi(r - r_0)$, то измеряемая антенной температура

$$T_A(r, \lambda) = \int_{r_s}^{\infty} \Phi(r - r_0) dr_0 \int_{r_0}^{\infty} u(r')K(r', r_0, \lambda, u) dr', \quad (6)$$

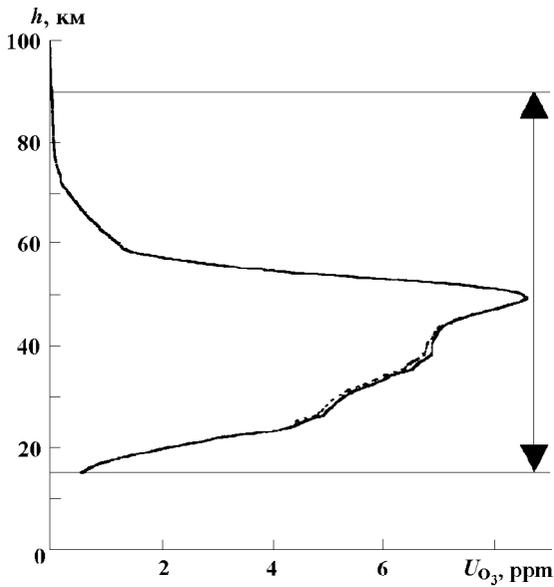


Рис. 4. Восстановление профиля концентрации методом Тихонова

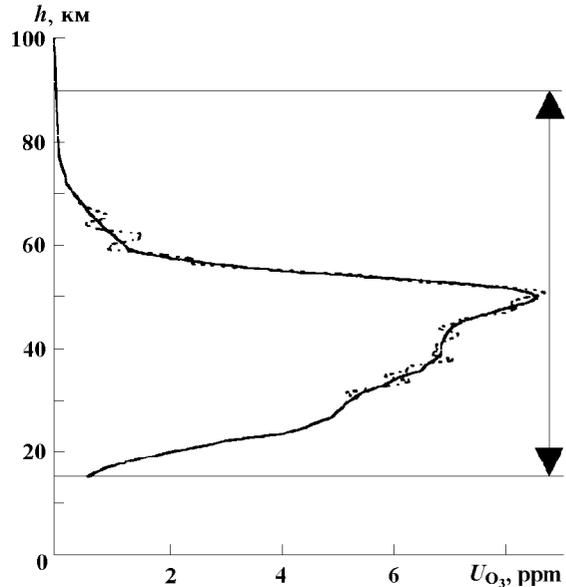


Рис. 5. Восстановление профиля концентрации методом прямого обращения со сглаживанием.

где r_s — радиус Земли. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$T_A(r, \lambda) = \int_{r_s}^{\infty} u(r') dr' \int_{r'}^{\infty} \Phi(r - r_0) K(r', r_0, \lambda, u) dr_0. \tag{7}$$

Внутренний интеграл в (7) образует новое ядро K' в уравнении для антенной температуры

$$T_A(r, \lambda) = \int_{r_s}^{\infty} u(r') K'(r', r, \lambda, u) dr', \tag{8}$$

которое уже является уравнением типа Фредгольма 1-го рода с постоянными пределами интегрирования.

Если решать задачу (5) в более сложной постановке, полагая, что значения $T_B(r_0)$ заданы только в интервале высот $r_s < r < r_H$, где $r_H = r_s + H$, то интервал восстановления разбивается на две физически различные области. Во внутренней области ($r < r_H$) решение (5) приводит к уравнению, близкому к уравнению типа Вольтерра 1-го рода в исходной постановке задачи в работе [37].

Во внешней области ($r > r_H$) задача (5) близка по типу к уравнению Фредгольма 1-го рода со свойствами решения, аналогичными обратной задаче [38]. Уравнение (5) для внешней и внутренней областей в целом также является некорректным. Тип этого уравнения не имеет особого названия, сочетая в себе признаки обоих упомянутых уравнений, которые должны по-разному проявляться во внешней и внутренней областях восстановления.

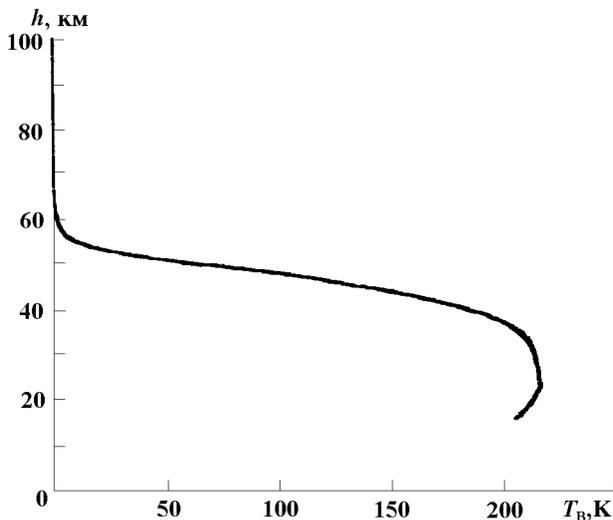


Рис. 6.

На рис. 7а приведен пример восстановления профиля концентрации озона (пунктир) по измерениям яркостной температуры вблизи спектральной линии озона на частоте 142 ГГц на высотах от 15 до 30 км при точности измерений 0,5 К, представленным на рис. 7б.

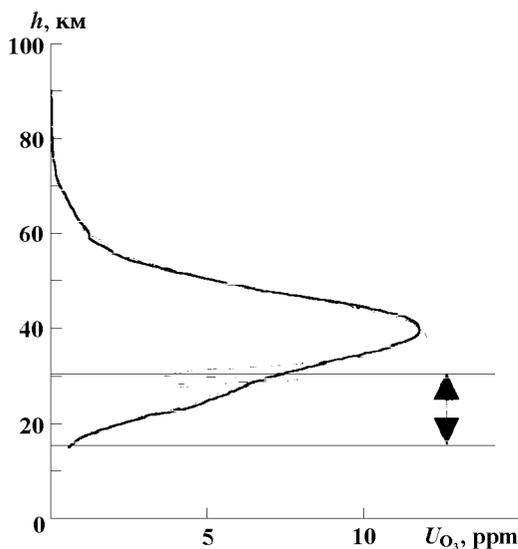


Рис. 7а.

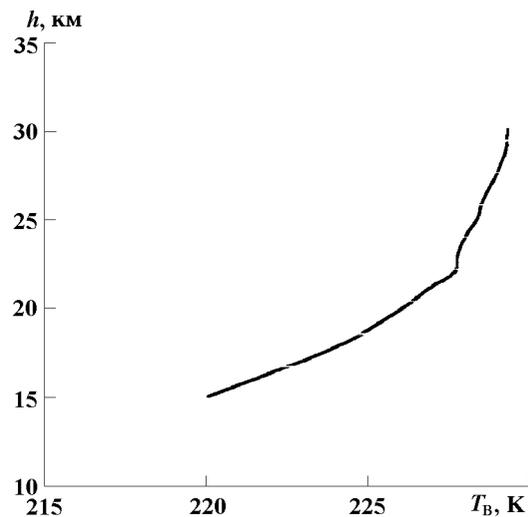


Рис. 7б.

Некорректная обратная задача может быть сформулирована для случая, когда профиль озона восстанавливается по спектру $T_B(\lambda)$ при фиксированной прицельной высоте r_0 . Целесообразность такой постановки задачи может быть оправдана экономией времени измерений за счет отсутствия необходимости сканирования по прицельной высоте луча. Результаты численного моделирования в этом случае в целом сопоставимы по точности с результатами, полученными при решении аналогичной задачи наземного зондирования [38].

На рис. 8а приведен пример восстановления высотного профиля концентрации озона по спектральной зависимости яркостной температуры (рис. 8б), измеренной в линии 142 ГГц при фиксированной прицельной высоте луча $H = 15$ км (показана на рисунке стрелкой), т. е. в предположении бесконечно узкой диаграммы направленности. Очевидно, что такая задача имеет решение только в слое, расположенном выше уровня H .

Более содержательный и интересный с практической точки зрения вариант постановки рассматриваемой задачи возникает при учете конечной ширины диаграммы направленности, когда в ходе измерений при любой прицельной высоте вклад в излучение вносят все слои атмосферы. На рис. 9а представлен пример восстановления профиля концентрации озона по спектру яркост-

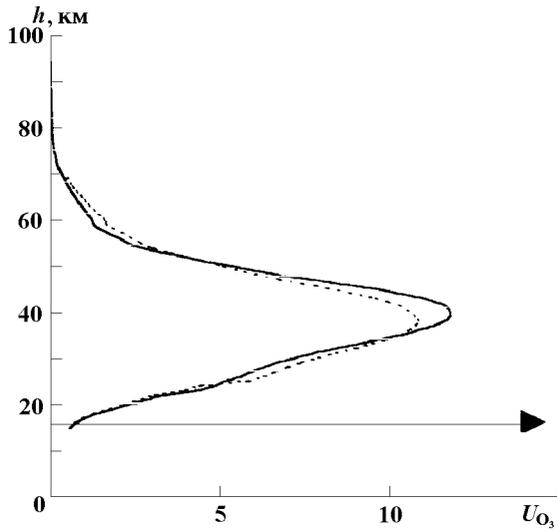


Рис. 8а.

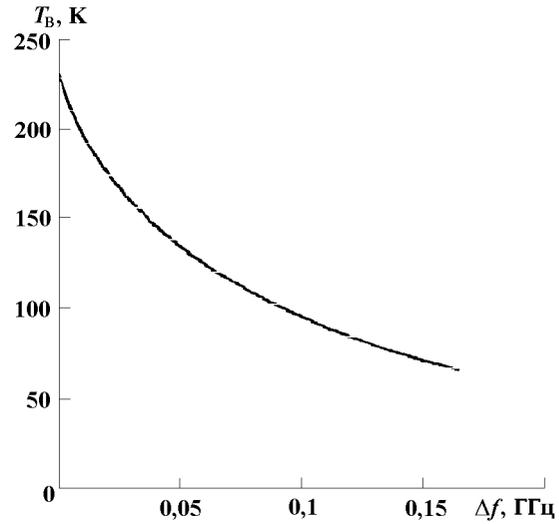


Рис. 8б.

ных температур, измеренных антенной системой с гауссовой формой диаграммы направленности с полушириной 20 км. Прицельная высота оси диаграммы направленности составляла 30 км (стрелки на рис. 9а показывают прицельные высоты оси диаграммы направленности и уровней ее полуширины). На рис. 9б представлена зависимость яркостной температуры принимаемого излучения от величины отклонения частоты приема от резонансной.

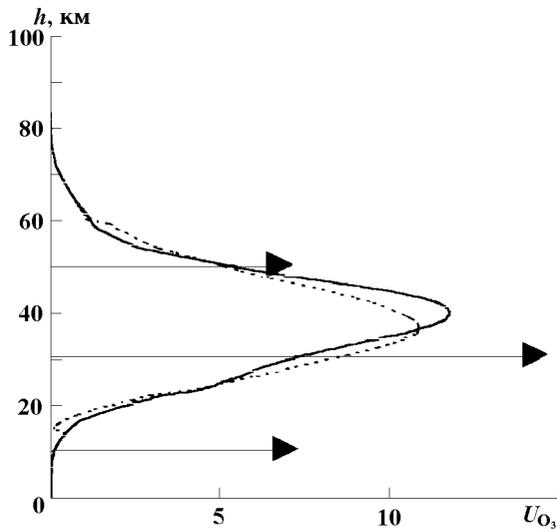


Рис. 9а.

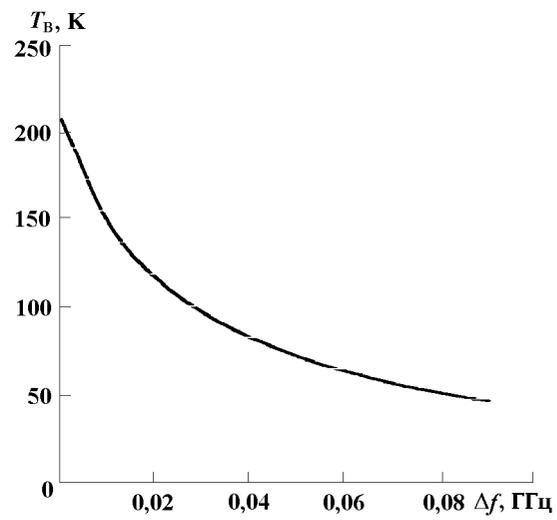


Рис. 9б.

Можно видеть, что при уровне погрешности измерения яркостной температуры 0,5 К профиль концентрации озона неплохо восстанавливается во всем высотном интервале.

Следует отметить, что для лимбового зондирования в целом существенной проблемой является привязка высоты, т. е. определение абсолютной высоты точки перигея луча.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод решения обратной задачи лимбовой рефрактометрии атмосферы в некорректной постановке для случая, когда интервал восстановления высотного профиля показателя преломления шире, чем интервал прицельных высот, в котором заданы значения рефракции. Соответствующее интегральное уравнение 1-го рода обращалось с помощью метода обобщенной невязки Тихонова, который использует весьма общую априорную информацию о квадратичной интегрируемости искомой функции и ее производной. Получено решение этой задачи в наиболее важном с практической точки зрения случае — при наличии атмосферного волновода, когда отсутствуют измерения в интервале прицельных высот, соответствующих волноводу. Результаты численного моделирования позволяют определить точность восстановления профиля показателя преломления при решении задачи для земной атмосферы.

Аналогичный подход применялся для решения обратной задачи лимбового зондирования профилей газовых составляющих (озона) атмосферы по измерениям теплового излучения с учетом принадлежности такой задачи к классу некорректных задач. Помимо исходной постановки задачи [37], задача решена для случая, когда высотный интервал измерений уже, чем интервал восстановления профиля концентрации озона. Кроме этого, профиль озона восстановлен по спектру радиояркостной температуры, измеренному на фиксированной прицельной высоте, включая и более интересный с практической точки зрения вариант, когда учитывается конечная ширина диаграммы направленности антенны. Все рассматриваемые случаи приводят к сильно некорректным обратным задачам. Алгоритмы их решения также основаны на применении метода обобщенной невязки Тихонова.

Работа выполнена при поддержке Минобразования России, грант № 97-0-8.1-27.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kliore A. J., Gain D. L., Levy G. S., Eshelman V. R. // *Astronaut and Aeronaut.* 1965. № T7. P. 72.
2. Lions J. R., Sweetnam D. L., Eshleman V. R. et al. // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92. № 13. P. 14987.
3. Fjeldbo G., Eshleman V. R. // *Radio Sci.* 1969. V. 4. № 10. P. 879.
4. Kliore A. J., Fjeldbo G., Seidel B. // *Radio Sci.* 1970. V. 5. № 2. P. 373.
5. Kliore A. J., Patel J. R., Seidel B. et al. // *J. Geophys. Res.* 1980. V. 85. № A11. P. 5857.
6. Lindal G. F., Sweetnam D. L., Eshleman V. R. // *Astron J.* 1985. V. 90. № 6. P. 1136.
7. Lindal G. F., Lions J. R., Sweetnam D. L. et al. // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92. № A13. P. 14987.
8. Lindal G. F., Lions J. R., Sweetnam D. L. et al. // *J. Geophys. Res.* 1990. V. 95. № 10. P. 1733.
9. Колосов М. А., Яковлев О. И., Круглов Ю. М. и др. // *Радиотехника и электроника.* 1972. Т. 17. № 12. С. 2483.
10. Гречко Г. М., Гурвич А. С., Романенко Ю. В., Савченко С. А., Соколовский С. В. // *ДАН СССР.* 1979. № 4. С. 828.
11. Соколовский С. В. // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1981. Т. 17. № 6. С. 574.
12. Гурвич А. С., Кан В., Попов Л. И., Рюмин В. В., Савченко С. А. // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1982. Т. 18. № 1. С. 3.
13. Гайкович К. П., Наумов А. П. // *Исследование Земли из космоса.* 1983. № 4. С. 25.
14. Гайкович К. П. // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1984. Т. 20. № 8. С. 675.
15. Соколовский С. В. // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1986. Т. 22. № 8. С. 890.
16. Волков А. А., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1987. Т. 23. № 11. С. 1228.
17. Гречко Г. М., Гурвич А. С., Казбанов В. А. и др. // *Труды ГОИ.* 1989. Т. 71. Вып. 205. С. 121.

18. Бесчастнов С. П., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20. № 4. С. 231.
19. Горбунов М. Е. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30. № 6. С. 776.
20. Гайкович К. П., Гурвич А. С., Наумов А. П. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. Т. 19. № 7. С. 675.
21. Бесчастнов С. П., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20. № 2. С. 231.
22. Загоруйко С. В., Кан В. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 5. С. 95.
23. Павельев А. Г. // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. № 12. С. 2504.
24. Павельев А. Г. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 5. С. 1037.
25. Колосов М. А., Павельев А. Г. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 12. С. 2310.
26. Павельев А. Г. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1985. Т. 25. № 3. С. 392.
27. Гайкович К. П., Сумин М. И. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 9. С. 917.
28. Василенко Н. А., Гайкович К. П., Сумин М. И. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 10. С. 1026.
29. Василенко Н. А., Гайкович К. П., Сумин М. И. // ДАН СССР. 1986. Т. 290. № 6. С. 1332.
30. Waters J. W., Hardy J. C., Jarnot R. F., Pickett H. M. // Science. 1981. V. 14. № 4516. P. 61.
31. Waters J. W. Microwave limb sounding. Atmospheric remote sensing by microwave radiometry. Ch. 8. / Ed. M. A. Janssen. J. Wiley and Sons, Inc., 1993.
32. Waters J. W., Manney G. L., Froidevaux L., Flower D. A., Jarnot R. F. // Geoph. Res. Lett. 1995. V. 22. № 7. P. 823.
33. Manney G. L., Froidevaux L., Waters J. W., Santee M. L., Read W. J., Flower D. A., Jarnot R. F., Zurec R. W. // Geoph. Res. Lett. 1996. V. 23. № 1. P. 85.
34. Santee M. L., Manney G. L., Froidevaux L., Zurec R. W., Waters J. W. // Geoph. Res. Lett. 1997. V. 24. № 22. P. 2713.
35. Гайкович К. П., Китай Ш. Д. // Исследование Земли из космоса. 1982. № 5. С. 54.
36. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983. 200 с.
37. Гайкович К. П., Китай Ш. Д., Наумов А. П. // Исследование Земли из космоса. 1991. № 3. С. 73.
38. Gaikovich K. P. // Digest of IGARSS'94. 1994. V. 4. P. 1901.
39. Турчин В. Ф., Козлов В. И., Малкевич М. С. // УФН. 1970. Т. 102. Вып. 3. С. 345.

Институт физики
микроструктур РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
12 октября 1998 г.

INVERSE INCORRECT PROBLEMS ON LIMB SOUNDING OF THE ATMOSPHERE

K. P. Gaikovich and M. B. Chernyaeva

In this paper, we consider inverse problems of limb refractometry and VHF sounding. As a rule, such problems are reduced to integral equation of Abell type and solved using conventional inverse transformation. At the same time, there are some formulations of these problems, which cannot be solved by this method. In particular, these are the cases where a desired quantity can only be measured over a part of the considered interval of impact heights. Concerning refractometry, this case is inevitably realized if waveguiding stratification of the atmosphere takes place. Another examples of incorrect problems are inverse problem on limb VHF sounding with account of finite width of angular pattern or problem on reconstruction of altitude profile of gaseous constituents at a given direction using spectrum of thermal emission. We propose methods for solving such problems. These methods are based on the Tikhonov principle of generalized residual. We consider inverse problems on refractometry and on VHF sounding. Results of numerical simulations concerning reconstruction of altitude profiles of refraction index and ozone content are presented.

УДК 538.574.2

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ПЛОСКИХ КИРАЛЬНЫХ СТРУКТУР

В. А. Неганов, О. В. Осипов

Строго решена задача об отражении плоских электромагнитных волн Е- и Н-поляризации от металлической плоскости, покрытой киральным слоем произвольной толщины. Исследовано влияние параметра киральности и толщины слоя на отражение электромагнитной волны. Изучен характер отражения деполяризованной компоненты. Проведено сравнение результатов, полученных при использовании двух различных форм записи материальных уравнений для киральной среды.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к исследованию свойств киральных сред [1–10], что связано, прежде всего, со специфическими свойствами рассеяния электромагнитных волн на объектах с киральными включениями [1–4, 6]. Обширный список работ по рассматриваемой тематике можно найти в обзорах [2, 3].

К киральным относятся среды, содержащие элементы, не обладающие зеркальной симметрией [2, 5]. Обычно такая среда моделируется из отрезков металлических или керамических спиралей, расположенных в изотропной среде [6], или из сферических спирально проводящих частиц [7]. Как известно, в киральных средах распространяются две плоские электромагнитные волны с противоположными круговыми поляризациями и различными постоянными распространения. При падении плоской электромагнитной волны определенной поляризации на киральную структуру в составе отраженной волны появляется так называемая деполяризованная составляющая, т. е. в поле отраженной волны присутствуют все шесть компонент электромагнитного поля [3, 8]. При этом деполяризованная составляющая появляется лишь в случае, когда падение электромагнитной волны на киральную структуру не является нормальным [3].

Нами рассмотрена задача отражения электромагнитной волны от металлической плоскости, покрытой киральным слоем. Проведено сравнение влияния “киральности” на отражение плоских волн для Е- и Н-поляризации. Полученные выражения справедливы при произвольной толщине кирального слоя и величине киральности. В качестве частного случая рассмотрена известная задача о падении плоской электромагнитной волны на полубесконечную киральную среду [11].

1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В КИРАЛЬНОЙ СРЕДЕ

Материальные уравнения для киральной среды в режиме гармонического сигнала принято записывать в виде [1, 2]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \Omega^- \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} + \Omega^+ \vec{E}, \quad (1)$$

где ε , μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости киральной среды, $\Omega^\pm = \chi \pm i\alpha$, χ — параметр, характеризующий степень невязности среды [2, 3, 9], α — параметр киральности, i — мнимая единица.

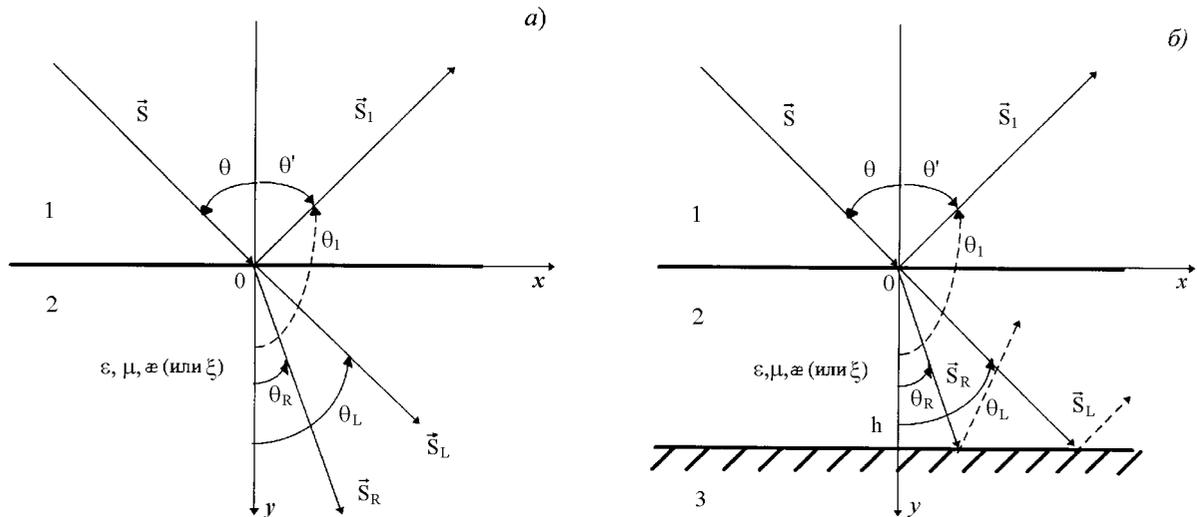


Рис. 1. Падение электромагнитной волны на плоскую границу раздела “воздух – киральная среда”(а) и на киральный слой, расположенный на металлической плоскости (б) (1 — воздух, 2 — киральная среда, 3 — металл).

Вообще говоря, материальные уравнения (1) описывают биизотропные среды с невязанными свойствами [12]. Случай $\chi = \varkappa = 0$ соответствует обычному изотропному диэлектрику. В дальнейшем будем рассматривать взаимные киральные среды, т. е. положим $\chi = 0$. В этом случае уравнения Максвелла для киральной среды можно записать в виде

$$\nabla \times \vec{H} = k(\varepsilon \vec{E} + \varkappa \vec{H}), \quad \nabla \times \vec{E} = k(\mu \vec{H} + \varkappa \vec{E}), \tag{2}$$

где k — волновое число в вакууме, напряжённость магнитного поля \vec{H} нормирована на i^{-1} .

Рассмотрим падение плоской электромагнитной волны определенной поляризации под углом θ на плоскую границу раздела “воздух–киральная среда”(рис. 1а). Для z -составляющих электромагнитного поля в киральной среде в предположении отсутствия вариации поля вдоль оси z нетрудно получить систему двух связанных дифференциальных уравнений

$$\Delta \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + k^2 (n^2 + \varkappa^2) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + 2k^2 \varkappa \begin{Bmatrix} \mu H_z \\ \varepsilon E_z \end{Bmatrix} = 0, \tag{3}$$

где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ — показатель преломления киральной среды, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа.

При помощи известной замены [1, 2, 4]

$$E_z = E_R + E_L, \quad H_z = \eta^{-1} \{E_R - E_L\}, \tag{4}$$

где $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, перейдем к несвязанным дифференциальным уравнениям относительно функций E_R и E_L

$$\nabla^2 E_{R,L} + k_{R,L}^2 E_{R,L} = 0, \tag{5}$$

где

$$k_{R,L} = k(n \pm \varkappa). \tag{6}$$

Величины k_R и k_L имеют смысл постоянных распространения соответственно волн с правой и левой круговой поляризациями в безграничной киральной среде [1, 3].

Из (5) и (6) следует, что при падении волны на киральную среду в последней возникают две плоские волны с различными волновыми векторами k_R, k_L и различными направлениями распространения. Поэтому поле в области 2 (см. рис. 1а) можно представить в виде суперпозиции электромагнитных полей двух плоских волн

$$E_z^{(2)} = T_R^- e^{-ik_R(\vec{s}_R \vec{r})} + T_L^- e^{-ik_L(\vec{s}_L \vec{r})}, \quad H_z^{(2)} = \eta^{-1} [T_R^- e^{-ik_R(\vec{s}_R \vec{r})} - T_L^- e^{-ik_L(\vec{s}_L \vec{r})}], \quad (7)$$

где $\vec{r} = \{x, y\}$ — вектор, описывающий пространственные координаты в плоскости xOy , $\vec{s}_{R,L} = \{\sin \theta_{R,L}, \cos \theta_{R,L}\}$ — единичные вектора вдоль направления распространения соответствующих преломленных волн (см. рис. 1а), $\theta_{R,L}$ — углы, которые вектора $\vec{s}_{R,L}$ образуют с осью Oy , $T_{R,L}^-$ — неизвестные постоянные амплитуды волн, распространяющихся в киральной среде.

Исходя из уравнений Максвелла (2), несложно получить выражения для составляющих $E_x^{(2)}$ и $H_x^{(2)}$ через неизвестные амплитуды $T_{R,L}^-$:

$$\begin{aligned} E_x^{(2)} &= -i [\cos \theta_R T_R^- e^{-ik_R(\vec{s}_R \vec{r})} - \cos \theta_L T_L^- e^{-ik_L(\vec{s}_L \vec{r})}], \\ H_x^{(2)} &= -i\eta^{-1} [\cos \theta_R T_R^- e^{-ik_R(\vec{s}_R \vec{r})} + \cos \theta_L T_L^- e^{-ik_L(\vec{s}_L \vec{r})}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Поле отраженной волны описывается уравнениями Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) \begin{Bmatrix} E_z^{\text{от}} \\ H_z^{\text{от}} \end{Bmatrix} = 0. \quad (9)$$

С учетом деполяризации падающего излучения и того обстоятельства, что отраженная волна распространяется против направления оси Oy , получаем следующие выражения для компонент поля отраженной волны:

$$\begin{aligned} E_z^{\text{от}} &= R_E e^{-ik(\vec{s}_1 \vec{r})}, & H_z^{\text{от}} &= R_H e^{-ik(\vec{s}_1 \vec{r})}, \\ E_x^{\text{от}} &= i \cos \theta_1 R_H e^{-ik(\vec{s}_1 \vec{r})}, & H_x^{\text{от}} &= i \cos \theta_1 R_E e^{-ik(\vec{s}_1 \vec{r})}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\vec{s}_1 = \{\sin \theta_1, -\cos \theta_1\}$ — единичный вектор, вдоль которого распространяется отраженная волна, θ_1 — угол, который образует \vec{s}_1 с осью Oy (сопряженный с углом отражения θ' (см. рис. 1а)), $R_{E,H}$ — неизвестные коэффициенты отражения.

Поле падающей плоской волны будем представлять в виде

$$E_z^{\text{пад}} = e^{-ik(\vec{s} \vec{r})}, \quad H_z^{\text{пад}} = 0$$

в случае E -поляризации и в виде

$$E_z^{\text{пад}} = 0, \quad H_z^{\text{пад}} = e^{-ik(\vec{s} \vec{r})}$$

в случае волны H -поляризации. Здесь $\vec{s} = \{\sin \theta, \cos \theta\}$ — единичный вектор вдоль направления распространения падающей волны.

Воспользуемся граничными условиями на поверхности $y = 0$ (см. рис. 1а)

$$\begin{aligned} E_z^{\text{пад}} + E_z^{\text{от}} &= E_z^{(2)}, & H_z^{\text{пад}} + H_z^{\text{от}} &= H_z^{(2)}, \\ E_x^{\text{пад}} + E_x^{\text{от}} &= E_x^{(2)}, & H_x^{\text{пад}} + H_x^{\text{от}} &= H_x^{(2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку соотношения (11) должны быть выполнены во всех точках поверхности $y = 0$, необходимо потребовать одинаковую зависимость полей всех четырех волн от координаты x при $y = 0$, т. е. фазовые множители должны быть одинаковыми:

$$k(\vec{s} \vec{r}) = k(\vec{s}_1 \vec{r}) = k_R(\vec{s}_R \vec{r}) = k_L(\vec{s}_L \vec{r}),$$

или

$$k \sin \theta = k \sin \theta_1 = k_R \sin \theta_R = k_L \sin \theta_L. \quad (12)$$

Из (12) следует обычный закон отражения $\sin \theta = \sin \theta_1$, $\cos \theta = -\cos \theta_1$, а синусы углов падения и преломления связаны соотношениями

$$\sin \theta_{R,L} = \frac{k}{k_{R,L}} \sin \theta, \quad (13)$$

которые представляют собой обобщенный на случай киральной среды закон Снеллиуса.

Пользуясь приведенными выше граничными условиями (11) и выражениями для составляющих полей (7), (8) и (10), можно записать две системы матричных алгебраических уравнений для определения коэффициентов отражения R_E и R_H

$$\hat{A}\vec{P} = \vec{B}_{E,H}, \quad (14)$$

где индексы "E" и "H" указывают на тип поляризации падающей электромагнитной волны, так что вектор \vec{B}_E соответствует случаю падения волны E-поляризации, а \vec{B}_H — случаю падения волны H-поляризации.

В системах (14) введены следующие обозначения:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \eta^{-1} & -\eta^{-1} & 0 & -1 \\ -\gamma_R & \gamma_L & 0 & \cos \theta \\ \eta^{-1}\gamma_R & \eta^{-1}\gamma_L & -\cos \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\vec{B}_E = \{1, 0, 0, \cos \theta\}^T, \quad \vec{B}_H = \{0, 1, -\cos \theta, 0\}^T, \quad \vec{P} = \{T_R^-, T_L^-, R_E, R_H\}^T, \quad (16)$$

где $\gamma_{R,L} = \cos \theta_{R,L} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{(n \pm \varkappa)^2}}$, верхний индекс "T" означает операцию транспонирования вектора-строки.

Из систем (14) нетрудно получить выражения для коэффициентов отражения

$$R_E = L^{-1}p^E(D_{RL}^+ + p^H) - 1, \quad R_H = L^{-1}p^E D_{RL}^- \quad (17)$$

в случае падения волны E-поляризации и

$$R_H = L^{-1}p^H(\eta^{-1}D_{RL}^+ + p^E) - 1, \quad R_E = L^{-1}p^H D_{RL}^-, \quad (18)$$

в случае падения волны H-поляризации. Здесь

$$L = (\gamma_L + \eta^{-1} \cos \theta)(\eta^{-1}\gamma_R + \cos \theta) + (\gamma_R + \eta^{-1} \cos \theta)(\eta^{-1}\gamma_L + \cos \theta),$$

$$D_{RL}^\pm = \gamma_R \pm \gamma_L, \quad p^H = 2\eta^{-1} \cos \theta, \quad p^E = 2 \cos \theta.$$

2. ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ, ПОКРЫТОЙ КИРАЛЬНЫМ СЛОЕМ

Рассмотрим падение волны определенной поляризации под некоторым углом θ на киральный слой толщины h , расположенный на металлической плоскости (рис. 1б).

В этом случае будут существовать еще две волны, отраженные от металлической плоскости обратно в киральную среду (амплитуды этих волн будем обозначать в дальнейшем индексом "+"). Тогда электромагнитное поле в области 2 (см. рис. 1б) представляется в виде

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} &= E_R^+ + E_L^+, & H_z^{(2)} &= \eta^{-1} [E_R^+ - E_L^+], \\ E_x^{(2)} &= i [\cos \theta_R E_R^- - \cos \theta_L E_L^-], & H_x^{(2)} &= i\eta^{-1} [\cos \theta_R E_R^- + \cos \theta_L E_L^-], \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$E_{R,L}^\pm = T_{R,L}^+ e^{ik_{R,L}(\vec{s}_{R,L}\vec{r})} \pm T_{R,L}^- e^{-ik_{R,L}(\vec{s}_{R,L}\vec{r})}.$$

Очевидно, что соотношения (10) для поля отраженной волны останутся без изменений.

Граничные условия (11) необходимо дополнить

$$E_z^{(2)} = 0, \quad E_x^{(2)} = 0. \quad (20)$$

на границе раздела "киральная среда-металл", при $y = h$. Используя граничные условия (11), (20), выражения для полей (7), (8) и (19) и принимая во внимание условие равенства фазовых множителей (12), получаем две системы алгебраических уравнений в матричной форме

$$\hat{M}\vec{P} = \vec{B}_{E,H}, \quad (21)$$

в которых смысл индексов "E" и "H" тот же, что и в системах уравнений (14). В системах (21) введены следующие обозначения:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ \eta^{-1} & \eta^{-1} & -\eta^{-1} & -\eta^{-1} & 0 & -1 \\ \gamma_R & -\gamma_R & -\gamma_L & \gamma_L & 0 & \cos \theta \\ \eta^{-1}\gamma_R & -\eta^{-1}\gamma_R & \eta^{-1}\gamma_L & -\eta^{-1}\gamma_L & -\cos \theta & 0 \\ e^{i\beta_R h} & e^{-i\beta_R h} & e^{i\beta_L h} & e^{-i\beta_L h} & 0 & 0 \\ \gamma_R e^{i\beta_R h} & -\gamma_R e^{-i\beta_R h} & -\gamma_L e^{i\beta_L h} & \gamma_L e^{-i\beta_L h} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\vec{B}_E = \{1, 0, 0, \cos \theta, 0, 0\}^T,$$

$$\vec{B}_H = \{0, 1, -\cos \theta, 0, 0, 0\}^T,$$

$$\vec{P} = \{T_R^+, T_R^-, T_L^+, T_L^-, R_E, R_H\}^T,$$

$$\beta_{R,L} = k_{R,L} \cos \theta_{R,L} = \sqrt{k_{R,L}^2 - k^2 \sin^2 \theta}.$$

Из решения систем алгебраических уравнений (21) определяются коэффициенты отражения R_E и R_H падающей и деполяризованной компонент, а также коэффициенты прохождения T_R^\pm и T_L^\pm . К сожалению, получение простых аналитических выражений для R_E и R_H из систем (21) затруднительно, поэтому ниже рассмотрен их численный анализ.

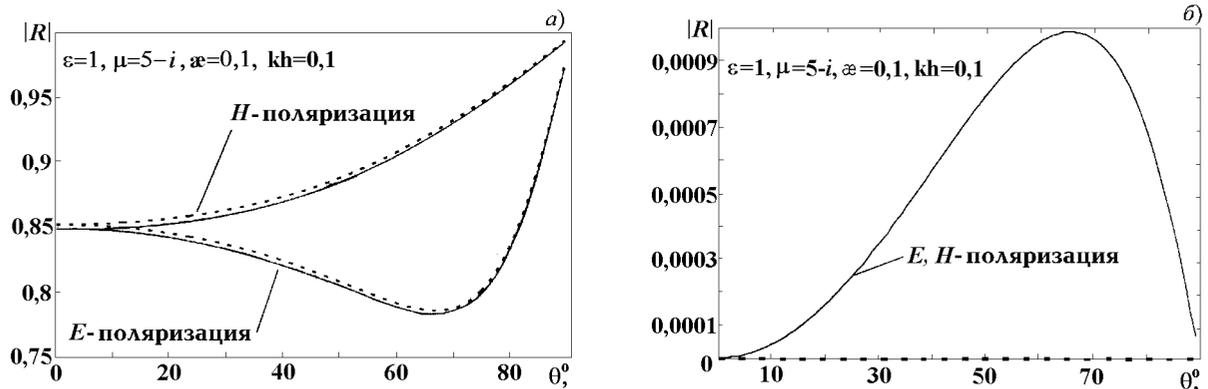


Рис. 2. Зависимости модуля коэффициента отражения основной (а) и деполаризованной (б) компонент от угла падения плоских волн на металлическую плоскость, покрытую киральным слоем (штриховые линии — результаты работы [1])

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При численном анализе полученных нами результатов основное внимание было уделено расчету зависимостей модулей коэффициентов отражения $|R_E|$ и $|R_H|$ от нормированной толщины кирального слоя kh . На рис. 2а приведено сравнение коэффициентов отражения по основной компоненте, рассчитанных по соотношениям (21) и приближенным формулам из [1] для волн E - и H -типа. При расчетах использовались следующие параметры киральной среды: $\varepsilon = 1$, $\mu = 5 - i$, $\varkappa = 0,1$. Толщина слоя $kh = 0,1$ [1]. Непрерывные линии соответствуют расчету по соотношениям (21), штриховые — по формулам из работы [1]. На рис. 2б приведена зависимость коэффициента отражения деполаризованной компоненты от угла падения (при вычислениях в работе [1] эффектом деполаризации пренебрегали). Как видно из рис. 2б, при отражении от кирального слоя малой толщины ($kh = 0,1$) деполаризация волны практически не происходит.

На рис. 3 исследуются границы применимости соотношений, полученных в работе [1]. Из представленных графиков видно, что при $kh > 0,6$ наблюдается сильное расхождение результатов расчета по соотношениям (21) и коэффициента отражения, рассчитанного по приближенным формулам из [1]. Здесь уместно заметить, что при нормальном падении плоской волны на киральный слой, описываемый материальными уравнениями (1), деполаризованная составляющая не появляется. Более того, как следует из анализа соотношений из работы [1], использование приближенных граничных условий из этой работы приводит к тому, что при нормальном падении волны на рассматриваемую структуру коэффициент отражения не зависит от величины параметра киральности \varkappa .

На рис. 4 приведены зависимости модулей коэффициентов отражения основной (рис. 4а) и деполаризованной (рис. 4б) компонент от нормированной толщины кирального слоя kh при наклонном падении плоской волны E -поляризации на металлическую поверхность, покрытую киральным слоем.

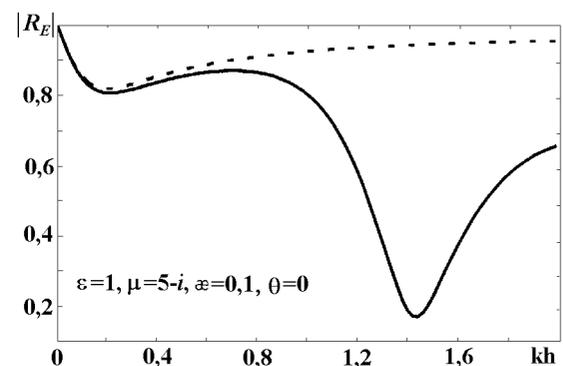


Рис. 3. Зависимости модуля коэффициента отражения $|R_E|$ от нормированной толщины кирального слоя kh при нормальном падении волны E -поляризации на металлическую поверхность, покрытую киральным слоем (штриховая линия — результаты работы [1])

При расчетах использовались следующие параметры киральной среды: $\varepsilon = 1, \mu = 5 - i, \varkappa = 0,7$. Из приведенных зависимостей видно, что существует интервал значений параметра kh , в котором коэффициенты отражения для основной и деполаризованной компонент сравнимы друг с другом.

На рис. 5 приведены зависимости модулей коэффициентов отражения основной (рис. 5а) и деполаризованной компонент (рис. 5б) от величины параметра киральности \varkappa при различных углах падения волны E -поляризации на металлическую плоскость, покрытую киральным слоем. Из приведенных графиков видно, что увеличение отсчитываемого от нормали угла падения приводит к возрастанию модуля коэффициента отражения деполаризованной компоненты. Таким образом, при строгом подходе к рассматриваемой задаче свойства отраженного поля при нормальном падении ($\theta = 0$) не зависят от параметра киральности \varkappa , при этом структура ведет себя как магнитодиэлектрик с потерями, чего нельзя сказать при углах падения $\theta \neq 0$.

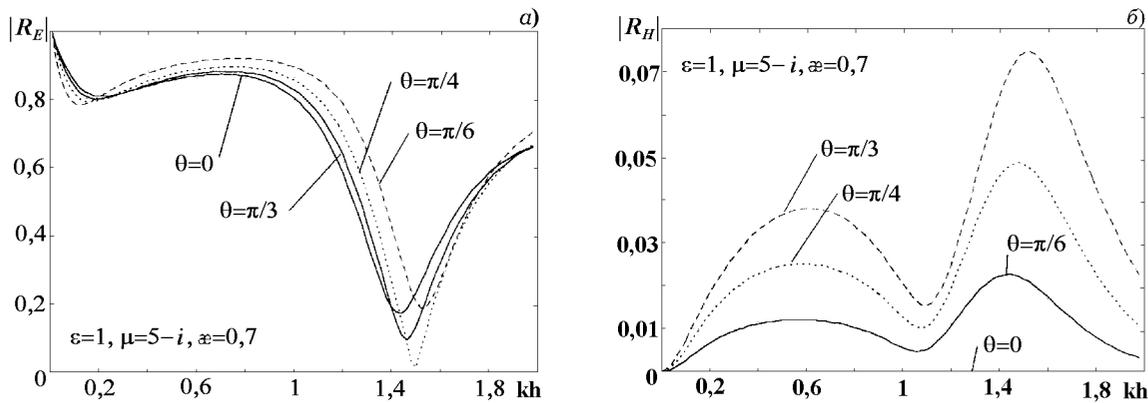


Рис. 4. Зависимости модулей коэффициентов отражения основной (а) и деполаризованной (б) компонент от толщины кирального слоя kh при различных углах падения волны E -типа на металлическую плоскость, покрытую киральным слоем

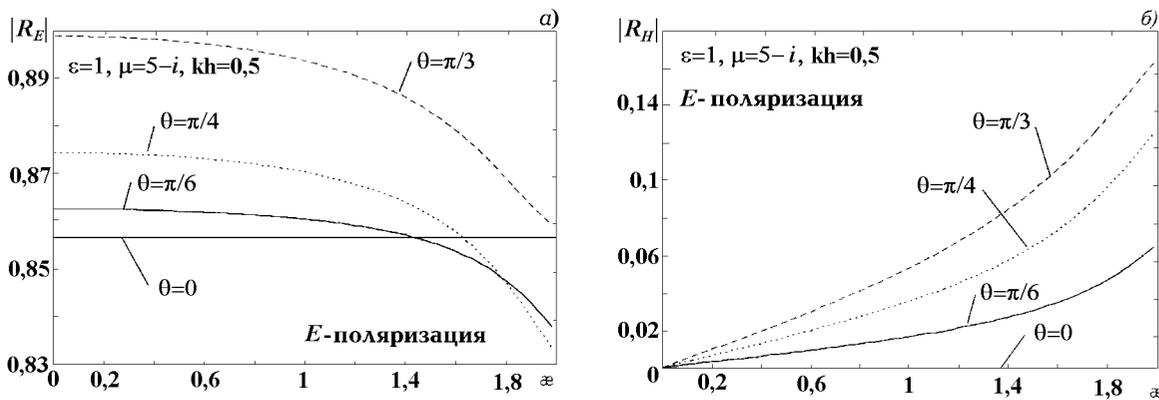


Рис. 5. Зависимости модулей коэффициентов отражения основной (а) и деполаризованной (б) компонент от параметра киральности при различных углах падения волны E -поляризации на металлическую плоскость, покрытую киральным слоем

Материальные уравнения для киральной среды в форме (1) не являются единственно общепринятыми. В частности, в [4] материальные уравнения приводятся в виде

$$\vec{D} = (\varepsilon + \mu\xi^2) \vec{E} - i\xi\mu\vec{H}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H} + i\xi\mu\vec{E}, \tag{23}$$

где ξ — параметр, называемый киральным адмитансом. В этом случае выражения для постоянных распространения двух волн в киральной среде имеют вид

$$k_{R,L} = k(\sqrt{\varepsilon_c \mu} \pm \xi \mu), \quad (24)$$

где $\varepsilon_c = \varepsilon + \mu \xi^2$. Материальные уравнения (1) и (23) приводят к разным постоянным распространения расщепленных волн k_R и k_L в киральной среде, описываемым соответственно соотношениями (6) и (24). Однако полученные в настоящей статье формулы (17) и (18) и системы алгебраических уравнений (21) записаны в унифицированном виде: они справедливы для материальных уравнений как в форме (1), так и в форме (23). Необходимо лишь в конечные расчетные соотношения подставить соответствующие выражения для $k_{R,L}$. Более того, можно заметить, что переход от формы записи материальных уравнений (1) к (23) осуществляется при помощи замены $\xi \mu \rightarrow \varkappa$, $\varepsilon_c \rightarrow \varepsilon$.

На рис. 6 проведено сравнение зависимостей модуля коэффициента отражения волны основной поляризации от нормированной толщины кирального слоя kh при нормальном падении волн E -поляризации на рассматриваемую структуру для материальных уравнений (1) и (23). Кривые 1, 2, 3, 4 рассчитаны соответственно для значений параметра $\xi = 0; 0,3; 0,7; 1$ по соотношениям (21) для материальных уравнений (23). Расчет модуля коэффициента отражения $|R_E|$ по соотношениям (21) с использованием материального уравнения (1) при любом значении параметра киральности \varkappa дает такие же значения $|R_E|$, как и в предыдущем случае при $\xi = 0$ (кривая 1).

Из представленных графиков видно, что при использовании материальных уравнений в виде (23) даже в случае нормального падения волны наблюдается зависимость коэффициента отражения от кирального адмитанса ξ . Из указанного факта следует, что при использовании материальных уравнений в виде (1) при нормальном падении волны с точки зрения величины коэффициента отражения и его зависимости от параметров среды совершенно теряется различие между обыкновенным диэлектриком ($\varkappa = 0$) и киральной средой ($\varkappa \neq 0$). Если же используются материальные соотношения (23), то такое различие проявляется даже при нормальном падении. Достаточно подробный анализ отражения электромагнитных волн от металлической плоскости, покрытой киральным слоем, при использовании материальных уравнений в виде (23) дан в [13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный нами электродинамический анализ показал, что при падении электромагнитных волн на плоские киральные структуры возникают интересные физические эффекты. Например, при определенных условиях отражение деполяризованной компоненты может быть сравнимо с отражением волны основной поляризации (поляризации падающей волны). Как известно, киральные среды используются при моделировании поглощающих покрытий [14, 15]. Однако, как следует из проведенного нами численного анализа, киральный слой с односторонней металлизацией с точки зрения уменьшения коэффициента отражения не обладает значительными преимуществами по сравнению с обычным диэлектриком, имеющим потери. Поэтому для уменьшения коэффициента отражения необходимо более

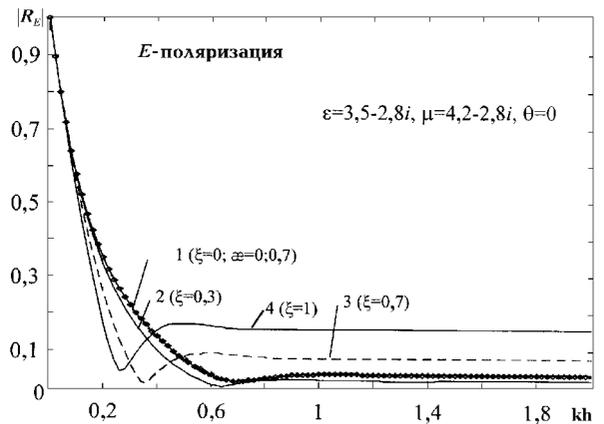


Рис. 6. Сравнение зависимостей модуля коэффициентов отражения волны основной поляризации от kh при нормальном падении волн E -поляризации при использовании различных форм записи материальных уравнений для киральных сред

скрупулезно оптимизировать как геометрические размеры структур, так и физические параметры киральной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Третьяков С. А. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 2. С. 184.
2. Третьяков С. А. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 10. С. 1457.
3. Каценеленбаум Б. З. и др. // УФН. 1997. Т. 167. № 11. С. 1201.
4. Федоренко А. И. // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40. № 3. С. 381.
5. Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V. Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media. — Berlin: Springer-Verlag, 1989.
6. Дмитренко А. Г., Корогодов С. В. // Изв. ВУЗов Радиофизика. 1998. Т. 41. № 4. С. 495.
7. Костин М. В., Шевченко В. В. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 8. С. 921.
8. Lindell I. V., Tretyakov S. A., Oksanen M. I. // Electron. Letters. 1992. V. 28. № 3. P. 281.
9. Lindell I. V., Sihvola A. H., Tretyakov S. A., Viitanen A. J. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media. — London: Artech House, 1994.
10. Bassiri S. Electromagnetic Waves In Chiral Media, in Recent Advances in Electromagnetic Theory/ Ed. Kriticos H. N. and Jaggard D. L. — New York: Springer-Verlag, 1990.
11. Hillion P. // Physical Review E. 1993. V. 47. № 4. P. 2868.
12. Tellegen B. D. H. // Philips Res. Rept. 1948. V. 3. P. 81.
13. Неганов В. А., Осипов О. В. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 1998. Т. 1. № 2–3. С. 13.
14. Jaggard D. L., Engheta N. // Electronics Lett. 1989. V. 25. P. 1060.
15. Varadan V.K., Varadan V.V., Lakhtakia A. // J.Wave Material Interaction. 1987. V. 2. P. 71.

Государственная Поволжская
академия телекоммуникаций и
информатики, г. Самара, Россия

Поступила в редакцию
29 июля 1998 г.

SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES FROM PLANE CHIRAL STRUCTURES

V. A. Neganov and O. V. Osipov

We obtain rigorous solution of the problem on reflection of E- and H-wave from metal plane covered by a chiral layer of arbitrary thickness. Dependence of reflection of electromagnetic wave on chiral parameter and layer thickness is analyzed. Reflection of depolarized component is studied. Results obtained using two different forms of the constitutive relations of the chiral medium are compared.

УДК 621.396.67

ЭФФЕКТИВНАЯ ПЛОЩАДЬ РАССЕЯНИЯ ЗЕРКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ОБТЕКАТЕЛЕМ

Г. Д. Михайлов, С. Н. Кутищев, О. Е. Кирьянов

Разработана методика точного расчета эффективной площади рассеяния (ЭПР) двумерной зеркальной параболической антенны с диэлектрическим обтекателем. Методика основана на итерационном подходе, в рамках которого общая задача сводится к последовательному решению задачи дифракции по отдельности на антенне и обтекателе. Указанные задачи, в свою очередь, формулируются в виде интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода и решаются численно. Исследована сходимость итерационного процесса. Приведены результаты расчета ЭПР антенны с облучателем в виде открытого конца плоского волновода и цилиндрическим обтекателем. Проведено сравнение результатов расчета с помощью предложенной методики ЭПР антенны и системы антенна—обтекатель с результатами, полученными в приближении физической оптики.

На практике возникает необходимость в исследовании рассеяния электромагнитных волн на бортовых антеннах, которые при определенных ракурсах наблюдения могут во многом определять радиолокационную заметность объекта, на котором они установлены [1, 2]. Известно, например, что эффективная площадь рассеяния (ЭПР) антенн летательных аппаратов может достигать 90% величины ЭПР всего объекта [2]. Кроме того, исследование рассеивающих свойств антенн является актуальной задачей в связи с необходимостью обеспечения электромагнитной совместимости расположенных на одном объекте антенн [3]. Поскольку для защиты бортовых антенн от неблагоприятных факторов окружающей среды применяются различные диэлектрические обтекатели [4], то возникает потребность в оценке влияния обтекателей на моностатическую и бистатическую ЭПР антенн [5].

Задача рассеяния электромагнитных волн на зеркальной антенне с диэлектрическим обтекателем рассматривалась в [3]. В этой работе с использованием леммы Лоренца получено строгое интегральное соотношение, позволяющее по точному распределению тока на антенне, найденному с учетом влияния обтекателя, рассчитать поле, рассеянное системой антенна—обтекатель в обратном направлении, и тем самым определить ее моностатическую ЭПР. Нахождение же точного распределения тока на антенне является довольно сложной задачей, поэтому в [3] при решении модельных задач ток на антенне определялся в приближении физической оптики. Кроме того, в этих модельных задачах рассматривались зеркальные антенны без облучателей, роль которых в формировании рассеянного поля может быть существенной [5].

В этой связи представляет интерес разработка методики точного расчета бистатической ЭПР зеркальной антенны с диэлектрическим обтекателем, исследование влияния обтекателя на характеристики рассеяния антенны, а также оценка точности приближенных методик расчета ЭПР.

Будем рассматривать двумерную систему антенна—обтекатель (рис. 1), состоящую из зеркальной параболической антенны с облучателем в виде открытого конца плоского волновода и диэлектрического обтекателя. Рассматриваемая система может служить моделью встречающейся на практике цилиндрической зеркальной антенны с цилиндрическим обтекателем [6].

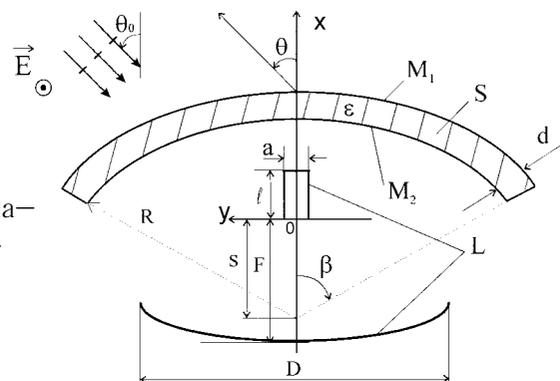


Рис. 1.

Пусть на систему антенна—обтекатель под углом θ_0 падает гармоническая (зависимость от времени выбрана в виде $\exp(j\omega t)$) плоская Е-поляризованная волна с единичной амплитудой. Необходимо найти рассеянное системой поле в дальней зоне в направлении, характеризуемом углом наблюдения θ (рис. 1).

Для определения точного распределения тока на антенне и поля в обтекателе с учетом их взаимодействия обобщим итерационный метод [7], примененный для двух металлических экранов, на случай диэлектрического тела и металлического экрана. При этом задача рассеяния произвольной падающей волны на отдельной антенне с бесконечно тонкими зеркалом и стенками облучателя сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно неизвестного поверхностного тока на контуре L антенны [8], а задача рассеяния на отдельном произвольном диэлектрическом обтекателе — к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно неизвестного электрического поля в сечении S [9].

Предлагаемая методика расчета ЭПР системы антенна—обтекатель, основанная на методе интегральных уравнений и итерационном методе, состоит из следующих основных этапов.

1) Определяется первичное парциальное поле $E^{(1)}(x_1, y_1)$ в обтекателе из решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} \frac{jk^2}{4} \int_S \{\varepsilon(x'_1, y'_1) - 1\} E^{(1)}(x'_1, y'_1) H_0^{(2)}(k\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2}) dx'_1 dy'_1 + E^{(1)}(x_1, y_1) = \\ = \exp[jk(x_1 \cos \theta_0 + y_1 \sin \theta_0)], \end{aligned} \quad (1)$$

с правой частью, соответствующей падающей плоской волне. Здесь x_1, y_1 и x'_1, y'_1 — координаты соответственно точек наблюдения и интегрирования в сечении S , $\varepsilon(x_1, y_1)$ — зависимость относительной диэлектрической проницаемости обтекателя от координат, $H_0^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина падающей волны в свободном пространстве.

2) Рассчитывается первичный парциальный ток $J^{(1)}(x_2(\xi), y_2(\xi))$ на антенне из решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\begin{aligned} \frac{kZ_0}{4} \int_L J^{(1)}(x_2(\tau), y_2(\tau)) H_0^{(2)}(k\sqrt{[x_2(\xi) - x_2(\tau)]^2 + [y_2(\xi) - y_2(\tau)]^2}) h_\tau d\tau = \\ = \exp[jk(x_2(\xi) \cos \theta_0 + y_2(\xi) \sin \theta_0)] + E_{2P}^{(1)}(x_2(\xi), y_2(\xi)) \end{aligned} \quad (2)$$

с правой частью, соответствующей сумме падающего плоского поля и первично рассеянного обтекателем поля $E_{2P}^{(1)}(x_2(\xi), y_2(\xi))$. Здесь ξ, τ — параметрические координаты точек наблюдения и интегрирования на контуре L , $x_2(\tau), y_2(\tau)$ — параметрическое уравнение контура L , $h_\tau = \sqrt{(dx_2/d\tau)^2 + (dy_2/d\tau)^2}$ — коэффициент Ламе, Z_0 — волновое сопротивление свободного пространства,

$$\begin{aligned} E_{2P}^{(1)}(x_2(\xi), y_2(\xi)) = \\ = -\frac{jk^2}{4} \int_S \{\varepsilon(x_1, y_1) - 1\} E^{(1)}(x_1, y_1) H_0^{(2)}(k\sqrt{(x_2(\xi) - x_1)^2 + (y_2(\xi) - y_1)^2}) dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (3)$$

3) Находится вторичное парциальное поле $E^{(2)}(x_1, y_1)$ из решения уравнения (1) с правой частью, обусловленной излучением первичного парциального тока на антенне:

$$E_{1P}^{(1)}(x_1, y_1) = -\frac{kZ_0}{4} \int_L J^{(1)}(x_2(\tau), y_2(\tau)) H_0^{(2)}(k\sqrt{[x_1 - x_2(\tau)]^2 + [y_1 - y_2(\tau)]^2}) h_\tau d\tau. \quad (4)$$

4) Выполняются следующие этапы итерационного процесса аналогично этапам пунктов 2, 3 и находятся парциальные токи и поля $J^{(2)}$, $E^{(3)}$, $J^{(3)}$, ..., обусловленные излучением соответствующих парциальных полей и токов $E^{(2)}(x_1, y_1)$, $J^{(2)}(x_2(\xi), y_2(\xi))$, $E^{(3)}(x_1, y_1)$, ...

5) Вычисляется двумерная ЭПР $\sigma(\theta, \theta_0)$ системы антенна–обтекатель, при этом результирующее поле в обтекателе и ток на антенне определяются как суммы соответствующих парциальных полей и токов:

$$\sigma(\theta, \theta_0) = k \left| -\frac{jk}{2} \int_S \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} E^{(n)}(x_1, y_1) \right\} [\varepsilon(x_1, y_1) - 1] \exp[jk(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)] dx_1 dy_1 - \right. \\ \left. -\frac{Z_0}{2} \int_L \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} J^{(n)}(x_2(\tau), y_2(\tau)) \right\} \exp[jk(x_2(\tau) \cos \theta + y_2(\tau) \sin \theta)] h_\tau d\tau \right|^2. \quad (5)$$

На основе представленной методики был разработан алгоритм численного расчета ЭПР системы антенна–обтекатель. Решение уравнений (1) и (2) проводилось методом коллокации [8], для чего сечение S и контур L разбивались на достаточно малые элементы, в которых неизвестные поле и ток считались постоянными. При решении уравнения (2) особенности в распределении тока на концах контура L , связанные с выполнением условия Мейкснера, выделяются в явном виде [8]. Интегрирование ядер уравнений (1) и (2) по соответствующим элементам дискретизации осуществляется численно с вырезанием малых областей с логарифмическими особенностями, возникающими при совпадении точек наблюдения и интегрирования.

Отметим, что представленная методика получена для короткозамкнутого (металлического) облучателя, однако это не сужает общности задачи. В работах [1, 10] показано, что поле рассеяния антенны с произвольной нагрузкой может быть представлено в виде суперпозиции поля, рассеянного короткозамкнутой антенной, и поля, излученного той же самой антенной, возбуждаемой компенсирующим эквивалентным источником, размещенным внутри волноводного облучателя. Причем вторая составляющая рассеянного поля (так же, как и первая) может быть найдена с помощью представленной методики, для этого необходимо только в уравнения (1), (2) вместо поля плоской волны подставить поле, возбуждаемое эквивалентным источником.

Изложенный выше алгоритм расчета ЭПР системы антенна–обтекатель реализован в виде пакета программ для ЭВМ типа IBM PC. Проведены расчеты ЭПР системы антенна–обтекатель. Антенна имела раскрыв $D = 16\lambda$, фокусное расстояние $F = 8,375\lambda$, раскрыв облучателя $a = 0,8\lambda$, длину облучателя $l = 2\lambda$, облучатель полагался короткозамкнутым; обтекатель представлял собой незамкнутый однородный диэлектрический круговой цилиндр со следующими параметрами: внутренний радиус $R = 16\lambda$, угол раскрыва $\beta = 51,4^\circ$, расстояние между фокусом антенны и центром цилиндра $s = 13,45\lambda$, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 3$, толщина $d = 0,1\lambda$ (см. рис. 1). При расчетах контур L и сечение S разбивались на элементы с характерными линейными размерами $\lambda/10$.

В качестве иллюстрации сходимости итерационного процесса на рис. 2 приведены результаты вычислений бистатической ЭПР системы антенна–обтекатель (в случае $\theta_0 = 0$) при различном числе

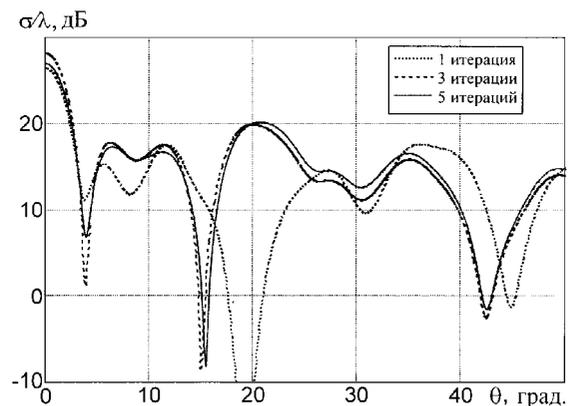


Рис. 2.

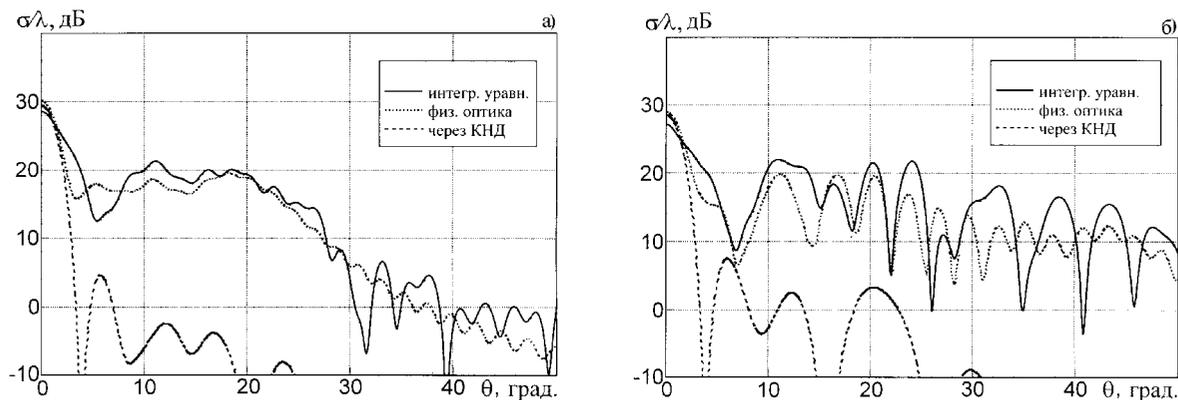


Рис. 3.

удерживаемых членов рядов в (5). При увеличении числа итераций результаты мало отличались, поэтому в дальнейших расчетах в (5) удерживались только члены рядов с $n \leq 5$.

Разработанная методика позволяет проводить точный расчет ЭПР антенны с диэлектрическим обтекателем, поэтому она может использоваться для оценки погрешностей приближенных методик. В качестве примера проведено сравнение результатов расчета ЭПР системы антенна—обтекатель, полученных с помощью предложенной методики и в приближении физической оптики. Для решения рассмотренной выше задачи определения ЭПР антенны с обтекателем в рамках приближения Кирхгофа, было проведено обобщение известной методики [11] расчета ЭПР зеркальной антенны с рупорным облучателем на случай, когда антенна располагается за регулярным обтекателем (поверхность обтекателя не имеет изломов, и радиусы кривизны обтекателя много больше длины волны [4]).

Обобщенная методика расчета ЭПР системы антенна—обтекатель в приближении физической оптики состоит из следующих основных этапов

1) В приближении геометрической оптики с использованием коэффициентов отражения стенки обтекателя вычисляется первичное поле на внешней поверхности обтекателя M_1 (в двумерном случае M_1 — контур), а с использованием коэффициентов прохождения определяется первичный наведенный ток на зеркале антенны [4].

2) В приближении Кирхгофа находится поле в раскрыве облучателя, обусловленное первичным током на зеркале антенны; с помощью леммы Лоренца определяются комплексные амплитуды возбуждаемых в облучателе мод; с учетом фазовых задержек для каждой из распространяющихся в облучателе мод находится отраженное поле в раскрыве облучателя [11]; вычисляется переизлученное облучателем поле и определяется вторичный ток на зеркале антенны.

3) В приближении Кирхгофа находится поле на внутренней поверхности обтекателя M_2 и с использованием коэффициентов прохождения стенки обтекателя пересчитывается на поверхность M_1 , тем самым определяется вторичное поле на M_1 .

4) По полному полю на поверхности M_1 , являющемуся суммой первичного и вторичного полей вычисляется рассеянное поле в дальней зоне и определяется ЭПР системы антенна—обтекатель.

В представленной приближенной методике расчета ЭПР учитывается лишь однократное рассеяние волны на антенне. При необходимости можно учесть многократные переотражения волн между антенной и обтекателем, а также между зеркалом и облучателем.

Результаты расчета моноэлектрической ЭПР зеркальной антенны с облучателем в виде открытого конца плоского волновода, являющегося частным случаем рупорного облучателя, и антенны с диэлектрическим обтекателем, полученные с помощью точной и приближенной методик, приведены на рис. 3. При расчетах параметры антенны и обтекателя считались такими же, как в рассмотренном выше слу-

чае. Отличие значений ЭПР антенны, рассчитанных по предложенной точной методике и в приближении физической оптики, составило $3 \div 5$ дБ (рис. 3а), значений ЭПР системы антенна—обтекатель — $3 \div 9$ дБ (рис. 3б) в секторе углов наблюдения от 0° до 30° . Различия результатов объясняются главным образом тем, что в приближенном расчете не учитываются рассеяние падающей волны непосредственно на облучателе, затенение облучателем зеркала антенны, влияние краевых эффектов на распределение тока на зеркале антенны и особенно на ее облучателе, а для обтекателя применяются коэффициенты прохождения и отражения плоских бесконечных слоев. Для повышения точности расчетов по приближенной методике диаграммы обратного рассеяния (ДОР) в области главного максимума необходим более корректный учет облучателя, например, с помощью поправок Уфимцева [12] или методом интегральных уравнений.

Заметим, что в теории антенн хорошо известно приближенное соотношение [1, 5], связывающее коэффициент направленного действия (КНД) $D(\theta)$ антенны, равный коэффициенту усиления антенны при отсутствии потерь, и моностатическую ЭПР антенны и имеющее в двумерном случае следующий вид:

$$\sigma(\theta) = \frac{\lambda}{2\pi} |\Gamma|^2 [D(\theta)]^2, \quad (6)$$

где $|\Gamma|$ — модуль коэффициента отражения от антенной нагрузки, равный единице для короткозамкнутой нагрузки. КНД антенны, в свою очередь, определяется через нормированную диаграмму направленности (ДН) $F(\theta)$ антенны по мощности следующим образом:

$$D(\theta) = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta}. \quad (7)$$

Представляет интерес провести сравнение результатов расчета ЭПР антенны с обтекателем, полученных из (6) и (7), с точным решением (1)–(5) и оценить границы применимости приближенного соотношения (6).

Пусть источником возбуждения рассматриваемой антенны служит нить линейного синфазного электрического тока единичной амплитуды, расположенная внутри волноводного облучателя параллельно оси z . В этом случае расчет ДН системы антенна—обтекатель может быть проведен с использованием соотношений (1)–(4), для этого необходимо только в правых частях уравнений (1) и (2) заменить слагаемые, соответствующие падающей плоской волне, на $-\frac{1}{4}kZ_0 \cdot H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$, где x_0, y_0 — координаты источника. Отметим, что поле изучения системы антенна—обтекатель определяется как сумма рассеянного поля и поля первичного источника [8].

На рис. 4 представлены результаты расчета КНД антенны и системы антенна—обтекатель с указанными выше параметрами в случае $x_0 = 1,75\lambda, y_0 = 0$. Соответствующие зависимости ЭПР, определенные по формуле (6), приведены на рис. 3. Сравнение данных на рис. 3 показало, что значения ЭПР антенны и системы антенна—обтекатель, найденные через КНД и по строгой методике, отличаются не более чем на 3 дБ при углах наблюдения $\theta \leq 2^\circ$. ЭПР антенны и системы антенна—обтекатель, определенные через КНД, в указанном диапазоне углов наблюдения хорошо (отличия не превышают 1,5 дБ) совпадают с ЭПР, найденными в приближении физической оптики. Это объясняется тем, что в обоих методах ЭПР антенны в направлениях, близких к направлению главного максимума ее ДОР, формируется за счет переизлучения принятой антенной энергии.

Из рис. 2 и рис. 3 можно заметить, что обтекатель оказывает некоторое влияние на характеристики рассеяния антенны, а именно приводит к уменьшению на 1,5 дБ ЭПР антенны в области главного максимума ДОР, к увеличению осцилляций в угловой зависимости моностатической ЭПР при $\theta > 10^\circ$ и к возрастанию уровня дальних боковых лепестков ДОР. Малое изменение ЭПР антенны связано с

относительно хорошими характеристиками прозрачности обтекателя (для заданных $\varepsilon = 3$ и $d = 0,1\lambda$ коэффициент пропускания по мощности бесконечной плоской пластины при нормальном падении волны составляет 0,793).

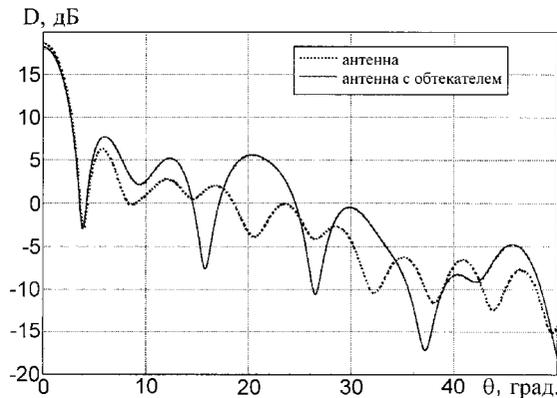


Рис. 4.

Таким образом, разработанная точная методика позволяет рассчитывать ЭПР двумерных зеркальных антенн с диэлектрическими обтекателями, а также может применяться для оценки погрешностей приближенных методик и интерпретации экспериментальных данных.

В заключение отметим, что представленная точная методика расчета ЭПР двумерных антенн с диэлектрическими обтекателями может быть обобщена на представляющий практический интерес трехмерный случай. Однако получение численного решения для произвольных трехмерных антенн и обтекателей представляется затруднительным ввиду увеличения размерности задачи и связанного с этим значительным возрастанием вычислительных затрат. При этом в частном случае, когда антенна и обтекатель являются осесимметричными телами, размерность задачи может быть уменьшена, что позволит получить решение рассматриваемой электродинамической задачи за приемлемое время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бененсон Л. С., Фельд Я. Н. // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 2. С. 225.
2. Михайлов Г. Д., Сергеев В. И., Соломин Э. А., Воронов В. А. // Зарубежная радиоэлектроника. 1994. № 4/5. С. 54.
3. Замятин В. И., Сухаревский О. И. — В сб.: Антенны, вып. 37. — М.: Радио и связь, 1990. С. 78.
4. Каплун В. А. Обтекатели антенн СВЧ. — М.: Сов. радио, 1974.
5. Кобак В. О. Радиолокационные отражатели. — М.: Сов. радио, 1975.
6. Жук М. С., Молочков Ю. Б. Проектирование антенно-фидерных устройств. — М.-Л.: Энергия, 1966.
7. Марцафей В. В., Мельникова Т. Н. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 9. С. 1168.
8. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции радиоволн. — М.: Радио и связь, 1982.
9. Richmond J. H. // IEEE Trans. Antennas and Propagat. 1965. V. AP-13. № 3. P. 334.
10. Марцафей В. В., Цалимов Г. В. // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 3. С. 470.
11. Астахов В. Н. — В кн.: Изв. ЛЭТИ, вып. 270. Вопросы волновой и пространственной обработки сигналов и изображений. 1980. С. 57.
12. Altintas A., Pathak P. H., Liang M. C. // IEEE Trans. Antennas and Propagat. 1988. V. AP-36. № 1. P. 84.

5 ЦНИИ МО РФ,
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
6 июля 1999 г.

EFFECTIVE SCATTERING AREA OF REFLECTOR ANTENNA WITH DIELECTRIC FAIRING

G. D. Mikhailov, S. N. Kutishchev, and O. E. Kiryanov

We develop a technique for exact calculation of effective scattering area (ESA) of two-dimensional, parabolic-reflector antenna with dielectric fairing. The technique is based upon an iterative approach that allows for reducing the general problem to successive solutions of the problems of diffraction from the antenna and the fairing. Two latter problems are formulated in terms of integral Fredholm equations of the first and second kind, and then numerical solutions of these are found. Convergence of the iterative procedure is studied. We calculate numerically the ESA of an antenna with cylindrical fairing, which is fed by open termination of a plane waveguide. The obtained ESAs of the antenna and “antenna–fairing” system are compared to the results of calculations based on the physical-optics approximation.

УДК 621.396.67.523.164(024)

ИМПУЛЬСНОЕ ПЕРЕХОДНОЕ ПОЛЕ ЗЕРКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

С. П. Скулкин¹, В. И. Турчин²

Предложен метод расчёта импульсного переходного поля параболической зеркальной антенны с дипольным облучателем. Приведены выражения для компонент электрического поля в ближней зоне антенны. Кратко анализируется отличие импульсных полей зеркальной антенны и плоской апертуры.

ВВЕДЕНИЕ

Требования к повышению информативности систем локации и связи приводят к увеличению рабочей полосы частот и являются причиной исследований импульсных переходных полей апертурных антенн [1]. Необходимость в таком анализе появляется также при разработке методов измерений параметров антенн во временной области с помощью импульсов нано-пикосекундного диапазона [2–6, 9]. В этих случаях, а также при оптимизации размещения антенны на сложном объекте полезно знать импульсное поле антенны не только в дальней, но и в ближней зоне.

Описанию импульсных полей апертурных антенн посвящено большое количество работ (см., например, [2, 7–9]). Однако точные выражения получены в акустическом приближении только для полей плоских апертур. Вместе с тем, для развития теории импульсных антенн представляют большой интерес расчёт поляризационных характеристик импульсных полей, а также рассмотрение более близких к реальным системам моделей апертурных антенн. С этой точки зрения в работе рассчитывается импульсное переходное поле параболической антенны с элементарным диполем в фокусе зеркала и кратко анализируются отличия найденного поля от импульсного поля плоской апертуры. Для простоты рассматривается рефлектор в виде круглой симметричной вырезки из параболоида вращения.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Будем считать, что на вход фидерного тракта антенны поступает сигнал $U(t)$. Тогда электрическое поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$ в точке пространства, определяемой радиус-вектором \vec{r} , может быть записано в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_a(\vec{r}, t) \otimes U(t), \quad (1)$$

где символ \otimes обозначает операцию свёртки по времени, а поле $\vec{E}_a(\vec{r}, t)$ представляет собой реакцию антенны на импульс входного сигнала в виде дельта-импульса $\delta(t)$, наблюдаемую в точке \vec{r} .

Для получения точного выражения для поля $\vec{E}_a(\vec{r}, t)$ зеркальной антенны требуется решение нестационарной дифракционной задачи, что само по себе достаточно сложно. Для упрощения расчётов будем считать, что основная энергия сигнала сосредоточена в интервале частот $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, при этом максимальная длина волны сигнала

$$\lambda_{\max} = 2\pi c/\omega_{\min} \ll \{F, a, |\vec{r}|\}, \quad (2)$$

где F и a — соответственно фокальное расстояние и радиус зеркала антенны, c — скорость света. В этом случае для расчёта поля могут быть использованы обычные приближения. Ток \vec{j}_S на поверхности рефлектора может быть представлен в виде

$$\vec{j}_S \simeq 2[\vec{n}, \vec{H}_S], \quad (3)$$

где \vec{H}_S — магнитное поле на поверхности рефлектора, \vec{n} — нормаль к поверхности. Будем считать, что временная зависимость \vec{H}_S имеет вид дельта-функции, тогда

$$\vec{j}_S \simeq \frac{1}{2\pi c r_1} [\vec{r}'_1, [\vec{n}, \vec{e}]] \delta(t - r_1/c), \quad (4)$$

где \vec{e} — единичный вектор, показывающий ориентацию расположенного в фокусе антенны диполя, $r_1 = |\vec{r}_S - \vec{r}_F|$, векторы \vec{r}_S и \vec{r}_F определяют соответственно точку на поверхности зеркала и фокус, $\vec{r}'_1 = (\vec{r}_S - \vec{r}_F)/r_1$. Импульсное поле $\vec{E}_a(\vec{r}, t)$ может быть представлено в виде

$$\vec{E}_a(\vec{r}, t) \simeq \frac{Z_0}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{q} \frac{\delta(t - r_2/c - r_1/c)}{r_1 r_2} dS, \quad (5)$$

где

$$\vec{q} = [\vec{r}'_2, [\vec{r}'_1, [\vec{n}, [\vec{e}, \vec{r}'_2]]]], \quad (6)$$

$r_2 = |\vec{r} - \vec{r}_S|$, $\vec{r}'_2 = (\vec{r} - \vec{r}_S)/r_2$, S — поверхность зеркала, Z_0 — импеданс свободного пространства. В дальнейшем предполагаем, что вектор \vec{e} ориентирован вдоль оси y декартовой системы координат (x, y, z) , начало которой совпадает с вершиной параболоида, а ось z — с его осью.

Временная зависимость поля $\vec{E}_a(\vec{r}, t)$ для каждой поляризации может быть получена из уравнения (5) с использованием техники интегрирования дельта-функции сложного аргумента [6, 10]. Для любых функций f и φ интеграл по поверхности S может быть представлен как интеграл по линии L :

$$\iint_S f(x, y) \delta[\varphi(x, y)] dx dy = \int_{L_S} f_L \frac{dl}{G_L}, \quad (7)$$

где L_S есть часть L , лежащая на поверхности S ($L_S \in S$), кривая L определяется уравнением $\varphi(x, y) = 0$, f_L представляет собой значения f на кривой L , dl — элемент длины L ,

$$G_L = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} \Big|_{(x,y) \in L}. \quad (8)$$

Мы полагаем здесь, что уравнение $\varphi(x, y) = 0$ имеет единственное решение и существуют первые производные φ .

Во введённой выше системе координат (x, y, z) фокус зеркала расположен в точке с координатами $(0, 0, F)$, а поверхность параболоида описывается уравнением $z = \rho^2/4F$, где $\rho^2 = x^2 + y^2$. При этом

$$r_1 = F + \frac{\rho^2}{4F}, \quad (9)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \left(z_0 - \frac{\rho^2}{4F}\right)^2}, \quad (10)$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты точки наблюдения. Кривая L определяется уравнением

$$ct = r_1 + r_2. \quad (11)$$

Нетрудно показать, что L — окружность с центром в точке $(x_{0,t}, y_{0,t})$ и радиусом a_t , описываемая уравнением

$$(x - x_{0,t})^2 + (y - y_{0,t})^2 = a_t^2, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} x_{0,t} &= \frac{x_0}{1 + \beta_t}, & y_{0,t} &= \frac{y_0}{1 + \beta_t}, & \beta_t &= \frac{ct' - z_0}{2F}, \\ a_t &= \frac{1}{1 + \beta_t} \sqrt{a_{t,0}^2(1 + \beta_t) - \rho_0^2 \beta_t}, & a_{t,0} &= \sqrt{(ct')^2 - z_0^2}, \\ & & t' &= t - F/c, & \rho_0^2 &= x_0^2 + y_0^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Используя (7), (8), представим (5) в виде

$$\vec{E}_a(\vec{r}, t) = \frac{Z_0}{2F} \frac{d}{dt'} \vec{E}_\delta, \quad \vec{E}_\delta(\vec{r}, t) = \frac{F}{2\pi} \int_{L_a} \vec{q}_L \frac{J_L dl}{G_L r_{1,L} r_{2,L}}, \tag{14}$$

где J описывает элемент поверхности параболоида:

$$dS = J dx dy, \quad J_L = \left(1 + \frac{\rho_L^2}{4F^2}\right)^{-1/2},$$

индекс L показывает, что значения функции берутся на контуре L , L_a — часть L , лежащая на апертуре S_a . В полярной системе координат (см. рис. 1) $x - x_{0,t} = a_t \cos \psi$, $y - y_{0,t} = a_t \sin \psi$, $x_0 = \rho_0 \cos \psi_0$, $y_0 = \rho_0 \sin \psi_0$, откуда

$$\rho_L^2 = \rho_{0,t}^2 + a_t^2 + 2\rho_{0,t} a_t \cos(\psi - \psi_0), \quad \rho_{0,t} = \frac{\rho_0}{1 + \beta_t}.$$

С учётом (13) получаем

$$G_L = \frac{a_t}{r_{2,L} \sqrt{1 + \beta_t}} \tag{15}$$

и окончательно находим импульсное поле зеркальной антенны:

$$\vec{E}_\delta = \frac{4F^3}{\pi \sqrt{1 + \beta_t}} \int_{\pi + \psi_1 + \psi_0}^{\pi - \psi_1 + \psi_0} \vec{q}_L \frac{d\psi}{(1 + \rho_L^2)^{3/2}}, \tag{16}$$

где углы ψ_0, ψ_1 показаны на рис. 1б.

Переход к плоской апертуре может быть выполнен при $F \rightarrow \infty$. При этом

$$\begin{aligned} r_1 &\rightarrow F, & r_2 &\rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2}, \\ \vec{e} &= \vec{y}_0, & \vec{n} &\rightarrow \vec{z}_0, & \vec{r}_1 &\rightarrow -\vec{z}_0, & \vec{q} &\rightarrow \vec{y}_0 - \vec{r}_2(\vec{r}_2, \vec{y}_0), \end{aligned}$$

где \vec{y}_0, \vec{z}_0 — единичные векторы, направленные соответственно вдоль осей y и z . В этом случае уравнение окружности (12) переходит в

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a_{t,0}^2. \tag{17}$$

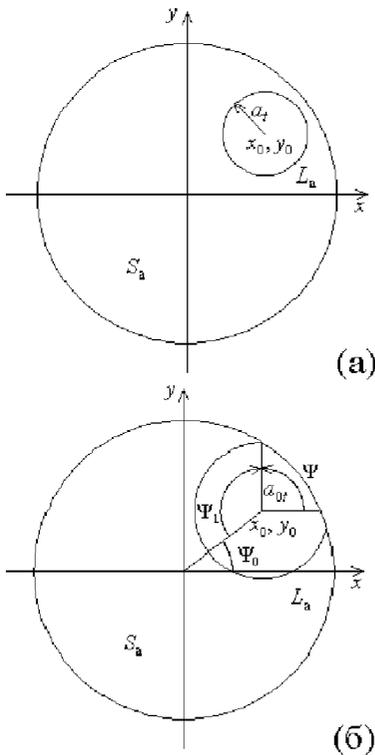


Рис. 1. Кривые пересечения сферы радиуса ct' с апертурной плоскостью

Принимая во внимание, что на контуре L расстояние $r_2 = ct'$ и $G = a_{t,0}/(ct')$, получаем

$$\vec{E}_\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi+\psi_1+\psi_0}^{\pi-\psi_1+\psi_0} \vec{q}_L d\psi \quad (18)$$

(угол ψ_1 определяется ниже). В полярной системе координат (ρ, ψ)

$$x - x_0 = a_{t,0} \cos \psi, \quad y - y_0 = a_{t,0} \sin \psi,$$

а проекции $q_{L,x}$, $q_{L,y}$, $q_{L,z}$ вектора \vec{q}_L могут быть представлены следующим образом:

$$q_{L,x} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{z_0^2}{(ct')^2} \right) \sin 2\psi, \quad (19)$$

$$q_{L,y} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{z_0^2}{(ct')^2} \right) + \left(1 - \frac{z_0^2}{(ct')^2} \right) \cos 2\psi \right], \quad (20)$$

$$q_{L,z} = -\frac{1}{2} \frac{z_0 \sqrt{(ct')^2 - z_0^2}}{(ct')^2} \sin \psi. \quad (21)$$

Перед интегрированием рассмотрим условия, при которых контур L (или его часть) лежит на апертуре S_a (в противном случае $\vec{E}_a(\vec{r}, t) \equiv 0$). При $\rho_0 < a$ такие условия сводятся к соотношению

$$z_0 < ct' < l_2, \quad (22)$$

а при $\rho_0 > a$ — к соотношению

$$l_1 < ct' < l_2, \quad (23)$$

где $l_{1,2} = \sqrt{z_0^2 + (a \mp \rho_0)^2}$. В случае $\rho_0 < a$ интервал (22) удобно разбить на два отрезка:

$$z_0 < ct' < l_1 \quad (24)$$

и отрезок, определяемый соотношением (23). Для времён, удовлетворяющих (24), весь контур L лежит на апертуре S_a , и $\psi_1 = \pi$. В случае (23) только часть контура L лежит на апертуре S_a , и угол ψ меняется в интервале

$$\pi - \psi_1 + \psi_0 \leq \psi \leq \pi + \psi_1 + \psi_0, \quad (25)$$

где

$$\psi_1 = \arccos \left(\frac{\rho^2 - a^2 + a_{t,0}^2}{2\rho_0 a_{t,0}} \right). \quad (26)$$

При $\rho_0 > a$, $l_1 < ct' < l_2$ пределы интегрирования по ψ определяются соотношением (25), однако эти пределы различаются при $\rho_0 < a$ и $\rho_0 > a$. Когда $\rho_0 < a$ и $a - \rho_0 < a_{t,0} < a + \rho_0$, что эквивалентно изменениям ct' в пределах, определяемых (23), угол ψ_1 меняется от π до 0 монотонно (см. рис. 1). При $\rho_0 > a$ и $a - \rho_0 < a_{t,0} < a + \rho_0$ угол ψ_1 вначале растёт от 0 до $\arcsin(a/\rho_0)$, а за-

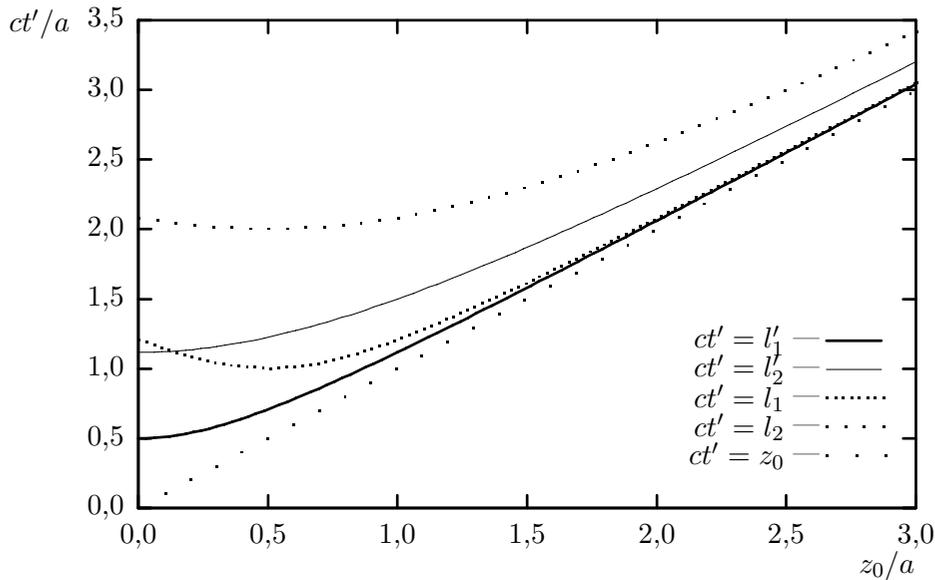


Рис. 2. Границы импульса для параболической и плоской антенн.

тем уменьшается до 0 (см. рис. 1б). Из вышесказанного следует, что, например, y -компонента основной поляризации вектора электрического поля

$$E_{\delta,y} = \begin{cases} 0, & 0 < ct' < z_0 \text{ при } \rho_0 < a; \quad ct' < l_1 \text{ при } \rho_0 > a; \quad ct' > l_2; \\ \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{z_0^2}{(ct')^2} \right), & l_1 < ct' < l_2 \text{ при } \rho_0 < a; \\ \frac{1}{4\pi} \left[\left(1 + \frac{z_0^2}{(ct')^2} \right) \psi_1 - \left(1 - \frac{z_0^2}{(ct')^2} \right) \cos 2\psi_0 \sin 2\psi_1 \right], & l_1 < ct' < l_2; \text{ при } \rho_0 > a. \end{cases} \quad (27)$$

2. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2 показаны границы импульса при различных значениях z_0 (l_1', l_2' — границы импульса для плоской апертуры при $F = \infty$; l_1, l_2 — границы импульса для параболического зеркала с $F = a/2$). Отметим, что импульс, излучённый параболической антенной, более длительный, чем импульс, излучённый плоской апертурой.

На рис. 3 приведены временные зависимости нормированной амплитуды компоненты $E_{\delta,y}$ для параболической антенны ($F = a/2$) и плоской апертуры ($F = \infty$) при $\rho_0 = z_0 = a/2$. Отметим, что точка наблюдения расположена на оси x в случае $\psi_0 = 0$ и на оси y при $\psi_0 = \pi/2$.

Рис. 4 иллюстрирует поведение производной по времени t' от функции $E_{\delta,y}$, приведённой на рис. 3 (импульсное поле). Как отмечалось ранее (см. (14)), именно эта производная определяет импульсное переходное поле антенны. Отметим, что для параболической антенны амплитуда второго импульса, следующего за основным, значительно меньше, чем для плоской апертуры.

В работах [2, 10] было показано, что в области прожекторного луча передний фронт импульса $\vec{E}_\delta(\vec{r}, t)$ остаётся без изменений, а форма и длительность заднего фронта зависят от координат точки наблюдения, формы апертуры и поляризационных соотношений. Вследствие этого эффекта, как следует из приведённых выше расчётов, монохроматическое ближнее поле зеркальной антенны должно иметь более равномерное пространственное распределение, чем поле плоской апертуры с той же формой прожекторного луча. Этот эффект известен из численных расчётов для монохроматического поля

(см., например, [11]), однако в рамках импульсной переходной характеристики он объясняется весьма наглядно.

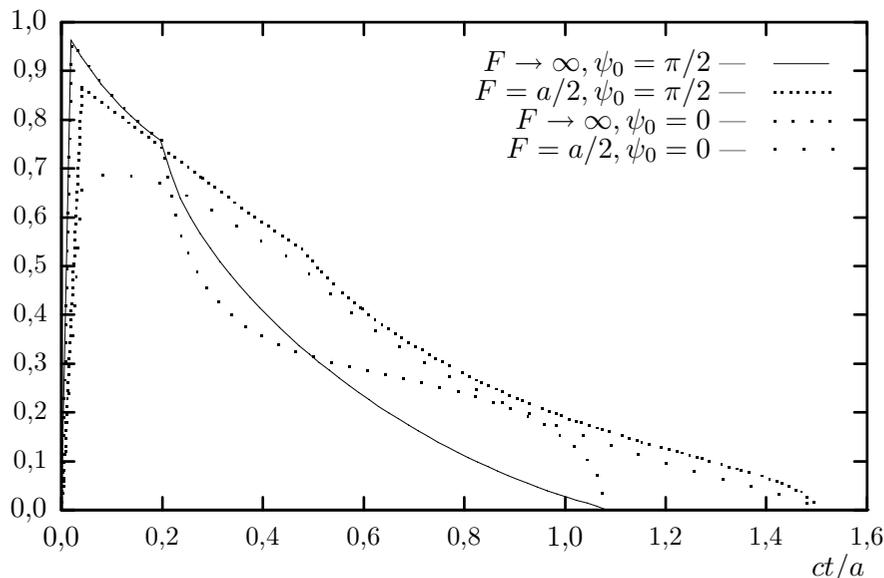


Рис. 3. Импульсные характеристики $E_{\delta,y}$ параболической и плоской антенн.

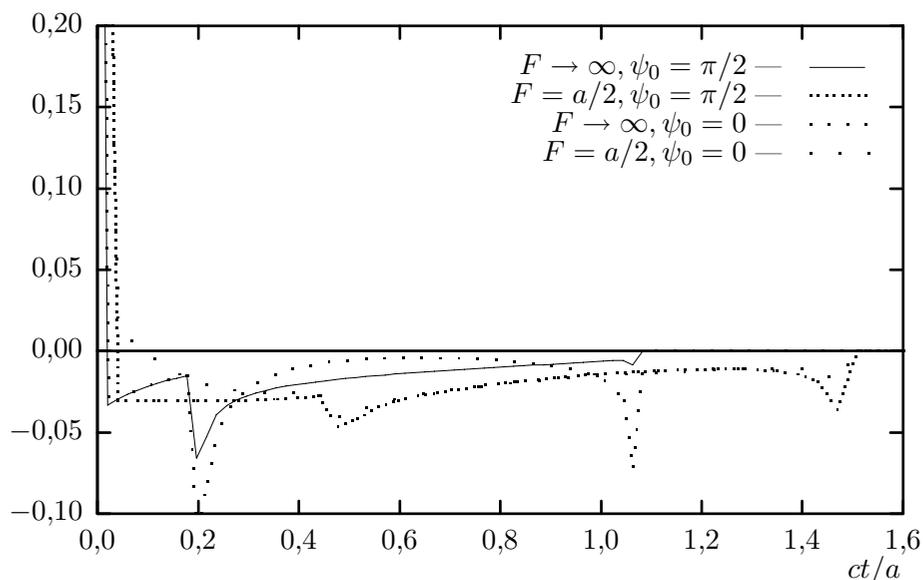


Рис. 4. Компонента $E_{a,y}$ импульсных полей.

Отметим в заключение, что полученные выражения для импульсного переходного поля в ближней зоне апертуры оказываются гораздо проще, чем для монохроматического поля, представляемого обычно в виде двумерных интегралов или разложений по специальным функциям (см., например, [11, 12]), и допускают весьма простой качественный анализ.

Работа поддержана РФФИ (проекты № 97–02–17728 и 96–02–19462).

ЛИТЕРАТУРА

1. Baum C. E. Impulse Radiating Antennas. — In: Ultra Wideband, Short-Pulse Electromagnetics / Ed. by Bertroni et al. — Plenum Press, 1993.
2. Скулкин С. П., Турчин В. И. и др. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 1. С. 73.
3. Скулкин С. П., Турчин В. И. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1998. Т. 41. № 5. С. 614.
4. Курочкин А. П. Антенные измерения—97. — В сб.: Антенны, 1997, № 1(38). С. 5.
5. de Jong R. V., Hajian M., Lightart L. P. // IEEE Trans. on Antennas and Propagation Magazine. 1997. V. 39. № 5. P. 7.
6. Skulkin S. P., Turchin V. I. — In: Electromagnetic Environments and Consequences. Proc. EUROEM'94 Symposium./ Ed. by J.-Ch. Bolomey. Bordeaux, France, 1994. P. 1498.
7. Baum C. E. // Sensor and Simulation note 351. November 2, 1992.
8. Содин Л. Г. // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37. № 10. С. 1783.
9. Гутман А. Л. // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 3. С. 271.
10. Skulkin S. P., Turchin V. I. Transient fields of parabolic reflector antennas — In: Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics / Ed. by Stone et al., Plenum Press, 1996.
11. Hansen R. C. Microwave Scanning Antennas. V. 1. — New York and London: Academic Press, 1964.
12. Born M., Wolf E. Principles of Optics. — Pergamon Press, 1964.

¹Научно-исследовательский
радиофизический институт,

²Институт прикладной физики
РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
25 августа 1998 г.

TRANSIENT FIELDS OF A REFLECTOR ANTENNA IN THE NEAR-FIELD ZONE

S. P. Skulkin and V. I. Turchin

We propose a technique for calculation of transient field of a parabolic-reflector antenna with dipole feed. The expressions for electric-field components are given. The difference between transient fields of reflector antenna and planar aperture is briefly discussed.

УДК 621.396.96;06:538.574.5

ДОСТИЖИМЫЕ УРОВНИ УМЕНЬШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ РАДИОВОЛН ОТ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА, ПРИКРЫТОГО ПОГЛОЩАЮЩИМ ПЛАЗМЕННЫМ ОБРАЗОВАНИЕМ

В. Б. Авдеев, К. П. Пискунов

На примере исследования модельной одномерной задачи о распространении радиоволн в различных поглощающих неоднородных плазменных слоях оцениваются достижимые уровни уменьшения коэффициента обратного отражения радиоволн от аэродинамического объекта, прикрытого поглощающим плазменным образованием, создаваемым с борта объекта на тропосферных высотах полета.

ВВЕДЕНИЕ

Достигнутый прогресс в исследованиях радиолокационных характеристик объектов, прикрытых искусственными плазменными образованиями (ПО), в основном обусловлен детальным изучением плазменных рефракционных свойств [1, 2]. Между тем многие типы образований, например создаваемые с борта аэродинамического объекта в окружающей его атмосфере или в искусственной газовой среде под его антенными обтекателями, наряду с рефракционными имеют еще и ярко выраженные поглощающие свойства. Вклад поглощения в уменьшение отражения волн от электродинамической системы “объект+ПО” в ряде случаев весьма существенен, что может быть использовано для снижения радиолокационной заметности всего объекта или его отдельных элементов [3].

При одномерном моделировании влияния поглощающего ПО на радиолокационную заметность системы “объект+ПО” в качестве количественного показателя можно использовать достижимый уровень уменьшения коэффициента отражения (КО) радиоволн.

Цель работы — на примере точного решения модельной одномерной задачи о распространении радиоволн в различных поглощающих неоднородных плазменных слоях оценить достижимые уровни уменьшения КО дециметровых и дециметровых волн от объекта, прикрытого поглощающим ПО на тропосферных высотах полета.

1. ЗАМЕЧАНИЯ ПО ВЫБОРУ ЦЕЛЕСООБРАЗНОЙ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПЛАЗМЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В качестве модельной задачи рассмотрим краевую задачу по определению КО плоской линейно поляризованной электромагнитной волны, падающей по нормали (вдоль оси z из бесконечности в направлении убывания z) на идеально проводящий экран, прикрытый поглощающей плоскостойкой средой с заданным законом изменения диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$. В квазистационарном приближении решение этой задачи сводится к решению скалярного волнового уравнения Гельмгольца

$$u'' + k^2\varepsilon(z)u(z) = 0, \quad (1)$$

где u — скалярный потенциал поля, $k = \omega/c$ — волновое число, ω — циклическая частота волны, c — скорость света в вакууме.

К сожалению, точные решения этого уравнения известны только для немногих конкретных видов функции $\varepsilon(z)$ (см., например, [4]). Вместе с тем важность этих одномерных решений заключается в том,

что они, обладая сравнительной математической простотой и физической наглядностью (в отличие от соответствующих двумерных и трёхмерных решений), позволяют спрогнозировать качественное влияние основных радиофизических эффектов на характеристики рассеяния радиоволн системой “объект+ПО” в задачах с большей пространственной размерностью. В отдельных случаях, при наличии сферической или цилиндрической симметрии и некоторых дополнительных условиях, могут быть проведены и количественные оценки, например, такой важнейшей радиолокационной характеристики, как эффективная площадь рассеяния прикрытого объекта [5]. С помощью решения одномерной модельной задачи можно также оценить, с одной стороны, диапазон длин волн, в котором возможно уменьшение КО радиоволн от системы “объект+ПО”, а с другой — величину мощности, необходимой для создания ПО с заданными параметрами.

Следует отметить, что точные решения краевых одномерных, двумерных и трёхмерных задач, в которых электронная концентрация в ПО изменяется с расстоянием по одинаковому закону, обычно рассматривают в единственном случае квадратичного закона спада, поскольку только в этом случае возможно разделение пространственных переменных в волновом уравнении при цилиндрической или сферической симметрии задачи. Решения такой задачи выражаются в виде рядов по цилиндрическим функциям [6].

Известно, что реализуемый в ПО закон спада электронной концентрации зависит от способа создания ПО. Так, при использовании механизмов создания ПО на основе ударной ионизации, как правило, реализуется квадратичный закон; при использовании механизма фотоионизации — экспоненциальный. Возможны и различные комбинации этих законов, а также другие зависимости. Здесь мы ограничимся анализом поглощающих свойств одномерных ПО — неоднородных поглощающих плазменных слоев — только с квадратичным и экспоненциальным законами спада электронной концентрации.

2. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛНЫ В ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ

Рассмотрим случай нормального падения плоской волны единичной амплитуды на экран, прикрытый плазменным слоем с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(z) = \frac{1 - e^2 N_j(z)}{\varepsilon_0 m_e \omega^2 \cdot (1 - i\nu/\omega)}, \quad (2)$$

где $j = 1, 2$, $N_1(z) = A^2/z^2$, $N_2(z) = N_0 \exp(-Bz)$ — соответственно квадратичный и экспоненциальный законы спада электронной концентрации в слое; A, B — размерные параметры; N_0 — электронная концентрация при $z = 0$ в случае экспоненциального закона спада; ν — эффективная частота соударений электронов с тяжелыми частицами; e, m_e — соответственно заряд и масса электрона; ε_0 — электрическая постоянная. Предполагается, что экран расположен на расстоянии z_0 ($z_0 > 0$) от начала координат.

Уравнение (1) с $\varepsilon(z)$ в форме (2) представляет собой уравнение бесселевского типа и принимает вид

$$z^2 u_1'' + k^2(z^2 - z_1^2/\eta)u_1 = 0 \quad (3)$$

при квадратичном законе спада электронной концентрации и вид

$$u_2'' + [a + b \exp(-Bz)]u_2 = 0 \quad (4)$$

при экспоненциальном законе спада. Здесь $z_1^2 = A^2/N^*$, $a = k^2/B^2$, $b = -N_0 a/(N^* \eta)$, $N^* = m_e \omega^2 \varepsilon_0 / e^2$, $\eta = 1 - i\nu/\omega$.

Полагая в дальнейшем $\nu = \text{const}$, выразим решения уравнений (3), (4) через цилиндрические функции:

$$u_1 = z^{1/2} Z_p(kz), \quad u_2 = Z_q 2b^{1/2} \exp(-Bz/2).$$

Здесь Z_α , где индекс α принимает значения p или q , — любая из функций Бесселя (J_α — функция Бесселя первого рода, N_α — функция Неймана, $H_\alpha^{(1,2)}$ — функция Ганкеля первого и второго рода), $p = [1 + (2kz_1)^2/\eta]^{1/2}/2$, $q = 2ik/B$.

Поскольку координата z_0 расположения экрана находится на положительной полуоси z , то для определения КО от экрана, прикрытого плазменным слоем, достаточно исследовать поведение функций $u_{1,2}(z)$ только в области $z > 0$. Тогда общее решение уравнения (3) удобно выразить через базис функций $H^{(1,2)p}$:

$$u_1(z) = C_{11} z^{1/2} H_p^{(1)}(kz) + C_{12} z^{1/2} H_p^{(2)}(kz),$$

а решение уравнения (4) — через базис функций J_{-q}, J_q :

$$u_2(z) = C_{21} J_q(\zeta(z)) + C_{22} J_{-q}(\zeta(z)),$$

где $\zeta(z) = 2b^{1/2} \exp(-Bz/2)$; $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ — константы, подлежащие определению.

Из граничного условия на экране $u_j(z_0) = 0$ находим

$$u_1(z) = C_{11} z^{1/2} H_p^{(1)}(kz) - C_{11} z^{1/2} \frac{H_p^{(1)}(kz_0)}{H_p^{(2)}(kz_0)} H_p^{(2)}(kz), \quad (5a)$$

$$u_2(z) = C_{21} J_q(\zeta(z)) - C_{21} \frac{J_q(\zeta(z_0))}{J_{-q}(\zeta(z_0))} J_{-q}(\zeta(z)). \quad (5b)$$

Оставшиеся неизвестными в (5) коэффициенты C_{11} и C_{21} определим из ранее поставленного начального условия: при $z \rightarrow \infty$ амплитуда падающей волны равна 1. В итоге для C_{11} и C_{21} получим следующие выражения:

$$C_{11} = (\pi k/2)^{1/2} \exp[i(p\pi/2 + \pi/4)], \quad (6)$$

$$C_{21} = qb^{q/2} \Gamma(-q) J_q(\zeta(z_0))/J_{-q}(\zeta(z_0)), \quad (7)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. При этом искомые точные выражения для КО волны от экрана, прикрытого плазменным слоем, будут иметь вид

$$R_1 = |\exp(ip\pi) \cdot H_p^{(1)}(kz_0)/H_p^{(2)}(kz_0)|^2 \quad (8)$$

в случае квадратичного закона спада концентрации и вид

$$R_2 = |b^q \Gamma(-q) J_{-q}[\zeta(z_0)]/\{\Gamma(q) J_q[\zeta(z_0)]\}|^2 \quad (9)$$

в случае экспоненциального спада.

Приближенное геометрическое решение в этих случаях описывается формулой [7]

$$R_j = \exp \left\{ -4k \int_{z_{\text{отр}}}^{\infty} \alpha_j(z) dz \right\}, \quad (10)$$

где $j = 1, 2$; $\alpha_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \xi_j - 1 + [(1 - \xi_j)^2 + \xi_j^2 \nu^2/\omega^2]^{1/2} \}^{1/2}$ — показатель поглощения; $\xi_j = N_j(z)/N_{\text{кр}}$; $N_{\text{кр}} = m_e(\omega^2 + \nu^2) \varepsilon_0/e^2$ — критическая концентрация электронов; $z_{\text{отр}}$ — координата точки отражения луча. При интегрировании в (10) полагается $z_{\text{отр}} = z_0$, если слой с критической концентрацией электронов расположен перед экраном (случай $z_{\text{кр}} \leq z_0$), или $z_{\text{отр}} = z_{\text{кр}}$, если

слой с критической концентрацией электронов находится за экраном (случай $z_{кр} > z_0$). Здесь $z_{кр}$ — положительный корень уравнения $N_j(z_{кр}) = N_{кр}$.

3. ОЦЕНКА ТРЕБУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЕННОГО ИСТОЧНИКА

Перейдем к оценке удельной мощности W плазменного источника, необходимой для формирования плазменного слоя в атмосфере на высотах $H \geq 20$ км. Для этого найдем требуемую полную интенсивность I_s ионизации участка атмосферы вблизи прикрываемого экрана, принимая за I_s величину, равную числу электронов, образующихся в единицу времени в единице объема при условии стационарности процессов ионизации и диссоциации электронов. В этом случае для высот $H < 50$ км $I_s(z)$ можно представить в виде [8]

$$I_s(z) \approx \beta N_m N(z), \quad (11)$$

где $N_m[\text{см}]^{-3} \approx 8,13 \cdot 10^6 \cdot \{T_e[\text{эВ}]\}^{-5/6} \cdot \nu(H) [\text{Гц}]$ — концентрация нейтралов в атмосфере на высоте H ; T_e — температура электронов плазмы; $\beta(T_e)$ — коэффициент диссоциативного прилипания электронов к молекулам и радикалам в воздухе. При анализе процесса ионизации будем учитывать только наиболее легко ионизируемую компоненту атмосферы — окись азота NO. Тогда, вычисляя интеграл в соотношении $W = J_{\text{NO}} \int_{z_0}^{\infty} I_s(z) dz$ с учетом (11), получим для квадратичного закона спада концентрации,

$$W = \beta N_m A^2 J_{\text{NO}}/z_0, \quad (12)$$

а для экспоненциального —

$$W = \beta N_m N_0 \exp(-Bz_0) J_{\text{NO}}/B \quad (13)$$

где $J_{\text{NO}} \approx 9,25$ эВ — потенциал ионизации NO.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ АНАЛИЗ

Обсудим результаты численных расчетов, проведенных с использованием полученных выше формул.

На рис. 1, 2 представлены рассчитанные с помощью выражений (8)–(10) значения КО волны в зависимости от ее частоты $f = \omega/2\pi$ при квадратичном (рис. 1а, 2а) и экспоненциальном (рис. 1б, 2б) законах спада электронной концентрации в плазменном слое при ионизации атмосферы на высотах H , равных 20, 30 и 40 км (соответственно кривые 1, 2 и 3 на рис. 1, 2). Точные зависимости обозначены сплошными линиями, рассчитанные в приближении геометрической оптики — штриховыми. Удельные мощности источников, создающих различные плазменные слои на одной и той же высоте, предполагались одинаковыми. Рассчитанные с помощью выражений (12), (13) величины удельной мощности W источников при типичном значении $T_e \sim 1$ эВ в плазменных слоях на указанных высотах соответственно составили приблизительно 2,6 кВт/м², 0,6 кВт/м² и 0,15 кВт/м² (рис. 1) и 13 кВт/м², 3 кВт/м² и 0,75 кВт/м² (рис. 2).

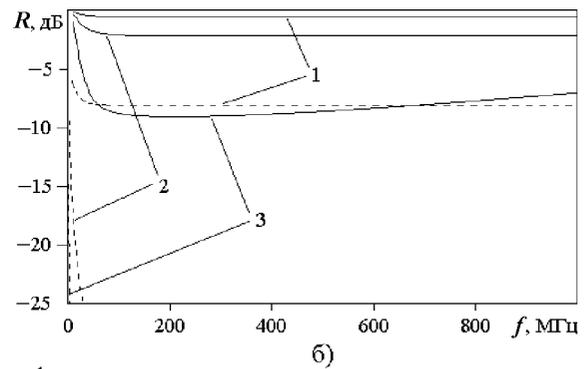
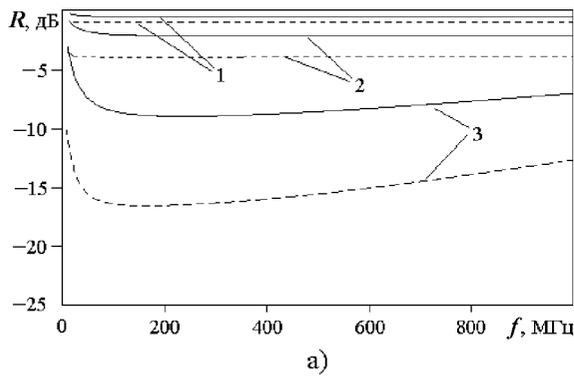


Рис. 1

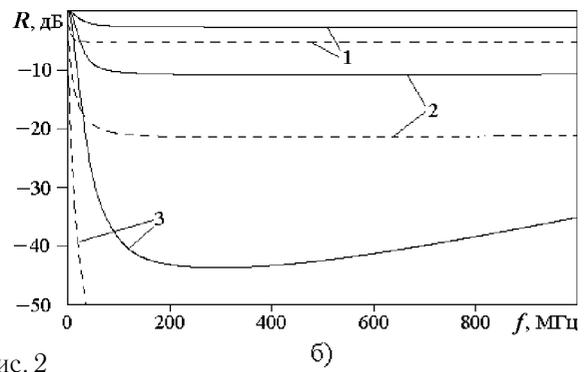
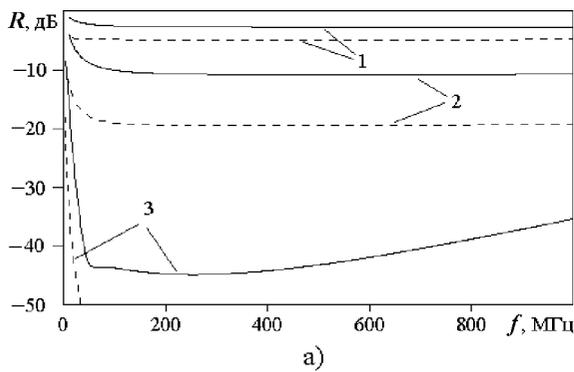


Рис. 2

Из анализа рис. 1, 2 можно сделать следующие выводы.

Во-первых, в рассматриваемом широком диапазоне частот $f = 0 \div 1000$ МГц геометрическая оптика практически непригодна для определения КО, поскольку она дает регулярно заниженные результаты, в ряде случаев на несколько порядков величины отличающиеся от точных (см., например, кривые 2, 3 на рис. 1б и кривые 3 на рис. 2а, 2б). В связи с этим в дальнейших исследованиях отражательных свойств подобных ПО необходимо использовать только точные решения.

Во-вторых, из анализа точных зависимостей следует, что характер частотных зависимостей КО слоев с квадратичным и экспоненциальным законами спадаания электронной концентрации примерно одинаков: в декаметровом диапазоне КО уменьшается с увеличением частоты (причем на больших высотах уменьшение более резкое), в метровом и дециметровом диапазонах частотная зависимость КО достаточно пологая (особенно на меньших высотах). Пологий характер частотной зависимости КО обусловлен особенностью поглощения радиоволн метрового и дециметрового диапазонов. В этом случае на высотах $H = 20 \div 40$ км выполняется условие $\omega < \nu$, при котором показатель поглощения $\alpha \propto 1/\omega$. Как видно из (10), при такой зависимости $\alpha_j(\omega)$ коэффициент отражения $R(\omega) \approx \text{const}$ в широкой полосе частот. Увеличение КО с понижением частоты в декаметровом диапазоне и с увеличением частоты в дециметровом и сантиметровом диапазонах обусловлено уменьшением дифференциального ослабления радиоволн $k\alpha$ из-за известной частотной зависимости показателя поглощения: $\alpha(\omega) \propto 1/\omega^{1/2}$ на низких частотах ($\omega \ll \nu$) и $\alpha(\omega) \propto 1/\omega^3$ на высоких частотах ($\omega \gg \nu$). В обоих случаях показатель экспоненты в (10) уменьшается, что в итоге приводит к увеличению R . Минимум КО достигается примерно на тех же частотах, что и максимум дифференциального ослабления.

Как видно из приведенных рисунков, меньшие значения КО достигаются в плазменных слоях, создаваемых на больших высотах, причем с меньшими энергетическими затратами. В частности, на вы-

соте $H = 40$ км при $W = 0,15$ кВт/м² (рис. 1а) минимальное достижимое значение КО приблизительно равно -8 дБ. При этом в очень широком диапазоне частот $f = 50 \div 1000$ МГц, составляющем 20 октав, величина КО не превышает уровень -5 дБ. Зависимость КО от W весьма резкая. Так, в рассмотренном примере при увеличении W всего в 5 раз (рис. 2а) минимальное достижимое значение КО уменьшается до -43 дБ, а достижимый уровень КО в указанной выше полосе частот опускается до -35 дБ. Расчеты показывают, что при дальнейшем увеличении W в 2 раза достижимый уровень КО уменьшается до приблизительно -72 дБ, что, как показывает анализ, в основном обусловлено соответствующим увеличением дифференциального ослабления.

Для оценки абсолютных значений мощности плазменного источника предположим, что требуемая для прикрытия объекта площадь сечения слоя равна геометрической площади S ракурсного сечения объекта. Тогда при типовых значениях S порядка десятков квадратных метров и высоте полета объекта $30 \div 40$ км расходимая мощность источника $P_{\text{ПИ}} = WS$, необходимая для обеспечения широкополосного (около 20 октав) уменьшения радиолокационного отражения на приблизительно $20 \div 40$ дБ, должна составлять от единиц до десятков кВт.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные на основе точных одномерных решений результаты расчета КО декаметровых и дециметровых волн от аэродинамического объекта, прикрытого поглощающим плазменным образованием на тропосферных высотах полета, показывают существенное влияние поглощения радиоволн на достижимые уровни КО. Наименьшие значения КО достигаются в образованиях, создаваемых на больших тропосферных высотах, причем с меньшими энергетическими затратами. Широкополосность поглощающих свойств плазменных образований в метровом и дециметровом диапазонах может составлять десятки октав. Мощности плазменных источников, обеспечивающих широкополосное (до 20 октав) уменьшение КО на $20 \div 40$ дБ, должны составлять от единиц до десятков кВт, что вполне укладывается в рамки бортовых энергетических ресурсов современных скоростных летательных аппаратов [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеев В. Б., Шилов Н. В., Ярыгин А. П. — В сб.: 13-я Всесоюзн. конф. по распротр. радиоволн: Тез. докладов. — М.: Наука, 1981. Ч. 1. — С. 302.
2. Колычев С. А., Ярыгин А. П. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 1. С. 5.
3. Михайлов Г. Д., Воронов В. А. // Оборонная техника. 1995. № 12. С. 35.
4. Сафонов И. Б. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 8. С. 1400.
5. Авдеев В. Б., Лимонов Е. А., Ярыгин А. П. — В сб.: Рассеяние электромагнитных волн. — Таганрог: Таганрогский радиотехнический институт, 1983. Вып. 4. — С. 87.
6. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. — Минск: Наука и техника, 1968. — 538 с.
7. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. — 304 с.
8. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
9. Алексеев С. // Зарубежное военное обозрение. 1994. № 4. С. 45; № 5. С. 42.

5 ЦНИИИ МО РФ, г. Воронеж,
Россия

Поступила в редакцию
26 ноября 1998 г.

**POSSIBLE LEVELS OF REDUCTION OF RADIOWAVE REFLECTION FROM AERODYNAMIC OBJECT COVERED BY
ABSORBING PLASMA**

V. B. Avdeev and K. P. Piskunov

We estimate possible levels of reduction of backward reflection of radio waves from an aerodynamic object covered by absorbing plasma that is formed by this object at tropospheric-flight altitudes. The effect is analyzed using model one-dimensional problems on radio wave propagation in inhomogeneous layers of absorbing plasma.

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ю. А. Бобков, Г. А. Уткин

Математическое моделирование физических условий на движущейся границе в задачах об отражении волн приводит к конечно-разностному уравнению с переменным запаздыванием. Существование и единственность решения уравнения при условии, что скорость движения отражателя меньше скорости распространения волн, доказывается с использованием принципа сжимающих отображений методом последовательных приближений. Показывается, что решение можно выразить в виде функции от сложного аргумента, зависящего от одной переменной. Необходимую точность численных расчетов обеспечивают частичные суммы при представлении аргумента бесконечным сходящимся рядом.

При математическом моделировании физических задач об отражении волн от движущихся границ используются волновые уравнения и возникает необходимость нахождения неизвестной функции $f(t - x/c)$, описывающей отраженную волну, через известные функциональные зависимости падающей на границу волны $h(t + x/c)$ и закона движения границы $a(t)$ путем разрешения конечно-разностного функционального уравнения вида

$$f\left(t - \frac{a(t)}{c}\right) = -h\left(t + \frac{a(t)}{c}\right). \quad (1)$$

Здесь t — текущее время, x — координата, c — скорость распространения волны. Из уравнения (1) следует, что задачу нахождения неизвестной функции f сложного аргумента можно свести к задаче аналитического выражения функции $f(\eta)$ простого аргумента через заданные зависимости h и a . На самом деле, вводя обозначение

$$\eta = t - \frac{a(t)}{c}, \quad (2)$$

то есть осуществляя в (1) замену переменных, выражая из (2) обратную функцию

$$t = \tau(\eta) \quad (3)$$

и представляя функцию сложного аргумента

$$a(\tau(\eta)) = c\tau(\eta) - c\eta,$$

можно записать

$$f(\eta) = -h\left(\eta + \frac{2a(\tau(\eta))}{c}\right) = h(2\tau(\eta) - \eta). \quad (4)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению обратной функции (3).

Теорема. Если первая производная функции $a(t)$ удовлетворяет неравенству $|a'(t)| < c$, где $c = \text{const}$, то функция $\eta = t - \frac{a(t)}{c}$ имеет единственную обратную функцию $t = \tau(\eta)$.

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений. Полагая в качестве нулевого приближения

$$t_0 = \eta,$$

получим из (2) в качестве очередных приближений

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \frac{a(t_0)}{c} = \eta + \frac{a(\eta)}{c}, \\ t_2 &= t_0 + \frac{a(t_1)}{c} = \eta + \frac{a\left(\eta + \frac{a(\eta)}{c}\right)}{c}, \\ &\dots\dots\dots \\ t_N &= t_0 + \frac{a(t_{N-1})}{c} = \eta + \frac{a(t_{N-1})}{c}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку

$$t_{N+1} - t_N = \frac{1}{c} \frac{a(t_N) - a(t_{N-1})}{t_N - t_{N-1}} (t_N - t_{N-1}),$$

то, воспользовавшись теоремой Лагранжа о конечном приращении [1], получаем

$$t_{N+1} - t_N = \frac{a'(X)}{c} (t_N - t_{N-1}), \quad (6)$$

где $X \in [t_{N-1}; t_N]$, и, так как $|a'(X)/c| \leq q < 1$, то выполнено условие принципа сжимающих отображений (теорема Банаха) [1, 2]. Следовательно, последовательные приближения (5) имеют единственную неподвижную точку, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} t_N = t = \tau(\eta),$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что выражение (5) можно записать в виде

$$t_N = \eta + \frac{a(\eta)}{c} r_N(\eta), \quad (7)$$

где

$$r_N(\eta) = \frac{a(t_{N-1})}{a(\eta)} = \frac{a\left(\eta + \frac{a(\eta)}{c} r_{N-1}(\eta)\right)}{a(\eta)},$$

или в виде

$$t_N = \eta + \frac{a(\eta)}{c} + s_N(\eta),$$

где $s_N = \frac{a(\eta)}{c} (r_N(\eta) - 1)$. Аналогично предыдущему, последовательные приближения r_N и s_N имеют единственные неподвижные точки, поскольку подстановка разностей

$$t_{N+1} - t_N = \frac{a(\eta)}{c} (r_{N+1}(\eta) - r_N(\eta)), \quad t_N - t_{N-1} = \frac{a(\eta)}{c} (r_N(\eta) - r_{N-1}(\eta))$$

в (6) приводит к условию сжимаемости соответствующих отображений.

Раскладывая очередные приближения (7) в ряд Тейлора [3], получаем

$$\begin{aligned} r_0 &= 0, \quad r_1 = 1, \\ r_2 &= 1 + \frac{a'\left(\eta + \theta_2 \frac{a(\eta)}{c}\right)}{c} = 1 + \frac{a'(\eta)}{c} + \frac{a(\eta)a''(\eta)}{2!c^2} + \dots + \frac{a^{n-1}(\eta)}{n!c^n} a^{(n)}\left(\eta + \vartheta_2 \frac{a(\eta)}{c}\right), \\ r_3 &= 1 + \frac{a'\left(\eta + \theta_3 \frac{a(\eta)}{c}\right)}{c} r_2 = 1 + \frac{a'(\eta)}{c} r_2 + \frac{a(\eta)a''(\eta)}{2!c^2} r_2^2 + \dots + \frac{a^{n-1}(\eta)a^{(n)}\left(\eta + \vartheta_3 \frac{a(\eta)}{c} r_2\right)}{n!c^n} r_2^n, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 r_N &= 1 + \frac{a' \left(\eta + \theta_N \frac{a(\eta)}{c} r_{N-1} \right)}{c} r_{N-1} = 1 + \frac{a'(\eta)}{c} r_{N-1} + \frac{a(\eta)a''(\eta)}{2!c^2} r_{N-1}^2 + \dots + \\
 & + \frac{a^{(n-1)}(\eta)a^{(n)} \left(\eta + \vartheta_N \frac{a(\eta)}{c} r_{N-1} \right)}{n!c^n} r_{N-1}^n, \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

где $\theta_m \in [0; 1], \vartheta_m \in [0; 1], m = 2, 3, \dots$ Таким образом,

$$t = \tau(\eta) = \eta + \frac{a(\eta)}{c} r(\eta) = \eta + \frac{a(\eta)}{c} + s(\eta), \tag{9}$$

и $a(\tau(\eta)) = a(\eta)r(\eta)$.

С учетом (4) и (9) получаем, что

$$f(\eta) = -h \left(\eta + \frac{2a(\eta)}{c} r(\eta) \right) = -h \left(\eta + \frac{2a(\eta)}{c} + 2s(\eta) \right). \tag{10}$$

Используя соотношения (8) и выбирая слагаемые одного порядка малости относительно параметра $1/c$, можно представить $r(\eta)$ в виде бесконечного сходящегося ряда:

$$r(\eta) = \lim_{N \rightarrow \infty} R_N(\eta),$$

где $R_N(\eta)$ — частичные суммы этого ряда [1],

$$\begin{aligned}
 R_0 &= 0, R_1 = 1, R_2(\eta) = 1 + \frac{a'(\eta)}{c}, \\
 R_3(\eta) &= R_2(\eta) + \frac{1}{c^2} \left[(a'(\eta))^2 + \frac{a(\eta)a''(\eta)}{2!} \right], \\
 R_4(\eta) &= R_3(\eta) + \frac{1}{c^3} \left[(a'(\eta))^3 + \frac{3a(\eta)a'(\eta)a''(\eta)}{2!} + \frac{a^2(\eta)a'''(\eta)}{3!} \right], \\
 R_5(\eta) &= R_4(\eta) + \frac{1}{c^4} \left[(a')^4 + 3a(a')^2 a'' + \frac{a^2(a'')^2}{2!} + \frac{4a^2 a' a'''}{3!} + \frac{a^3 a^{(IV)}}{4!} \right], \\
 R_6(\eta) &= R_5(\eta) + \frac{1}{c^5} \left[(a')^5 + 5a(a')^3 a'' + \frac{5a^2 a' (a'')^2}{2!} + \frac{10a^2 (a')^2 a'''}{3!} + \frac{5a^3 a'' a'''}{2!3!} + \frac{5a^3 a' a^{(IV)}}{4!} + \frac{a^4 a^{(V)}}{5!} \right], \\
 R_7(\eta) &= R_6(\eta) + \frac{1}{c^6} \left[(a')^6 + \frac{13a(a')^4 a''}{2!} + \frac{9a^2 (a')^2 (a'')^2}{(2!)^2} + \frac{a^3 (a'')^3}{(2!)^3} + \frac{14a^2 (a')^3 a'''}{3!} + \frac{16a^3 a' a'' a'''}{2!3!} + \right. \\
 & \left. + \frac{3a^4 (a''')^2}{(3!)^2} + \frac{15a^3 (a')^2 a^{(IV)}}{4!} + \frac{4a^4 a'' a^{(IV)}}{2!4!} + \frac{6a^4 a' a^{(V)}}{5!} + \frac{a^5 a^{(VI)}}{6!} \right], \\
 & \dots\dots\dots,
 \end{aligned} \tag{11}$$

при этом

$$S_N(\eta) = \frac{a(\eta)}{c} (R_N(\eta) - 1).$$

Если функция $a(t)$ является периодической с периодом T и модуль ее не превышает некоторой величины A , то

$$|a^{(N)}(t)| \leq A \left(\frac{2}{T}\right)^N,$$

поскольку

$$\left| \int_0^T a'(t) dt \right| = |a(T) - a(0)| \leq |a(T)| + |a(0)| \leq 2A$$

и, следовательно, $|a'(t)| \leq V = \frac{2A}{T}$,

$$\left| \int_0^T a''(t) dt \right| = |a'(T) - a'(0)| \leq |a'(T)| + |a'(0)| \leq \frac{4A}{T},$$

и, следовательно, $|a''(t)| \leq A \frac{2^2}{T^2}$ и т. д. В предположении, что скорость движения границы V много меньше скорости волны c , величина поправок, связанных с учетом очередного слагаемого ряда $r(t)$, не превосходит величины порядка отношения V/c в соответствующей степени, поскольку для модулей произведений, входящих в очередные члены частичных сумм, справедливы соотношения вида $|a(t)a''(t)| \leq V^2$, $|a^2(t)a'''(t)| \leq V^3$ и т. д. Последнее обстоятельство позволяет в практических инженерных приложениях, выбирая соответствующий $R_N(t)$ из (11), вычислять функцию, описывающую отраженную волну (10), с необходимой точностью. Поскольку аналогично (6) разность частичных сумм $|R_{N+1} - R_N|$ всегда меньше, чем $|R_N - R_{N-1}|$, то можно оценивать точность вычислений, используя формулы (11) и при менее жестком ограничении $V/c < 1$ вместо $V/c \ll 1$.

Итак, предложенный метод решения рассмотренного функционального уравнения и связанных с ним уравнений позволяет в аналитической форме находить решения и с необходимой точностью производить численные расчеты.

Например, созданные к настоящему времени методики локации и аппаратура измерения перемещений отражателей базируется на упрощенных представлениях о характере взаимодействия волн с неоднородностями. Считается, что набег фазы волны при распространении от излучателя до цели и обратно к приемнику пропорционален удвоенному расстоянию между измерительным прибором и вибрирующим объектом, т. е. подразумевается, что за время распространения сигнала отражатель не смещается [4]. Область применимости такого квазистатического представления и ошибки измерения, связанные с таким предположением, находятся с помощью описанного выше метода. Для нулевого приближения из (10), (11) следует

$$f_0(\eta) = -h(\eta), \quad R_0 = 0,$$

что соответствует неподвижной отражающей границе, т. е. статическому случаю. В первом приближении

$$f_1(\eta) = -h(\eta + 2a(\eta)/c), \quad R_1 = 1,$$

что и соответствует изложенному квазистатическому представлению, используемому на практике. При использовании гармонического зондирующего сигнала единичной амплитуды, принимаемый сигнал можно представить в виде

$$f(t) = -\sin \omega(t + 2a(t)r(t)/c).$$

Как правило, для извлечения информации о законе $a(t)$ движения границы исследуемого объекта отраженный сигнал подается на фазовый детектор, т. е. умножается на опорный (излученный) сигнал

$\sin(\omega t + \varphi)$. Затем выделяют низкочастотную часть спектра (несущую частоту и ее гармоники отфильтровывают) и обрабатывают сигнал вида

$$\sin(2\omega a(t)r(t)/c),$$

из которого и выделяют закон движения отражателя, считая в квазистатическом приближении (12) $r(t) = R_1 = 1$. Следовательно, существующие методики обработки отраженного сигнала привносят неучитываемую относительную ошибку

$$\Delta = [a(t)r(t) - a(t)]/a(t) = r(t) - 1$$

в измерение смещения $a(t)$ отражающей границы. Отсюда, задаваясь допустимой относительной ошибкой измерения

$$\delta = \Delta a(t)/a(t),$$

где $\Delta a(t)$ — погрешность измерения $a(t)$, получаем следующее условие применимости квазистатического представления:

$$\Delta = r(t) - 1 = \delta.$$

В частности, для второго приближения из (11) следует, что

$$|a'(t)| \leq c\delta.$$

Полагая для примера $\delta = 10^{-2}$, получаем, что скорость движения вибрирующей границы не должна превышать приблизительно 3 м/с при звуколокации в воздухе. Таким образом, учет очередных приближений (11) позволит усовершенствовать методики обработки отраженных сигналов для повышения точности измерений [5].

Использование результатов рассмотренного выше метода решения функционального уравнения позволяет также находить поле в резонаторе с произвольно и независимо движущимися плоскопараллельными зеркалами не только графическим способом, но и аналитически, как описано в [6], и кроме того, рассматривать задачи о переносе спектра механических вибраций на зондирующую волну [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1978.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — С. 74.
3. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1969. С. 14.
4. Гордеев Б. А., Родюшкин В. М. // Метрология. 1990. № 1. С. 54.
5. Бобков Ю. А. Зондирование акустическими волнами колебаний механических систем. Нелинейные колебания механических систем.: Тезисы докладов III конф. — Н. Новгород: ННГУ, 1993. С. 37.
6. Бобков Ю. А., Весницкий А. И. Взаимодействие звуковых волн с движущимися границами. Модели и анализ систем. — Н. Новгород, 1995. С. 44.
7. Бобков Ю. А., Лисенкова Е. Е. Волновые задачи механики. — Н. Новгород, 1994. С. 65.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
2 марта 1998 г.

ON A METHOD FOR SOLUTION OF FUNCTIONAL EQUATION WITH VARIABLE DELAY*Yu. A. Bobkov and G. A. Utkin*

When problems of wave reflection are examined, physical conditions on a moving surface are simulated by a difference functional equation with variable delay. If the speed of the reflector is less than the wave velocity, existence and uniqueness of the solution are proved by the method of successive approximations and the principle of contractive mapping. The solution is represented by a function of complicated argument that depends on single variable. Convergent series expansions of this argument are suitable for numerical calculations. Partial sums of this series ensure the given accuracy of a solution.

УДК 62-50

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ АПОСТЕРИОРНОГО СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

С. В. Соколов, Ю. И. Коляда, П. В. Долгополый

Решена задача апостериорного синтеза оптимального управления выбором состояния в нелинейных динамических системах со случайной структурой.

Весьма интересной с теоретической и практической точек зрения, но нерешенной до настоящего времени задачей в теории динамических систем со случайной структурой является задача синтеза оптимального управления выбором структуры в смысле некоторого известного критерия на основе информации, полученной от измерителей.

Известные в этом направлении исследований классические результаты [1] позволяют решать задачу оптимального управления только самой системой (или ее конкретной структурой), но не выбором структуры. В то же время многие существующие сложные технические системы наблюдения, например многопозиционные измерительные комплексы, включающие измерительные устройства различной физической природы (радиометрические, оптические и т. д.), позволяют за счет наличия сигналов с различных измерителей сформировать, как правило, целую совокупность структур наблюдения разной конфигурации, но с единым целевым назначением. При этом вопрос преимущественного использования какой-либо структуры на заданном интервале времени, а также синтеза алгоритма их смены в соответствии с целевым назначением всей системы остается открытым.

В связи с этим решение задачи синтеза оптимального управления выбором структуры нелинейной стохастической системы по наблюдениям ее вектора состояния при самых общих предположениях о характере используемого критерия оптимальности выбора представляет существенный интерес.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем задачу синтеза оптимального управления следующим образом.

Рассмотрим нелинейную динамическую систему со случайной структурой, в общем случае [1] описываемую в l -м состоянии векторным уравнением вида

$$\dot{\vec{Y}} = f^{(l)}(\vec{Y}, t) + H^{(l)}(\vec{Y}, t)\vec{V}_t^{(l)}, \quad \vec{Y}(t_0) = \vec{Y}_0,$$

где $l = 1, 2, \dots, s$ — номер состояния (структуры), $\vec{Y}(t)$ — вектор состояния системы, $f^{(l)}(\vec{Y}, t)$ и $H^{(l)}(\vec{Y}, t)$ — нелинейные векторные и матричные функции размерности соответственно $n^{(l)} \leq N$ и $m^{(l)} \times n^{(l)}$, $N = \max\{n^{(1)}, n^{(2)}, \dots, n^{(s)}\}$, $\vec{V}_t^{(l)}$ — белый гауссовский нормированный вектор-шум размерности $m^{(l)}$. Положим, что наблюдатель вектора состояния такой системы описывается, в свою очередь, уравнением

$$\vec{Z} = \vec{C}^{(l)}(\hat{\vec{Y}}, t) + \vec{N}_t^{(l)},$$

где \vec{Z} — M -мерный вектор выходных сигналов измерителя, $\vec{C}^{(l)}(\hat{\vec{Y}}, t)$ — вектор-функция размерности M наблюдения l -ой структуры, $\vec{N}_t^{(l)}$ — белый гауссовский вектор-шум размерности M с нулевым средним и матрицей интенсивностей $D_N^{(l)}(t)$, а оценка $\hat{\vec{Y}}$ осуществляется на основе какого-либо известного метода нелинейной фильтрации [2]. Требуется найти такой закон перехода $\nu(\hat{\vec{Y}}, t, \vec{Z})$ из одной

структуры в другую, который обеспечивал бы на заданном интервале времени $T = [t_0, t_k]$ оптимум некоторого вероятностного функционала J_0 , в общем случае нелинейно зависящего от апостериорной плотности вероятности (АПВ) $\rho(\vec{Y}, \vec{Z}, t)$ вектора состояния \vec{Y} :

$$J_0 = \int_T \int_{\vec{Y}_*} \Phi[\rho(\vec{Y}, \vec{Z}, t)] d\vec{Y} dt,$$

где \vec{Y}_* — область определения аргумента \vec{Y} , в которой ищется оптимум, Φ — заданная нелинейная аналитическая функция.

Подобная форма критерия J_0 позволяет охватить достаточно широкий класс условий оптимальности, требуемых на практике: условие максимума (минимума) апостериорной вероятности существования вектора \vec{Y} в области \vec{Y}_* на заданном интервале времени T , что соответствует соотношению $\Phi(\rho) = \pm \rho$; условие минимума отклонения искомого АПВ ρ от заданной g , реализующейся при

$$\Phi(\rho) = (\rho - g)^2, \quad \Phi(\rho) = |\rho - g|, \quad \Phi(\rho) = -\rho \ln \left[\frac{g}{\rho} \right]$$

(критерий Кульбака) и др.; условие максимума информации о векторе состояния \vec{Y} (или условие его минимальной энтропии), соответствующее

$$\Phi(\rho) = \rho \ln \rho, \quad \Phi(\rho) = \rho \left[\frac{\partial \ln \rho}{\partial \vec{Y}} \right]^2$$

(критерий Фишера) и др.

В качестве вектора, управляющего структурными переходами, наиболее целесообразно использовать вектор интенсивностей смены состояния [1]

$$\vec{\nu}(\hat{Y}, \vec{Z}, t) = \left(0, \nu_{21}(\hat{Y}, \vec{Z}, t), \dots, \nu_{s1}(\hat{Y}, \vec{Z}, t), \nu_{12}(\hat{Y}, \vec{Z}, t), 0, \nu_{32}(\hat{Y}, \vec{Z}, t), \dots, \nu_{s2}(\hat{Y}, \vec{Z}, t), \right. \\ \left. \nu_{13}(\hat{Y}, \vec{Z}, t), \nu_{23}(\hat{Y}, \vec{Z}, t), \nu_{43}(\hat{Y}, \vec{Z}, t), \dots, \nu_{21}(\hat{Y}, \vec{Z}, t), \nu_{(s-1)s}(\hat{Y}, \vec{Z}, t), 0 \right)^T,$$

где $\nu_{lr}(\hat{Y}, \vec{Z}, t)$ — интенсивность перехода из состояния l в состояние r . При формировании вектора $\vec{\nu}(\hat{Y}, \vec{Z}, t)$ во избежание частой смены состояний потребуем, например, минимальности его квадратичной формы на заданном интервале времени T для $\hat{Y} \in \vec{Y}_*$, т. е. минимальности выражения

$$\left| \int_T \vec{\nu}^T(\hat{Y}, \vec{Z}, t) \vec{\nu}(\hat{Y}, \vec{Z}, t) dt \right|.$$

Так как вектор $\vec{\nu}$ содержит нулевые компоненты, то в дальнейшем осуществляется поиск не самого вектора $\vec{\nu}$, а вектора $\vec{\nu}_0$, связанного с $\vec{\nu}$ соотношением $\vec{\nu} = E_0 \vec{\nu}_0$, где $\vec{\nu}_0$ — вектор, образованный из вектора $\vec{\nu}$ исключением нулевых компонент, E_0 — матрица, образованная из единичной добавлением нулевых строк для формирования соответствующих нулевых элементов в векторе $\vec{\nu}$. С учетом вышеизложенного минимизируемый критерий J принимает вид

$$J = \int_T \int_{\vec{Y}_*} \Phi[\rho(\vec{Y}, \vec{Z}, t)] d\vec{Y} dt + \int_T \vec{\nu}_0^T(\hat{Y}, \vec{Z}, t) \vec{\nu}_0(\hat{Y}, \vec{Z}, t) dt. \quad (1)$$

В наиболее характерном для практики случае непрерывного процесса \vec{Y} , когда восстановленные значения $\vec{Y}^{(l)}$ l -го состояния процесса совпадают с конечными значениями r -го состояния, система уравнений оценок, полученных на основе гауссового приближения (обеспечивающего, как правило, требуемый компромисс между точностью и объемом вычислительных затрат), имеет следующий вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{P}}_l &= - \sum_{r=1}^s \left(\hat{P}_l \nu_{lr}(\hat{Y}^{(l)}, \vec{Z}, t) - \hat{P}_r \nu_{rl}(\hat{Y}^{(l)}, \vec{Z}, t) \right) + \frac{1}{2} \hat{P}_l \sum_{r=1}^s \hat{P}_r \Psi^{(r)}(\hat{Y}^{(l)}, \vec{Z}, t), \\ \dot{\hat{Y}}^{(l)} &= f^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t) + R^{(l)} \frac{\partial (\vec{C}^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t))^T}{\partial \hat{Y}} (D_N^{(l)})^{-1} [\vec{Z} - \vec{C}^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t)] + \sum_{r=1}^s \frac{\hat{P}_r(t)}{\hat{P}_l(t)} \nu_{rl}(\hat{Y}^{(l)}, \vec{Z}, t) [\hat{Y}^{(r)} - \hat{Y}^{(l)}], \\ \dot{R}^{(l)} &= R^{(l)} \frac{\partial (f^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t))^T}{\partial \hat{Y}} + \frac{\partial f^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t)}{\partial \hat{Y}} R^{(l)} + H^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t) (H^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t))^T - \\ &\quad - R^{(l)} \frac{\partial (C^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t))^T}{\partial \hat{Y}} (D_N^{(l)})^{-1} \frac{\partial C^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t)}{\partial \hat{Y}} R^{(l)} + \\ &\quad + \sum_{r=1}^s \frac{\hat{P}_r(t)}{\hat{P}_l(t)} \nu_{rl}(\hat{Y}^{(l)}, \vec{Z}, t) \left[R^{(r)} - R^{(l)} + [\hat{Y}^{(r)} - \hat{Y}^{(l)}][\hat{Y}^{(r)} - \hat{Y}^{(l)}]^T \right], \end{aligned}$$

где $l = 1, 2, \dots, s$,

$$\Psi^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, \vec{Z}, t) = \sum_{p,q=1}^M \frac{\hat{D}_{pq}^{(l)}(t)}{|D_N^{(l)}(t)|} [Z_p - C_p^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t)] \times [Z_q - C_q^{(l)}(\hat{Y}^{(l)}, t)],$$

$\hat{D}_{pq}^{(l)}(t)$ — алгебраическое дополнение элемента, расположенного на p -й строке q -го столбца в матрице $D_N^{(l)}(t)$, p, q — индексы соответствующих компонент векторов, \hat{P}_l — апостериорная вероятность реализации l -й структуры процесса, $R^{(l)}$ — апостериорная ковариационная матрица оценки $\hat{Y}^{(l)}$.

Для дальнейшего поиска общего вида решения представим приведенную систему следующим образом. Введем векторы $\hat{P} = (\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_s^T)^T$, $\hat{Y} = (\hat{Y}^{(1)T} \dots \hat{Y}^{(s)T})^T$ и, используя известную операцию преобразования матрицы Φ в вектор $\vec{\Phi}^{(v)}$ [3], запишем уравнения для оценки, разделяя составляющие, зависящие и независимые от компонент вектора \vec{v}_0 :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{P}} &= \vec{\alpha}(\hat{P}, \hat{Y}, t) + \begin{vmatrix} \sum_{r=1}^s (\hat{P}_r \nu_{r1} - \hat{P}_1 \nu_{1r}) \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{r=1}^s (\hat{P}_r \nu_{rs} - \hat{P}_s \nu_{sr}) \end{vmatrix}, \quad \dot{\hat{Y}} = \vec{\beta}(\hat{Y}, \vec{R}^{(v)}, t) + \begin{vmatrix} \sum_{r=1}^s \hat{G}_{r1}(\hat{Y}, \hat{P}) \nu_{r1} \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{r=1}^s \hat{G}_{rs}(\hat{Y}, \hat{P}) \nu_{rs} \end{vmatrix}, \\ \dot{\vec{R}}^{(v)} &= \vec{\gamma}(\hat{Y}, \vec{R}^{(v)}, t) + \begin{vmatrix} \sum_{r=1}^s Q_{r1}(\hat{Y}, \vec{R}^{(v)}, \hat{P}) \nu_{r1} \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{r=1}^s Q_{rs}(\hat{Y}, \vec{R}^{(v)}, \hat{P}) \nu_{rs} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\vec{R}^{(v)} = \begin{vmatrix} R^{(1)(v)} \\ \dots\dots \\ R^{(s)(v)} \end{vmatrix}, \quad G_{rl}(\hat{Y}, \hat{P}) = \frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_l} \left(\hat{Y}^{(r)} - \hat{Y}^{(l)} \right),$$

$$Q_{rl}(\hat{Y}, \vec{R}^{(v)}, \hat{P}) = \left[R^{(r)} - R^{(l)} + (\hat{Y}^{(r)} - \hat{Y}^{(l)}) (\hat{Y}^{(r)} - \hat{Y}^{(l)})^T \right] \frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_l}$$

Объединяя векторы \hat{Y} и $\vec{R}^{(v)}$ в обобщенный вектор оценки $\vec{X} = \begin{pmatrix} \hat{Y} \\ \vec{R}^{(v)} \end{pmatrix}$, вышеприведенную систему уравнений представим в виде

$$\dot{\hat{P}} = \vec{\alpha}(\hat{P}, \vec{X}, t) + [(E \oplus \hat{P}^T) - \hat{P}(E \oplus \vec{I}_s)E_1]E_0\vec{v}_0,$$

$$\dot{\vec{X}} = \vec{\varphi}(\vec{X}, t) + T(\hat{P}, \vec{X})E_0\vec{v}_0,$$

где \oplus — символ кронекеровского произведения, \vec{I}_s — единичный вектор-строка размерности s ,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \underbrace{0 \dots 0}_{s} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{0 \dots 0}_{s(s-1)} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \underbrace{0 \dots 0}_{s} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{0 \dots \dots \dots 0}_{s^2-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\vec{X}, t) = \begin{pmatrix} \beta(\vec{X}, t) \\ \gamma(\vec{X}, t) \end{pmatrix},$$

E — единичная матрица,

$$T(\hat{P}, \vec{X}) = \begin{pmatrix} G_{11}(\hat{Y}, \hat{P}) \dots G_{s1}(\hat{Y}, \hat{P}) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ Q_{11}(\hat{Y}, \vec{R}^{(v)}, \hat{P}) \dots Q_{s1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В канонической форме данная система уравнений имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{P}} \\ \dot{\vec{X}} \end{pmatrix} = \vec{A}(\hat{P}, \vec{X}, t) + \vec{B}(\hat{P}, \vec{X})\vec{v}_0, \tag{2}$$

где

$$\vec{A}(\hat{P}, \vec{X}, t) = \begin{pmatrix} \alpha(\hat{P}, \vec{X}, t) \\ \varphi(\vec{X}, t) \end{pmatrix}, \quad \vec{B}(\hat{P}, \vec{X}) = \begin{pmatrix} (E \oplus \hat{P}^T) - \hat{P}(E \oplus \vec{I}_s)E_1 \\ T(\hat{P}, \vec{X}) \end{pmatrix} E_0,$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится, во-первых, к определению вектора \vec{v}_0 , обеспечивающего минимум функционала (1) с учетом использования в последнем в качестве функции АПВ ее аппроксимации $\hat{\rho}(\vec{Y}, \hat{\vec{P}}, \vec{X}, t)$, определяемой выбранным методом формирования оценок (в данном случае — гауссовской), а во-вторых — к выбору максимальной компоненты в векторе $\hat{\vec{P}}$, номер которой и будет определять номер требуемой структуры вектора состояния.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Первый этап решения — определение оптимального вектора \vec{v}_0 — может быть осуществлен на основе использования принципа максимума [1]. Гамильтониан H в данном случае имеет вид

$$H(\hat{\vec{P}}, \vec{X}, t) = \int_{Y_*} \Phi[\hat{\rho}(\vec{Y}, \hat{\vec{P}}, \vec{X}, t)] d\vec{Y} + \vec{v}_0^T(\hat{\vec{P}}, \vec{X}, \vec{Z}, t) \vec{v}_0(\hat{\vec{P}}, \vec{X}, \vec{Z}, t) + \\ + \vec{\lambda}^T \{ \vec{A}(\hat{\vec{P}}, \vec{X}, t) + \vec{B}(\hat{\vec{P}}, \vec{X}) \vec{v}_0(\hat{\vec{P}}, \vec{X}, \vec{Z}, t) \},$$

где $\vec{\lambda}$ — вектор сопряженных переменных Z , откуда из условия стационарности немедленно определяется оптимальный вектор $\vec{v}_0^* = -\frac{1}{2} \vec{B}(\hat{\vec{P}}, \vec{X})^T \vec{\lambda}$.

Подстановка вектора \vec{v}_0^* в (2) и в сопряженную систему уравнений приводит к необходимости решения следующей двухточечной краевой задачи:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \dot{\hat{\vec{P}}} \\ \dot{\vec{X}} \end{vmatrix} = \vec{A}(\hat{\vec{P}}, \vec{X}, t) - \frac{1}{2} \vec{B}(\hat{\vec{P}}, \vec{X}) \vec{B}^T(\hat{\vec{P}}, \vec{X}) \vec{\lambda}, \\ \dot{\vec{\lambda}} = - \int_{Y_*} \left(\frac{\partial \Phi(\vec{Y}, \hat{\vec{P}}, \vec{X}, t)}{\partial \hat{\vec{P}}} \quad ; \quad \frac{\partial \Phi(\vec{Y}, \hat{\vec{P}}, \vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} \right)^T d\vec{Y} - \\ - \left[\left(\frac{\partial A(\hat{\vec{P}}, \vec{X}, t)}{\partial \hat{\vec{P}}} \quad ; \quad \frac{\partial A(\hat{\vec{P}}, \vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} \right)^T - \frac{1}{2} \vec{\lambda}^T \vec{B}(\hat{\vec{P}}, \vec{X}) \left(\frac{\partial \vec{B}(\hat{\vec{P}}, \vec{X})}{\partial \hat{\vec{P}}} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{B}(\hat{\vec{P}}, \vec{X})}{\partial \vec{X}} \right)^T \right] \vec{\lambda}, \\ \hat{\vec{P}}(t_0) = \hat{\vec{P}}_0, \quad \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0, \quad \vec{\lambda}(t_k) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

интегрирование которой исчерпывает, по существу, теоретическое решение поставленной проблемы, поскольку последующий выбор максимальной компоненты вектора $\hat{\vec{P}}$, определяющей текущий номер требуемой структуры вектора состояния, является тривиальной задачей.

Более того, при выборе структуры точное значение максимальной компоненты вектора $\hat{\vec{P}}$, по существу, не требуется, важен лишь ее номер, что позволяет при практическом решении задачи (3) использовать приближенные методы, ориентированные на компромисс между требуемой точностью и объемом вычислительных затрат. Одним из эффективных с данной точки зрения подходов является метод приближенного инвариантного погружения, трансформирующий систему (3) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемых в реальном масштабе времени [4]:

$$\begin{vmatrix} \dot{\hat{\vec{P}}_*} \\ \dot{\vec{X}}_* \end{vmatrix} = \vec{A}(\hat{\vec{P}}_*, \vec{X}_*, t) - D(t) \int_{Y_*} \left(\frac{\partial \Phi(\vec{Y}, \hat{\vec{P}}_*, \vec{X}_*, t)}{\partial \hat{\vec{P}}_*} \quad ; \quad \frac{\partial \Phi(\vec{Y}, \hat{\vec{P}}_*, \vec{X}_*, t)}{\partial \vec{X}_*} \right)^T d\vec{Y},$$

$$\dot{D} = 2 \left(\frac{\partial \vec{A}(\hat{P}_*, \vec{X}_*, t)}{\partial \hat{P}_*} : \frac{\partial \vec{A}(\hat{P}_*, \vec{X}_*, t)}{\partial \vec{X}_*} \right) D + D \left(\frac{\partial \vec{A}(\hat{P}_*, \vec{X}_*, t)}{\partial \hat{P}_*} : \frac{\partial \vec{A}(\hat{P}_*, \vec{X}_*, t)}{\partial \vec{X}_*} \right)^T + \frac{1}{2} \vec{B}(\hat{P}_*, \vec{X}_*, t) -$$

$$- 2D \int_{\vec{Y}_*} \left(\frac{\partial^2 \Phi(\vec{Y}, \hat{P}_*, \vec{X}_*, t)}{\partial \hat{P}_* \partial \hat{P}_*} : \frac{\partial^2 \Phi(\vec{Y}, \hat{P}_*, \vec{X}_*, t)}{\partial \hat{P}_* \partial \vec{X}_*} : \frac{\partial^2 \Phi(\vec{Y}, \hat{P}_*, \vec{X}_*, t)}{\partial \vec{X}_* \partial \hat{P}_*} : \frac{\partial^2 \Phi(\vec{Y}, \hat{P}_*, \vec{X}_*, t)}{\partial \vec{X}_* \partial \vec{X}_*} \right)^T d\vec{Y} D,$$

где \hat{P}_* , \vec{X}_* — приближенные решения системы (3), D — матрица весовых коэффициентов отклонения приближенного решения от искомого [4].

Для иллюстрации эффективности практического использования предложенного подхода рассмотрим следующий пример.

Пример. Вычислительные особенности предложенного подхода рассмотрим для простейшего случая системы измерения угловой ориентации летательного аппарата, вращающегося вокруг своей продольной оси под действием случайных возмущающих моментов. Осуществляются измерения угловой скорости (в первой структуре) и угла вращения (во второй) с использованием фотодетекторов, имеющих нелинейные входные характеристики. С учетом диапазона измерения угла вращения для аппроксимации тригонометрической формы объекта и функции наблюдения во второй структуре были использованы полиномы третьей степени. В этом случае для нелинейного стохастического процесса со случайной структурой, описываемого уравнением

$$\dot{y}^{(l)} = f^{(l)}(y^{(l)}, t) + V_t,$$

где l принимает значения 1 и 2, $f^{(1)}(y^{(1)}, t) = -\left(y^{(1)}\right)^2$, $f^{(2)}(y^{(2)}, t) = -y^{(2)} + 0,01 \left(y^{(2)}\right)^3$, V_t — нормированный белый гауссовский шум, уравнение наблюдателя которого имеет вид

$$Z = C^{(l)}(y^{(l)}, t) + N_t,$$

где $C^{(1)}(y^{(1)}, t) = 0,5 \left(y^{(1)}\right)^2$, $C^{(2)}(y^{(2)}, t) = 1,2 \left(y^{(2)}\right)^2 - 0,1 \left(y^{(2)}\right)^3$, N_t — нормированный белый гауссовский шум, векторы $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, определяющие правые части уравнений апостериорных оценок процесса, могут быть представлены следующим образом:

$$\vec{\alpha}(\hat{P}, \hat{Y}, t) = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} \hat{P}_1 \sum_{r=1}^2 \hat{P}_r \Psi^{(r)} \\ \hat{P}_2 \sum_{r=1}^2 \hat{P}_r \Psi^{(r)} \end{array} \right|, \quad \Psi^{(1)} = \left[Z - 0,5 \left(\hat{y}^{(1)}\right)^2 \right]^2, \quad \Psi^{(2)} = \left[Z - 1,2 \left(\hat{y}^{(2)}\right)^2 + \left(\hat{y}^{(2)}\right)^3 \right]^2,$$

$$\vec{\beta}(\vec{X}, t) = \left| \begin{array}{c} -\left(\hat{y}^{(1)}\right)^2 + R^{(1)} \hat{y}^{(1)} \left[Z - 0,5 \hat{y}^{(1)} \right]^2 \\ -\hat{y}^{(2)} + 0,01 \left(\hat{y}^{(2)}\right)^3 + R^{(2)} \left[2,4 \hat{y}^{(2)} - 0,03 \hat{y}^{(2)} \right]^2 - \left[Z - 1,2 \left(\hat{y}^{(2)}\right)^2 + 0,1 \hat{y}^{(2)} \right]^3 \end{array} \right|,$$

$$\vec{\gamma}(\vec{X}, t) = \left| \begin{array}{c} 1 - 4R^{(1)} \hat{y}^{(1)} - \left[R^{(1)} \hat{y}^{(1)} \right]^2 \\ 1 + 2R^{(2)} \left[-1 + 0,3 \hat{y}^{(2)} \right]^2 - \left[R^{(2)} \left(2,4 \hat{y}^{(2)} - 0,3 \hat{y}^{(2)} \right) \right]^2 \end{array} \right|.$$

Требуется осуществить выбор структуры процесса y , обеспечивающий максимум вероятности его существования в заданных пределах ($Y_* = [-0,5; 0,7]$) на интервале времени $T = [0; 300\text{с}]$ т. е. минимизировать функционал

$$J = \int_{\vec{Y}_*} \int \{-\hat{\rho}(y, \hat{P}, \vec{X}, t)\} dy dt + \int_T \vec{v}_0^T(\hat{P}, \vec{X}, Z, t) \vec{v}_0(\hat{P}, \vec{X}, Z, t) dt,$$

$$\text{где } \vec{\nu}_0 = \begin{vmatrix} \nu_{12} \\ \nu_{21} \end{vmatrix}, \quad \rho(y, \vec{P}, \vec{X}, t) = \sum_{i=1}^2 P_i \rho_i(y, \vec{X}, t), \quad \rho_i(y, \vec{X}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R^{(i)}}} \exp \left[-\frac{(y - \hat{y}^{(i)})^2}{2R^{(i)}} \right].$$

Решение задачи оптимального выбора номера структуры в данном случае осуществлялось на основе уравнений (4), интегрируемых на временном интервале от 0 до 300 секунд методом Рунге-Кутты 4-го порядка. По завершении интегрирования и формирования приближенных значений функций \hat{P}_1, \hat{P}_2 номера структур, выбранных по признаку максимальной вероятности состояния в текущий момент времени, оказались распределенными по временному интервалу следующим образом. На интервале от 0 до 88 секунд максимальную вероятность состояния имела вторая структура, от 88 до 127 секунд — первая структура, от 127 до 300 секунд — вторая структура. Одновременно было проведено интегрирование системы уравнений оценок для традиционного случая неуправляемой смены состояний с единичной интенсивностью [1]. При этом было установлено, что в последнем случае значение минимизируемого критерия J оказалось в 1,55 раза выше, чем при оптимальном управлении выбором структуры.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод о теоретическом решении проблемы оптимального апостериорного управления структурами стохастических систем, а также о возможности его вычислительной реализации для сложных реальных динамических структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков И. Е., Артемьев В. М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
2. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. — М.: Связь, 1976. — 496 с.
3. Первачев С. В., Перов А. И. Адаптивная фильтрация сообщений — М.: Радио и связь, 1991. — 160 с.
4. Соколов С. В. // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 65.

Ростовское высшее военное
командно-инженерное училище,
г. Ростов-на-Дону, Россия

Поступила в редакцию
15 июня 1998 г.

SOLUTION OF THE PROBLEM ON A POSTERIORI SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL FOR NONLINEAR STOCHASTIC STRUCTURES

S. V. Sokolov, Yu. I. Kolyada, and P. V. Dolgoplyi

We solve the problem on *a posteriori* synthesis of optimal control of state selection in nonlinear dynamical systems with stochastic structure.

УДК 621.396.67

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МНОГОКАНАЛЬНЫХ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ГРАДИЕНТНЫМИ АЛГОРИТМАМИ

А. А. Мальцев, С. В. Зими́на

Получены некоторые точные выражения для мощности выходного сигнала адаптивных систем с непрерывными градиентными алгоритмами настройки. Показано, что флуктуации весовых коэффициентов приводят к уменьшению мощности сигнала на выходе адаптивной системы по сравнению с мощностью выходного сигнала при отсутствии флуктуаций весовых коэффициентов. Эффект "перекомпенсации" объясняется наличием негауссовской статистической зависимости между вектором весовых коэффициентов и вектором входных сигналов.

ВВЕДЕНИЕ

Задача статистического анализа адаптивных систем (адаптивных антенных решеток (ААР), адаптивных трансверсальных фильтров (АТФ) и компенсаторов помех) с учетом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов рассматривалась различными авторами и раньше. Так, в работе [1] показано, что в случае дискретного времени при условии независимости отсчетов входного сигнала суммарная выходная мощность вследствие флуктуаций весового вектора увеличивается. Было также выяснено, что корректный статистический анализ связан с учетом негауссовской статистической зависимости вектора весовых коэффициентов и вектора входных сигналов [2]. В работе [3] было показано, что при учете коррелированности отсчетов принимаемого сигнала может наблюдаться как эффект уменьшения, так и эффект увеличения мощности выходного сигнала ААР.

Сложность статистического анализа адаптивных систем связана с тем, что используемые для его проведения количественные методы являются приближенными. В настоящей работе получены некоторые точные результаты, справедливые для широкого класса адаптивных систем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Адаптивные системы, работающие по градиентным алгоритмам, могут быть описаны N -мерным векторным уравнением вида

$$\tau_H \frac{d\vec{W}}{dt} + \vec{W} + \gamma \mathbf{P} \vec{X}^*(t) \vec{X}^T(t) \vec{W} = \vec{W}_q. \quad (1)$$

Здесь \vec{W} — вектор весовых коэффициентов, τ_H и γ — постоянная времени интегратора и коэффициент усиления электронной части адаптивной системы, регулирующий весовые коэффициенты, $\vec{X}(t)$ — вектор входных сигналов,

$$\vec{W}_q = \mathbf{C}(\mathbf{C}^+ \mathbf{C})^{-1} \vec{H} \quad (2)$$

— вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующий требуемой характеристике адаптивной системы при отсутствии внешних помех (для ААР это весовой вектор, формирующий диаграмму направленности покая, для АТФ — частотный коэффициент передачи) [4], $\mathbf{C} \equiv [\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_L]$ —

матрица ограничений размерности $N \times L$, столбцами которой являются линейно независимые векторы ограничений \vec{C}_ℓ (L — число вводимых ограничений), $\vec{H} \equiv \{H_1, \dots, H_L\}^T$ — вектор желаемого отклика адаптивной системы размерности L , компоненты которого задают фиксированные коэффициенты усиления адаптивной системы в направлениях векторов \vec{C}_ℓ^* . С целью снижения требований к точности реализации пространственного матричного фильтра желательно, чтобы ограничения задавались ортогональными (ортонормированными) векторами \vec{C}_ℓ :

$$\vec{C}_m^+ \vec{C}_n = \delta_{mn}, \quad (3)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Матрица \mathbf{P} позволяет ввести ограничения на возможные изменения весовых коэффициентов адаптивной системы. В наиболее общем случае введения многократных линейных ограничений с помощью пространственного матричного фильтра в контуре управления эта матрица имеет вид [4, 5]

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^+ \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^+, \quad (4)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица размерности $N \times N$ (N — число весовых коэффициентов). Используя (4), несложно показать, что матрица \mathbf{P} является одновременно эрмитовой и идемпотентной, т.е.

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}. \quad (5)$$

Следовательно, \mathbf{P} является проекционной матрицей. Как показано в [4, 5], матричный оператор \mathbf{P} осуществляет проекцию оценки градиента выходной мощности адаптивной системы (по вектору весовых коэффициентов \vec{W}) на гиперплоскость (в подпространство) ограничений:

$$\mathbf{C}^+ \vec{W} = \vec{H}. \quad (6)$$

В этом случае матрица проектирующего фильтра (4) может быть записана в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \sum_{\ell=1}^L \vec{C}_\ell \vec{C}_\ell^+. \quad (7)$$

Уравнение (1) является наиболее общим уравнением адаптивного градиентного алгоритма. Действительно, полагая

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}, \quad \vec{W}_q = \gamma \mu_0 \vec{S}^*, \quad (8)$$

где \vec{S} — вектор-фазор полезного сигнала, μ_0 — произвольная постоянная, имеющая размерность мощности, из (1) получаем как частный случай уравнение для весового вектора адаптивной антенной решетки, работающей по критерию максимизации отношения сигнал/шум (ААР МОСШ) [4]:

$$\tau_H \frac{d\vec{W}}{dt} + \vec{W} = \gamma [\mu_0 \vec{S}^* - \vec{X}^* \vec{X}^T \vec{W}]. \quad (9)$$

Уравнение для весового вектора адаптивной антенной решетки, работающей по критерию минимизации среднего квадрата ошибки (ААР МСКО),

$$\tau_H \frac{d\vec{W}}{dt} + \vec{W} + \gamma \vec{X}^* \vec{X}^T \vec{W} = \gamma d(t) \vec{X}^* \quad (10)$$

получим из (1), введя $(N + 1)$ -мерные векторы входных сигналов $\vec{X}_{(N+1)}$ и весовых коэффициентов $\vec{W}_{(N+1)}$ и положив

$$\mathbf{C} = \vec{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = 1, \quad \mathbf{P} = \mathbf{I} - \vec{C}_1 \vec{C}_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\vec{H} = -1, \quad \vec{W}_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{W}_{(N+1)} = \begin{bmatrix} \vec{W} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{X}_{(N+1)} = \begin{bmatrix} \vec{X}(t) \\ d(t) \end{bmatrix},$$

где на $(N + 1)$ -й элемент поступает опорный сигнал $d(t)$.

Несложно показать, что для других способов введения ограничений в пространственной области (использование пилот-сигналов, предварительной пространственной фильтрации и др.) [4–7] анализ флуктуаций весовых коэффициентов в стационарном состоянии может быть сведен путем соответствующих переобозначений к анализу уравнения вида (1). Поскольку никаких условий на вектор входных сигналов $\vec{X}(t)$ адаптивной системы мы не накладывали, то уравнение (1) может описывать и настройку весовых коэффициентов широкополосных ААР, и комплексных и действительных адаптивных трансверсальных фильтров, работающих по различным критериям [8].

2. ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ РАБОТЫ

Остановимся на анализе уравнения (1). Представим весовой вектор \vec{W} и стохастическую матрицу $\mathbf{M}_{xx} \equiv \vec{X}^*(t) \vec{X}^T(t)$ в виде сумм их средних значений $\langle \vec{W} \rangle$, $\langle \mathbf{M}_{xx} \rangle \equiv \mathbf{R}_{xx}$ и флуктуационных составляющих:

$$\vec{W} = \langle \vec{W} \rangle + \tilde{\vec{W}}, \quad \mathbf{M}_{xx}(t) = \mathbf{R}_{xx} + \tilde{\Phi}(t). \quad (12)$$

Усредняя (1) и используя обозначения (12), найдем точное уравнение для $\langle \vec{W} \rangle$

$$\tau_H \frac{d\langle \vec{W} \rangle}{dt} + \langle \vec{W} \rangle + \gamma \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \langle \vec{W} \rangle = \vec{W}_q - \gamma \mathbf{P} \tilde{\mathbf{a}}_W, \quad (13)$$

где

$$\tilde{\mathbf{a}}_W \equiv \langle \tilde{\Phi} \vec{W} \rangle \equiv \langle \tilde{\Phi} \tilde{\vec{W}} \rangle \quad (14)$$

— вектор, учитывающий статистическую зависимость флуктуаций весовых коэффициентов \vec{W} и входных сигналов $\vec{X}(t)$.

При выполнении различных преобразований удобно представлять вектор \vec{W} в виде суммы двух взаимноортогональных векторов:

$$\vec{W} = \mathbf{P} \vec{W} + \mathbf{D} \vec{W}, \quad (15)$$

где $\mathbf{D} \equiv \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^+$ — проекционная матрица, дополнительная к \mathbf{P} (осуществляющая проекцию любого вектора на подпространство векторов ограничений \vec{C}_ℓ). Для матриц \mathbf{C} , \mathbf{P} , \mathbf{D} и вектора \vec{W}_q справедливы следующие равенства, вытекающие из их определения:

$$\begin{aligned} \mathbf{DP} = \mathbf{PD} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{PC} = \mathbf{C}^+\mathbf{P} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{DC} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{C}^+\mathbf{D} = \mathbf{C}^+, \quad \mathbf{P}\vec{W}_q = \vec{0}, \quad \mathbf{D}\vec{W}_q = \vec{W}_q. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя (1), (13) и (16), несложно доказать, что в установившемся режиме работы

$$\vec{W}(t) \equiv \mathbf{P}\vec{W}(t), \quad \mathbf{D}\vec{W} \equiv \vec{0}, \quad (17)$$

т. е. флуктуации весового вектора происходят только в подпространстве (гиперплоскости) ограничений (6).

Этот результат, очевидно, является следствием того, что в качестве пространственного фильтра рассматривается идеальный матричный фильтр \mathbf{P} , не имеющий на выходе шумовых составляющих в подпространстве векторов ограничений \vec{C}_ℓ .

Будем считать, что входные сигналы адаптивной системы являются стационарными и стационарно связанными случайными процессами. Найдем ряд точных соотношений для различных взаимных моментных функций (первого-четвертого порядков) между сигналами и весовыми коэффициентами адаптивной системы, описываемой уравнением (1), без использования каких-либо приближений размыкания. Непосредственно из (13), (15), (16) следует, что для стационарного среднего значения весового вектора $\vec{W}_{CT} \equiv \langle \vec{W} \rangle_{CT}$ будут выполняться следующие равенства:

$$\vec{W}_{CT} + \gamma \mathbf{PR}_{xx} \vec{W}_{CT} + \gamma \mathbf{P} \vec{\alpha}_W = \vec{W}_q, \quad (18)$$

$$\mathbf{D}\vec{W}_{CT} = \mathbf{D}\vec{W}_q = \vec{W}_q, \quad (19)$$

$$\vec{W}_{CT} = \mathbf{P}\vec{W}_{CT} + \mathbf{D}\vec{W}_{CT} = \mathbf{P}\vec{W}_{CT} + \vec{W}_q. \quad (20)$$

Рассмотрим точное выражение для суммарной мощности сигнала на выходе адаптивной системы в стационарном режиме работы

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \langle |\vec{X}^T \vec{W}|^2 \rangle_{CT} = \langle \vec{W}^+ \vec{X}^* \vec{X}^T \vec{W} \rangle_{CT} = \langle \vec{W}^T \vec{X} \vec{X}^+ \vec{W}^* \rangle_{CT}. \quad (21)$$

Воспользовавшись обозначениями (12), (14), выходную мощность можно записать в виде

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \langle |Z|^2 \rangle_0 + \langle \vec{W}^+ \mathbf{M}_{xx} \vec{W} \rangle + \vec{\alpha}_W^+ \vec{W}_{CT} + \vec{W}_{CT}^+ \vec{\alpha}_W, \quad (22)$$

где

$$\langle |Z|^2 \rangle_0 \equiv \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} \quad (23)$$

— выходная мощность адаптивной системы без учета флуктуаций весовых коэффициентов около своих средних значений.

Найдем теперь точное выражение для установившейся мощности сигнала на выходе адаптивной системы с ограничениями, используя независимость от времени корреляционной матрицы \mathbf{K}_W весовых коэффициентов и ее шпура $\text{Sp}(\mathbf{K}_W)$,

$$\mathbf{K}_W \equiv \langle \vec{W}^*(t) \vec{W}^T(t) \rangle, \quad \text{Sp}(\mathbf{K}_W) = \langle \vec{W}^+(t) \vec{W}(t) \rangle. \quad (24)$$

В стационарном режиме работы

$$\frac{d}{dt} \text{Sp}(\mathbf{K}_W) = \frac{d}{dt} \langle \vec{W}^+(t) \vec{W}(t) \rangle = \left\langle \frac{d\vec{W}^+}{dt} \vec{W} \right\rangle + \left\langle \vec{W}^+ \frac{d\vec{W}}{dt} \right\rangle = 0. \quad (25)$$

Принимая во внимание (1), первое слагаемое в (25) можно записать в виде

$$\tau_H \left\langle \frac{d\vec{W}^+}{dt} \vec{W} \right\rangle = -\langle \vec{W}^+ \vec{W} \rangle - \gamma \langle \vec{W}^+ \vec{X}^* \vec{X}^T \mathbf{P} \vec{W} \rangle + \vec{W}_q^+ \vec{W}_{CT}. \quad (26)$$

Подставляя выражение \vec{W}_q через \vec{W}_{CT} из (18) в (26), получим

$$\begin{aligned} \tau_H \left\langle \frac{d\vec{W}^+}{dt} \vec{W} \right\rangle &= -\langle \vec{W}^+ \vec{W} \rangle - \gamma \langle \vec{W}^+ \vec{X}^* \vec{X}^T \mathbf{P} \vec{W} \rangle + \vec{W}_{CT}^+ \vec{W}_{CT} + \\ &+ \gamma \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \vec{W}_{CT} + \gamma \vec{\alpha}_W^+ \mathbf{P} \vec{W}_{CT}. \end{aligned} \quad (27)$$

Используя (12), (15)–(20), преобразуем (27) к виду

$$\begin{aligned} \tau_H \left\langle \frac{d\vec{W}^+}{dt} \vec{W} \right\rangle &= -\langle \vec{W}^+ \vec{W} \rangle - \gamma \langle (\mathbf{P} \vec{W})^+ \vec{X}^* \vec{X}^T (\mathbf{P} \vec{W}) \rangle - \\ &- \gamma \vec{W}_q^+ \langle \vec{X}^* \vec{X}^T \mathbf{P} \vec{W} \rangle - \gamma \vec{W}_q^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_q + \gamma \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} + \\ &+ \gamma \vec{\alpha}_W^+ \vec{W}_{CT} - \gamma (\mathbf{P} \vec{W}_{CT})^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_q - \gamma \vec{\alpha}_W^+ \vec{W}_q. \end{aligned} \quad (28)$$

Последние два слагаемых в правой части (28) могут быть объединены в одно с помощью равенства

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{P} \vec{W})^+ \vec{X}^* \vec{X}^T \rangle \vec{W}_q &= \langle (\mathbf{P} \vec{W}_{CT} + \mathbf{P} \vec{W})^+ (\mathbf{R}_{xx} + \tilde{\Phi}) \rangle \vec{W}_q = \\ &= (\mathbf{P} \vec{W}_{CT})^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_q + \langle (\mathbf{P} \vec{W})^+ \tilde{\Phi} \rangle \vec{W}_q = (\mathbf{P} \vec{W}_{CT})^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_q + \vec{\alpha}_W^+ \vec{W}_q. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражение для выходной мощности (21), учитывая (15)–(20), может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_{CT} &= \langle \vec{W}^+ \vec{X}^* \vec{X}^T \vec{W} \rangle_{CT} = \langle (\mathbf{P} \vec{W})^+ \vec{X}^* \vec{X}^T (\mathbf{P} \vec{W}) \rangle + \\ &+ \vec{W}_q^+ \langle \vec{X}^* \vec{X}^T \mathbf{P} \vec{W} \rangle + \langle (\mathbf{P} \vec{W})^+ \vec{X}^* \vec{X}^T \rangle \vec{W}_q + \vec{W}_q^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_q. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя (29) и (30), окончательно получим

$$\tau_H \left\langle \frac{d\vec{W}^+}{dt} \vec{W} \right\rangle = -\gamma \langle |Z|^2 \rangle_{CT} + \gamma \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} + \gamma \vec{\alpha}_W^+ \vec{W}_{CT} - \langle \vec{W}^+ \vec{W} \rangle. \quad (31)$$

Выполняя аналогичные преобразования, несложно найти выражение и для второго слагаемого в (25):

$$\tau_H \left\langle \vec{W}^+ \frac{d\vec{W}}{dt} \right\rangle = -\gamma \langle |Z|^2 \rangle_{CT} + \gamma \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} + \gamma \vec{W}_{CT}^+ \vec{\alpha}_W - \langle \vec{W}^+ \vec{W} \rangle. \quad (32)$$

Сумма правых частей выражений (31) и (32) в силу условия стационарности (25) должна равняться нулю, откуда

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} + \frac{1}{2} \left[\vec{W}_{CT}^+ \vec{\alpha}_W + \vec{\alpha}_W^+ \vec{W}_{CT} \right] - \frac{1}{\gamma} \langle \vec{W}^+ \vec{W} \rangle. \quad (33)$$

Вычитая (33) из (22), найдем следующее соотношение между интересующими нас моментами:

$$\frac{1}{2} [\vec{W}_{CT}^+ \vec{\alpha}_W + \vec{\alpha}_W^+ \vec{W}_{CT}] = -\langle \vec{W}^+ \mathbf{M}_{xx} \vec{W} \rangle - \frac{1}{\gamma} \langle \vec{W}^+ \vec{W} \rangle. \quad (34)$$

Подставляя (34) в (33), получим еще одно точное выражение для выходной мощности адаптивной системы с ограничениями:

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \langle |Z|^2 \rangle_0 - \langle \vec{W}^+ \mathbf{M}_{xx} \vec{W} \rangle - \frac{2}{\gamma} \langle \vec{W}^+ \vec{W} \rangle. \quad (35)$$

Заметим, что стоящие в правых частях равенств (34), (35) моменты являются положительными величинами:

$$\langle \vec{W}^+ \mathbf{M}_{xx} \vec{W} \rangle \equiv \langle \vec{W}^+ \vec{X}^* \vec{X}^T \vec{W} \rangle \equiv \langle |\vec{X}^T \vec{W}|^2 \rangle \geq 0, \quad (36)$$

$$\langle \vec{W}^+ \vec{W} \rangle \equiv \langle |\vec{W}|^2 \rangle \geq 0.$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Полученные точные соотношения (18), (22), (34)–(36) позволяют сделать ряд принципиальных общих выводов о влиянии флуктуаций весовых коэффициентов на статистические характеристики адаптивных систем в стационарном режиме работы.

1. Учет флуктуаций весовых коэффициентов принципиально связан с фактом неравенства нулю вектора смешанных моментов $\vec{\alpha}_W \equiv \langle \vec{\Phi} \vec{W} \rangle$ (14). Если считать флуктуации весовых коэффициентов $\vec{W}(t)$ статистически независимыми с входными сигналами $\vec{X}(t)$, то в силу (34), (36) сразу следует $\vec{W}(t) \equiv 0$.

2. Флуктуации весовых коэффициентов приводят к смещению стационарного значения весового вектора \vec{W}_{CT} (эффект смещения среднего значения) по сравнению со значением, полученным в приближении прямого размыкания \vec{W}_{0CT} . Однако это смещение происходит в подпространстве ограничений (т. е. ограничения (6) не нарушаются). Действительно, учитывая (2), (16), (18)–(20), получаем

$$\mathbf{C}^+ \vec{W}_{CT} = \mathbf{C}^+ (\mathbf{P} \vec{W}_{CT} + \mathbf{D} \vec{W}_{CT}) = \mathbf{C}^+ \vec{W}_q = \vec{H}. \quad (37)$$

3. Флуктуации весовых коэффициентов приводят к уменьшению мощности сигналов на выходе адаптивной системы по сравнению с мощностью $\langle |Z|^2 \rangle_0$, получаемой при постоянных весовых коэффициентах, равных своим средним значениям $\vec{W}(t) \equiv \vec{W}_{CT}$ (этот вывод следует из выражений (35), (36)).

4. Для корректного учета влияния флуктуаций весовых коэффициентов на мощность сигналов на выходе адаптивной системы в обычно используемом для этого выражении (22) (см., например, [5, 9, 10]) нельзя пренебрегать слагаемыми $\vec{W}_{CT}^+ \vec{\alpha}_W$ и $\vec{\alpha}_W^+ \vec{W}_{CT}$ по сравнению со средним $\langle \vec{W}^+ \mathbf{M}_{xx} \vec{W} \rangle$, поскольку эти слагаемые отрицательные и по абсолютной величине более чем в два раза превышают $\langle \vec{W}^+ \mathbf{M}_{xx} \vec{W} \rangle$ (см. (34)). “Очевидное” гауссовское приближение по совокупности переменных $\{ \vec{X}(t), \vec{W}(t) \}$ в то же время дает

$$\langle \vec{W}^+ \mathbf{M}_{xx} \vec{W} \rangle \simeq \langle \vec{W}^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W} \rangle = \text{Sp}(\mathbf{K}_W^* \mathbf{R}_{xx}) > 0, \quad (38)$$

$$\vec{\alpha}_W \equiv \langle \vec{\Phi} \vec{W} \rangle = \vec{0}, \quad (39)$$

что приводит к неправильному (с точностью до наоборот) выводу об увеличении мощности сигнала на выходе адаптивной системы вследствие флуктуаций весовых коэффициентов [10].

Таким образом, из вышесказанного следует, что корректный расчет флуктуаций весовых коэффициентов и учет их влияния на статистические характеристики адаптивной системы формально оказывается связанным с учетом негауссовости совместного распределения вектора весовых коэффициентов $\vec{W}(t)$ и вектора входных сигналов $\vec{X}(t)$ и их статистической зависимости в виде вектора третьих моментов (кумулянтов) $\vec{\alpha}_W \equiv \langle \vec{\Phi} \vec{W} \rangle$.

В заключение подчеркнем, что все основные результаты настоящей работы получены без каких-либо дополнительных предположений о статистических характеристиках вектора входных сигналов $\vec{X}(t)$, кроме условия стационарности. Поэтому сделанные выводы справедливы для ААР МОСШ, ААР МСКО, ААР с ограничениями, АТФ и любых других адаптивных систем с непрерывными градиентными алгоритмами, описываемыми стохастическими дифференциальными уравнениями типа (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 97–02–16525, № 96–15–96718) и INTAS (грант № 96–2352).

ЛИТЕРАТУРА

1. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. — М.: Радио и связь, 1989. — 440 с.
2. Мальцев А. А., Позументов И. Е. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 5. С. 577.
3. Игнатенко С. В., Мальцев А. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 12. С. 1532.
4. Appelbaum S. P., Chapman D. J. // IEEE Trans. 1976. V. AP24, № 5. P. 650.
5. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. Пер. с англ. / Под ред. Лексаченко В. А. — М.: Радио и связь, 1986.
6. Takao K., Fujita M., Nishi T. // IEEE Trans. 1976. V. AP24, № 5. P. 662.
7. Griffiths L. J., Jim Ch. W. // IEEE Trans. 1982. V. AP30, № 1. P. 27.
8. Фрост О. // ТИИЭР. 1972. Т. 60, № 8. С. 5.
9. Brennan L. E., Pugh E. L., Reed I. S. // IEEE Trans. 1971. V. AES7, № 2. P. 254.
10. Фединин В. В. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27, № 8. С. 1548.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
16 марта 1998 года

SOME RIGOROUS RESULTS OF STATISTICAL ANALYSIS OF MULTICHANNEL ADAPTIVE SYSTEMS WITH CONTINUOUS GRADIENT ALGORITHMS*A. A. Mal'tsev and S. V. Zimina*

We obtain a few rigorous expressions describing power of the output signals of adaptive systems with continuous gradient algorithms of tuning. We show that fluctuations of the weight coefficients result in the decrease of the signal power at the output of an adaptive system, as compared to the case where no such fluctuations exist. The “overcompensation” effect is explained by the non-Gaussian statistical dependence between the weight-coefficient vector and the input-signal vector.

УДК 538.56:519.25

ПРЯМОЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА РЕЛАКСАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

О. В. Музычук

Предлагается численный метод анализа релаксации моментов координат броуновского движения системы, описываемой стохастическим уравнением Лиувилля 1-го или 2-го порядка с нелинейностью в виде полинома невысокой степени. Уравнения для моментов броуновского движения становятся независимыми на некотором шаге при помощи точных или приближенных рекуррентных соотношений, известных для стационарных значений. На основании численного решения дифференциальных уравнений релаксации моментов находится эволюция модельного вероятностного распределения координат.

Метод использован для исследования нестационарных вероятностных характеристик системы с нелинейной жесткостью, описываемой полиномом 3-й степени. Релаксация моментов и модельного вероятностного распределения приведена в графической и табличной форме. Полученные результаты позволяют сделать определенные выводы о статистической динамике броуновского движения рассмотренных систем.

Исследование статистической динамики переходных процессов в нелинейных системах, подверженных интенсивным случайным воздействиям, и в частности релаксации вероятностных характеристик броуновского движения в заданном потенциальном профиле, представляет интерес для ряда задач статистической радиофизики, радиоэлектроники, физической химии и других приложений (см, например, [1]). Соответствующим математическим аппаратом такого анализа является теория марковских процессов и процессов диффузионного типа (см., например, [2–4]), однако трудности как аналитического, так и численного решения нестационарных уравнений Фоккера–Планка для таких систем хорошо известны.

Следует отметить работы [5–6], в которых получены аналитические оценки времени установления плотности вероятности координаты безынерционной броуновской частицы для некоторых потенциальных профилей. Тем не менее, представляет интерес получить более детальное и наглядное представление о релаксации хотя бы некоторых вероятностных характеристик (моментов, кумулянтов) броуновского движения, на основании которых можно моделировать эволюцию плотности вероятности координат броуновской частицы. Это можно сделать, используя численные методы. Некоторые результаты в данном направлении получены в настоящей работе на основании развития метода цепных дробей, использованного в [7–8] для вычисления стационарных вероятностных характеристик подобных систем.

1. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$Tx' + F(x) = \xi(t), \quad (1)$$

которое будем трактовать как уравнение Ланжевена для координаты x безынерционной броуновской частицы в потенциальном профиле $\Phi(x)$, где $F(x) = d\Phi/dx$, T — постоянная времени соответствующей линейной системы. Случайную силу $\xi(t)$ полагаем дельта-коррелированным гауссовым шумом:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t - \tau) \rangle = D_\xi \delta(\tau). \quad (2)$$

Функцию $F(x)$ будем считать полиномом степени $2m + 1$. Выделив в $F(x)$ нелинейную часть, запишем ее в виде

$$F(x) = x(1 + f(x)), \quad f(x) = \sum_{k=1}^{2m} b_k x^k. \quad (3)$$

Из (1)–(3) стандартным образом получим следующую систему связанных уравнений для релаксации моментов:

$$s^{-1}\langle x^s \rangle' + \langle x^s \rangle + \sum_{k=1}^{2m} b_k \langle x^{s+k} \rangle = (s-1)D \langle x^{s-2} \rangle, \quad (4)$$

где $D = D_\xi/2T$, $s = 1, 2, \dots$; здесь и далее производные вычисляются по безразмерному времени $\tilde{t} = t/T$. Величина D , равная стационарному значению второго момента в отсутствие нелинейности, характеризует интенсивность случайной силы.

Нетрудно видеть, что характер связи уравнений в системе (4) можно свести к трехчленному взаимодействию, если определенным образом ввести матричную форму записи. Введя моментные векторы

$$\vec{X}_1 = (\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \dots, \langle x^{2m} \rangle), \dots, \quad \vec{X}_n = (\langle x^{2mn+1} \rangle, \langle x^{2mn+2} \rangle, \dots, \langle x^{2m(n+1)} \rangle) \quad (5)$$

размерности $2m$, систему (4) запишем в виде

$$A_n \vec{X}_n + B_n \vec{X}_{n+1} = C_n \vec{X}_{n-1} \quad (6)$$

где $n = 1, 2, \dots$, A_n , B_n — соответственно верхняя и нижняя треугольные матрицы, C_n — диагональная матрица. Элементы матриц находятся из уравнения (4), причем матрицы A_n содержат оператор дифференцирования. В частности, для системы с кубической нелинейностью ($m = 1$) имеем

$$A_n = \begin{pmatrix} p_1 & b_1 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad C_n = D \begin{pmatrix} 2n-2 & 0 \\ 0 & 2n-1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $n = 1, 2, \dots$, $p_n = 1 + \frac{1}{n} \frac{d}{dt}$. Стационарные значения моментов подобных систем определяются матричными непрерывными дробями [8].

Если $f(x)$ является четной функцией, то, как видно из уравнений (4), выражения для четных моментов становятся независимыми. При этом, если начальное распределение частиц симметрично (или, в частности, представляет собой дельта-функцию в нуле), размерность моментных векторов уменьшается. Обозначив $\langle x^{2n} \rangle = I_n$, в этом случае имеем векторы

$$\vec{X}_{n+1} = (I_{mn+1}, I_{mn+2}, \dots, I_{m(n+1)}), \quad (8)$$

где $n = 1, 2, \dots$, размерность которых равна m . В частности, для системы с кубической нелинейностью, когда

$$F(x) = x + \beta x^3, \quad (9)$$

вместо (6) получим одномерную систему

$$(2n)^{-1} I_n' + I_n + \beta I_{n+1} = (2n-1) D I_{n-1}, \quad (10)$$

где $n = 1, 2, \dots$, стационарное решение которой можно записать в виде непрерывной дроби

$$I_n = \frac{(2n-1) D I_{n-1}}{1 + \frac{(2n+1)\sigma}{1 + \frac{(2n+3)\sigma}{1 + \dots}}}, \quad (11)$$

где $n = 1, 2, \dots$, $I_0 = 1$, $\sigma = \beta D$. По существу, (11) представляет собой рекуррентное соотношение между моментами, которое можно использовать для численного анализа. Как легко видеть, при $\beta = 0$ из (11) следует гауссово разложение четных стационарных моментов $\langle x^{2n} \rangle$. Отметим, что непрерывная

дробь (11) сходится при любых значениях величины σ , хотя при $\sigma > 1$ сходимость довольно медленная [7].

Для анализа релаксации моментов ниже мы рассмотрим численное решение систем дифференциальных уравнений типа (6), замкнутых тем или иным образом. Заметим, однако, что необходимым, но в общем случае не достаточным условием сходимости такой процедуры является сходимость соответствующих непрерывных (в общем случае матричных) дробей для стационарных значений искомых моментов.

2. Рассмотрим релаксацию вероятностных характеристик броуновского движения в потенциальном профиле, ограничившись двумя членами в разложении нелинейности $f(x)$; при этом система описывается выражениями (6), (7). Замыкание цепочки уравнений (6) в n -м приближении можно осуществить, либо отбрасывая моментный вектор X_{n+1} , либо используя для его компонент гауссово разложение

$$\langle x^{k+1} \rangle = \langle x \rangle \langle x^k \rangle + k(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) \langle x^{k-1} \rangle, \quad (12)$$

где $k = 2n + 1, 2n + 2$, или усеченное разложение (11). Численный анализ показывает, что последний способ предпочтительнее при небольших значениях номера приближения n . Заметим, что первое приближение, при котором в (6) просто опускается вектор X_2 , соответствует релаксации в линейной системе.

Начальные условия будем задавать либо детерминированные, соответствующие начальному распределению частиц в виде дельта-функции в точке x_0 , когда

$$\langle x \rangle_0 = x_0, \quad \langle x^k \rangle_0 = x_0^k, \quad (13)$$

либо гауссовы, при которых

$$\langle x \rangle_0 = x_0, \quad \langle x^{k+1} \rangle_0 = \langle x \rangle_0 \langle x^k \rangle_0 + k D_0 \langle x^{k-1} \rangle_0, \quad (14)$$

где $k = 1, 2, \dots$, соответствующие начальному гауссовому вероятностному распределению со средним x и дисперсией D_0 .

Получаемые численные результаты для релаксации моментов $\langle x^k(t) \rangle$ будем использовать для моделирования эволюции вероятностного распределения $\omega(x, t)$. В качестве основной модели выберем гауссову плотность вероятности

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x(t)}} \exp\left(-\frac{(x - \langle x(t) \rangle)^2}{2D_x(t)}\right), \quad (15)$$

где $D_x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Можно, в принципе, использовать и высшие модельные вероятностные распределения, основанные на ограниченном числе отличных от нуля кумулянтов [9]. Для сравнения ниже мы приведем и "эксцессную" модель для симметричного потенциала, определяемую Фурье-интегралом вида

$$w_{\text{ex}}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-D_x(t)u^2 + k_4(t)u^4/24] \cos(ux) du, \quad (16)$$

где $k_4(t) = \langle x^4(t) \rangle - 3\langle x^2(t) \rangle^2$ — четвертый кумулянт для симметричного вероятностного распределения.

Контроль настоящей расчетной процедуры можно осуществлять путем сравнения установившихся значений моментов с соответствующими результатами численного интегрирования стационарного

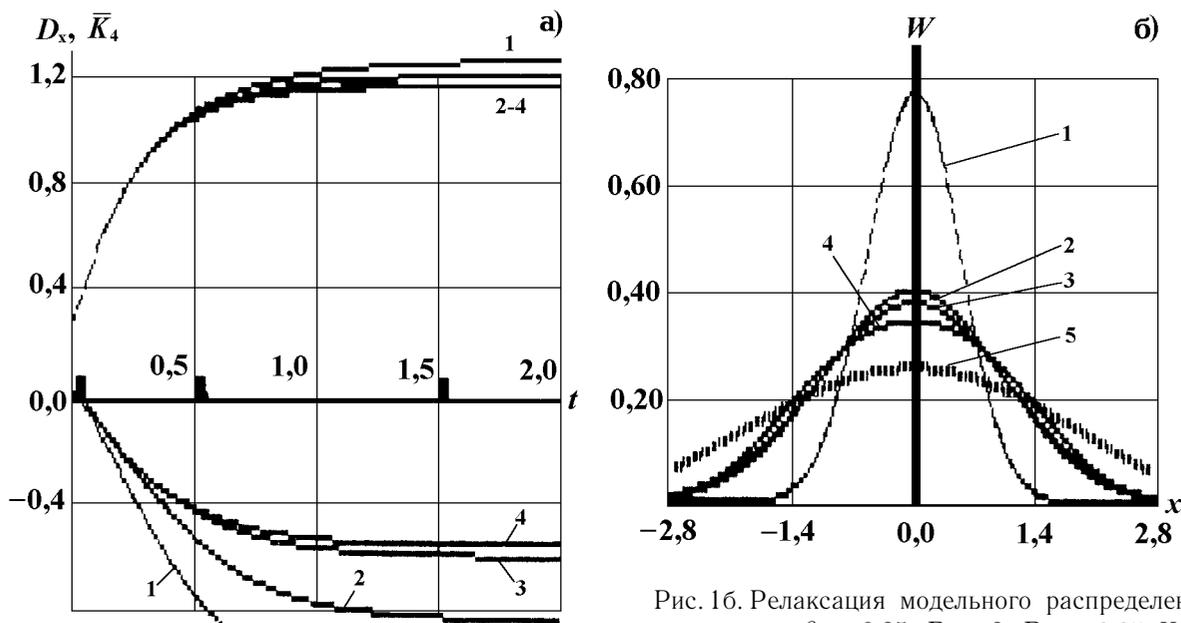


Рис. 1а. Верхние кривые — дисперсия $D_x = \langle x^2(t) \rangle$, нижние — нормированный четвертый коммулянт $\bar{k}_4(t) = k_4/D_x^2$

Рис. 1б. Релаксация модельного распределения при $\beta = 0,25, D = 2, D_0 = 0,25$. Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t = 0; 0,5; 1,5$, кривая 4 — стационарное распределение, кривая 5 — эксцессное (при $t = 1,5$)

вероятностного распределения

$$\langle x^k \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^k \exp[-\Phi(x)/D] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\Phi(x)/D] dx}, \tag{17}$$

$$\Phi(x) = x^2/2 - \alpha x^3/3 + \beta x^4/4. \tag{18}$$

Другим способом контроля является сравнение с результатами, получаемыми на основе матричных цепных дробей для стационарных моментов.

Некоторые результаты численного расчета релаксации вероятностных характеристик броуновского движения в потенциальном профиле (18) описанным методом приведены на рис. 1–3, сопровождаемых необходимым табличным материалом. На рис. 1 показана релаксация дисперсии и четвертого кумулянта (рис. 1а), а также модельного вероятностного распределения (рис. 1б) для симметричного потенциального профиля ($\alpha = 0$). Начальные условия — симметричные гауссовы ($x_0 = 0, D_0 = 0,1$), номера кривых на рис. 1а растут с увеличением номера приближения n . В табл. 1 помещены текущие и контрольные (D_{xc}, k_{4c}) стационарные значения дисперсии и четвертого кумулянта. Видно, что с ростом номера приближения дисперсия сходится к контрольным значениям значительно быстрее, чем четвертый кумулянт. Здесь и ниже метками на оси t показаны моменты времени, в которые строится модельное распределение $w(x, t)$. Из рис. 1б заметно, что гауссо-

Таблица 1

№	n	D_x	D_{xc}	\bar{k}_4	\bar{k}_{4c}
1	2	1,26	1,16	-1,15	-0,49
2	4	1,21	-	-0,83	-
3	8	1,17	-	-0,59	-
4	10	1,17	-	-0,55	-

во модельное распределение соответствует стационарному распределению несколько лучше, чем экспоненсное.

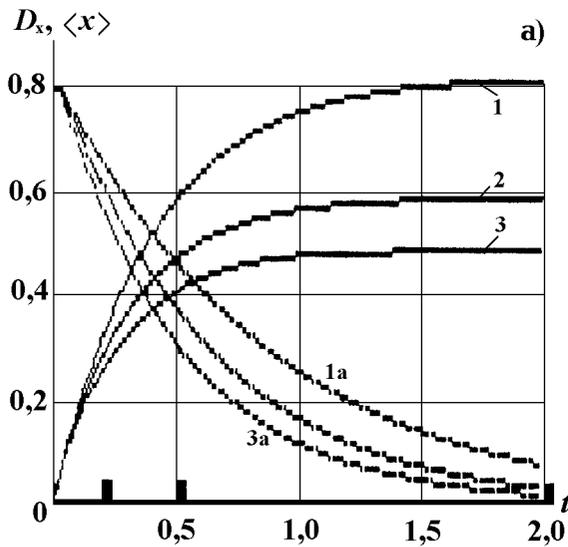


Рис. 2а. Кривые 1–3 — дисперсия D_x , кривые 1а–3а — средние значения $\langle x \rangle$ соответственно для $\beta = 0,1; 0,5; 1$, $D = 1$, $x_0 = 1$. ($n = 9$; все контрольные значения дисперсии совпадают с установившимися с точностью 0,01)

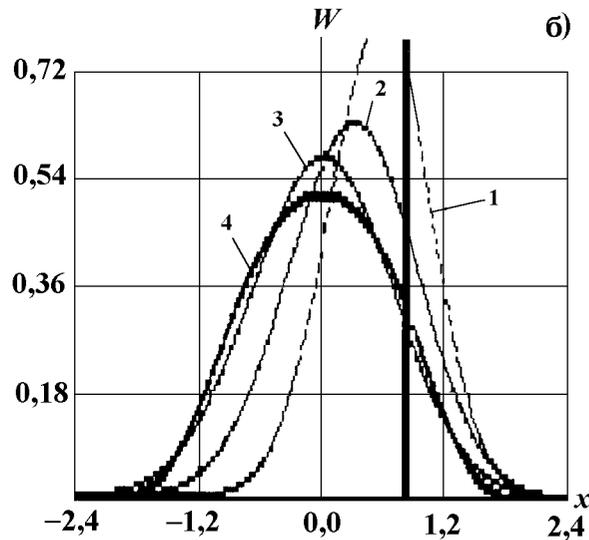


Рис. 2б. Кривые 1–3 соответственно для $t = 0,2; 0,5; 2$, кривая 4 — стационарное распределение

На рис. 2а показана зависимость релаксации среднего значения $\langle x(t) \rangle$ и дисперсии $D_x(t)$ от величины нелинейности β , на рис. 2б — релаксация гауссового модельного распределения $w(x, t)$ при $\beta = 1$; начальное распределение — дельта-функция в нуле. Заметно уменьшение времени установления с ростом β .

Т а б л и ц а 2

№	$\langle x \rangle$	D_x	D_{xc}
1	0,02	0,58	0,55
2	0,12	0,58	0,56
3	0,16	0,69	0,69
4	0,30	0,74	0,78

Рис. 3 относится к случаю несимметричного потенциального профиля ($\alpha \neq 0$); начальное распределение — дельта-функция в точке $x_0 = 1$. На рис. 3а показана релаксация $\langle x(t) \rangle$ и $D_x(t)$ в зависимости от коэффициентов α и β , характеризующих соответственно крутизну и несимметрию потенциальной ямы. Видно, что среднее значение координаты устанавливается существенно медленнее, чем дисперсия. Релаксация модельного распределения на рис. 3б приведена для наиболее несимметричного случая ($\alpha = 0,6, \beta = 0,3$). Заметим, что и при этом установившееся гауссово модельное распределение несущественно отличается от истинного.*

этом установившееся гауссово модельное распределение несущественно отличается от истинного.*

*Заметим, однако, что при $\alpha > 2\sqrt{\beta}$ в рассматриваемом профиле $\Phi(x)$ появляется дополнительное состояние равновесия (второй минимум потенциала), при этом используемый здесь метод анализа неприменим.

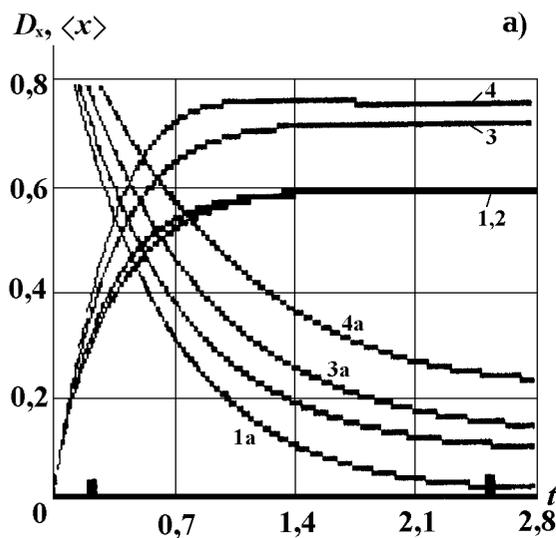


Рис. 3а. Кривые 1, 1а соответствуют релаксации дисперсии и среднего значения при $\beta = 0,6$, $\alpha = 0$; кривые 2, 2а — при $\beta = 0,6$, $\alpha = 0,3$; кривые 3, 3а — при $\beta = 0,3$, $\alpha = 0,3$; кривые 4, 4а — при $\beta = 0,3$, $\alpha = 0,6$ (см. табл. 2)

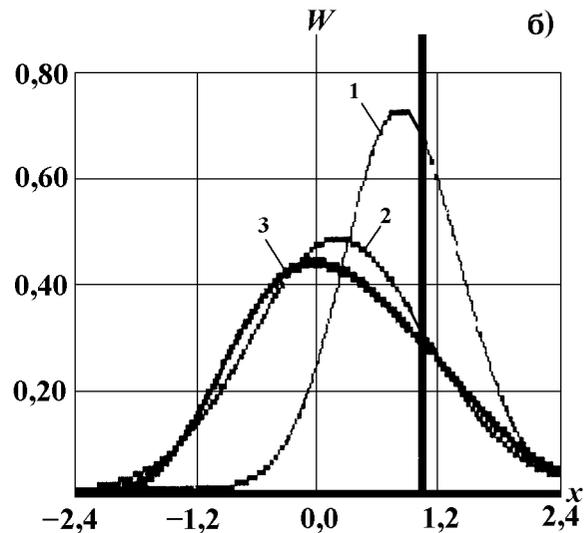


Рис. 3б. Кривые 1, 2 соответствуют моментам времени $t = 0,4; 2,5$, кривая 3 — стационарное распределение

На основании проведенного численного анализа можно также сделать некоторые заключения о влиянии на релаксацию вероятностных характеристик, величины и характера начальных условий. С удалением точки x_0 , в которой задается начальное распределение в виде дельта-функции, от стационарного среднего значения времени релаксации несколько увеличиваются, а для гауссова начального распределения времена релаксации зависят также от начальной дисперсии D_0 , несколько увеличиваясь с ростом отличия D_0 от соответствующего стационарного значения.

3. Настоящий метод можно применить и для моделирования релаксации вероятностных характеристик координат реальных (инерционных) броуновских частиц, описываемых уравнением нелинейного осциллятора

$$x'' + 2hx' + \Omega^2 F(x) = \Omega^2 \xi(t), \quad (19)$$

если функция $F(x)$ описывается полиномом невысокой степени. Заметим, что никакие аналитические результаты для нестационарных статистических характеристик такой системы неизвестны.

Стохастическое уравнение (19) запишем в виде

$$\Omega^{-1}x' = y, \quad \Omega^{-1}y' = -\delta y - F(x) + \xi(t), \quad (20)$$

где y — безразмерная скорость частиц, $\delta = 1/Q$, $Q = \Omega/2h$ — добротность соответствующей линейной системы. Как известно, стационарная плотность вероятности системы (20) представляет собой произведение больцмановского распределения координат частиц и гауссова вероятностного распределения их скоростей:

$$w(x, y) = C \exp \left[-(y^2/2 + \int F(x) dx)/D \right], \quad D = \Omega Q D_\xi / 2. \quad (21)$$

Ниже ограничимся случаем симметричного потенциального профиля, соответствующему нелинейности (9).

Стандартным образом запишем систему уравнений релаксации совместных моментов координат и скоростей частиц. Обозначив для краткости

$$\langle k; m \rangle = \langle x^k y^m \rangle,$$

имеем

$$\begin{aligned} 1/m \langle k; m \rangle' &= -\langle k+1; m-1 \rangle - \delta \langle k; m \rangle + k/m \langle k-1; m+1 \rangle - \\ &- \beta \langle k+3; m-1 \rangle + \delta D(m-1) \langle k; m-2 \rangle, \end{aligned} \quad (22)$$

где производные вычисляются по безразмерному времени $\tilde{t} = \Omega t$. За величиной D сохранен прежний смысл стационарной дисперсии координат в линейной системе или эффективной мощности шума ξ , но теперь она пропорциональна добротности Q . Для замыкания системы уравнений (22) на некотором шаге можно использовать статистическую независимость координат и скоростей

$$\langle x^k y^m \rangle = \langle x^k \rangle \langle y^m \rangle,$$

которая имеет место для стационарного распределения, и гауссово разложение высших моментов $\langle x^k \rangle$, $\langle y^m \rangle$. Заметим, что для четных моментов x предпочтительнее использовать приближенное стационарное разложение, вытекающее, например, из непрерывной дроби (11):

$$\langle x^{2n} \rangle = (2n-1)D \langle x^{2n-2} \rangle / (1 + (2n+1)\beta D), \quad (23)$$

где $n = 2, 3, \dots$. Полученная таким образом система уравнений 2-го приближения, которую и применим для численного анализа, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle 2; 0 \rangle' &= 2 \langle 1; 1 \rangle, \\ \langle 1; 1 \rangle' &= -\langle 2; 0 \rangle - \delta \langle 1; 1 \rangle + \langle 0; 2 \rangle - \beta \langle 4; 0 \rangle, \\ \langle 0; 2 \rangle' &= -2 \langle 1; 1 \rangle - 2\delta \langle 0; 2 \rangle - 2\beta \langle 3; 1 \rangle + 2D_1, \\ \langle 4; 0 \rangle' &= 4 \langle 3; 1 \rangle, \\ \langle 3; 1 \rangle' &= -\langle 4; 0 \rangle - \delta \langle 3; 1 \rangle + 3 \langle 2; 2 \rangle - 5\beta \langle 2; 0 \rangle \langle 4; 0 \rangle, \\ \langle 2; 2 \rangle' &= -2 \langle 3; 1 \rangle - 2\delta \langle 2; 2 \rangle + 2 \langle 1; 3 \rangle + 2D_1 \langle 2; 0 \rangle, \\ \langle 1; 3 \rangle' &= -3 \langle 2; 2 \rangle - 3\delta \langle 1; 3 \rangle + \langle 0; 4 \rangle + 6D_1 \langle 1; 1 \rangle - 3\beta \langle 4; 0 \rangle \langle 0; 2 \rangle, \\ \langle 0; 4 \rangle' &= -4 \langle 1; 3 \rangle - 4\delta \langle 0; 4 \rangle + 12D_1 \langle 0; 2 \rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

где $D_1 = \delta D$. Начальные условия (детерминированные или гауссовы) для координаты зададим в виде

$$\langle x \rangle_0 = \langle y \rangle_0 = 0, \quad \langle x^2 \rangle_0 = D_0, \quad \langle x^k y^m \rangle_0 = 0.$$

Контроль значений моментов x осуществляем, как и ранее, на основе численного интегрирования стационарного распределения (17), а стационарные значения четных моментов скоростей очевидны: $\langle y^{2m} \rangle = D^m$.

Некоторые результаты численного анализа системы (24) приведены на рис. 4 и 5. Рис. 4 показывает зависимость релаксации дисперсии координат D_x (кривые 1–3) и скоростей D_y (кривые 1а–3а) при изменении величины нелинейности β . В табл. 3 приведены соответствующие численные и контрольные значения. Начальные условия детерминированные, добротность $Q = 2$. Отметим, что с увеличением β растет амплитуда релаксационных колебаний, которая, конечно, зависит и от D_0 .

На рис. 5 приведена зависимость релаксации дисперсий $D_x(t)$ (кривые 1–3) и $D_y(t)$ (кривые 1а–3а) от величины добротности линейной системы Q . Применительно к рассматриваемой задаче, например, уменьшение Q можно трактовать как увеличение массы частиц или рост вязкости среды. Ясно

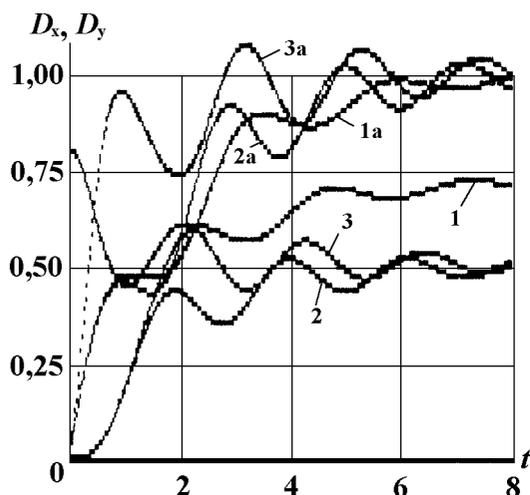


Рис. 4. Кривые 1, 1а соответствуют релаксации дисперсии координат и скоростей частиц при $\beta = 0,2$, $D_0 = 0,1$, кривые 2, 2а — при $\beta = 0,7$, $D_0 = 0,1$, кривые 3, 3а — при $\beta = 0,7$, $D_0 = 0,8$ (см. табл. 3)

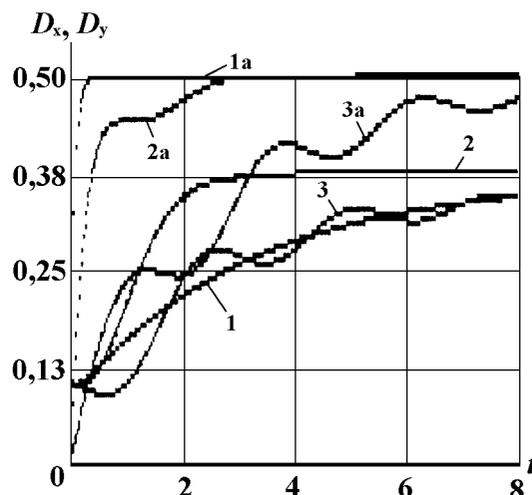


Рис. 5. Кривые 1, 1а соответствуют релаксации $D_x(t)$ и $D_y(t)$ при $Q = 0,1$, кривые 2, 2а — при $Q = 0,5$, кривые 3, 3а — при $Q = 3$; $\beta = 0,4$, $D = 0,5$. Отличие стационарной дисперсии от контрольных значений не превосходит 0,02

также, что в реальной ситуации добротность системы небольшая. Из рис. 5 видно, что уменьшение Q не совсем одинаково влияет на релаксацию координат и скоростей. Если время релаксации дисперсии скорости быстро уменьшается при $Q \rightarrow 0$, то время установления дисперсии координат имеет минимум при $Q = 0,5$, примерно на границе перехода к апериодическому режиму. Увеличение времени релаксации координат при $Q \rightarrow 0$ обусловлено малыми скоростями частиц в среде с высокой вязкостью.*

Поскольку стационарное вероятностное распределение координат в выражении (21) совпадает с соответствующей плотностью вероятности $w(x)$ для рассмотренной ранее одномерной системы, релаксация модельного вероятностного распределения $w(x, t)$ здесь качественно не отличается от приведенной на рис. 1б при соответствующих значениях величин D и β . Ясно, что время установления теперь зависит от добротности, и при $Q > 0,5$ релаксация имеет осцилляторный характер.

Автор благодарит А. Н. Малахова и участников семинара научной школы профессора А. Н. Малахова за полезную дискуссию. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 96–15–96718.

Т а б л и ц а 3

№	D_y	D_x	D_{xc}
1	0,99	0,72	0,72
2	1,00	0,49	0,52
3	1,02	0,49	0,52

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. — М.: Мир, 1987.
2. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
3. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
4. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.

*Напомним, что параметр D пропорционален Q , и его фиксированное значение на рис. 5 при уменьшении добротности означает соответствующее увеличение мощности шума D_ξ .

5. Malakhov A. N., Pankratov A. L. // *Physica*. 1996. V. A229. № 1. P. 109.
6. Malakhov A. N. // *Chaos*. 1997. V. 7. № 3. P. 488.
7. Музычук О. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 2. С. 169.
8. Музычук О. В. // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55, вып. 4. С. 620.
9. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.

Нижегородский
архитектурно-строительный
университет, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
24 декабря 1998 г.

A DIRECT METHOD FOR NUMERICAL ANALYSIS OF RELAXATION OF THE STATISTICAL CHARACTERISTICS OF BROWNIAN MOTION

O. V. Muzychuk

We propose a numerical method for the analysis of relaxation of the coordinate moments of the Brownian motion that is described by stochastic Liouville equations of the 1st or 2nd order with the polynomial nonlinearity of moderate order. Using exact or approximate recursion relations for the stationary values, we eventually arrive at mutually independent equations for the moments of the Brownian motion. Evolution of the model probability distribution of the coordinates is found using numerical solutions of the differential equations for the moments.

The method is applied to analysis of nonstationary probability characteristics of a system with the nonlinear rigidity described by a third-order polynomial. The relaxation of moments and model probability distribution is illustrated by the plots and tables. Obtained results allow for making definite conclusions on statistical dynamics of the Brownian motion of the considered systems.