

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLII N 3

Нижний Новгород

1999

С о д е р ж а н и е

- Щуко О. Б., Карташов Д. В. Зависимость радиоизлучения Меркурия от структуры и строения его верхнего покрова 203
- Катин И. В., Марков Г. А. Волновая диагностика плазмы с помощью диэлектрического волновода..... 215
- Завольский Н. А., Запевалов В. Е., Моисеев М. А. Численное моделирование процессов в резонаторе непрерывного 170 ГГц/1 МВт гиротрона для ITER с рабочей модой TE 25.10..... 225
- Китай Ш. Д. Особенности лимбового зондирования малых газовых составляющих атмосферы в различных линиях микроволнового диапазона 235
- Кравцов Ю. А., Митягина М. И., Чурюмов А. Н. Нерезонансный механизм рассеяния электромагнитных волн на морской поверхности: рассеяние на крутых заострённых волнах 240
- Троицкая Ю. И., Резник С. Н. Квазилинейная модель деформации стратифицированного по плотности трёхмерно-неоднородного потока над случайно-неоднородной поверхностью 255
- Панюков А. В. Анализ погрешности прямого алгоритма определения дальности до электрического диполя 266
- Макаров С. В., Медведев С. Ю., Якимов А. В., Ферранте Г., Мичели В., Принчипато Ф. Влияние негауссовости на погрешность измерения интенсивности фильтрованного фликкерного шума 278
- Есипенко В. И. Плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы 287

ЗАВИСИМОСТЬ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ МЕРКУРИЯ ОТ СТРУКТУРЫ И СТРОЕНИЯ ЕГО ВЕРХНЕГО ПОКРОВА*

О. Б. Шуко, Д. В. Карташов

Представлены результаты теоретического исследования зависимости радиоизлучения Меркурия в диапазоне длин волн от 0,3 см до 76,8 см от структуры и состава верхнего покрова. Для различных моделей его строения показано, что радиационная составляющая теплового потока существенно влияет на эффективную температуру и её спектральные характеристики. В рамках двуслойной модели показано, что для интерпретации данных измерений радиоизлучения Меркурия с высоким разрешением по поверхности существенной является неоднородность строения верхнего покрова планеты по глубине. Полученные в работе результаты могут быть использованы при сопоставлении экспериментальных данных с теоретическими моделями для определения физических характеристик вещества верхнего покрова Меркурия.

В последнее время появился ряд работ, содержащих результаты исследований интегрального радиоизлучения Меркурия и его радиоизлучения с высоким разрешением по поверхности в миллиметровом и сантиметровом диапазонах длин волн [2–7].

Как известно, радиоизлучение Меркурия имеет тепловой характер и определяется как электрическими характеристиками, так и температурой излучающего слоя, зависящей от его структуры, строения и состава. Поэтому представляется целесообразным провести сравнительный анализ радиоизлучения Меркурия для различных моделей строения его верхнего покрова аналогично тому, как это было сделано при исследовании Луны [8–10].

Принято считать, что вещество верхнего покрова состоит как из материала, непосредственно связанного с планетой и находящегося на ней с момента её образования, так и из материала, выпавшего на неё из окружающего космического пространства (космическая пыль, метеориты, ядра комет и т. п.). Это вещество, накапливаясь на поверхности планеты в течение миллиардов лет, перерабатывается под действием различных факторов.

Можно считать, что интенсивность выпадения твёрдого космического вещества на Меркурий не меньше, чем на Землю. Однако, в отличие от Земли, всё это вещество непосредственно достигает поверхности планеты, образуя его верхний покров, толщина которого может измеряться десятками метров. Грунт Меркурия, таким образом, должен быть образован, в основном, породами, близкими по своим физическим свойствам к земным алюмосиликатам, что подтверждается наблюдениями в ИК-диапазоне [11].

Как и на Луне [12], формирование верхнего покрова Меркурия происходит в условиях относительно малой (по сравнению с Землёй) силы тяжести, отсутствия атмосферы и гидросферы. Постоянная бомбардировка частицами твёрдого космического вещества поверхности планеты приводит к измельчению и перемешиванию больших масс грунта, вовлекаемых в процесс соударения. Измельчению вещества грунта способствуют также значительные колебания температуры, достигающие на экваторе 600 К. Меньшая сила гравитации может обуславливать большую рыхлость и пористость грунта по сравнению с земным. Всё это даёт основание предполагать наличие на поверхности Меркурия измельчённых сыпучих обломочных структур различной степени зернистости.

*Результаты настоящей работы были частично доложены на XXVII Радиоастрономической конференции (Санкт-Петербург, 10–14 ноября 1997 г.) [1].

Мощный поток солнечного корпускулярного излучения и космических лучей, достигающий непосредственно поверхности планеты, способствует в условиях сверхвысокого вакуума цементированию сыпучих структур, созданию в них дендритоподобных систем, образующих твёрдый каркас реголита. Подобные образования были получены, например, в земных условиях при облучении сыпучих материалов естественного и искусственного происхождения потоком α -частиц [13].

В процессе постоянного накопления вещества верхнего покрова нижние его слои подвергаются гравитационному уплотнению с разрушением каркаса и образованием монолитных структур.

Таким образом, для корректной интерпретации результатов исследований собственного теплового излучения Меркурия необходимо учитывать влияние на него структурных свойств вещества верхнего покрова.

В настоящей работе рассматривается влияние на спектральные характеристики радиоизлучения верхнего покрова Меркурия его микроструктуры (размеры частиц и пор), типа структуры (сыпучая, твёрдопористая, монолитная), а также неоднородности строения верхнего покрова по глубине (слоистость).

1. При исследовании процесса переноса излучения в веществе верхнего покрова будем исходить из того, что это вещество является твёрдым и характерные размеры его неоднородности много меньше длины волны излучения. Поглощением излучения за счёт рассеяния в рассматриваемом диапазоне длин волн (от 0,3 см до 76,8 см) можно пренебречь. Кроме того, будем полагать, что имеет место локальное термодинамическое равновесие между веществом и излучением.

В этих предположениях уравнение переноса монохроматического излучения с длиной волны λ в среде с коэффициентом поглощения $\kappa_\lambda(x)$ и коэффициентом преломления $n(x)$, идущего под углом $\vartheta(x)$ к нормали в направлении, противоположном оси Ox (из глубины к поверхности), имеет вид [14]

$$\frac{d\left(\frac{I_\lambda(x)}{n^2(x)}\right)}{\kappa_\lambda(x) \sec \vartheta(x) dx} = \frac{I_\lambda(x)}{n^2(x)} - B_\lambda(T(x)), \quad (1)$$

где $I_\lambda(x)$ — интенсивность излучения, проходящего через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, за единицу времени на глубине x ; $B_\lambda(T(x))$ — функция Планка для интенсивности излучения в вакуум, порождённого нагретым до температуры $T(x)$ единичным объёмом вещества на глубине x .

Оговоримся сразу, что в дальнейшем рассматриваются только плоскостойкие модели строения верхнего покрова. В силу поперечной изотропности этих моделей нет оснований выделять какую-то одну из поляризаций, поэтому излучение будем считать деполаризованным.

В радиодиапазоне длин волн для меркурианских температур

$$\frac{\hbar c'}{k'} \ll \lambda T,$$

поэтому

$$B_\lambda(x) = \frac{2\pi k' c'}{\lambda^4} T(x),$$

где \hbar — постоянная Планка, k' — постоянная Больцмана, c' — скорость света в вакууме, $T(x)$ — температура вещества на глубине x .

Тогда решение $I_\lambda(x)$ уравнения переноса (1) при $x = 0$, представляющее интенсивность излучения с поверхности в вакуум под углом ϑ' к нормали ($\sin \vartheta' = n(0) \sin \vartheta(0)$), может быть записано в виде

$$I_\lambda(0) = \frac{2\pi k' c'}{\lambda^4} T_e(\lambda), \quad (2)$$

где

$$T_e(\lambda) = \int_0^{\ell_0} T(x)\zeta(x)\kappa_\lambda(x) \sec \vartheta(x) e^{-\int_0^x \kappa_\lambda(x') \sec \vartheta(x') dx'} dx. \quad (3)$$

Здесь $\zeta(x)$ — коэффициент прохождения волн через границу раздела среда–вакуум, для однородной модели, или — через слой дисперсного материала, для двуслойной модели, а ℓ_0 в несколько раз превышает глубину проникновения электромагнитной волны длиной λ . $T_e(\lambda)$ называется обычно эффективной температурой радиоизлучения.

Поскольку для верхнего покрова планеты температура вещества на любой глубине x является периодической функцией времени t :

$$T(x) = T(x, t),$$

имеющей период τ , равный длительности меркурианских солнечных суток ($\tau = 175,940$ земных суток), эффективная температура будет также функцией времени с тем же периодом:

$$T_e(\lambda) = T_e(t, \lambda).$$

Функция $T(x, t)$ является периодическим $T(x, t+\tau) = T(x, t)$ решением уравнения теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = e_1 \sigma T^4 - e_2 J(t), \quad (5)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = -q. \quad (6)$$

Здесь $\rho = \rho(x)$ — плотность; $c = c(x, T)$ — коэффициент теплоёмкости; $k = k(x, T)$ — коэффициент теплопроводности вещества верхнего покрова на глубине x при температуре T ; e_1 — излучательная способность реголита; σ — постоянная Стефана–Больцмана; $e_2 = 1 - A$, где A — среднее световое альbedo поверхности; $J(t)$ — функция инсоляции рассматриваемого участка поверхности в момент времени t [15]; L — глубина прогреваемого слоя; q — интенсивность потока тепла из недр планеты на глубине L , где суточные температурные колебания не превышают 0,5 К. За начало отсчёта времени ($t = 0$) принят момент прохождения Меркурием его перигелия. В настоящей работе принято $q = 0$.

Для определённости будем рассматривать радиоизлучение участка поверхности, расположенного в начальный момент времени $t = 0$ в подсолнечной точке и имеющего заданную структуру верхнего покрова.

Для получения периодического решения $T(x, t)$ задачи (4)–(6) при заданных $\rho(x)$, $c(x, T)$ и $k(x, T)$ использовалась консервативная конечно–разностная схема, построенная с помощью интегро–интерполяционного метода [16]. При этом обеспечивается быстрая сходимость, хорошая аппроксимация и устойчивость вычислительного процесса даже для разрывных коэффициентов ρ , c , k .

В работе [17] показано, что учёт температурной зависимости коэффициента теплоёмкости $c(x, T)$ приводит к отличию суточных вариаций температуры на любой глубине не более чем на 0,5% от соответствующих значений для температурно–независимой модели. Поэтому в настоящей работе принято, что коэффициент теплоёмкости не зависит от температуры и имеет постоянное значение, равное $c(350 \text{ К})$. Заметим кроме того, что для возможных земных аналогов вещества верхнего покрова планеты — силикатных пород — $c(350 \text{ К}) = 0,2 \text{ кал}/(\text{г}\cdot\text{град})$.

Температурная зависимость коэффициента теплопроводности реголита $k(x, T)$ оказывает существенное влияние [17] на поведение температуры в глубине. Этот коэффициент зависит от структуры,

строения и состава вещества прогреваемого слоя. Вещество верхнего покрова (реголит) в слое, ответственном за излучение, при сделанных выше предположениях о характере его образования, может быть рассмотрено как дисперсная система [18], состоящая из связанных частиц твёрдого вещества (каркас системы) и пустот, сравнимых по размерам с этими частицами. Перенос тепла в такой системе происходит за счёт теплопроводности каркаса и излучения в пустотах, т. е. зависит от микроструктуры вещества.

Коэффициент теплопроводности реголита в этом случае может быть представлен в виде [19]

$$k(x, T) = k_M(x, T) + k_R(x, T), \quad (7)$$

где $k_M(x, T)$ — коэффициент теплопроводности каркаса, $k_R(x, T)$ — коэффициент радиационной теплопроводности в пустотах.

Коэффициент $k_M(x, T)$ зависит от пористости дисперсной системы, способа упаковки частиц в ней и размера площади их контакта. Исследование влияния температурной зависимости коэффициента $k_M(x, T)$ на тепловой режим [17] показало, что учёт этого влияния приводит к изменению температуры не более, чем на 1% по сравнению с температурно-независимой моделью. Поэтому в настоящей работе принято, что $k_M(x, T)$ от температуры не зависит, т. е.

$$k_M(x, T) = k_M(x).$$

Коэффициент радиационной теплопроводности $k_R(x, T)$ пропорционален температуре в третьей степени [19]:

$$k_R(x, T) = \beta T^3. \quad (8)$$

При рассмотрении теплового режима и радиоизлучения Луны и Меркурия с учётом температурной зависимости коэффициента теплопроводности [6, 20, 21] принято вместо размерного коэффициента β вводить безразмерный коэффициент μ , характеризующий долю радиационного переноса в общем процессе теплопередачи:

$$\mu = \frac{k_R(x, 350)}{k_M(x)}. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) для коэффициента радиационной теплопроводности имеем

$$k_R(x, T) = \mu k_M(x) \left(\frac{T}{T_0} \right)^3, \quad (10)$$

где $T_0 = 350$ К — среднесуточная температура поверхности Меркурия, практически не зависящая от микроструктуры реголита.

С другой стороны, известно [19, 22, 23], что для дисперсной системы со средним размером пустот h и излучательной способностью материала e_1 коэффициент радиационной теплопроводности имеет вид

$$k_R(x, T) = 4e_1\sigma h T^3. \quad (11)$$

Сопоставляя (10) и (11), имеем

$$h = 0,43 \cdot 10^4 \cdot \frac{\mu k_M}{e_1} \quad (12)$$

($\mu = 0$ соответствует температурно-независимой модели).

2. Рассмотрим сначала радиоизлучение верхнего покрова, однородного по своему составу, строению и физическим свойствам до глубины, в несколько раз превышающей глубину проникновения электромагнитных волн дециметрового диапазона, где заведомо отсутствуют суточные колебания температуры. В этом случае ρ и k_M не зависят от x .

В силу однородности строения вещества его можно считать электрически однородным и, следуя аналогии с горными земными породами [24], использовать следующие аппроксимации:

а) для диэлектрической проницаемости — $\varepsilon = (1 + \tilde{a}\rho)^2$ (где $\tilde{a} = 0,5 \text{ см}^3/\text{г}$),

б) для тангенса угла диэлектрических потерь — $\text{tg } \Delta = \tilde{b}\rho$ (где $\tilde{b} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^3/\text{г}$).

Примем также, что коэффициент поглощения радиоизлучения

$$\kappa_\lambda = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}\text{tg } \Delta}{\lambda}.$$

Заметим, что глубина проникновения электромагнитной волны длиной λ определяется соотношением $\ell_\lambda = 1/\kappa_\lambda$.

Коэффициент прохождения неполяризованного электромагнитного излучения через поверхность в вакуум не зависит от x и имеет вид $\zeta(x) = 1 - R^2$, где R — коэффициент отражения излучения по мощности, определяемый формулами Френеля

$$R^2 = \frac{1}{2} (R_\perp^2 + R_\parallel^2),$$

где

$$R_\perp = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta} - \cos \vartheta}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta} + \cos \vartheta}$$

для TE -поляризованного излучения и

$$R_\parallel = R_\perp \cdot \frac{\cos \vartheta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta} - \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta} + \sin^2 \vartheta}$$

для TM -поляризации.

В таком случае выражение (3) для суточных вариаций эффективной радиотемпературы принимает вид

$$T_e(t, \lambda) = (1 - R^2) \int_0^{\ell_0} T(x, t) \kappa_\lambda \sec \vartheta e^{-\kappa_\lambda \sec \vartheta x} dx.$$

Параметры структуры верхнего покрова k_M и μ , а также средний размер частиц h могут быть определены по результатам экспериментальных исследований радиоизлучения Меркурия на выбранной длине волны λ . Поскольку процесс переноса радиоизлучения в рамках предлагаемого подхода описывается уравнением переноса (1), справедливого для сред, масштаб неоднородности которых мал по сравнению с длиной волны, то на параметр h следует наложить ограничение $h \ll \lambda$, или, в силу (12),

$$\lambda \gg 0,43 \cdot 10^4 \frac{\mu k_M}{e_1}. \quad (13)$$

Заметим, что для рассматриваемого в работе диапазона длин волн от 0,3 см до 76,8 см и принятых значений параметров структуры неравенству (13) удовлетворяют размеры частиц ~ 430 мкм. В случае более крупных масштабов неоднородности для интерпретации данных радиоастрономических наблюдений в рамках предлагаемого подхода следует увеличить нижнюю границу диапазона длин волн в соответствии с (13).

Рассмотрим влияние микроструктуры реголита (параметр μ) на спектр суточных вариаций $T_e(t, \lambda)$ на примере "пылевой" модели строения верхнего покрова с параметрами $\rho = 0,8 \text{ г}/\text{см}^3$, $k_M = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ кал}/(\text{град} \cdot \text{см} \cdot \text{с})$, $\varepsilon = 1,96$, $\text{tg } \Delta = 0,004$, $\vartheta = 0$.

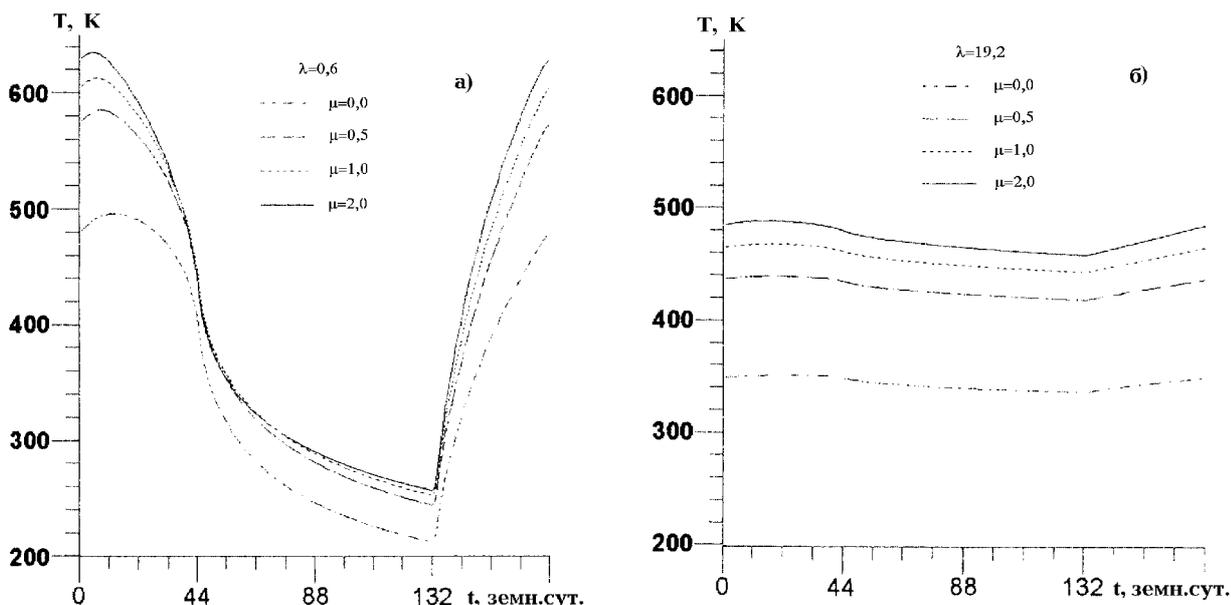


Рис. 1.

На рис. 1 представлены суточные вариации эффективной радиотемпературы для различных значений параметра μ и двух длин волн λ . Из рис. 1 следует, что при малом значении λ ($\lambda = 0,6$ см, рис. 1а) влияние μ на эффективную радиотемпературу T_e сильнее проявляется в дневное время. При больших же λ ($\lambda = 19,2$ см, рис. 1б) это влияние проявляется одинаково в любое время суток.

На рис. 2 приведены спектры гармонических составляющих $T_{e0}(\lambda)$ (рис. 2а) и $T_{e1}(\lambda)$ (рис. 2б) суточных вариаций эффективной радиотемпературы

$$T_e(t\lambda) = T_{e0}(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} T_{en}(\lambda) \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \nu_{en}(\lambda)\right). \tag{14}$$

Из рис. 2 следует, что изменение параметра μ существенно сказывается на постоянной составляющей $T_{e0}(\lambda)$, а влияние его на спектр $T_{e1}(\lambda)$ значительно меньше. Заметим при этом, что спектры других составляющих эффективной радиотемпературы в (14) зависят от μ ещё меньше.

Следует отметить, что для других значений коэффициента теплопроводности k_M и плотности ρ (т. е. для других типов структуры верхнего покрова) характер зависимости от параметра μ спектра гармонических составляющих сохраняется.

Рассмотрим теперь влияние типа структуры реголита на суточные вариации эффективной радиотемпературы. Ограничимся при этом рассмотрением структур следующих типов:

- 1) мелкодисперсный (пыль) — $\rho_0 = 0,8 \text{ г/см}^3$, $k_M = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ кал/(град} \cdot \text{см} \cdot \text{с)}$, $\mu = 0,5$;

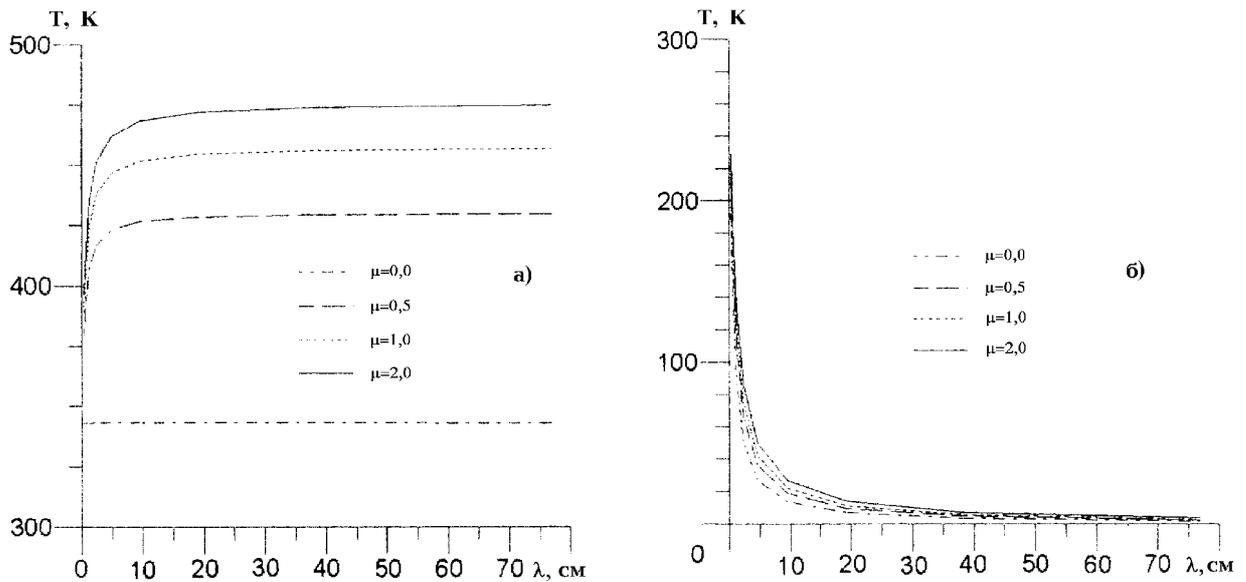


Рис. 2.

- 2) сыпучий (кварцевый песок) — $\rho_0 = 1,6 \text{ г/см}^3$, $k_M = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ кал/(град} \cdot \text{см} \cdot \text{с)}$, $\mu = 0,5$;
 3) твёрдопористый (пемза) — $\rho_0 = 0,7 \text{ г/см}^3$, $k_M = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ кал/(град} \cdot \text{см} \cdot \text{с)}$, $\mu = 0,5$;
 4) монолитный (базальт) — $\rho_0 = 2,6 \text{ г/см}^3$, $k_M = 50 \cdot 10^{-4} \text{ кал/(град} \cdot \text{см} \cdot \text{с)}$, $\mu = 0$ (здесь радиационный перенос отсутствует ввиду отсутствия пустот).*

На рис. 3 представлены суточные вариации эффективной радиотемпературы T_e для этих типов структуры при двух значениях длины волны: $\lambda = 0,6 \text{ см}$ (рис. 3а) и $\lambda = 19,2 \text{ см}$ (рис. 3б).

На рис. 3а видно, что при наблюдениях поверхности на короткой волне в дневное время хорошо выделяются сыпучий и твёрдопористый типы структуры, а в ночное время — мелкодисперсный и монолитный типы. Из рис. 3б следует, что уже на волне порядка 20 см надёжно определяется только монолитный тип структуры, поскольку для него глубина проникновения тепловой волны значительно превышает глубину проникновения электромагнитной волны, а для других типов структуры соотношение этих глубин обратно.

На рис. 4а представлены спектры постоянной составляющей T_{e0} суточных вариаций эффективной радиотемпературы для четырёх рассматриваемых моделей. Из рисунка следует, что постоянная составляющая весьма критична к типу структуры вещества и поэтому может быть использована для его определения.

На рис. 4б приведены спектры T_{e1} для рассматриваемых моделей. При этом видно, что спектр переменной части радиотемпературы для монолитного типа структуры убывает существенно медленнее, чем для других типов, что также может использоваться для диагностики типа структуры.

3. Рассмотрим теперь двухслойную модель строения верхнего покрова Меркурия, в которой на толще электрически однородной твёрдой породы (пемза, монолит) лежит слой сыпучего материала (пыль, песок). Для такой модели коэффициент прохождения [26] $\zeta(x)$ излучения через верхний слой вещества может быть получен в виде

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 - R^2 & \text{при } 0 \leq x \leq \ell, \\ (1 - R^2)W(\ell, \lambda) & \text{при } \ell < x, \end{cases} \quad (15)$$

*Физические характеристики горных пород, аналогов вещества верхнего покрова планеты, взяты из [25].

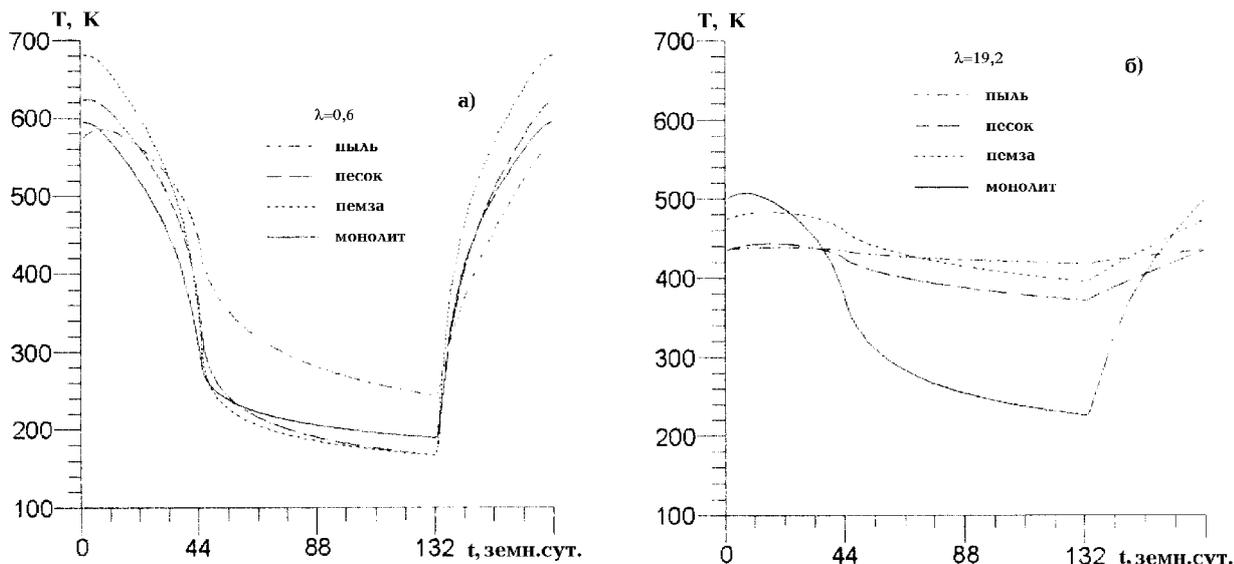


Рис. 3.

где

$$W(\ell, \lambda) = \frac{1}{2}(W_E + W_M),$$

$$W_E = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 (\cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta_2)^2}{Q_E},$$

$$Q_E = \varepsilon_2 \cos^2 \vartheta_2 (\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_1 + \cos \vartheta)^2 \cos^2(k_0 \sqrt{\varepsilon_2} \ell \cos \vartheta_2) + (\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta + \varepsilon_2 \cos^2 \vartheta_2)^2 \sin^2(k_0 \sqrt{\varepsilon_2} \ell \cos \vartheta_2)$$

для *TE*-поляризации,

$$W_M = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 (\sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta + \cos \vartheta_2)^2}{Q_M},$$

$$Q_M = \varepsilon_2 \cos^2 \vartheta_2 (\sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta + \cos \vartheta_1)^2 \cos^2(k_0 \sqrt{\varepsilon_2} \ell \cos \vartheta_2) + (\sqrt{\varepsilon_1} \cos^2 \vartheta_2 + \varepsilon_2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta)^2 \sin^2(k_0 \sqrt{\varepsilon_2} \ell \cos \vartheta_2)$$

для *TM*-поляризации. Здесь

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\sin \vartheta_2 = \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{\varepsilon_2}},$$

$$\sin \vartheta_1 = \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{\varepsilon_1}},$$

а ε_1 и ε_2 — диэлектрические проницаемости соответственно вещества подложки и верхнего слоя толщиной ℓ .

Из этих формул видно, что на фиксированной длине волны λ и при заданном угле ϑ_2 коэффициент прохождения $\zeta(x)$ является осциллирующей функцией толщины слоя ℓ .

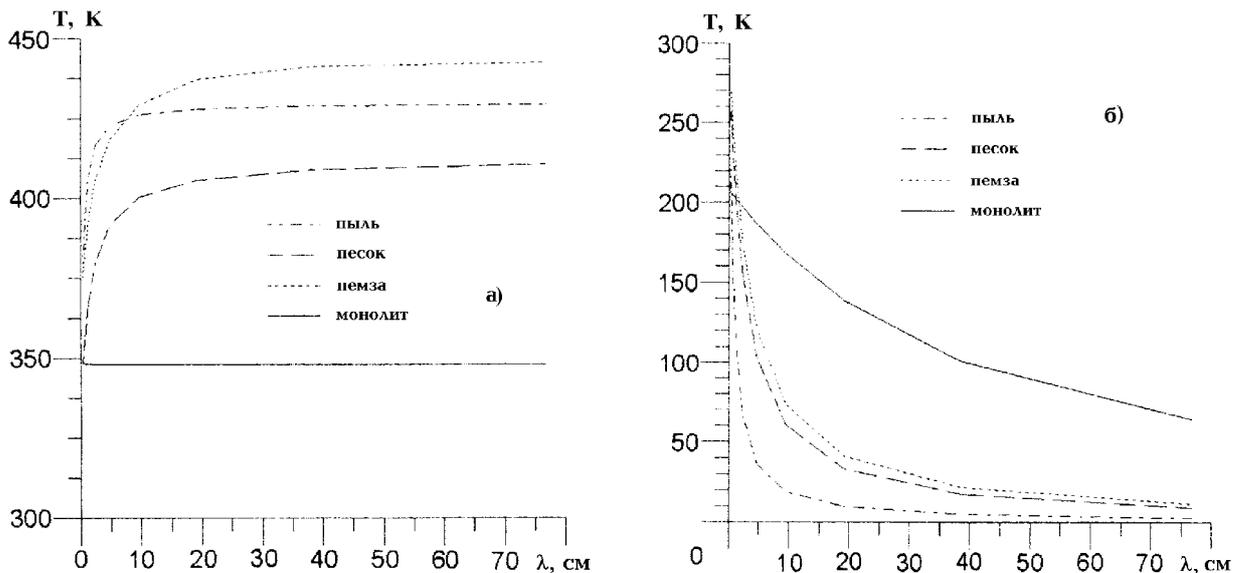


Рис. 4.

Не уменьшая общности рассуждения, рассмотрим характер зависимости $\zeta(x)$ от ℓ при нормальном падении излучения на границу раздела сред ($\vartheta_2 = 0$). В этом случае, как легко видеть, для

$$\ell = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_2}} m \pm \ell_s \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (16)$$

значения $\zeta(x)$ будут одинаковыми.

Такой же характер зависимости от ℓ будет иметь и постоянная составляющая T_{e0} суточных вариаций $T_e(t, \lambda)$, как величина, непосредственно зависящая от коэффициента прохождения $\zeta(x)$. Для иллюстрации этого положения на рис. 5 приведена зависимость T_{e0} от длины ℓ в интервале от $\ell = 6$ см до $\ell = 6,24$ см для модели “пыль на монолите” и $\lambda = 0,6$ см.

Из рис. 5 видно, что незначительные изменения толщины слоя ℓ , которые ни в коей мере не могут повлиять на характер теплового режима верхнего покрова, существеннейшим образом влияют на эффективную температуру радиоизлучения, что не даёт возможности, вообще говоря, использовать значение постоянной составляющей T_{e0} для определения физических свойств верхнего покрова, его строения и структуры. Это означает, что при интерпретации экспериментальных данных в рамках двуслойной модели строения реголита толщина предполагаемого слоя не должна превышать $\ell^* = \lambda / (2\sqrt{\varepsilon_2})$. В противном случае, постоянная составляющая T_{e0} перестает быть информативной величиной.

Тем не менее, представляется возможным исключить влияние колебаний коэффициента прохождения на эффективную температуру $T_e(t, \lambda)$, рассматривая для сравнения только те значения толщины

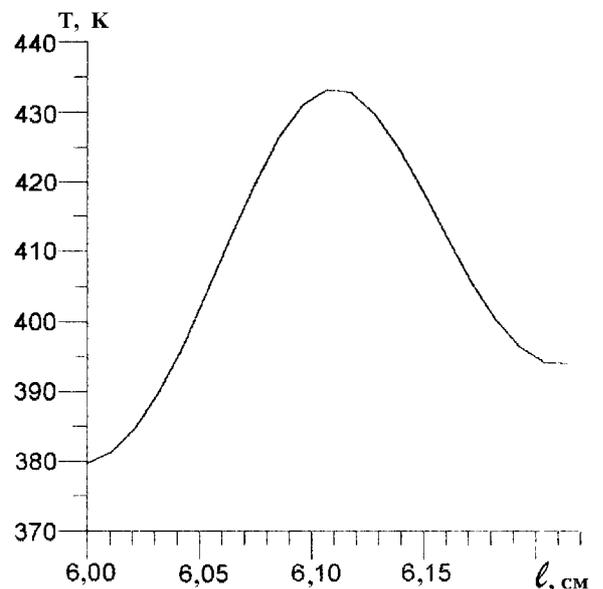


Рис. 5.

слоя ℓ (см. формулу (16)), которые обеспечивают для выбранной модели при фиксированных λ и ϑ_2 одинаковые значения этого коэффициента.

Для примера на рис. 6 приведены зависимости суточных вариаций $T_e(t, \lambda)$ от ℓ для модели "песок на монолите" при $\lambda = 0,6$ см (рис. 6а) и $\lambda = 19,2$ см (рис. 6б). Из рисунков видно, что T_e достаточно критична к толщине слоя.

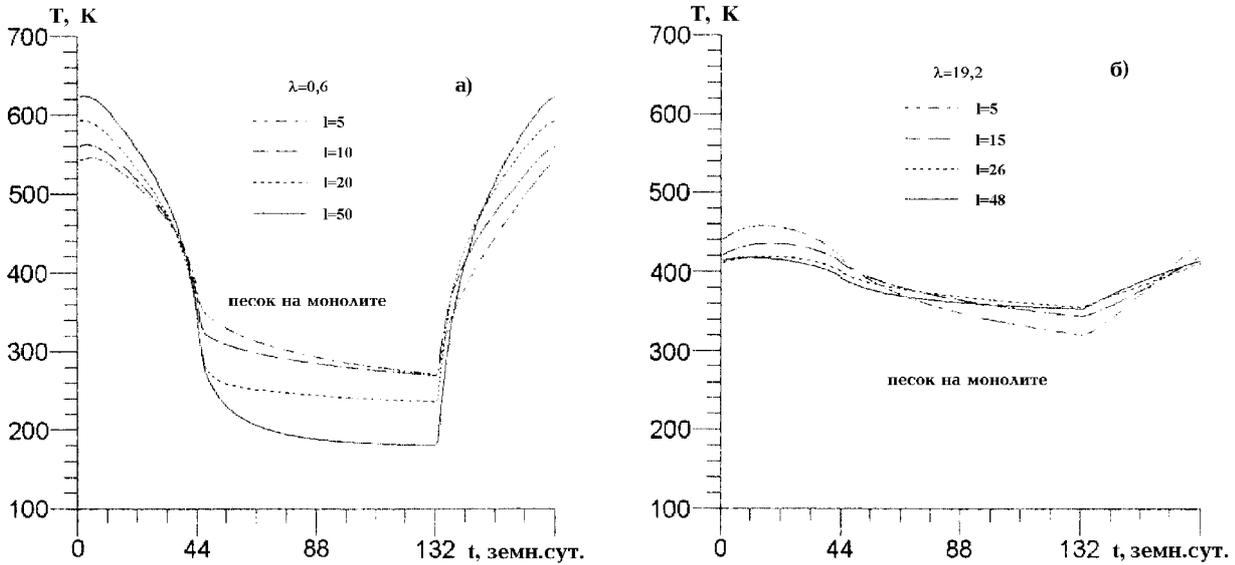


Рис. 6.

Если же задаться значением толщины ℓ и длиной волны λ , то по значениям T_e вполне можно определить модель строения верхнего покрова (см. рис. 7).

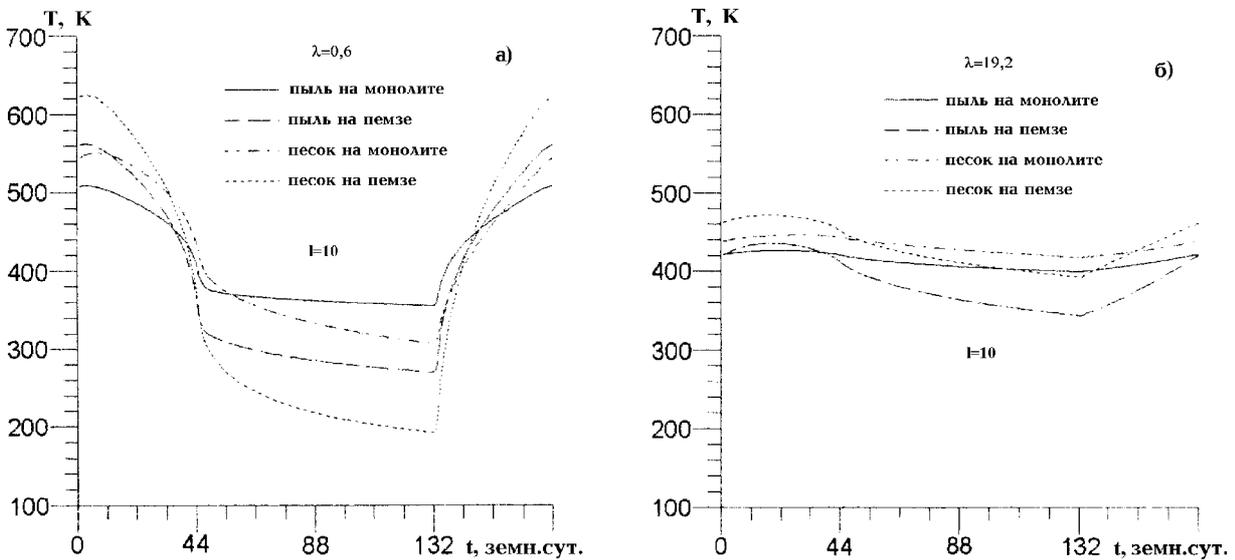


Рис. 7.

4. Таким образом, проведённые исследования радиоизлучения Меркурия показали его существенную зависимость от структуры и строения верхнего покрова планеты. Эта зависимость проявляется

прежде всего во влиянии физических характеристик вещества реголита на постоянную составляющую эффективной температуры радиоизлучения.

В предположении однородной структуры вещества (пылевого, песчано—сыпучего, твёрдопористого или монолитного типов) определяющим является соотношение между теплопроводностью твёрдого каркаса и радиационной теплопроводностью в пустотах. Показано, что увеличение доли радиационного переноса в общем процессе теплопередачи (параметр μ) приводит к значительному повышению постоянной составляющей температуры в глубине. При этом влияние её на амплитуду и фазу других гармоник значительно меньше. Поскольку радиоастрономические измерения дают значения эффективной радиотемпературы на фиксированной волне, то по её суточным вариациям (или её гармоническим составляющим) можно определить физические параметры k_M и μ предполагаемой структуры реголита. Радиоастрономические измерения на нескольких длинах волн позволяют подтвердить правильность выбора типа структуры.

Если же результаты экспериментов не удаётся согласовать в рамках однородной модели, то следует рассматривать неоднородные структуры. В качестве простейшей модели такой структуры в настоящей работе рассмотрена двухслойная модель строения реголита. При этом согласование теории с экспериментом достигается варьированием теплофизических параметров k_M и μ и толщины верхнего слоя ℓ . Корректная интерпретация результатов измерений достигается только в случае, если длина волны принимаемого излучения превышает предполагаемую толщину слоя. В противном случае, эффективная температура, измеренная в эксперименте, с точки зрения предлагаемого подхода не является информативной.

В заключение отметим, что установленная зависимость суточных вариаций радиотемпературы (и её спектральных составляющих) от структуры вещества верхнего покрова Меркурия имеет место для любого участка поверхности, а следовательно, и для интегрального радиоизлучения планеты.

Кроме того, заметим, что подобная зависимость будет сказываться на собственном тепловом излучении других небесных тел, имеющих ту же природу нагрева и формирования излучения. К таким телам вполне можно отнести Луну, астероиды, спутники планет, лишённые атмосферы, а также планеты с оптически тонкой атмосферой (Марс, Плутон).

ЛИТЕРАТУРА

1. Щуко О. Б. — В сб.: XXVII радиоастрон. конф. “Проблемы современной радиоастрономии”. С.-Пб., 10-14 нояб., 1997. — С.-Пб., 1997. Т. 2. С. 54.
2. Ledlow M. J., Burns J. O., Gisler G. R., Zhao J.-H., Zeilik M. // Bull. Amer. Astron. Soc. 1990. V. 22. № 2. P. 835.
3. Мингалиев М. Г., Хабрахманов А. Р. — В сб.: Радиоастрон. конф., Пущино, 20-24 сент., 1993: Тез. докл. — Пущино, 1993. С.133-134.
4. Mitchel D. L., de Pater I. // Bull. Amer. Astron. Soc. 1991. V. 23. № 3. P. 1197.
5. Mitchel D. L., de Pater I. // Bull. Amer. Astron. Soc. 1992. V. 24. № 3. P. 957.
6. Mitchel D. L., de Pater I. // Icarus. 1994. V. 110. № 1. P. 2.
7. Greve A., Steppe H., Graham D. // Astron. Astrophys. 1994. V. 286. № 2. P. 654.
8. Кротиков В. Д., Троицкий В. С. // УФН. 1963. Т. 81. № 4. С. 589.
9. Троицкий В. С. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 9—10. С. 1266.
10. Троицкий В. С., Тихонова Т. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 9. С. 1273.
11. Tyler A. B., Kozlowski R. W. H., Lebofski L. A. // Bull. Amer. Astron. Soc. 1988. V. 20. № 3. P. 810.
12. Черкасов И. И., Шварев В. В. Грунт Луны. — М.: Наука, 1975. — 144 с.
13. The Lunar Surface Layer. — N.-Y.—London, 1964.

14. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайных неоднородных средах. Т. 1. Однократное рассеяние и теория переноса. — М.: Мир, 1981. — 280 с.
15. Кротиков В. Д., Щуко О. Б. // Астрон. журн. 1975. Т. 52. № 1. С. 146.
16. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971. — 552 с.
17. Щуко О. Б. // Астрон. вестник. 1997. Т. 31. № 5. С. 434.
18. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. — Л.: Энергия, 1974. — 264 с.
19. Троицкий В. С. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 8. С. 1051.
20. Ingrao H. C., Young A. T., Linsky J. L. // Harv. Coll. Observ. Rep. 1965. № 6. P. 3.
21. Morrison D. // Space Sci. Rev. 1970. V. 11. P. 271.
22. Чудновский А. Ф. Теплофизические характеристики дисперсных материалов. — М.: Физматгиз, 1962. — 456 с.
23. Troitsky V. S., Burov A. B., Alyoshina T. N. // Icarus. 1968. V. 8. № 3. P. 423.
24. Кротиков В. Д. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1962. Т. 5. № 7. С. 1057.
25. Берч Фр., Шерер Дж. и Спайсер Г. Справочник для геологов по физическим константам. — М.: ИЛ, 1949. — 305 с.
26. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948. — 539 с.

Научно—исследовательский
радиофизический институт,
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
22 июня 1998 г.

DEPENDENCE OF THE MERCURY RADIO EMISSION FROM THE UPPER COVER STRUCTURE AND COMPOSITION

O. B. Shchuko, D. W. Kartashov

The radio emission of Mercury in the 0.3–76.8 cm wavelength range is investigated depending on surface cover structure and composition. Employing different models of structure we have shown that radiation heat conduction is essential for effective temperature and its spectral characteristics. In frame of two-stratum model we have shown that inhomogeneity of structure is essential for correct interpretation of high-surface-resolution microwave measurements. Obtained results may be useful for comparing the experimental data with the theory to determine the physical characteristics of the upper cover of Mercury.

ВОЛНОВАЯ ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ С ПОМОЩЬЮ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

И. В. Катин, Г. А. Марков

Исследованы дисперсионные характеристики плоского диэлектрического волновода в замагниченной плазме. Предложен и опробован в экспериментах метод определения параметров плазмы ВЧ разряда, основанный на сравнении экспериментальных и теоретических зависимостей от внешнего магнитного поля коэффициента передачи зондирующего СВЧ сигнала через отрезок диэлектрического волновода. Получено хорошее согласие между результатами измерений плотности плазмы в разряде предложенным методом волновой диагностики и методом ленгмюровских зондов. Обсуждены возможности использования структур металл–окисел (диэлектрик)–полупроводник в качестве перестраиваемых режекторных фильтров, фазовращателей и модуляторов.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время ВЧ разряды широко используются в различных технологических установках плазмохимии [1]. Диагностика плазмы таких разрядов оптическими и СВЧ методами затруднительна из-за сравнительно небольших значений плотности заряженных частиц, а использование электрических зондов нежелательно, т. к. их электрические цепи существенно изменяют структуру возбуждающих разряд ВЧ полей. Тонкие диэлектрические пластины практически не влияют на структуру ВЧ разряда, могут достаточно хорошо локализовать поле направляемых пластиной поверхностных волн и поэтому удобны для квазилокальной волновой диагностики разрядной плазмы. Использование такой методики сдерживается отсутствием в литературе данных о дисперсионных характеристиках диэлектрических волноводов в плазме. В работе [2] указаны методы практического расчёта волновых чисел для волн, направляемых плоским диэлектрическим волноводом. Однако специфика закритической и замагниченной плазмы исследована только для плазменных волноводов [3].

В настоящей работе приведены результаты численного анализа дисперсионных характеристик поверхностных волновых полей, направляемых плоским диэлектрическим волноводом в плазме. Рассмотрен случай поперечного по отношению к внешнему магнитному полю \mathbf{B}_0 распространения поверхностных волн, направляемых диэлектрическим волноводом. Такой случай наиболее часто встречается в экспериментах и удобен для диагностики плазмы, т. к. возможно представление волновых полей в виде ТЕ и ТМ волн [4]. Предложен и проверен экспериментально метод определения усреднённой плотности плазмы ВЧ разряда по анализу зависимости от величины внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 коэффициента передачи зондирующего СВЧ сигнала через отрезок волновода, пересекающего плазменный столб разряда перпендикулярно его оси.

1. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА В ПЛАЗМЕ

Рассмотрим свойства поверхностных волн, локализованных вблизи диэлектрической пластины в однородной плазме и распространяющихся поперёк внешнего магнитного поля. Геометрия решаемой задачи показана на рис. 1. Здесь $2d$ — толщина слоя диэлектрика, ε_D — диэлектрическая проницаемость пластины, ε_p — тензор диэлектрической проницаемости окружающей пластину плазмы,

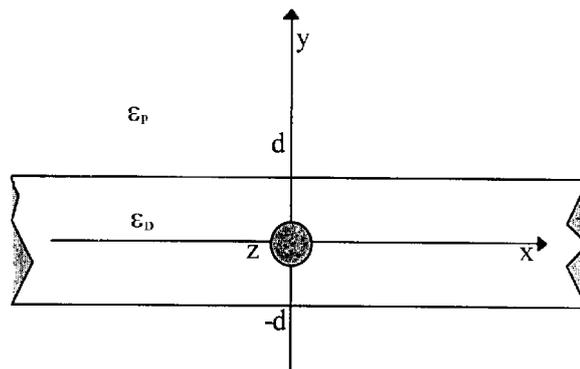


Рис. 1. Геометрия задачи.

который задаётся следующим образом [5]:

$$\epsilon_p = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Компоненты тензора (1) определяются выражениями

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega - i\nu)}{\omega[(\omega - i\nu)^2 - \omega_B^2]}, \quad \epsilon_2 = -\frac{\omega_p^2 \omega_B}{\omega[(\omega - i\nu)^2 - \omega_B^2]}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)}, \tag{2}$$

где ω — частота поля, ω_B — гирочастота электронов, ω_p — плазменная частота, ν — эффективная частота столкновений электронов с нейтралами.

Компоненты поля волн, направляемых пластиной, выражаются с помощью уравнений Максвелла через поперечные к направлению распространения составляющие напряжённости магнитного поля H_z для ТМ и электрического поля E_z для ТЕ волн, которые зададим в виде

$$H_z = \begin{cases} H_0 \begin{Bmatrix} \cos\left(\beta \frac{y}{d}\right) \\ \sin\left(\beta \frac{y}{d}\right) \end{Bmatrix} \exp(-i h x), & |y| \leq d, \\ H_0 \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix} \exp\left(-\alpha\left(\frac{y}{d} - 1\right)\right) \exp(-i h x), & |y| \geq d, \end{cases} \tag{3}$$

$$E_z = \begin{cases} E_0 \begin{Bmatrix} \cos\left(\beta \frac{y}{d}\right) \\ \sin\left(\beta \frac{y}{d}\right) \end{Bmatrix} \exp(-i h x), & |y| \leq d, \\ E_0 \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix} \exp\left(-\alpha\left(\frac{y}{d} - 1\right)\right) \exp(-i h x), & |y| \geq d, \end{cases} \tag{4}$$

где h — продольное волновое число, а α и β — безразмерные поперечные внешнее и внутреннее волновые числа соответственно. Верхняя запись в фигурных скобках соответствует волнам с чётной зависимостью поперечных составляющих поля от координаты y , а нижняя — с нечётной.

Из непрерывности тангенциальных составляющих полей на границе пластины и дисперсионных соотношений для волновых полей в пластине и плазме получаем систему характеристических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \varepsilon_1 - h d \varepsilon_2 = \beta \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_D} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \beta \\ -\operatorname{ctg} \beta \end{array} \right\}, \\ \beta^2 + h^2 d^2 = k_0^2 d^2 \varepsilon_D, \\ h^2 d^2 - \alpha^2 = k_0^2 d^2 \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} \end{array} \right. \quad (5)$$

для ТМ волн и систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \beta \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \beta \\ -\operatorname{ctg} \beta \end{array} \right\}, \\ \beta^2 + h^2 d^2 = k_0^2 d^2 \varepsilon_D, \\ h^2 d^2 - \alpha^2 = k_0^2 d^2 \varepsilon_3 \end{array} \right. \quad (6)$$

для ТЕ волн, где k_0 — волновое число в вакууме.

Из численного анализа систем уравнений (5) и (6) были получены дисперсионные характеристики локализованных волн. Для ТЕ волн дисперсионные характеристики не зависят от поперечного внешнего поля \mathbf{B}_0 и совпадают с дисперсионными характеристиками волн в изотропной плазме. Первая (низшая) чётная ТЕ мода имеет нулевую критическую частоту, все остальные моды начинают существовать с некоторой критической частоты, величина которой определяется выражением [2]

$$\omega_n = \frac{\pi c (n-1)}{2 d \sqrt{\varepsilon_D - \varepsilon_3}}, \quad (7)$$

где n — номер моды ($n = 1$ соответствует низшей моде), c — скорость света, а ε_3 определяется выражением (2) и является функцией частоты. Зависимости коэффициента замедления $\gamma = h/k_0 = \lambda_0/\lambda_B$ (λ_0 — длина плоской волны в вакууме, λ_B — длина волны в волноводе) первой чётной моды от плотности плазмы N_e приведены на рис. 2, где сплошной линией показана действительная часть коэффициента замедления, а штрих-пунктирной линией — мнимая часть. Запирание волновода происходит при плотности плазмы $N_e \geq N_1$. Величину N_1 легко определить из выражения, которое получается из системы (6) при $h = 0$:

$$N_1 = N_c \left(1 + \varepsilon_D \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}^2(k_0 d \sqrt{\varepsilon_D}) \\ \operatorname{ctg}^2(k_0 d \sqrt{\varepsilon_D}) \end{array} \right\} \right), \quad (8)$$

где N_c — критическая плотность плазмы для частоты ω . Дисперсионные характеристики для высших чётных и нечётных ТЕ мод имеют аналогичный вид и получаются путём замены внутреннего волнового числа β низшей моды на β_n , которое задаётся в виде

$$\beta_n = \beta + \frac{\pi}{2} (n-1), \quad (9)$$

где нечётное n соответствует чётным модам, а чётное n — нечётным модам.

Для диагностических целей более привлекательным является использование ТМ волн. Дисперсия ТМ волн плоского диэлектрического волновода в плазме с заданной концентрацией характеризуется наличием области запираения в диапазоне частот $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$, где ω_1 и ω_2 находятся из системы уравнений (5) при $h = 0$ (см. рис. 3). В случаях малых значений параметра $k_0 d \ll 1$, интересных для диагностики, выражения для ω_1 и ω_2 существенно упрощаются:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_p^2 + \frac{\omega_B^2}{4}} + \frac{\omega_B}{2}, \tag{10}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\epsilon_D + 1} + \frac{\omega_B^2}{4}} + \frac{\omega_B}{2}. \tag{11}$$

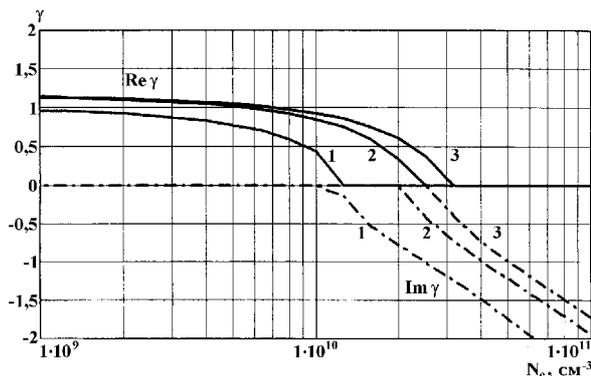


Рис. 2. Зависимости коэффициента замедления γ от плотности плазмы N_e для первой ТЕ моды при $\omega = 2\pi \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$, $\epsilon_D = 4$ для следующих случаев: 1) $\nu/\omega = 0$, $d/\lambda_0 = 1/300$; 2) $\nu/\omega = 0$, $d/\lambda_0 = 1/30$; 3) $\nu/\omega \sim 0,5$, $d/\lambda_0 = 1/30$.

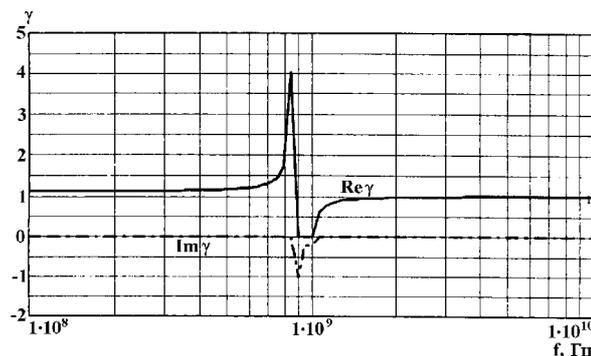


Рис. 3. Зависимость коэффициента замедления γ от частоты $f = \omega/2\pi$ для первой ТМ моды при $2d = 2 \text{ мм}$, $B_0 = 300 \text{ Гс}$, $\nu = 5 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$, $N_e = 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$.

Сплошная линия на рис. 3 показывает величину действительной части коэффициента замедления волноводной моды, а штрих-пунктирная линия — мнимой части. При частотах $\omega < \omega_2$ вдоль волновода распространяется замедленная истинно поверхностная волна ($\gamma > 1$), коэффициент замедления которой имеет максимум при $\omega = \omega_2$. На высоких частотах $\omega > \omega_1$ вдоль волновода распространяются быстрые по отношению к случаю однородной среды с заполнением ϵ_D волны ($\gamma < 1$). Область запираения характеризуется наличием сильно затухающих волн, мнимые части постоянных распространения которых велики по сравнению с действительными. При уменьшении плотности плазмы область запираения уменьшается до нуля.

Заслуживает внимания изменение поведения дисперсионных характеристик ТМ волн в зависимости от плотности плазмы при заданных значениях частоты ω и различных соотношениях ω_B/ω (рис. 4, 5). Наблюдаемая при $\omega > \omega_B$ область запираения $\Delta N_e = N_2 - N_1$ (рис. 4) уменьшается до нуля при $\omega = \omega_B$ (рис. 5, сплошная линия), а при $\omega < \omega_B$ слабозатухающие поверхностные ТМ волны существуют в широком диапазоне концентраций плазмы (рис. 5, штриховая линия). Величины N_1 и N_2 в случае $k_0 d \ll 1$ определяются выражениями

$$N_1 = N_c \left(1 - \frac{\omega_B}{\omega}\right), \tag{12}$$

$$N_2 = N_c (\epsilon_D + 1) \left(1 - \frac{\omega_B}{\omega}\right). \tag{13}$$

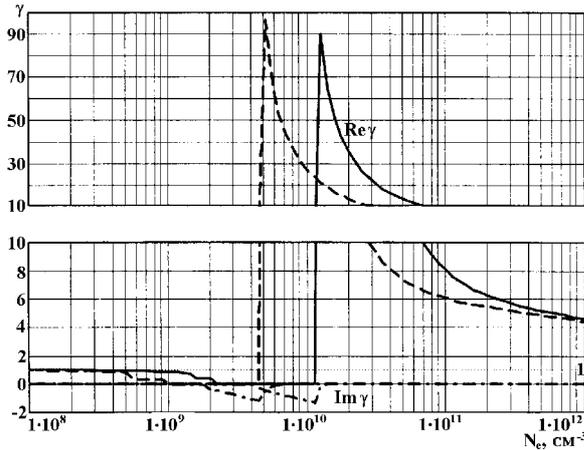


Рис. 4. Зависимости коэффициента замедления γ от плотности плазмы N_e для первой ТМ моды при $2d = 2$ мм, $f_s = 800$ МГц, $\nu = 5 \cdot 10^7$ с $^{-1}$, $B_0 = 200$ Гс ($\omega_b/\omega = 0,7$ — сплошная линия), $B_0 = 250$ Гс ($\omega_b/\omega = 0,88$ — штриховая линия).

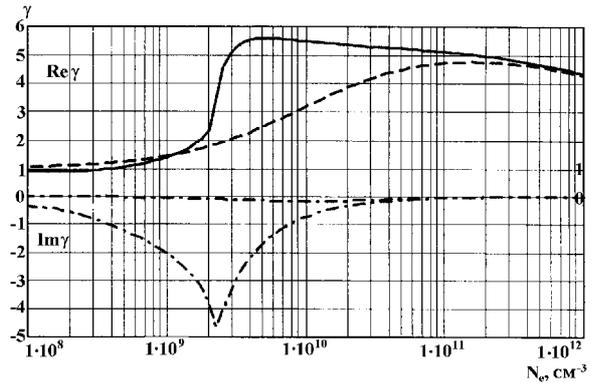


Рис. 5. Зависимости коэффициента замедления γ от плотности плазмы N_e для первой ТМ моды при $2d = 2$ мм, $f_s = 800$ МГц, $\nu = 5 \cdot 10^7$ с $^{-1}$, $B_0 = 282$ Гс ($\omega_b/\omega = 0,99$ — сплошная линия), $B_0 = 300$ Гс ($\omega_b/\omega = 1,06$ — штриховая линия).

На рис. 6 приведены дисперсионные характеристики первой ТМ моды диэлектрического волновода в плазме в зависимости от величины внешнего магнитного поля B_0 . Кривые на рис. 6 отличаются значениями потерь. Сплошная линия соответствует случаю $\nu/\omega \approx 10^{-2}$, а штриховая линия соответствует случаю $\nu/\omega \approx 10^{-3}$. Существенно, что с уменьшением величины ν/ω заметно увеличивается пик коэффициента замедления, расположенный вблизи точки отпираания волновода. Так, при $\nu/\omega \leq 10^{-5}$ величина коэффициента замедления на частотах $f_s \approx 1$ ГГц порядка 100, т. е. длина замедленной волны может быть сравнима с толщиной пластины и при $k_0 d \ll 1$.

Дисперсионные характеристики высших чётных и нечётных ТМ мод имеют такой же вид, как и дисперсионные характеристики первой моды, с той лишь разницей, что они начинают существовать с большей критической частоты или с некоторой характерной концентрации плазмы. Характеристики можно получить заменой внутреннего волнового числа β на β_n согласно выражению (9). Здесь важно отметить, что о многомодовости волновода можно говорить только в области быстрых по отношению к плоским волнам в диэлектрике с проницаемостью ϵ_D волн. Номер моды определяется по количеству нулей поля вдоль поперечной координаты y внутри волновода, когда внутреннее волновое число β — действительная величина [2]. В области истинной поверхностной волны β становится мнимой величиной, и зависимость компонент поля от поперечных координат становится экспоненциальной. В этом случае говорить о количестве нулей не имеет смысла, т. к. их нет для чётных волн и имеется единственный нуль при $y = 0$ для нечётных волн.

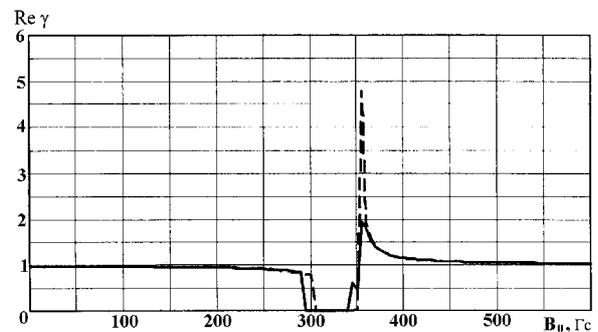


Рис. 6. Зависимости коэффициента замедления γ от величины внешнего магнитного поля B_0 для первой ТМ моды при $2d = 2$ мм, $f_s = 1000$ МГц, $\epsilon_D = 4$, $\frac{\nu}{\omega} = 10^{-2}$ (сплошная линия), $\frac{\nu}{\omega} = 10^{-3}$ (штриховая линия).

2. УСЛОВИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для диагностики плазмы с помощью диэлектрического волновода можно использовать все известные в настоящее время волновые схемы [6]. В данной работе в качестве примера мы определяли плотность плазмы по её влиянию на коэффициент передачи зондирующего сигнала через отрезок плоского волновода. В тонкой диэлектрической пластине возбуждалась первая (низшая) чётная ТМ мода с помощью Т-образного перехода с коаксиального питающего кабеля. На другом конце пластины такой же переход использовался для регистрации прошедшего сигнала, пропорционального амплитуде волнового поля в данном месте. Согласование переходов было сравнительно плохим, поэтому коэффициент передачи отрезка волновода имел глубокие минимумы в тех случаях, когда его длина оказывалась равной целому нечётному числу четвертей длины волны, направляемой пластиной в плазме. Если на длине отрезка укладывалось чётное число четвертей длины зондирующей волны, то коэффициент передачи достигал максимума.

Эксперименты были выполнены в стеклянной разрядной камере длиной 1800 мм и диаметром 200 мм, помещённой в направленное вдоль камеры магнитное поле \mathbf{B}_0 . Разряд возбуждался в воздухе при давлении $p \leq 10^{-2}$ Торр симметричной дипольной антенной, состоящей из трёх соосных колец диаметром 60 мм, расположенных на оси камеры у одного из её торцов на расстоянии 30 мм друг от друга. Крайние кольца были соединены с внешней обмоткой питающего кабеля, а центральное кольцо — с внутренней жилой кабеля. К антенне подводилось ВЧ напряжение с частотой 240 МГц и амплитудой 50 В от генератора ГСТ-2. Плазменный столб, формируемый в результате ионизационного самоканалирования плазменных волн в магнитном поле \mathbf{B}_0 , вытягивался от дипольного источника на всю длину разрядной камеры [7]. Диагностическая пластина из стеклотекстолита с проницаемостью $\epsilon_D = 4$ (тангенс угла потерь $\text{tg } \delta \approx 10^{-2}$), толщиной $2d = 2$ мм, шириной и длиной 160 мм помещалась поперёк плазменного столба на расстоянии

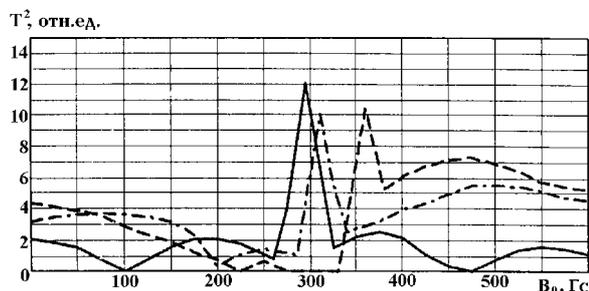


Рис. 7. Экспериментальные зависимости коэффициента передачи от величины внешнего магнитного поля B_0 (Гс) для разных значений частоты зондирующего сигнала f_s при $p = 10^{-2}$ Торр: $f_s = 800$ МГц (сплошная линия), $f_s = 900$ МГц (штрих-пунктирная линия), $f_s = 1000$ МГц (штриховая линия).

му изменение набега фазы диагностического сигнала в диэлектрическом волноводе определялось и плотностью окружающей плазмы, и величиной внешнего магнитного поля. Следует иметь в виду, что из-за малости размеров возбуждающего и принимающего диагностический сигнал вибраторов (Т-образных переходов с коаксиального кабеля на плоский волновод) $l_{\text{виб.}} = 2$ мм по сравнению с длиной волны λ_s , составляющей приблизительно 300 мм, величина прошедшего плазму сигнала определялась только полем волноводной моды, сравнительно слабо затухающей на длине отрезка волновода (см. рис. 4, 5). Амплитуды квазистатического поля и излучаемых в плазму волновых полей быстро спадают

приблизительно 300 мм от ВЧ источника разряда. Ось симметрии столба и вектор \mathbf{B}_0 лежали в плоскости симметрии волновода и его широкой стенки. Диагностический сигнал с частотой порядка 1000 МГц подавался от генератора Г4-160 через отрезок диэлектрического волновода на вход анализатора спектра С4-27. Для контроля за параметрами плазмы за пределами резонансного конуса [7] использовался лентгмюровский зонд [8].

Результаты экспериментов представлены на рис. 7 в виде зависимости величины диагностического сигнала, прошедшего через волновод в плазме, от величины внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 для нескольких рабочих частот f_s . В наших экспериментах при изменении \mathbf{B}_0 менялись плотность плазмы в столбе и согласование ВЧ источника с разрядом. Поэто-

с ростом расстояния от возбуждающего вибратора и малы уже на расстояниях порядка размера вибратора $l_{\text{виб.}}$. Количество и расположение экстремумов на зависимости коэффициента передачи отрезка диэлектрического волновода T^2 от поля \mathbf{B}_0 можно оценить из следующего простейшего выражения:

$$T^2 = |\text{Re}(\exp\{-i h L\})|^2, \quad (14)$$

где L — длина волновода, h — постоянная распространения волны в волноводе для заданных величин магнитного поля \mathbf{B}_0 и плотности плазмы N_e , окружающей волновод. Задавая зависимость $N_e(B_0)$ в виде некоторой растущей функции

$$N_e(B_0) = N_0 \left[\frac{B_0 + a}{b} + p \frac{\exp\{g(B_0 - B_c)\}}{1 + \exp\{g(B_0 - B_c)\}} \right] \quad (15)$$

и подбирая коэффициенты N_0 , a , b , g , p , B_c , можно получить теоретические зависимости $T^2(B_0)$ для разных частот f_s , качественно похожие на экспериментальные кривые рис. 7 по расположению максимумов и минимумов. На рис. 8 представлены кривые $T^2(B_0)$, рассчитанные для зависимости $N_e(B_0)$, соответствующей (15) при $N_0 = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $a = 400$, $b = 400$, $g = 0,05$, $p = 15$, $B_c = 550$, для трёх значений частот зондирующего сигнала f_s . На рис. 9 приведена кривая $N_e(B_0)$, соответствующая коэффициентам передачи рис. 8. Форма кривых $T^2(B_0)$, приведённых на рис. 8, отличается от формы экспериментальных кривых (см. рис. 7), т. к. в выражении (12) не учитываются неоднородность плазмы, изменение коэффициентов возбуждения диагностической волны в пластине и её переотражения от краёв пластины. Однако совпадение числа и расположения максимумов и минимумов на экспериментальных и теоретических кривых $T^2(B_0)$ для разных частот диагностического сигнала доказывает возможность и правильность определения плотности плазмы в разряде предложенным способом.

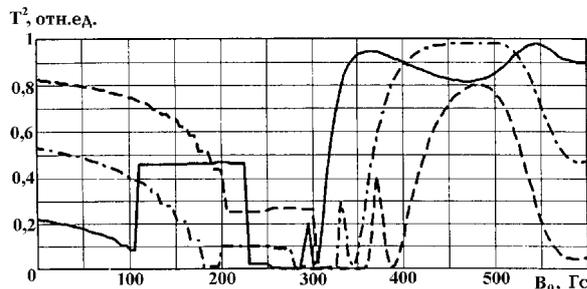


Рис. 8. Теоретические зависимости коэффициента передачи от величины внешнего магнитного поля B_0 при $f_s = 800$ МГц (сплошная линия), $f_s = 900$ МГц (штрих-пунктирная линия), $f_s = 1000$ МГц (штриховая линия).

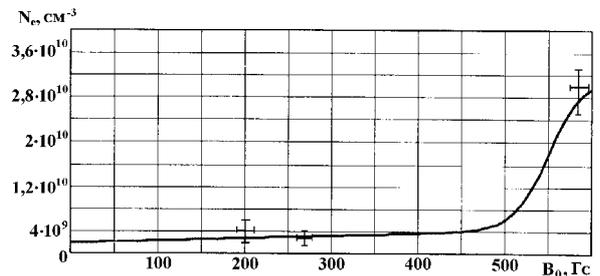


Рис. 9. Экспериментально определённая зависимость усреднённой плотности плазмы N_e от величины внешнего магнитного поля B_0 .

Кривая $N_e(B_0)$ на рис. 9 в точности соответствует экспериментальным значениям плотности плазмы, снятым с помощью ленгмюровских зондов. При больших магнитных полях ($B_0 = 600$ Гс) значение плотности определялось двойным зондом, расположенным вблизи оси плазменного шнура на расстоянии 80 см от источника ВЧ разряда. При малых магнитных полях плотность плазмы определялась как двойным зондом в центре шнура ($B_0 = 200$ Гс), так и одиночным зондом на расстоянии 6 см от оси шнура ($B_0 = 250$ Гс).

Следует иметь в виду, что при уменьшении эффективной частоты столкновений электронов в разряде растёт максимум коэффициента замедления поверхностной волны вблизи точки отпирания диэлектрического волновода (см. рис. 6). Поэтому пик коэффициента передачи волноводного отрезка в указанной области параметров плазмы расщепляется при уменьшении отношения ν/ω на всё большее

число узких пиков. На рис. 10 приведены результаты расчётов коэффициента передачи $T^2(B_0)$ для трёх значений параметра ν/ω и зависимости плотности плазмы, приведённой на рис. 9, от величины внешнего магнитного поля. Отдельно на рис. 11 показана тонкая структура расщеплённого пика $T^2(B_0)$ вблизи точки отпираания волновода, рассчитанная с шагом счёта $\Delta B_0 = 0,1$ Гс при $\nu/\omega \approx 10^{-4}$.

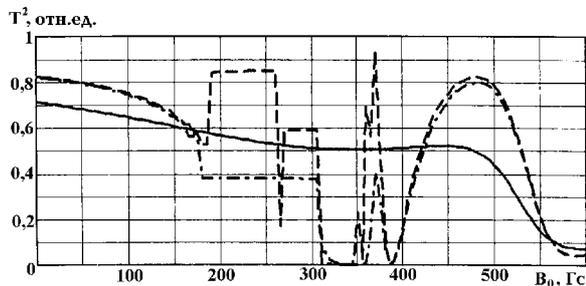


Рис. 10. Теоретические зависимости коэффициента передачи от величины внешнего магнитного поля B_0 при $2d = 2$ мм, $f_s = 1000$ МГц, $\varepsilon_D = 4$ и разных значений параметра ν/ω : $\nu/\omega \approx 1$ (сплошная кривая), $\nu/\omega \approx 10^{-2}$ (штрих-пунктирная кривая), $\nu/\omega \approx 10^{-4}$ (штриховая кривая).

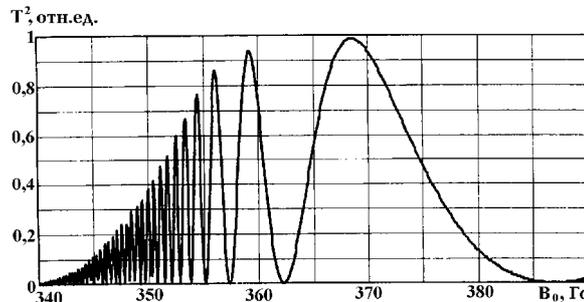


Рис. 11. Тонкая структура пика коэффициента передачи волнового отрезка $T^2(B_0)$ вблизи максимума коэффициента замедления при $2d = 2$ мм, $f_s = 1000$ МГц, $\varepsilon_D = 4$, $\nu/\omega \approx 10^{-4}$.

Из приведённых результатов очевидна возможность определения эффективной частоты столкновений электронов, а при известной длине свободного пробега — и средней энергии электронов. Нестационарность и неоднородность магнитного поля и плазмы вдоль волновода могут смазать тонкую структуру указанного максимума коэффициента передачи, однако и этот факт можно использовать для определения параметров неоднородности.

В наших экспериментах для питания магнитных катушек использовался выпрямительный агрегат ВЗП 380/260–40/80–УХЛ4–1 1Р20. Модуляция магнитного поля B_0 в области разряда достигала 10%, поэтому на экспериментальных кривых после области запирающего ($B_0 \geq 250$ Гс) виден большой уширенный пик коэффициента передачи (см. рис. 7). Тонкую структуру этого пика, как оказалось, можно наблюдать на осциллографе, на горизонтальную ось которого подавался сигнал, пропорциональный колебаниям магнитного поля, а на вертикальную ось — протектированный сигнал с выхода волноводного отрезка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведённые в работе результаты исследования дисперсионных характеристик диэлектрического волновода в плазме показывают перспективность использования устройств на его основе для волновой диагностики плазмы ВЧ разрядов. Особенностью такой диагностики является простота анализа экспериментальных результатов и многообразие методик, позволяющих повысить достоверность и точность определяемых параметров. Например, кроме использованных в работе зависимостей коэффициента передачи волноводного отрезка от магнитного поля $T^2(B_0)$, возможно использование зависимости коэффициента передачи от частоты зондирующего сигнала $T^2(\omega)$. Такую методику удобно реализовать с помощью автоматизированных измерительных линий и измерителей амплитудно-частотных характеристик, в которых используются генераторы с качающейся частотой. Для импульсных и модулированных разрядов, в которых плотность плазмы изменяется со временем, удобно использовать зависимости коэффициента передачи волноводного отрезка от плотности окружающей плазмы.

Следует подчеркнуть возможность определения средней энергии или температуры электронов через их эффективную частоту столкновений ν в разряде по тонкой структуре максимума коэффициента передачи, расположенного вблизи точки отпирания волновода.

Особо отметим перспективность использования диэлектрических волноводов в замагниченной плазме в качестве быстро перестраиваемых СВЧ фильтров, фазовращателей и модуляторов. Такие устройства на основе МОП* структур легко сопрягаются с микрополосковыми линиями и конструктивно удобны для интеграции с активными полупроводниковыми приборами в большие электронные схемы и устройства. Время перестройки таких фильтров определяется скоростью изменения внешнего магнитного поля и может быть сравнительно малым, т. к. можно создать сильное магнитное поле в достаточно малом объёме пространства и ограничиться небольшими вариациями магнитного поля в области сильной дисперсии волновых полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Туманов Ю. Н. // Химия плазмы. 1984. Вып. 13. С. 163.
2. Взятых В. Ф. Диэлектрические волноводы. — М.: Сов. радио, 1970.
3. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы. — М.: Атомиздат, 1976.
4. Ахиезер А. И. Электродинамика плазмы. — М.: Физматгиз, 1974.
5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Физматгиз, 1967.
6. Голант В. Е. СВЧ диагностика плазмы. — М.: Наука, 1968.
7. Марков Г. А. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. Вып. 4. С. 1289.
8. Козлов О. В. Электрический зонд в плазме. — М.: Атомиздат, 1969.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
13 июля 1998 г.

*МОП — металл—окисел (диэлектрик)—полупроводник.

WAVE DIAGNOSTICS OF PLASMAS USING A DIELECTRIC WAVEGUIDE*I. V. Katin, G. A. Markov*

We study dispersion characteristics of a plane dielectric waveguide in a magnetized plasma. A method is proposed and realized for determining the parameters of a rf discharge plasma, based on comparing experimental and theoretical dependencies of the transmission coefficient via the dielectric waveguide of a sounding VHF signal on the external magnetic field. A satisfactory agreement is found between the results of measurements of the plasma density in the discharge with the use of the proposed method and the results obtained by using the Langmuir probes. Discussion is made of the possibilities to utilize the metal-oxid-semiconductor (MOS) structures as retuned filters, phase rotators, and modulators.

УДК 621.385.69.01

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В РЕЗОНАТОРЕ НЕПРЕРЫВНОГО 170 ГГц/1 МВт ГИРОТРОНА ДЛЯ ITER С РАБОЧЕЙ МОДОЙ TE 25.10

Н. А. Завольский, В. Е. Запевалов, М. А. Мусеев

Рассмотрен гиротрон, предназначенный для комплекса ЭЦ нагрева плазмы международного термоядерного реактора ITER. Проведена оптимизация параметров резонатора с учётом омических потерь, переизлучения волн на нерегулярностях профиля, провисания потенциала и разброса скоростей электронного пучка. Исследовано влияние ионной компенсации пространственного заряда, установление колебаний при включении гиротрона, конкуренция рабочей и паразитных мод. Показана возможность достижения КПД 35–39% без рекуперации и 55–60% с одноступенчатой рекуперацией энергии электронного пучка при удельной мощности омических потерь в резонаторе менее 2 кВт/см².

ВВЕДЕНИЕ

Для комплекса ЭЦР нагрева плазмы и управления током будущего международного термоядерного реактора ITER необходимы гиротроны с частотой 170 ГГц и мощностью выходного излучения 1 МВт в непрерывном режиме [1–3], создание которых требует решения ряда проблем. Одной из них является повышение КПД гиротрона и уменьшение омического нагрева стенки резонатора. Омическая нагрузка уменьшается при использовании рабочих мод высших типов (увеличении радиуса резонатора, уменьшении радиуса электронного пучка) и при сглаживании профиля продольного сечения резонатора, когда достигается минимальная дифракционная добротность [4].

Отметим, что с увеличением радиуса резонатора сгущается спектр собственных частот, обостряется конкуренция мод и возникают трудности с возбуждением рабочей моды при включении гиротрона. Уменьшаются допустимые отклонения параметров от оптимальных значений в стационарном режиме. Сглаживание профиля ухудшает селекцию мод по продольному индексу. С увеличением отношения радиуса резонатора к радиусу винтового электронного пучка (ВЭП) возрастает провисание потенциала ВЭП, ограничивающее мощность и уменьшающее КПД гиротрона [5].

Гиротроны с рабочими модами TE_{28,7} и TE_{31,8}, ускоряющим напряжением 80 кВ, током 40 А и выходной мощностью 1 МВт теоретически исследовались в [3, 6, 7]. При оптимизированном профиле резонатора они имеют расчётный КПД 32–36% и омическую нагрузку резонатора 2–2,5 кВт/см². Существенное (в 1,5 раза) увеличение КПД достигается в гиротронах с рекуперацией остаточной энергии отработанного ВЭП [8–11].

В настоящей работе рассматриваются возможности увеличения КПД гиротрона и уменьшения омической нагрузки резонатора при переходе к ещё более пространственно развитой рабочей моде TE_{25,10} (примерно с тем же радиусом резонатора и меньшим оптимальным радиусом ВЭП) с учётом ограничений, связанных с самовозбуждением паразитных мод и провисанием потенциала.

1. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ГИРОТРОНА

Расчёты проводились на основе теории гиротронов с нефиксированной продольной структурой ВЧ поля [4, 12] методом, аналогичным [6, 7]. Для гиротрона был выбран резонатор с регулярным цилиндрическим участком и скруглениями профиля продольного сечения на входном и выходном концах [13]. Добротность такого резонатора Q близка к минимальной дифракционной добротности $Q_{\text{диф. мин}} = 4\pi(L/\lambda)^2$, где L — эффективная длина резонатора, λ — длина волны в свободном пространстве [4].

При оптимальной величине магнитного поля соленоида продольная структура ВЧ поля в резонаторе близка к фиксированной гауссовой $f(z) = \exp[-(2z/L)^2]$. Отличие структуры поля от гауссовой на выходном конце резонатора и в волноводном переходе слабо влияет на КПД, поскольку отработанный ВЭП выходит из синхронизма с ВЧ полем. За счёт доотбора энергии в выходном волноводном переходе максимум поперечного электронного КПД $\eta_{\perp} \approx 0,85$ на 0,1 превышает $\eta_{\perp \text{max}} = 0,72$ модели гиротрона с фиксированной гауссовой структурой ВЧ поля [14] и близок к предельному расчётному значению η_{\perp} гиротронов с оптимизированной структурой поля [12].

КПД гиротрона (без рекуперации остаточной энергии отработанного ВЭП) $\eta = P/IU_0$ определяется выражением

$$\eta = \eta_{\perp} \cdot [g^2/(1 + g^2)] \cdot (1 - Q/Q_{\text{ом}}) \cdot (U_0 - \Delta U)/U_0, \quad (1)$$

где P — мощность излучения из резонатора в киловаттах, I — ток ВЭП в амперах, U_0 — ускоряющее напряжение в киловольтах, $g = \nu_{\perp 0}/\nu_{z0}$ — питч-фактор, $Q_{\text{ом}}$ — омическая добротность, ΔU — провисание потенциала ВЭП. При полном пространственном заряде электронного пучка (в отсутствие ионной компенсации заряда ВЭП [15])

$$\Delta U = 0,06 \cdot (I/\beta_z) \cdot \ln(R_p/R_0), \quad (2)$$

где $\beta_z = \nu_{z0}/c$ — отношение скорости поступательного движения электронов к скорости света, R_p — радиус резонатора, R_0 — радиус электронного пучка.

Измеренные значения омической добротности в резонаторах гиротронов коротковолновой части мм-диапазона, как правило, в 1,5–2 раза меньше расчётных для резонатора из идеальной меди. С учётом эмпирического множителя 1/2 выражение для $Q_{\text{ом}}$ [16] имеет вид

$$Q_{\text{ом}} = 683 \cdot \nu_s \cdot [1 - (m/\nu_s)^2] \cdot \lambda^{1/2}, \quad (3)$$

где λ — длина волны в миллиметрах, ν_s — корень уравнения $J'_m(\nu_s) = 0$, соответствующий рассматриваемой моде $\text{TE}_{m,p}$ с азимутальным m и радиальным p индексами, $J'_m(\nu)$ — производная функции Бесселя $J_m(\nu)$ по аргументу.

Поперечный КПД модели гиротрона с гауссовой продольной структурой ВЧ поля [14] с точностью 0,1 аппроксимируется выражением

$$\eta_{\perp} \left[0,72 - \left(\frac{\mu - 17}{25} \right)^2 \right] \cdot \left[1 - \left(\frac{I_0 - I_{0.\text{опт}}}{I_{0.\text{ст.м}} - I_{0.\text{опт}}} \right)^4 \right] \quad (4)$$

при $4 \leq \mu \leq \mu_{\text{опт}} \approx 17$, $I_{0.\text{ст.м}} \leq I_0 \leq I_{0.\text{опт}}$. Здесь $\mu = \pi g \beta_{\perp} L/\lambda$ — параметр, пропорциональный длине резонатора, $\beta_{\perp} = \nu_{\perp 0}/c$ — отношение скорости вращательного движения электронов к скорости света. Кроме того,

$$\begin{aligned} I_{0.\text{ст.м}} &= \exp(\theta^2/8) \cdot 16 \cdot \mu^2 / (\pi \mu \theta - 4\pi), \\ \theta &= (2/\mu) + [(2/\mu)^2 + 4]^{1/2}, \\ I_{0.\text{опт}} &= 6\mu^2 \end{aligned} \quad (5)$$

есть минимальное по углу пролёта электронов $\theta = (\omega - \omega_H)L/\nu_{z0}$ стартовое и приближённое оптимальное значения параметра

$$\begin{aligned} I_0 &= 6 \cdot 10^{-5} \cdot I \cdot Q \cdot (\pi g)^4 \cdot (L/\lambda)^3 \cdot G, \\ G &= [J_{m-1}(\nu_s R_0/R_p)/J_m(\nu_s)]^2 / (\nu_s^2 - m^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Удельная мощность омических потерь в резонаторе с гауссовой структурой поля, в максимуме $f(z)$ равна

$$P_{\text{ом}} = 25,5 \cdot P \cdot Q_{\text{диф}} / (Q_{\text{ом}} \cdot R_p \cdot L) \text{ [кВт/см}^2\text{]},$$

где P в [кВт], R_p и L в [мм], $Q_{\text{диф}}$ — дифракционная добротность. При $Q_{\text{диф}} \approx Q_{\text{диф. min}}$ омическая нагрузка пропорциональна длине резонатора L . Выражая L через $P_{\text{ом}}$ и подставляя (3), (5) в (6), с учётом $Q \approx Q_{\text{диф}}$, $R_p = \nu_s \lambda / 2\pi$ и $\beta_{\perp}^2 + \beta_z^2 = 2(U_0 - \Delta U)/511$ (в слаборелятивистском приближении), получим:

$$\frac{I_0}{I_{0,\text{опт}}} = \frac{(1 + g^2) J_{m-1}^2(\nu_s R_0/R_p) \cdot (\nu_s^2 - m^2)^2 \cdot (\lambda^{5/2} P_{\text{ом}})^3}{81 \cdot \eta \cdot J_m^2(\nu_s) \cdot (U_0 - \Delta U) \cdot U_0 \cdot P^2}. \quad (7)$$

В гиротронах обычно выполняются условия $\mu \gg 1$, $I_{0,\text{опт}} \gg I_{0,\text{ст.м}}$. При этих условиях зависимость КПД (1) от $P_{\text{ом}}$ определяется, главным образом, зависимостью η_{\perp} (4) от $I_0/I_{0,\text{опт}}$. Из (7) следует, что омическая нагрузка резонатора уменьшается с уменьшением КПД (укорочением резонатора), а при заданном КПД — с ростом питч-фактора g , увеличением отношения J_{m-1}/J_m и снижением ускоряющего напряжения.

Оптимальный радиус ВЭП $R_{0,\text{опт}} = \nu_{m-1.1} \cdot \lambda / 2\pi$ соответствует максимуму J_{m-1} . Значения $\nu_{m,p}$ при $m \gg 1$ и $p \sim 1$ выражаются через корни производной функции Эйри $\nu(-t)$ [16], $\nu_{m,p} = m + (m/2)^{1/3} \cdot t_p$, где $t_1 = 1,02$, $t_2 = 3,25$, $t_3 = 4,82$, ... При отклонении R_0 от $R_{0,\text{опт}}$ и фиксированном КПД омическая нагрузка возрастает. Ширина максимума $J_{m-1}(\nu_s R_0/R_p)$ на уровне $0,7 \cdot (J_{m-1})_{\text{max}}$ равна $\Delta R_0 = 0,2 \cdot \lambda \cdot (m-1)^{1/3}$. На границах этого интервала структурный фактор G (6) уменьшается вдвое, а $P_{\text{ом}}$ возрастает на 25%.

При оптимальном R_0 отношение $J_{m-1}^2(\nu_s R_0/R_p)/J_m^2(\nu_s) \approx \nu_s/m$. Предполагая, что в (7) $\Delta U \ll U_0$, $\eta \leq \eta_{\text{max}}$, из (1)–(7) для обычно используемых в гиротронах пространственно развитых мод ($\nu_s^2 \gg m^2$) можно получить оценку зависимости КПД от параметров

$$\eta \approx \eta_{\text{max}}^{3/4} \cdot \frac{(1 + g^2)^{1/4} \cdot \nu_s^{5/4} \cdot (\lambda^{5/2} P_{\text{ом}})^{3/4}}{3 \cdot m^{1/4} \cdot U_0^{1/2} \cdot P^{1/2}}, \quad (8)$$

где η_{max} — значение η при $I_0 = I_{0,\text{опт}}$. При заданном КПД $P_{\text{ом}} \sim m^{1/3}/\nu_s^{5/3} \sim R_0^{1/3}/R_p^{5/3}$. В принципе, максимум отношения $\eta/P_{\text{ом}}$ следует искать на близких к симметричным модах $\text{TE}_{m,p}$ ($m \ll p$, $R_0 \ll R_p$). Допустимые значения m/p , R_0/R_p ограничиваются уменьшением КПД вследствие провисания потенциала [5] и конкуренцией мод.

Ниже приведены результаты численного моделирования гиротрона с рабочей модой $\text{TE}_{25,10}$, когда влияние провисания потенциала на КПД ещё незначительно и близко к влиянию его на модах $\text{TE}_{28,7}$, $\text{TE}_{31,8}$, а омическая нагрузка резонатора существенно ниже.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОФИЛЯ РЕЗОНАТОРА

Изменение радиусов скруглений профиля слабо влияет на соотношение между КПД и омической нагрузкой резонатора, и поэтому оптимизация профиля ограничивалась, главным образом, подбором

длины регулярного участка резонатора L_p . В гиротроне с нефиксированной структурой ВЧ поля нет явной зависимости $P_{ом}$ от длины резонатора, аналогичной модели с гауссовой структурой, и $P_{ом}$ является функционалом от продольной структуры ВЧ поля, соответствующей оптимальному по КПД режиму. Омическая нагрузка $P_{ом}$ определялась для середины резонатора, где она максимальна.

Рис. 1 показывает возможности оптимизации. Для сравнения приведены зависимости $\eta(P_{ом})$ гиротронов с рабочими модами $TE_{28.7}$ и $TE_{31.8}$ [6, 7]. Провисание потенциала ВЭП не учитывается (непрерывный режим генерации, $\Delta U = 0$ [15]). Провисание потенциала (2), обусловленное собственным пространственным зарядом ВЭП ($\Delta U \approx 5-10$ кВ, в зависимости от рабочей моды и тока $I = 1000/\eta U_0$), уменьшает КПД на 0,005–0,01. В ВЭП реального гиротрона можно ожидать величину разброса скоростей $\delta v_{\perp} \approx 0,3$ и питч-фактор $g \approx 1,25$ [1, 2, 17]. При $\delta v_{\perp} \leq 0,4$ и фиксированном $g = 1,2$ КПД слабо зависит от δv_{\perp} . С увеличением питч-фактора с 1,2 до 1,4 КПД возрастает на 0,04–0,05 [6, 7].

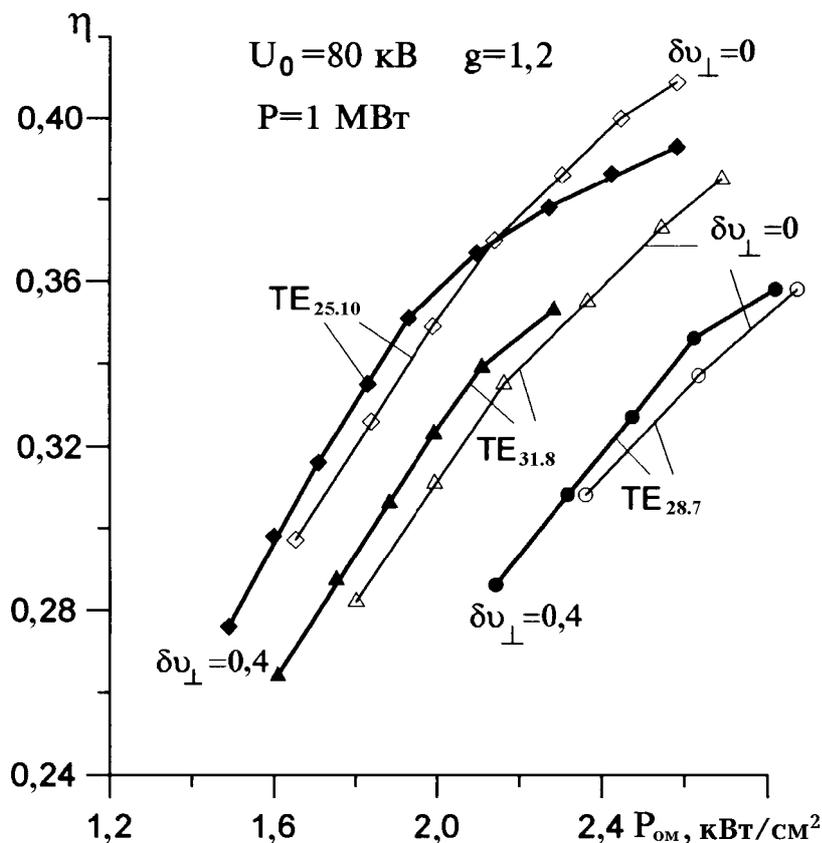


Рис. 1. Зависимость КПД от удельной мощности омических потерь.

При допустимом уровне омической нагрузки 2 $кВт/см^2$ КПД гиротрона на моде $TE_{25.10}$ составляет $0,35$, а на модах $TE_{28.7}$ и $TE_{31.8}$ не превышает $0,26$ и $0,32$, соответственно (длина резонатора меньше оптимальной по КПД). С увеличением длины резонатора η и $P_{ом}$ возрастают, и при использовании эффективных систем охлаждения, допускающих большие $P_{ом}$, можно оптимизировать L_p с целью достижения наибольших КПД. Из рис. 1 видно, что с ростом $P_{ом}$ кривая КПД для моды $TE_{25.10}$ начинает испытывать насыщение. Насыщение происходит при $P_{ом} \approx 3,3$ $кВт/см^2$ и связано с достижением предельного поперечного КПД ($\eta_{\perp max} \approx 0,85-0,75$ при $\delta v_{\perp} = 0-0,4$) и возрастанием $Q/Q_{ом}$ в (1).

Для достижения максимального КПД при ограничении омических потерь на уровне $2-2,5$ $кВт/см^2$ необходимо переходить к более высоким рабочим модам типа $TE_{25.12}-TE_{25.16}$ с большими R_p . Увеличение радиуса резонатора не препятствует достижению максимального КПД, поскольку

в непрерывном гиротроне провисание потенциала отсутствует вследствие ионной компенсации заряда ВЭП [15]. Проблемы возникают с провисанием потенциала, устойчивостью ВЭП и конкуренцией мод на фронте импульса ускоряющего напряжения при включении гиротрона, когда ещё не накопилось достаточное количество положительных ионов для компенсации заряда ВЭП, и это требует специального исследования. Например, в гиротроне с рабочей модой $TE_{25.16}$ провисание потенциала ($\Delta U = 9$ кВ при $I = 40$ А) уменьшает КПД на 0,05.

Полученные зависимости $\eta(P_{ом})$ на рис. 1 качественно соответствуют оценочной формуле (8) (количественное расхождение в КПД $\Delta\eta/\eta \leq 20\%$). Увеличение отношения $\eta/P_{ом}$ в гиротроне на моде $TE_{25.10}$ объясняется тем, что при близких радиусах резонаторов R_p эта мода имеет меньший оптимальный радиус электронного пучка R_0 и, соответственно, большее отношение амплитуд ВЧ полей в области ВЭП и на поверхности резонатора по сравнению с $TE_{28.7}$ и $TE_{31.8}$ модами.

3. ПЕРЕИЗЛУЧЕНИЕ РАБОЧЕЙ МОДЫ В ДРУГИЕ ТИПЫ ВОЛН

Переизлучение в волны с другими радиальными индексами на нерегулярностях профиля продольного сечения резонатора и неоднородностях ВЭП учитывалось с помощью модифицированного метода плоских поперечных сечений [18], обобщённого на случай самосогласованного взаимодействия ВЭП с ВЧ полем.

Параметр Френеля резонатора $L^2/\lambda R_p \gg 1$, поэтому переизлучение волн в самом резонаторе пренебрежимо мало (менее 0,1% выходной мощности). Основное переизлучение происходит в волноводном переходе, согласующем резонатор с регулярным выходным волноводом (здесь, при дальнейшем преобразовании излучения в гауссов волновой пучок [1, 2, 11], потери не рассматриваются). В "холодном" резонаторе (без ВЭП) со сглаженным переходом и отношением радиусов выходного волновода и резонатора $R_{вых}/R_p = 1,2-1,4$ переизлучается не более 0,2–0,7% мощности (главным образом, в $TE_{25.9}$ и $TE_{25.11}$ волны).

В самосогласованном режиме генерации сгруппированный электронный пучок возбуждает как волны, бегущие через резонатор ($TE_{25.9}$), так и волны, закритические для резонатора ($TE_{25.11}-TE_{25.13}$) [19]. Бегущие волны возбуждаются вблизи выходного сечения резонатора, где амплитуда модуляции ВЭП максимальна, закритические волны возбуждаются в выходном переходе вблизи критических сечений. При $R_{вых}/R_p = 1,4$ переизлучение составляет 1% (в "холодной" системе — 0,7%). Для уменьшения переизлучения необходимо оптимизировать всю систему с электронным пучком.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОД

При оптимальных параметрах гиротрона рабочая мода находится в жёстком режиме возбуждения ($I_{ст} > I$) вблизи границы срыва колебаний (рис. 2). Паразитные моды имеют стартовые токи много меньше тока электронного пучка и могут повлиять на устойчивость рабочей моды. Наибольшее влияние на рабочую моду $TE_{25.10}$ оказывает ближайшая паразитная мода $TE_{24.10}$, имеющая близкий к минимальному стартовый ток ($I_{ст} = 13$ А). Исследование нелинейного взаимодействия мод показывает, что стационарные колебания рабочей моды устойчивы. Фазовая плоскость рабочей и паразитной мод аналогична фазовой плоскости в гиротроне с рабочей $TE_{31.8}$ и паразитной $TE_{30.8}$ модами [6, 7].

Стационарные колебания рабочей моды $TE_{25.10}$ остаются устойчивыми и при учёте других паразитных мод, в том числе с продольными индексами $q = 2$ (колебания с $q = 2$ задаются в качестве начальных условий уравнений гиротрона; в дальнейшем за время порядка Q/ω они трансформируются в основной тип колебаний $q = 1$ [7]). Устойчивы также одномодовые колебания паразитных мод $TE_{24.10}$ (с мягким самовозбуждением) и $TE_{22.11}$ (с жёстким возбуждением). Таким образом, установление конкретного стационарного режима генерации гиротрона зависит от способа его включения.

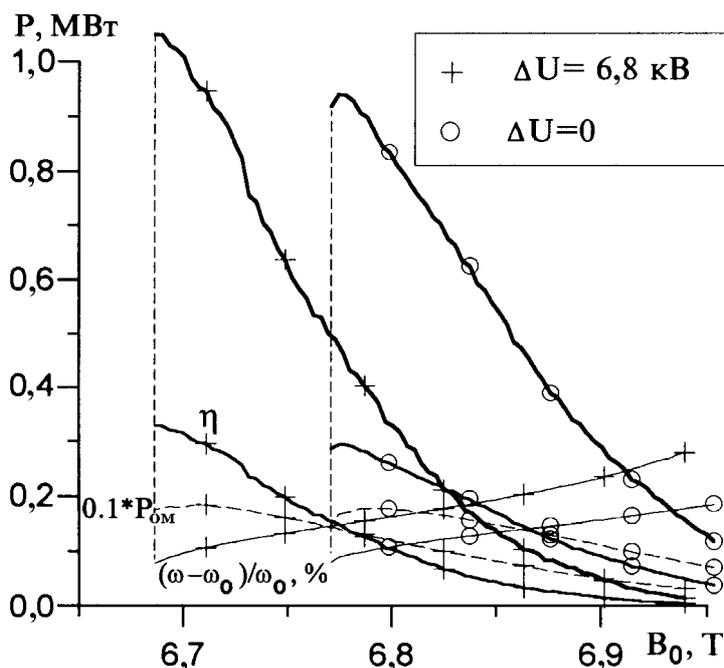


Рис. 2. Зависимости η , $P_{\text{ом}}$, выходной мощности P , расстройки рабочей и критической частот, $(\omega - \omega_0)/\omega_0$, $\text{TE}_{25.10}$ моды от величины магнитного поля в резонаторе B_0 и провисания потенциала ΔU ($I = 40 \text{ A}$, $\delta\nu_{\perp} = 0,4$).

5. УСТАНОВЛЕНИЕ РАБОЧЕЙ МОДЫ ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ ГИРОТРОНА

На фронте импульса ускоряющего напряжения происходит каскадное (поочерёдное) возбуждение мод. Поскольку взаимодействие, как правило, носит характер конкуренции, происходит нелинейное подавление установившейся модой самовозбуждения других мод [20]. Сначала возбуждается паразитная мода $\text{TE}_{26.10}$, затем при $U_0 = 62 \text{ кВ}$ — рабочая мода (рис. 3). На рис. 3 приведены зависимости $I_{\text{ст}}$ и КПД от U_0 на фронте импульса для гиротрона с $\eta = 0,32$, $P_{\text{ом}} = 1,8 \text{ кВт/см}^2$ ($\delta\nu_{\perp} = 0,4$, рис. 1), аналогичные приведённым в [6, 7]. Сценарий включения предполагается “квазидиодным” (анодное напряжение пропорционально ускоряющему) для адиабатической электронной пушки. Зависимость тока пучка от U_0 описывается функцией $I = I_{\text{стац}} \cdot \sin(\pi U_0 / 2U_{0.\text{стац}})$, аппроксимирующей реальную вольт-амперную характеристику [21]. Допустимые отклонения параметров от оптимальных значений в гиротроне на моде $\text{TE}_{25.10}$ такие же, как на $\text{TE}_{31.8}$ [6, 7].

При увеличении длины резонатора с целью достижения наибольших КПД (рис. 1) значения $I_{\text{ст}}$ уменьшаются и происходит каскадное возбуждение трёх и более мод. Зоны генерации на оси U_0 расширяются, и вместо рабочей моды устанавливаются колебания одной из паразитных мод — $\text{TE}_{22.11}$ или $\text{TE}_{24.10}$. Для гиротронов, оптимизированных на максимум КПД, с $P_{\text{ом}} > 2,2 \text{ кВт/см}^2$ необходим более сложный сценарий включения [22], чем “квазидиодный”.

6. ИОННАЯ КОМПЕНСАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Влияние провисания потенциала ВЭП на моде $\text{TE}_{25.10}$ ($\Delta U = 6,8 \text{ кВ}$ при $I = 40 \text{ A}$) сильнее, чем в гиротронах на $\text{TE}_{28.7}$ и $\text{TE}_{31.8}$ модах ($\Delta U = 5 \text{ кВ}$ в начале импульса), вследствие меньшего радиуса ВЭП.

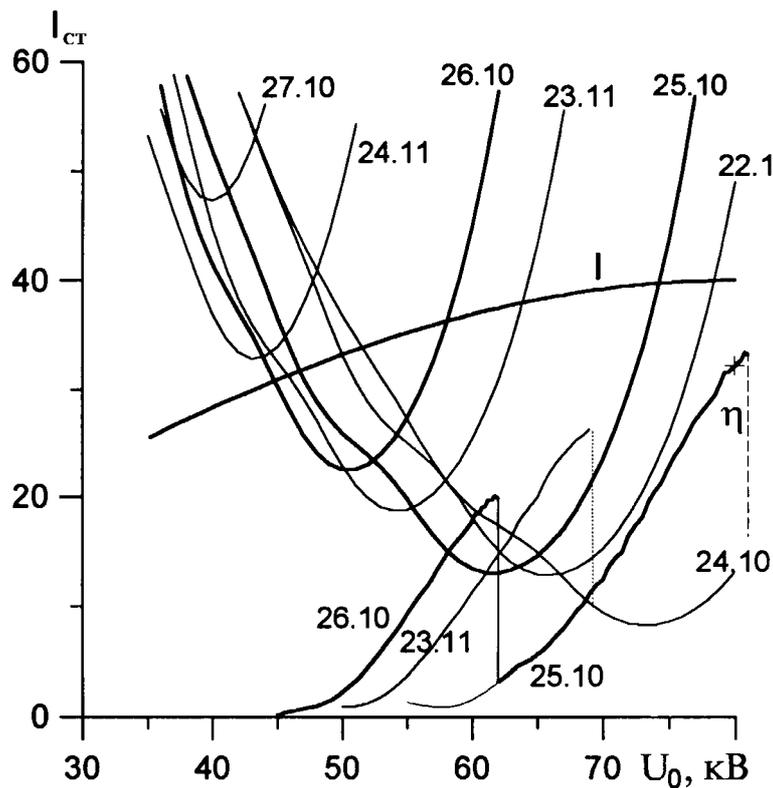


Рис. 3. Сценарий включения гиротрона ($B_{0, \text{опт}} = 6.693 \text{ Т}$).

На рис. 2 приведены зависимости P , η от величины магнитного поля B_0 (так называемые “перестроечные кривые” гиротрона) при провисании потенциала и при ионной компенсации пространственного заряда ВЭП ($\Delta U = 0$). Это моделирует реальную ситуацию в длинноимпульсном режиме работы, когда в начале импульса генерации провисание потенциала есть, затем в результате накопления положительных ионов пространственный заряд ВЭП компенсируется [15]. КПД уменьшается вследствие уменьшения времени пролёта электронов через резонатор. Частота уменьшается на 0,06% вследствие уменьшения циклотронной частоты на 1,2%, что также показано на рис. 2. Эффект компенсации может объяснить различие в перестроечных кривых короткоимпульсных (до 0,01 с) и длинноимпульсных (свыше 0,1 с) гиротронов.

7. РЕКУПЕРАЦИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

КПД гиротрона с одноступенчатой рекуперацией остаточной энергии отработанного ВЭП определяется выражением $\eta_1 = \eta_0 U_0 / U_1$, где η_0 — КПД без рекуперации, U_1 , U_0 — потенциалы коллектора и резонатора [9, 10]. Допустимое значение U_1 ограничивается минимальной энергией электронов W_{min} ($U_1 = U_0 - W_{\text{min}}$, энергетический спектр приведён на рис. 4). При этом условии отсутствует отражение электронов от коллектора.

На рис. 5 приведены зависимости η_1 от η_0 при выходной мощности 1 МВт и $P_{\text{ом}}(\eta_0)$, аналогичные рис. 1. Кривые $\eta_{1\%}$ показывают значения η_1 при $U_1 < U_0 - W_{\text{min}}$, когда отражается 1% тока ВЭП. Предполагается, что эти электроны оседают на элементах лампы с потенциалом резонатора или после нескольких (2–3) отражений набирают в резонаторе недостающую энергию ($W \geq U_0 - U_1$) и оседают на коллекторе [23]. Влияние их на η_0 , η_1 в первом приближении можно не учитывать (в среднем, на-

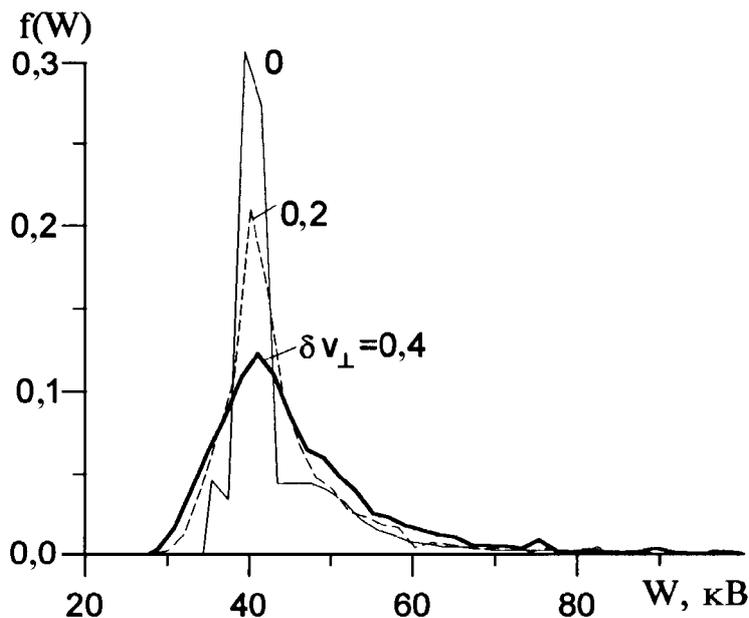


Рис. 4. Распределение электронов по энергиям на выходе из резонатора ($g = 1, 2, I = 40 \text{ A}$).

бранная энергия $W \approx U_0/2$). При дальнейшем уменьшении U_1 , как следует из энергетического спектра (рис. 4), число отражённых электронов быстро возрастает и η_0 , а затем и η_1 уменьшаются.

Дополнительное увеличение КПД возможно в системе с двухступенчатой рекуперацией. Однако, для этого необходимо решить вопрос о пространственной сепарации электронов по энергиям в области коллектора [9, 10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведённые данные свидетельствуют о возможности достижения в гиротроне одночастотной генерации на рабочей моде $TE_{25,10}$ с выходной мощностью 1 МВт и КПД 35–39% при питч-факторе $g = 1,2–1,4$, разбросе скоростей $\delta v_{\perp} = 0,4$ и удельной мощности омических потерь в стенке резонатора менее 2 кВт/см². Использование коллектора с одноступенчатой рекуперацией увеличивает КПД в 1,6 раза, до 55–60%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flyagin V. A., Goldenberg A. L., Zapevalov V. E. — In: Conf. Digest, 18 Int. Conf. on IR and MM Waves, Colchester, United Kingdom, 1993. P. 581.
2. Denisov G. G., Flyagin V. A., Zapevalov V. E. — In: Conf. Digest, 20 Int. Conf. on IR and MM Waves, Orlando, USA, 1995. P. 197.
3. Глявин М. Ю., Запёвалов В. Е. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1996. Т. 39. № 9. С. 1176.
4. Братман В. Л., Моисеев М. А., Петелин М. И., Эрм Р. Э. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 4. С. 622.
5. Запёвалов В. Е., Моисеев М. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1997. Т. 40. № 8. С. 1042.
6. Завольский Н. А., Запёвалов В. Е., Моисеев М. А., Немировская Л. Л. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1997. Т. 40. № 6. С. 788.

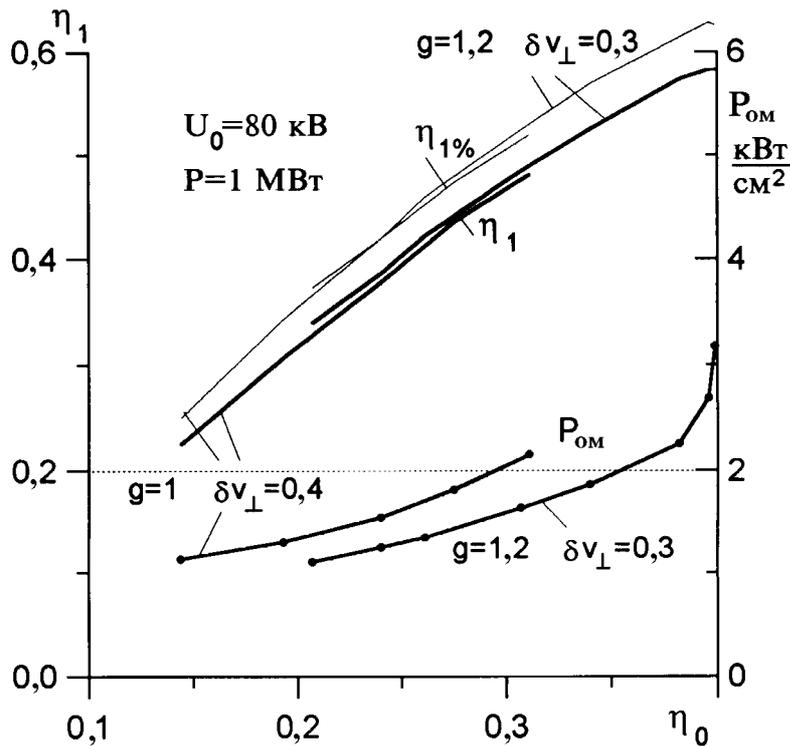


Рис. 5. Зависимости КПД с одноступенчатой рекуперацией η_1 , $\eta_{1\%}$ и омической нагрузки $P_{ом}$ от эффективности энергообмена в резонаторе η_0 .

7. Moiseev M. A., Nemirovskaya L. L., Zapevalov V. E., Zavolsky N. A. // Int. J. Infrared and MM Waves. 1997. V. 18. № 11. P. 2117.
8. Sakamoto K., Tsuneoka M., Kasugai A. et al. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. № 26. P. 3532.
9. Bratman V. L., Denisov G. G., Savilov A. A. // Int. J. Infrared and MM Waves. 1995. V. 16. № 3. P. 459.
10. Goldenberg A. L., Manuilov V. N., Moiseev M. A., Zavolsky N. A. // Int. J. Infrared and MM Waves. 1997. V. 18. № 1. P. 43.
11. Glyavin M. Yu., Kufin A. N., Venediktov N. P., Zapevalov V. E. // Int. J. Infrared and MM Waves. 1997. V. 18. № 11. P. 2129.
12. Кураев А. А., Ковалев И. С., Колосов С. В. Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ. — Минск: Наука и техника, 1975.
13. Запевалов В. Е., Калынов Ю. К., Куфтин А. Н., Малыгин С. А., Тай Е. М. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1994. Т. 37. № 3. С. 381.
14. Нусинович Г. С., Эрм Р. Э. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1972. № 8. С. 55.
15. Варенцов В. А., Цимринг Ш. Е. // ЖТФ. 1983. Т. 53. № 2. С. 264.
16. Власов С. Н., Загрядская Л. И., Петелин М. И. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 11. С. 1743.
17. Lygin V. K. // Int. J. Infrared and MM Waves. 1995. V. 16. № 2. P. 363.
18. Цимринг Ш. Е., Павельев В. Г. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 6. С. 1099.
19. Власов С. Н. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1993. Т. 36. № 1. С. 88.
20. Завольский Н. А., Нусинович Г. С., Павельев А. Б. Гиротроны: Сб. научн. тр. — Горький: ИПФ АН СССР, 1989. С. 84.
21. Вenediktov N. P., Glyavin M. Yu., Zapevalov V. E., Kufin A. N., Postnikova A. S., Yulpatova M. V. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1997. Т. 40. № 4. С. 506.
22. Нусинович Г. С. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1974. № 3. С. 44.

23. Savilov A. V. — In: Conf. Digest, 20 Int. Conf. on IR and MM Waves, Orlando, USA, 1995. P. 497.

Институт прикладной физики РАН,
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
10 марта 1998 г.

**NUMERICAL SIMULATION OF THE PROCESSES IN THE 170 GHz/CW/1 MW GIROTRON RESONATOR FOR ITER
WITH THE OPERATING MODE TE 25.10**

N. A. Zavolsky, V. E. Zapevalov, M. A. Moiseev

We investigate the gyrotron for the EC plasma heating complex of the international thermonuclear reactor ITER. Gyrotron cavity parameters have been optimized taking in to account ohmic losses, wave conversion, potential depression and velocity spread of the electron beam. The effect of ion compensation on the electron beam space charge, the oscillations set up at the front of accelerating voltage pulse, competition of the operating and parasitic modes have been considered. An opportunity to achieve the efficiency 35–39% without electron beam energy recovery and 55–60% with one-staged depressed potential collector has been shown at the cavity RF ohmic losses power less than 2 kW/cm².

УДК 537.86.029.65: 551.510.5

ОСОБЕННОСТИ ЛИМБОВОГО ЗОНДИРОВАНИЯ МАЛЫХ ГАЗОВЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ АТМОСФЕРЫ В РАЗЛИЧНЫХ ЛИНИЯХ МИКРОВОЛНОВОГО ДИАПАЗОНА

Ш. Д. Кутай

Выполнен анализ характеристик радиоизлучения средней атмосферы при лимбовом зондировании малых газовых составляющих, вращательные переходы молекул которых приходятся на атмосферные окна прозрачности 105÷118 ГГц и 180÷210 ГГц. При численном моделировании космического эксперимента установлены оптимальные частоты и высотные диапазоны зондирования отдельных примесных газов для характерных полос приема радиометрической аппаратуры.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы проявляется повышенный интерес к дистанционному зондированию (ДЗ) малых газовых составляющих (МГС) атмосферы со спутников. Одной из наиболее эффективных схем зондирования МГС с борта искусственного спутника Земли (ИСЗ) является лимбовая схема пассивного зондирования, в которой измеряется собственное (тепловое) излучение атмосферы. Подобные исследования ведутся в инфракрасном (ИК) и микроволновом диапазонах волн. Результатам лимбового ДЗ примесных газов в ИК диапазоне, имеющего достаточно давние традиции, посвящён отдельный выпуск [1]. В настоящее время опубликован также ряд теоретических и экспериментальных результатов по лимбовому ДЗ метеопараметров и некоторых примесных компонент атмосферы в микроволновом диапазоне [2–7].

К достоинствам и преимуществам пассивного метода лимбового зондирования МГС атмосферы в микроволновом диапазоне относятся:

— сравнительная простота практической реализации, так как схема измерений содержит только приёмные регистрирующие устройства;

— возможность надёжной физической интерпретации результатов измерений в широком интервале высот, так как приближение локального термодинамического равновесия (ЛТР) в микроволновом диапазоне выполняется вплоть до прицельных расстояний 120÷150 км, в то время как в ИК области условие ЛТР справедливо до высот порядка 40÷70 км;

— возможность индикации весьма малых относительных содержаний газовых составляющих.

К настоящему времени в лимбовых исследованиях микроволнового диапазона установлен в начальном приближении перечень газовых компонент, диагностируемых рассматриваемым методом, исследованы характерные контрасты радиояркостных температур в ряде резонансов спектральных линий, интервалы высот зондирования, минимально обнаружимые концентрации примесей. Разработаны методы решения обратных задач вблизи резонансов линий разной интенсивности [2–4]. Несмотря на достигнутые успехи в разработке теоретических основ лимбового зондирования МГС, остаётся ряд важных проблем, требующих своего решения до постановки натуральных экспериментов. К ним, в частности, относится выбор оптимальных спектральных участков ДЗ МГС. Этот вопрос весьма остро стоит в микроволновом диапазоне из-за обилия спектральных линий примесных газов. Так, например, на сантиметровый (СМ) и миллиметровый (ММ) диапазоны приходится около 1100 линий озона, более 1500 линий азотной кислоты HNO_3 , примерно 330 линий гипохлорида водорода HOCl и т. д. К этой

Ш. Д. Кутай

235

проблеме вплотную примыкают и задачи, связанные с возможностями инструментальной реализации соответствующих измерений, то есть с развитием элементной базы и необходимостью достижения компромисса между спектральным разрешением и чувствительностью приёмных устройств. Анализу некоторых из этих вопросов посвящена данная статья, в которой выполнена серия численных экспериментов по моделированию лимбовых радиометрических измерений с борта ИСЗ теплового излучения атмосферы вблизи резонансов спектральных линий ряда примесных компонент.

1. В работе рассмотрены условия ДЗ 16-ти газов (список их приведён в [8]) в областях волновых чисел $3,5 \div 3,94 \text{ см}^{-1}$ и $6 \div 7 \text{ см}^{-1}$ (интервалы частот $105 \div 118 \text{ ГГц}$ и $180 \div 210 \text{ ГГц}$). Первый из частотных интервалов соответствует трёхмиллиметровому окну прозрачности основных газовых компонент атмосферы. Ближайшая к этому диапазону синглетная линия кислорода центрирована к частоте $118,4 \text{ ГГц}$. Второй частотный интервал включает в себя линию водяного пара $2_2 - 3_{-2}$ с резонансной частотой $183,3 \text{ ГГц}$. Лимбовое зондирование на этой частоте позволяет определять содержание водяного пара в средней атмосфере [2]. Вне указанной линии H_2O этот интервал частот принадлежит к коротковолновому окну прозрачности ММ диапазона. Тот факт, что большинство линий МГС приходится на атмосферные окна прозрачности, является одним из принципиальных моментов возможности их обнаружения.

Анализ вращательных спектров МГС выполнялся в работе на основе атласов спектральных линий GEISA [9] и HITRAN [10]. Для вычисления коэффициентов поглощения отдельных примесных компонент использовалась методика, изложенная в [11]. Характерные относительные содержания МГС приведены, например, в [12]. Высотные распределения температуры, влажности и давления брались в соответствии с моделью [13].

Яркостная температура атмосферы для лимбового зондирования вычислялась, как и в [4], по формуле

$$\tilde{T}_я(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} T(r)\gamma(r) \exp\left(-\int_r^{\infty} \frac{\gamma(r')dr'}{\sqrt{1-(r_0/r')^2}}\right) \left[1 + \exp\left(-2\int_{r_0}^r \frac{\gamma(r')dr'}{\sqrt{1-(r_0/r')^2}}\right)\right] \frac{dr}{\sqrt{1-(r_0/r)^2}}, \quad (1)$$

где $r_0 = r_3 + h_0$ и r — соответственно прицельный и текущий радиусы-векторы, отсчитываемые от центра Земли; r_3 — радиус Земли; h_0 — прицельная (тангенциальная) высота зондирования; $T(r)$ — профиль температуры; $\gamma(r)$ — коэффициент поглощения. Уравнение (1) записано без учёта рефракции и является нелинейным интегральным уравнением Фредгольма 1 рода.

Практический интерес представляют спектральные контрасты

$$\Delta T_я = T_я(\nu_0) - T_я(\nu), \quad (2)$$

где $T_я(\nu_0)$ — яркостная температура атмосферы вблизи резонанса соответствующей примесной компоненты, $T_я(\nu)$ — яркостная температура на склоне исследуемой линии, причём значения яркостных температур необходимо оценивать с учётом полосы приёма сигнала $\delta\nu$:

$$T_я = \frac{1}{\delta\nu} \int_{\nu_0 - \delta\nu/2}^{\nu_0 + \delta\nu/2} \tilde{T}_я d\nu. \quad (3)$$

Одним из параметров численного моделирования лимбового радиометрического эксперимента являлась величина полосы приёма радиометра $\delta\nu$, которая изменялась от единиц до приблизительно 50 МГц . Критерием обнаружимости контраста считалось превышение им моделируемой погрешности измерений δT_p . В зависимости от реализуемых схем погрешность измерений может изменяться

от величины, близкой к чувствительности радиометрической аппаратуры, до значений приблизительно $1 \div 1,5$ К. В работе выполнено сопоставление величин полуширин линий примесей с моделируемыми полосами приёма радиоизлучения. На рис. 1 приведена типичная зависимость уширения $\Delta\nu(h)$ спектральных линий МГС (на примере озона) от высоты. Видно, что указанные величины $\delta\nu$ не превышают полуширины спектральной линии озона до высот $h_0 \leq 35$ км, поэтому на этих прицельных высотах влияние полос приёма радиоизлучения на измеряемые контрасты является существенно менее значительным, чем на больших прицельных высотах.

2. Рассмотрим конкретные особенности лимбового мониторинга отдельных газовых компонент. В первую очередь, остановимся на некоторых характеристиках атмосферного радиоизлучения в линиях озона $4_{1,3} - 4_{0,4}$ (резонансное волновое число $1/\lambda = 3,3936 \text{ см}^{-1}$, резонансная частота $\nu_0 \approx 101,7 \text{ ГГц}$), $6_{1,5} - 6_{0,6}$ ($1/\lambda = 3,6971 \text{ см}^{-1}$, $\nu_0 \approx 110,8 \text{ ГГц}$), $10_{3,7} - 11_{2,10}$ ($1/\lambda = 6,5286 \text{ см}^{-1}$, $\nu_0 \approx 195,7 \text{ ГГц}$). На рис. 2 представлены зависимости контрастов $\Delta T_{\text{я}}$, обусловленных излучением в линии O_3 $\nu_0 = 110,8 \text{ ГГц}$, от прицельного параметра h_0 для ряда значений полосы приёма $\delta\nu$. Соответствующие кривые обозначены следующим образом:

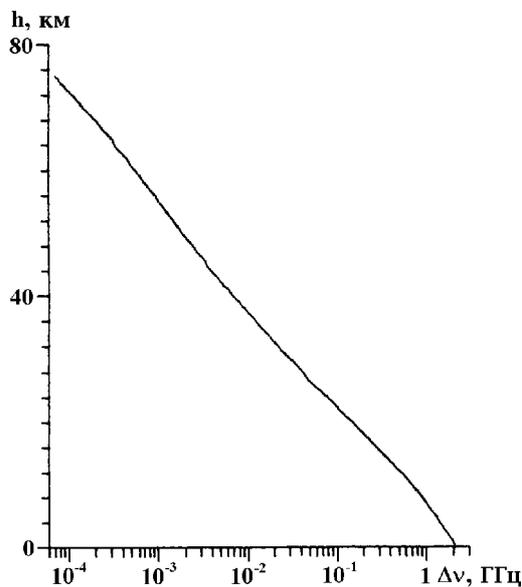


Рис. 1.

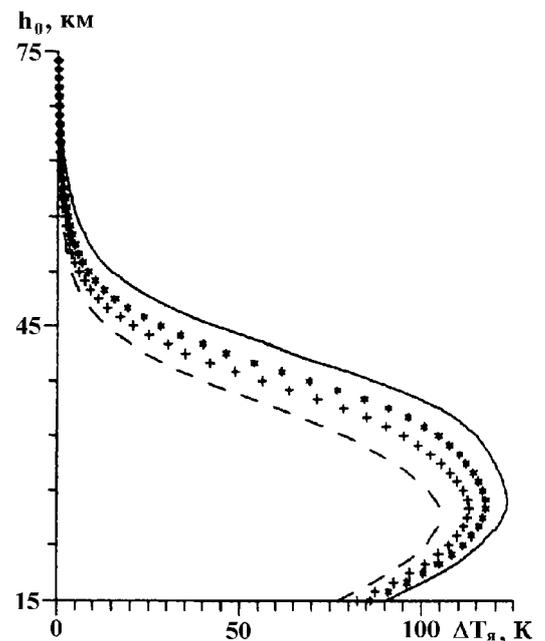


Рис. 2.

$\delta\nu = 10 \text{ МГц}$ — пунктир, $\delta\nu = 20 \text{ МГц}$ — кресты, $\delta\nu = 30 \text{ МГц}$ — звездочки, $\delta\nu = 50 \text{ МГц}$ — сплошная линия. Как показали оценки, максимальный диапазон высот зондирования озона $15 \leq h_0 \leq 60 \text{ км}$ достигается при измерении контрастов яркостных температур в этой линии для всех рассмотренных величин $\delta\nu$. Близкие результаты получаются при зондировании в линиях озона с резонансами $\nu_0 \approx 195,7 \text{ ГГц}$ (полоса приёма $\delta\nu \leq 30 \text{ МГц}$) и $\nu_0 \approx 101,7 \text{ ГГц}$ (полоса $\delta\nu \leq 20 \text{ МГц}$). Заметим, что выбор оптимальных частот зондирования не всегда сводится к выделению линий с наибольшей интенсивностью в рассматриваемых окнах прозрачности. Так, линия $14_{1,13} - 14_{0,14}$ ($1/\lambda = 6,5189 \text{ см}^{-1}$, $\nu_0 \approx 195,4 \text{ ГГц}$) характеризуется интенсивностью $4,1 \cdot 10^{-23} \text{ см} \cdot \text{моль}^{-1}$, тогда как близко расположенная линия $\nu_0 \approx 195,7 \text{ ГГц}$ имеет существенно меньшую интенсивность $7,91 \cdot 10^{-24} \text{ см} \cdot \text{моль}^{-1}$. Однако влияние соседних резонансов на линию $\nu_0 \approx 195,4 \text{ ГГц}$ на высотах $15 \div 30 \text{ км}$ таково, что изменение $\Delta T_{\text{я}}$ с увеличением $\delta\nu$ носит "аномальный" характер, а именно: контрасты $\Delta T_{\text{я}}$ возрастают в этом диа-

пазоне прицельных высот на $8 \div 10$ К при увеличении $\delta\nu$ от 10 до 50 МГц. При этом не представляется возможным выделить вклад каждой из линий в величину контраста $\Delta T_{\text{я}}$, в связи с чем указанную сильную линию трудно использовать для мониторинга озона.

Достаточно высокая информативность линии $\nu_0 = 110,8$ ГГц для мониторинга озона подтверждается также анализом вариаций яркостных температур, обусловленных среднеквадратичными климатическими вариациями $\sigma_f(h)$ высотных распределений озона $f(h)$. Величины $\delta T_{\text{я}}(h) = \left| T_{\text{я}}(f(h)) - T_{\text{я}}(f(h) \pm \sigma_f(h)) \right|$ на характерных прицельных высотах ($h_0 \approx 20 \div 30$ км) составляют приблизительно 5 К, что значительно превышает реализуемые погрешности измерений $\delta T_{\text{р}}$. В то же время, изменение профиля температуры $T(h)$ на величину среднеквадратичного отклонения $\sigma_T(h)$ приводит к вариациям яркостной температуры, не превосходящим $\delta T_{\text{р}} \sim 1$ К. Следовательно, вопрос о способах учёта температурного распределения решается в зависимости от погрешностей лимбовых радиометрических измерений: при $\delta T_{\text{р}} \geq 1$ К можно использовать среднеклиматические профили $T(h)$, тогда как при достижении $\delta T_{\text{р}}$ порядка долей градусов К целесообразно проводить дополнительные лимбовые измерения теплового излучения, позволяющие более точно оценить распределение температуры.

При анализе условий зондирования других примесных компонент необходимо учитывать близость и возможное влияние линий озона, вращательный спектр которого весьма тесно расположен по диапазону. По этой причине возникают, например, серьёзные трудности дистанционного мониторинга в области одной из сильных линий гипохлорида водорода $\nu_0 = 195,5$ ГГц, вклад в тепловое излучение которой трудно выделить на фоне достаточно интенсивных линий озона с указанными выше резонансными частотами. Для ДЗ НОС1 можно использовать линию $\nu_0 \approx 202,5$ ГГц. Соответствующие контрасты яркостных температур приведены в таблице.

Отметим ещё результаты, относящиеся к мониторингу паров азотной кислоты. Молекула HNO_3 характеризуется наибольшей (среди молекул, рассмотренных в данной работе) полушириной линий: на высоте h около 15 км $\Delta\nu \sim 500$ МГц. В целом её полуширина приблизительно в 1,5 раза больше величин, приведённых на рис. 1. Вследствие этого изменение полосы приёма при моделировании экспериментов с зондированием азотной кислоты не приводит к сколько-нибудь заметным изменениям контрастов, как это отмечалось при анализе других компонент. Изменения составляют лишь доли градуса. При всех моделируемых полосах $\delta\nu$ в линии $\nu_0 = 206,6$ ГГц можно осуществлять зондирование содержания HNO_3 на высотах h_0 в диапазоне $15 \div 35$ км.

Т а б л и ц а

Контрасты яркостной температуры атмосферы в линии НОС1 202,5 ГГц для лимбового зондирования на прицельных высотах $h_0 = 15 \div 40$ км

h_0 , км	$\delta\nu$, ГГц			
	0,05	0,03	0,02	0,01
15	5,8	6,5	6,9	7,3
20	7,2	8,0	8,5	9,0
30	5,7	7,0	7,8	8,7
40	0,8	1,2	1,7	2,4

Мониторинг закиси азота целесообразно осуществлять в линии $\nu_0 = 201,0$ ГГц, измеряемые контрасты здесь составят приблизительно $0,9 \div 2$ К на прицельных высотах h_0 в диапазоне $15 \div 35$ км при $\delta\nu = 50$ МГц. Сведения о содержании окиси хлора до высот $h_0 \sim 30$ км могут быть получены при зондировании в линии $\nu_0 = 204,3$ ГГц с полосой пропускания $\delta\nu = 10$ МГц; ожидаемые контрасты не превышают приблизительно $1,5 \div 4,5$ К.

Заключение. В работе выполнены численные эксперименты по моделированию радиометрического лимбового мониторинга средней атмосферы со спутника. Показаны возможности и определены условия дистанционного зондирования ряда МГС, которые дополняют данные, изложенные в [5–8]. Полученные результаты свидетельствуют о перспективности и важности пассивного лимбового мониторинга примесных компонент.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Geoph. Res. 1996. V. 101. № D6.
2. Гайкович К. П., Китай Ш. Д. // Исследование Земли из космоса. 1982. № 5. С. 54.
3. Гайкович К. П., Китай Ш. Д. Тр. — В сб.: Тр. IY Всес. шк. по распротр. миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. — Н. Новгород, 1991. С. 154.
4. Гайкович К. П., Китай Ш. Д., Наумов А. П. // Исследование Земли из космоса. 1994. № 3. С. 73.
5. Waters J. W. // Proc. IEEE. 1992. V. 80. № 11. P. 1679.
6. Hartmann G. K., Bevilacqua R. M., Schwartz P. R. et al. // Geoph. Res. Lett. 1996. V. 23. № 17. P. 2313.
7. Bevilacqua R. M., Kriebel D. L., Pauls T. A. // Geoph. Res. Lett. 1996. V. 23. № 17. P. 2317.
8. Китай Ш. Д., Наумов А. П., Ошарина Н. Н. // Радиотехника и электроника (в печати).
9. Chedin A., Husson N., Scott W. A. et al. The "GEISA" data bank 1984 Version. — France. Paris, 1986. — 57 p.
10. Rothman L. S., Gamache R. R., Goldman A. et al. // Appl. Optics. 1987. V. 26. № 19. P. 4058.
11. Наумов А. П., Ошарина Н. Н. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1997. Т. 40. № 6. С. 722.
12. Кароль И. Л., Розанов В. В., Тимофеев Ю. М. Газовые примеси в атмосфере. — Л.: Гидрометеоздат, 1983. — 192 с.
13. A study of water vapor measurement in the stratosphere and mesosphere using microwave techniques. // Scientific Report 449. — USA: The Pennsylvania State University, 1976. — 402 p.

Научно—исследовательский
радиофизический институт,
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
20 июля 1998 г.

THE FEATURES OF THE LIMB SOUNDING OF THE MINOR ATMOSPHERIC CONSTITUENTS AT VARIOUS MICROWAVE LINES

Sh. D. Kitai

We analyze the characteristics of the radio emission from the middle atmosphere in the course of the limb sounding of the minor gas constituents. The rotational transitions of the molecules under consideration fall into the atmospheric transparency windows 105–118 GHz and 180–210 GHz. Using the numerical simulation of the space-borne experiment we found the optimal frequencies and altitude ranges for the sounding of the specific gas impurities by radiometric equipment with the characteristic bandwidths.

НЕРЕЗОНАНСНЫЙ МЕХАНИЗМ РАССЕЙНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ: РАССЕЙНИЕ НА КРУТЫХ ЗАОСТРЁННЫХ ВОЛНАХ

Ю. А. Кравцов, М. И. Митягина, А. Н. Чурюмов

Развита асимптотическая теория нерезонансного обратного рассеяния электромагнитных волн X -диапазона на поверхности океана. В качестве основной причины нерезонансного рассеяния рассматриваются невысокие ($5 \div 20$ см) обрушивающиеся поверхностные волны с обострёнными кромками. С помощью приёмов физической оптики и геометрической теории дифракции рассчитан вклад обрушивающихся заострённых волн в сечение рассеяния для двух ортогональных поляризаций электромагнитного излучения. Показано, что основной вклад в обратное рассеяние вносит зеркальное отражение от переднего фронта такой волны, а заострённость кромки волны приводит к тому, что сечение обратного рассеяния горизонтально поляризованного излучения может превышать сечение рассеяния вертикально поляризованного излучения.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, значительная часть экспериментальных данных по рассеянию микроволн на поверхности океана допускает интерпретацию на основе резонансной теории рассеяния, которая основана на разложении малых поверхностных возмущений в интеграл Фурье. Между тем экспериментальные наблюдения рассеяния микроволн X -диапазона при настильных углах накопили уже немало фактов, свидетельствующих о существенной роли иного, нерезонансного механизма рассеяния.

По-видимому, первые систематические исследования рассеяния при настильных углах были проведены Калмыковым и Пустовойтенко [1]. Опыты, описанные в [1], показали, что сечение рассеяния излучения с горизонтальной поляризацией может превышать сечение рассеяния излучения с вертикальной поляризацией, хотя теория резонансного рассеяния [2–4] утверждает иное. Превышение интенсивности обратного рассеяния излучения с горизонтальной поляризацией над рассеянием излучения с вертикальной поляризацией наблюдалось и в работах [5] и [6]. В [5] была также отмечена асимметрия обратного рассеяния: значительное рассеяние имеет место только при наблюдении против направления движения волн. В опытах по доплеровскому смещению, проведённых в работах [5–7], было показано, что при настильных углах рассеяние излучения с горизонтальной и вертикальной поляризацией происходит на разных поверхностных структурах: основным источником рассеяния вертикально поляризованного излучения являются медленно движущиеся мелкомасштабные неровности, в согласии с резонансной теорией, а рассеяние горизонтально поляризованного излучения происходит главным образом на быстро движущихся дискретных поверхностных структурах. Кроме того, лабораторные исследования Кво и Лейка [8] показали, что зависимость интенсивности обратного рассеяния данного участка поверхности от времени имеет всплески, причём эти всплески коррелируют с возникновением заострённых волн, что было установлено с помощью независимого измерения профиля поверхности. Такие же всплески, которые иногда сопровождалось превышением интенсивности горизонтально поляризованного сигнала над интенсивностью вертикально поляризованного, наблюдались и в работах [1] и [5], но их связь с заострениями гребней волн, которые в [1] наблюдались визуально, не могла быть установлена, т. к. одновременные измерения профилей волн в этих работах не проводились.

Все эти экспериментальные факты указывают на то, что источником дополнительного, не учтённого стандартной двухмасштабной моделью рассеяния являются заострённые гребни волн или прилегающие к ним области поверхности. В литературе уже высказывались предположения, что причиной

нерезонансного рассеяния и наблюдаемых поляризационных особенностей являются или заострения волн [1, 9], или зеркальное отражение от крутого переднего фронта волны [5], или паразитная рябь, сосредоточенная на крутом переднем склоне морской волны [8], или эффект Брюстера при двукратном отражении электромагнитной волны (один раз от гребня волны, а другой — от поверхности воды у подножия гребня) [5, 10].

Модель морской поверхности, принятая нами для интерпретации экспериментальных данных, изложена в разделе 2: это невысокие волны, взаимодействие которых с поверхностными или внутренними волнами может приводить к микрообрушениям (без образования пены). В процессе обрушения кромка волны заостряется, а передний фронт волны становится очень крутым. Это и служит, на наш взгляд, основной причиной значительного обратного рассеяния при наблюдениях под скользящими углами. В настоящей работе исследуется рассеяние на обрушивающейся, но ещё не обрушившейся волне. Кроме того, мы рассматриваем только однократное рассеяние, эффекты многократного отражения здесь не учитываются.

Для расчёта рассеяния на заострённых крутых морских волнах (разд. 2–5) мы применяем методы физической оптики для учёта зеркально отражённой волны и геометрической теории дифракции для вычисления вклада краевой волны, исходящей от заострённой кромки. В работе будет показано, что основной вклад в обратное рассеяние даёт зеркальное отражение от крутого переднего фронта волны.

Изложению материала по нерезонансному рассеянию мы предпослём описание особенностей резонансного механизма рассеяния (разд. 1).

1. ОСОБЕННОСТИ РЕЗОНАНСНОГО МЕХАНИЗМА РАССЕЯНИЯ

Теория резонансного рассеяния [2–4] основана на методе возмущений, который предполагает малость возмущений $|\zeta|_{\max}$ по сравнению с длиной электромагнитной волны $\lambda = 2\pi/k$, где k — волновое число: $|\zeta|_{\max} \ll \lambda$. Резонансное сечение рассеяния σ^r , вычисленное по теории возмущений, пропорционально спектральной плотности неровностей поверхности на резонансной длине морской волны Λ_{res} , отвечающей условию Брэгга.

Пусть $\mathbf{k}_i = k\mathbf{n}_i$ — волновой вектор падающей, а $\mathbf{k}_s = k\mathbf{n}_s$ — рассеянной волны. Вектор рассеяния \mathbf{q} даётся выражением

$$\mathbf{q} = (\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)_\tau,$$

где τ означает тангенциальную компоненту.

При обратном рассеянии, когда $\mathbf{k}_s = -\mathbf{k}_i$, имеем $\mathbf{q} = -2\mathbf{k}_{i\tau}$, или

$$q = 2k \sin \theta_i, \quad (1)$$

где θ_i — угол падения первичной волны. Согласно (1) период резонансной дифракционной решётки Λ_{res} связан с длиной электромагнитной волны формулой

$$\Lambda_{res} = \lambda/2 \sin \theta_i.$$

При настильных углах наблюдения $\theta_i \rightarrow \pi/2$, и это соотношение принимает вид

$$\Lambda_{res} = \lambda/2. \quad (2)$$

В силу (2) при настильных углах рассеяние назад обусловлено пространственной гармоникой дифракционной решётки, период которой вдвое меньше длины электромагнитной волны. Например, при длине радиоволны $\lambda = 3$ см период резонансной решётки составляет 1,5 см.

Резонансная теория рассеяния удовлетворительно описывает многочисленные экспериментальные данные при умеренных углах падения, но часто отказывает при настильных углах. Согласно [2–4] при настильных углах наблюдения резонансные сечения рассеяния вертикальной (σ_{vv}^r) и горизонтальной (σ_{hh}^r) поляризации излучения сильно отличаются друг от друга угловой зависимостью (двойной нижний индекс в обозначениях резонансных сечений рассеяния соответствует тому, что приемник и передатчик работают на одной и той же поляризации: вертикальной (vv) и горизонтальной (hh). При обратном рассеянии

$$\sigma_{pp}^r = 16\pi k^4 \Phi_\zeta(\mathbf{q}) Q_{pp}(\mathbf{n}_i),$$

где Φ_ζ — пространственная спектральная плотность неровностей, а зависящая от поляризации часть угловой зависимости определяется множителем

$$Q_{pp}(\mathbf{n}_i) = \frac{1}{16} \left| (\varepsilon - 1)(1 + \Re_h) \left[1 + \Re_h + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} (1 - \Re_v^2) p_z^2 \right] \right|^2. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{p} — вектор поляризации, индекс p принимает значения v или h в зависимости от поляризации излучения,

$$\Re_h(\theta_i) = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon + (\varepsilon - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_i}}{1 + \sqrt{\varepsilon + (\varepsilon - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_i}}, \quad \Re_v(\theta_i) = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon + (\varepsilon - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_i}}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon + (\varepsilon - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_i}} \quad -$$

френелевские амплитудные коэффициенты отражения для горизонтальной (h) и вертикальной (v) поляризаций, ε — диэлектрическая проницаемость морской воды. Графики зависимости Q_{hh} и Q_{vv} от угла падения θ_i представлены на рис. 1. Из графика видно, что сечения обратного рассеяния горизонтально и вертикально поляризованного излучения при настильных углах могут сильно отличаться друг от друга. Так, отношение

$$\gamma^r = \frac{\sigma_{vv}^r}{\sigma_{hh}^r} = \frac{Q_{vv}}{Q_{hh}} = \left| 1 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{1 - \Re_v^2}{1 + \Re_h} \sin^2 \theta_i \right|^2 \quad (4)$$

при $\theta_i = 78^\circ$ составляет 350, а при $\theta_i = 84^\circ$ оно близко к 1525. Отношение (4) несколько уменьшается, если принять во внимание усредняющее действие крупных волн, несущих на себе мелкомасштабные решётки, но и усреднённое по локальным углам падения отношение (4) остаётся достаточно большой величиной.

Однако эксперимент свидетельствует [11], что при уменьшении угла скольжения $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta_i$ сечение рассеяния излучения горизонтальной поляризации убывает вовсе не так быстро, как это предсказывает резонансная теория. В связи с этим возникает необходимость поиска таких поверхностных структур и таких механизмов рассеяния, которые, будучи несущественны на фоне брэгговской компоненты при больших углах скольжения, становятся более заметными при малых углах скольжения, когда интенсивность резонансного рассеяния горизонтально поляризованного излучения значительно уменьшается.

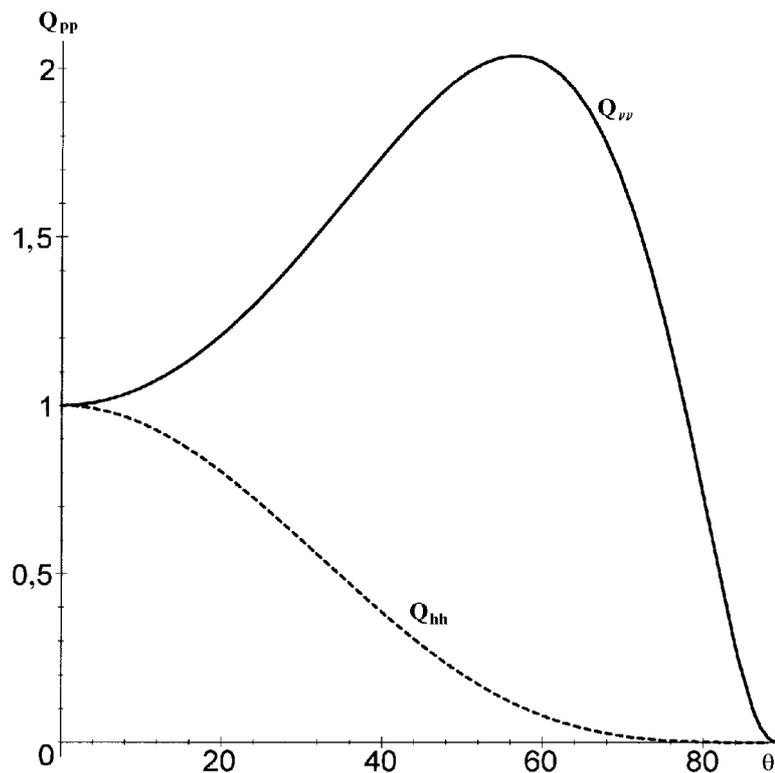


Рис. 1. Угловая зависимость сечений резонансного рассеяния излучения вертикальной (сплошная кривая) и горизонтальной (штрихованная кривая) поляризаций для морской воды с $\varepsilon = 49,32 + 39,53i$. Угол падения выражен в градусах.

2. МОДЕЛЬ НЕРЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ

Как уже указывалось, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что за нерезонансное (не согласующееся с резонансной теорией) рассеяние электромагнитных волн X -диапазона ответственны обострённые гребни обрушивающихся поверхностных волн небольшой высоты. Такие волны расположены на поверхности более крупных морских волн, и их обрушения наблюдаются даже при слабом волнении в $2 \div 3$ балла. Высота таких волн составляет $5 \div 15$ см, что не позволяет учесть их как малое возмущение при длине электромагнитной волны $\lambda < 5 \div 15$ см. Обрушивающиеся заострённые волны, вероятнее всего, представляют собой конечный этап нелинейной эволюции гравитационно-капиллярных волн при воздействии сдвиговых течений, сопутствующих поверхностным и внутренним волнам.

Поскольку такие волны обрушиваются, перед обрушением их передняя поверхность становится очень крутой, что делает возможным зеркальное обратное рассеяние на переднем фронте волны даже при малых скользящих углах. Кроме того, при рассеянии дополнительно появляется краевая электромагнитная волна, исходящая от заострённой кромки. Зеркальное рассеяние не делает разницы между поляризациями, однако учёт краевой волны приводит к тому, что сечение рассеяния горизонтально поляризованной компоненты может оказаться как больше, так и меньше сечения вертикально поляризованной компоненты. Обсуждаемый механизм рассеяния очевидным образом объясняет и наблюдавшуюся в [5] асимметрию обратного рассеяния относительно направления движения волн: обрушение может происходить только вперёд.

Обрушивающаяся волна перед обрушением имеет вид, изображённый на рис. 2. Её гребень за-

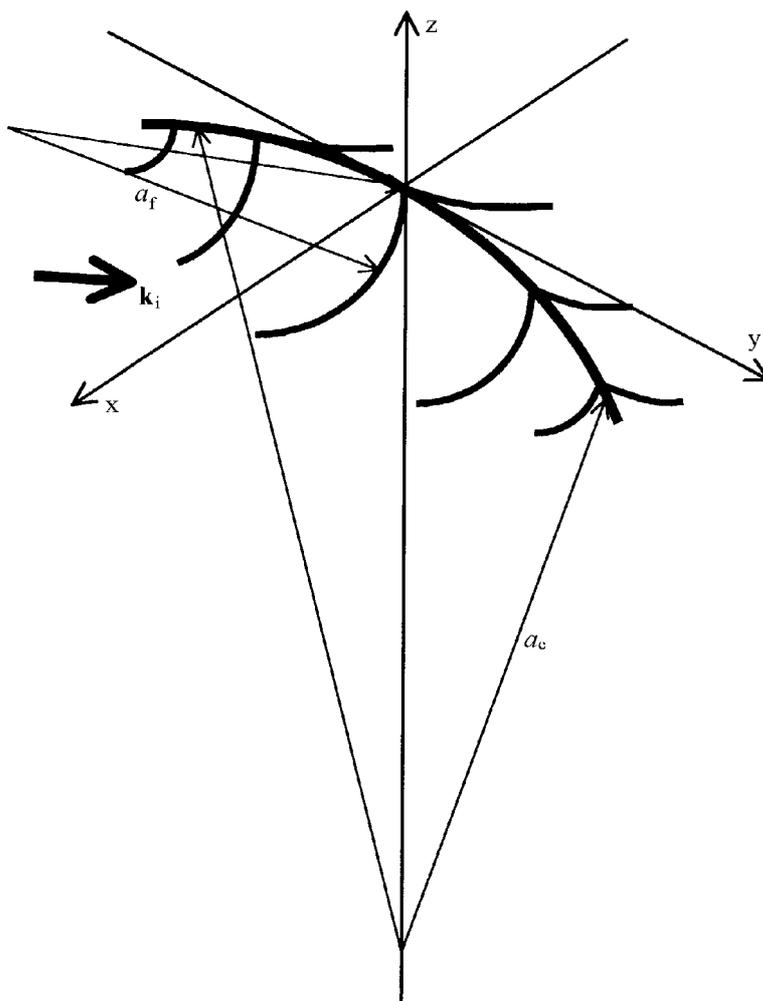


Рис. 2. Гребень крутой волны перед обрушением. Ось z направлена вертикально вверх, ось y — вдоль гребня. a_c обозначает радиус кривизны кромки гребня, a_f — радиус кривизны переднего фронта волны.

острён; внешний угол раствора клина, касательного к поверхности заострённой волны, обозначим через α . Примем, что кромка волны представляет собой дугу окружности с радиусом кривизны a_c . Тогда в окрестности середины кромки её уравнение имеет вид (см. рис. 2)

$$z = -\frac{y^2}{2a_c}.$$

Радиус закругления переднего фронта волны обозначим через a_f . Будем считать, что размеры морской волны велики по сравнению с длиной электромагнитной волны, а сама волна вытянута вдоль своей кромки, так что $\lambda \ll a_f \ll a_c$.

Падающее на кромку волны электрическое поле разложим в каждой точке кромки на компоненты, параллельную и перпендикулярную касательной τ к кромке в данной точке:

$$\mathbf{E}_i = \tau(\mathbf{E}_i \tau) + [\tau[\mathbf{E}_i \tau]].$$

Так как эти две компоненты рассеиваются по-разному, то суммарное поле, рассеянное на отдельной

кромке, в зоне Фраунгофера можно представить в виде

$$\mathbf{E}_s = \int dl \frac{e^{ikR}}{R} (D_h \boldsymbol{\tau}(\mathbf{E}_i \boldsymbol{\tau}) + D_v [\boldsymbol{\tau}[\mathbf{E}_i \boldsymbol{\tau}]]), \quad (5)$$

где интегрирование ведётся по всей длине кромки волны, R — расстояние между точкой кромки и точкой наблюдения, D_h и D_v — коэффициенты дифракции, характеризующие интенсивность рассеяния соответствующей компоненты поля. Если бы поверхность волны представляла собой бесконечный идеально проводящий клин, то коэффициенты дифракции вдали от границ свет-тень равнялись бы коэффициентам дифракции на клине

$$D_{h,v}^w = \pm \frac{1}{2\alpha} \sin \frac{\pi^2}{\alpha} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi^2}{\alpha} - \cos \frac{\pi(\varphi - \varphi_0)}{\alpha}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi^2}{\alpha} - \cos \frac{\pi(\varphi + \varphi_0)}{\alpha}} \right), \quad (6)$$

где φ_0 — угол между падающей волной и передней плоскостью клина, φ — угол между передней плоскостью клина и радиус-вектором из точки на кромке в точку наблюдения. В этом случае формула (5) описывает краевую волну, рассеянную на кромке изогнутого клина.

Как известно [12, 13], краевая волна состоит из двух частей: равномерной, представляющей собой решение той же задачи методами физической оптики, и неравномерной, описывающей отличие между истинным рассеянным полем и равномерной частью краевой волны. Следовательно, коэффициент дифракции $D_{h,v}^{w(nu)}$, отвечающий неравномерной компоненте поля, рассеянного на бесконечном клине, может быть получен как разность между полным коэффициентом дифракции и коэффициентом дифракции $D_{h,v}^{w(u)}$, вычисленным методом физической оптики:

$$D_{h,v}^{w(nu)} = D_{h,v}^w - D_{h,v}^{w(u)} \quad (7)$$

(индексы u и nu обозначают соответственно равномерную (uniform) и неравномерную (nonuniform) компоненты). Равномерная компонента коэффициента дифракции на бесконечном клине, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$D_h^{w(u)} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} - \theta(\varphi_0 - \beta) \frac{\sin(\varphi_0 - \beta)}{\cos(\varphi - \beta) + \cos(\varphi_0 - \beta)} \right)$$

для горизонтальной поляризации и

$$D_v^{w(u)} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} - \theta(\varphi_0 - \beta) \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \beta) + \cos(\varphi_0 - \beta)} \right)$$

для компоненты поля, поляризованной поперёк кромки клина. Здесь $\beta = \alpha - \pi$, а θ — функция Хевисайда, которая введена во второе слагаемое, чтобы учесть возможность затенения задней плоскости клина. Заметим, что неравномерная часть коэффициента дифракции не имеет особенностей на границе свет-тень, и поэтому формула (7) справедлива при любых углах падения и рассеяния. В случае обратного рассеяния, когда $\varphi = \varphi_0$, равномерный коэффициент дифракции одинаков для обеих поляризаций:

$$D_{h,v}^{w(u)} = \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{tg} \varphi_0 - \theta(\varphi_0 - \beta) \operatorname{tg}(\varphi_0 - \beta) \right). \quad (8)$$

Чтобы получить коэффициент дифракции при рассеянии на заострённой волне, которую мы аппроксимируем клином с изогнутыми сторонами, предположим, что неравномерная часть краевой электромагнитной волны в этом случае такая же, как и в случае прямого клина с бесконечными плоскими

гранями. Это предположение оправдано, поскольку неравномерная компонента краевой волны формируется в области с размером порядка λ , который мал по сравнению с радиусами кривизны передней и задней поверхностей морской волны. Тогда полный коэффициент дифракции на клине с искривлёнными поверхностями имеет вид

$$D_{h,v} = D_{h,v}^{cw(u)} + D_{h,v}^{w(nu)} = D_{h,v}^w - D_{h,v}^{w(u)} + D_{h,v}^{cw(u)}, \tag{9}$$

где $D_{h,v}^{cw(u)}$ — равномерный коэффициент дифракции на искривлённом клине.

Равномерный коэффициент дифракции для клина с искривлёнными сторонами (так же, как и для клина с плоскими бесконечными гранями) состоит из двух частей: первая отвечает рассеянию на передней поверхности искривлённого клина, вторая — рассеянию на его задней поверхности. Вторая часть в случае обратного рассеяния будет такой же, как и для прямого клина, т. к. отличие между коэффициентами дифракции на прямом и искривлённом клиньях проявляется только вблизи геометрооптических границ свет-тень. Однако в первой части равномерного коэффициента дифракции, обусловленной рассеянием на передней поверхности клина, отличием между случаями прямого и искривлённого клиньев пренебрегать нельзя, т. к. направление обратно рассеянной волны может оказаться близким к геометрооптической границе волны, отражённой от передней поверхности клина. Предполагая, что передняя поверхность волны в локальной системе координат $x_1 z_1$ (рис. 3), в которой ось x_1 направлена вдоль стороны касательного к поверхности волны клина, описывается уравнением

$$z_1 = \frac{x_1^2}{2a_f},$$

получаем для равномерной части коэффициента дифракции при рассеянии назад

$$D_{h,v}^{cw(u)} = \sqrt{\frac{ika_f \sin \varphi_0}{16\pi}} \exp\left(\frac{ika_f \cos^2 \varphi_0}{\sin \varphi_0}\right) \times \\ \times F\left(\frac{\sqrt{ka_f \cos \varphi_0}}{\sqrt{\sin \varphi_0}}\right) - \frac{\theta(\varphi_0 - \beta) \operatorname{tg}(\varphi_0 - \beta)}{4\pi}, \tag{10}$$

где F — интеграл Френеля:

$$F(\xi) = 2\sqrt{\frac{i}{\pi}} \int_{\xi}^{+\infty} e^{-ix^2} dx.$$

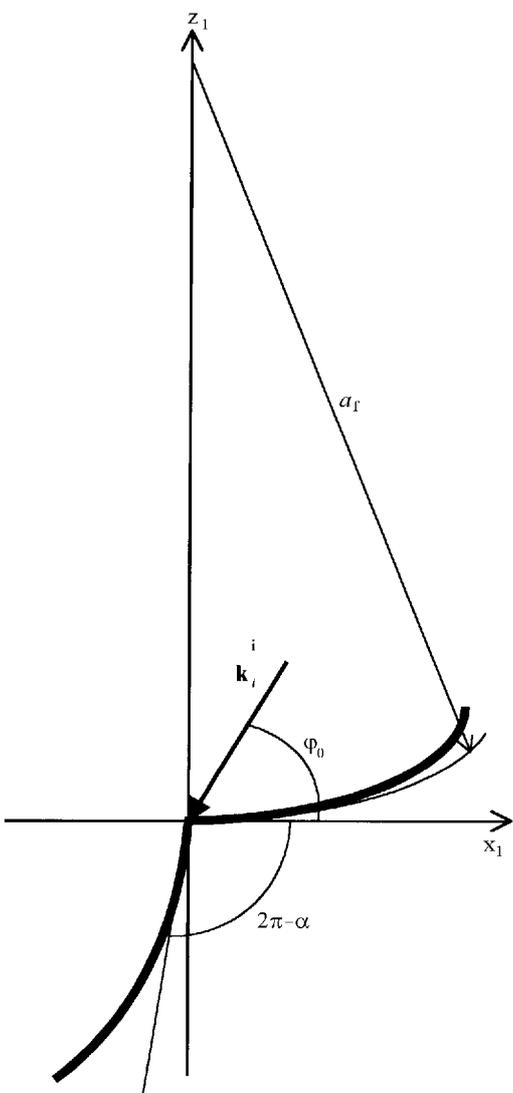


Рис. 3. Искривлённый клин, аппроксимирующий профиль крутой заострённой волны перед обрушением (волна повернута так, что её передний фронт на рисунке горизонтален). Считается, что передняя поверхность клина описывается уравнением $z_1 = \frac{x_1^2}{2a_f}$.

Зависимость от поляризации падающего излучения здесь, как и в случае прямого клина, отсутствует. Если $ka_f \gg 1$, то коэффициенты дифракции (10) резко возрастают при увеличении φ_0 до значения

$\pi/2$, которое соответствует зеркальному отражению от части поверхности, прилегающей к вершине клина. При дальнейшем увеличении локального угла скольжения коэффициенты дифракции (10) осциллируют и остаются такими же по порядку величины, т. к. теперь зеркальное отражение происходит в какой-либо удалённой от вершины точке на передней поверхности искривлённого клина.

Пусть \mathbf{p}_i — вектор поляризации источника электромагнитного излучения. Тогда выражение (5) для рассеянного поля можно преобразовать к виду

$$\mathbf{E}_s = \int dl \frac{e^{ikR}}{R} E_i \left((D_h - D_v) \boldsymbol{\tau} (\mathbf{p}_i \boldsymbol{\tau}) + D_v \mathbf{p}_i \right).$$

Ниже будет показано, что рассеяние происходит почти исключительно перпендикулярно гребням. Поэтому если приёмник воспринимает ту же поляризацию электромагнитных волн, что и излучатель, то, пренебрегая изменением вектора $\boldsymbol{\tau}$ вдоль кромки клина и учитывая, что вектор поляризации \mathbf{p}_i либо параллелен (в случае горизонтальной поляризации), либо перпендикулярен (в случае вертикальной поляризации) направлению гребня волны, получаем

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{p}_i \int dl \frac{e^{ikR}}{R} D_{h,v} E_i, \quad (11)$$

где для горизонтальной поляризации следует брать коэффициент D_h , а для вертикальной — коэффициент D_v .

Если же поляризация приёмной антенны \mathbf{p}_s перпендикулярна поляризации излучаемого поля, то деполаризованное рассеянное поле определяется формулой

$$E_s^{depol} = \int dl \frac{e^{ikR}}{R} E_i (D_h - D_v) (\mathbf{p}_s \boldsymbol{\tau}) (\mathbf{p}_i \boldsymbol{\tau}) \quad (12)$$

и одинаково в случаях вертикальной и горизонтальной поляризаций излучаемого поля. Интересно отметить, что поскольку равномерные части коэффициентов дифракции одинаковы для обеих поляризаций в случае обратного рассеяния, интенсивность деполаризованного излучения не зависит от радиуса кривизны переднего фронта волны. Кроме того, в случае обратного рассеяния имеем

$$D_h - D_v = D_h^w - D_v^w = \frac{1}{\alpha} \sin \frac{\pi^2}{\alpha} \frac{1}{\cos(\pi^2/\alpha) - 1} = -\frac{1}{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\pi^2}{2\alpha}, \quad (13)$$

т. е. деполаризованная компонента поля не зависит также и от локального угла скольжения φ_0 .

3. СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЗАОСТРЁННЫХ ОБРУШИВАЮЩИХСЯ ВОЛНАХ

В формулах (11) и (12) коэффициенты дифракции в каждой точке кромки волны следует брать для искривлённых клиньев, касательных к поверхности волны в данной точке. При удалении от середины гребня внутренний угол раствора клина увеличивается, а степень крутизны волны уменьшается, что приводит к уменьшению коэффициента дифракции. К сожалению, зависимость параметров α , φ_0 , af от положения точки на кромке волны нам неизвестна (а если бы и была известна, то мы вряд ли смогли бы вычислить нужные интегралы). Для того чтобы получить представление о вкладе заострённых обрушивающихся волн в сечение рассеяния, примем, что коэффициент дифракции экспоненциально убывает с уменьшением высоты точки кромки:

$$D_{h,\nu}(y) = D_{h,\nu}(0) e^{z/h} = D_{h,\nu}(0) e^{-y^2/2a - ch} = D_{h,\nu}(0) e^{-y^2/2L^2}, \quad (14)$$

где h — феноменологический параметр, который естественно связать с высотой волны, а $L = \sqrt{a_c h}$ — параметр, характеризующий длину гребня. Предположение (14) позволяет вычислить интегралы (11) и (12).

В прямых каналах (т. е. когда излучатель и приёмник работают оба либо на горизонтальной (НН канал), либо на вертикальной (VV канал) поляризации) получаем следующее значение поля, рассеянного отдельным гребнем, в дальней зоне:

$$E_s = D_{h,v} \frac{e^{ikr}}{r} \sqrt{\frac{2\pi h a_c}{1 - 2ikh \sin \gamma}} \exp\left(-\frac{2h a_c k^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \theta}{1 - 2ikh \sin \gamma}\right) E_{i0},$$

где r — расстояние от середины кромки волны до точки наблюдения, $\gamma = \pi/2 - \theta_i$ — угол скольжения падающей волны, θ — угол между проекцией волнового вектора падающей волны на плоскость океана и направлением движения гребня, E_{i0} — амплитуда падающей плоской волны в середине кромки, коэффициенты дифракции D_h (в НН канале) и D_v (в VV канале) берутся для середины гребня волны. Отсюда следует, что сечение рассеяния на отдельной заострённой обрушивающейся волне имеет вид

$$\sigma_{h,v} = \frac{2\pi L^2}{\sqrt{1 + 4k^2 h^2 \sin^2 \gamma}} |D_{h,v}|^2 \exp\left(-\frac{4L^2 k^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \theta}{1 + 4k^2 h^2 \sin^2 \gamma}\right). \quad (15)$$

Как видно из формулы (15), сечение обратного рассеяния быстро убывает при увеличении угла θ , т. е. значительное рассеяние имеет место только при наблюдении против направления движения волн. Если угол скольжения достаточно мал, так что $4k^2 h^2 \sin^2 \gamma \ll 1$, то сечение пропорционально квадрату длины гребня $\sigma \sim L^2$, т. е. волны, приходящие от всех точек кромки, складываются когерентно. При этом ширина рассеянного пучка, определяемая экспонентой в (15), пропорциональна λ/L . Для несколько больших углов скольжения, таких что $4k^2 h^2 \sin^2 \gamma \gg 1$ (при этом падение может быть по-прежнему скользким, т. к. $h \gg \lambda$), $\sigma \sim L^2 \lambda / (h \sin \gamma) = a_c \lambda / \sin \gamma$, т. е. сечение пропорционально размеру первой зоны Френеля. Ширина рассеянного пучка в этом случае определяется отношением $\frac{h \operatorname{tg} \gamma}{L}$.

Из (15) следует, что различие в рассеянии между поляризациями обусловлено только различием коэффициентов дифракции. На рис. 4 представлены графики зависимости $|D_h|^2$ и $|D_v|^2$ от локального угла скольжения φ_0 при внешнем угле раствора касательного клина $\alpha = 3\pi/2$ и радиусе кривизны a_f переднего фронта волны, удовлетворяющем соотношению $ka_f = 20$. Сплошная кривая соответствует вертикальной поляризации, пунктирная — горизонтальной. Как видно из рисунка, коэффициенты дифракции для обеих поляризаций ведут себя приблизительно одинаково. Относительно небольшое отличие коэффициентов дифракции обусловлено тем, что их неравномерные части различны, но отличие квадратов модулей полных коэффициентов дифракции от $|D_{h,v}^{cw(u)}|^2$ оказывается незначительным, т. к. зеркально отражённая компонента рассеянного поля превалирует над краевой волной при $ka_f \gg 1$. Таким образом, основной вклад в обратное рассеяние на крутых заострённых волнах вносит зеркальное отражение, а краевая электромагнитная волна, возникающая при дифракции на острой кромке морской волны, может интерферировать с зеркальной компонентой и тем самым сделать сечение рассеяния излучения горизонтальной поляризации или меньше, или больше сечения излучения вертикальной поляризации. В последнем случае наша модель предсказывает “суперсобытия” ($\sigma_h > \sigma_v$), отмеченные в работах [5] и [6].

Если диаграмма направленности радара достаточно узка, так что в освещённую область лишь иногда попадают заострённые обрушивающиеся волны, то рассеянный в обратном направлении сигнал будет иметь всплески, величина которых зависит от параметров обрушивающейся волны, попавшей в освещённую радаром область. Если же освещённая область достаточно велика, так что в неё попадают

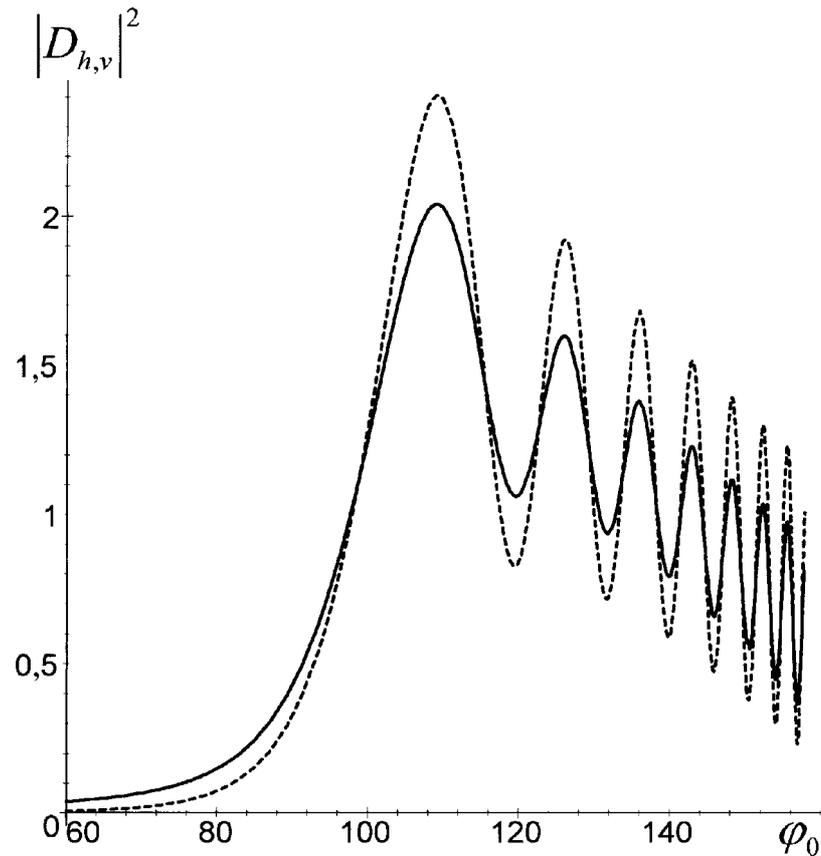


Рис. 4. Зависимости квадратов модулей коэффициентов дифракции $|D_h|^2$ и $|D_v|^2$ от локального угла скольжения φ_0 (в градусах), согласно (9) и (6), (8), (10). Сплошная кривая соответствует вертикальной поляризации, пунктирная — горизонтальной. Параметры искривлённого клина: $\alpha = 3\pi/2$, $ka_f = 20$.

сразу несколько заострённых волн, то сечение обратного рассеяния следует усреднить по параметрам этих волн.

Обозначим через θ_0 угол, в пределах которого ориентация кромок волн варьируется относительно их среднего направления движения. Примем для определённости, что направления движения заострённых обрушивающихся волн распределены по гауссову закону

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \theta_0} \exp \left\{ -(\theta - \Delta\theta)^2 / \theta_0^2 \right\}, \quad (16)$$

где угол θ отсчитывается от направления рассеянного в обратном направлении луча, а $\Delta\theta$ представляет собой отклонение среднего направления движения волн от радиус-вектора, направленного от исследуемой площадки к радару. Тогда часть процедуры усреднения сечения обратного рассеяния сводится к усреднению (15) по направлениям движения заострённых волн с помощью функции распределения (16) и умножению на количество волн в освещённой области. Другая часть усреднения — это усреднение по параметрам a_f , L , h , которые остаются приблизительно постоянными в течение эволюции обрушивающейся волны. Реальные распределения этих величин нам неизвестны, поэтому мы не будем проводить усреднения по этим параметрам, а в выражениях для среднего сечения под этими обозначениями будем понимать характерные значения соответствующих величин. Наконец, третья часть процедуры усреднения связана с усреднением по локальному углу скольжения φ_0 и внешнему

углу раствора касательного клина α (фактически, усреднять нужно лишь $|D_{h,v}(\alpha, \varphi_0)|^2$). Для этого необходимо знать закон эволюции обрушивающейся волны, который нам также неизвестен. Поэтому в окончательной формуле эту операцию усреднения проводить не будем, а для оценок используем характерное значение квадрата модуля коэффициента дифракции $|D_{h,v}(\alpha, \varphi_0)|^2$, о величине которого можно судить, например, по рис. 4.

Для получения более простого результата потребуем, чтобы разброс ориентаций кромок волн был достаточно велик, так что выполнялись бы неравенства

$$L^2\theta_0^2 \gg h^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \quad \text{и} \quad 4k^2 L^2 \theta_0^2 \gg 1. \quad (17)$$

При этих предположениях получаем для среднего сечения рассеяния единичной поверхности

$$\langle \sigma_{h,v} \rangle = \frac{n\lambda L}{2\theta_0 \cos \gamma} \left\langle |D_{h,v}(\alpha, \varphi_0)|^2 \right\rangle_{\alpha, \varphi_0} \exp(-\Delta\theta^2/\theta_0^2), \quad (18)$$

где n — количество заострённых обрушивающихся волн на единицу площади океана (концентрация обрушивающихся волн).

Учитывая, что основной вклад в рассеяние даёт зеркальное отражение от переднего фронта волны, в формуле (18) можно заменить $D_{h,v}$ на $D_{h,v}^{cw(u)}$. Тогда сечение обратного рассеяния, одинаковое для обеих поляризаций, равно

$$\langle \sigma_{h,v} \rangle = \frac{na_f L}{16\theta_0 \cos \gamma} \left\langle \sin \varphi_0 \left| F \left(\frac{\sqrt{ka_f} \cos \varphi_0}{\sqrt{\sin \varphi_0}} \right) \right|^2 \right\rangle_{\varphi_0} \exp(-\Delta\theta^2/\theta_0^2). \quad (19)$$

4. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Сравнить предсказания формулы (19) с наблюдениями весьма затруднительно, т. к. нам неизвестны размеры обрушивающихся волн и их концентрация для конкретных экспериментов. Мы можем, однако, оценить значения параметров n , L , a_f , необходимые для объяснения наблюдаемых сечений обратного рассеяния горизонтально поляризованного излучения при настильных углах. Из экспериментальных данных, приведённых в работе [11], видно, что для длины волны порядка 3 см это сечение слабо зависит от угла падения и составляет величину порядка -35 дБ. Усреднение по φ_0 в (19) даёт величину порядка единицы, поэтому для того, чтобы крутые обрушивающиеся волны могли обеспечить указанное значение сечения рассеяния, нужно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{na_f L}{\theta_0} \sim 5 \cdot 10^{-3}.$$

Если взять $\theta_0 \sim 0,1$ рад, $a_f \sim 5$ см, $L \sim 50$ см, то получим $n \sim 0,02 \text{ м}^{-2}$, т. е. в каждый момент времени на участке поверхности площадью 50 квадратных метров должно наблюдаться в среднем одно событие обрушения, находящееся в стадии, благоприятной для обратного рассеяния. Если же $L \sim 1$ м, то $n \sim 0,01 \text{ м}^{-2}$ (одно событие на 100 м^2). В случае более крупномасштабных обрушений с параметрами $a_f \sim 10$ см и $L \sim 2$ м получаем оценку $n \sim 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-2}$ (одно обрушение на 400 м^2).

Так как заострённые обрушивающиеся волны движутся быстрее большинства мелкомасштабных волн, существенных для резонансного рассеяния, доплеровское смещение рассеянного ими сигнала будет значительно больше доплеровского смещения для брэгговских волн. Однако если на поверхности крутой заострённой волны имеется рябь, то поле, резонансно рассеянное этой рябью, будет иметь

то же доплеровское смещение, что и нерезонансно рассеянное поле, описываемое формулой (19). Интерференция между резонансно и нерезонансно рассеянными компонентами поля может приводить как к усилению, так и к ослаблению сигнала, причём это явление более существенно для вертикально поляризованной компоненты, для которой резонансное рассеяние происходит более интенсивно, чем для горизонтально поляризованной. Эта интерференция является ещё одной причиной “суперсобытий”, отмеченных в [5] и [6]. Однако при усреднении по ансамблю событий обрушения необходимо складывать интенсивности (а следовательно, и сечения), поэтому среднее полное (резонансное плюс нерезонансное) сечение быстрых рассеивателей для вертикальной поляризации больше, чем для горизонтальной, что и наблюдалось в работе [5].

Другой причиной “суперсобытий”, на которую указывалось в [5] и [10], могут быть переотражения рассеянного крутой волной сигнала водной поверхностью у подножия волны. Если угол падения электромагнитной волны на поверхность у подножия волны близок к углу Брюстера, то вертикально поляризованная компонента будет значительно ослаблена по сравнению с горизонтально поляризованной. Такие каналы рассеяния с двойным отражением являются предметом нашей дальнейшей работы.

Отметим, что эффект Брюстера может служить причиной отмеченного в [5] ухудшения корреляции сигналов в VV и HH каналах при уменьшении угла скольжения, т. к. при скольжащих углах наблюдения угол отражения от подножия волны становится близок к углу Брюстера. Это означает, что для горизонтальной поляризации велика роль двойного отражения, а для вертикальной поляризации такой механизм рассеяния практически отсутствует, поэтому корреляция между сигналами в VV и HH каналах нарушается. Другой причиной указанного ухудшения корреляции при уменьшении угла скольжения может служить, как уже отмечалось в [5], различие диаграмм направленности радаров, работающих на горизонтальной и вертикальной поляризациях. В результате радары освещают несколько разные участки моря. Это различие особенно существенно при малых скольжащих углах. Поэтому если событие обрушения происходит в области, которая видна на одной поляризации и не видна на другой, то корреляция резко нарушается.

5. ОЦЕНКА СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ ДЕПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Вычислим теперь сечение рассеяния деполяризованного излучения (сечение деполяризации). Как уже отмечалось, это сечение не зависит ни от кривизны переднего фронта волны, ни от локального угла падения. Вычисление интеграла (12) с использованием соотношения (13) и предположения об убывании коэффициента дифракции при удалении от середины гребня по закону (14) приводит к следующему результату для сечения деполяризации при рассеянии на отдельном гребне:

$$\sigma_{depol} = \frac{2\pi L^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \gamma + 4k^2 h^2)}{(1 + 4k^2 h^2 \sin^2 \gamma)^{3/2}} \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi^2}{2\alpha} \exp\left(-\frac{4L^2 k^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \theta}{1 + 4k^2 h^2 \sin^2 \gamma}\right). \quad (20)$$

При $\theta = 0$, т. е. при наблюдении точно поперёк гребня, $\sigma_{depol} = 0$. Сечение деполяризации достигает своего максимального значения при

$$\sin^2 \theta = \frac{1 + 4k^2 h^2 \sin^2 \gamma}{4L^2 k^2 \cos^2 \gamma}.$$

Если угол скольжения достаточно мал, так что $4k^2 h^2 \sin^2 \gamma \ll 1$, то сечение деполяризации определяется выражением

$$\sigma_{depol} = 8\pi L^2 k^2 h^2 \sin^2 \theta \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi^2}{2\alpha} \exp(-4L^2 k^2 \sin^2 \theta),$$

а его наибольшее значение достигается при $\theta = 1/2Lk$ и равно

$$(\sigma_{depol})_{\max} = \frac{2\pi}{e} \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi^2}{2\alpha} \cdot h^2.$$

Усреднение (20) по параметрам заострённой волны и по направлениям движения гребней с использованием приближений (17) приводит к следующему результату:

$$\langle \sigma_{depol} \rangle = \frac{n\lambda h^2}{4L\theta_0 \cos^3 \gamma} \left\langle \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi^2}{2\alpha} \right\rangle_{\alpha} \exp(-\Delta\theta^2/\theta_0^2).$$

Определим степень деполяризации как отношение сечения деполяризованной компоненты к сечению соответствующей кополяризованной компоненты

$$\delta_{hv} = \frac{\sigma_{hv}}{\sigma_h}, \quad \delta_{vh} = \frac{\sigma_{vh}}{\sigma_v}.$$

Если локальный угол скольжения равен $\pi/2$, то степени деполяризации, соответствующие максимальному сечению деполяризации, в обоих случаях приблизительно равны

$$\delta = \frac{32}{27\pi^2} \frac{h^2 \lambda}{L^2 a_f}.$$

Взяв $h = 10$ см, $\lambda = 3$ см, $L = 1$ м, $a_f = 10$ см, получаем оценку $\delta \approx 0,4 \cdot 10^{-3}$. Отметим, что эта оценка сильно расходится с данными, полученными в работах [1] и [14]. Однако следует учесть, что в этих работах исследовались крупномасштабные обрушения волн, сопровождавшиеся активным турбулентным перемешиванием и образованием пены. Согласно [14] бóльшая часть рассеянной в обратном направлении энергии приходит уже после обрушения. В данной же работе рассматривается рассеяние на крутых заострённых волнах, которые только готовятся обрушиться, а могут и не обрушиться вовсе (из-за стягивающего действия поверхностной плёнки, существенного при относительно небольших размерах волны).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проанализирована роль крутых заострённых волн в рассеянии электромагнитного излучения X -диапазона на поверхности океана. Получены выражения для сечений однократного рассеяния на заострённых волнах, близких к обрушению. Показано, что основной вклад в обратное рассеяние вносит зеркальное отражение от переднего фронта такой волны. Учёт краевой электромагнитной волны, рассеянной на заострённой кромке морской волны, вносит различия в сечения рассеяния горизонтально и вертикально поляризованного излучения, которые были бы равными в случае чисто зеркального отражения. Предложенный механизм нерезонансного рассеяния особенно важен для излучения горизонтальной поляризации при настильных углах наблюдения, когда интенсивность резонансного рассеяния горизонтально поляризованной компоненты становится малой. Учёт рассеяния на крутых обострённых волнах позволяет объяснить следующие экспериментальные факты.

1. Сечение обратного рассеяния горизонтально поляризованной компоненты излучения при настильных углах наблюдения значительно превышает предсказания резонансной теории [11] и может превышать сечение рассеяния вертикально поляризованной компоненты [1, 5].

2. При наблюдении против направления движения морских волн под настильными углами максимум доплеровского спектра для горизонтальной поляризации смещён в область более высоких, чем для

вертикальной поляризации, частот [5, 6], соответствующих рассеивателям, движущимся со скоростями мезомасштабных волн (более крупных, чем брэгговские волны, но менее крупных, чем энергонесущие гравитационные волны).

3. При наблюдении против направления движения волн под настильными углами в зависимости принятого сигнала от времени появляются значительные всплески [1, 5, 8].

Данная работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 98–02–16217 и № 98–05–64489). Авторы признательны рецензенту за конструктивную критику и за указание на неизвестные нам публикации, важные для обсуждаемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalmykov A. I., Pustovoytenko V. V. // *J. Geophys. Res.* 1976. V. 81. № 12. P. 1960.
2. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
3. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах: В 2 т. — М.: Мир, 1981. Т. 1. — 280 с.; Т. 2. — 317 с.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. — М.: Наука, 1978. — 436 с.
5. Lee P. H. Y., Barter J. D., Beach K. L., Hindman C. L., Lake B. M., Rungaldier H., Shelton J. C., Williams A. B., Yee R., and Yuen H. C. // *J. Geophys. Res.* 1995. V. 100. № C2. P. 2591.
6. Lee P. H. Y., Barter J. D., Caponi E., Caponi M., Hindman C. L., Lake B. M., and Rungaldier H. // *IEEE Trans. Antennas Propag.* 1996. V. AP-44. № 3. P. 333.
7. Лейкин И. А., Островский И. Е., Розенберг А. Д., Рускевич В. Г., Фукс И. М. // *Изв. ВУЗов. Радиофизика.* 1975. Т. 18. № 3. С. 346.
8. Kwoh D. S. W., Lake B. M. // *IEEE J. Oceanic Eng.* 1984. V. OE-9. № 5. P. 291.
9. Lyzenga D. R., Maffet A. L., and Shuchman R. A. // *IEEE Trans. Geos. Remote Sens.* 1983. V. GE-21. № 4. P. 502.
10. Trizna D. // *IEEE Trans. Geos. Remote Sens.* 1997. V. 35. № 9. P. 1232.
11. Guinard N. W., Ransone J. T., and Daley J. C. // *J. Geophys. Res.* 1971. V. 76. P. 1525.
12. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. — М.: Сов. радио, 1962.
13. Ufimtsev P. Ya. // *Electromagnetics.* 1991. № 11. P. 125.
14. Lee P. H. Y., Barter J. D., Beach K. L., Lake B. M., Rungaldier H., Thompson H. R., Jr., and Yee R. // *IEEE Trans. on Antennas Propag.* 1998. V. AP-46. № 1. P. 14.

Институт космических
исследований РАН, Москва,
Россия

Поступила в редакцию
16 февраля 1998 г.

NONRESONANT MECHANISM OF ELECTROMAGNETIC SCATTERING BY SEA SURFACE: SCATTERING BY STEEP SHARPENED WAVES

Yu. A. Kravtsov, M. I. Mityagina, A. N. Churyumov

An asymptotic theory of non-resonant X -band microwave backscattering by ocean surface is developed. Non-resonant scattering is attributed mainly to not very high ($5 \div 20$ cm) breaking surface waves with sharpened crests. Breaking wavelets contribution to the total cross section for both polarizations was calculated by means of physical optics and geometrical theory of diffraction. It is shown that the main scattering way is specular reflection from the front surface of steep wave. Sharpness of its crest makes radar cross section for horizontal polarization sometimes higher than that for vertical polarization.

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИИ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ПО ПЛОТНОСТИ ТРЁХМЕРНО–НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА НАД СЛУЧАЙНО–НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ю. И. Троицкая, С. Н. Резник

Исследована деформация профиля скорости ветра за счёт резонансного взаимодействия с волнами, излучаемыми при обтекании статистически однородного поля возвышений поверхности. Рассмотрен ветер, вектор скорости которого меняет своё направление в пределах слоя конечной толщины. При больших числах Ричардсона и малых числах Фруда в квазилинейном приближении выведены уравнения для компонент скорости среднего течения. Показано, что модуль скорости ветра не меняется во времени, а угол, определяющий направление ветра, удовлетворяет уравнению простых волн Римана. Деформация потока определяется средней силой волнового сопротивления, действующей на единицу площади поверхности. Деформацию испытывает профиль скорости ветра в слое от поверхности до уровня, на котором ветер меняет направление на противоположное. На больших временах вектор скорости в этом слое стремится к направлению, противоположному его направлению у поверхности.

Исследование взаимодействия внутренних волн со средними течениями представляет собой важную практическую задачу. Такие задачи возникают, например, при исследовании динамики ветра над горным массивом. Известно, что наиболее эффективно обмен энергией и импульсом между внутренними волнами и средними течениями происходит в окрестности критических уровней (критических слоев), где фазовая скорость волн совпадает со скоростью среднего течения и взаимодействие носит резонансный характер. Критический слой для внутренних волн в стратифицированном сдвиговом потоке с учётом нелинейности, вязкости и диффузии рассматривался в работах [1–4], где было показано, что основным нелинейным эффектом, существенным на больших расстояниях от критического слоя (КС), является деформация среднего течения. В [5] было показано, что КС для различных гармоник внутренних волн, излучаемых неоднородностями границы, возникают всегда в случае, если поток меняет направление с высотой, как это обычно бывает в атмосферных условиях.

В настоящей работе исследуется деформация потока, меняющего направление с высотой, над статистически однородным случайным полем возвышений поверхности, моделирующим топографические неоднородности. При этом излучается широкий спектр внутренних волн, резонансно взаимодействующих с потоком в велопаузе. Исследование такого взаимодействия может быть проведено в рамках квазилинейного приближения, как это было сделано в [6] для пакета внутренних волн, распространяющегося на фоне двумерного течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сдвиговой поток над случайно–неоднородной поверхностью. Выберем систему координат так, что ось z направлена вертикально вверх, \vec{x}_0 и \vec{y}_0 — единичные орты в горизонтальной плоскости. Поле возвышений поверхности характеризуется случайной функцией $z = \zeta(x, y)$. Профиль скорости ветра имеет вид

$$\vec{U}(z, t) = U(z, t)\vec{x}_0 + V(z, t)\vec{y}_0.$$

Зависимость плотности ветрового потока от высоты характеризуется частотой плавучести $N(z, t)$. В начальный момент времени $N = \left(-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}\right)^{1/2}$, где $\rho_0(z)$ — невозмущённая плотность.

Ю. И. Троицкая, С. Н. Резник

Допустим, что характерная высота возвышений поверхности мала, так что для описания волновых возмущений справедливо линейное приближение. Представим гидродинамические поля в виде

$$u = U(z, t) + \tilde{u}(x, y, z, t), \quad v = V(z, t) + \tilde{v}(x, y, z, t), \quad \rho = R(z, t) + \tilde{\rho}(x, y, z, t),$$

где u и v — проекции скорости течения соответственно на оси x и y , ρ — плотность, U , V и R — усреднённые по ансамблю реализаций компоненты горизонтальной скорости потока и плотности, \tilde{u} , \tilde{v} , и $\tilde{\rho}$ — возмущения горизонтальных компонент скорости и плотности, возникающие при обтекании потоком неоднородностей подстилающей поверхности.

Усредняя полные уравнения гидродинамики по ансамблю реализаций в приближении Буссинеска [7, 8]* и пренебрегая вязкостью, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{\rho}\tilde{w} \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \tilde{w} — вертикальная компонента скорости возмущений.

Уравнения (1) имеют простой физический смысл: изменение компонент средней скорости со временем обусловлено радиационной силой

$$\vec{F}^r = \left(\frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle, \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle \right),$$

а изменение плотности — градиентом вертикального волнового потока массы.

Пусть характерная высота возмущений достаточно мала (оценки приведены ниже). Тогда уравнение для вертикальной компоненты скорости возмущений имеет вид (см. [8])

$$\frac{D^2}{Dt^2} \Delta \tilde{w} - \frac{D}{Dt} \left[U'' \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + V'' \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right] + N^2 \Delta_h \tilde{w} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}.$$

Здесь и далее $[\dots]'' = \frac{d^2}{dz^2}[\dots]$.

Граничными условиями для уравнения (2) является линеаризованное условие непротекания на поверхности

$$\tilde{w}|_{z=0} = \left(U(0, t) \frac{\partial}{\partial x} + V(0, t) \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta(x, y) \quad (3)$$

и условие убывания возмущений при удалении от поверхности.

Представим волновые возмущения в виде интегралов Фурье—Стилтьеса

$$\tilde{w}(x, y, z, t) = \int_{\vec{k}} d\tilde{w}_{\vec{k}}(\vec{k}, z, t) e^{i(k_x x + k_y y)},$$

*Приближение Буссинеска означает пренебрежение градиентом плотности в инерционных слагаемых уравнений гидродинамики.

$$\zeta(x, y) = \int_{\vec{k}} d\tilde{\zeta}_k(\vec{k}) e^{i(k_x x + k_y y)}.$$

Будем считать, что характерный временной масштаб изменения волновых возмущений достаточно велик, так что

$$\left| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \right| \ll |(k_x U + k_y V) \tilde{w}|. \quad (4)$$

В этом случае можно воспользоваться квазистационарным приближением. Тогда, применяя к (2) и (3) преобразование Фурье по горизонтальным координатам, с учётом (4) получим, что $d\tilde{w}_k(z, t)$ удовлетворяет уравнению Тейлора–Гольдштейна:

$$d\tilde{w}_k'' + \left(\frac{N^2(k_x^2 + k_y^2)}{(k_x U + k_y V)^2} - \frac{k_x U'' + k_y V''}{k_x U + k_y V} - (k_x^2 + k_y^2) \right) d\tilde{w}_k = 0 \quad (5)$$

с граничным условием на поверхности

$$d\tilde{w}_k|_{z=0} = i(k_x U(0, t) + k_y V(0, t)) d\tilde{\zeta}_k.$$

При $z \rightarrow \infty$ нужно использовать условие ограниченности возмущений, которое в приближении Буссинеска эквивалентно ограниченности потоков энергии [7]. Уравнение (5) имеет особенность при $z = z_c(\vec{k}, t)$, где

$$(\vec{k}, \vec{U}(z_c, t)) = 0. \quad (6)$$

В окрестности этого уровня реализуется КС для гармоник с волновым вектором \vec{k} . * Введём полярные координаты (q, θ) , тогда

$$\begin{aligned} k_x &= q \cos \theta, \\ k_y &= q \sin \theta. \end{aligned}$$

Представим компоненты скорости среднего течения в виде

$$\begin{aligned} U &= |\vec{U}| \sin \Psi, \\ V &= |\vec{U}| \cos \Psi, \end{aligned} \quad (7)$$

где угол $\Psi(z, t) > \Psi(0, t) = \Psi_1$ определяет направление скорости среднего течения.

Условие (6) в полярных координатах имеет вид

$$\sin(\theta + \Psi) = 0, \quad (8)$$

так что критический уровень для гармоник, волновой вектор которой образует угол θ с осью x , расположен на уровне z , удовлетворяющем условию $\theta = -\Psi(z, t)$.

Для того чтобы исследовать эволюцию среднего течения, найдём средние значения вертикальных потоков горизонтальных компонент волнового импульса $\langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle$, $\langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle$, а также проекции радиационной силы $\frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle$, $\frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle$, входящие в (1). Представим возмущения скорости в виде

$$d\tilde{w}_k = F(\vec{k}, z, t) d\tilde{\zeta}_k. \quad (9)$$

*Условие (4) может нарушаться в окрестности КС, где $k_x U + k_y V = 0$. Однако на временах, когда справедливо квазистационарное приближение, учёт нестационарности волновых полей в окрестности КС даёт только правило обхода (см. оценки п. 3).

Тогда F удовлетворяет уравнению Тейлора–Гольдштейна (5) с граничным условием

$$F|_{z=0} = i(k_x U(0, t) + k_y V(0, t)).$$

Его решение в полярных координатах имеет вид

$$F = iq \frac{B(z, q, \theta, t)}{B(0, q, \theta, t)} \sin[\theta + \Psi(0, t)],$$

где $B(z, q, \theta, t)$ — произвольное решение уравнения (5), ненарастающее при $z \rightarrow \infty$ и зависящее от параметров q и θ и t .

Запишем для удобства уравнение (5) в полярных координатах:

$$B'' + \frac{N^2(z, t)}{|\vec{U}(z, t)|^2 \sin^2[\theta + \Psi(z, t)]} B - \left(\frac{(|\vec{U}(z, t)| \sin[\theta + \Psi(z, t)])''}{|\vec{U}(z, t)| \sin[\theta + \Psi(z, t)]} + q^2 \right) B = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) может иметь, вообще говоря, дискретный спектр действительных собственных чисел $q_n(\theta, t)$ и соответствующих им собственных решений $B(z, q_n, \theta, t)$, удовлетворяющих уравнению

$$B(0, q_n, \theta, t) = 0, \quad (11)$$

которое определяет функцию $q_n(\theta, t)$. Следует заметить, что соответствующие собственным числам $q_n(\theta, t)$ собственные моды не являются сингулярными, т.е. не имеют КС [9].

Предположим, что скорость ветра в начальный момент времени разворачивается на угол больше π при изменении z от 0 до ∞ . В этом случае для любой гармоники излучаемого волнового поля найдётся уровень, на котором скорость ветра перпендикулярна \vec{k} , т.е. критический уровень. Спектр таких волн, как показано в [10, 5], непрерывен, дискретный спектр отсутствует, и деформация потока будет определяться его резонансным взаимодействием с волнами в их КС. Из линеаризованной системы уравнений гидродинамики можно получить

$$\begin{aligned} d\tilde{u}_k &= \left\{ \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} \frac{dF_k}{dz} + \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} \frac{k_x V' - k_y U'}{k_x U + k_y V} F_k \right\} id\zeta_k, \\ d\tilde{v}_k &= \left\{ \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} \frac{dF_k}{dz} - \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} \frac{k_x V' - k_y U'}{k_x U + k_y V} F_k \right\} id\zeta_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Пользуясь статистической однородностью распределения $\zeta(x, y)$, с помощью (12), (9) получим

$$\begin{pmatrix} \langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle \\ \langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \operatorname{Im} \left[\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \frac{dF_k}{dz} F_k^* \right] G_\zeta(\vec{k}), \\ \begin{pmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \operatorname{Im} \left[\begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \end{pmatrix} \frac{k_x V' - k_y U'}{k_x U + k_y V} |F_k|^2 \right] G_\zeta(\vec{k}). \end{aligned} \quad (13)$$

Для статистически однородной случайной функции $\zeta(x, y)$ имеем

$$\langle d\tilde{\zeta}(\vec{k}_1) d\tilde{\zeta}^*(\vec{k}_2) \rangle = 2\pi^2 G_\zeta(\vec{k}) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2.$$

Как было показано выше, волновое поле на больших временах (когда справедливо квазистационарное приближение) определяется вкладом собственных мод, образующих дискретный спектр волновых чисел, и волн непрерывного спектра, имеющих КС в потоке. В рассматриваемом нами случае дискретный спектр отсутствует, поэтому остаётся получить выражения для компонент потока импульса, вносимых волнами непрерывного спектра. Покажем, что для этого типа волн $P_{2x} = 0$, $P_{2y} = 0$. Знаменатель подынтегрального выражения в (13) обращается в нуль при $k_x U + k_y V = 0$, или при $\theta \rightarrow -\Psi(z, t)$, однако это — устранимая особенность. Чтобы показать это, рассмотрим поведение функции $B(z, q, \theta, t)$, которой пропорциональна функция F_k , при $\theta \rightarrow -\Psi(z, t)$, или при $z \rightarrow z_c(\theta, t)$, т. е. вблизи КС. Уравнение (10) преобразуется тогда к виду

$$B'' + \frac{Ri_c}{(z - z_c)^2} B = 0, \quad Ri_c = \frac{N^2(z_c, t)}{|\vec{U}(z_c, t)|^2 \Psi'(z_c, t)^2},$$

где

$$\Psi'(z_c, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}(z_c, t),$$

а линейно-независимые решения этого уравнения имеют вид

$$B(z, q, \theta, t) \propto (z - z_c)^{1/2 \pm i\mu_c}, \quad \mu_c = \sqrt{Ri_c - 1/4}.$$

Тогда

$$|B(z, q, \theta, t)|^2 \propto |z - z_c(\theta, t)| \sim |\theta + \Psi(z, t)|,$$

полюс в подынтегральном выражении (13) отсутствует, само подынтегральное выражение действительно, и $P_{2x} = P_{2y} = 0$, а компоненты потока импульса определяются величинами P_{1x} , P_{1y} .

Таким образом, с учётом (13) система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y G_\zeta(\vec{k}) \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} \frac{d}{dz} \operatorname{Im} \left[\frac{dF_k}{dz} F_k^* \right], \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y G_\zeta(\vec{k}) \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} \frac{d}{dz} \operatorname{Im} \left[\frac{dF_k}{dz} F_k^* \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Для полной постановки задачи необходимо ещё задать начальные условия для системы (14):

$$U(0, z) = U_0(z),$$

$$V(0, z) = V_0(z).$$

Заметим сразу, что система (14) имеет интеграл движения — энергию среднего течения. Действительно, умножив первое уравнение системы на U , а второе — на V и сложив их, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y G_\zeta(\vec{k}) \frac{k_x U + k_y V}{k_x^2 + k_y^2} \frac{d}{dz} \operatorname{Im} \left[\frac{dF_k}{dz} F_k^* \right].$$

Учитывая, что $\frac{d}{dz} \operatorname{Im} \left[\frac{dF_k}{dz} F_k^* \right] = \phi(\vec{k}) \delta(k_x U(z, t) + k_y V(z, t))$, получим в правой части нуль. Таким образом, в квазилинейном приближении модуль скорости потока на каждом уровне z остаётся постоянным. Это может быть объяснено следующим образом. При фиксированном z вклад в радиационную силу, действующую на среднее течение, даёт гармоника, волновой вектор которой удовлетворяет условию $(\vec{k}, \vec{U}(z, t)) = 0$. При этом вклад этой гармоники в радиационную силу направлен вдоль волнового вектора \vec{k} (см. (13)), поэтому работа, совершаемая радиационной силой над потоком в единицу времени,

$$(\vec{F}_k^*, \vec{U}(z, t)) = 0, \quad (15)$$

и энергия среднего течения не изменяется: $|\vec{U}(z, t)| = |\vec{U}(z)|$. Отметим, что это происходит вследствие того, что все генерируемые поверхностью гармоники имеют нулевую горизонтальную фазовую скорость. Если бы на фоне потока распространялся цуг волн, имеющих различные фазовые скорости, то при фиксированном z радиационная сила определялась бы гармоникой, волновой вектор которой удовлетворяет условию черенковского резонанса $(\vec{k}, \vec{U}(z, t)) = \omega(\vec{k})$, где ω — частота, и равенство (15) не выполнялось бы. Таким образом, энергия среднего течения сохраняется лишь в случае квазистационарных внутренних волн, т. е. после окончания переходного процесса. Решение системы (14) будет рассмотрено в следующем параграфе.

Рассмотрим теперь деформацию средней плотности. Для этого вычислим поток массы $\langle \tilde{\rho} \tilde{w} \rangle$, входящий в (1). Из уравнений гидродинамики следует

$$d\tilde{\rho}_k = -\frac{d\tilde{w}_k}{i(k_x U + k_y V)} \frac{dR}{dz}.$$

Теперь аналогично (13) получим

$$\langle \tilde{\rho} \tilde{w} \rangle = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{d\rho_0}{dz} \operatorname{Im} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y G_\zeta(\vec{k}) \frac{|F_k(z, t)|^2}{k_x U + k_y V}. \quad (16)$$

Принимая во внимание, что $F_k(z, t)|^2 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow z_c$ (см. выше процедуру вычисления P_{2x} , P_{2y} из (13)), легко видеть, что вертикальный поток массы в квазистационарных внутренних волнах равен нулю ($\langle \tilde{\rho} \tilde{w} \rangle = 0$), средняя плотность R не меняется и $N(z, t) = N(z)$.

2. СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ РИЧАРДСОНА

Пусть в начальный момент времени характерное число Ричардсона

$$Ri = \left(\frac{NL}{U_{\max}} \right)^2 \gg 1,$$

где U_{\max} — максимальная скорость потока в момент $t = 0$, L — масштаб сдвигового слоя в момент $t = 0$. В этом случае решение системы (14) может быть найдено в ВКБ-приближении. Будем считать, что характерное число Фруда $Fr = U_{\max}/Na \ll 1$, где a — масштаб корреляционной функции неоднородностей поверхности (см. (21)). Тогда для всех гармоник, вносящих существенный вклад в спектр возмущений, уравнение (5) упрощается и принимает вид

$$F_k'' + \left(\frac{N^2}{|\vec{U}(z)|^2 \sin^2[\theta + \Psi(z, t)]} - q^2 \right) F_k = 0. \quad (17)$$

Граничное условие имеет вид

$$F_k(0) = |\vec{U}(0)|iq \sin(\theta + \Psi_1). \quad (18)$$

В ВКБ-приближении решение уравнения (17), удовлетворяющее граничному условию (18) и условию излучения при $z \rightarrow \infty$, имеет вид

$$F_k = \begin{cases} iq|\vec{U}(0)| \sin(\theta + \Psi_1) \left| \frac{f(0, t)}{f(z, t)} \right|^{1/2} \exp \left\{ i \int_0^z f dz \right\}, & z < z_c(\theta, t), \\ 0, & z > z_c(\theta, t), \end{cases} \quad (19)$$

где

$$f = \frac{N(z)}{|\vec{U}(z)| \sin[\theta + \Psi(z, t)]}, \\ \Psi(z_c, t) = -\theta.$$

Отметим, что амплитуды отражённой от сдвигового слоя и прошедшей через КС волн ослабляются в $\exp(-\pi\sqrt{Ri})$ раз [8], т. е. пренебрежимо малы. С помощью (19) получим

$$\text{Im} \left[\frac{dF}{dz} F^* \right] = \begin{cases} \text{Im} \left[\frac{dF_k}{dz} F_k^* \right] = -q^2 N(0) |\vec{U}(0)| |\sin(\theta + \Psi_1)|, & z < z_c(\theta, t), \\ 0, & z > z_c(\theta, t). \end{cases} \quad (20)$$

Будем считать, что спектр корреляционной функции неоднородностей имеет вид

$$G(q, \theta) = \bar{G}(qa)\Phi(\theta), \quad (21)$$

где a — масштаб корреляционной функции неоднородностей поверхности.

Подставляя (20) и (21) в выражения для потоков (13) и учитывая, что при фиксированном z вклад в потоки дают гармоники с $z_c(\theta) > z$, получим

$$\begin{pmatrix} \langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle \\ \langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle \end{pmatrix} = \frac{N(0) |\vec{U}(0)|}{2\pi^2} \int_{-\Psi_1(t)-\pi}^{-\Psi(z, t)} d\theta |\sin(\theta + \Psi_1)| \Phi(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \int_0^\infty q^2 G(qa) dq.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle \\ \langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle \end{pmatrix} = -\frac{\alpha}{|\vec{U}(z)|} \begin{pmatrix} \cos \Psi(z, t) \\ -\sin \Psi(z, t) \end{pmatrix} |\sin[\Psi(z, t) - \Psi_1]| \Phi(-\Psi) \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial z}, \tag{22}$$

$$\alpha = N(0) |\vec{U}(0)| \beta, \quad \beta = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty q^2 G(qa) dq. \tag{23}$$

Используя (22) и определение Ψ (7), получим уравнение для $\Psi(z, t)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \alpha \frac{|\sin[\Psi(z, t) - \Psi(0, t)]|}{|\vec{U}(z)|} \Phi(-\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Заметим, что в силу этого уравнения $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, t) = 0$, поэтому далее без ограничения общности можно положить $\Psi_1 = \Psi(0, 1) = 0$.

Делая замену переменных по формулам $d\xi = \frac{|\vec{U}(z)|}{\beta|\vec{U}(0)|} dz, T = N(0) t$, получим уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} = |\sin(\Psi)| \Phi(-\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \tag{24}$$

с начальным условием $\Psi(\xi, 0) = \Psi_0(\xi)$.

Это — уравнение простых волн, его решение можно выписать в неявной форме:

$$\Psi = \Psi_0 \left(\xi + \sin(\Psi) \Phi(-\Psi) T \right), \quad 0 < \Psi < \pi. \tag{25}$$

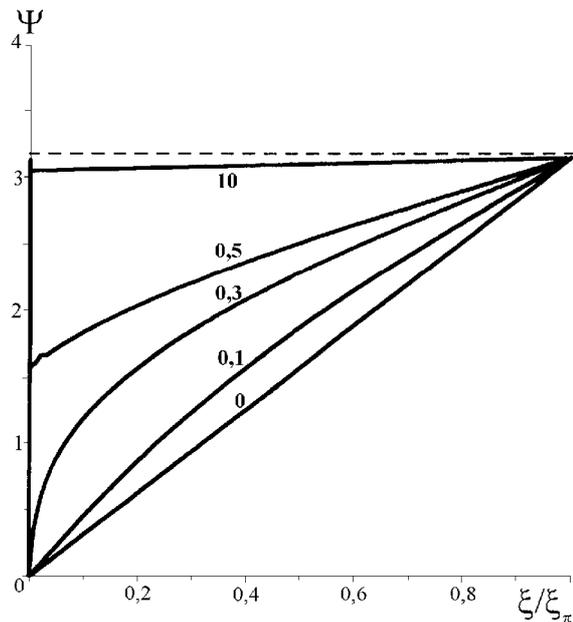


Рис. 1. Зависимость $\Psi(z)$ в различные моменты времени T (величина T — у кривых).

Из (25) видно, что координата ξ_π (или, соответственно, z_π), при которой угол $\Psi = \pi$, не меняется со временем. Выше этого уровня деформации потока не происходит, т. к. все излучаемые поверхностью гармоники волнового поля поглощаются в критических слоях на нижележащих уровнях. Таким образом, деформации подвергается лишь слой, внутри которого скорость потока в момент $t = 0$ меняет направление на противоположное по отношению к направлению ветра вблизи поверхности Земли.

Для примера выберем

$$\Psi_0 = \pi \frac{\xi}{\xi_\pi}, \quad \Phi = 1.$$

Соответствующие профили $\Psi \left(\frac{\xi}{\xi_\pi} \right)$ представлены на рис. 1 в различные моменты безразмерного времени T . Видно, что с течением времени происходит укрупнение первоначального профиля $\Psi(\xi)$, а это означает, что характерная величина сдвига скорости растёт, что может привести к дестабилизации первоначально устойчивого потока.

Аналогичный результат был получен в [6] при рассмотрении двумерной задачи о поглощении пакета внутренних волн в критических слоях стратифицированного сдвигового потока.

3. ПРИМЕНИМОСТЬ РЕШЕНИЯ

Оценим границы применимости полученного решения. Характерное число Ричардсона в трёхмерном течении имеет вид

$$Ri = \frac{N^2}{(U_z^2 + V_z^2)} = \frac{N^2}{|\vec{U}(z)|_z^2 + |\vec{U}(z)|^2 \Psi_z^2}.$$

Поскольку в начальный момент $Ri \gg 1$ ($|\vec{U}(z)|_z^2 \ll N^2$), то коэффициент отражения волны от КС перестает быть малым при

$$\Psi_z \sim N/U_m, \quad (26)$$

где U_m — характерная скорость потока, L — масштаб сдвигового слоя.

С помощью (25) находим

$$\Psi_z = \frac{\Psi'_0}{1 - \Psi'_0 \beta_1 (\cos \Psi) t} \sim \frac{1}{L \left(1 - \frac{\beta_1 t}{L}\right)}, \quad (27)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{|\vec{U}(0)|},$$

а α определяется формулой (23). Учитывая, что

$$\bar{G}(qa) = \sigma_\zeta^2 a^2 f(qa),$$

где $\sigma_\zeta^2 = \langle \zeta^2 \rangle$ — дисперсия высоты неоднородностей поверхности, $f(qa)$ — безразмерная функция ($f(0) = 1$), получим

$$\beta_1 \sim \frac{N \sigma_\zeta^2}{a}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), с учётом (26) найдём, что отражённой от КС волной можно пренебречь при

$$t \ll \frac{La}{N \sigma_\zeta^2} \left(1 - Ri_0^{-1/2}\right).$$

Величина $\tau = La/N \sigma_\zeta^2$ является характерным временем изменения средней скорости потока.

Квазистационарное приближение для волновых возмущений справедливо на временах, много больших характерного времени установления КС. При $Fr \sim 0,1$ время установления критического слоя t_q порядка $\frac{30}{N} \sqrt{Ri}$ [11]. Тогда t_q оказывается порядка $30L/U_m$. Можно показать, что время установления квазистационарного волнового поля на масштабе сдвигового слоя для волновых гармоник, не имеющих КС в потоке, того же порядка. Таким образом, уравнение (24) описывает эволюцию потока на временах t , удовлетворяющих неравенству

$$30 \sqrt{Ri_0} \ll Nt \ll \frac{La}{\sigma_\zeta^2} \left(1 - Ri_0^{-1/2}\right). \quad (29)$$

Видно, что дисперсия высоты неоднородностей, при которой может выполняться (29), должна удовлетворять неравенству $\sigma_\zeta/a \ll \sqrt{Fr/30} \sim 0,05$. Подставляя характерные для атмосферы параметры $L = 10000$ м, $Ri = 100$, $a = 1000$ м, $\sigma_\zeta = 10$ м, получим диапазон значений $300 \ll T \ll 10^5$.

Отметим, что в константу β , определяющую скорость деформации потока, входит множитель

$$\int_0^{\infty} q^2 \bar{G}(qa) dq,$$

которому, в свою очередь, пропорциональны компоненты силы волнового сопротивления, действующего на единицу поверхности при малых числах Фруда:

$$\left(\begin{array}{c} \langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle \\ \langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle \end{array} \right) \Big|_{z=0}^{cont} = \frac{N(0)|\vec{U}(0)|}{2\pi^2} \int_{-\Psi_1-\pi}^{-\Psi_1} d\theta |\sin(\theta + \Psi_1)| \Phi(-\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \int_0^{\infty} q^2 \bar{G}(qa) dq.$$

Таким образом, деформация профиля скорости ветра определяется силой волнового сопротивления, действующего на подстилающую поверхность. Деформации подвергается слой ниже уровня z_π , на котором ветер имеет направление, противоположное его направлению вблизи поверхности Земли. Выше этого уровня профиль скорости остаётся неизменным. С течением времени скорость потока стремится принять направление, противоположное направлению скорости ветра вблизи поверхности Земли.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 95-05-15325а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Haberman R. // Stud. Appl. Math. 1972. V. 51. № 2. P. 139.
2. Haberman R. // J. Fluid Mech. 1973. V. 58. P. 727.
3. Troitskaya Yu. I. // J. Fluid Mech. 1991. V. 233. P. 25.
4. Reznik S. N., Troitskaya Yu. I. // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 12. P. 3313.
5. Резник С. Н., Троицкая Ю. И. Волновое сопротивление локализованной топографической неоднородности в стратифицированном сдвиговом ветре с велопаузой. //Препринт № 400. — Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1996. — 29 с.
6. Цимринг Л. Ш. // Океанология. 1982. Т. 22. С. 540.
7. Госсард Э. Э., Хук У. Х. Волны в атмосфере. — М.: Мир, 1978.
8. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. — Л.: Гидрометеозидат. 1981. — 302 с.
9. Маслоу С. А. Неустойчивости и переход в сдвиговых течениях. — В кн.: Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности /Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаб. — М.: Наука, 1984. С. 218.
10. Резник С. Н., Троицкая Ю. И. // Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана. 1996. Т. 1. С. 133.
11. Резник С. Н. Волновое сопротивление локализованной неоднородности дна в стратифицированном сдвиговом потоке с нестационарным критическим слоем. //Препринт № 421. — Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1997. — 21 с.

Институт прикладной физики РАН,
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
22 мая 1998 г.

A QUASI-LINEAR MODEL OF DEFORMATION OF THE STRATIFIED FLOW OVER BOTTOM TOPOGRAPHY

S. N. Reznik, Yu. I. Troitskaya

Investigated is deformation of the wind velocity profile due to resonant interaction with waves radiated by the flow over random topography. The wind changes its direction within a layer of finite thickness. For the large Richardson number and the small Froude number the equation of the velocity components of the mean flow are derived in quasi-linear approximation. The modulus of the wind velocity is not shown to change its value, but the angle defining the wind direction obeys the Riemann simple wave equation. The deformation of the wind velocity profile takes place within the layer from the Earth surface to the level where the wind changes its direction to the opposite one. At large time periods, the wind velocity vector tends to the direction opposite to the near-surface one.

УДК 551.594.221

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМОГО АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАЛЬНОСТИ ДО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ

А. В. Панюков

Рассмотрен алгоритм совместной обработки вертикальной составляющей электрического и горизонтальной составляющей магнитного полей, позволяющий определить дальность до эквивалентного дипольного источника электромагнитного излучения. Найдены зависимости математического ожидания и дисперсии погрешности определения дальности от спектра источника и передаточной функции входного фильтра. Полученные оценки для частного случая, соответствующего усреднённому источнику молниевых разрядов, показывают возможность использования исследуемого алгоритма в системах местоопределения грозовых очагов и позволяют выработать требования к аппаратному обеспечению таких систем. Приведены сведения о комплексе программ для системы местоопределения грозовых очагов.

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается математическая модель задачи определения местоположения источника электромагнитного импульса по индуцируемому им электромагнитному полю. Элементами модели являются произвольно ориентированный электрический диполь $\mathbf{P} = p(t)\mathbf{n}_0\delta(\mathbf{r}_0)$ ($p(t)$ — дипольный момент, \mathbf{n}_0 и \mathbf{r}_0 характеризуют ориентацию и положение диполя), находящийся в полупространстве, ограниченном бесконечно проводящей плоскостью, и точка наблюдения O , принадлежащая указанной плоскости. Практическая значимость данной модели состоит в том, что она адекватно описывает задачу местоопределения гроз для расстояний от 30 км до 150 км. Данный факт имеет теоретическое обоснование [1] и подтверждён многочисленными практическими экспериментами [2]. Более подробное обсуждение вопросов адекватности моделирования проблемы местоопределения гроз выходят за рамки данной работы.

Как известно [3], электромагнитное поле диполя \mathbf{P} в вакууме равно

$$\mathbf{E}_0^{(\mathbf{P})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[3\frac{p}{r^3} + 3\frac{p'}{cr^2} + \frac{p''}{c^2r} \right] (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0 - \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{cr^2} + \frac{p''}{c^2r} \right] \mathbf{n}_0 \right\},$$

$$\mathbf{H}_0^{(\mathbf{P})} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{p'}{r^2} + \frac{p''}{cr} \right] (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{e}_0),$$

где \mathbf{e}_0 — направление от диполя к наблюдателю, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, c — скорость света, r — расстояние от наблюдателя до диполя.

В используемой математической модели для определения поля диполя \mathbf{P} в полупространстве, ограниченном бесконечно проводящей плоскостью, корректным оказывается применение методов геометрической оптики. В соответствии с ними искомое поле ($\mathbf{E}^{(\mathbf{P})}$, $\mathbf{H}^{(\mathbf{P})}$) есть результат наложения поля ($\mathbf{E}_0^{(\mathbf{P})}$, $\mathbf{H}_0^{(\mathbf{P})}$) и отражённого поля ($\mathbf{E}_1^{(\mathbf{P})}$, $\mathbf{H}_1^{(\mathbf{P})}$), представимого как поле мнимого диполя $\mathbf{P}^* = p(t)\mathbf{n}_1\delta(\mathbf{r}_1)$, являющегося зеркальным отражением диполя \mathbf{P} (см. рис. 1):

$$\mathbf{E}^{(\mathbf{P})} = \mathbf{E}_0^{(\mathbf{P})} + \mathbf{E}_1^{(\mathbf{P})}, \quad \mathbf{H}^{(\mathbf{P})} = \mathbf{H}_0^{(\mathbf{P})} + \mathbf{H}_1^{(\mathbf{P})}.$$

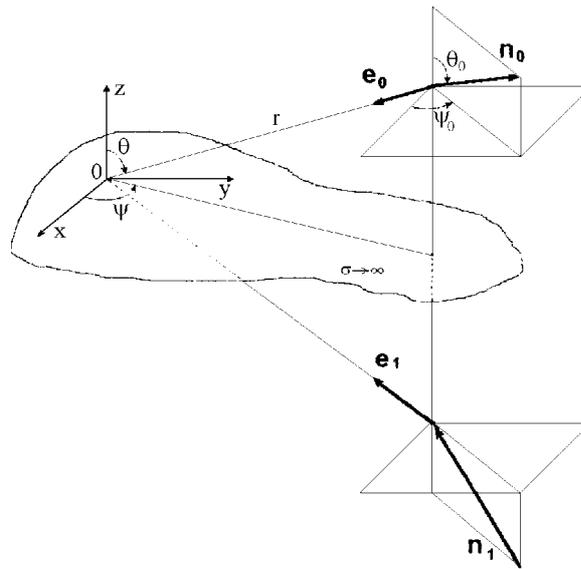


Рис. 1.

Введя декартову систему координат с центром в точке наблюдения O и осью Oz , являющейся нормалью ограничивающей плоскости, можно представить электрическую (\mathbf{E}) и магнитную (\mathbf{H}) компоненты поля в координатной форме [4, 5]

$$E_z(t) = q(t) + q'(t)\frac{v}{\alpha} + q''(t)\frac{u}{\alpha^2}, \quad (1)$$

$$H_x(t) = \sin \varphi \left(q'(t)\frac{1}{\alpha} + q''(t)\frac{1}{\alpha^2} \right), \quad (2)$$

$$H_y(t) = -\cos \varphi \left(q'(t)\frac{1}{\alpha} + q''(t)\frac{1}{\alpha^2} \right), \quad (3)$$

$$E_x(t) = E_y(t) = H_z(t) = 0.$$

Здесь $\alpha = c/r$ — величина, обратная времени распространения волны от источника до наблюдателя, переменные u , v , φ , $q(t)$ определяются [5] равенствами

$$w \sin \varphi = \sin \theta \cos \theta_0 \sin \psi - \cos \theta \sin \theta_0 \sin \psi_0, \quad w \cos \varphi = \sin \theta \cos \theta_0 \cos \psi - \cos \theta \sin \theta_0 \cos \psi_0,$$

$$u = \sin \theta \cos(\varphi - \psi), \quad v \sin(\psi - \psi_0) = \sin(\varphi - \psi_0), \quad q(t) = w\alpha^2 p(t) / (2\pi c^2 r).$$

Остальные параметры определены на рис. 1.

Из уравнений (1)–(3) видно, что в точке наблюдения горизонтальная составляющая магнитного поля и вертикальная составляющая электрического поля представляются различными линейными комбинациями трёх слагаемых: волнового $q''(t)/\alpha^2$, индукционного $q'(t)/\alpha$ и статического $q(t)$, по-разному нормированных на величину α . Степенная зависимость указанных слагаемых от величины α и линейная независимость системы функций $\{q(t), q'(t), q''(t)\}$ [5] дают принципиальную возможность решения обратной задачи — дать оценку координат (r, ψ, θ) точки размещения дипольного источника по индуцируемому им электромагнитному полю в точке наблюдения.

Основная сложность, возникающая при разработке методов решения обратных задач математической физики, к числу которых относится и задача определения местоположения источника поля, состоит в нахождении корректных формулировок условий задачи и построении устойчивых (т. е. мало

чувствительных к погрешностям моделирования) алгоритмов. В рассматриваемом случае компоненты E_z , H_x и H_y могут быть измерены с помощью антенной системы, состоящей из вертикальной электрической антенны и пары взаимно ортогональных рамочных магнитных антенн и, следовательно, используются в качестве исходных данных для решения задачи оценки координат (r, ψ, θ) точки размещения диполя. При этом оценка параметра φ может быть получена с помощью известной техники пеленгования [4]. Это позволяет свести рассматриваемую проблему к задаче идентификации параметров u , v и α системы дифференциальных уравнений [5]

$$\begin{cases} q(t)v + q'(t)\frac{v}{\alpha} + q''(t)\frac{u}{\alpha^2} = e(t), \\ q'(t)\frac{1}{\alpha} + q''(t)\frac{1}{\alpha^2} = h(t) \end{cases} \quad (4)$$

по заданным функциям $e(t)$ и $h(t)$, представляющим измеренные соответственно вертикальную составляющую электрического поля и горизонтальную составляющую магнитного поля.

Частный случай рассмотренной выше математической модели для $u = v = 1$, соответствующий вертикальному диполю, был использован в выпускавшемся отечественной промышленностью грозопеленгаторе—дальномере “Очаг—2П” [6]. Однако многочисленные эксперименты показали возможность получения значительных ошибок, обусловленных принятием при проектировании данного прибора гипотезы о вертикальности эквивалентного диполя грозового разряда. В связи с этим был предложен ряд алгоритмов для решения задачи определения положения в пространстве произвольно ориентированного электрического диполя [4, 5].

Наименьшую вычислительную сложность и, скорее всего, наибольшую точность имеет прямой алгоритм [5], состоящий в непосредственном вычислении требуемых оценок по формулам

$$\alpha = \sqrt{\frac{\tilde{h}_1\tilde{e}_2 - \tilde{h}_2\tilde{e}_1}{\tilde{h}_2\tilde{e}_0 - \tilde{h}_1\tilde{e}_1}}, \quad u = \frac{\tilde{e}_0\tilde{e}_2 - \tilde{e}_1^2}{\tilde{h}_2\tilde{e}_0 - \tilde{h}_1\tilde{e}_1}, \quad (5)$$

где

$$\tilde{e}_k = \int_0^{+\infty} e^{(k)}(t) h^{(k)}(t) dt, \quad \tilde{h}_k = \int_0^{+\infty} (h^{(k)}(t))^2 dt, \quad k = 0, 1, 2. \quad (6)$$

Результаты аналитического и численного исследования алгоритма (5) обсуждались на конференциях ICLP-96 [7], ПРП-96 [8]. Данный алгоритм использован в инструментальном комплексе программ “Гроза” [9], представляющем работающее в реальном масштабе времени WINDOWS—приложение.

Целью настоящей работы является более полное представление результатов аналитического исследования устойчивости данного алгоритма к погрешностям моделирования. Погрешности моделирования определяются отклонением характеристик реального источника излучения от дипольных, отличием подстилающей поверхности от плоскости с бесконечной проводимостью, влиянием ионосферы и множеством других неучтенных факторов. Из-за сложности точного описания погрешностей моделирования используется их представление в виде белого шума, присутствующего в наблюдаемых сигналах. Шумы в сигналах $e(t)$ и $h(t)$ будем считать белыми, аддитивными, имеющими одинаковую интенсивность N , и взаимно некоррелированными.

ФОРМИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ $e(t)$, $h(t)$. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ \tilde{e}_k И \tilde{h}_k

Отсутствие в алгоритме ограничений на наблюдаемые сигналы $e(t)$ и $h(t)$, а следовательно, и на функцию $q(t)$, связанную с дипольным моментом источника излучения, позволяет подвергнуть сигналы

$e(t)$ и $h(t)$ предобработке фильтром, оператор которого коммутирует с операторами каналов Е и Н, формирующих данные сигналы. С помощью данного фильтра решаются две задачи: 1) ограничение используемых частот диапазоном $200 \div 10000$ Гц, в котором применяемая модель адекватно описывает задачу локализации молниевых разрядов [4]; 2) минимизация погрешности измерения, возникающей из-за наличия шумов в сигналах $e(t)$ и $h(t)$.

Необходимо отметить, что соотношения (5)–(6) предполагают финитность сигналов $e(t)$ и $h(t)$, т. е. равенство их нулю вне конечного промежутка времени. В реальных задачах, в частности при определении положения грозовых очагов, длительность импульса от отдельного источника излучения значительно меньше времени между импульсами от различных источников, поэтому использование в математической модели бесконечного времени является корректным. С другой стороны, при анализе вероятностных характеристик используется понятие белого шума. Так как бесконечная по времени реализация стационарного случайного процесса с конечной ненулевой дисперсией имеет бесконечно большую энергию, то необходимо учитывать конечность времени наблюдения. В дальнейших выкладках будем считать время наблюдения бесконечным, но шум $\eta_E(t)$ и $\eta_H(t)$ в каналах равным нулю вне промежутка $(0, T)$, где $T = 2\pi/\Omega_0$, Ω_0 — нижняя частота среза входного фильтра. В силу финитности сигнала от источника излучения, предложенный подход оказывается эквивалентным использованию конечного времени наблюдения и упрощает анализ алгоритма.

Дальнейший анализ будем проводить в терминах преобразования Фурье. Из (6) следует

$$\tilde{e}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ [(j\omega)^k E(\omega)] \cdot [(j\omega)^k H(\omega)], t \right\} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} E(\omega) H^*(\omega) d\omega. \quad (7)$$

Первое равенство в данной цепочке является следствием соответствия между произведением оригиналов и сверткой их преобразований Фурье. Второе равенство — следствие тождества $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{-1} [F(\omega), t] dt = F(0)$ и определения свертки. Аналогичные выкладки для \tilde{h}_k приводят к равенству

$$\tilde{h}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |H(\omega)|^2 d\omega. \quad (8)$$

Используемая схема формирования сигналов $E(\omega)$, $H(\omega)$ представлена на рис. 2. На данной схеме приняты следующие обозначения: $Q = Q(\omega)$ — преобразование Фурье дипольного момента источника излучения, $F(\omega)$ — передаточная функция фильтра для предобработки наблюдаемых сигналов,

$$n_E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \eta_E(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad n_H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \eta_H(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (9)$$

Фурье-образы шумов в каналах Е и Н,

$$T_E(\omega) = v + \frac{j\omega}{\alpha} v - \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 u, \quad T_H(\omega) = \frac{j\omega}{\alpha} - \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 \quad (10)$$

передаточные функции каналов Н и Е,

$$\begin{cases} E(\omega) = F(\omega) [T_E(\omega)Q(\omega) + n_E(\omega)], \\ H(\omega) = F(\omega) [T_H(\omega)Q(\omega) + n_H(\omega)] \end{cases} \quad (11)$$

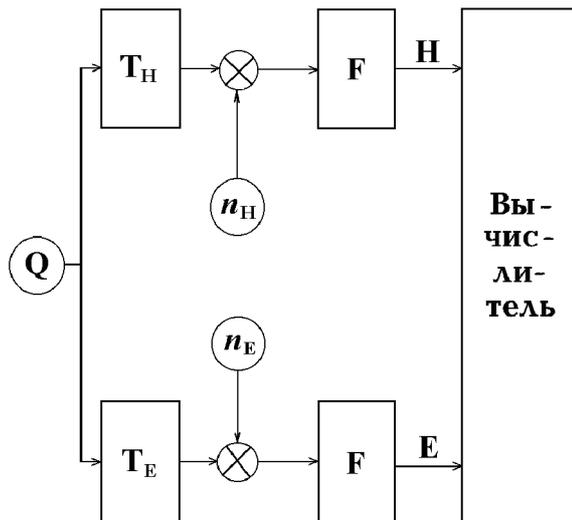


Рис. 2.

Фурье-образы сигналов, передаваемых в вычислитель.

Подстановка $E(\omega)$, $H(\omega)$, определённых по формулам (11), в равенства (7)–(8), определяющие параметры \tilde{e}_k , \tilde{h}_k , $k = 0, 1, 2$, даёт

$$\begin{aligned} \tilde{e}_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 |Q(\omega)|^2 T_E(\omega) T_H^*(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 n_E(\omega) n_H^*(\omega) d\omega + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 Q(\omega) T_E(\omega) n_H^*(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 Q^*(\omega) T_H^*(\omega) n_E(\omega) d\omega = \\ &= S_{e1k} + S_{e2k} + S_{e3k} + S_{e4k}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 |Q(\omega)|^2 |T_H^*(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 Q(\omega) T_H(\omega) n_H(\omega)^* d\omega + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 Q^*(\omega) T_H^*(\omega) n_H(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 |n_H(\omega)|^2 d\omega = \\ &= S_{h1k} + S_{h2k} + S_{h3k} + S_{h4k}, \end{aligned} \tag{13}$$

где S_{elk}, S_{hlk} , $l = 1, 2, 3, 4$, — обозначения соответствующих слагаемых, введённые для придания дальнейшим выкладкам более обозримого вида.

Наличие шума в каналах Е и Н переводит параметры \tilde{e}_k и \tilde{h}_k , $k = 0, 1, 2$, используемые алгоритмом (5), в категорию случайных величин. В следующем разделе анализируются вероятностные характеристики этих параметров.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАРАМЕТРОВ \tilde{e}_k И \tilde{h}_k , $k = 0, 1, 2$

В соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей, величины \tilde{e}_k и \tilde{h}_k , $k = 0, 1, 2$, являются нормально распределёнными, поэтому их полную вероятностную характеристику дают математические ожидания и ковариационная матрица. Прежде чем приступить к их вычислению, заметим, что в соответствии с (9) имеют место равенства

$$\langle n_E(\omega) \rangle = \langle n_H(\omega) \rangle = 0, \quad \langle n_E(\omega_1)n_H(\omega_2) \rangle = 0, \quad (14)$$

$$\langle n_E(\omega_1)n_E^*(\omega_2) \rangle = \langle n_H(\omega_1)n_H^*(\omega_2) \rangle = \frac{N}{2\pi\Omega_0} \cdot \frac{\sin \lambda}{\lambda} \exp(j\lambda), \quad (15)$$

где

$$\lambda = \pi \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Omega_0}.$$

Статистическое усреднение равенства (12) проводим с учётом того, что $\langle S_{e1k} \rangle = S_{e1k}$ (в силу отсутствия в данном слагаемом случайных параметров), $\langle S_{e2k} \rangle = \langle S_{e3k} \rangle = \langle S_{e4k} \rangle = 0$ (в соответствии с (14)). В результате имеем

$$\hat{e}_k = \langle \tilde{e}_k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 |Q(\omega)|^2 T_E(\omega) T_H^*(\omega) d\omega. \quad (16)$$

Статистическое усреднение равенства (13) проводим с учётом того, что $\langle S_{h1k} \rangle = S_{h1k}$ (в силу отсутствия в данном слагаемом случайных параметров), $\langle S_{h2k} \rangle = \langle S_{h3k} \rangle = 0$ (в соответствии с (14)) и, наконец, в соответствии с (15)

$$\langle S_{h4k} \rangle = \frac{N}{2\pi\Omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

В результате имеем

$$\hat{h}_k = \langle \tilde{h}_k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 |Q(\omega)|^2 |T_H^*(\omega)|^2 d\omega + \frac{N}{2\pi\Omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (17)$$

Учитывая, что $T_E(\omega)T_H^*(\omega) = u(\omega/\alpha)^4$, $|T_H^*(\omega)|^2 = (\omega/\alpha)^2 + (\omega/\alpha)^4$, окончательно имеем

$$\hat{e}_k = \frac{uA_{k+2}}{\alpha^4}, \quad (18)$$

$$\hat{h}_k = \frac{A_{k+2}}{\alpha^4} + \frac{A_{k+1}}{\alpha^2} + \frac{NC_k}{2\pi\Omega_0}, \quad (19)$$

где

$$A_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} |F(\omega)|^2 |Q(\omega)|^2 d\omega, \quad (20)$$

$$C_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (21)$$

Перейдем к вычислению элементов ковариационной матрицы. В равенстве (12) слагаемые S_{ekl} , отличающиеся значениями последнего индекса, являются взаимно некоррелированными;

слагаемые S_{ek1} , $k = 0, 1, 2$, являются детерминированными величинами; слагаемые S_{ekm} , $k = 0, 1, 2$, $m = 2, 3, 4$, являются центрированными, т. е. $\langle S_{ekm} \rangle = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} K\{e_k, e_l\} &= \langle \tilde{e}_k \tilde{e}_l \rangle - \langle \tilde{e}_k \rangle \langle \tilde{e}_l \rangle = \sum_{m=1}^4 (\langle S_{ekm} S_{elm} \rangle - \langle S_{ekm} \rangle \langle S_{elm} \rangle) = \\ &= \langle S_{ek2} S_{el2} \rangle + \langle S_{ek3} S_{el3} \rangle + \langle S_{ek4} S_{el4} \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя (15) и фильтрующее свойство функции $\frac{\sin x}{x}$, находим слагаемые полученной суммы:

$$\langle S_{ek2} S_{el2} \rangle = \frac{N^2}{4\pi^2 \Omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2(k+l)} |F(\omega)|^4 d\omega, \quad (23)$$

$$\langle S_{ek3} S_{el3} \rangle = \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2(k+l)} |F(\omega)|^4 |Q(\omega)|^2 |T_E(\omega)|^2 d\omega, \quad (24)$$

$$\langle S_{ek4} S_{el4} \rangle = \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2(k+l)} |F(\omega)|^4 |Q(\omega)|^2 |T_H(\omega)|^2 d\omega. \quad (25)$$

Подстановка (23)–(25) в равенство (22) с учётом равенств

$$|T_E(\omega)|^2 = u^2 \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^4 + (v^2 - 2uv) \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + v^2,$$

$$|T_H^*(\omega)|^2 = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + 4 \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^4$$

даёт

$$K\{e_k, e_l\} = \frac{N}{2\pi} \left[\frac{1+u^2}{\alpha^4} B_{k+l+2} + \frac{1+v^2-2uv}{\alpha^2} B_{k+l+1} + v^2 B_{k+l} \right] + \frac{N^2}{4\pi^2 \Omega_0} D_{k+l}, \quad (26)$$

где

$$B_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} |F(\omega)|^4 |Q(\omega)|^2 d\omega, \quad (27)$$

$$D_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} |F(\omega)|^4 d\omega. \quad (28)$$

Остальные элементы ковариационной матрицы находятся с помощью аналогичных выкладок. Окончательные формулы имеют вид

$$K\{h_k, h_l\} = \langle \tilde{h}_k \tilde{h}_l \rangle - \langle \tilde{h}_k \rangle \langle \tilde{h}_l \rangle = 2 \frac{N}{\pi} \left[\frac{B_{k+l+2}}{\alpha^4} + \frac{B_{k+l+1}}{\alpha^2} \right], \quad (29)$$

$$K\{h_k, e_l\} = \langle \tilde{h}_k \tilde{e}_l \rangle - \langle \tilde{h}_k \rangle \langle \tilde{e}_l \rangle = \frac{N}{\pi} u \frac{B_{k+l+2}}{\alpha^4}, \quad (30)$$

где величины B_m такие же, как в (27).

ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ РАССТОЯНИЯ

Воспользуемся найденными вероятностными характеристиками параметров \tilde{e}_k и \tilde{h}_k для оценки погрешности вычисления дальности с помощью алгоритма (5). Если $\rho = c/\alpha$ — истинное значение дальности, $\hat{\rho} = c/\hat{\alpha}$ — оценка дальности, полученная с помощью алгоритма (5), то относительная погрешность определения дальности равна

$$\delta_\rho = \frac{\rho - \hat{\rho}}{\rho} = 1 - \frac{\alpha}{\hat{\alpha}} = 1 - \alpha \sqrt{\frac{\tilde{h}_2 \tilde{e}_0 - \tilde{h}_1 \tilde{e}_1}{\tilde{h}_1 \tilde{e}_2 - \tilde{h}_2 \tilde{e}_1}}.$$

Из дальнейшего анализа будет видна зависимость δ_ρ от величины параметра u . Поскольку значение u необходимо также для получения гарантированных оценок угловых координат [5], будем параллельно оценивать его абсолютную погрешность

$$\delta_u = u - \hat{u} = u - \frac{\tilde{e}_0 \tilde{e}_2 - \tilde{e}_1^2}{\tilde{h}_2 \tilde{e}_0 - \tilde{h}_1 \tilde{e}_1}.$$

Для удобства дальнейшего изложения будем использовать векторно-матричные обозначения и введём вектор погрешностей оценивания

$$\vec{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_\rho & \delta_u \end{pmatrix}^T. \quad (31)$$

Используя статистическую линейризацию и равенства (18)–(19), находим математическое ожидание

$$\begin{aligned} \langle \vec{\delta} \rangle &\simeq \begin{pmatrix} 1 - \alpha \sqrt{\frac{\hat{h}_2 \hat{e}_0 - \hat{h}_1 \hat{e}_1}{\hat{h}_1 \hat{e}_2 - \hat{h}_2 \hat{e}_1}} & u - \frac{\hat{e}_0 \hat{e}_2 - \hat{e}_1^2}{\hat{h}_2 \hat{e}_0 - \hat{h}_1 \hat{e}_1} \end{pmatrix}^T = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{\frac{2\pi\Omega_0(A_2A_4 - A_3^2) + \alpha^4 N(A_2C_2 - A_3C_1)}{2\pi\Omega_0(A_2A_4 - A_3^2) + \alpha^2 N(A_4C_1 - A_3C_2)}} \\ -\frac{uN\alpha^4}{\Omega_0} \cdot \frac{A_2C_2 - A_3C_1}{(A_2A_4 - A_3^2)\Omega_0 + (A_2C_2 - A_3C_1)N\alpha^4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Точное представление ковариационной матрицы $K(\delta)$ случайного вектора $\vec{\delta}$ оказывается громоздким и плохо обозримым, поэтому будем искать только старшие члены разложения элементов матрицы в ряд по степеням α . С учётом (26)–(30) ковариационную матрицу случайного вектора

$$\xi = (\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2)^T$$

можно представить в виде

$$K_\xi = \frac{N}{2\pi\alpha^4} \begin{pmatrix} (1+u^2)B_2 & (1+u^2)B_3 & (1+u^2)B_4 & 2uB_3 & 2uB_4 \\ (1+u^2)B_3 & (1+u^2)B_4 & (1+u^2)B_5 & 2uB_4 & 2uB_5 \\ (1+u^2)B_4 & (1+u^2)B_5 & (1+u^2)B_6 & 2uB_5 & 2uB_6 \\ 2uB_3 & 2uB_4 & 2uB_5 & 4B_4 & 4B_5 \\ 2uB_4 & 2uB_5 & 2uB_6 & 4B_5 & 4B_6 \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Матрица Якоби вектор-функции $\vec{\delta}(\xi)$ (см. (31))

$$J(\vec{\delta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta_\rho}{\partial \tilde{e}_0} & \frac{\partial \delta_\rho}{\partial \tilde{e}_1} & \frac{\partial \delta_\rho}{\partial \tilde{e}_2} & \frac{\partial \delta_\rho}{\partial \tilde{h}_1} & \frac{\partial \delta_\rho}{\partial \tilde{h}_2} \\ \frac{\partial \delta_u}{\partial \tilde{e}_0} & \frac{\partial \delta_u}{\partial \tilde{e}_1} & \frac{\partial \delta_u}{\partial \tilde{e}_2} & \frac{\partial \delta_u}{\partial \tilde{h}_1} & \frac{\partial \delta_u}{\partial \tilde{h}_2} \end{pmatrix}$$

с учётом равенств (18)–(19) приводится к виду

$$J(\vec{\delta}(\xi)) = \frac{-\alpha^2}{2u(A_3^2 - A_2A_4)} \begin{pmatrix} o(\alpha^2) & o(\alpha^4) \\ -A_4 + o(\alpha^2) & 2\alpha^2 u A_3 + o(\alpha^4) \\ A_3 + o(\alpha^2) & -2\alpha^2 u A_2 + o(\alpha^4) \\ u A_4 + o(\alpha^2) & -2u^2 \alpha^2 A_3 + o(\alpha^4) \\ -u A_3 + o(\alpha^2) & 2u^2 \alpha^2 A_2 + o(\alpha^4) \end{pmatrix}^T.$$

Используя статистическую линеаризацию, находим

$$K_\delta \simeq J(\vec{\delta}) \cdot K_\xi \cdot J(\vec{\delta})^T = \begin{pmatrix} D\{\delta_\rho\} & K\{\delta_\rho, u\} \\ K\{\delta_\rho, u\} & D\{u\} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} D\{\delta_\rho\} &= \frac{N(1+u^2)}{8u^2\pi} \cdot \frac{A_4^2 B_4 + A_3^2 B_6 - 2A_3 A_4 B_5}{(A_3^2 - A_2 A_4)^2} + o(\alpha^2), \\ D\{u\} &= \frac{N(1+u^2)\alpha^4}{2\pi} \cdot \frac{A_3^2 B_4 + A_2^2 B_6 - 2A_3 A_2 B_5}{(A_3^2 - A_2 A_4)^2} + o(\alpha^6), \\ K\{\delta_\rho, u\} &= \frac{N(1+u^2)\alpha^2}{4u\pi} \cdot \frac{(A_4 B_4 + A_2 B_6) A_3 - (A_3^2 + A_2 A_4) B_5}{(A_3^2 - A_2 A_4)^2} + o(\alpha^4), \end{aligned}$$

Для иллюстрации возможностей исследуемого алгоритма рассмотрим источник со спектром $Q(\omega)$, удовлетворяющим ограничению

$$|Q(\omega)|^2 = \frac{M}{\omega^4}. \quad (32)$$

Такой спектр аппроксимирует усреднённые амплитудно-частотные спектры молниевых разрядов в диапазоне $100 \div 10000$ Гц [4]. В качестве формирующего фильтра будем использовать интегратор с ограниченной полосой пропускания

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{L}{\omega} & \text{при } \omega \in [\Omega_0, \Omega_1], \\ 0 & \text{при } \omega \notin [\Omega_0, \Omega_1]. \end{cases}$$

При указанных функциях Q и F имеем

$$\begin{aligned}\langle \delta_\rho \rangle &= 1 - \sqrt{1 - \frac{N\alpha^4}{2M\pi\Omega_0}}, & \langle \delta_u \rangle &= -u \left(1 + \frac{2M\pi\Omega_0}{N\alpha^4} \right)^{-1}, \\ D\{\delta_\rho\} &= \frac{N(1+u^2)}{10Mu^2\pi} \cdot \frac{\Omega_0^2\Omega_1^2(4\Omega_0^2 + 7\Omega_0\Omega_1 + 4\Omega_1^2)}{(\Omega_1 - \Omega_0)^3} + o\left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^2, \\ D\{u\} &= \frac{3N(1+u^2)\alpha^4}{10M\pi} \cdot \frac{3\Omega_0^2 - 7\Omega_0\Omega_1 + 3\Omega_1^2}{(\Omega_1 - \Omega_0)^3} + o\left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^8, \\ K\{\delta_\rho, u\} &= \frac{N(1+u^2)\alpha^2}{5Mu\pi} \cdot \frac{\Omega_0\Omega_1(4\Omega_0^2 + 7\Omega_0\Omega_1 + 4\Omega_1^2)}{(\Omega_1 - \Omega_0)^3} + o\left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^4.\end{aligned}$$

Из полученных формул видно, что средние значения погрешностей являются монотонно убывающими функциями параметра Ω_0 и не зависят от верхней частоты среза Ω_1 . Их дисперсии, наоборот, являются монотонно возрастающими функциями параметра Ω_0 ($\Omega_0 < \Omega_1$). При фиксированном значении Ω_0 дисперсия относительной погрешности измерения расстояния $D\{\delta_\rho\}$ является унимодальной функцией параметра Ω_1 . Её минимум достигается при

$$\Omega_1 = \frac{9 + \sqrt{145}}{4} \Omega_0 \simeq 5,261 \cdot \Omega_0. \quad (33)$$

Считая, что верхняя частота среза полосового фильтра удовлетворяет равенству (33), находим

$$\begin{aligned}\langle \delta_\rho \rangle &\simeq 0,166 \cdot \left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^2 \cdot \frac{E_n}{E_s}, & \langle \delta_u \rangle &\simeq 9,193 \cdot u \left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^4 \cdot \frac{E_n}{E_s}, \\ D\{\delta_\rho\} &\simeq 27 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1+u^2}{u^2} \cdot \frac{E_n}{E_s}, & D\{\delta_u\} &\simeq 3,562 \cdot (1+u^2) \cdot \left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^4 \cdot \frac{E_n}{E_s}, \\ K\{\delta_\rho, u\} &\simeq 0,282 \cdot \frac{1+u^2}{u} \cdot \left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^2 \cdot \frac{E_n}{E_s},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{N}{2\pi}(\Omega_1 - \Omega_0)T \simeq 4,26 \cdot N \quad \text{и} \\ E_s &= \int_{\Omega_0}^{\Omega_1} |Q(\omega)|^2 d\omega = \frac{M}{3\Omega_0^3} - \frac{M}{3\Omega_1^3} \simeq 2,289 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{M}{\Omega_1^3} \quad \text{—}\end{aligned}$$

энергия шума и энергия сигнала соответственно.

Отношение E_n/E_s можно интерпретировать как относительную погрешность моделирования. Следовательно, предложенный алгоритм определения параметра u вполне устойчив к рассмотренным в работе погрешностям моделирования. Не представляет сложности также синтез алгоритма, имеющего практически несмещённую оценку дальности.

Дисперсия оценки дальности существенно зависит от величины параметра u . Тем не менее, при значениях $u > 27 \cdot 10^{-3}$ дисперсия относительной погрешности определения дальности не превосходит относительной погрешности моделирования. Если же $u \rightarrow 0$, то дисперсия $D\{\delta_\rho\} \rightarrow \infty$. Однако наличие оценки параметра u позволяет в каждом случае оценить не только расстояние до источника

излучения, но и дисперсию оценки, и в зависимости от полученных результатов принять адекватное решение о возможном месте его размещения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный в работе алгоритм совместной обработки вертикальной составляющей электрического и горизонтальной составляющей магнитного полей позволяет определить дальность до эквивалентного дипольного источника электромагнитного излучения в диапазоне СДВ. Это подтверждают найденные зависимости математического ожидания $\langle \delta_\rho \rangle$ и дисперсии $D\{\delta_\rho\}$ погрешности определения дальности от спектра источника и передаточной функции входного фильтра. Полученные оценки $\langle \delta_\rho \rangle$ и $D\{\delta_\rho\}$ для частного случая, соответствующего усреднённому источнику молниевых разрядов, показывают возможность использования алгоритма (5) в системах местоопределения грозовых очагов и позволяют выработать требования к аппаратному обеспечению таких систем.

Описанный алгоритм использован в инструментальном комплексе программ "Гроза- [9], представляющем работающее в реальном масштабе времени WINDOWS—приложение, которое позволяет:

1. дать оценку координат молниевых разрядов по результатам мониторинга электромагнитного поля Земли в диапазоне СНЧ, представленным в цифровой форме в виде отсчётов мгновенных значений напряжённостей вертикальной составляющей электрического поля и двух взаимно ортогональных горизонтальных составляющих магнитного поля, передаваемых в компьютер через асинхронный адаптер RS-232;

2. вести документирование информации о грозовых очагах;

3. осуществлять тестирование используемого оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов И. И. // Труды ГГО. 1975. Вып. 358. С. 61.
2. Кононов И. И., Штенников Ю. В. — В кн.: Атмосферное электричество: Труды I Всес. симпоз. по атмосферному электричеству. — Л.: Гидрометеоиздат, 1976. С. 231.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. — 719 с.
4. Кононов И. И., Петренко И. А., Снегуров В. С. Радиотехнические методы местоопределения грозовых очагов. — Л.: Гидрометеиздат, 1986. — 222 с.
5. Panyukov A. V. // J. Geophys. Res. Atmos. 1996. V. 101. № 10. P. 14977.
6. Грозопеленгатор—дальномер "Очаг-2П". — Л.: Гидрометеиздат, 1988.
7. Panyukov A. V. — In: Proc. 23rd Int. Conference on Lightning Protection. Firenze (Italy). 23–27, September, 1996. P. 252.
8. Panyukov A. V. — In: Abstracts of Int. Conference on Inverse and Ill-posed Problems. Moscow. 10–13, September, 1996. P. 140.
9. Панюков А. В., Захаров Е. Л., Королев С. М. Комплекс программ для системы местоопределения грозовых очагов в ближней зоне ("Гроза"): Свид. РосАПО № 970109.

Челябинский государственный
технический университет, Россия

Поступила в редакцию
13 июня 1997 г.

ERROR ANALYSIS OF THE PRIMAL ALGORITHM FOR RANGE-FINDER UP TO AN ELECTRICAL DIPOLE

A. V. Panyukov

The algorithm of coprocessing vertical component of electrical field and horizontal component of magnetic field permitting to determine distance up to the equivalent dipole radiant is considered. The associations of expectation and variance of an error of the definition of distance from a spectrum of a radiant and from gear function of an entering filter are found. If the spectrum of a radiant is an average spectrum of lightning discharges, and the filter is an integrating link with a limited passband, then evaluation of distance appears practically unbiased. The evaluations confirm a possibility of use of analyzable algorithm in lightning location systems, and also enable to formulate the requirements to hardware of such complexes. The informations about author's complex of the programs for a lightning location systems are given.

УДК 621.391.822

ВЛИЯНИЕ НЕГАУССОВОСТИ НА ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ФИЛЬТРОВАННОГО ФЛИККЕРНОГО ШУМА

*С. В. Макаров¹, С. Ю. Медведев¹, А. В. Якимов¹,
Г. Феррантэ², В. Мичели², Ф. Принчипато²*

Ведётся поиск инструмента для выяснения природы фликкерного шума в проводящих материалах, с помощью которого можно проверять различные гипотезы происхождения шума. Для этого рассматривается метод анализа интенсивности шума на выходе полосового фильтра в случае негауссовых процессов. Приводятся данные для погрешности измерения интенсивности фликкерного шума в GaAs плёнках и гауссова белого шума, эмулированного численными методами. Создаётся и исследуется численная модель $1/f$ шума, представляющего собой суперпозицию телеграфных случайных процессов. Показано, что для исследования шумов на нестационарность этот метод требует дальнейшего совершенствования. В связи с этим даются некоторые рекомендации.

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы — поиск инструмента для выяснения природы $1/f$ шума в проводящих материалах. Из методов, предназначенных для изучения природы фликкерных шумов (см., например, [1]), выбрано измерение интенсивности шума на выходе полосового фильтра [2], с помощью которого проверяется “нулевая гипотеза”, т. е. гауссовость и стационарность исследуемого шума.

Исследование фликкерного шума в GaAs плёнках показывает, что такой шум не является стационарным гауссовым [2]. Было обнаружено, что результаты анализа сильно зависят от параметров полосового фильтра. Поэтому предлагается рассмотреть и объяснить поведение экспериментальных данных для погрешности измерения интенсивности шума в GaAs плёнках при изменении полосы пропускания фильтра.

Нарушение “нулевой гипотезы” означает, что по крайней мере одно условие, гауссовость или стационарность, не выполняется. Допустим, что справедлива модель [3], связывающая фликкерный шум с двухуровневыми системами в образце. Считая, что данные системы обусловлены точечными дефектами [4], естественно предположить, что при небольшом количестве дефектов фликкерный шум вполне может быть негауссов.

Таким образом, необходимо пересмотреть метод анализа интенсивности фильтрованного шума в случае негауссовых процессов. Это и осуществляется в настоящей работе.

Теоретический анализ погрешности измерения интенсивности негауссова шума в общем случае затруднителен. Как простейший пример, рассматривается пуассоновский случайный процесс. Обнаружено, что шум в GaAs плёнках нельзя описать с помощью пуассоновской модели. Поэтому на основании модели двухуровневых систем [3, 4] осуществлено численное моделирование $1/f$ шума суперпозицией телеграфных случайных процессов; исследовано проявление негауссовости такого шума.

ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследуемый шум $\xi(t)$, обладающий нулевым средним, подаётся на вход полосового фильтра, который имеет полосу пропускания Δf . Оценивается средняя интенсивность шума $x(t)$ на выходе фильтра:

$$p(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x^2(t') dt', \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

Здесь T — полное время анализа, $p(t)$ — оценка интенсивности, она является случайной функцией времени t . Можно показать, что оценка (1) является несмещённой, т. е. её статистическое среднее совпадает с дисперсией шума на выходе фильтра: $\langle p \rangle = \sigma_x^2$. Погрешность оценки $p(t)$ определяется как отношение её стандарта к среднему:

$$\varepsilon_p = \sigma_p / \langle p \rangle. \quad (2)$$

В случае, когда шум стационарен и гауссов, т. е. выполнена “нулевая гипотеза”, погрешность (2) определяется известным соотношением: $\varepsilon_p^2 = \frac{1}{t \cdot \Delta f_x}$, где Δf_x — эффективная ширина спектра фильтрованного шума.

При измерениях оценивается погрешность $\varepsilon_{\text{exp}} = \frac{s}{p\sqrt{N}}$ путём использования оценок $p(t)$ и $s^2(t)$ — среднего и дисперсии интенсивности, соответственно, — а также известного числа N некоррелированных отсчётов интенсивности. Очевидно, что ε_{exp} есть случайная функция времени, и она рассеяна вокруг ε_p , если справедлива “нулевая гипотеза”. Поэтому для анализа экспериментальных данных вычисляется относительная оценка погрешности

$$E(t) = \frac{\varepsilon_{\text{exp}}(t)}{\varepsilon_p(t)}, \quad (3)$$

которая должна принимать значения в окрестности единицы в случае стационарного гауссова шума. Таким образом, входной шум исследуется на справедливость нулевой гипотезы.

Однако, поскольку величина $E(t)$ является случайной, то по ограниченному числу экспериментальных данных нельзя судить о выполнении “нулевой гипотезы”. Поэтому в настоящей работе используется доверительный интервал для значений $E(t)$ с уровнем значимости 95% [2]. Если примерно 95% данных находится в пределах доверительного интервала, тогда считаем, что входной шум гауссов и стационарный. В противоположном случае по крайней мере одно условие не выполнено, т. е. нарушена стационарность или/и гауссовость шума.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

С применением вышеуказанного метода исследовался шум n -GaAs эпитаксиальных плёнок, изготовленных в Эйндховенском технологическом университете (Нидерланды) [5].

Измерения выполнялись с помощью специальной системы [6] цифрового анализа сигналов. Шум сначала записывался на жёсткий диск IBM PC. Длина записи ограничена только свободным местом на диске. Контролировались осциллограмма шума, плотность вероятности, спектр, текущая интенсивность шума на выходе полосового фильтра. Для каждой плёнки сделано до 24 шумовых записей. Длина отдельной записи позволяла вычислить 80 спектрограмм с частотным разрешением 0,2 Гц.

Проверка плотности вероятности шума (с определением первых четырёх кумулянтов) не выявила ощутимого отклонения от закона Гаусса.

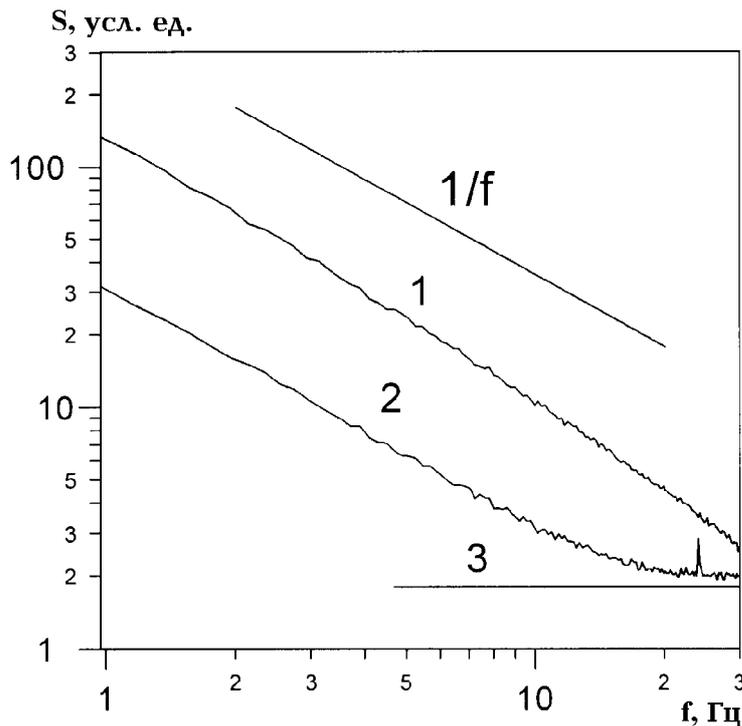


Рис. 1.

Спектр шума (см. рис. 1, линия 2) имел $1/f$ тип на частотах ниже 40 Гц и плато, обусловленное тепловым шумом плёнки (линия 3), на более высоких частотах.

Фильтрация шума и измерение интенсивности выполнялись следующим образом. К отрезку оцифрованного шума длиной 2048 точек применялось преобразование Фурье, после чего селектировались спектральные компоненты, частоты которых находятся в выбранной полосе частот шириной Δf . Затем вычислялись и суммировались интенсивности этих компонент, что даёт единичный отсчёт текущей интенсивности фильтрованного шума. Процедура повторялась, пока не была обработана вся запись, позволяющая получить 80 отсчётов текущей интенсивности шума. В заключение вычислялись необходимые статистические характеристики, включая оценку относительной погрешности в рамках “нулевой гипотезы” и полуширину доверительного интервала.

Результаты анализа экспериментальной оценки погрешности измерения интенсивности, в зависимости от полосы пропускания фильтра, представлены на рис. 2. По оси ординат отложен квадрат относительной оценки погрешности (3), сдвинутый на единицу вниз. По оси абсцисс отложена полоса пропускания фильтра Δf . Нижняя частота среза всех фильтров равна 5 Гц. Самая большая верхняя частота среза (для $\Delta f = 15$ Гц) равна 20 Гц. Таким образом, все фильтры селектируют шум в области $1/f$ спектра. Верхняя линия “GaAs” представляет данные для шумов GaAs плёнок, усреднённые по 24 записям реализаций шума. Набор линий “Гаусс” представляет данные, полученные для гауссова белого шума, эмулированного численными методами. Центральными точками отмечены средние значения, вертикальные отрезки представляют собой оценки доверительных (с уровнем значимости 95%) отклонений относительно средних значений данных. Две симметричные линии (верхняя отмечена как “ ΔE ”) ограничивают доверительный интервал, внутрь которого (с вероятностью 95%) должны попадать отсчёты для гауссова стационарного шума. Основная часть данных для плёнок оказалась выше верхней границы доверительного интервала. С другой стороны, данные для гауссова белого шума с требуемой достоверностью попадают в доверительный интервал. Это означает, что шум GaAs плёнок

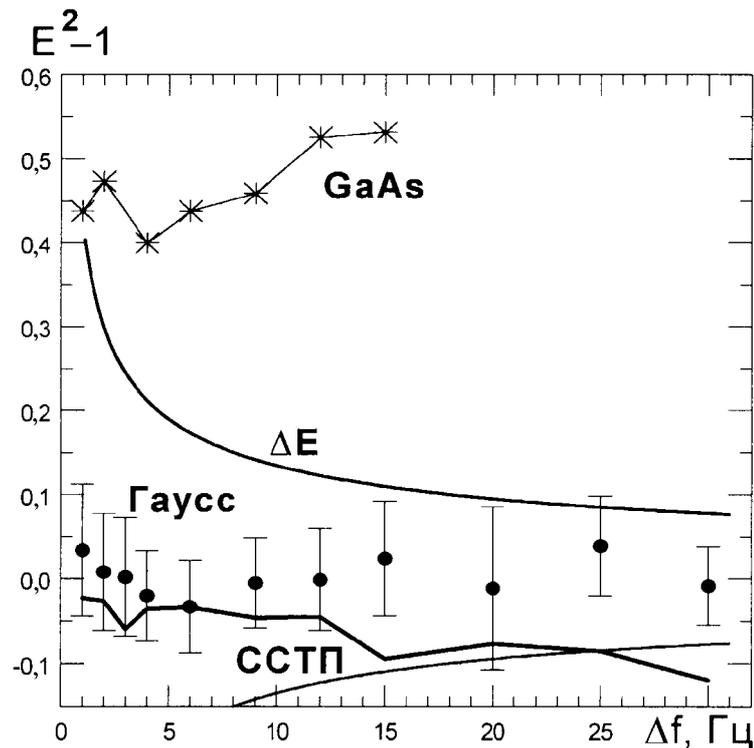


Рис. 2.

не является гауссовым стационарным шумом. Следовательно, необходимо пересмотреть метод анализа интенсивности в тех случаях, когда условие гауссовости нарушается.

ВЛИЯНИЕ НЕГАУССОВОСТИ

Используя соотношения между кумулянтными функциями [7], можно получить, что в случае негауссова стационарного шума выражение для дисперсии оценки интенсивности имеет вид

$$\sigma_p^2 = \frac{2}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) B_y(\tau) d\tau, \quad (4)$$

$$B_y(\tau) = K_4^x(0, 0, \tau, \tau) + 2B_x^2(\tau),$$

где $B_y(\tau)$ — ковариационная функция процесса $y(t) = x^2(t)$ на выходе квадратичного детектора, $K_4^x(0, 0, \tau, \tau)$ — кумулянтная функция четвёртого порядка, $B_x(\tau)$ — ковариационная функция фильтрованного шума.

Если полагать, что протяжённость $K_4^x(0, 0, \tau, \tau)$ по порядку величины не превышает времени корреляции и время анализа t много больше времени корреляции (в экспериментах последнее условие выполняется), то пределы интегрирования в (4) можно заменить на бесконечные, и выражение для погрешности примет вид

$$\varepsilon_p^2 = \frac{1}{t \cdot f_{in}} + \frac{1}{t \cdot \Delta f_x}. \quad (5)$$

Здесь

$$f_{in} = \frac{1}{\gamma_e^x \cdot \tau_4^x} \quad (6)$$

параметр, имеющий размерность частоты и характеризующий негауссовость фильтрованного шума,

$$\tau_4^x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_4^x(0, 0, \tau, \tau)}{K_4^x(0, 0, 0, 0)} d\tau \quad (7)$$

интегральное время релаксации статистической связи третьего порядка,

$$\gamma_e^x = \frac{K_4^x(0, 0, 0, 0)}{\sigma_x^4} \quad (8)$$

коэффициент эксцесса шума на выходе фильтра.

Первое слагаемое в соотношении (5) представляет собой известное выражение погрешности для гауссова шума. Второе слагаемое обусловлено негауссовостью шума и определяется, в общем случае, как параметрами фильтра, так и параметрами входного шума.

Можно показать, что в случае, когда входной шум имеет спектр вида $1/f$, эффективная ширина спектра фильтрованного шума Δf_x монотонно растёт с увеличением полосы фильтра Δf . С другой стороны, в общем случае не выполняется соотношение $\varepsilon_p^2 \sim 1/\Delta f_x$. Это означает, что увеличение полосы пропускания фильтра не гарантирует повышение точности измерения. Аналогичный результат получен в работе [8] для оценки спектра мощности негауссова шума.

Из (5) видно, что чем больше время анализа, тем меньше погрешность измерения интенсивности фильтрованного шума: $\varepsilon_p^2 \sim 1/t$. Это соотношение справедливо для любых стационарных процессов, т. е. негауссовость шума не влияет на зависимость погрешности измерения интенсивности от времени анализа.

Исследуем влияние негауссовости шума на результаты измерений. Дальнейший теоретический анализ затруднителен, поэтому следует рассмотреть достаточно простые модели случайных процессов. В настоящей работе исследуется пуассоновский случайный процесс.

МОДЕЛЬ ПУАССОНОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим стационарный пуассоновский случайный процесс на входе фильтра:

$$\xi(t) = \sum_i a_i F_\xi(t - t_i),$$

где a_i — случайная амплитуда элементарного импульса $F_\xi(t)$, имеющего случайный момент возникновения t_i . Частота появления импульсов λ известна. Амплитуды всех импульсов распределены одинаково по известному закону. Предположим, что для амплитуд импульсов статистические моменты нечётного порядка равны нулю (в частности, $\langle a \rangle = 0$).

Так как полосовой фильтр осуществляет линейное преобразование входного сигнала, то на его выходе будет тоже пуассоновский процесс, но с другой формой элементарного импульса $F_x(t)$.

Найдём произведение коэффициента эксцесса на интегральное время релаксации статистической связи третьего порядка шума на выходе фильтра. Кумулянтная функция n -го порядка пуассоновского процесса есть [9]

$$K_n^x(0, t_2, \dots, t_n) = \lambda \langle a^n \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(r) F_x(r + t_2) \dots F_x(r + t_n) dr.$$

Соответственно выражения для $K_4^x(0, 0, \tau, \tau)$ и σ_x^2 имеют следующий вид:

$$K_4^x(0, 0, \tau, \tau) = \lambda \langle a^4 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} F_x^2(r) F_x^2(r + \tau) dr,$$

$$\sigma_x^2 = \lambda \langle a^2 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} F_x^2(r) dr.$$

Используя эти соотношения, можно найти коэффициент эксцесса (8) и интегральное время релаксации связи третьего порядка (7):

$$\gamma_e^x = \frac{\langle a^4 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} F_x^4(r) dr}{\lambda \langle a^2 \rangle^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_x^2(r) dr \right]^2}, \quad \tau_4^x = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_x^2(r) dr \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} F_x^4(r) dr}.$$

Эти величины зависят от параметров фильтра, поскольку форма импульса на выходе фильтра определяется его импульсно-переходной характеристикой. Однако их произведение является инвариантом:

$$\gamma_e^x \cdot \tau_4^x = \frac{\alpha_4}{\lambda} \equiv \frac{1}{f_{in}}. \quad (9)$$

Здесь $\alpha_4 = \langle a^4 \rangle / \langle a^2 \rangle^2$ — нормированный 4-й статистический момент амплитуды a элементарного импульса (при $\langle a \rangle = 0$). Если амплитуды распределены по закону Гаусса, то $\alpha_4 = 3$; равномерное распределение даёт $\alpha_4 = 9/5$.

Видно, что результат (9) не зависит от параметров фильтра. Пуассоновский случайный процесс всегда негауссов, его характерная частота (6) не изменяется при полосовой фильтрации. Отсюда следует, что увеличение эффективной ширины спектра фильтрованного шума Δf_x даёт уменьшение погрешности по закону $\varepsilon_p^2 \sim 1/\Delta f_x$, только если $\Delta f_x \ll f_{in}$. В случае $\Delta f_x \gg f_{in}$ имеем $\varepsilon_p^2 = \frac{1}{t \cdot f_{in}}$ — увеличение полосы фильтра не увеличивает точность измерения, т. е. погрешность достигает своего предела.

В терминах относительной погрешности (3) имеем

$$E^2 = 1 + \Delta f_x / f_{in}. \quad (10)$$

Негауссовость шума выражается в том, что зависимость $E^2 - 1$ от Δf_x представляет собой прямую линию, выходящую из точки (0,0) с наклоном $1/f_{in}$. Следует заметить, что для пуассоновских случайных процессов наклон таких прямых является положительным, тогда как в общем случае он, по-видимому, может быть и отрицательным.

Из рис. 2 видно, что экспериментальные данные для шума в GaAs плёнках не представляют собой прямые, выходящие, согласно (10), из начала системы координат. Таким образом, если шум GaAs плёнок стационарен, то он не является пуассоновским процессом.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В теории $1/f$ шума существует гипотеза, связывающая его возникновение с существованием дефектов в твёрдом теле. В простейшем случае каждый дефект имеет два метастабильных состояния, т. е. формирует двухуровневую систему (ДУС) [3, 4]. Переключения отдельной ДУС, вследствие различия электрофизических параметров дефекта в различных состояниях, приводят к модуляции проводимости образца, имеющей характер случайного телеграфного процесса (СТП). Предполагается, что фликкерный шум создаётся ансамблем ДУС, имеющих широкое распределение средних времён пребывания в своих состояниях, и представляет собой суперпозицию СТП:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N \xi_k(t). \quad (11)$$

Здесь N — число стационарных СТП $\xi_k(t)$, спектр каждого из которых имеет лоренцев вид:

$$S_{\xi_k}(f) = \frac{A_k^2}{\pi^2(\tau_{1k} + \tau_{2k})(f^2 + f_k^2)}, \quad (12)$$

где $f_k = (1/2\pi) \cdot (\tau_{1k}^{-1} + \tau_{2k}^{-1})$ — опорная частота, A_k — размах СТП, τ_{1k} и τ_{2k} — средние времена пребывания СТП в своих состояниях.

Случайный процесс $\xi(t)$ всегда негауссов. Эта негауссовость лучше всего проявляется, когда ансамбль ДУС мал.

Рассмотрим проявление негауссовости такого шума. Теоретический анализ точности измерения интенсивности фильтрованного шума в этом случае затруднён. Поэтому было осуществлено численное моделирование шума, представляющего собой суперпозицию СТП.

При моделировании, без ограничения общности, полагалось, что все процессы в (11) симметричные (средние времена пребывания в обоих состояниях процесса совпадают), имеют нулевое среднее и одинаковый размах. Все СТП статистически независимые, т. е. в физической интерпретации дефекты полагаются независимыми друг от друга. Если опорные частоты распределены в достаточно широком интервале $[F_l, F_h]$, то в пределе $N \rightarrow \infty$, при распределении частот вида $W_{f_k}(f_k) \sim 1/f_k$, спектр $S_{\xi}(f)$ суммарного шума $\xi(t)$ имеет зависимость вида $1/f$, если $F_l \ll f \ll F_h$ [10, 11]. Кроме того, известно, что неравномерность спектра суммарного процесса уменьшается при увеличении числа опорных частот и при упорядочении их значений [12]. В настоящей работе берётся восемь опорных частот, эквидистантно расположенных на частотной оси (в логарифмическом масштабе), с плотностью две частоты на одну декаду.

Для моделирования СТП, обладающего спектром (12), необходимо обеспечить больцмановское распределение времён τ между моментами переключений. Данное распределение, со средним временем $\tau_0 = f_k/\pi$, реализовалось путём преобразования генерируемой компьютером целой случайной величины ν , равномерно распределённой в интервале $(0, U]$:

$$\tau = -\tau_0 \cdot \ln(1 - \nu/U)$$

при $0 < \nu < U$. Если $\nu = U - 1$, то $\tau = \tau_0 \cdot \ln U$. Однако, когда $\nu = U$, в компьютере будет возникать переполнение. Чтобы избежать этого нежелательного эффекта, при $\nu = U$ полагается $\tau = \tau_h$ (τ_h — верхняя граница для τ). Для близости моделируемого распределения к теоретическому необходимо, чтобы вероятность попадания случайного времени пребывания в область допустимых значений $(0, \tau_h]$ была много больше вероятности попадания в область недоступных значений $(\tau_h, +\infty)$. Для этого верхняя граница должна быть значительно больше среднего времени пребывания. В настоящей работе верхняя граница превышает среднее время пребывания более чем в шесть раз, вероятность попадания в область разрешённых значений составляет более 99,7%.

Вышеописанная суперпозиция 1024 псевдослучайных телеграфных процессов, моделирующая стационарный $1/f$ шум, была исследована как модель шума в эпитаксиальных плёнках. Анализ гистограммы и спектра по одной реализации дал результаты, совпадающие с теоретическим прогнозом. Это означает состоятельность модели.

Результаты анализа спектра, полученные усреднением данных для 20 реализаций суперпозиции телеграфных процессов, представлены на рис. 1 (линия 1). Во всей полосе частот, где производился анализ, наблюдается зависимость, близкая к $1/f$.

Результаты анализа погрешности измерения интенсивности представлены на рис. 2 (ломанная линия "ССТП"). Негауссовость такого шума становится заметнее при увеличении полосы пропускания фильтра. При этом наблюдается тенденция к уменьшению оценки погрешности по сравнению с величиной, ожидаемой в рамках "нулевой гипотезы". Такая тенденция объясняется тем, что коэффициент эксцесса отдельного СТП имеет отрицательное значение: $\gamma_e^{\xi k} = -2$. Соответственно, коэффициент эксцесса суперпозиции (11) тоже отрицателен: $\gamma_e^{\xi} = -2/N$.

Из рис. 2 видно, что данные для суперпозиции псевдослучайных телеграфных процессов и шума в GaAs плёнках ведут себя различным образом. Это означает, что если верна модель ДУС, то шум GaAs плёнок, скорее всего, нестационарен.

ВЫВОДЫ

1. Негауссовость шума не изменяет соотношение $\varepsilon_p^2 \sim 1/t$, т. е. чем больше время анализа, тем меньше погрешность измерения интенсивности фильтрованного шума.

2. Для пуассоновского случайного процесса увеличение эффективной ширины спектра фильтрованного шума Δf_x даёт уменьшение погрешности по закону $\varepsilon_p^2 \sim 1/\Delta f_x$, только если $\Delta f_x \ll f_{in}$, где f_{in} — некоторая частота, характеризующая негауссовость шума. В случае $\Delta f_x \gg f_{in}$ имеем $\varepsilon_p^2 = 1/(t \cdot f_{in})$ — увеличение полосы фильтра не влияет на точность измерения.

3. Если $1/f$ шум в обследованных эпитаксиальных GaAs плёнках стационарен, то он, по-видимому, не является пуассоновским случайным процессом. По крайней мере, в использованном диапазоне изменения полосы пропускания фильтра (0,2 Гц ÷ 15 Гц) не удалось обнаружить изменения погрешности, ожидаемого для пуассоновского случайного процесса (см. вывод 2).

4. Моделирование $1/f$ шума суперпозицией случайных телеграфных процессов показало, что при увеличении полосы пропускания фильтра наблюдается тенденция к уменьшению погрешности по сравнению с величиной, ожидаемой для гауссова стационарного шума.

5. Если верна модель, представляющая $1/f$ шум суперпозицией случайных телеграфных процессов, то, вероятнее всего, шум GaAs плёнок нестационарен. Однако для выявления, в реальном масштабе времени, нестационарности шума необходимы дополнительные исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96–15–96718.

ЛИТЕРАТУРА

1. Restle P. J., Weissman M. B., Black R. D. // J. Appl. Phys. 1983. V. 54. № 10. P. 5844.
2. Якимов А. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1997. Т. 40. № 9. С. 1155.
3. Коган Ш. М. // УФН. 1985. Т. 145. № 2. С. 285.
4. Orlov V. B., Yakimov A. V. // Physica B. 1990. V. 162. P. 13.
5. Chen X. Y., Aninkevičius V. — In: Proc. 7th Vilnius Conf. Fluctuation Phenomena in Physical Systems. — Vilnius University Press, 1994. P. 260.
6. Medvedev S. Yu., Pashev A. G., Yakimov A. V. — In: Proc. 7th Vilnius Conf. Fluctuation Phenomena in Physical Systems. — Vilnius University Press, 1994. P. 350.
7. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978. — 376 с.
8. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Коннов И. Р. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. № 8. С. 38.
9. Зачепацкая Л. П. // Радиотехника и электроника. 1971. Т. 16. № 4. С. 627.
10. Van der Ziel A. // Physica. 1950. V. 16. № 4. P. 359.
11. Du Pre F. K. // Phys. Rev. 1950. V. 78. № 5. P. 615.
12. Орлов В. Б., Якимов А. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 2. С. 196.

¹Государственный университет, г. Н. Новгород,
Россия;

²Университет, г. Палермо, Италия

Поступила в редакцию
15 июня 1998 г.

THE EFFECT OF NON-GAUSSIANITY IN THE MEASUREMENT ERROR OF THE INTENSITY OF THE FILTERED 1/F NOISE

S. V. Makarov, S. Yu. Medvedev, A. V. Yakimov, G. Ferrante, V. Micely, F. Principato

To clear up the $1/f$ noise nature in conductors the tool is being searched to check different hypotheses of the phenomenon of the $1/f$ noise. The method analyzing the intensity of the noise at the output of a bandpass filter is discussed for the case of non-gaussian processes. The data of the measurement error of the intensity are presented for the noise in GaAs films, and the gaussian white noise generated by a computer. The numerical model of the $1/f$ noise as a sum of telegraph random processes has been created and examined. It is shown that to test the non-stationarity of the noise the method should be further improved. Some suggestions are given.

УДК 621.372.061.2:519.21

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В. И. Есипенко

Предложен и исследован метод прямого статистического анализа линейных систем первого порядка с детерминированными параметрами. Получены одномерная и многомерная (произвольной размерности n) плотности распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы.

ВВЕДЕНИЕ

Значительные успехи, достигнутые в последние десятилетия в области развития цифровых методов передачи и обработки информации, открыли ряд совершенно новых возможностей по фильтрации, преобразованию и усилению сигналов. Достижения в области практики существенно опередили встречающуюся значительные трудности теоретическую проработку широкого круга вопросов, связанных с нелинейной обработкой сигналов и последующей фильтрацией тех или иных компонент на выходе безынерционного нелинейного четырёхполюсника [1, 2]. Для решения задачи отыскания статистических характеристик случайных процессов на выходе линейных систем, когда на их входе действует негауссов случайный процесс, разработано несколько приближённых методов [2–6].

В настоящее время не существует метода, который позволял бы в общем случае получить на выходе линейной системы многомерную плотность распределения вероятности (ПРВ) размерности $n > 2$. Решение данной задачи становится в значительной мере проще и нагляднее, а результаты — точнее и надёжнее, а главное, появляется возможность отыскания многомерной (произвольной размерности n) ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы в общем случае, если определены вероятностные характеристики самих линейных систем. В качестве одной из таких характеристик линейных систем можно использовать n -мерную ПРВ $q_n(h_0, h_1, \dots, h_{n-1}; t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ мгновенных значений импульсной характеристики $h(t_0, t)$ линейной системы (либо значащей части $h(t_0, t)$, если импульсная характеристика содержит в своём составе дельта-функцию). Для линейных систем с детерминированными параметрами эта n -мерная ПРВ может быть определена в виде

$$q_n(h_0, h_1, \dots, h_{n-1}; t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} \delta [h_k - h_p(t_0, t_k)], \quad (1)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, t — текущее время, t_0 — момент приложения внешнего воздействия, k, n — индексы суммирования, p — индекс, указывающий на “регулярность” (детерминированность) функции $h(t_0, t)$; $\{h_0, h_1, \dots, h_{n-1}\}$ — множество значений импульсной характеристики $h(t_0, t)$, соответствующих моментам времени t_0, t_1, \dots, t_{n-1} .

Здесь и в дальнейшем, исключительно из соображений удобства, мы будем использовать ПРВ как размерности n (см. (1)), так и размерности $(n + 1)$:

$$q_{n+1}(h_0, h_1, \dots, h_n; t_0, t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=0}^n \delta [h_k - h_p(t_0, t_k)], \quad (2)$$

$$q_n(h_1, h_2, \dots, h_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \delta [h_k - h_p(t_0, t_k)],$$

В. И. Есипенко

287

а также рассматривать только одномерные линейные системы, что не снижает общности полученных результатов [7]. Ограничение линейными системами 1-го порядка обусловлено необходимостью рассмотреть суть предлагаемого метода статистического анализа линейных систем в более простой и наглядной форме. Обобщение его на линейные системы более высокого порядка, а также на многомерные линейные системы со случайными параметрами не имеет принципиальных трудностей.

Цель настоящей работы состоит в отыскании на основе предложенного подхода одномерной и многомерной ПРВ мгновенных значений случайного процесса $x(t_0, t)$ на выходе одномерной линейной системы первого порядка с детерминированными параметрами при заданной ПРВ $w_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n; t_0, t_1, \dots, t_n)$ размерности $(n + 1)$ случайного процесса $\xi(t)$ на её входе и равном нулю шуму $z(t)$ линейной системы.

В рассматриваемом классе линейных систем можно выделить два рассматриваемых ниже подкласса.

1. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ, ИМПУЛЬСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОТОРЫХ НЕ СОДЕРЖАТ В СВОЕМ СОСТАВЕ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЮ

Множество таких линейных систем описывается линейным дифференциальным уравнением. Особую группу образуют гауссов и П-образный (идеальный) линейные фильтры (так называемые "предельные"), для которых нельзя записать уравнения, подобные

$$a_1(t) \frac{dx_1(t_0, t)}{dt} + a_0(t) \cdot x_1(t_0, t) = \xi(t) \quad (3)$$

с начальным условием

$$x_1(t_0, t) \Big|_{t=t_0-} = x, \quad (4)$$

где $\xi(t)$ и $x_1(t_0, t)$ — соответственно входное воздействие и отклик линейной системы; $a_1(t)$ и $a_0(t)$ — переменные коэффициенты уравнения (3), "медленные" по сравнению с $x_1(t_0, t)$, т. е. $\Delta f_x \gg \Delta f_{a_i}$; Δf_x и Δf_{a_i} — ширины энергетических спектров функций $x_1(t_0, t)$ и $a_i(t)$, соответственно; $i = 0, 1$.

Импульсные характеристики таких линейных систем выражаются через коэффициенты уравнения (3):

$$h(t_0, t) = \frac{1}{a_1(t)} \exp \left[- \int_{t_0}^t \frac{a_0(\tau)}{a_1(\tau)} d\tau \right]. \quad (5)$$

Собственное и вынужденное движения линейной системы. Отклик $x_1(t_0, t)$ линейной системы складывается из собственного движения $x_{c1}(t_0, t)$, обусловленного ненулевыми начальными условиями (4), и вынужденного движения $x_{в1}(t_0, t)$, соответствующего нулевым начальным условиям [4, 7]:

$$x_1(t_0, t) = x_{c1}(t_0, t) + x_{в1}(t_0, t) = a_1(t_0) \cdot x \cdot h(t_0, t) + \int_{t_0}^t \xi(\tau) h(t_0, t - \tau) d\tau. \quad (6)$$

Одномерная и многомерная плотности распределения вероятности собственного движения линейной системы. Для рассматриваемого подкласса линейных систем собственное движение есть регулярная функция (см. (5) и (6)) $x_{c1p}(t_0, t) = a_1(t_0) \cdot x \cdot h_p(t_0, t)$. В соответствии с (1) ПРВ произвольной размерности $(n + 1)$ собственного движения $x_{c1p}(t_0, t)$ на интервале $\Delta t = t - t_0$ имеет вид

$$q_{n+1}(x_{c10}, x_{c11}, \dots, x_{c1n}; t_0, t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=0}^n \delta [x_{c1k} - x_{c1p}(t_0, t_k)] =$$

$$= \prod_{k=0}^n \delta [x_{c1k} - a_1(t_0)xh_p(t_0, t_k)]. \quad (7)$$

Из (7) для произвольного момента времени t_i из интервала Δt следует одномерная ПРВ

$$q_1(x_{c1i}; t_0, t_i) = \delta [x_{c1i} - a_1(t_0)xh_p(t_0, t_i)]. \quad (8)$$

Одномерная плотность распределения вероятности оценки вынужденного движения линейной системы. Интеграл в правой части выражения (6) заменим “верхней” интегральной суммой

$$x_{в1}(t_0, t) \approx \bar{\hat{x}}_{в1}(t_0, t) = \sum_{k=1}^n \xi(\tau_k) h(t_0, t - \tau_k) \Delta\tau_k, \quad (9)$$

где $\Delta\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\bar{\hat{x}}_{в1}(\cdot)$ — оценка интеграла (6) сверху.

С равным основанием можно было бы аппроксимировать интеграл (6) “нижней” интегральной суммой

$$x_{в1}(t_0, t) \approx \underline{\hat{x}}_{в1}(t_0, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi(\tau_k) h(t_0, t - \tau_k) \Delta\tau_k, \quad (10)$$

где $\underline{\hat{x}}_{в1}(t_0, t)$ — оценка интеграла (6) снизу.

Известно [1, 2, 4], что $\bar{\hat{x}}_{в1}(t_0, t)$ и $\underline{\hat{x}}_{в1}(t_0, t)$ сходятся в среднеквадратическом к $x_{в1}(t_0, t)$ при $n \rightarrow \infty$ (при этом $\Delta\tau_k \rightarrow 0$). Поэтому найти точное выражение для одномерной плотности распределения вероятности $W_1(x_{в1}; t_0, t)$ в момент времени t на выходе линейной системы, в принципе, возможно только при условии задания для $\xi(t)$ и $h_p(t_0, t)$ на интервале Δt соответствующих плотностей распределения вероятности сколь угодно большой размерности или их функционалов $\Pi[\xi(t)]$ и $\Pi[h(t_0, t)]$ [8]. В остальных же наиболее распространённых на практике случаях задания необходимых совпадающих по размерности плотностей распределения вероятности случайного процесса $\xi(t)$ и $h_p(t_0, t)$ можно вести речь лишь об отыскании одномерной ПРВ $W_1(\bar{\hat{x}}_{в1}; t_0, t)_n$ оценки $\bar{\hat{x}}_{в1}(t_0, t)$ (индекс n справа у $W_1(\cdot)$ указывает на число слагаемых в (9)).

В соответствии с (2) множество величин

$$\{h(t_0, t - \tau_1), \dots, h(t_0, t - \tau_n)\} = \{h_1^*, \dots, h_n^*\}, \quad (11)$$

входящих в правую часть (9), имеет совместную ПРВ

$$q_n^*(h_1^*, \dots, h_n^*; t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) = \prod_{k=1}^n \delta [h_k^* - h_p(t_0, t - \tau_k)], \quad (12)$$

где $\tau_1 = t_0 + \Delta\tau_1, \dots, \tau_n = t_0 + \Delta\tau_1 + \dots + \Delta\tau_n$.

Найдём n -мерную ПРВ множества величин

$$\{h(t_0, t - \tau_1)\Delta\tau_1, \dots, h(t_0, t - \tau_n)\Delta\tau_n\} = \{*_h1, \dots, *_h_n\}. \quad (13)$$

Множество (13) получается из (11) при помощи линейного функционального преобразования, состоящего в умножении каждого элемента множества (11) на постоянный множитель $\Delta\tau_k$ и имеющего однозначные обратные функции:

$$\begin{aligned} h_1^* &= \frac{*_h1}{\Delta\tau_1}, \\ h_2^* &= \frac{*_h2}{\Delta\tau_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ h_n^* &= \frac{*_h_n}{\Delta\tau_n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Якобиан преобразования от величин h_1^*, \dots, h_n^* к величинам $*h_1, \dots, *h_n$ имеет вид

$$D_n = \frac{\partial(h_1^*, \dots, h_n^*)}{\partial(*h_1, \dots, *h_n)} = \frac{1}{\Delta\tau_1 \cdot \Delta\tau_2 \cdot \Delta\tau_n}. \tag{15}$$

Совместная n -мерная ПРВ множества величин $\{*h_1, \dots, *h_n\}$ запишется в форме

$$\begin{aligned} q_n(*h_1, \dots, *h_n; t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) = \\ = \prod_{k=1}^n \delta \left[\frac{1}{\Delta\tau_k} (*h_k - *h_{pk}) \right] \left| \frac{1}{\Delta\tau_1 \cdot \Delta\tau_2 \cdot \dots \cdot \Delta\tau_n} \right| = \prod_{k=1}^n \delta(*h_k - *h_{pk}). \end{aligned} \tag{16}$$

Возвращаясь к (9), отметим, что $\bar{x}_{в1}(t_0, t)$ есть сумма попарных произведений соответствующих элементов множеств $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ и $\{*h_1, \dots, *h_n\}$, которые здесь и ниже, когда не будет оговорено специально, рассматриваются независимыми с заданными в совпадающие моменты времени совместными плотностями распределения вероятности $w_n(\xi_1, \dots, \xi_n; t_1, \dots, t_n)$ и (16), соответственно.

При этом совместная ПРВ размерности $(2n + 1)$ величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, *h_1, \dots, *h_n$ равна [2]

$$\begin{aligned} W_{2n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, *h_1, \dots, *h_n; t_0, t_1, \dots, t_n) = \\ = w_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n; t_0, t_1, \dots, t_n) \prod_{k=1}^n \delta(*h_k - *h_{pk}). \end{aligned} \tag{17}$$

Выполним следующее функциональное преобразование величин $\xi_1, \dots, \xi_n, *h_1, \dots, *h_n$, входящих в (17):

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_0, \\ \xi_1 &= \xi_1, \\ &\dots\dots \\ \xi_n &= \xi_n, \\ x_1 &= \xi_1 \cdot *h_1, \\ x_2 &= \xi_2 \cdot *h_2, \\ &\dots\dots \\ x_n &= \xi_n \cdot *h_n. \end{aligned} \tag{18}$$

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_0, \\ \xi_1 &= \xi_1, \\ &\dots\dots \\ \xi_n &= \xi_n, \\ *h_1 &= x_1/\xi_1, \\ *h_2 &= x_2/\xi_2, \\ &\dots\dots \\ *h_n &= x_n/\xi_n. \end{aligned} \tag{19}$$

Якобиан преобразования от величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, *h_1, \dots, *h_n$ к величинам $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n$ имеет вид

$$D_{2n+1} = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, *h_1, \dots, *h_n)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n)} = \frac{1}{\xi_0 \cdot \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n}. \tag{20}$$

С учётом (17)–(20) совместная ПРВ величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n$ запишется в форме

$$\begin{aligned} W_{2n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n; t_0, t_1, \dots, t_n) &= \\ &= w_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n; t_0, t_1, \dots, t_n) \prod_{k=1}^n \delta\left(\frac{x_k}{\xi_k} - {}_k h_{pk}\right) \left| \frac{1}{\xi_0 \cdot \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n} \right| = \\ &= w_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n; t_0, t_1, \dots, t_n) \prod_{k=1}^n \delta(x_k - \xi_k \cdot {}_k h_{pk}). \end{aligned} \quad (21)$$

Интегрируя (21) по переменным $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, получим совместную ПРВ случайных величин x_1, \dots, x_n

$$W_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_n\left(\frac{x_1}{{}_1 h_{p1}}, \dots, \frac{x_n}{{}_n h_{pn}}; t_1, \dots, t_n\right) \left| \frac{1}{{}_1 h_{p1} \cdot {}_2 h_{p2} \cdot \dots \cdot {}_n h_{pn}} \right|. \quad (22)$$

Из (22) с помощью линейного преобразования переменных x_1, \dots, x_n нетрудно найти многомерную плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы (см. Приложение 3, (П3.5)).

Выражение (22) позволяет найти, согласно (9), искомую одномерную ПРВ $W_1(\bar{x}_{B1}; t_0, t)_n$ [9]:

$$W_1(\bar{x}_{B1}; t_0, t)_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \bar{x}_{B1} - x_1 - \dots - x_{n-1}; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_{n-1}. \quad (23)$$

Когда случайные величины x_1, \dots, x_n принимают действительные значения от 0 до $+\infty$, выражение (23) принимает вид

$$\begin{aligned} W_1(\bar{x}_{B1}; t_0, t)_n &= \int_0^{\bar{x}_{B1}} dx_1 \int_0^{\bar{x}_{B1}-x_1} dx_2 \dots \\ &\dots \int_0^{\bar{x}_{B1}-x_1-\dots-x_{n-2}} W_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \bar{x}_{B1} - x_1 - \dots - x_{n-1}; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношения (23) и (24) дают оценку сверху искомой плотности распределения вероятности $W_1(x_{B1}; t_0, t)$. При аппроксимации интеграла в (6) выражением (10) для получения соотношений, аналогичных (23) и (24), следует оперировать множествами величин $\{h(t_0, t - \tau_0), h(t_0, t - \tau_1), \dots, h(t_0, t - \tau_{n-1})\} = \{h_0^*, h_1^*, \dots, h_{n-1}^*\}, \{{}_k h_0, {}_k h_1, \dots, {}_k h_{n-1}\}, \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ и соответствующими n -мерными плотностями распределения вероятности: $q_n^*(h_0^*, h_1^*, \dots, h_{n-1}^*; t_0, t_1, \dots, t_{n-1}), {}_k q_n({}_k h_0, {}_k h_1, \dots, {}_k h_{n-1}; t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ и $w_n(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}; t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$. Соотношения, которые получаются при этом, дают оценку снизу $W_1(\bar{x}_{B1}; t_0, t)_n$ искомой одномерной ПРВ $W_1(x_{B1}; t_0, t)$.

Применительно к выражениям (23) и (24) целесообразно иметь в виду следующее.

1. Пусть $t - t_0 \leq t_{\text{эф.м}}$, где $t_{\text{эф.м}}$ — максимальная эффективная длительность импульсной характеристики $h(t_0, t)$, т. е. такая максимальная величина интервала $\Delta t = t_{\text{эф.м}}$, по истечении которого значениями импульсной характеристики $h(t_0, t_i)$ при $t_i > t_{\text{эф.м}}$ можно пренебречь (они практически равны нулю) [7]. В этом случае плотности распределения вероятности (23) и (24) зависят от переменных \bar{x}_{B1}, t_0, t . Для линейных систем с постоянными параметрами зависимость от t_0 исчезает.

2. При $\Delta t \geq t_{\text{эф.м}}$ интервал интегрирования в (6) может быть уменьшен (во многих случаях весьма значительно) до $t_{\text{эф.м}}$ (см. Приложение 1), т. е.

$$x_{\text{в1}}(t_0, t) = \begin{cases} \int_{t_0}^t \xi(\tau) h(t_0, t - \tau) d\tau & \text{при } t - t_0 < t_{\text{эф.м}}, \\ \int_{t-t_{\text{эф.м}}}^t \xi(\tau) h(t - t_{\text{эф.м}}, t - \tau) d\tau & \text{при } t - t_0 \geq t_{\text{эф.м}}. \end{cases} \quad (25)$$

Существование и единственность плотности распределения вероятности $W_1(x_{\text{в1}}; t_0, t)$ вынужденного движения $x_{\text{в1}}(t_0, t)$. Выражения (23) и (24) справедливы для произвольного n . Плотность распределения вероятности $W_1(\hat{x}_{\text{в1}}; t_0, t)_n$ получена при помощи линейных функциональных преобразований (см. (14)–(16) и (18)–(21)) и свёртки кратности $(n - 1)$. Поскольку ни линейное функциональное преобразование величин, ни многомерная свёртка плотностей распределения вероятности не изменяют свойств непрерывности соответствующих характеристических функций (см., например, [11]), то существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_1(\hat{x}_{\text{в1}}; t_0, t)_n = \lim_{n \rightarrow \infty} W_1(\bar{x}_{\text{в1}}; t_0, t)_n = W_1(x_{\text{в1}}; t_0, t),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Theta}_1(jv; t_0, t)_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\Theta}_1(jv; t_0, t)_n = \Theta_1(jv; t_0, t),$$

где

$$\bar{\Theta}_1(jv; t_0, t)_n = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jv \bar{x}_{\text{в1}}) \cdot W_1(\bar{x}_{\text{в1}}; t_0, t)_n d\bar{x}_{\text{в1}},$$

$$\underline{\Theta}_1(jv; t_0, t)_n = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jv \underline{x}_{\text{в1}}) \cdot W_1(\underline{x}_{\text{в1}}; t_0, t)_n d\underline{x}_{\text{в1}} \quad \text{—}$$

характеристические функции оценок $\bar{x}_{\text{в1}}(t_0, t)$ и $\underline{x}_{\text{в1}}(t_0, t)$, при чём $\Theta_1(jv; t_0, t)$ непрерывна при $t = 0$.

Тогда в соответствии с теоремой Леви–Крамера [11] $\Theta_1(jv; t_0, t)$ есть характеристическая функция случайной величины $x_{\text{в1}}(t_0, t)$, т. е.

$$\Theta_1(jv; t_0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jv x_{\text{в1}}) \cdot W_1(x_{\text{в1}}; t_0, t) dx_{\text{в1}}.$$

Совместная ПРВ собственного и вынужденного движений линейной системы. Для рассматриваемого подкласса линейных систем совместная ПРВ собственного $x_{\text{с1}}(t_0, t)$ и вынужденного $x_{\text{в1}}(t_0, t)$ движений в момент времени t равна, как видно из (8) и (23), произведению соответствующих одномерных плотностей распределения вероятности [2]:

$$W_2^*(x_{\text{с1}}, \bar{x}_{\text{в1}}; t_0, t)_n = W_1(\bar{x}_{\text{в1}}; t_0, t)_n \cdot \delta[x_{\text{с1}} - a_1(t_0) x h_p(t_0, t)],$$

$$W_2^*(x_{\text{с1}}, \underline{x}_{\text{в1}}; t_0, t)_n = W_1(\underline{x}_{\text{в1}}; t_0, t)_n \cdot \delta[x_{\text{с1}} - a_1(t_0) x h_p(t_0, t)], \quad (26)$$

$$W_2^*(x_{\text{с1}}, x_{\text{в1}}; t_0, t) = W_1(x_{\text{в1}}; t_0, t) \cdot \delta[x_{\text{с1}} - a_1(t_0) x h_p(t_0, t)].$$

Одномерная ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы. Согласно (6) и (26) одномерная ПРВ оценки $\bar{x}_1(t_0, t)$ случайного процесса $x_1(t_0, t)$ запишется в форме

$$W_1^*(\bar{x}_1; t_0, t)_n = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\bar{x}_1 - x_{\text{с1}}; t_0, t)_n \cdot \delta[x_{\text{с1}} - a_1(t_0) x h_p(t_0, t)] dx_{\text{с1}} =$$

$$= W_1[\bar{x}_1 - a_1(t_0) x h_p(t_0, t); t_0, t]_n.$$

Аналогично, для одномерной ПРВ случайного процесса $x_1(t_0, t)$ и его оценки $\hat{x}_1(t_0, t)$ имеем:

$$\begin{aligned} W_1^*(\hat{x}_1; t_0, t)_n &= W_1[\hat{x}_1 - a_1(t_0)xh_p(t_0, t); t_0, t]_n, \\ W_1^*(x_1; t_0, t) &= W_1[x_1 - a_1(t_0)xh_p(t_0, t); t_0, t]. \end{aligned}$$

2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ, ИМПУЛЬСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОТОРЫХ СОДЕРЖАТ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЮ

Статистический анализ линейных систем, импульсные характеристики которых содержат в своём составе дельта-функции, доставляет определённые сложности, за исключением тех предельных случаев, когда импульсная характеристика есть только дельта-функция [1, 2].

Собственное и вынужденное движения линейной системы. Множество линейных систем рассматриваемого подкласса описывается линейным дифференциальным уравнением

$$a_1(t) \frac{dx_2(t_0, t)}{dt} + a_0(t) \cdot x_2(t_0, t) = \frac{d\xi}{dt} \quad (27)$$

с начальным условием

$$x_2(t_0, t) \Big|_{t=t_0-} = x, \quad (28)$$

где $x_2(t_0, t)$ — отклик линейной системы; $a_1(t)$ и $a_0(t)$ — переменные коэффициенты уравнения (2), “медленные” по сравнению с $x_2(t_0, t)$ (см. (3)).

Импульсные характеристики таких линейных систем выражаются через коэффициенты уравнения (27)

$$g(t_0, t) = \delta(t - t_0) - \frac{1}{a_1(t)} \exp \left(- \int_{t_0}^t \frac{a_0(\tau)}{a_1(\tau)} d\tau \right) = \delta(t - t_0) - h(t_0, t). \quad (29)$$

Отклик $x_2(t_0, t)$ линейной системы складывается из собственного движения $x_{c2}(t_0, t)$, обусловленного ненулевым начальным условием (28), и вынужденного движения $x_{в2}(t_0, t)$, соответствующего нулевым начальным условиям [4, 7]:

$$x_2(t_0, t) = x_{c2}(t_0, t) + x_{в2}(t_0, t) = a_1(t_0) \cdot x \cdot g(t_0, t) + \int_{t_0}^t \xi(\tau) g(t_0, t - \tau) d\tau. \quad (30)$$

Плотность распределения вероятности мгновенных значений собственного движения линейной системы. Из (30) следует, что собственное движение линейной системы есть обобщённая функция $x_{c2}(t_0, t) = a_1(t_0) \cdot x \cdot g(t_0, t) = a_1(t_0) \cdot x [\delta(t - t_0) - h_p(t_0, t)]$, уменьшаемое которой содержит дельта-функцию, а вычитаемое (значащая часть) есть регулярная функция, совпадающая с собственным движением линейной системы, импульсная характеристика которой не содержит дельта-функцию. Отметим, что дельта-функция есть бесконечно дифференцируемая обобщённая функция, для которой существует суперпозиция $\delta[\delta(t_0, t)]$, по отношению к которой справедливы те же выкладки, что и с суперпозициями обычных функций [10, 12]. Поэтому ПРВ произвольной размерности $(n + 1)$ собственного движения $x_{c2}(t_0, t)$ с учётом (1), (27)–(30) может быть записана в форме

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x_{c20}, x_{c21}, \dots, x_{c2n}; t_0, t_1, \dots, t_n) &= \prod_{k=0}^n \delta[x_{c2k} - x_{c2}^*(t_0, t_k)] = \\ &= \prod_{k=0}^n \delta\{x_{c2k} - a_1(t_0) \cdot x [\delta(t - t_0) - h_p(t_0, t_k)]\}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$x_{c2}^*(t_0, t_k) = x_{c2}(t_0, t_k) - x_{c2p}(t_0, t_k) = a_1(t_0) \cdot x \cdot \delta(t_k - t_0) - a_1(t_0) \cdot x \cdot h_p(t_0, t_k).$$

Из (31) соответствующая одномерная ПРВ для любого момента времени t_i из интервала $\Delta t = t - t_0$ имеет вид

$$q_1(x_{c2i}; t_0, t_i) = \delta\{x_{c2i} - a_1(t_0) \cdot x[\delta(t_i - t_0) - h_p(t_0, t_i)]\}. \tag{32}$$

Одномерная ПРВ вынужденного движения линейной системы. Из (30) следует, что вынужденное движение $x_{B2}(t_0, t)$ линейной системы имеет вид

$$x_{B2}(t_0, t) = \frac{1}{2}\xi_0 - \int_{t_0}^t \xi(\tau) h(t_0, t - \tau) d\tau = x_*(t_0) - x_{B1}(t_0, t). \tag{33}$$

Заменим входящие в (33) случайные величины $x_{B1}(t_0, t)$ и $x_{B2}(t_0, t)$ их оценками сверху:

$$\bar{x}_{B2}(t_0, t) = x_*(t_0) - \bar{x}_{B1}(t_0, t), \tag{34}$$

где

$$\bar{x}_{B1}(t_0, t) = \sum_{k=1}^n \xi(\tau_k) h(t_0, t - \tau_k) \Delta\tau_k, \quad \Delta\tau_k = t_{k+1} - t_k.$$

С равным основанием можно было бы аппроксимировать интеграл в (33) “нижней” интегральной суммой:

$$\underline{x}_{B2}(t_0, t) = x_*(t_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \xi(\tau_k) h(t_0, t - \tau_k) \Delta\tau_k. \tag{35}$$

Отметим, что выбор “верхней” интегральной суммы уменьшает корреляционную связь между $x_*(t_0)$, порождённого дельта-функцией, и интегральной суммой.

Для определённости ниже будем использовать (34).

Напомним [1, 2], что $\bar{x}_{B1}(t_0, t)$, а следовательно, и $\bar{x}_{B2}(t_0, t)$ сходятся в среднеквадратическом к $x_{B1}(t_0, t)$ и $x_{B2}(t_0, t)$, соответственно. Одномерная ПРВ случайной величины $\bar{x}_{B1}(t_0, t)$, входящей в (34), есть определённая выше одномерная ПРВ оценки сверху вынужденного движения линейной системы 1-го порядка с детерминированными параметрами, импульсная характеристика которой не содержит дельта-функцию:

$$W_1(\bar{x}_{B1}; t_0, t)_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \bar{x}_{B1} - x_1 - \dots - x_{n-1}; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_{n-1}, \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned} W_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W_{2n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n; t_0, t_1, \dots, t_n) d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_n = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n; t_0, t_1, \dots, t_n) \prod_{k=1}^n \delta(x_k - \xi_k \cdot {}_*h_{pk}) d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_n = \\ &= w_n\left(\frac{x_1}{{}_*h_{p1}}, \dots, \frac{x_n}{{}_*h_{pn}}; t_1, \dots, t_n\right) \left| \frac{1}{{}_*h_{p1} \cdot {}_*h_{p2} \cdot \dots \cdot {}_*h_{pn}} \right|, \tag{37} \end{aligned}$$

$$*_h_{pk} = h_{pk}^* \cdot \Delta\tau_k, \quad h_{pk}^* = h_p(t_0, t - \tau_k).$$

Из (37) с помощью линейного функционального преобразования переменных x_1, \dots, x_n можно получить многомерную плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы (см. Приложение 3).

Выше показано, что существуют, кроме того, $W_1(\bar{x}_{B1}; t_0, t)_n$ и одномерная (предельная) ПРВ $W_1(x_{B1}; t_0, t)$ вынужденного движения $x_{B1}(t_0, t)$.

Из (34) следует, что для отыскания одномерной ПРВ $W_1(\bar{x}_{B2}; t_0, t)_n$ оценки $\bar{x}_{B2}(t_0, t)$ вынужденного движения $x_{B2}(t_0, t)$ необходимо знание совместной ПРВ случайных величин $x_*(t_0)$ и $\bar{x}_{B1}(t_0, t)$. Здесь возможны два случая.

1. Случайные величины $x_*(t_0)$ и $\bar{x}_{B1}(t_0, t)$ независимы.

Искомая одномерная ПРВ $W_1(\bar{x}_{B2}; t_0, t)$ получается из (П2.2) (см. Приложение 2) с учётом (34):

$$W_1(\bar{x}_{B2}; t_0, t)_n = \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(x_*, t_0) W_1(x_* - \bar{x}_{B2}; t_0, t)_n dx_*. \tag{38}$$

2. Случайные величины $x_*(t_0)$ и $\bar{x}_{B1}(t_0, t)$ зависимы.

Это имеет место при $t - t_0 \leq t_{\text{эф.м}}$. Используя соотношение (П3.6) (см. Приложение 3) для совместной ПРВ случайных величин $x_*(t_0)$ и $x_{B1}(t_0, t)$, в соответствии с общим правилом функционального преобразования случайных величин для искомой одномерной ПРВ разности (34) получим

$$\begin{aligned} W_1(\bar{x}_{B2}; t_0, t)_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x_*, x_* - \bar{x}_{B2}; t_0, t)_n dx_* = \\ &= 2 \left| \prod_{k=1}^n *_h_{pk} \right|^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w_{n+1} \left(2x_*, \frac{\hat{x}_1}{*_h_{p1}}, \frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{*_h_{p2}}, \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots, \frac{x_* - \bar{x}_{B2} - \hat{x}_{n-1}}{*_h_{pn}}; t_0, \dots, t_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1} \right] dx_*, \end{aligned} \tag{39}$$

где $*h_{pk} = h_p(t_0, t - \tau_k) \Delta\tau_k$.

В (39) функция $w_{n+1}(\dots)$ есть полученная в Приложении 3 (выражение (П3.5)) многомерная плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы.

Применительно к выражениям (38) и (39) целесообразно иметь в виду следующее.

1. Пусть $t - t_0 \leq t_{\text{эф.м}}$. В этом случае плотности распределения вероятности (38) и (39) зависят от переменных \bar{x}_{B2}, t_0 и t . Для линейных систем с постоянными параметрами зависимость от t_0 исчезает.

2. Пусть $t - t_0 > t_{\text{эф.м}}$. В этом случае, как показано в Приложении 1, интервал интегрирования в (33) может быть уменьшен (во многих случаях весьма значительно) до величины $t_{\text{эф.м}}$:

$$x_{B2}(t_0, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \xi_0 - \int_{t_0}^t \xi(\tau) h(t_0, t - \tau) d\tau & \text{при } t - t_0 \leq t_{\text{эф.м}}, \\ \frac{1}{2} \xi_0 - \int_{t-t_{\text{эф.м}}}^t \xi(\tau) h(t - t_{\text{эф.м}}, t - \tau) d\tau & \text{при } t - t_0 > t_{\text{эф.м}}. \end{cases}$$

Совместная ПРВ собственного и вынужденного движений линейной системы. Для рассматриваемого подкласса линейных систем совместная ПРВ собственного $x_{c2}(t_0, t)$ и вынужденного $x_{в2}(t_0, t)$ движений в момент времени t равна, как видно из (32) и (39), произведению соответствующих одномерных плотностей распределения вероятности [1]:

$$\begin{aligned} W_2^*(x_{c2}, \bar{x}_{в2}; t_0, t)_n &= W_1(\bar{x}_{в2}; t_0, t)_n \cdot \delta\{x_{c2} - a_1(t_0) \cdot x[\delta(t - t_0) - h_p(t_0, t)]\}, \\ W_2^*(x_{c2}, \hat{x}_{в2}; t_0, t)_n &= W_1(\hat{x}_{в2}; t_0, t)_n \cdot \delta\{x_{c2} - a_1(t_0) \cdot x[\delta(t - t_0) - h_p(t_0, t)]\}, \\ W_2^*(x_{c2}, x_{в2}; t_0, t) &= W_1(x_{в2}; t_0, t) \cdot \delta\{x_{c2} - a_1(t_0) \cdot x[\delta(t - t_0) - h_p(t_0, t)]\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Одномерная ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы. Согласно (30), (39) и (40) одномерная ПРВ оценки $\bar{x}_2(t_0, t)$ случайного процесса $x_2(t_0, t)$ запишется в форме

$$\begin{aligned} W_1^*(\bar{x}_2; t_0, t)_n &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(\bar{x}_2 - x_{c2}; t_0, t)_n \cdot \delta\{x_{c2} - a_1(t_0) \cdot x[\delta(t - t_0) - h_p(t_0, t)]\} dx_{c2} = \\ &= W_1\{\bar{x}_2 - a_1(t_0) \cdot x[\delta(t - t_0) - h_p(t_0, t)]; t_0, t\}_n. \end{aligned}$$

Аналогично, для одномерной ПРВ случайного процесса $x_2(t_0, t)$ и его оценки $\hat{x}_2(t_0, t)$ имеем

$$\begin{aligned} W_1^*(\hat{x}_2; t_0, t)_n &= W_1\{\hat{x}_2 - a_1(t_0) \cdot x[\delta(t - t_0) - h_p(t_0, t)]; t_0, t\}_n, \\ W_1^*(x_2; t_0, t) &= W_1\{x_2 - a_1(t_0) \cdot x[\delta(t - t_0) - h_p(t_0, t)]; t_0, t\}. \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненные исследования показывают, что:

1) введение и использование вероятностных характеристик линейных систем с детерминированными параметрами является весьма продуктивным, поскольку даёт возможность, используя вероятностные характеристики случайного процесса на входе линейной системы и самой линейной системы, непосредственно (прямо) найти одномерную и многомерную (произвольной размерности n) плотности распределения вероятности как собственного и вынужденного движения линейной системы в отдельности, так и одномерную и многомерную плотности распределения вероятности их суммы, т. е. случайного процесса на выходе линейной системы в целом; рассмотренный метод статистического анализа линейных систем можно назвать "прямым" методом;

2) метод прямого статистического анализа линейных систем не накладывает каких-либо ограничений на виды случайных процессов, действующих на входах линейных систем;

3) метод достаточно прост и нагляден, т. к. хорошо просматривается зависимость плотностей распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы от вероятностных характеристик входного случайного процесса и самой линейной системы;

4) ожидаемые вычислительные трудности, связанные с необходимостью вычислять многомерные интегралы, могут быть в ближайшее время в значительной мере ослаблены в связи с постоянным совершенствованием средств вычислительной техники, которые в настоящее время уже достигли весьма высокого уровня производительности.

Результаты работы доложены на Шестой всероссийской научно-технической конференции "Радиопрём и обработка сигналов", г. Нижний Новгород, сентябрь 1993 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Из (6), (23) и (24) видно, что при $t - t_0 > t_{\text{эф.м}}$ и заданной размерности плотности распределения вероятности случайного процесса $\xi(t)$ на входе линейной системы необходимо (по сравнению со случаем $t - t_0 < t_{\text{эф.м}}$) либо увеличивать длительности $\Delta\tau_i$ подынтервалов, на которые разбивается интервал интегрирования при переходе к интегральным суммам (9) и (10), что ведёт к снижению точности отыскания $W_1(\hat{x}_B; t_0, t)$, либо увеличивать размерность ПРВ $w_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n; t_0, t_1, \dots, t_n)$ процесса $\xi(t)$ пропорционально возросшему числу подынтервалов разбиения. В последнем случае входящая в (23) и (24) подынтегральная ПРВ может быть записана в форме

$$\begin{aligned}
 & W_{n+m}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m-1}, \bar{x}_B - x_1 - \dots - x_{n+m-1}; t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m-1}, t_{n+m}) = \\
 & = w_{n+m} \left(\frac{x_1}{*h_1}, \dots, \frac{x_n}{*h_n}, \frac{x_{n+1}}{*h_{n+1}}, \dots, \frac{x_{n+m-1}}{*h_{n+m-1}}, \frac{\bar{x}_B - x_1 - \dots - x_{n+m-1}}{*h_{n+m}}; t_1, \dots, \right. \\
 & \quad \left. \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m-1}, t_{n+m} \right) \left| \frac{1}{*h_1 \cdot *h_2 \cdot \dots \cdot *h_n \cdot *h_{n+1} \cdot \dots \cdot *h_{n+m}} \right|. \quad (\text{П1.1})
 \end{aligned}$$

Однако нетрудно видеть, что при $t - t_0 > t_{\text{эф.м}}$ вследствие исчезающе малых значений $*h_1, *h_2, \dots, *h_m$, соответствующих моментам времени t_1, t_2, \dots, t_m (для определённости полагаем, что интервал $t - t_0 = t_{\text{эф.м}}$ разбивается на n подынтервалов), m компонентом плотности распределения вероятности (П1.1), в которые входят эти значения $*h_k$, обращаются в дельта-функции, т. е. (П1.1) принимает вид

$$\begin{aligned}
 &W_{n+m}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m-1}, \bar{x}_B - x_1 - \dots - x_{n+m-1}; t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m-1}, t_{n+m}) = \\
 &= \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdots \delta(x_m) \cdot w_n \left(\frac{x_{m+1}}{*h_{m+1}}, \frac{x_{m+2}}{*h_{m+2}}, \dots, \frac{\bar{x}_B - x_1 - \dots - x_{n+m-1}}{*h_{m+n}}; t_{m+1}, t_{m+2}, \dots \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. \dots, t_{m+n} \right) \left| \frac{1}{*h_{m+1} \cdot *h_{m+2} \cdots *h_{m+n}} \right|. \quad (П1.2)
 \end{aligned}$$

Интегрирование в (П1.2) в соответствии с (23) по переменным x_1, x_2, \dots, x_m с учётом фильтрующего свойства дельта-функции приводит (с заменой индексов в конечном выражении) точно к выражению (23) для произвольного m , что и доказывает возможность уменьшения интервала интегрирования в (23) и (24) до $t_{эф.м}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Случайные величины $x_*(t_0)$ и $\bar{x}_{B1}(t_0, t)$ независимы, когда выполняется условие

$$t - t_0 > t_{эф.м} \approx \tau_h, \quad (П2.1)$$

где

$$\tau_h \equiv \frac{1}{\Psi_h(t_0, 0)} \int_0^\infty \Psi_h^2(t_0, \tau) d\tau \quad -$$

время корреляции, а $\Psi_h(t_0, \tau)$ — функция корреляции первого рода линейной системы [4, 13].

Для линейных систем более сложного типа правая часть условия (П2.1) будет заведомо выполняться: случая $t_{эф.м} \ll \tau_h$ не существует [4].

В соответствии с общим правилом функционального преобразования переменных одномерная ПРВ случайной величины $x_*(t_0)$, входящей в (33)–(35), т. е. в $W_1(x_*; t_0)$, равна $2w_1(2x_*; t_0)$, где $w_1(\xi_0; t_0)$ определяется из заданной $w_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n; t_0, t_1, \dots, t_n)$ по условию согласованности.

Совместная ПРВ случайных величин $x_*(t_0)$ и $\bar{x}_{B1}(t_0, t)$ равна при этом произведению одномерных ПРВ:

$$W_2(x_*, x_{B1}; t_0, t)_n = W_1(x_*; t_0) \cdot W_1(\bar{x}_{B1}; t_0, t). \quad (П2.2)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Совместная ПРВ зависимых случайных величин $x_*(t_0)$ и $x_{B1}(t_0, t)$. Выполним следующее функциональное преобразование переменных $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n$, входящих в $W_{2n+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n; t_0, t)$ в (37):

$$\begin{aligned}
 &x_* = \xi_0/2, \\
 &\xi_1 = \xi_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\xi_n = \xi_n, \\
 &\hat{x}_1 = x_1, \\
 &\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + x_2 = x_1 + x_2, \\
 &\hat{x}_3 = \hat{x}_2 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3, \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\hat{x}_n = \hat{x}_{n-1} + x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n.
 \end{aligned} \quad (П3.1)$$

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 2x_*, \\ \xi_1 &= \xi_1, \\ &\dots\dots \\ \xi_n &= \xi_n, \\ x_1 &= \hat{x}_1, \\ x_2 &= \hat{x}_2 - \hat{x}_1, \\ &\dots\dots \\ x_n &= \hat{x}_n - \hat{x}_{n-1} = \hat{x}_n - x_1 - \dots - x_{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.2})$$

Якобиан преобразования от переменных $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n$ к переменным $x_*, \xi_1, \dots, \xi_n, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ имеет вид

$$D_n = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n)}{\partial(x_*, \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n)} = 2. \quad (\text{ПЗ.3})$$

С учётом (37) и (ПЗ.1)–(ПЗ.3) совместная ПРВ случайных величин $x_*, \xi_1, \dots, \xi_n, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ имеет вид

$$\begin{aligned} W_{2n+1}(x_*, \xi_1, \dots, \xi_n, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n; t_0, t_1, \dots, t_n) &= \\ = 2w_{n+1}(2x_*, \xi_1, \dots, \xi_n; t_0, t_1, \dots, t_n) \prod_{k=1}^n \delta[(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) - \xi_k \cdot {}_k h_{pk}], \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.4})$$

где $\hat{x}_0 = 0$.

Интегрирование (ПЗ.4) по переменным ξ_1, \dots, ξ_n даёт

$$\begin{aligned} W_{n+1}(x_*, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n; t_0, t_1, \dots, t_n) &= \\ = 2w_{n+1} \left(2x_*, \frac{\hat{x}_1}{{}_1 h_{p1}}, \frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{{}_2 h_{p2}}, \dots, \frac{\hat{x}_n - \hat{x}_{n-1}}{{}_n h_{pn}}; t_0, t_1, \dots, t_n \right) \left| \frac{1}{{}_1 h_{p1} \cdot {}_2 h_{p2} \cdot \dots \cdot {}_n h_{pn}} \right|. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.5})$$

Из (37) и (ПЗ.1)–(ПЗ.5) видно, что (ПЗ.5) представляет собой многомерную (произвольной размерности) плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы и выражается через многомерную плотность распределения вероятности входного случайного процесса и соответствующие выборочные значения импульсной характеристики линейной системы.

Выполняя в (ПЗ.5) замену $x_n = x_{B1}$, согласно (ПЗ.1) и (34), и интегрируя (ПЗ.5) по переменным x_1, \dots, x_{n-1} , получим окончательное выражение для искомой совместной ПРВ случайных величин x_* и x_{B1} :

$$\begin{aligned} W_2(x_*, \bar{x}_{B1}; t_0, t) &= 2 \left(\prod_{k=1}^n {}_k h_{pk} \right)^{-1} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w_{n+1} \left(2x_*, \frac{\hat{x}_1}{{}_1 h_{p1}}, \frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{{}_2 h_{p2}}, \dots, \frac{\bar{x}_{B1} - \hat{x}_{n-1}}{{}_n h_{pn}}; t_0, t_1, \dots, t_n \right) d\hat{x}_1 \dots d\hat{x}_{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.6})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1969. Т. 1. С. 752.
2. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982. С. 680.

3. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. // ДАН. 1954. Т. 94. № 4. С. 615.
4. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978. С. 376.
5. Чабдаров Ш. М., Трофимов А. Т. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. № 4. С. 734.
6. Meyer M. A., Middleton D. // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 8. P. 1037.
7. Солодов В. А. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. — М.: ФМ, 1962. С. 324.
8. Амиантов И. Н. Избранные вопросы статистической теории связи. — М.: Сов. радио, 1971. С. 416.
9. Есипенко В. И., Шуко О. Б. Одномерная плотность распределения вероятности суммы случайных величин. // Препринт № 345. — Нижний Новгород: НИРФИ, 1992. С. 14.
10. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними. — М.: ФМ, 1959. С. 470.
11. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: ИЛ, 1948. С. 632.
12. Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщённых функций. — М.: ИЛ, 1959. С. 78.
13. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968. С. 660.

Научно—исследовательский
радиофизический институт,
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
15 мая 1998 г.

PROBABILITY DENSITY OF A STOCHASTIC PROCESS AT THE OUTPUT OF A LINEAR SYSTEM

V.I.Esipenko

We propose and study a method of direct statistical analysis for linear first-order systems with deterministic parameters. We derive one- and multi-dimensional (of arbitrary dimension n) probability density of a stochastic process at the output of the linear system.