# МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

# РАДИОФИЗИКА

#### ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Нижний Новгород

1999

Том XLII Nº 11

Содержание
Сербер А.В. Циклотронное рассеяние с конверсией мод в разреженной плазме на вырожденных звёздах. І. Радиационная релаксация в однородной плазме
Геликонов В.М., Зайцев Ю.И., Кутырёв Д.В., Малыкин Г.Б., Милов- ский Н.Д. Поляризационные эффекты при взаимодействии встречных волн в изотропных резонансных средах. 1. Теория
Свеженцев А.Е. Анализ желобковых волноводов с диэлектрическим заполнением жёлоба
Бузов А.Л. Пространственно-энергетические характеристики кольцевой антенной решётки с радиальными рефлекторами при модовых возбуждениях
Глявин М. Ю., Запевалов В. Е., Кулыгин М. Л. Влияние отражения СВЧ сиг- нала на эффективность генерации гиротронов с перестройкой частоты
Горшкова М.А., Нечаев В.Е. Насыщение одностороннего мультипактора в тор- мозящем электростатическом поле
Браже Р.А., Мефтахутдинов Р.М., Новикова Т.А. Электрогидродинамиче- ские неустойчивости в <i>n-n<sup>+</sup>-</i> и <i>p-p<sup>+</sup>-</i> переходах с продольным током дрейфа1105
Бурдов В.А. Электронная резонансная динамика в двойной квантовой яме
Комментарий к статье О.Э.Гулина и И.О.Ярощука "Флуктуации импульсов, рассе- янных слоем случайно-неоднородной среды" (Известия ВУЗов. Радиофизика. 1999. Т. 42, №. 4, С. 383-393)

хдл 524.31.084-64+533.9.01

## ЦИКЛОТРОННОЕ РАССЕЯНИЕ С КОНВЕРСИЕЙ МОД В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ НА ВЫРОЖДЕННЫХ ЗВЁЗДАХ. І. РАДИАЦИОННАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

# А. В. Сербер

Записаны балансные уравнения для населённостей уровней Ландау в разреженной нерелятивистской плазме при произвольной поляризации циклотронных мод. Исследована самосогласованная эволюция поперечного распределения электронов и излучения с изотропным угловым спектром вблизи первой гармоники гирочастоты, взаимодействующих посредством циклотронных процессов. В приближении заданной интенсивности излучения определён спектр времён релаксации системы. Показано, что время циклотронной релаксации под действием излучения на первой гармонике с широким частотным и угловым спектром определяется исключительно спонтанными процессами и не зависит от интенсивности излучения. Рассчитаны излучательная способность и коэффициент поглощения циклотронного излучения с учетом конверсии мод на первой гармонике.

## введение

Хорошо известно, что в сильных магнитных полях белых карликов ( $10^6 - 10^9 \, \text{Fc}$ ) и нейтронных звёзд ( $10^{10} \div 10^{12} \, \text{Fc}$ ) плазма приобретает специфические свойства, радикально меняющие характер её взаимодействия с излучением.

Во-первых, время циклотронного высвечивания поперечной энергии электронов t | (см., например, [1, 2]) оказывается много меньше других характерных времён в системе и, прежде всего, времени между столкновениями  $t_{\rm st} = \nu_{\rm eff}^{-1}$  [3, 4]. В такой "бесстолкновительной" плазме функция распределения электронов по поперечным энергиям формируется циклотронным излучением на первой гармонике электронной гирочастоты  $\omega_B = eB/mc$ . <sup>1</sup> Стационарное распределение при различных  $\varepsilon = t_{\perp}/t_{\rm st}$  получено в работах [1, 5, 6] элементарным квантовым методом путем решения уравнений баланса населённостей уровней Ландау. В пренебрежении столкновениями поперечное распределение электронов оказывается больцмановским с температурой, равной локальной эффективной температуре излучения на первой гармонике. В "столкновительной" плазме (ε≫1) поперечная температура равна продольной, а в промежуточном случае  $\varepsilon \sim 1$  распределение электронов по уровням Ландау является нетепловым.  $^2$ С точки зрения переноса излучения условие  $\varepsilon \ll 1$  означает, что поглощённые плазмой фотоны в основном спонтанно или индуцированно переизлучаются (вообще говоря, в другом направлении и на другой частоте), и лишь малая их доля (порядка  $\varepsilon$ ) теряется за счёт столкновений, отдавая свою энергию в тепловое движение электронов вдоль магнитного поля. Иными словами, процесс переноса излучения на частотах  $\omega \simeq \omega_B$  в этом случае можно трактовать как резонансное рассеяние на первой гармонике. Отметим важное свойство циклотронного рассеяния [7]: в пренебрежении эффектом отдачи и естественным уширением линии частота излучения  $\omega$  и угол  $\alpha$  между волновым вектором и магнитным

А.В.Сербер

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>В циклотронном пределе отношение полной вероятности  $A_s$  спонтанного перехода с уровня *s* на уровень 0 к соответстующей вероятности  $A_1$  перехода с первого уровня на уровень 0 много меньше единицы:  $A_s/A_1 \sim (\hbar \omega_B/mc^2)^{s-1} \ll 1$ . Это позволяет в первом приближении не учитывать влияние высших гармоник на формирование электронного распределения.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Отметим, что условие  $\varepsilon \gg 1$  характерно, например, для плазмы солнечной короны, где под действием столкновений устанавливается локально равновесное распределение электронов с температурой, не зависящей от излучения, и, таким образом, реализуется случай локального термодинамического равновесия.

полем всё время связаны доплеровским соотношением

$$p_{\parallel} = mc \frac{\omega - \omega_B}{\omega_B \cos \alpha} \tag{1}$$

с одним и тем же продольным импульсом  $p_{\parallel}$  рассеивающих частиц. Таким образом, циклотронное рассеяние является "монохроматическим": излучение, соответствующее некоторому  $p_{\parallel}$ , переносится независимо от излучения, соответствующего другим значениям  $p_{\parallel}$ . Ясно поэтому, что  $p_{\parallel}$  или его безразмерный аналог  $\xi = p_{\parallel}/\sqrt{2}mc\beta_{T_{\parallel}}$ , где  $\beta_{T_{\parallel}} = (\kappa T_{\parallel}/mc^2)^{1/2}$ ,  $\kappa$  — постоянная Больцмана и  $T_{\parallel}$  — продольная температура электронов, являются весьма удобными частотными переменными.

Во-вторых, сильное магнитное поле может изменить свойства электрон-позитронного вакуума вблизи вырожденной звезды, вызывая его поляризацию и намагниченность [8]. Дисперсионные характеристики, поляризяция и циклотронное поглощение мод в классической равновесной плазме с учетом влияния намагниченного вакуума рассчитаны в статье [9], а в [10] учтены квантовые эффекты и анизотропия температур.

В плазме на нейтронных звёздах обычно хорошо выполняются условия

$$\frac{\omega_{\rm p}^2}{\beta_{T_{\parallel}}\omega_B^2} \ll \frac{1}{45\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{B}{B_{\rm cr}}\right)^2 \ll 1,\tag{2}$$

где  $\omega_{\rm p}^2 = 4\pi e^2 N/m$  — квадрат плазменнаой частоты электронов с концентрацией N и  $B_{\rm cr} = 4.4 \cdot 10^{13}$  Гс — критическое поле, для которого  $\hbar\omega_B = mc^2$ . Согласно первому из этих условий, которое можно представить в виде

$$(N/10^{20} \,\mathrm{cm}^{-3}) \ll 3.4 \,(B/10^{12} \,\mathrm{\Gamma c})^4 (T_{\parallel}/10^8 \,\mathrm{K})^{1/2},\tag{3}$$

на частотах вблизи  $\omega_B$  отличия тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости от единицы, обусловленные влиянием плазмы, существенно меньше отличий, связанных с вакуумными эффектами. В этом случае дисперсионные свойства и поляризация нормальных волн определяются намагниченным вакуумом. В анизотропной среде, каковой является разреженная плазма в намагниченном вакууме, могут распространяться две электромагнитные моды, необыкновенная, которую мы в дальнейшем будем обозначать индексом l = 1, и обыкновенная (l = 2). Обе нормальных волны поляризованы линейно, причём вектор электрического поля необыкновенной компоненты лежит в плоскости, образованной волновым вектором  $\vec{k}$  и вектором магнитного поля  $\vec{B}$ , тогда как для обыкновенной волны этот вектор перпендикулярен  $\vec{k}$  и  $\vec{B}$ . Второе из неравенств (2) позволяет в дальнейшем не учитывать отличие показателей преломления мод от единицы. Наличие весьма разреженной плазмы с параметрами, удовлетворяющими (3), оказывает пренебрежимо малое влияние на показатели преломления и поляризацию мод и приводит лишь к поглощению излучения на циклотронных частотах. \* Коэффициенты поглощения и вероятности спонтанного излучения на первой гармонике вдоль поля одинаковы, но имеют различную угловую зависимость [9–11]. При этом следует ожидать, что в рассеивающей плазме будет происходить эффективная конверсия волн одного типа в другой при каждом акте рассеяния.

С другой стороны, для плазмы на белых карликах характерны условия

$$\frac{1}{45\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{B}{B_{\rm cr}}\right)^2 \ll \frac{\omega_{\rm p}^2}{\beta_{T_{\parallel}} \omega_B^2} \ll 1,\tag{4}$$

согласно которым влиянием вакуумных эффектов на перенос циклотронного излучения можно пренебречь. Квазипоперечные нормальные волны с показателями преломления, близкими к единице, в

<sup>\*</sup>Поглощение в намагниченном вакууме на частотах ниже порога рождения электрон-позитронных пар, когда  $\hbar\omega \ll mc^2$ , отсутствует.

данном случае поляризованы эллиптически. Форма эллипсов поляризации мод совпадает с проекцией ларморовского кружка электрона на плоскость, ортогональную волновому вектору  $\vec{k}$ , причем вектор электрического поля волны 1 вращается в ту же сторону, что и электрон в магнитном поле, а в волне 2 — в противоположном направлении. Такая поляризация мод приводит к резкому различию их коэффициентов поглощения (соответствующее отношение порядка  $\beta_T^2 \ll 1$ ), так что обыкновенное излучение взаимодействует с плазмой весьма слабо. Тем не менее, и в этом случае конверсия мод при циклотронном рассеянии становится существенной в плазме достаточно большой оптической толщины.

Данная статья и следующие за ней [12,13] посвящены исследованию конверсии мод при циклотронном рассеянии в разреженной плазме. Ранее этот процесс учитывался в задаче о формировании циклотронных линий в спектре космических гамма-всплесков [11]. Теперь исследование будет проведено для широкого диапазона параметров, включая случаи (2) и (4). В данной статье обсуждается радиационная релаксация в системе, состоящей из электронов разреженной плазмы и излучения на частотах вблизи  $\omega_B$ , взаимодействующих посредством спонтанных и индуцированных переходов между уровнями Ландау. Анализ этой задачи позволяет определить времена циклотронной релаксации и адекватно выбрать модель для описания переноса циклотронного излучения на вырожденных звёздах. Перенос циклотронного излучения с учётом конверсии мод в квазиоднородном магнитном поле рассмотрен во второй статье [12], а случай сильнонеоднородного магнитного поля — в третьей [13].

Следует подчеркнуть, что обсуждаемый ниже процесс конверсии отличается от хорошо известной линейной трансформации волн в плавнонеоднородной плазме [4]. В последнем случае обмен энергией между модами обусловлен нарушением геометро-оптического приближения в тех частях среды, где характерный масштаб изменения поляризации нормальных волн сравним с длиной волны биений между модами, и в целом связан с действительной частью показателей преломления  $n_{1,2}$ . Напротив, интересующий нас эффект обусловлен отличием мнимых частей показателей преломления мод (или их коэффициентов поглощения  $\chi_{1,2}$ ). Он может проявляться в условиях, когда линейная трансформация отсутствует, и представляет собой испускание одной нормальной волны электроном, осциллирующим в поле другой.

## 1. ДИНАМИКА НАСЕЛЁННОСТЕЙ УРОВНЕЙ ЛАНДАУ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

Поскольку плазма на магнитных вырожденных звёздах может быть квантованной по поперечным импульсам ( $\kappa T \leq \hbar \omega_B$ ), для анализа её взаимодействия с некогерентным излучением естественного происхождения, имеющим широкий угловой и частотный спектр, воспользуемся системой квазилинейных уравнений, которая может быть получена элементарным квантовым методом [14]. Интересуясь результатами, которые применимы при произвольном отношении  $\hbar \omega_B / \kappa T$ , будем считать функцию распределения электронов в магнитном поле  $N(j, p_{\parallel})$  зависящей только от продольного импульса  $p_{\parallel}$  и номера уровня Ландау j, причём

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_{\parallel} \sum_{j=0}^{\infty} N(j, p_{\parallel}) = N.$$
(5)

Для описания параметров излучения в данной работе используются уравнения для спектральных интенсивностей нормальных волн  $I_{\omega l}(\omega, \vec{n})$  или числа фотонов в единице объёма в  $\vec{k}$ -пространстве

$$\aleph_{\vec{k}\,l}(\omega,\vec{n}) \equiv (8\pi^3 c^2/\hbar\omega^3) I_{\omega l}(\omega,\vec{n}),\tag{6}$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор вдоль луча. Согласно [15] описание излучения в терминах спектральных интенсивностей нормальных волн возможно при условии  $\omega(n_1 - n_2)/c \gg (\chi_1 + \chi_2)/2$ , которое обычно выполнено в излучающих областях вырожденных звёзд.

Как известно [1, 14], в рамках метода коэффициентов Эйнштейна излучательная способность и коэффициент поглощения циклотронного излучения определяются следующими формулами:

$$\eta_{sl}(\omega, \vec{n}) = \hbar \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_{\parallel} \sum_{j=s}^{\infty} A_j^{j-s}(l) N(j, p_{\parallel}), \tag{7}$$

$$\chi_{sl}(\omega, \vec{n}) = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_{\parallel} \sum_{j=s}^{\infty} A_j^{j-s}(l) \left( N(j-s, p_{\parallel}) - N(j, p_{\parallel}) \right), \tag{8}$$

где  $A_j^{j-s}(l)$  — отнесённая к единичному интервалу частот и единичному телесному углу вероятность спонтанного циклотронного перехода электрона с уровня j на уровень j - s с излучением фотона типа l. Для нерелятивистской плазмы в магнитном поле  $B \ll B_{\rm cr}$ , без учета влияния эффекта отдачи при циклотронных переходах, релятивистского сдвига гирочастоты и естественной ширины циклотронной линии указанная вероятность имеет следующий вид [10]:

$$A_{j}^{j-s}(l) = \frac{e^{2}\omega\omega_{B}}{4\pi mc^{3}} \frac{j!}{(j-s)!} \frac{b_{sl}(\alpha)}{[(s-1)!]^{2}} \left(\frac{\hbar\omega^{2}\sin^{2}\alpha}{2\omega_{B}mc^{2}}\right)^{s-1} \delta\left[\omega\left(1-\frac{p_{\parallel}\cos\alpha}{mc}\right)-s\omega_{B}\right] = \frac{j!A_{s}^{0}(l)}{s!(j-s)!}$$

Факторы  $b_{sl}(\alpha)$  в этой формуле характеризуют поляризацию нормальных волн. В условиях, когда выполнен критерий (2) и структура мод определяется намагниченным вакуумом,

$$b_{s1} = \cos^2 \alpha, \qquad b_{s2} = 1$$

(см. [9,16]). Если же выполнены неравенства (4) и определяющее влияние на поляризацию нормальных волн оказывает разреженная плазма, эти функции имеют более громоздкий вид [4,9]:

$$b_{11} = 1 + \cos^2 \alpha, \qquad b_{12} = \frac{2\beta_{T_{\parallel}}}{\pi |W(\xi)|^2} \frac{\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha (3 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{(1 + \cos^2 \alpha)^3},$$
  

$$b_{sl}|_{s \ge 2} = \frac{(1 + K_{sl} \cos \alpha)^2}{1 + K_{sl}^2}, \qquad K_{sl} = \frac{2s \cos \alpha}{s^2 \sin^2 \alpha \pm \sqrt{s^4 \sin^4 \alpha + 4s^2 \cos^2 \alpha}}.$$
(9)

Здесь верхний знак в последней формуле относится к необыкновенной (l=1), нижний — к обыкновенной волне (l=2),

$$W(\xi) = \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \right) e^{-\xi^2}$$

— функция Крампа, *і* — мнимая единица.

Продольное распределение электронов, вообще говоря, устанавливается самосогласованным образом за счёт межчастичных соударений и радиационных переходов, приводящих к обмену продольным импульсом между плазмой и излучением. В данной работе этот процесс не рассматривается, а распределение электронов по продольным импульсам считается заданным — максвелловским с фиксированной температурой  $T_{\parallel}$ , определяемой процессами продольного ускорения и нагрева. Отметим, что данное приближение соответствует пренебрежению влиянием отдачи при циклотронных переходах. В этом случае в (7), (8) можно выполнить интегрирование по  $p_{\parallel}$ . Переходя затем к переменной  $\xi$ , получаем следующий результат (ср. [6]):

$$\eta_{sl} = \frac{\hbar \omega_B^3 s^3}{8\pi^3 c^2} F_{sl} \sum_{j=s}^{\infty} \frac{j! N_j}{s! (j-s)!}, \qquad \chi_{sl} = F_{sl} \sum_{j=s}^{\infty} \frac{j! (N_{j-s} - N_j)}{s! (j-s)!}.$$

А.В.Сербер

Здесь

$$N_j \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} N(j, p_{\parallel}) \,\mathrm{d}p_{\parallel}$$

— населённость *j*-того уровня Ландау,

$$F_{sl} \equiv \frac{\sqrt{2\pi^2 e^2}}{mc\beta_{T_{\parallel}}\omega_B} \frac{b_{sl}(\alpha)}{s!|\cos\alpha|} \left(\frac{\hbar\omega_B}{2mc^2}\right)^{s-1} \phi(\xi),\tag{10}$$

а функция

$$\phi(\xi) = \pi^{-1/2} e^{-\xi^2}$$

описывает нормированный на единицу доплеровский профиль циклотронной линии при подстановке (1), которая возникает при интегрировании  $\delta$ -функции в выражении для  $A_j^{j-s}(l)$  по переменной  $p_{\parallel}$ . Искомые коэффициенты переноса можно выразить через факториальные моменты

$$M_k \equiv \sum_{j=k}^{\infty} \frac{j!}{k!(j-k)!} N_j \tag{11}$$

последовательности N<sub>j</sub> следующим образом:

$$\eta_{sl} = \frac{\hbar \omega_B^3 s^3}{8\pi^3 c^2} F_{sl} M_s, \qquad \chi_{sl} = F_{sl} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{s!}{k!(s-k)!} M_k.$$

В практически важном частном случае s = 1 эти формулы дают

$$\eta_{1l} = \frac{\hbar \omega_B^3}{8\pi^3 c^2} F_{1l} M_1 = \frac{\omega_B^2}{8\pi^3 c^2} F_{1l} \mathcal{E},$$
(12)

$$\chi_{1l} = F_{1l}M_0 = F_{1l}N. (13)$$

Таким образом, коэффициент циклотронного поглощения на первой гармонике в нерелятивистской плазме в приближении эквидистантных уровней Ландау не зависит от распределения электронов по поперечным энергиям. Поэтому как в классической плазме [1, 17], так и в квантованной плазме [18] величина  $\chi_{1l}$  имеет один и тот же вид. Что касается излучательной способности  $\eta_{1l}$ , то она пропорциональна полной поперечной энергии электронов на уровнях Ландау

$$\mathcal{E} \equiv \hbar \omega_B \sum_{j=1}^{\infty} j N_j = \hbar \omega_B M_1.$$
(14)

Населённости уровней Ландау, как и продольное распределение электронов, также могут изменяться за счет ударных переходов при столкновениях и вследствие взаимодействия с излучением при поглощении и испускании фотонов на циклотронных частотах. Соответствующие уравнения баланса населённостей для электронов в разреженной плазме имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}t} = \int \int \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega \left\{ \sum_{s\geq 1} A_{j+s}^j(l) \left[ (1+\aleph_{\vec{k},l})N_{j+s} - \aleph_{\vec{k},l}N_j \right] - \sum_{s=1}^j A_j^{j-s}(l) \left[ (1+\aleph_{\vec{k},l})N_j - \aleph_{\vec{k},l}N_{j-s} \right] \right\} + \left( \frac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{st}}.$$
(15)

Интеграл по частотам  $\omega$  и телесным углам  $\Omega$  в правой части балансных уравнений описывает влияние радиационных циклотронных переходов. Первая сумма соответствует изменению населённости  $N_j$  вследствие переходов между уровнем j и уровнями j > s: населённость j-го уровня увеличивается при спонтанном или индуцированном испускании фотона s-й гармоники электроном на (j + s)-м уровне (переход  $j + s \rightarrow j$ ) и уменьшается при поглощении такого фотона электроном на j-м уровне (переход  $j \rightarrow j + s$ ). Соответственно, переходы  $j \rightarrow j - s$  и  $j - s \rightarrow j$  учитываются второй суммой. Последнее слагаемое в правой части описывает изменение населённости j-го уровня вследствие столкновений. Отметим, что в простейшем приближении времени релаксации это слагаемое имеет вид

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{st}} = -\nu_{\mathrm{eff}}(N_j - N_j^{(0)}),\tag{16}$$

где

$$N_{j}^{(0)} = N(1 - e^{-\hbar\omega_{B}/\kappa T_{\parallel}})e^{-j\hbar\omega_{B}/\kappa T_{\parallel}} \equiv \frac{N}{q_{0}+1} \left(\frac{q_{0}}{q_{0}+1}\right)^{j}$$
(17)

— населённости, соответствующие больцмановскому распределению с температурой  $T_{\parallel}$ . Эффективная частота  $\nu_{\rm eff}$  соответствует безызлучательной релаксации электронов по поперечным энергиям в отсутствие внешних электромагнитных волн. По своему смыслу она аналогична эффективной частоте столкновений в магнитоактивной плазме с анизотропией температур.<sup>†</sup>

В рассматриваемом нерелятивистском пределе переменные j и  $\vec{n}$  в функциях  $A_j^{j-s}(l)$  разделяются, так что можно проинтегрировать (15) как по частотам, так и по телесным углам и перейти к системе

$$\frac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}t} = \sum_{s\geq 1} \frac{(j+s)!}{s!j!} A_s \left[ (1+q_s)N_{j+s} - q_s N_j \right] - \sum_{s=1}^j \frac{j!}{s!(j-s)!} A_s \left[ (1+q_s)N_j - q_s N_{j-s} \right] - \nu_{\mathrm{eff}} \left( N_j - N_j^{(0)} \right).$$
(18)

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_{s} \equiv \int \int \left[ A_{s}^{0}(1) + A_{s}^{0}(2) \right] d\omega d\Omega \approx \frac{e^{2} \omega_{B}^{2}}{2mc^{3}} \frac{1}{s!} \left( \frac{s^{2} \hbar \omega_{B}}{2mc^{2}} \right)^{s-1} \int_{-1}^{1} [b_{s1}(\alpha) + b_{s2}(\alpha)] \sin^{2s-2} \alpha d\cos \alpha$$

- полная вероятность спонтанного циклотронного перехода с s-го уровня на нулевой,

$$q_s(\xi) \equiv \oint_{4\pi} \left[\aleph_{s1}(\xi, \vec{n}) \, \frac{\psi_{s1}(\alpha)}{1 + \varpi_s} + \aleph_{s2}(\xi, \vec{n}) \, \frac{\varpi_s \psi_{s2}(\alpha)}{1 + \varpi_s}\right] \mathrm{d}\Omega \equiv \frac{1}{1 + \varpi_s} q_{s1} + \frac{\varpi_s}{1 + \varpi_s} q_{s2} \tag{19}$$

- число фотонов в на *s*-й гармонике, усредненное по соответствующим диаграммам направленности

$$\psi_{sl}(\alpha) \equiv \frac{b_{sl}(\alpha) \sin^{2s-2} \alpha}{2\pi \int_{-1}^{1} b_{sl}(\alpha) \sin^{2s-2} \alpha \, \mathrm{d} \cos \alpha},$$

<sup>&</sup>lt;sup>†</sup>Подробное обсуждение кулоновских столкновений в условиях магнитных вырожденных звезд см. в работах [19,20].

$$\aleph_{sl}(\xi, \vec{n}) = \int \aleph_{sl}(\omega, \vec{n}) \delta[\omega - \sqrt{2}\beta_{T_{\parallel}}\xi \cos \alpha - s\omega_B] \,\mathrm{d}\omega,$$
а параметр
$$\varpi_s \equiv \frac{\int\limits_{-1}^{1} b_{s1}(\alpha) \sin^{2s-2}\alpha \,\mathrm{d}\cos \alpha}{\int\limits_{-1}^{1} b_{s2}(\alpha) \sin^{2s-2}\alpha \,\mathrm{d}\cos \alpha}$$

представляет собой отношение полных вероятностей спонтанного излучения фотона обыкновенной и необыкновенной мод на s-й гармонике при переходе  $s \rightarrow 0$ .

Дальнейший анализ системы (18) провёдем с помощью производящей функции [6,21,22]. По определению, степенной ряд

$$Z(\varsigma) = \sum_{j=0}^{\infty} N_j \varsigma^j \tag{20}$$

называется производящей функцией числовой последовательности  $N_j$ , если он сходится в некотором интервале  $|\varsigma| < \varsigma_0$ . Очевидные условия нормировки населённостей

$$M_0 \equiv \sum_{j=0}^{\infty} N_j = N \equiv Z(1)$$
(21)

и их неотрицательности

$$N_j \ge 0, \qquad M_j \ge 0$$

обеспечивают абсолютную сходимость ряда (20) в интервале  $-1 \le \varsigma \le 1$  действительной оси и, следовательно, в единичном круге  $|\varsigma| < 1$  на комплексной плоскости. Заметим далее, что на единичной окружности  $|\varsigma|=1$ , где  $\varsigma = e^{i\varphi}$ ,  $\varphi$  — полярный угол на комплексной плоскости, производящая функция представляет собой ряд Фурье

$$Z(|\varsigma|=1) = \sum_{j=0}^{\infty} N_j e^{ij\varphi}.$$
(22)

Так как  $|N_j e^{ij\varphi}| \leq N_j$ , а ряд  $\sum_{j=0}^{\infty} N_j$ , очевидно, сходится (см. (21)), то по признаку Вейерштрасса [23] ряд (22) сходится равномерно при любых  $\varphi$ . Тем самым доказана абсолютная и равномерная сходимость производящей функции (20) на единичном круге. Теперь отметим, что ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} jN_j\varsigma^{j-1} = Z'(\varsigma)$ , полученный формальным дифференцированием производящей функции, в области  $|\varsigma| \leq 1$  мажорируется неотрицательным числовым рядом  $\sum_{j=1}^{\infty} jN_j$ , который очевидно сходится, т.к. полная поперечная энергия любого физически реализуемого распределения электронов конечна:  $\mathcal{E} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} jN_j < \infty$ . Таким

образом, рассматриваемый ряд сходится равномерно, т.е. функция  $Z'(\varsigma)$  непрерывна.

Итак, мы показали, что производящая функция непрерывна, дифференцируема, её производная также непрерывна в любой точке единичного круга. Следовательно,  $Z(\varsigma)$  аналитична в круге  $|\varsigma| \le 1$ , а значит, в этой области существуют производные всех порядков от  $Z(\varsigma)$  (в точках  $|\varsigma| = 1$  — по крайней

мере, односторонние производные). Поэтому населённости  $N_j$  и факториальные моменты  $M_j$  можно найти дифференцированием функции  $Z(\varsigma)$ :

$$N_j = \frac{1}{j!} \left( \frac{\partial^j Z}{\partial \varsigma^j} \right)_{\varsigma=0},\tag{23}$$

$$M_j = \frac{1}{j!} \left( \frac{\partial^j Z}{\partial \varsigma^j} \right)_{\varsigma=1}.$$
 (24)

Соответственно, коэффициенты переноса выражаются через производящую функцию следующим образом:

$$\eta_{sl} = \frac{\hbar \omega_B^3 s^3}{8\pi^3 c^2} F_{sl} \frac{1}{s!} \left( \frac{\partial^s Z}{\partial \varsigma^s} \right)_{\varsigma=1}, \qquad \chi_{sl} = F_{sl} \frac{1}{s!} \left( \frac{\partial^s}{\partial \varsigma^s} \Big[ (\varsigma^s - 1) Z \Big] \right)_{\varsigma=1}.$$

Перейдём теперь от системы (18) к уравнению для производящей функции. Для этого умножим (18) на  $\varsigma^{j}$  и просуммируем по всем *j*. В результате бесконечная цепочка разностных уравнений для населённостей сводится к одному дифференциальному уравнению для производящей функции (ср. [6]):

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{s \ge 1} \frac{A_s}{s!} \left(\varsigma^s - 1\right) \frac{\partial^s}{\partial \varsigma^s} \left[ (q_s \varsigma^s - q_s - 1)Z \right] - \nu_{\text{eff}} \left( Z - Z_0 \right), \tag{25}$$

в котором

$$Z_0(\varsigma) \equiv \frac{N}{1 + q_0 - q_0\varsigma}$$

— производящая функция больцмановского распределения (17). При  $\varsigma = 1$  все члены в правой части уравнения (25) тождественно обращаются в нуль, так что  $(\partial Z/\partial t)_{\varsigma=1} \equiv dN/dt \equiv 0$ . Это и неудивительно — как радиационные, так и ударные переходы не меняют полного числа частиц на уровнях Ландау.

В циклотронном пределе  $A_s/A_1 \sim (\hbar \omega_B/mc^2)^{s-1} \ll 1$ . Кроме того, сами вероятности переходов между уровнями Ландау получены в пренебрежении членами того же порядка. Поэтому в дальнейшем, считая выполненными неравенства  $A_s(1+q_s) \ll A_1(1+q_1)$ , мы удержим в балансных уравнениях (18) и в уравнении для производящей функции (25) только слагаемые, соответствующие первой гармонике, поскольку радиационные переходы на этой гармонике происходят с большей вероятностью, чем на высших. <sup>†</sup> В результате эти уравнения примут вид

$$A_1^{-1} \frac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}t} = (j+1)[(1+q_1)N_{j+1} - q_1N_j] - j[(1+q_1)N_j - q_1N_{j-1}] - \varepsilon(N_j - N_j^{(0)})$$
(26)

$$A_1^{-1}\frac{\partial Z}{\partial t} = (\varsigma - 1)\frac{\partial}{\partial\varsigma} \left[ (q_1\varsigma - q_1 - 1)Z \right] - \varepsilon(Z - Z_0),$$
(27)

где

$$A_{1} = \frac{e^{2}\omega_{B}^{2}}{2mc^{3}} \int_{-1}^{1} [b_{11}(\alpha) + b_{12}(\alpha)] \,\mathrm{d}\cos\alpha = \frac{4e^{2}\omega_{B}^{2}}{3mc^{3}} \begin{cases} 1 + \frac{\beta_{T_{\parallel}}^{2}}{|W(\xi)|^{2}} \left(\frac{147}{16} - \frac{28}{\pi}\right) \\ 1 \end{cases}$$

<sup>&</sup>lt;sup>†</sup>Строго говоря, количественный критерий пренебрежения влиянием высших гармоник на функцию распределения электронов должен быть получен на основе анализа решения соответствующих балансных уравнений или уравнений для производящей функции. Такое исследование, выходящее за рамки данной работы, представляется весьма актуальным для нейтронных звёзд. Там отношение  $A_2/A_1 \sim 0,1$ , и влияние второй циклотронной гармоники на поперечное распределение электронов может быть довольно существенным. Оно приводит к нелинейным процессам распада и слияния квантов типа  $\hbar\omega_B + \hbar\omega_B \leftrightarrow 2\hbar\omega_B$ . Такого рода резонансное комбинационное рассеяние может оказать заметное влияние на циклотронные спектры нейтронных звёзд.

 полная вероятность спонтанного перехода между уровнями 1 и 0. Здесь и далее верхняя строчка после фигурной скобки соответствует случаю, когда поляризация мод определяется плазмой, нижняя
 случаю, когда поляризация мод определяется намагниченным вакуумом.

В реальных астрофизических объектах внешние условия могут меняться во времени. В этой связи возникает вопрос о возможности описания взаимодействия плазмы с циклотронным излучением в рамках стационарного аналога уравнений (26). Для взятых в отдельности ударных переходов, особенно в принятой простейшей модели, ответ на этот вопрос тривиален: столкновения успеют сформировать квазистационарное поперечное распределение электронов, если характерное время изменения внешних условий много больше  $\nu_{\rm eff}^{-1}$ . Что касается радиационных переходов, то ответ не столь очевиден, поскольку темп индуцированных процессов зависит от интенсивности излучения. Для того, чтобы определить характерное время радиационной релаксации, рассмотрим начальную задачу об эволюции населённостей уровней Ландау в однородной безграничной "бесстолкновительной" плазме ( $\varepsilon = \nu_{\rm eff}/A_1 \rightarrow 0$ ) под действием циклотронного излучения на первой гармонике. Соответствующие уравнения для населённостей и для производящей функции имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}\mathcal{T}} = (j+1)[(1+q_1)N_{j+1} - q_1N_j] - j[(1+q_1)N_j - q_1N_{j-1}],\tag{28}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = (\varsigma - 1) \frac{\partial}{\partial \varsigma} \Big[ (q_1 \varsigma - q_1 - 1) Z \Big].$$
(29)

Здесь введено безразмерное время  $\mathcal{T} \equiv A_1 t$ , а величина  $q_1$  в общем случае является функцией времени.

Умножая (28) на j и суммируя по всем j (либо просто дифференцируя (29) по  $\varsigma$  в точке  $\varsigma = 1$ ), мы приходим к уравнению

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}\mathcal{T}} = -\mathcal{E} + \mathcal{E}_1 \tag{30}$$

для полной энергии электронов на уровнях Ландау (14) или пропорционального ей первого факториального момента  $M_1 = \mathcal{E}/\hbar\omega_B$ . Это уравнение, в котором

$$\mathcal{E}_1 = \hbar \omega_B q_1 N,\tag{31}$$

легко интегрируется в квадратурах:

$$M_{1}(\mathcal{T}) = \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega_{B}} = M_{1}(0)e^{-\mathcal{T}} + NQ_{1}(\mathcal{T}),$$
$$Q_{1}(\mathcal{T}) = \int_{0}^{\mathcal{T}} q_{1}(\mathcal{T}')e^{-(\mathcal{T}-\mathcal{T}')} \,\mathrm{d}\mathcal{T}'.$$
(32)

Многократное дифференцирование (29) по  $\varsigma$  в точке  $\varsigma = 1$  приводит к уравнениям для высших моментов:

$$\frac{\mathrm{d}M_k}{\mathrm{d}\mathcal{T}} = -k(M_k - q_1 M_{k-1}). \tag{33}$$

Полученная система уравнений замкнута: поведение высших моментов определяется низшими, причём  $M_0 \equiv N$ . Поэтому последовательным интегрированием можно в принципе получить решения в квадратурах для произвольного  $M_k(\mathcal{T})$ , а затем найти населённости по формуле

$$N_j = \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^{j+k} \frac{k!}{j!(k-j)!} M_k,$$
(34)

которая следует из (11). Однако этот громоздкий путь вряд ли приведёт к замкнутому выражению, удобному для дальнейшего анализа.

Уравнения, по форме аналогичные (28) и (29), детально исследовались в теории релаксационных процессов в молекулярных газах [21, 22, 24–31], связанных, в частности, с установлением теплового равновесия между внутренними (колебательными) и внешними (трансляционными и вращательными) степенями свободы молекул. При этом чаще всего рассматривался случай  $q_1 = \text{const}$ , что соответствовало взаимодействию молекул с тепловым резервуаром неограниченной теплоемкости, температура которого поддерживается постоянной. В нашем случае это условие означает, что электроны взаимодействуют с циклотронным излучением произвольной заданной интенсивности. Такая ситуация реализуется, например, в оптически тонкой плазме. Отметим некоторые результаты, которые, пользуясь аналогией уравнений, можно перенести в теорию циклотронного излучения.

В случае  $q_1 = \text{const}$  равновесное состояние рассматриваемой системы  $dN_j/d\mathcal{T} = 0$ ,  $\partial Z/\partial \mathcal{T} = 0$  описывается производящей функцией

$$Z(\varsigma) = \frac{N}{1 + q_1 - q_1\varsigma},$$

а поперечное распределение электронов

$$N_{j} = \frac{N}{q_{1}+1} \left(\frac{q_{1}}{q_{1}+1}\right)^{j}$$
(35)

является больцмановским с температурой, которая, вообще говоря, отличается от продольной и равна яркостной температуре излучения на первой гармонике [4,5]

$$T_{\perp} = T_{\rm b1} = \frac{\hbar\omega_B}{\kappa\ln(1+q_1^{-1})}.$$
(36)

Полная поперечная энергия электронов с больцмановским распределением (35) описывается выражением (31).

Первый шаг к решению системы (28) был сделан в ранней работе [32], где было получено уравнение, аналогичное (30), для полной колебательной энергии молекул. В работе [26] было указано линейное преобразование

$$\mathcal{M}_{j} = \sum_{k=1}^{j} \frac{j!}{k!(j-k)!} (-q_{1})^{j-k} M_{k},$$

$$\mathcal{M}_{j}^{(0)} = -(-q_{1})^{j} N, \quad \mathcal{T}_{k} = k^{-1},$$
(37)

которое при  $q_1 = \text{const}$  приводит систему моментных уравнений (33) к нормальной форме

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}_j}{\mathrm{d}\mathcal{T}} = -\frac{\mathcal{M}_j - \mathcal{M}_j^{(0)}}{\mathcal{T}_k}.$$

В результате явным образом выделяется спектр времен релаксации "нормальных координат" и без труда находится их зависимость от времени:

$$\mathcal{M}_j(\mathcal{T}) - \mathcal{M}_j^{(0)} = [\mathcal{M}_j(0) - \mathcal{M}_j^{(0)}]e^{-k\mathcal{T}}.$$

Интересно отметить, что  $\mathcal{M}_1 = M_1$ , поэтому энергия (14), по существу, является одной из "нормальных координат". Ей соответствует наиболее длительное время релаксации  $t_1 = A_1^{-1}$ . Примечательно, что

скорость релаксации поперечной энергии электронов определяется только вероятностью спонтанных переходов  $A_1$  и не зависит ни от интенсивности излучения, ни от вида функции распределения.

Использование преобразования (37), вообще говоря, позволяет решить начальную задачу об эволюции населённостей  $N_j(t)$ . Однако практические расчеты требуют суммирования рядов и не всегда могут быть легко выполнены.

В подробном исследовании [22] решение начальной задачи об эволюции населённостей при  $q_1 =$  const получено с помощью производящей функции. Уравнение (29) легко решается методом характеристик. Решение, удовлетворяющее условию нормировки (21), имеет следующий вид:

$$Z(\varsigma, \mathcal{T}) = \frac{1}{1 + (1 - \varsigma)q_1(1 - e^{-\mathcal{T}})} Z\left(\frac{(1 - \varsigma)e^{-\mathcal{T}}}{1 + (1 - \varsigma)q_1(1 - e^{-\mathcal{T}})}, 0\right)$$
(38)

Подстановка этой функции в (23), (24) дает искомые населённости и моменты. В цитированной работе приведены полученные методом разделения переменных явные выражения, связывающие  $N_j(\mathcal{T})$  с начальными значениями  $N_j(0)$ .

Перейдём к анализу общего случая, когда вместе с поперечным распределением электронов самосогласованным образом меняется и интенсивность циклотронного излучения. В этом случае уравнения (28), (29) следует дополнить уравнениями, описывающими эволюцию обыкновенного и необыкновенного излучения на первой гармонике. С учетом формул (12), (13) эти уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\aleph_{1l}}{\partial t} = F_{1l}N\bigg(-\aleph_{1l}(\mathcal{T}) + \frac{\mathcal{E}(\mathcal{T})}{\hbar\omega_BN}\bigg).$$
(39)

В рассматриваемой системе существует первый интеграл. Чтобы его получить, учтем формулу (10) и преобразуем уравнения (39) к следующему виду:

$$\frac{\omega_B^2}{8\pi^3 c^2} \sqrt{2}\beta_{T_{\parallel}} \frac{\omega_B}{c} |\cos\alpha| \frac{\partial\aleph_{1l}}{\partial\mathcal{T}} = \frac{N\phi(\xi)b_{1l}(\alpha)}{2\pi \int_{-1}^{1} (b_{11} + b_{12}) \,\mathrm{d}\alpha} \left[-\aleph_{1l} + \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega_B N}\right]. \tag{40}$$

Здесь коэффициент перед производной в левой части представляет собой число мод циклотронного излучения в единице объема координатного пространства и в шаровом слое радиуса  $\omega_B/c$  и толщиной  $\sqrt{2}\beta_{T_{\parallel}}(\omega_B/c)|\cos\alpha|$  в пространстве волновых векторов. С этим излучением находятся в циклотронном резонансе электроны, продольный импульс которых равен  $p_{\parallel} = \sqrt{2mc\beta_{T_{\parallel}}\xi}$ . Число таких электронов в единице объема координатного пространства и в единичном интервале вблизи  $\xi$  равно  $N\phi(\xi)$ . Умножим (40) на  $\hbar\omega_B$ , проинтегрируем по телесным углам и сложим почленно уравнения для обыкновенной и необыкновенной волн:

$$\frac{\hbar\omega_B^3}{8\pi^3 c^2} \sqrt{2\beta_{T_{\parallel}}} \frac{\omega_B}{c} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathcal{T}} \oint_{4\pi} (\aleph_{11} + \aleph_{12}) |\cos\alpha| \,\mathrm{d}\Omega = \phi(\xi) [-\hbar\omega_B q_1 N + \mathcal{E}]. \tag{41}$$

Наконец, сложим полученное уравнение с уравнением для поперечной энергии (30), предварительно умножив последнее на  $\phi(\xi)$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathcal{T}} \left( \phi(\xi)\mathcal{E} + \frac{\hbar\omega_B^3}{8\pi^3 c^2} \sqrt{2\beta_{T_{\parallel}}} \frac{\omega_B}{c} \oint_{4\pi} (\aleph_{11} + \aleph_{12}) |\cos\alpha| \,\mathrm{d}\Omega \right) = 0.$$

Как и следовало ожидать, суммарная плотность энергии вещества и излучения, взаимодействующих посредством радиационных циклотронных процессов, в рассматриваемой консервативной системе сохраняется:

$$\phi(\xi)\mathcal{E}(t) + \sqrt{2}\beta_{T_{\parallel}}\omega_{B} \oint_{4\pi} \frac{I_{11}(\xi,\vec{n},t) + I_{12}(\xi,\vec{n},t)}{c} |\cos\alpha| \,\mathrm{d}\Omega = \mathrm{const.}$$
(42)

Для дальнейшего исследования динамики населённостей уровней Ландау необходимо знать в явной форме зависимость от времени величины  $q_1$  — числа фотонов в моде на первой циклотронной гармонике, которая входит в уравнения (28), (29). Найдём  $q_1$  в приближении Эддингтона, согласно которому реальная угловая зависимость интенсивности излучения аппроксимируется упрощённой, так что в любой момент времени выполняется соотношение

$$\oint_{4\pi} [\aleph_{11}(t) + \aleph_{12}(t)] |\cos \alpha| \, \mathrm{d}\Omega \approx oq_1(t),$$

где  $o \sim 1$  — константа, называемая эддингтоновским множителем (ср. [33,34]). В принятом приближении удаётся определить  $q_1(\mathcal{T})$ , не решая уравнение переноса. Действительно, закон сохранения энергии (42) даёт

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}) + \hbar\omega_B q_1(\mathcal{T})N\mathcal{R} = \mathcal{E}(0) + \hbar\omega_B q_1(0)N\mathcal{R},$$
(43)

где

$$\mathcal{R} = \frac{\omega_B^2}{8\pi^3 c^2} \frac{\sqrt{2}\beta_{T_{\parallel}} o\omega_B}{N\phi(\xi)}$$

— отношение концентраций резонансных частиц и волн. Пользуясь полученным соотношением, исключим  $q_1$  из уравнения (30):

$$\frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}\mathcal{T}} = -\mathcal{E} + \mathcal{E}(\infty),$$
$$\mathcal{E}(\infty) = \frac{1}{1+\mathcal{R}}\mathcal{E}(0) + \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}}\hbar\omega_B q_1(0)N\mathcal{R} = \text{const.}$$
(44)

Решение полученного уравнения даёт зависимость поперечной энергии электронов от времени:

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}) = \mathcal{E}(0)e^{-\frac{1+\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\mathcal{T}} + \mathcal{E}(\infty)\left(1 - e^{-\frac{1+\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\mathcal{T}}\right)$$

и показывает, что (44) представляет собой установившееся значение поперечной энергии электронов. Пользуясь соотношением (43), найдём теперь

$$q_1(\mathcal{T}) = q_1(0)e^{-\frac{1+\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\mathcal{T}} + q_1(\infty)\left(1 - e^{-\frac{1+\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\mathcal{T}}\right)$$
(45)

$$q_1(\infty) = \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}} q_1(0) + \frac{1}{1+\mathcal{R}} \frac{\mathcal{E}(0)}{\hbar\omega_B N}$$
(46)

Таким образом, релаксационный процесс приводит к выравниванию средних энергий, приходящихся на одну частицу и на одну волну:

$$\hbar\omega_B q_1(\infty) = \frac{\mathcal{E}(\infty)}{N}.$$

К такому же выводу можно прийти, приравнивая к нулю левую часть уравнения (41).

Характерное время изменения интенсивности излучения на начальной стадии процесса, при  $\mathcal{T} \ll \mathcal{R}/(1+\mathcal{R})$ , можно определить, используя соотношения

$$\left| \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}\mathcal{T}} \right|_{\mathcal{T}=0} = |\hbar\omega_B N q_1(0) - \mathcal{E}(0)|,$$
$$\left| \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}\mathcal{T}} \right|_{\mathcal{T}=0} = \hbar\omega_B N \mathcal{R} \left| \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}\mathcal{T}} \right|_{\mathcal{T}=0},$$
$$A. B. Cep 6ep$$

которые следуют из (30) и (43). Искомое время, по смыслу аналогичное линейному инкременту, имеет вид

$$t_0 \equiv \frac{A_1^{-1} q_1(0)}{|dq_1/d\mathcal{T}|} = \frac{\mathcal{R} A_1^{-1}}{|\mathcal{W} - 1|},\tag{47}$$

где

$$\mathcal{W} \equiv \frac{\mathcal{E}(0)/N}{\hbar\omega_B q_1(0)} = \frac{M_1(0)}{Nq_1(0)}$$

— отношение средней энергии, приходящейся на одну частицу, к средней энергии на одну моду излучения в начальный момент времени. Отметим, что (47) отличается от времени спонтанного перехода  $A_1^{-1}$ . Если  $\mathcal{W} \ll 1$ , то  $t_0 \simeq RA_1^{-1}$ , в противном случае  $t_0 \simeq RA_1^{-1}/\mathcal{W}$ . Найдём теперь характерное время  $t_{\infty}$ , в течение которого интенсивность излучения (а вместе с ней и поперечная энергия электронов) релаксирует к конечному уровню (46). Для этого, учитывая соотношение

$$\frac{q_1(0)}{q_1(\infty)} = \frac{1+\mathcal{R}}{\mathcal{W}+\mathcal{R}}$$

представим (45) в следующем виде:

$$q_1(\mathcal{T}) = q_1(\infty) \left( 1 + \frac{1 - \mathcal{W}}{\mathcal{W} + \mathcal{R}} e^{-\frac{1 + \mathcal{R}}{\mathcal{R}} \mathcal{T}} \right)$$

Если W ≫ 1, то

$$t_{\infty} = \frac{\mathcal{R}A_1^{-1}}{\mathcal{R}+1}.\tag{48}$$

В системе с большой плотностью мод ( $\mathcal{R} \gg 1$ ) время релаксации определяется спонтанными процессами:  $t_{\infty} \simeq A_1^{-1}$ . Если выполнено обратное неравенство  $\mathcal{R} \ll 1$ , то излучение релаксирует быстрее:  $t_{\infty} \simeq \mathcal{R}A_1^{-1} \ll A_1^{-1}$ . Допустим теперь, что  $\mathcal{W} \ll 1$ . В этом случае

$$t_{\infty} = \frac{\mathcal{R}A_1^{-1}}{\mathcal{R}+1} \ln \frac{1}{\mathcal{W}+\mathcal{R}}.$$
(49)

Выясним теперь, как эволюционирует поперечное распределение электронов. Найдём решение уравнения (29) при произвольной зависимости  $q_1(\mathcal{T})$ . Соответствующее уравнение характеристик

$$-\frac{\mathrm{d}\varsigma}{\mathrm{d}\mathcal{T}} = (1-\varsigma)[1+q_1(\mathcal{T})(1-\varsigma)]$$

имеет решение

$$\frac{1}{1-\varsigma} = \frac{e^{-\mathcal{T}}}{1-\varsigma_0} - \int_0^{\mathcal{T}} q_1(\mathcal{T}') e^{-(\mathcal{T}-\mathcal{T}')} \, \mathrm{d}\mathcal{T}',$$

удовлетворяющее начальному условию *ς*(0) = *ς*<sub>0</sub>. Интегрируя уравнение для производящей функции вдоль характеристик, находим

$$Z(\varsigma, \mathcal{T}) = \frac{1}{1 + (1 - \varsigma)Q_1(\mathcal{T})} Z\left(1 - \frac{(1 - \varsigma)e^{-\mathcal{T}}}{1 + (1 - \varsigma)Q_1(\mathcal{T})}, 0\right).$$
(50)

Здесь функция  $Q_1(\mathcal{T})$  определяется формулой (32). Подставляя (45) в (50), находим эту функцию в явном виде:

$$Q_{1}(\mathcal{T}) = q_{1}(\infty)[1 - e^{-\mathcal{T}}] + \mathcal{R}[q_{1}(0) - q_{1}(\infty)] \left(e^{-\mathcal{T}} - e^{-\frac{1+\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\mathcal{T}}\right).$$
  
A. B. Cepőep 1047

Полученное решение обобщает результат [22], который, как легко убедиться, является его частным случаем при  $q_1 = \text{const.}$  Действительно, в этом случае  $Q_1(\mathcal{T}) = q_1(1 - e^{-\mathcal{T}})$  и (50) переходит в (38).

Уравнение (29) допускает автомодельную подстановку. Будем искать его решение в виде

$$Z_T(\varsigma, \mathcal{T}) = \frac{N}{1 + (1 - \varsigma)Q(\mathcal{T})},\tag{51}$$

где  $Q(\mathcal{T})$  — искомая неизвестная функция. Производящая функция указанного вида описывает больцмановское распределение электронов по уровням Ландау с меняющейся во времени температурой

$$T_{\perp}(\mathcal{T}) = \frac{\hbar\omega_B}{\kappa \ln[1 + Q^{-1}(\mathcal{T})]}.$$
(52)

Подставляя (51) в (29), получаем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\mathcal{T}} = -Q + q_1,$$

решение которого имеет вид

$$Q(\mathcal{T}) = Q(0)e^{-\mathcal{T}} + Q_1(\mathcal{T}).$$

Итак, исходное больцмановское распределение электронов с температурой

$$T_{\perp}(0) = \hbar\omega_B / \kappa \ln[1 + Q^{-1}(0)]$$

при взаимодействии с циклотронным излучением на первой гармонике эволюционирует, сохраняя свою форму — меняется лишь  $T_{\perp}$  в соответствии с соотношением (52). Подчеркнём, что полученный результат касается самосогласованной эволюции населённостей и излучения, когда  $q_1$  зависит от времени. Ранее в работе [22] сохранение больцмановского распределения частиц во время релаксации в системе, описываемой уравнениями (28), (29), было отмечено лишь для простейшего частного случая заданной интенсивности излучения  $q_1 = \text{const.}$  Известно также, что максвелловское распределение с температурой, линейно растущей во времени, является автомодельным решением уравнения квазилинейной диффузии электронов (без учета спонтанных процессов) в задаче о поперечном циклотронном нагреве нерелятивистских электронов [35]. В нашем случае переход к квазиклассическому пределу осуществляется заменой  $Q \to \kappa T_{\perp}/\hbar \omega_B$ ,  $q_1 \to \kappa T_{\mathrm{b}}/\hbar \omega_B$ , так что

$$T_{\perp}(\mathcal{T}) = T_{\perp}(0)e^{-\mathcal{T}} + \int_0^{\mathcal{T}} T_{\mathrm{b1}}(\mathcal{T}')e^{-(\mathcal{T}-\mathcal{T}')} \,\mathrm{d}\mathcal{T}'.$$

На начальной стадии релаксации, на временах много меньше времени спонтанного перехода, и при  $T_{\perp}(0) \ll T_{\rm b1}(0)$  поперечная температура линейно растет с темпом, определяемым интенсивностью излучения:  $T_{\perp}(\mathcal{T}) \simeq T_{\rm b1}(0)\mathcal{T}$ .

Найдём распределение электронов, порождаемое производящей функцией (50). Рассчитаем факториальные моменты по формуле (24):

$$M_n(\mathcal{T}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left( \frac{\partial^{n-k}}{\partial \varsigma^{n-k}} \frac{1}{1+(1-\varsigma)Q_1(\mathcal{T})} \right)_{\varsigma=1} \left( \frac{\partial^k Z(\varsigma_0(\varsigma,\mathcal{T}),0)}{\partial \varsigma^k} \right)_{\varsigma=1},$$

где

$$\varsigma_0(\varsigma, \mathcal{T}) = 1 - \frac{(1-\varsigma)e^{-\mathcal{T}}}{1 + (1-\varsigma)Q_1(\mathcal{T})}.$$

1048 А. В. Сербер

Применим теперь формулу для производной k-го порядка от сложной функции [23] и учтем, что  $\varsigma_0(0,0) = 0$ :

$$\frac{\partial^k Z(\varsigma_0(\varsigma, \mathcal{T}), 0)}{\partial \varsigma^k} \bigg|_{\varsigma=1} = \sum_{m=1}^k M_m(0) \left(\frac{\partial^k \varsigma_0^m(\varsigma, \mathcal{T})}{\partial \varsigma^k}\right)_{\varsigma=1}$$

Здесь введены начальные факториальные моменты  $M_m(0) = (\partial^m Z(\varsigma_0, 0) / \partial \varsigma_0^m)_{\varsigma_0=1} / m!$  (см. (24)). Вычисляя оставшиеся производные, находим

$$M_n(\mathcal{T}) = Q_1^n(\mathcal{T})M_0(0) + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k \frac{(k-1)!}{(k-m)!(m-1)!} Q_1^{n-m}(\mathcal{T})M_m(0)e^{-m\mathcal{T}}.$$

Наконец, изменим порядок суммирования и воспользуемся следующим свойством биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{l=0}^{n-m} \frac{(m+l-1)!}{l!(m-1)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

В итоге приходим к следующему результату:

$$M_n(\mathcal{T}) = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} Q_1^{n-m}(\mathcal{T}) M_m(0) e^{-m\mathcal{T}}.$$
(53)

Полученное соотношение вместе с формулой (34), которая связывает населённости и факториальные моменты при любом  $\mathcal{T}$ , дает решение рассматриваемой задачи о циклотронной релаксации однородной плазмы.

Согласно (34) и (53) временное поведение населённостей описывается сложным кратным рядом, который содержит полиномы различных степеней от  $Q_1$  и  $e^{-\mathcal{T}}$ , и проявляет широкий спектр характерных времен, кратных  $A_1^{-1}$  и характерным временам изменения  $Q_1$ . На временах порядка  $A_1^{-1}$  мелкие детали в поперечном распределении электронов сглаживаются, и затем динамика населённостей определяется самым длительным характерным временем, которое описывает изменение поперечной энергии электронов. Как было выяснено выше, это время совпадает с  $t_{\infty}$  и определяется формулами (48), (49).

## 2. ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ И КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ НА ЦИКЛОТРОННЫХ ЧАСТОТАХ

В предыдущем разделе была рассмотрена самосогласованная начальная задача об эволюции поперечного распределения электронов и циклотронного излучения в однородной безграничной плазме. Для астрофизических объектов более типичной является другая ситуация: плазма занимает ограниченный объем, её параметры и характеристики излучения, падающего на границы плазменной области, меняются на временах, существенно превышающих время установления стационарного состояния в системе. Поэтому в данном разделе мы найдём коэффициенты переноса циклотронного излучения в случае, когда внешние условия не зависят от времени, а населённости уровней Ландау в каждой точке среды релаксировали к стационарному состоянию, которое описывается уравнениями (26), (27) при  $\partial/\partial t = 0$ .

Стационарный аналог уравнений (26), (27) подробно исследован в работе [6], где получено их аналитическое решение и рассчитаны циклотронная излучательная способность и коэффициент циклотронного поглощения в разреженной плазме (9) без учета конверсии мод, когда в балансных уравнениях учитывается только влияние необыкновенного излучения на первой гармонике. Идентичность

уравнений даёт возможность, воспользовавшись результатами работы [6], выписать коэффициенты переноса циклотронного излучения типа *l* на любой гармонике *s* при условии, что распределение электронов по уровням Ландау определяется излучением на первой гармонике и столкновениями:

$$\eta_{sl} = \frac{\hbar\omega_B^3 s^3}{8\pi^3 c^2} F_{sl} N \sum_{j=0}^s \frac{s!}{j!} \frac{\varepsilon q_1^{s-j} q_0^j}{(\varepsilon+j)(\varepsilon+j+1)\dots(\varepsilon+s)},\tag{54}$$

$$\chi_{sl} = F_{sl} N \sum_{j=0}^{s} \frac{s!}{j!} \frac{\varepsilon[(1+q_1)^{s-j}(1+q_0)^j - q_1^{s-j}q_0^j]}{(\varepsilon+j)(\varepsilon+j+1)\dots(\varepsilon+s)},$$
(55)

$$q_0 = (e^{\hbar\omega_B/\kappa T_{\parallel}} - 1)^{-1} = \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega_B^3} B_{\omega}^{\parallel}(\omega_B),$$

$$q_1 = \left(e^{\hbar\omega_B/\kappa T_{\rm b1}} - 1\right)^{-1} = \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega_B^3} \oint_{4\pi} \frac{I_{11}(\xi, \vec{n})\psi_{11}(\alpha) + \varpi_1 I_{12}(\xi, \vec{n})\psi_{12}(\alpha)}{1 + \varpi_1} \,\mathrm{d}\Omega.$$

В этих выражениях учтены соотношения (6), (19) и введена интенсивность равновесного излучения в одной моде с температурой  $T_{\parallel}$ :

$$B^{\parallel}_{\omega}(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/\kappa T_{\parallel}} - 1}.$$
(56)

Для разреженной плазмы на вырожденных звёздах коэффициент  $arpi_1$  имеет вид

$$\varpi_1 = \begin{cases} \frac{\beta_{T_{\parallel}}^2}{|W(\xi)|^2} \left(\frac{147}{16} - \frac{28}{\pi}\right) \\ 3 \end{cases}$$
(57)

Формулы (54)–(57) дают точные аналитические выражения для коэффициентов переноса циклотронного излучения при учёте радиационных переходов на первой гармонике и столкновений в разреженной плазме с различной поляризацией нормальных волн. Выражения (54), (55) справедливы при произвольных  $\varepsilon$  и  $\mathcal{E}/\hbar\omega_B$ . Последнее означает, что это решение описывает, в частности, как квазиклассический, так и квантовый пределы. Отметим также, что наш подход учитывает влияние обеих мод на поперечное распределение электронов.

Полученные в данной работе коэффициенты переноса описывают взаимодействие циклотронного излучения с плазмой в приближении, согласно которому поперечное распределение электронов устанавливается излучением на первой гармонике и столкновениями. В свою очередь, это распределение определяет излучательные способности и коэффициенты поглощения на всех высших гармониках. В результате в данной многоуровневой схеме переноса излучения на первой гармонике учитываются резонансное рассеяние с конверсией мод и процессы истинного поглощения (при циклотронном возбуждении уровней Ландау с последующим ударным девозбуждением) и испускания (при столкновительном возбуждении уровней Ландау с последующим циклотронным высвечиванием); на высших гармониках учитываются испускание фотона при возбуждении уровней Ландау за счёт слияния нескольких фотонов первой гармоники и столкновений, а также поглощение, которое связано либо с рассеянием фотонов высших гармоники и ударным девозбуждением опревой гармоники и ударным девозбуждением регорое связано либо с рассеянием фотонов высших гармоники и ударным на несколько фотонов первой гармоники и ударным девозбуждением оставшейся неизлучённой энергии.

Излучательные способности (54) и коэффициенты поглощения (55) позволяют с помощью соответствующих уравнений переноса рассчитывать характеристики циклотронного излучения плазменных оболочек магнитных вырожденных звёзд. Этим вопросы будут посвящены следующие статьи. Автор признателен В. В. Железнякову за внимание к работе, а также М. Д. Токману и К. А. Зусьману за полезные обсуждения.

Данная работа финансировалась РФФИ (код проекта 96-02-16045а), грантом № 96-15-96739 Совета по государственной поддержке ведущих научных школ, а также грантом Комиссии РАН по работе с молодежью.

#### мифетбфхтб

- 1. Zheleznyakov, V.V. // Astrophys. Space Sci. 1983. V.97. P.229.
- 2. Железняков В.В. // Итоги науки и техники. Астрономия. Т.22.-М.: ВИНИТИ, 1983.-С.135.
- 3. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
- 4. Железняков В.В. Излучение в астрофизической плазме. М: Янус-К, 1997. 528 С.
- 5. Zheleznyakov, V.V., Litvinchuk A.A. // Astrophys.Space Sci. 1984. V.105. P.73.
- 6. Сербер А.В. // Астрон. журн. 1990. Т.67. С.582.
- 7. Железняков В.В., Литвинчук А.А. // Астрон. журн. 1987. Т.64. С.306.
- 8. Adler S.L. // Ann. Phys. (N.Y.). 1971. V.67. P.599.
- 9. Железняков В.В. // Астрофизика. 1980. Т.16. С.539.
- 10. Melrose D.B., Zheleznyakov V.V. // Astron. Astrophys. 1981. V.95. P.86.
- 11. Железняков В.В., Сербер А.В. // Астрон. журн. 1990. Т.70. С.1002.
- Сербер А.В. Циклотронное рассеяние с конверсией мод в плазме на вырожденных звёздах. II. Плоский слой в квазиоднородном магнитном поле // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 2000. Т. 43 (напр. в печать)
- Сербер А.В. Циклотронное рассеяние с конверсией мод в плазме на вырожденных звёздах. III. Протяжённая оболочка в сильнонеоднородном магнитном поле // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 2000. Т. 43. (напр. в печать)
- 14. Железняков В.В. Электромагнитные волны в космической плазме. М.: Наука, 1977.
- 15. Гнедин Ю.Н., Павлов Г.Г. // ЖЭТФ. 1973. Т.65. С.1806.
- 16. Гнедин Ю.Н., Павлов Г.Г., Шибанов Ю.А. // ЖЭТФ. 1978. Т. 27. С. 325.
- 17. Роуландс Дж., Сизоненко В.Л., Степанов К.Н. // ЖЭТФ. 1966. Т.50. С.994.
- 18. Pavlov G.G., Shibanov Yu.A., Yakovlev D.G. // Astrophys. Space Sci. 1980. V.73. P.33.
- 19. Железняков В.В., Корягин С.А., Сербер А.В. // Письма в Астрон. журн. 1999. Т. 25. С. 513 (Препринт ИПФ РАН № 435. Нижний Новгород, 1997. 16 с.)
- 20. Корягин С.А. // ЖЭТФ. 2000. (напр. в печать)
- 21. Акулин В.М., Карлов Н.В. Интенсивные резонансные взаимодействия в квантовой электронике. М.: Наука, 1987.
- 22. Montroll E.W., Schuler K.E. // J. Chem. Phys. 1957. V. 26. P. 454.
- 23. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
- 24. Осипов А.И. // ДАН. 1960. Т.30. С.523.
- 25. Schuler K.E. // J. Chem. Phys. 1960. V.32. P.1692.
- 26. Соловьёв В.А. // Акуст. журн. 1961. Т.7. С.337
- 27. Сафарян М.Н., Ступоченко Е.В. // ПМТФ. 1964. № 4. С.29.
- 28. Schuler K.E., Weiss G.E. // J. Chem. Phys. 1966. V.45. P.1105.
- 29. Rankin C.C., Light J.C. // J. Chem. Phys. 1967. V.46. P.1305.
- 30. Zitlau C.F., Moore W.M. // J. Chem. Phys. 1968. V.49. P.1255.
- 31. Гордиец Б.Ф., Марков М.Н., Шелепин Л.А. // Космич. исслед. 1970. Т.8. С.437.

А.В.Сербер

- 32. Landau L.D., Teller E. // Phys. Z. Sowietunion. 1936. V.10. P.34.
- 33. Михалас Д. Звёздные атмосферы. М.: Мир, 1982. Т.1–2.
- 34. Соболев В.В. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1985.

35. Электродинамика плазмы / Под ред. А. И. Ахиезера. — М.: Наука, 1974. — 720 С.

Институт прикладной физики РАН,

г.Н.Новгород, Россия

рПУФХРЙМБ Ч ТЕДБЛГЙА 9 марта 1999 г.

## CYCLOTRON SCATTERING WITH MODE SWITCHING IN PLASMA ON DEGENERATE STARS. I. RADIATIVE RELAXATION IN HOMOGENEOUS RAREFIED PLASMA

A. V. Serber

Population balance equations for the Landau levels in non-relativistic rarefied plasma are written down for arbitrary polarization of cyclotron modes. Self-consistent evolution of the transverse distribution of electrons interacting, by virtue of the cyclotron processes, with isotropic radiation at frequencies near the first harmonic of the electron gyrofrequency is studied. The spectrum of relaxation times of the system is found for a fixed radiation intensity. It is shown that the time of cyclotron relaxation under the action of the first-harmonic radiation with wide angular and frequency spectrum is entirely determined by the rate of spontaneous processes and does not depend on the radiation intensity. Cyclotron radiation transfer coefficients are obtained which account for the process of mode switching at the first harmonic.

## УДК 621.373

# ПОЛЯРИЗАИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СРЕДАХ. 1. ТЕОРИЯ

В. М. Геликонов<sup>1</sup>, Ю. И. Зайцев<sup>1</sup>, Д. В. Кутырев<sup>2</sup>, Г. Б. Малыкин<sup>1</sup>, Н. Д. Миловский<sup>2</sup>

#### введение

Экспериментально обнаруженное и впервые измеренное в 1970 году Берштейном И. Л. и Рогачевым В. А. [1] вращение поляризации слабой (пробной) волны, распространяющейся в условиях насыщения резонансного перехода среды полем сильной встречной волны, явилось основой нового метода измерения параметров вещества, впоследствии получившего название метода нелинейной поляризационной лазерной спектроскопии [2–4]. На взаимодействии встречных волн лазерного излучения оптического диапазона частот с резонансной средой основаны также разнообразные исследования в химии, биологии и медицине, многие типы приборов квантовой электроники (обращающие волновой фронт зеркала, лазеры, просветляющиеся фильтры).

В общем случае лазерное излучение произвольно поляризовано. В результате нелинейного взаимодействия с резонансной (двухуровневой) средой поляризация составляющих его волн трансформируется [5—16]. Эффективность этого преобразования сильно зависит от поляризационных характеристик и мощности излучения, а также от свойств двухуровневой среды [5—12]. Наиболее важную роль среди этих свойств играют распределение резонансных молекул по ориентациям дипольных моментов их рабочих переходов и передача возбуждения от объектов с одной ориентацией дипольного момента к объектам, у которых дипольный момент может быть ориентирован иначе. В жидкостях и плотных газах ориентация возбужденных и невозбужденных квантовых систем в пространстве меняется в большей степени из-за хаотического (теплового) движения частиц, а в твердых телах — из-за обменного взаимодействия.

Поскольку интенсивность излучения современного лазера почти всегда сопоставима или существенно превышает интенсивность насыщения рабочего (резонансного) перехода, то для теоретической интерпретации нелинейных поляризационных эффектов в резонансной двухуровневой среде необходимо использовать полуклассическое описание взаимодействия поля с веществом в новом, "векторном" варианте [7-14]. В отличие от традиционно используемого полуклассического "скалярного" описания [15], в котором матричные элементы  $\tilde{\mathbf{d}}_{21} \equiv \mathbf{d}$  оператора дипольного момента рабочего перехода предполагаются коллинеарными действующему электрическому полю Е и в котором по этой причине Е полностью определяется одной скалярной величиной, векторное описание, помимо хаотической ориентации частиц, учитывает, что вектор d может быть поляризован либо линейно, либо циркулярно [16-21]. Если при переходе с одного энергетического уровня на другой сохраняется проекция полного углового момента квантовой системы M на направление внутреннего действующего поля, то  $\mathbf{d}$  является линейно поляризованным вектором. Если же M изменяется на единицу, то вектор  $\mathbf{d}$  поляризован циркулярно [18, 20]. Например, известно [18–21], что вектор **d** неподвижного иона неодима, находящегося в матрице фосфатного стекла, в зависимости от локального действующего поля может быть поляризован либо линейно, либо циркулярно. Таким образом, в твердотельных резонансных средах (типа фосфатного стекла) в общем случае векторы d должны быть хаотически ориентированы в пространстве и поляризованы как линейно, так и циркулярно. К этому стоит добавить, что центральная частота и другие параметры резонансного перехода (например время жизни) также могут зависеть

В. М. Геликонов и др.

от величины внутреннего поля, поэтому линия поглощения (люминесценции) является в общем случае неоднородно уширенной. В газообразных и жидких резонансных средах хаотическая ориентация векторов **d**, распределение возбужденных и невозбужденных состояний частиц в пространстве и по направлениям **d**, а также неоднородное уширение линии поглощения создаются за счет теплового движения молекул.

Впервые закономерности преобразования поляризаций встречных волн обсуждались в работах [5, 6] в предположении, что нелинейная восприимчивость изотропной двухуровневой среды зависит от квадрата модуля поля. Тем самым предполагалось, что в такой среде сильное эллиптически поляризованное поле **E** не создает анизотропию диэлектрической проницаемости, что внутри слоя среды состояние поляризации одной бегущей волны не изменяется и что при взаимодействии двух встречных неинтерферирующих волн разность населенностей резонансной двухуровневой среды остается пространственно однородной. Эти выводы подтверждались результатами работы [22], в которой квантовомеханическим методом в приближении одинаковой заселенности рабочих уровней всех молекул (независимо от ориентации их **d** и местоположения в пространстве) было получено уравнение для макроскопической поляризованности **P** изотропной двухуровневой среды и показано, что вектор **P** коллинеарен вектору действующего поля **E**. Из работ [5, 6, 22] следовало, что ортогонально поляризованные волны в изотропной двухуровневой среде не должны создавать ("записывать") решетку нелинейной диэлектрической проницаемости. Это представлялось естественным с точки зрения здравого смысла и интуитивно воспринималось как очевидный постулат.

С другой стороны, в работах [23, 24], где изучались энергетические и поляризационные характеристики лазеров на красителях с когерентной поляризованной накачкой, было показано, что сильное поляризованное лазерное излучение наводит в изотропной резонансной среде анизотропию. Такой же вывод следует из приведенного в монографии [16] выражения для недиагонального элемента матрицы плотности двухуровневой молекулы, находящейся под воздействием слабого резонансного поля. Наконец, в работах [7, 9, 10, 12], где рассматривалось распространение сильной эллиптически поляризованной волны в однородно уширенной двухуровневой среде, состоящей из неподвижных хаотически ориентированных молекул (в твердом аморфном веществе), теоретически показано, что поляризация **Р** нелинейного отклика среды в общем случае (из-за насыщения резонансного перехода [7, 12]) не совпадает с поляризацией действующего поля **Е** и что из-за этой наведенной анизотропии эллипс поляризации поля волны изменяет свои параметры. Кроме того, в [8, 14] установлено, что тепловое движение молекул ослабляет эту анизотропию.

Поскольку в общем случае поляризации дипольного момента единицы объема среды **Р** и поля **E** различны, то закономерности и физические механизмы преобразования поляризаций встречных волн в изотропной резонансной среде имеют, по крайней мере, новые существенные детали, которые не могли быть выявлены в [5, 6]. В первой части настоящей работы предпринята попытка теоретически устранить этот недостаток на примере решения практически важной физической задачи о взаимодействии в изотропной неоднородно уширенной резонансной среде встречных плоских коллинеарно и ортогонально (в общем случае эллиптически) поляризованных волн одной частоты и существенно разных интенсивностей. Для решения задачи используется модифицированный вариант векторного описания взаимодействия поля с веществом [8, 13, 14], предусматривающий учет диффузионного движения частиц и ориентации их дипольных моментов **d**. Это описание предполагает, что миграция возбужденных состояний квантовых систем (в твердотельной среде) или их тепловое движение (в жидкости или плотном газе) имеет характер ориентационной и пространственной самодиффузии возбужденных и невозбужденных квантовых частиц, идентичных по своим физическим свойствам.

# 1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОТНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ

Одним из наиболее важных разделов развиваемой теории является учет движения резонансных объектов. Такой учет опирается на достаточно обоснованные в настоящее время представления о свойствах объектов микромира. Во-первых, считается, что величина вектора **d** матричного элемента оператора дипольного момента рабочего перехода и состояние его поляризации определяются исключительно электрическим полем внутри квантового объекта. Поэтому поляризация вектора d свободной квантовой системы полностью зависит от расположения атомов и электронов внутри квантового объекта, а направление вектора **d** — от ориентации осей симметрии частицы в пространстве [25]. Вовторых, в плотных средах электрическое поле внутри квантового объекта в значительной мере формируется за счет окружающих квантовых систем, электрические поля которых могут быть достаточно велики и ориентированы случайным образом. Поэтому вектор d квантовой системы в такой среде может быть случайно ориентирован в пространстве и поляризован как линейно, так и циркулярно. К тому же в стеклах (и в жидкостях при большой концентрации красителя) из-за обменного взаимодействия возможна передача возбуждения между соседними резонансными объектами, произвольно ориентированными по отношению друг к другу [18]. Эти представления позволяют для одинаково ориентированных возбужденных и невозбужденных молекул написать уравнения, которые учитывают изменение числа молекул не только из-за взаимодействия с резонансным полем, но и из-за миграции возбуждения.

Рассмотрим одинаково ориентированные в пространстве квантовые частицы, векторы **d** которых коллинеарны. Энергетическое состояние каждой частицы описывается уравнением движения матрицы плотности  $\hat{\rho}$  двухуровневой системы, обладающей оператором энергии взаимодействия с внешним полем  $\hat{W} = -(\hat{\mathbf{d}}, \mathbf{E})$ , где  $\hat{\mathbf{d}}$  — матрица оператора дипольного момента рабочего перехода. Полагая концентрацию N резонансных объектов постоянной, введем связанные с элементами матрицы плотности  $\hat{\rho}_{ij}$  переменные величины

$$N_2 = N\rho_{22}, \quad N_1 = N\rho_{11}, \quad n = N_2 - N_1,$$
 (1)

имеющие смысл плотностей возбужденных  $(N_2)$  и невозбужденных  $(N_1)$  квантовых частиц, идентичных по своим физическим параметрам и одинаково ориентированных в пространстве. Плотности  $N_1$ и  $N_2$  зависят от энергии  $(\mathbf{d}, \mathbf{E})$  взаимодействия квантовой системы с полем и поэтому оказываются функциями координат точки наблюдения и углов, определяющих направления  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{E}$  в этой точке.

Броуновское движение в жидкости или газе (так же, как миграция возбуждения в твердом теле) уменьшает пространственные неоднородности плотностей  $N_{1,2}$  и их разности n за время  $\delta t$  согласно закону диффузии:

$$\delta\{N_{1,2},n\} \approx D\,\Delta\{N_{1,2},n\}\,\delta t,\tag{2}$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа, D — коэффициент диффузии,  $\delta\{N_{1,2}, n\}$  — изменение плотностей и их разности. В твердом теле зависимости (2) недостаточно изучены. Для газа, где они хорошо известны, коэффициент диффузии  $D = \overline{V}^2/3\nu$  определяется [26] средней тепловой скоростью молекул  $\overline{V}$  и частотой соударений  $\nu = 16a^2 P \sqrt{\pi}/\sqrt{mk_{\rm b}T}$ , которые зависят от давления P и температуры T газа, а также от массы m и радиуса a частицы ( $k_{\rm b}$  — постоянная Больцмана).

Аналогичное рассмотрение следует провести и для хаотического вращения молекул. Легко установить, что оно приводит к сглаживанию зависимостей  $N_{1,2}$  от углов. Этот процесс фактически является диффузией ориентаций молекул и аналогичен исследованному в [27] процессу изменения угловой плотности числа частиц, постоянные дипольные моменты которых образуют угол с некоторым выделенным направлением в пространстве. Для расчета изменений угловой плотности  $\delta N_{1,2}$  за время  $\delta t$ , помимо

В. М. Геликонов и др.

указанного в [27], можно воспользоваться также другими строгими методами [28, 29] и получить уравнения типа

$$\delta\{N_{1,2},n\} \approx \frac{1}{\tau} \Delta_{\Omega}\{N_{1,2},n\} \,\delta t,$$
(3)

в которых  $\Delta_{\Omega}$  является угловой частью оператора Лапласа в сферической системе координат,  $\tau$  — характерный временной масштаб диффузии. С помощью подобного уравнения в [30] описывалось изменение концентрации органических молекул с одинаковой ориентацией вектора **d** в растворе красителя.

Движение одинаковых по своим физическим свойствам резонансных объектов имеет характер самодиффузии возбужденных и невозбужденных частиц. Учет такой самодиффузии в резонансной среде, как показано в [8], сводится к изменению одного материального уравнения (в полной полуклассической системе) для плотности инверсной разности населенностей n. В нем появляются члены  $D \Delta n$  и  $(1/\tau) \Delta_{\Omega}^2 n$ , которые описывают изменения n, обусловленные соответственно поступательным и вращательным хаотическим движением частиц (или миграцией их энергетических состояний). При этом уравнение для плотности инверсной разности населенностей трансформируется в уравнение типа Эйнштейна—Фоккера—Планка, в котором коэффициенты диффузии D и ориентационной диффузии  $1/\tau$ зависят от структуры энергетических уровней, агрегатного состояния вещества, концентрации квантовых объектов и других свойств среды.

Опираясь на изложенные выше соображения и результаты [8], взаимодействие поля с плотной резонансной средой будем описывать системой уравнений

$$\begin{pmatrix} \Delta - \frac{1}{v_{\phi}^{2}} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon v_{\phi}^{2}} \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon v_{\phi}^{2}} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \langle \mathbf{d}\tilde{R}_{12} \rangle + \kappa. c., \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) - i\omega_{12} + \frac{1}{T_{2}} \end{pmatrix} \tilde{R}_{12} = \frac{i}{\hbar} (\mathbf{d}^{*}, \mathbf{E})n,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) + \frac{1}{T_{1}} - D\Delta - \frac{1}{\tau} \Delta_{\Omega} \end{pmatrix} n - \frac{n_{0}}{T_{1}} = \frac{2i}{\hbar} (\mathbf{E}, \mathbf{d}) \tilde{R}_{12}^{-2\pi/\omega} + \kappa. c.,$$

$$(4)$$

в которой разность населенностей  $n = N \left( \tilde{
ho}_{22} - \tilde{
ho}_{11} 
ight)$  и поляризованность  $\langle \mathbf{d} \, \tilde{R}_{12} 
angle = \langle \mathbf{d} \, N \tilde{
ho}_{12} 
angle$  единичного объема среды пропорциональны концентрации N и соответствующим элементам  $\tilde{\rho}_{ij}$  матрицы плотности  $\hat{\rho}$  двухуровневого объекта, имеющего фиксированные ориентацию вектора **d** в пространстве и скорость движения V, n<sub>0</sub> — стационарное значение (парциальной) инверсии населенностей в отсутствие поля для данного коллектива частиц,  $T_{1,2}$  — соответственно продольное и поперечное времена релаксации,  $v_{\phi}$  — скорость света в матрице среды,  $\sigma$  — проводимость среды, определяющая линейные потери,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\omega_{12}$  частота рабочего перехода. Черта над правой частью последнего уравнения обозначает усреднение по времени на периоде высокочастотного колебания. Скобки (...) обозначают усреднение по возможным ориентациям вектора  $\mathbf{d} \equiv \mathbf{d}_0 |\mathbf{d}|$  и по распределению скоростей V, а также (в общем случае) по другим статистическим параметрам. Поэтому систему уравнений (4) необходимо дополнить уравнением для функции распределения квантовых систем  $W(\mathbf{d}, \mathbf{V})$  по ориентациям  $\mathbf{d}$  и скоростям  $\mathbf{V}$  в виде  $W(\mathbf{d}, \mathbf{V}) = W_1(\theta, \psi) W_2(|\mathbf{V}|^2)$ , где  $\theta$  и  $\psi$  — полярный и азимутальный углы, определяющие ориентацию вектора **d** в пространстве. В жидкостях и твердых телах функцию W можно считать неизменной во времени и не зависящей от действующего поля. Изменения W<sub>1</sub>, происходящие под воздействием резонансного поля в газе, можно оценить с помощью подхода, разработанного в [31]. Оценки, обоснование которых приведено в [8], показывают, что при комнатной температуре в оптическом диапазоне частот с точностью порядка  $10^{-7}$ ;  $10^{-9}$  функцию  $W_1$  распределения молекул по ориентациям векторов **d** можно считать изотропной. В дальнейшем для простоты функция W<sub>1</sub> во всех случаях считается изотропной. Предполагается также, что в среде существует равновесное (максвелловское) распределение частиц

по скоростям, которое в дальнейшем при выполнении процедуры усреднения будет аппроксимировано лоренцевым распределением. Таким образом, система (4) дополняется выражением для функции распределения квантовых объектов по ориентациям векторов **d** и скоростям **V** в виде

$$W(\theta, \psi, |\mathbf{V}|^2) = \frac{1}{4\pi} \frac{\overline{V}/\pi}{V^2 + \overline{V}^2}.$$
(5)

Два материальных уравнения в системе (4) в отсутствие членов  $(\mathbf{V}, \nabla) \tilde{R}_{12}$  и  $(\mathbf{V}, \nabla)n$  безусловно справедливы для сред, состоящих из неподвижных частиц. Это могут быть как среды с однородно уширенной линией люминесценции, в которых время поперечной релаксации  $T_2$  оказывается в большинстве случаев существенно меньшим времени продольной релаксации  $T_1$ , так и неоднородно уширенные среды типа стекол, в которых неоднородная ширина линии люминесценции обусловлена разбросом центральных частот рабочих переходов. При наличии членов  $(\mathbf{V}, \nabla) \tilde{R}_{12}$  и  $(\mathbf{V}, \nabla)n$  эти уравнения будут описывать взаимодействие поля со средами, состоящими из движущихся резонансных частиц.

#### 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

2.1. Стационарное решение системы (4) при действующем электрическом поле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \{ \tilde{\mathbf{E}}(z) \exp\left(i\omega t - ikz\right) + \tilde{\mathbf{e}}(z) \exp\left(i\omega t + ikz\right) \} + \mathbf{K}. \mathbf{c}.,$$

соответствующем распространению в среде вдоль оси z двух встречных плоских волн с частотой  $\omega$ , волновым числом  $k = \omega/v_{\phi} = 2\pi/\lambda$  и существенно разными интенсивностями ( $|\tilde{\mathbf{E}}| \gg |\tilde{\mathbf{e}}|$ ), следует искать в виде

$$R_{12} = R_0 \exp\left(i\omega t - ikz\right) + \tilde{\rho}(z) \exp\left(i\omega t\right), \quad n = \overline{n}(z) + \eta(z), \tag{6}$$

где  $|\tilde{R}_0| \gg |\tilde{\rho}|, |\overline{n}| \gg |\eta|$ . Используя малость возмущений  $|\tilde{\mathbf{e}}|, |\tilde{\rho}|, |\eta|$ , путем линеаризации уравнений (4) получим две системы укороченных уравнений для медленно меняющихся на длине волны  $\lambda$  (комплексных амплитуд  $\tilde{\mathbf{E}}(z)$  и  $\tilde{\mathbf{e}}(z)$  полей встречных волн с соответствующими материальными уравнениями.

Величины  $\tilde{R}_0(z)$  и  $\overline{n}(z)$  слабо зависят от z на длине волны, поэтому линеаризованные уравнения для амплитуды сильной (насыщающей рабочий переход) волны примут вид

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}}{\mathrm{d}z} + \Gamma \tilde{\mathbf{E}} = (3g/2) \left\langle (1 + i\delta - iu)^{-1} \left[ \tilde{\mathbf{d}}_0(\tilde{\mathbf{d}}_0^*, \tilde{\mathbf{E}}) \frac{\overline{n}}{n_0} \right] \right\rangle_{\theta, \psi, u},\tag{7}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\xi}\Delta_{\Omega} + 3 \left| (\tilde{\mathbf{d}}_{0}^{*}, \tilde{\mathbf{E}}) \right|^{2} [1 + (\delta - u)^{2}]^{-1} \right) \frac{\overline{n}}{n_{0}} = 1,$$
(8)

где (8) играет роль материального уравнения. В этих уравнениях  $\xi = \tau/T_1$ , коэффициент  $g = 4\pi k n_0 |\mathbf{d}|^2 T_2/(3\hbar)\varepsilon$  — показатель линейного усиления,  $\Gamma = (2\pi\sigma/c)\sqrt{\mu/\varepsilon}$  — показатель линейного поглощения в среде,  $\delta = (\omega - \omega_{12}) T_2$  — безразмерная расстройка частот поля и перехода,  $u \equiv kVT_2$  — безразмерная скорость частицы. В (7), (8) поле  $\tilde{\mathbf{E}}$  для удобства расчетов нормировано на поле насыщения  $E_{\rm H} = \sqrt{3\hbar}/(|\mathbf{d}|\sqrt{T_1T_2})$ , превосходящее часто используемое выражение (см., например, [32–34]) в  $\sqrt{3}$  раз.

Система линеаризованных уравнений для слабого поля имеет вид

$$-\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{e}}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{\mathbf{e}} = -i\left(\frac{2\pi k|\mathbf{d}|}{\varepsilon E_{\mathrm{H}}}\right)\frac{1}{\lambda}\int_{x}^{z+\lambda} \langle \tilde{\mathbf{d}}_{0}\tilde{\rho}\rangle e^{-ikz'}\,\mathrm{d}z',$$

$$\left(\frac{u}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + 1 + i\delta\right)\tilde{\rho} - \frac{i\gamma}{2}\sqrt{3}(\tilde{\mathbf{d}}_{0}^{*},\tilde{\mathbf{E}})\eta e^{-ikz} = \frac{i\gamma}{2}\sqrt{3}(\tilde{\mathbf{d}}_{0}^{*},\tilde{\mathbf{e}})\overline{n}e^{ikz},$$

$$\left(\frac{u}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + 1 - i\delta\right)\tilde{\rho}^{*} + \frac{i\gamma}{2}\sqrt{3}(\tilde{\mathbf{d}}_{0},\tilde{\mathbf{E}}^{*})\eta e^{ikz} = -\frac{i\gamma}{2}\sqrt{3}(\tilde{\mathbf{d}}_{0},\tilde{\mathbf{e}}^{*})\overline{n}e^{-ikz},$$

$$\left\{\left[-i\sqrt{3}(\tilde{\mathbf{d}}_{0},\tilde{\mathbf{E}}^{*})e^{ikz}\right]\tilde{\rho} + \kappa.\mathrm{c.}\right\} + \gamma\left(T_{1}V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + 1 - DT_{1}\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}z^{2}} - \frac{1}{\xi}\Delta_{\Omega}\right)\eta = -\frac{3}{2}\gamma\frac{(\tilde{\mathbf{d}}_{0},\tilde{\mathbf{E}}^{*})(\tilde{\mathbf{d}}_{0}^{*},\tilde{\mathbf{e}})}{1 - i\delta + iu}\overline{n}e^{i2kz} + \kappa.\mathrm{c.},$$

$$\left\{\left[-i\sqrt{3}(\tilde{\mathbf{d}}_{0},\tilde{\mathbf{E}}^{*})e^{ikz}\right]\tilde{\rho} + \kappa.\mathrm{c.}\right\} + \gamma\left(T_{1}V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + 1 - DT_{1}\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}z^{2}} - \frac{1}{\xi}\Delta_{\Omega}\right)\eta = -\frac{3}{2}\gamma\frac{(\tilde{\mathbf{d}}_{0},\tilde{\mathbf{E}}^{*})(\tilde{\mathbf{d}}_{0}^{*},\tilde{\mathbf{e}})}{1 - i\delta + iu}\overline{n}e^{i2kz} + \kappa.\mathrm{c.},$$

где параметр  $\gamma^2 = T_2/T_1$  в общем случае (в плотной среде) может быть малой величиной. Три последних уравнения (9) представляют собой систему линейных неоднородных уравнений с переменными коэффициентами в виде периодических функций с пространственным периодом  $\lambda$ , поэтому решение следует искать в виде рядов по пространственным гармоникам:

$$\eta = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \tilde{\eta}_s \exp\left(iskz\right), \quad \tilde{\rho} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}_s \exp\left(iskz\right), \quad \tilde{\rho}^* = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma}_s \exp\left(iskz\right). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9) и используя ортогональность пространственных гармоник, из трех последних уравнений (9) получим бесконечную систему связанных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения  $\tilde{\eta}_s$ ,  $\tilde{\rho}_s$  и  $\tilde{\sigma}_s$ . Нетрудно убедиться, что в первое уравнение (9) для слабого поля входит только коэффициент  $\tilde{\rho}_1$ , зависящий от коэффициентов  $\tilde{\eta}_2$  и  $\overline{n}$ . В свою очередь, из третьего и четвертого уравнений системы (9) следует, что линейными алгебраическими уравнениями связаны друг с другом коэффициенты  $\tilde{\sigma}_3$  и  $\tilde{\eta}_2$ . Таким образом, из полученной бесконечной системы уравнений для коэффициентов разложения рядов (10) удается выделить замкнутую систему из трех линейных уравнений для коэффициентов  $\tilde{\rho}_1$ ,  $\tilde{\eta}_2$  и  $\tilde{\sigma}_3$ . При этом система уравнений для слабого поля приводится к следующему виду:

$$-\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{e}}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{\mathbf{e}} = (3g/2)\left\langle (1+i\delta+iu)^{-1} \left[\tilde{\mathbf{d}}_0(\tilde{\mathbf{d}}_0^*,\tilde{\mathbf{E}})\frac{\tilde{\eta}_2}{n_0} + \tilde{\mathbf{d}}_0(\tilde{\mathbf{d}}_0^*,\tilde{\mathbf{e}})\frac{\overline{n}}{n_0}\right]\right\rangle_{\theta,\psi,u},\tag{11}$$

$$\left(\tilde{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\xi}\Delta_{\Omega} + 3\tilde{\mu}|(\tilde{\mathbf{d}}_{0}^{*}, \tilde{\mathbf{E}})|^{2}\right)\frac{\tilde{\eta}_{2}}{n_{0}} = -3\tilde{\chi}(\tilde{\mathbf{d}}_{0}, \tilde{\mathbf{E}}^{*})(\tilde{\mathbf{d}}_{0}^{*}, \tilde{\mathbf{e}})\frac{\overline{n}}{n_{0}},\tag{12}$$

где

$$\tilde{\alpha} = 1 + 2iu/\gamma^2, \quad \tilde{\mu} = \frac{1 + 2iu}{[1 + i(\delta + u)] \left[1 - i(\delta - 3u)\right]}, \quad \tilde{\chi} = \frac{1 + iu}{(1 + iu)^2 + \delta^2}, \quad \beta = \frac{1}{4k^2 DT_1}$$

Параметр  $\xi$ , характеризующий величину вращательной диффузии, по-видимому, всегда можно считать малым. В частности, в газе характерное время ориентационной диффузии  $\tau = 6V_a N_{\nu}/\nu$  согласно [27] можно выразить через частоту столкновений  $\nu$ , объем молекулы  $V_a = 4\pi a^3/3$  и концентрацию  $N_{\nu}$  сталкивающихся частиц. Оценки показывают, что для углекислого газа при атмосферном давлении и комнатной температуре  $\xi \approx 10^{-6}$ . Параметр  $\beta$  также является малым.

Второе слагаемое в правой части уравнения (11) для амплитуды  $\tilde{\mathbf{e}}(z)$  поля слабой волны учитывает изменение поля из-за наличия анизотропии, наведенной в среде сильной волной. Первое слагаемое описывает изменение  $\tilde{\mathbf{e}}(z)$  из-за рассеяния сильной волны с амплитудой  $\tilde{\mathbf{E}}(z)$  на решетке инверсии  $\eta$ , возникающей в результате воздействия на среду интерференционного поля сильной и слабой волн.

Уравнения (7), (8) и (11), (12) позволяют исследовать закономерности распространения в нелинейной резонансной среде плоских эллиптически поляризованных волн, векторные комплексные амплитуды  $\tilde{\mathbf{E}}(z)$  и  $\tilde{\mathbf{e}}(z)$  которых можно представить в виде суперпозиции медленно меняющихся на длине волны  $\lambda$  комплексных амплитуд вида  $\tilde{U} = U \exp(i\varphi_U)$  двух циркулярно поляризованных волн:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z) = \tilde{A}(z)(x_0 - iy_0)/\sqrt{2} + \tilde{B}(z)(x_0 + iy_0)/\sqrt{2}$$

$$\tilde{\mathbf{e}}(z) = \tilde{a}(z)(x_0 - iy_0)/\sqrt{2} + \tilde{b}(z)(x_0 + iy_0)/\sqrt{2},$$
(13)

где  $x_0$  и  $y_0$  — единичные векторы, направленые вдоль осей x и y декартовой системы координат в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волн.

**2.2**. Уравнение (8) для  $\overline{n}/n_0$  является действительным и содержит переменный коэффициент  $|(\tilde{\mathbf{d}}_0^* \tilde{\mathbf{E}})|^2 = w(\theta, \psi, z)$ , который зависит от угловых координат и от комплексной амплитуды поля сильной волны, слабо меняющейся на длине  $\lambda$ . Решение этого уравнения можно представить в виде ряда по сферическим гармоникам

$$\frac{\overline{n}}{n_0} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{s} [\tilde{C}_s^m \exp\left(im\psi\right) + \tilde{D}_s^m \exp\left(-im\psi\right)] P_s^m(\cos\theta), \tag{14}$$

в котором коэффициенты  $\tilde{C}_s^m$  и  $\tilde{D}_s^m$  слабо зависят от z. Подставляя (14) в (8) и используя свойства сферических гармоник, можно найти систему связанных линейных уравнений ленточного типа относительно коэффициентов  $\tilde{C}_s^m$  и  $\tilde{D}_s^m$ , состоящую из одного неоднородного и бесконечного числа однородных уравнений. Наличие в каждом уравнении малого параметра позволяет искать неизвестные коэффициенты в виде степенного ряда по  $\xi$ . Вклад слагаемого  $DT_1 \Delta(\overline{n}/n_0)$  оказывается пренебрежимо малым из-за того, что  $\overline{n}/n_0$  слабо зависит от z. По этой причине в уравнении для  $\overline{n}/n_0$  остается только один малый параметр  $\xi$ .

Коэффициенты  $\tilde{C}_{s}^{m}$  и  $\tilde{D}_{s}^{m}$ , являющиеся решениями уравнения для  $\overline{n}/n_{0}$ , зависят от входящей в (8) величины  $|(\tilde{\mathbf{d}}_{0}^{*}\tilde{\mathbf{E}})|$ , которая пропорциональна энергии взаимодействия произвольно поляризованной молекулы с полем и различна для резонансных сред с различным состоянием поляризации вектора **d**.

Рассмотрим для определенности среду, молекулы которой имеют рабочий переход с сохраняющейся проекцией углового момента на направление действующего электрическоого поля (Q-ветвь излучения). В такой среде орт  $\tilde{\mathbf{d}}_0$  дипольного момента произвольно ориентированной в пространстве частицы линейно поляризован [16—18] и имеет вид

$$\tilde{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{z}_0 \cos\theta + \sin\theta \left( \mathbf{x}_0 \cos\psi + \mathbf{y}_0 \sin\psi \right),\tag{15}$$

где  $\mathbf{z}_0$  — единичный вектор вдоль оси z, а зависимость  $|(\tilde{\mathbf{d}}_0^* \tilde{\mathbf{E}})|^2$  от углов  $\theta$  и  $\psi$  определяется функцией

$$w(\theta, \psi, z) = \frac{\sin^2 \theta}{2} \left[ I_+ + \tilde{R} \exp\left(2i\psi\right) + \tilde{R}^* \exp\left(-2i\psi\right) \right],\tag{16}$$

в которой использованы обозначения

$$\tilde{R} = \tilde{A}^* \tilde{B} = R e^{i(\varphi_B - \varphi_A)}, \quad I_+ = |\tilde{A}|^2 + |\tilde{B}|^2 \equiv A^2 + B^2.$$
 (17)

В этом случае решение получающейся из (8) ленточной системы уравнений для коэффициентов  $\tilde{C}_s^m$  и  $\tilde{D}_s^m$  ряда (14) с точностью до членов первого порядка малости по параметру  $\xi$  имеет вид

$$C_0^0 + D_0^0 = \frac{L}{L + I_+} + \frac{\xi}{30} \frac{I_+^2 + 12R^2}{(L + I_+)^2}, \quad C_2^0 + D_2^0 = \frac{\xi}{6} \frac{I_+}{L + I_+}, \quad \tilde{C}_2^2 = (\tilde{D}_2^2)^* = -\frac{\xi}{12} \frac{\tilde{R}}{L + I_+}, \quad (18)$$

В. М. Геликонов и др.

где  $L = 1 + (\delta - u)^2$ . Выражения (18) позволяют представить с указанной выше точностью парциальную инверсную разность населенностей квантовых объектов, имеющих одинаковую скорость V, в виде

$$\overline{n} \approx \frac{n_0}{L+I_+} \left\{ L + \frac{\xi}{30} \frac{I_+^2 + 12R^2}{L+I_+} + \frac{\xi}{6} I_+ P_2^0(\cos\theta) - \frac{\xi}{12} \left[ \tilde{R} e^{i2\psi} + \kappa. c. \right] P_2^2(\cos\theta) \right\}.$$
 (19)

Из (19) видно, что распределение инверсии для этих частиц неоднородно по азимутальному углу  $\psi$  и по полярному углу $\theta$ . Следовательно, под воздействием поля сильной волны в среде появляется анизотропия, приводящая к изменению поляризации как поля сильной волны, так и поля слабой встречной волны. Однако следует отметить, что из-за малости параметра  $\xi$  эта анизотропия достаточно слаба и представлена лишь двумя сферическими гармониками.

Инверсную разность населенностей всей совокупности движущихся с разными скоростями двухуровневых квантовых объектов, имеющих одинаковое направление вектора **d** и находящихся в поле сильной волны, можно получить путем усреднения выражения для парциальной населенности (19) по функции распределения (5) частиц по скоростям:

$$\left\langle \frac{\overline{n}}{n_0} \right\rangle = 1 + \frac{\xi}{30} (I_+^2 + 12R^2) \frac{\overline{u} \left[ (\overline{u} + \sqrt{1 + I_+})^2 + \delta^2 \right] + 2\sqrt{1 + I_+} (\overline{u} + \sqrt{1 + I_+})^2}{2\sqrt{(1 + I_+)^3} \left[ (\overline{u} + \sqrt{1 + I_+})^2 + \delta^2 \right]^2} + \left\{ -I_+ + \frac{\xi}{6} I_+ P_2^0(\cos\theta) - \frac{\xi}{12} \left[ \tilde{R} e^{i2\psi} + \kappa. c. \right] P_2^2(\cos\theta) \right\} \frac{\overline{u} + \sqrt{1 + I_+}}{\sqrt{1 + I_+} \left[ (\overline{u} + \sqrt{1 + I_+})^2 + \delta^2 \right]},$$
(20)

где  $\overline{u} = k\overline{V}T_2$ .

Из сопоставления (19) и (20) видно, что в случае большого неоднородного уширения ( $\overline{u} \gg \{1, \sqrt{1 + I_+}, |\delta|\}$ ) анизотропная составляющая инверсии, характеризующая ее "угловое выгорание", уменьшается про-порционально фактору  $\{\overline{u}\sqrt{1 + I_+}\}^{-1}$ .

Подставляя (19) в векторное уравнение (7) и проводя усреднение по изотропному распределению направлений векторов  $\tilde{\mathbf{d}}_0$  (интегрирование по координатам  $\theta$ ,  $\psi$  в пределах телесного угла  $4\pi$ ), получим систему скалярных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{A}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{A} = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + i\delta - iu)^{-1} \left( Q\tilde{A} + \frac{12}{5} \tilde{D}_2^2 \tilde{B} \right) W_2(u) \,\mathrm{d}u, \tag{21}$$
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{B}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{B} = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + i\delta - iu)^{-1} \left( Q\tilde{B} + \frac{12}{5} \tilde{C}_2^2 \tilde{A} \right) W_2(u) \,\mathrm{d}u$$

для комплексных амплитуд  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  циркулярно поляризованных волн (13), в которой

$$Q = C_0^0 + D_0^0 - (C_2^0 + D_2^0)/5.$$
(22)

**2.3**. Метод решения уравнения (12) аналогичен описанному выше для уравнения (8) с той лишь разницей, что решение в виде ряда по сферическим гармоникам нужно искать для комплексной величины

$$\frac{\tilde{\eta}_2}{n_0} \equiv \tilde{q} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{s} \left[ \tilde{F}_s^m \exp\left(im\psi\right) + \tilde{G}_s^m \exp\left(-im\psi\right) \right] P_s^m(\cos\theta),\tag{23}$$

которая имеет смысл половины комплексной амплитуды пространственной гармоники  $\cos(2kz)$  решетки инверсной разности населенностей, нормированной на  $n_0$ . Величина  $\tilde{q}$  является решением уравнения (12), коэффициенты которого слабо зависят от z как функции интенсивности сильного поля. Поэтому слабо зависят от z и коэффициенты  $\tilde{F}_s^m$  и  $\tilde{G}_s^m$ , которые можно представить в виде рядов по

малым параметрам  $\xi$  и  $\beta$ , характеризующим соответственно угловую и пространственную диффузию квантовых объектов.

С точностью до членов первого порядка малости по этим параметрам коэффициенты  $\tilde{F}_s^m$  и  $\tilde{G}_s^m$  имеют вид

$$\tilde{F}_{0}^{0} + \tilde{G}_{0}^{0} = \tilde{\chi} \frac{\tilde{\rho}_{\mathrm{R}} + \tilde{\rho}_{\mathrm{L}}}{L + I_{+}} \left\{ -\beta L + \frac{\xi}{30} \frac{1}{\tilde{\alpha} + \tilde{\mu}I_{+}} \left[ \frac{-12R^{2} + LI_{+}}{L + I_{+}} + \tilde{\mu}LI_{+} + 6(\tilde{\mu}L + 1)\frac{B^{2}\tilde{\rho}_{\mathrm{R}} + A^{2}\tilde{\rho}_{\mathrm{L}}}{\tilde{\rho}_{\mathrm{R}} + \tilde{\rho}_{\mathrm{L}}} \right] \right\},$$

$$\tilde{F}_{2}^{0} + \tilde{G}_{2}^{0} = \frac{\xi}{6} \left( \tilde{\rho}_{\mathrm{R}} + \tilde{\rho}_{\mathrm{L}} \right) \tilde{\chi} \frac{L}{L + I_{+}}, \quad \tilde{F}_{2}^{2} = -\frac{\xi}{12}\tilde{A}^{*}\tilde{b}\tilde{\chi}\frac{L}{L + I_{+}}, \quad \tilde{G}_{2}^{2} = -\frac{\xi}{12}\tilde{B}^{*}\tilde{a}\tilde{\chi}\frac{L}{L + I_{+}}, \quad (24)$$

где  $\tilde{\rho}_{\rm R} = \tilde{A}^* \tilde{a}, \tilde{\rho}_{\rm L} = \tilde{B}^* \tilde{b}$ . Таким образом, нормированная на  $n_0$  амплитуда  $\tilde{q}$  пространственной гармоники возмущения парциальной инверсной разности населенностей  $\tilde{\eta}_2$  представляется в виде

$$\tilde{q} = \tilde{\chi} \frac{\tilde{\rho}_{\rm R} + \tilde{\rho}_{\rm L}}{L + I_{+}} \left\{ -\beta L + \frac{\xi}{30} \frac{1}{\tilde{\alpha} + \tilde{\mu}I_{+}} \left[ \frac{-12R^{2} + LI_{+}}{L + I_{+}} + \tilde{\mu}LI_{+} + 6\left(\tilde{\mu}L + 1\right) \frac{B^{2}\tilde{\rho}_{\rm R} + A^{2}\tilde{\rho}_{\rm L}}{\tilde{\rho}_{\rm R} + \tilde{\rho}_{\rm L}} \right] \right\} + \tilde{\chi} \frac{L}{L + I_{+}} \frac{\xi}{12} \left\{ 2\left(\tilde{\rho}_{\rm R} + \tilde{\rho}_{\rm L}\right) P_{2}^{0}(\cos\theta) - \left[\tilde{A}^{*} \tilde{b} e^{i2\psi} + \tilde{B}^{*} \tilde{a} e^{-i2\psi}\right] P_{2}^{2}(\cos\theta) \right\}$$
(25)

и зависит от углов таким же образом, как и величина  $\overline{n}$ . В изотропной составляющей  $\tilde{q}$  имеется слагаемое, которое пропорционально малому параметру  $\beta$  и становится исчезающе малым при сильной пространственной диффузии ( $\beta \to 0$ ).

Подставляя (25) в векторное уравнение (11) и проводя усреднение по изотропному распределению направлений векторов  $\tilde{d}_0$ , получим систему скалярных уравнений

$$-\frac{\mathrm{d}\tilde{a}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{a} = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + i\delta + iu)^{-1} \left( \tilde{S}\tilde{A} + \frac{12}{5}\tilde{G}_2^2\tilde{B} + Q\tilde{a} + \frac{12}{5}\tilde{D}_2^2\tilde{b} \right) W_2(u) \,\mathrm{d}u,$$
  
$$-\frac{\mathrm{d}\tilde{b}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{b} = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + i\delta + iu)^{-1} \left( \tilde{S}\tilde{B} + \frac{12}{5}\tilde{F}_2^2\tilde{A} + Q\tilde{b} + \frac{12}{5}\tilde{C}_2^2\tilde{a} \right) W_2(u) \,\mathrm{d}u,$$
(26)

в которой использованы решения двух ленточных систем уравнений для коэффициентов  $\tilde{F}^m_{\rm s}(\xi,\beta)$ ,  $\tilde{G}^m_{\rm s}(\xi,\beta)$  и  $\tilde{C}^m_{\rm s}(\xi)$ ,  $\tilde{D}^m_{\rm s}(\xi)$ , а также комбинация коэффициентов

$$\tilde{S} = \tilde{F}_0^0 + \tilde{G}_0^0 - (\tilde{F}_2^0 + \tilde{G}_2^0)/5.$$
(27)

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЛИНЕАРНО И ОРТОГОНАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН

Считается, что в нелинейной среде интерферирующие волны создают решетку диэлектрической проницаемости. В этой терминологии интерферирующими будут те встречные волны, из-за взаимодействия которых с резонансной средой образуется первая пространственная гармоника  $\cos(2kz)$  разности населенностей. Вначале исследуем взаимодействие встречных коллинеарно поляризованных волн.

**3.1.** Рассмотрим распространение встречных волн, которые циркулярно поляризованы и имеют одинаковое правое (по часовой стрелке) направление вращения вектора электрического поля (B =

В. М. Геликонов и др.

b = 0). В этом случае из (21) с учетом (22) и (18) получим уравнение

$$\frac{1}{I_{+}}\frac{\mathrm{d}I_{+}}{\mathrm{d}z} + 2\Gamma = g \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(L+I_{+})} \left\{ 1 - \frac{\xi}{30}\frac{I_{+}}{L+I_{+}} \right\} W_{2}(u) \,\mathrm{d}u$$
(28)

для интенсивности  $I_+ = A^2$  сильной волны, а из (26) с учетом (22), (24) и (27) найдем линейное уравнение

$$-\frac{1}{I_{-}}\frac{\mathrm{d}I_{-}}{\mathrm{d}z} + 2\Gamma = g \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L}{\left[1 + (\delta + u)^{2}\right](L + I_{+})} \left\{ 1 - \frac{\xi}{30}\frac{I_{+}}{L + I_{+}} \right\} W_{2}(u) \,\mathrm{d}u + g \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{LI_{+}}{L + I_{+}} \operatorname{Re}\left\{ \frac{\tilde{\chi}}{1 + i\delta + iu} \left[ -\beta + \frac{\xi}{30}\frac{I_{+} - \tilde{\alpha}(L + I_{+})}{(\tilde{\alpha} + \tilde{\mu}I_{+})(L + I_{+})} \right] \right\} W_{2}(u) \,\mathrm{d}u$$
(29)

для интенсивности  $I_{-} = a^2$  слабой встречной волны с неоднородным (зависящим от функции  $I_{+}(z)$ ) коэффициентом усиления. Сопоставляя (28) и (29), можно убедиться, что в среде из неподвижных частиц (когда  $W_2(u) = \delta(u)$ ) более мощная волна имеет большее локальное усиление, и различие в инкрементах увеличивается при уменьшении диффузии (т. е. при росте  $\xi$  и  $\beta$ ). Этот вывод согласуется с результатами скалярной теории взаимодействия поля с веществом для однородно уширенной резонансной среды [33, 34], согласно которым механизм рассеивания встречных волн на первой пространственной гармонике инверсии  $n/n_0$  обеспечивает преимущественное усиление более мощной волны. В неоднородно уширенной среде, состоящей из движущихся частиц, при определенных соотношениях параметров  $\xi$  и  $\beta$  подобное утверждение об инкрементах сильной и слабой волн может быть справедливым лишь при определенных значениях отстройки  $\delta$ .

**3.2**. Рассмотрим распространение встречных линейно поляризованных волн с коллинеарными поляризациями ( $\tilde{A} = \tilde{B}$  и  $\tilde{a} = \tilde{b}$ ). Прежде всего найдем уравнение для интенсивности  $I_+ = 2A^2$  сильной волны:

$$\frac{1}{I_{+}}\frac{\mathrm{d}I_{+}}{\mathrm{d}z} + 2\Gamma = g \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(L+I_{+})} \left\{ 1 - \frac{4\xi}{30}\frac{I_{+}}{L+I_{+}} \right\} W_{2}(u) \,\mathrm{d}u.$$
(30)

Оно совпадает с (28) с точностью до замены коэффициента  $\xi/30$  на  $4\xi/30$ . Это означает, что волна с линейной поляризацией, распространяясь в инвертированной резонансной среде Q-типа, при прочих равных условиях усиливается слабее, чем циркулярно поляризованная волна такой же интенсивности.

Из уравнений (26) с учетом (18), (22), (24) и (27) получим уравнение

$$-\frac{1}{I_{-}}\frac{\mathrm{d}I_{-}}{\mathrm{d}z} + 2\Gamma = g \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L}{\left[1 + (\delta + u)^{2}\right](L + I_{+})} \left\{ 1 - \frac{4\xi}{30}\frac{I_{+}}{L + I_{+}} \right\} W_{2}(u) \,\mathrm{d}u + g \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{LI_{+}}{L + I_{+}} \operatorname{Re}\left\{ \frac{\tilde{\chi}}{1 + i\delta + iu} \left[ -\beta + \frac{4\xi}{30}\frac{I_{+} - \tilde{\alpha}(L + I_{+})}{(\tilde{\alpha} + \tilde{\mu}I_{+})(L + I_{+})} \right] \right\} W_{2}(u) \,\mathrm{d}u$$
(31)

для интенсивности  $I_{-} = 2a^2$  слабой встречной волны с линейной поляризацией, совпадающей с поляризацией сильной волны. Уравнение (31) переходит в уравнение (29) при замене  $4\xi/30$  на  $\xi/30$ . Согласно (31) интенсивность слабой волны, поляризованной одинаково с сильной встречной линейно поляризованной волной, изменяется слабее, чем изменялась бы интенсивность слабой циркулярно поляризованной волны при насыщении усиления полем сильной встречной волны с такой же циркулярной поляризацией.

**3.3.** Рассмотрим изменение поляризаций встречных волн. С этой целью определим состояние поляризации каждой бегущей волны отношением осей соответствующего эллипса поляризации,

$$s_{+} = (A - B)/(A + B), \quad s_{-} = (a - b)/(a + b),$$
(32)

и углом между главной осью соответствующего эллипса поляризации и осью x выбранной системы координат

$$\varphi_{+} = (\varphi_A - \varphi_B)/2, \quad \varphi_{-} = (\varphi_a - \varphi_b)/2, \tag{33}$$

а также углом

$$\varphi_+ - \varphi_- = \Phi/2 \tag{34}$$

между главными осями эллипсов.

Используя (34), из (21) и (26) получим уравнения для поляризационных и энергетических характеристик встречных волн, имеющих одинаковую линейную поляризацию поля (A = B, a = b,  $\varphi_a = \varphi_b$ ,  $\varphi_A = \varphi_B$ ) в некотором сечении  $z_0 = \text{const.}$  Уравнения для отношений осей (32) и угла  $\Phi$  в этом случае имеют вид закона сохранения поляризаций взаимодействующих волн:

$$\mathrm{d}s_{\pm}/\mathrm{d}x = 0, \quad \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}z = 0. \tag{35}$$

**3.4**. Результаты работ [5, 6, 22] сформировали представление о том, что встречные ортогонально поляризованные (не интерферирующие в линейных средах) волны не создают в изотропной двухуровневой среде пространственную решетку диэлектрической проницаемости. Однако оказывается, что такие представления не совсем корректны и должны быть пересмотрены.

Рассмотрим взаимодействие встречных циркулярно поляризованных волн, имеющих различные направления вращения вектора электрического поля (B = a = 0). Из (24) найдем, что амплитуда  $F_2^2$  сферической гармоники возмущения парциальной инверсной разности населенностей  $\tilde{\eta}_2$  в этом случае оказывается отличной от нуля. Она не зависит от величины  $\beta$  (пространственной диффузии), растет при уменьшении угловой диффузии (с ростом  $\xi$ ) и, очевидно, будет наибольшей в среде, где угловая диффузия отсутствует. Изменение интенсивности сильной волны в этом случае по-прежнему подчиняется уравнению (28), а интенсивность  $I_- = b^2$  встречной слабой волны описывается уравнением

$$-\frac{1}{I_{-}}\frac{\mathrm{d}I_{-}}{\mathrm{d}z} + 2\Gamma = g \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L}{\left[1 + (\delta + u)^{2}\right](L + I_{+})} \left\{ 1 - \frac{\xi}{30}\frac{I_{+}}{L + I_{+}} - \frac{\xi}{5}I_{+} \right\} W_{2}(u) \,\mathrm{d}u.$$
(36)

Второй член в правой части (36) учитывает вклад в изменение  $I_{-}$  рассеяния ортогонально поляризованной встречной волны на пространственной гармонике  $\cos(2kz)$  возмущения диэлектрической проницаемости. Из сопоставления (28) и (36) следует, что больший инкремент имеет сильная волна.

**3.5.** Рассмотрим распространение встречных волн, имеющих линейные ортогональные поляризации (A = B, a = b,  $\varphi_a - \varphi_b = \pi$ ,  $\varphi_A - \varphi_B = 0$ ) в некотором сечении  $z_0 = \text{const.}$  Изменение интенсивности сильной волны  $I_+ = 2A^2 \equiv E_x^2$  описывается в этом случае уравнением (30). Интенсивность слабой волны  $I_- = 2a^2 \equiv E_y^2$  изменяется согласно уравнению

$$-\frac{1}{I_{-}}\frac{\mathrm{d}I_{-}}{\mathrm{d}z} + 2\Gamma = g \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L}{\left[1 + (\delta + u)^{2}\right](L + I_{+})} \left\{ 1 - \frac{\xi}{15} \frac{(3I_{+} + L)I_{+}}{L(L + I_{+})} \right\} W_{2}(u) \,\mathrm{d}u + g \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{LI_{+}}{L + I_{+}} \operatorname{Re}\left\{ \frac{\tilde{\chi}}{1 + \mathrm{i}\delta + \mathrm{i}u} \left[ -\beta + \frac{4\xi}{30} \frac{\mathrm{I}_{+} - \tilde{\alpha}(\mathrm{L} + \mathrm{I}_{+})}{(\tilde{\alpha} + \tilde{\mu}\mathrm{I}_{+})(\mathrm{L} + \mathrm{I}_{+})} \right] \right\} W_{2}(u) \,\mathrm{d}u.$$
(37)

В. М. Геликонов и др.

В отличие от предыдущих случаев из уравнений (36) и (37) следует, что сильная волна имеет меньший инкремент. Уравнения для  $s_{\pm}$  и  $\Phi$  точно совпадают с (35), поэтому ортогональные линейно поляризованные волны, как и коллинеарные линейно поляризованные, распространяются без изменения состояния своих поляризаций.

**3.6.** В случае предельно сильной диффузии  $\beta \to 0, \xi \to 0$  уравнения для сильной волны

$$\frac{1}{I_{+}}\frac{\mathrm{d}I_{+}}{\mathrm{d}z} + 2\Gamma = g\frac{\overline{u} + \sqrt{1 + I_{+}}}{\sqrt{1 + I_{+}}\left[(\overline{u} + \sqrt{1 + I_{+}})^{2} + \delta^{2}\right]}$$
(38)

и для слабой волны

$$-\frac{1}{I_{-}}\frac{\mathrm{d}I_{-}}{\mathrm{d}z} + 2\Gamma = g \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[1 + (\delta - u)^2]}{[1 + (\delta + u)^2] [1 + I_{+} + (\delta - u)^2]} \frac{\overline{u}}{\pi (u^2 + \overline{u}^2)} \,\mathrm{d}u \tag{39}$$

приобретают одинаковый вид вне зависимости от состояния их поляризаций. Однако в отличие от случая однородного уширения, когда подобные уравнения полностью совпадают, превращаясь в уравнения переноса лучистой энергии [35, 36], эти уравнения заметно отличаются друг от друга.

В другом предельном случае отсутствия диффузии ( $D = 0, \tau^{-1} = 0$ ) амплитуда пространственной гармоники возмущения инверсии  $\tilde{q} = \overline{(\eta/n_0)} \exp(-i2kz)^{\lambda}$  при прочих равных условиях имеет наибольшее значение, следовательно, наибольшую роль играет механизм рассеивания различных встречных волн друг в друга. В приближении Ван-дер-Поля величина  $\tilde{q}$  определяется как коэффициент разложения в ряд Фурье почти периодической функции  $\eta/n_0$ , которая является стационарным решением последнего уравнения системы (9), осциллирующим по координате *z* с медленно меняющейся на периоде  $\lambda/2$  амплитудой осцилляций.

#### 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

Из систем уравнений (21) и (26) следует, что за исключением двух рассмотренных выше частных случаев поляризации сильной и слабой волн всегда трансформируются: оси эллипса поляризации поля каждой из волн поворачиваются, отношение осей изменяется. Изменение поляризации сильной волны обусловлено анизотропией нелинейной диэлектрической проницаемости  $\tilde{\varepsilon}_0^{\rm NL}$ , которая наводится полем волны и из-за которой добавки  $\tilde{h}_{\pm} = h'_{\pm} + ih''_{\pm}$  к локальным постоянным распространения противоположно вращающихся циркулярно поляризованных компонент поля волны оказываются отличными друг от друга. Несовпадение реальных частей  $h'_{\pm}$  приводит к вращению осей эллипса поляризации, а из-за различия мнимых частей  $h''_{\pm}$  изменяется ее эллиптичность [7, 8, 12, 14].

При несовпадении частот поля и перехода проницаемость  $\tilde{\varepsilon}_0^{\text{NL}}$  имеет не только мнимую часть  $\varepsilon'_0$ , но и реальную часть  $\varepsilon'_0$ , пропорциональную расстройке  $\delta$ . И  $\varepsilon'_0$ , и  $\varepsilon''_0$  могут рассматриваться как независимые физические факторы, каждый их которых вносит свой собственный вклад в преобразование поляризации сильной волны.

В отличие от сильной волны изменение поляризации слабой волны происходит под воздействием двух существенно разных физических факторов. Одним из них является анизотропия нелинейной диэлектрической проницаемости, наводимая в среде сильной волной, другим — рассеяние сильной волны на решетке инверсной разности населенностей, возникающей в результате взаимодействия встречных сильной и слабой волн. В соответствии с этим можно считать, что слабая встречная волна распространяется в линейной неоднородной среде с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_0 + \tilde{\varepsilon}_1 \exp{(i2kz)}$ , один компонент которой ( $\tilde{\varepsilon}_0$ ), слабо зависящий от продольной координаты *z*, обусловлен воздействием на среду поля сильной волны, а второй является решеткой диэлектрической проницаемости, образующейся из-за наличия решетки инверсии населенностей ( $\tilde{\varepsilon}_1 \propto i\tilde{q}$ ).

**4.1.** Изменение поляризаций встречных волн в пространстве взаимодействия можно описать уравнениями для величин  $\varphi_{\pm}$  и  $s_{\pm}$ . Из системы (21) получаются уравнения

$$\frac{1}{s_{+}}\frac{\mathrm{d}s_{+}}{\mathrm{d}z} = \frac{\xi}{5}gAB\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{L(L+I_{+})}W_{2}(u)\,\mathrm{d}u,\tag{40}$$

$$\frac{d\varphi_{+}}{dz} = -\frac{\xi}{20} g \left(A^{2} - B^{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta - u}{L(L + I_{+})} W_{2}(u) du, \qquad (41)$$

определяющие изменение состояния поляризации сильной волны вследствие наведенной ею анизотропии диэлектрической проницаемости [7–9]. Из уравнений (40), (41) следует, что в инвертированной среде (g > 0) в случае смещения частоты излучения от центра линии люминесценции в высокочастотную область спектра ( $\delta > 0$ ) оси эллипса поляризации поля  $\tilde{\mathbf{E}}$  изменяются, поворачиваясь против направления вращения вектора электрического поля более мощной циркулярно поляризованной составляющей. В этом случае  $s_+$  растет, и эллиптически поляризованная волна при прохождении через слой достаточно большой толщины трансформируется в циркулярно поляризованную [7, 12].

**4.2.** Система (26) позволяет получить для параметров эллипса поляризации поля  $\tilde{\mathbf{e}}$  слабой волны уравнения

$$-\frac{\mathrm{d}s_{-}}{\mathrm{d}z} = \frac{gAB}{(a+b)^2}H_{\mathrm{R}},\tag{42}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\varphi_{-}}{\mathrm{d}z} = \frac{g}{4}\frac{AB}{ab}H_{\mathrm{I}},\tag{43}$$

правые части которых находятся из следующего выражения:

В. М. Геликонов и др.

$$\begin{aligned} H_{\rm R} + iH_{\rm I} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_2(u)\,\mathrm{d}u}{L\,(L+I_+)\,[1+i(\delta+u)]} \,\left\{ (b^2 e^{i\Phi} - a^2 e^{-i\Phi}) \left( -\frac{\xi}{5} + \tilde{\chi} \left[ -\beta L + \frac{\xi}{30} \frac{1}{\tilde{\alpha} + \tilde{\mu}I_+} \left( \frac{-12R^2 + LI_+}{L+I_+} - \tilde{\alpha}I_+ \right) \right] \right) + \tilde{\chi} \frac{\xi}{5} \frac{\tilde{\mu}L + 1}{\tilde{\alpha} + \tilde{\mu}I_+} \left( A^2 b^2 e^{i\Phi} - B^2 a^2 e^{-i\Phi} \right) + \tilde{\chi} \left[ \left( -\beta + \frac{\xi}{5} \right) L + \frac{\xi}{30} \frac{1}{\tilde{\alpha} + \tilde{\mu}I_+} \left( \frac{-12R^2 + LI_+}{L+I_+} - \tilde{\alpha}I_+ \right) \right] \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) ab \right\}. \end{aligned}$$
(44)

Из выражения (44) отчетливо видны вклады от постоянной составляющей анизотропной диэлектри-  
ческой проницаемости 
$$\tilde{\varepsilon}_0$$
, наведенной сильной волной, и от комплексной амплитуды  $\tilde{\varepsilon}_1 \propto \tilde{q} \propto \tilde{\chi}$  про-  
странственной гармоники { $\tilde{\varepsilon}_1 \exp(i2kz) + \kappa. c.$ } решетки диэлектрической проницаемости, образован-  
ной встречными (сильной и слабой) волнами.

Единственный член в правой части (44), не зависящий от  $\tilde{\chi}$  и, следовательно, от амплитуды  $\tilde{q} \propto \tilde{\chi}$  пространственной гармоники инверсии населенностей, учитывает вклад в изменение поляризации поля слабой волны, который обусловлен постоянной анизотропной диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\varepsilon}_0$ , наведенной в среде полем сильной встречной волны. Величина этого вклада определяется угловой диффузией, эллиптичностью и интенсивностью слабой волны, наличием отстройки частоты сильной волны от центра линии люминесценции, а также величиной угла между главными осями эллипсов поляризации полей сильной и слабой волн. В отсутствие отстройки ( $\delta = 0$ ) при ортогональном или коллинеарном расположении больших осей эллипсов поляризации встречных волн ( $\Phi = \pi, 0$ ) этот член не будет вносить изменений в ориентацию эллипса поляризации поля слабой волны в пространстве вдоль всего пути ее распространения ( $d\varphi_-/dz = 0$ ), а его вклад в изменение эллиптичности поляризации будет таким, что асимптотически на большой трассе поляризация волны будет превращаться в круговую.

**4.3.** Из уравнений (42)–(44) видно, что эффективность изменения поляризации поля слабой волны, обусловленная рассеянием сильного поля на решетке инверсии населенностей ( $\tilde{q} \propto \tilde{\chi} \propto -i\tilde{\varepsilon}_1 \neq 0$ ), зависит от соотношений осей эллипсов поляризации и интенсивностей  $I_{\pm}$  встречных волн, от угла между главными осями эллипсов поляризации  $\Phi$ , а также от коэффициентов пространственной ( $\beta$ ) и угловой ( $\xi$ ) диффузии в среде. Из (44) следует, что при очень большом значении угловой диффузии ( $\xi \rightarrow 0$ ) правые части (42) и (43) пропорциональны  $\beta$  и, следовательно, будут расти при уменьшении пространственной пространственной диффузии ( $\beta \rightarrow 0$ ) правые части (42) и (43) пропорциональны  $\beta$  и, следовательно, будут расти при очень большой пространственной диффузии ( $\beta \rightarrow 0$ ) правые части (42) и (43) будут пропорциональны  $\xi$  и будут расти при уменьшении угловой диффузии. Это дает основание предполагать, что правые части уравнений для изменения эллиптичности  $s_-$  и угла  $\varphi_-$  достигнут своих максимальных значений при отсутствии угловой и пространственной диффузии.

**4.3.1.** Вначале рассмотрим уравнение (43) при отсутствии  $\varepsilon'_0$  (т.е. при  $\delta = 0$ ) и выявим некоторые закономерности изменения  $\varphi_-$  в приближении  $\tilde{\varepsilon}_0 = 0$ ,  $\varphi_+ = \text{const}$ , учитывая только механизмы рассеяния волн на анизотропной решетке  $\varepsilon_1 \propto \tilde{\chi}$ . Из (44) видно, что в случае  $\delta = 0$  каждое из трех слагаемых подынтегрального выражения состоит из произведения двух сомножителей, один из которых не зависит от u, а второй является комплексной функцией переменной iu. В результате усреднения по u первый сомножитель в каждом слагаемом не изменится, а от вторых сомножителей останутся только средние действительные составляющие. Таким образом, мнимая часть (44) будет создаваться  $d\varphi_-/d(gz) \propto \sin \Phi$  и что в зависимости от величины  $\Phi = \Phi_0$  в сечении  $z = z_0$  в области  $z < z_0$  могут существовать два возможных направления вращения осей эллипса поляризации поля  $\tilde{\mathbf{e}}$ . Если величина  $\Phi_0 \in (0; \pi)$ , то главная ось эллипса поляризации поля  $\tilde{\mathbf{e}}$  поворачивается так, что угол  $\varphi_-$  растет в направлении перемещения фазового фронта поля слабой волны, а угол  $\Phi$  с увеличением z

*В. М. Геликонов и др.* 1067

(т. е. в направлении перемещения фазового фронта сильной волны) монотонно растет, асимптотически приближаясь к значению  $\pi/2$ .

**4.3.2.** Как следует из уравнения (42) и выражения (44), решетка  $\varepsilon_0''$  вносит также заметный вклад в изменение эллиптичности поляризации слабой волны. В рассматриваемом случае ( $\delta = 0$ ) в подынтегральной части выражения (44) помимо члена, обусловленного наведенной сильным полем анизотропией, следует выделить три слагаемых, пропорциональных  $\tilde{\chi}$ . Каждое из них можно рассматривать как соответствующие независимым компонентам физического механизма трансформации эллиптичности поля слабой волны  $\tilde{\mathbf{e}}$  на решетке  $\varepsilon_0''$ . Вклад двух первых решеточных членов в изменение  $s_-$ , так же, как и влияние наведенной сильным полем анизотропии, явно зависит от взаимной ориентации полей  $\tilde{\mathbf{e}}$ и  $\tilde{\mathbf{E}}$ : он пропорционален сов  $\Phi$ . Величина первого слагаемого зависит явно от эллиптичности поляризации  $s_-$  поля слабой волны и от интенсивности  $I_+$  сильной волны, а величина второго пропорциональна выражению ( $A^2b^2 - B^2a^2$ ), которое может иметь любой знак. Это означает, что при разных знаках  $s_-$ , сов  $\Phi$  и приведенного выше выражения вклады первых двух решеточных членов могут приводить как к уменьшению, так и к увеличению  $|s_-|$  слабой волны в направлении распространения ее фазового фронта.

Последнее третье слагаемое в подынтегральной части (44) пропорционально  $(A^2 - B^2)$ , следовательно, при  $s_+ > 0$  и  $\beta \gg \xi$  это слагаемое способствует уменьшению  $|s_-|$  и асимптотическому преобразованию эллиптически поляризованной волны в линейно поляризованную.

Если в некотором сечении  $z_0$  сильная и слабая волны имеют линейные поляризации, то в случае  $\delta = 0$  они остаются линейно поляризованными на всей трассе.

**4.4.** При наличии отстройки  $\delta$  частоты поля от частоты центра линии люминесценции появляется вторая физическая причина трансформации поляризации полей  $\tilde{\mathbf{E}}$  и  $\tilde{\mathbf{e}}$ . Она заключается в том, что из-за наличия  $\delta$  образуется  $\varepsilon'_0$  и изменяются постоянные распространения  $\tilde{h}_{\pm}$  циркулярно поляризованных волн. В соответствии с уравнениями (40) и (41) при  $\delta \neq 0$  изменяется характер трансформации эллиптичности поляризации поля  $\tilde{\mathbf{E}}$  сильной волны, а также происходит вращение осей эллипса поляризации  $\tilde{\mathbf{E}}$  [3–9]. Оси эллипса поляризации  $\tilde{\mathbf{E}}$  при прохождении участка инвертированной среды поворачиваются по часовой стрелке, если частота поля смещена от частоты центра линии люминесценции в высокочастотную область спектра ( $\delta > 0$ ) и если вектор поля вращается вправо (A > B и  $s_+ > 0$ ). Из уравнений (40) и (41) можно найти, что при  $\delta^2 \propto (\overline{u} + \sqrt{1 + I_+})^2$  вклады, которые вносят  $\varepsilon'_0$  и  $\varepsilon''_0$ в изменение поляризации поля  $\tilde{\mathbf{E}}$ , по порядку величины оказываются сопоставимыми друг с другом. Совершенно аналогичный вывод следует из анализа уравнений (42) и (43), описывающих изменения поляризации поля  $\tilde{\mathbf{e}}$  слабой волны.

**4.5.** В условиях предельно сильной диффузии ( $\beta \rightarrow 0$  и  $\xi \rightarrow 0$ ) в среде исчезают анизотропия и пространственная неоднородность инверсии. Сильная диффузия превращает нелинейную среду, состоящую из хаотически ориентированных двухуровневых систем, в практически однородную и изотропную. Все молекулы такой среды в равной мере (на одну треть своих возможностей) принимают участие во взаимодействии с сильным полем независимо от состояния его поляризации и независимо от состояния поляризации собственного дипольного момента **d** рабочего перехода. В этих условиях волны взаимодействуют друг с другом как в среде, в которой векторы **d** всех молекул коллинеарны полю и каждая молекула имеет втрое меньшее сечение резонансного поглощения. Уравнения для интенсивностей  $I_{\pm}$ приобретают вид (38), (39) независимо от поляризации поля каждой из встречных волн. Состояние поляризации волн в этом случае описывается уравнениями (35), поэтому форма эллипса поляризации каждой волны остается неизменной во всех сечениях слоя резонансной среды. Подобные уравнения использовались ранее многими авторами (см., например, [35, 36]) для описания распространения неинтерферирующих волн в резонансных средах в рамках скалярной теории взаимодействия излучения с веществом, имеющим однородное уширение линии люминесценции.

4.6. Уравнения (21) и (26) можно использовать для описания взаимодействия произвольно поля-

ризованных встречных волн в поглощающей двухуровневой среде. Для этого достаточно произвести замену  $g \to -g$ . Если при этом сделать замену  $z \to -z$ , то все полученные результаты останутся справедливыми. Это означает, что в поглощающей среде изменение поляризации каждой волны в направлении распространения ее фазового фронта будет происходить так же, как в инвертированной среде изменялась бы ее поляризация в направлении, противоположном перемещению фазового фронта. Используя указанное обстоятельство, можно сформулировать некоторые закономерности изменения поляризации встречных волн в поглощающих средах.

**4.6.1.** Из системы уравнений (40), (41) следует, что в поглощающей среде (g < 0) в случае смещения частоты излучения от центра линии люминесценции в область высоких частот ( $\delta > 0$ ) оси эллипса поляризации поля  $\tilde{\mathbf{E}}$  изменяются при распространении фазового фронта вдоль оси z, поворачиваясь по направлению вращения вектора поля более мощной циркулярно поляризованной составляющей. В этом случае  $s_+$  убывает, и эллиптически поляризованная волна при прохождении через слой достаточно большой толщины трансформируется в линейно поляризованную [7].

**4.6.2.** Аналогичным образом в пунктах 4.3 и 4.4 все выводы о трансформации поляризации поля  $\tilde{\mathbf{e}}$  слабой волны (изменение эллиптичности  $s_{-}$  и вращение осей эллипса поляризации  $\varphi_{-}$ ) в направлении распространения ее фазового фронта меняются на противоположные.

**4.7.** Используем представленную теорию для объяснения экспериментально наблюдавшегося [1] вращения вектора поляризации поля слабой (пробной) волны, распространявшейся в поглощающей резонансной среде в условиях ее насыщения полем сильной встречной волны. С этой целью произведем пересчет экспериментальных данных в безразмерные переменные и параметры, которые содержатся в настоящей теории.

В эксперименте, который будет подробно описан во второй части работы, использовалось излучение гелий-неонового лазера на длине волны 3,39 мкм. Пучок излучения имел диаметр  $2r_b = 0,2$  см и мощность  $\Pi_b = 1,5$  мВт. Поля сильной и слабой встречных волн имели линейные поляризации, ориентированные на границе среды под углом  $45^{\circ}$  друг к другу. Резонансной поглощающей средой служил метан (CH<sub>4</sub>), находившийся при комнатной температуре 300 К и давлении  $10^{-2}$  торр в кювете длиной 100 см. Было обнаружено, что векторы поляризации поля слабой волны на границах кюветы образуют угол примерно 8'. Экспериментально были также определены ширина (на уровне 0,5 по мощности) провала Лэмба—Беннета в частотной зависимости логарифма коэффициента прохождения слабой волны через кювету с метаном в условиях насыщения рабочего перехода газа полем встречной сильной волны, равная 440 кГц, и абсолютное значение декремента на центральной частоте линии поглощения в отсутствие сильной волны, равное 0,18 см<sup>-1</sup>·торр<sup>-1</sup>.

Из уравнения (31) для случая  $\delta = 0, \Gamma = 0, I_{+} = 0$  нетрудно получить соотношение

$$|g|/(\overline{u}+1) = 0.0018 \,\mathrm{cm}^{-1},\tag{45}$$

которое устанавливает связь между теоретическими параметрами задачи и экспериментально определенным линейным коэффициентом поглощения, существенно упрощающуюся в часто встречающемся случае  $\overline{u} \gg 1$ . На основании приближенного соотношения  $\nu \cong 1/T_2$ , связывающего частоту соударений  $\nu$  и время поперечной релаксации  $T_2$  совокупности движущихся резонансных объектов, а также известных (см. [26]) выражений для  $\nu$  и средней тепловой скорости  $\overline{V}$  величина параметра  $\overline{u} \equiv \overline{u}_1$ , определяющего отношение неоднородной ширины линии поглощения к ее однородной ширине, в этом случае по теоретическим оценкам получается примерно равной 20000, а абсолютное значение  $\nu_1 \equiv (1/T_2)_1$  — примерно равным 36,5 кГц. Если воспользоваться экспериментальными данными и для оценки частоты столкновений взять измеренную полуширину провала Лэмба–Беннета  $\nu_2 \equiv (1/T_2)_2 = (\Delta f)_{0,5} = 220$  кГц, то параметр  $\overline{u}$  будет иметь значение  $\overline{u}_2 \cong 3000$ . Если одно из значений  $\overline{u}_1 = 20000$  условно считать теоретическим, а второе  $\overline{u}_2 = 3000$  — экспериментальным, то

при расчете угла поворота эллипса поляризации поля слабой волны согласно соотношению (45) каждому из них нужно поставить в соответствие два различных линейных коэффициента поглощения |g<sub>1,2</sub>|.

В результате указанного выше пересчета необходимо найти безразмерную интенсивность  $I_+$  поля сильной волны, роль которой в эксперименте играет пучок излучения лазера. Согласно экспериментальным данным интенсивность в центре насыщающего пучка, прошедшего кювету с поглощающим газом, равна  $|E_0|^2 = 8\Pi_b/(cr_b^2) \cong 4 \cdot 10^{-4} (CGSE)^2$ , где c — скорость света в вакууме. Однако интенсивность поля насыщения в среде CH<sub>4</sub> неизвестна, поскольку неизвестны абсолютное значение матричного элемента **d** и произведение времен релаксации  $T_1T_2 \cong \nu^{-2}$ . В частности, граничные значения последней величины согласно приведенным выше оценкам могут отличаться почти в 40 раз. По этой причине безразмерная интенсивность  $I_+$  не может быть определена точнее, чем область изменения  $I_+$ , ограниченная значениями 0,1 и 10.

На рис. 1 представлены зависимости угла поворота вектора поляризации поля слабой встречной волны

$$\varphi_{-} \equiv \varphi_{\rm C} = \varphi_{\rm A} + \varphi_{\rm L} \tag{46}$$

и угол  $\varphi_A$  от интенсивности  $I_+$  поля сильной волны для двух предельных значений параметра  $\overline{u}$  и пары коэффициентов диффузии  $\beta_1 = 10^{-6}$  и  $\xi_1 = 10^{-8}$ , которые рассчитаны по известным формулам [26–29] для безграничного объема газа CH<sub>4</sub> при температуре 300 К и давлении  $10^{-2}$  торр. Из рис. 1а видно, что угол поворота  $\varphi_C$  при выбранных параметрах крайне мал и составляет сотые доли секунды. Зависимость  $\varphi_C$  от  $I_+$  — немонотонная выпуклая кривая, имеющая максимум в области полей, интенсивность которых больше интенсивности поля насыщения ( $I_+ = 1$ ).

Для сравнения на рис. 16 изображены соответствующие зависимости вклада  $\varphi_A$ , который вносит в угол поворота  $\varphi_C$  анизотропная диэлектрическая проницаемость среды  $\tilde{\varepsilon}_0$ , наведенная сильной волной. Угол  $\varphi_A$  по величине существенно (почти на три порядка) меньше угла  $\varphi_L$ , который представляет собой вклад пространственной гармоники { $\tilde{\varepsilon}_1 \exp(i2kz) + \kappa. c.$ } решетки диэлектрической проницаемости, образованной встречными (сильной и слабой) волнами. Несмотря на достаточно большую разницу абсолютных значений, компоненты  $\varphi_A$  и  $\varphi_L$  зависят от интенсивности сильной волны по очень близким законам: они растут при увеличении  $I_+$  до некоторого экстремального значения и убывают из-за насыщения резонансного перехода в области больших значений интенсивности поля сильной волны  $I_+ \gg 1$ . При достаточно больших  $I_+$  в широком диапазоне значений параметра  $\overline{u}$  величины  $\varphi_A$ и  $\varphi_L$  имеют противоположные знаки.

Аналитические оценки указывают на то, что абсолютная величина угла  $\varphi_A$  практически не зависит от параметра  $\beta$  и растет почти по линейному закону при увеличении параметра  $\xi$ , т. е. при уменьшении угловой диффузии в объеме взаимодействия поля с резонансной средой. Величина угла  $\varphi_L$ , напротив, зависит не только от угловой диффузии, но и практически прямо пропорциональна  $\beta$ , поскольку именно из-за пространственной диффузии наиболее сильно изменяется решетка диэлектрической проницаемости. Изображенные на рис. 1 зависимости и проведенные дополнительные исследования свидетельствуют о том, что значения  $\varphi_A$  и  $\varphi_L$  сильно (и немонотонно) зависят от параметра  $\overline{u}$ .

На рис. 2а и 26 представлены зависимости угла поворота  $\varphi_{\rm C}$  и угла  $\varphi_{\rm A}$  от интенсивности  $I_+$  для двух использованных выше значений параметра  $\overline{u}$  ( $\overline{u}_1 = 20000, \overline{u}_2 = 3000$ ) и очень больших по сравнению с  $\beta_1$ ,  $\xi_1$  коэффициентов диффузии  $\beta_2 = 10^{-1}$  и  $\xi_2 = 10^{-2}$ . Из сопоставления представленных на рис. 1а и 2а результатов видно, что увеличение величины  $\beta$  на пять порядков приводит к увеличению практически на те же пять порядков угла поворота  $\varphi_{\rm C}$ , но при этом сохраняются закономерности его изменения как функции  $I_+$ . Для выбранной пары коэффициентов диффузии диапазон изменения угла поворота  $\varphi_{\rm C}$  (внутри области возможных вариаций интенсивности  $0,1 \leq I_+ \leq 10$  и параметра  $\overline{u}_1 \geq \overline{u} \geq \overline{u}_2$ ) оказывается таким, что внутри него находится экспериментально определенный во второй части данной работы угол вращения  $\Delta \varphi_{\rm C} \approx 8'$ .


Рис. 1а. Зависимости угла поворота вектора поляризации слабой волны  $\varphi_{\rm C}$  от интенсивностей поля сильной встречной волны  $I_+$ , рассчитанные для коэффициентов диффузии  $\beta_1 = 10^{-6}$ ,  $\xi_1 = 10^{-8}$  и двух значений параметра  $\overline{u}$ :  $\overline{u}_1 = 20000$  (кривая 1),  $\overline{u}_2 = 3000$  (кривая 2).



Рис. 16. Зависимости угла  $\varphi_A$  от интенсивности  $I_+$ , рассчитанные для коэффициентов диффузии  $\beta_1 = 10^{-6}, \xi_1 = 10^{-8}$  и двух значений параметра  $\overline{u}: \overline{u}_1 = 20000$  (кривая 1),  $\overline{u}_2 = 3000$  (кривая 2).



Рис. 2а. Зависимости угла поворота вектора поляризации поля слабой волны  $\varphi_{\rm C}$  от интенсивности  $I_+$ , рассчитанные для коэффициентов диффузии  $\beta_2 = 10^{-1}, \xi_2 = 10^{-2}$  и двух значений параметра  $\overline{u}: \overline{u}_1 = 20000$  (кривая 1),  $\overline{u}_2 = 3000$ (кривая 2)



Рис. 26. Зависимости угла  $\varphi_A$  от интенсивности  $I_+$ , рассчитанные для коэффициентов диффузии  $\beta_2 = 10^{-1}, \xi_2 = 10^{-2}$  и двух значений параметра  $\overline{u}$ :  $\overline{u}_1 = 20000$  (кривая 1),  $\overline{u}_2 = 3000$  (кривая 2)

В. М. Геликонов и др.

Сопоставление расчетов, представленных на рис. 16 и 26, позволяет установить, что в результате увеличения коэффициента  $\xi$  на шесть порядков ровно на шесть порядков вырос угол  $\varphi_A$ , который вносит в угол поворота анизотропия диэлектрической проницаемости, наведенная полем сильной волны.



Рис. 3. Зависимости компонентов  $\varphi_A$ ,  $\varphi_L$  и угла поворота  $\varphi_C$ , выраженных в угловых минутах, от интенсивности  $I_+$ , рассчитанные для коэффициентов диффузии  $\beta_3 = \xi_3 = 0,10$  и параметра  $\overline{u}_2 = 3000$ 

Чтобы оценить возможность использования достаточно больших коэффициентов диффузии  $\beta_2 =$ 0,10 и  $\xi_2 = 0,01$  для теоретической интерпретации описанного во второй части работы эксперимента, необходимо сопоставить реальные условия взаимодействия излучения с резонансной средой и приближения, принятые в настоящей работе. Реально резонансная среда взаимодействует с неоднородным полем внутри узкого пучка, поперечный размер которого  $2r_{\rm b} = 0.2$  см примерно на порядок меньше средней длины пробега резонансных частиц между столкновениями, влияющими на населенность энергетических уровней и ориентацию вектора d. Совершенно ясно, что в этих условиях подавляющее число частиц пролетает через область сильного поля в центре пучка без столкновений с другими частицами, поэтому в процессе взаимодействия с полем состояние поляризации их векторов d не успевает измениться. Фактически это означает, что эффективная угловая диффузия оказывается теоретически существенно меньше (соответственно параметр  $\xi$  — значительно больше) величины, рассчитанной для безграничного объема взаимодействия среды с

однородным полем. Поскольку поле лазерного пучка в пространстве взаимодействия с резонансными частицами является существенно неоднородным, влияние пространственной диффузии на среднее значение насыщенной разности населенностей (включая решетку, образованную встречными волнами) оказывается сильно ослабленным, что по существу эквивалентно уменьшению диффузии (увеличению  $\beta$ ). Развитая в настоящей работе теория, к сожалению, не позволяет произвести строгие количественные оценки возможного изменения параметров  $\beta$  и  $\xi$  из-за указанных выше причин. Поэтому остается открытым вопрос о том, насколько корректно использовать именно параметры  $\beta_2 = 0,10$  и  $\xi_2 = 0,01$  для объяснения экспериментальных результатов второй части работы. По этим же причинам нельзя считать, что параметр  $\beta$  всегда существенно больше параметра  $\xi$ , поэтому необходимо уточнить основные закономерности поведения компонентов  $\varphi_A$  и  $\varphi_L$  в случае  $\beta \leq \xi$ . Типичными для этого случая являются изображенные на рис. З зависимости угла поворота  $\varphi_C$ , а также компонентов  $\varphi_A$  и  $\varphi_L$  от  $I_+$ , которые построены для  $\overline{u}_2 = 3000$  и  $\beta_3 = \xi_3 = 0,10$ . Из аналитического исследования можно установить, что при стремлении параметра  $\beta$  к значению  $\xi$  компоненты  $\varphi_A$  и  $\varphi_L$  в широкой области значений  $\beta, \overline{u}, I_+$  становятся сопоставимыми по абсолютной величине и противоположными по знаку.

В рамках развитой в настоящей работе теории угол поворота  $\varphi_{\rm C}$  при достаточно малых значениях  $I_+$  и большом значении параметра неоднородного уширения  $\overline{u}$  (например в газах при сравнительно небольшом давлении и не очень низкой температуре) растет практически пропорционально  $I_+$  и пропорционально величине линейного коэффициента поглощения g. Именно такой эффект наблюдается экспериментально и является методологической основой поляризационной лазерной спектроскопии [2–4], с помощью которой определяются малые концентрации вещества или исследуются свойства атомов и молекул сильно разреженного газа.

В. М. Геликонов и др.

### 5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНО УШИРЕННОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ БЕЗ УЧЕТА ДИФФУЗИИ

Одним из наиболее слабых мест развитой теории является недостаточно корректный учет угловой и пространственной диффузии в резонансной среде, представляющей собой сильно разреженный газ. Чтобы установить принципиальную необходимость учета диффузионных процессов при изучении вза-имодействия поляризованного излучения с резонансной средой, необходимо, с нашей точки зрения, рассмотреть предельный случай отсутствия как угловой, так и пространственной диффузии. Конечно, при этом, по существу, приходится пренебрегать столкновениями частиц. Однако такая модель среды с перемещающимися и невращающимися частицами позволяет с большей степенью обоснованности считать, что дипольные моменты **d** этих квантовых объектов хаотически ориентированы только в той плоскости, в которой расположено электрическое поле. Подобная модель среды, позволяющая существенно упростить расчеты, была использована в работе [37].

Опираясь на изложенные соображения, взаимодействие поля с неоднородно уширенной резонансной средой без диффузии частиц будем описывать системой уравнений (4), в которой положим

$$\tau^{-1} = 0, \quad D = 0 \tag{47}$$

и которая дополнена выражением для функции распределения квантовых объектов по ориентациям векторов

$$\mathbf{d}_{\perp} = |\mathbf{d}_{\perp}|(\mathbf{x}_0 \cos \psi + \mathbf{y}_0 \sin \psi) \equiv |\mathbf{d}_{\perp}| \mathbf{d}_0$$
(48)

и скоростям  $\mathbf{V}$  в виде

$$W(\psi, |\mathbf{V}|^2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\overline{V}/\pi}{V^2 + \overline{V}^2}.$$
(49)

В отсутствие угловой диффузии теряет свою целесообразность использованное выше для нормировки поле насыщения, и более удобным оказывается выражение

$$E'_{\rm H} = \hbar/(|\mathbf{d}_{\perp}|\sqrt{T_1 T_2}),\tag{50}$$

используемое многими другими авторами [32-34]. В этом случае изменение амплитуды поля сильной волны описывается уравнением

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{E}}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{\mathbf{E}} = (3g/2) \left\langle (1+i\delta - iu)^{-1} \left[ \tilde{\mathbf{d}}_0(\tilde{\mathbf{d}}_0^*, \tilde{\mathbf{E}}) \frac{\overline{n}}{n_0} \right] \right\rangle_{\psi, u},\tag{51}$$

в котором стационарное распределение инверсной разности населенностей имеет вид

$$\frac{\overline{n}}{n_0} = L/(L + |(\tilde{\mathbf{d}}_0^*, \tilde{\mathbf{E}})|^2).$$
(52)

Подставляя (52) в (51) с учетом (13) и проводя интегрирование по углу  $\psi$ , получим уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{A}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{A} = \frac{3g}{4\tilde{A}^*} \frac{\overline{u}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - i(\delta - u)}{u^2 + \overline{u}^2} \left( 1 + \frac{A^2 - B^2 - 2L}{\sqrt{(2L + A^2 + B^2)^2 - 4A^2B^2}} \right) \mathrm{d}u,\tag{53}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{B}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{B} = \frac{3g}{4\tilde{B}^*} \frac{\overline{u}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - i(\delta - u)}{u^2 + \overline{u}^2} \left( 1 + \frac{B^2 - A^2 - 2L}{\sqrt{(2L + A^2 + B^2)^2 - 4A^2B^2}} \right) \,\mathrm{d}u$$

*В. М. Геликонов и др.* 1073

для скалярных амплитуд  $\tilde{A}(z)$  и  $\tilde{B}(z)$  циркулярно вращающихся компонент, аналогичные по смыслу уравнениям (21). Решение этих уравнений позволяет полностью определить не только изменение поля вдоль трассы распространения волны, но и с помощью (52) найти стационарное анизотропное распределение инверсной разности населенностей с учетом ее заввисимости от азимутального угла  $\psi$ .

Для комплексной векторной амплитуды слабого поля из системы (4) с учетом соотношений (6), (10) можно получить уравнение

$$-\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{e}}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{\mathbf{e}} = \frac{3g}{2} \left\langle (1 + i\delta + iu)^{-1} \left[ \tilde{\mathbf{d}}_0(\tilde{\mathbf{d}}_0^*, \tilde{\mathbf{E}}) \frac{\tilde{\eta}_2}{n_0} + \tilde{\mathbf{d}}_0(\tilde{\mathbf{d}}_0^*, \tilde{\mathbf{e}}) \frac{\overline{n}}{n_0} \right] \right\rangle_{\psi, u},\tag{54}$$

в котором поле также нормировано на поле насыщения (50), а  $\frac{\tilde{\eta}_2}{n_0}$  имеет вид

$$\frac{\tilde{\eta}_2}{n_0} = -\frac{\tilde{\chi}(\tilde{\mathbf{d}}_0, \tilde{\mathbf{E}}^*)(\tilde{\mathbf{d}}_0^*, \tilde{\mathbf{e}})L}{\left(\tilde{\alpha} + \tilde{\mu} | (\tilde{\mathbf{d}}_0^*, \tilde{\mathbf{E}})|^2\right) \left(L + | (\tilde{\mathbf{d}}_0^*, \tilde{\mathbf{E}})|^2\right)}$$
(55)

Подставляя (55) в (54) и проводя интегрирование по углу  $\psi$  с учетом (13), получим уравнения

$$-\frac{\mathrm{d}\tilde{a}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3g}{2} \frac{L}{1+i(\delta+u)} \left\{ \left(1 - \frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\mu}}\right) \frac{\tilde{a} + \tilde{b}\tilde{z}_1 e^{i2\varphi_+}}{R(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)} + \left(\frac{2\tilde{\chi}\tilde{\alpha}}{\tilde{\mu}^2 R^2}\right) \frac{\tilde{a}\tilde{F}_1 + \tilde{b}\tilde{F}_2 e^{i2\varphi_+}}{\tilde{F}_3} \right\} W_2(u) \,\mathrm{d}u,$$
(56)

$$-\frac{\mathrm{d}\tilde{b}}{\mathrm{d}z} + \Gamma\tilde{b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3g}{2} \frac{L}{1 + i(\delta + u)} \left\{ \left(1 - \frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\mu}}\right) \frac{\tilde{b} + \tilde{a}\tilde{z}_1 e^{-i2\varphi_+}}{R(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)} + \left(\frac{2\tilde{\chi}\tilde{\alpha}}{\tilde{\mu}^2 R^2}\right) \frac{\tilde{b}\tilde{F}_1 + \tilde{a}\tilde{F}_2 e^{-i2\varphi_+}}{\tilde{F}_3} \right\} W_2(u) \,\mathrm{d}u$$

для скалярных комплексных амплитуд слабого поля  $\tilde{a}(z)$  и  $\tilde{b}(z)$ , в которых введены обозначения

$$\tilde{F}_{1} = \tilde{z}_{2}\tilde{z}_{4} - \tilde{z}_{1}\tilde{z}_{3}, \quad \tilde{F}_{2} = \tilde{z}_{2} + \tilde{z}_{4} - \tilde{z}_{1} - \tilde{z}_{3}, \quad \tilde{F}_{3} = (\tilde{z}_{1} - \tilde{z}_{2})(\tilde{z}_{1} - \tilde{z}_{4})(\tilde{z}_{3} - \tilde{z}_{2})(\tilde{z}_{3} - \tilde{z}_{4}),$$

$$R\tilde{z}_{1,2} = -L \pm \sqrt{L^{2} - R^{2}}, \quad R\tilde{z}_{3,4} = -\left(\frac{I_{+}}{2} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\mu}}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_{+}}{2} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\mu}}\right)^{2} - R^{2}}.$$
(57)

В уравнениях (56) легко различимы вклады, которые вносят в изменение поляризации слабого поля анизотропная диэлектрическая проницаемость  $\tilde{\varepsilon}_0$ , наведенная сильной волной, и пространственная гармоника решетки диэлектрической проницаемости  $\tilde{\varepsilon}_1 \propto \tilde{\chi}$ , созданной сильной и слабой волнами. Уравнения (56) по смыслу полностью аналогичны уравнениям (26) и совместно с уравнениями (53) образуют полную систему, которая описывает взаимодействие сильной и слабой произвольно поляризованных плоских волн в изотропной резонансной среде, состоящей из хаотически ориентированных движущихся без столкновений двухуровневых частиц.

На рис. 4 приведены зависимости угла поворота  $\varphi_{\rm C}$ , а также образующих его компонентов  $\varphi_{\rm A}$  и  $\varphi_{\rm L}$  от  $I_+$ , которые рассчитаны по формулам (53) и (56) для двух значений параметра  $\overline{u}$  ( $\overline{u}_1 = 20000$ ,  $\overline{u}_2 = 3000$ ) и которые практически (с точностью до ошибок машинного счета) совпадают друг с другом. Из приведенных результатов видно, что и в отсутствие диффузии сохраняются основные закономерности изменения компонентов  $\varphi_{\rm A}$  и  $\varphi_{\rm L}$  как функций интенсивности поля сильной волны  $I_+$ . Их значения оказываются достаточно близкими по абсолютной величине и противоположными по знаку. В области сравнительно небольших интенсивностей  $I_+$  вклад в угол поворота  $\varphi_{\rm C}$  от наведенной анизотропии  $\varphi_{\rm A}$  оказывается несколько большим по абсолютной величине, чем противоположный по знаку вклад  $\varphi_{\rm L}$  от рассеяния сильной волны в слабую на образованной ими решетке диэлектрической проницаемости. Поэтому в этой области значений  $I_+$  и в сравнительно разреженных газах, где слабо влияние

диффузии, направление вращения поляризации поля слабой волны всегда определяется тем вкладом, который вносит в этот процесс наведенная сильной волной анизотропия диэлектрической проницаемости. Именно это обстоятельство, по-видимому, имело решающее значение для формирования широко известной точки зрения [2—4], что при расчете угла поворота влиянием решетки можно пренебречь.

Поскольку приведенные на рис. 4 расчетные значения для угла поворота  $\varphi_{\rm C}$  примерно в 5÷10 раз больше измеренных в [1], то следует признать, что теория, игнорирующая учет угловой и пространственной диффузии, не способна в полной мере объяснить экспериментальные результаты и, следовательно, неадекватно описывает реальные процессы взаимодействия излучения с веществом.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенного аналитического исследования и сопоставления теоретических расчетов с экспериментальными данными можно выделить три главных результата.

1. Модифицированный вариант векторной теории взаимодействия мощного излучения с веществом, который учитывает хаотическую ориентацию квантовых объектов, имеющих линейно или циркулярно поляризованный вектор **d** недиагонального матричного элемента дипольного момента резонансного перехода, и диффузионную миграцию возбуждения (обмен энергией) в пространстве и по ориентации вектора **d** между соседними (соударяющимися) резонансными системами, вполне адекватно и достаточно корректно описывает нелинейные поляризационные эффекты при распространении поляризованных лазерных пучков в изотропной двухуровневой среде, представляющей собой газ сравнительно небольшой плотности.

2. Вращение вектора поляризации слабой пробной волны, распространяющейся в условиях насыщения резонансного перехода среды полем сильной встречной волны, осуществляется за счет двух фи-





зических механизмов, одним из которых является анизотропия диэлектрической проницаемости, наведенная полем сильной встречной волны, а вторым — рассеивание сильной встречной волны в слабую на решетке диэлектрической проницаемости, образованной в результате неоднородного изменения инверсии в интерференционном поле встречных волн. Причем в зависимости от свойств среды (коэффициентов диффузии, характеристик неоднородного уширения) каждая из указанных причин может иметь преимущественное влияние на величину угла поворота.

3. В газообразной резонансной среде (в широкой области значений ее термодинамических параметров) вклады в угол поворота вектора поляризации пробной волны, обусловленные двумя указанными физическими механизмами, противоположны по знаку. В достаточно разреженных газах первая физическая причина, т. е. наведенная сильной волной анизотропия диэлектрической проницаемости, вносит больший вклад в угол поворота и, следовательно, определяет направление вращения поляризации поля слабой волны.

Результаты настоящей работы можно применить не только для изучения свойств веществ методами

В. М. Геликонов и др.

нелинейной поляризационной спектроскопии, но и для оценок предельных возможностей адаптивных устройств типа двухпроходового усилителя с обращающим волновой фронт зеркалом и мощных импульсных лазеров с нелинейным затвором. Отметим, что в резонансных средах с *R*- или *P*-ветвью излучения молекулы имеют циркулярно поляризованный матричный элемент рабочего перехода **d**, поэтому изложенные выше результаты не могут быть использованы для интерпретации нелинейных поляризационных эффектов без необходимой дополнительной коррекции.

Авторы выражают признательность Е. И. Якубовичу и Вл. В. Кочаровскому за полезную дискуссию, С. Б. Суровой за помощь в оформлении результатов. Авторы благодарны за финансовую поддержку Российскому фонду фундаментальных исследований (гранты № 96–02–17470 и № 96–15– 96742), Госкомитету РФ по высшему образованию по исследованиям в области естествознания (грант КЦФЕ № 95–0–8.2–35) и Фонду Госкомвуза России по исследованиям в области ядерной техники и физики пучков ионизирующих излучений.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Берштейн И. Л., Рогачев В. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1970. Т. 13. С. 33.
- 2. Wieman C., Hänsch T. W. // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 30. P. 1170.
- 3. Sargent M.-III // Phys. Rev. 1976. V. A14. P. 524.
- 4. Hänsch T.W. // Phys. Today. 1977. V. 30. P. 34.
- 5. Якубович Е. И. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 676.
- 6. Бутылкин В. С., Каплан А. Е., Хронопуло Ю. Г., Якубович Е. И. Резонансное взаимодействие света с веществом. М.: Наука, 1977.
- 7. Кулагин С. В., Миловский Н. Д., Пылин А. В. // Оптика и спектр. 1987. Т. 63. С. 416.
- 8. Миловский Н. Д. // Оптика и спектр. 1989. Т. 67. С. 1105.
- 9. Насыров К. А., Шалагин А. М. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 1649.
- 10. Насыров К. А., Шалагин А. М. // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. С. 1977.
- 11. Насыров К. А., Шалагин А. М. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1685.
- 12. Кулагин С. В., Миловский Н. Д., Пылин А. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1988. Т. 31. С. 279.
- 13. Milovsky N. D., Tkachov A. M. // Opt. Comm. 1993. V.95. P. 127.
- 14. Миловский Н. Д., Шешин В. Ю. // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. С. 1826.
- 15. Файн В. М., Ханин Я. И. Квантовая радиофизика. М.: Сов. радио, 1965.
- 16. Апанасевич П.А. Основы взаимодействия света с веществом. Минск: Наука и техника, 1977.
- 17. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Атомная и ядерная физика. Ч. 1. М.: Наука, 1986.
- 18. Leners R., Stephan G. // Quantum Semiclassical Opt. V.7. C. 757.
- 19. Wybourne B. G. Spectroscopic properties of rare earths. Interscience Publishers, 1965.
- 20. Judd B. R. // Phys. Rev. 1962. V. 127. P. 750.
- 21. Ofelt G. S. // J. Chem. Phys. 1962. V. 37. P. 511.
- 22. Пантел Р., Путхов Г. Основы квантовой электроники. М.: Мир, 1972.
- 23. Lempiski A. // Acta Phys. Polon. 1976. V. A50. P. 179.
- 24. Casperson L. W., Reyser K. C. // J. Appl. Phys. 1980. V. 51. P. 6075.
- 25. Звелто О. Принципы лазеров. М.: Мир, 1990.
- 26. Рейф Ф. Статистическая физика. Берклеевский курс физики. Т. 5. М.: Наука, 1977.
- 27. Дебай П. Полярные молекулы. М. Л.: ГНТИ, 1931.
- 28. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
- 29. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983.
- 30. Phillion D. W., Kuizenga D. J., Siegman A. E. // Chem. Phys. 1974. V.61. P. 3828.
- 31. Гапонов А. В., Миллер М. А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 242.

В. М. Геликонов и др.

- 32. Кузнецова Т. И., Раутиан С. Г. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1964. Т. 7. С. 682.
- 33. Островский Л. А., Якубович Е. И. // ЖЭТФ. 1964. Т. 43. С. 963.
- 34. Миловский Н.Д., Попова Л.Л. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1981. Т. 24. С. 567.
- 35. Степанов Б. И. и др. // Оптика и спектр. 1962. Т. 12. С. 533.
- 36. Микаэлян А. Л., Тер-Микаелян М. Л., Турков Ю. Г. // Оптические генераторы на твердом теле. М.: Сов. радио, 1967.
- 37. Хандохин П. А. и др. // Квантовая электроника. 1998. Т. 25. № 6. С. 517.

<sup>1</sup>Институт прикладной физики РАН, г. Н. Новгород, Россия, <sup>2</sup>Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 15 апреля 1998 г.

# POLARIZATION EFFECTS DUE TO COUNTER-WAVE INTERACTION IN ISOTROPIC RESONANCE MEDIA. I. THEORY

V. M. Gelikonov, Yu. I. Zaitsev, D. V. Kutyrev, and N. D. Milovsky

УДК 621.372.8

# АНАЛИЗ ЖЕЛОБКОВЫХ ВОЛНОВОДОВ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ ЖЕЛОБА

# А.Е.Свеженцев

В строгой электродинамической постановке изучаются волны в прямоугольном желобковом волноводе (ЖВ), желоб которого заполнен диэлектриком. Исследуются как симметричные, так и несимметричные ЖВ. Сформулированы условия излучения, позволяющие рассматривать как поверхностные, так и вытекающие волны. Изучен модовый состав и исследованы зависимости постоянных распространения волн от геометрических параметров волновода и частоты.

### введение

Интерес к желобковым волноводам (ЖВ) обусловлен возможностью реализации режима, при котором в них распространяется только одна мода и малыми потерями в миллиметровом диапазоне волн. Уникальность ЖВ в том, что в нем можно обеспечить распространение низшей волны H-типа без радиационных потерь, в то время как все оставшиеся моды будут либо всегда излучаться, либо затухать (находиться ниже уровня отсечки). Необходимым условием распространения волны без радиационных потерь является симметрия волновода относительно плоскости, равноудаленной от противоположных боковых стенок волновода. Как только такая симметрия нарушается, в полом ЖВ не могут существовать волны, способные распространяться без излучения, и тогда можно говорить о применении ЖВ в качестве антенны вытекающей волны [1].

При теоретическом исследовании полых симметричных ЖВ вместо открытой структуры как правило исследуется закрытая, при этом подразумевается, что поле низшей Н-волны экспоненциально убывает вне желоба. К известным теоретическим подходам для исследования полых симметричных ЖВ в рамках указанного приближения можно отнести метод конечных элементов [2] и метод частичных областей с учетом структуры поля вблизи прямоугольного ребра [3]. Если симметрия волновода нарушена, то приближение закрытой структуры является неприемлемым. Для исследования таких ЖВ применяется, например, метод подбора мод [4], а также метод эквивалентного контура [1]. Недостатком первого метода является необходимость учета большого числа волн, что требует больших затрат машинного времени. Второй метод является приближенным и позволяет описать полые несимметричные ЖВ, используя явные аналитические выражения.

Целью данной работы является исследование как симметричных, так и несимметричных ЖВ с диэлектрическим заполнением желоба, изучение характеристик медленных и вытекающих волн в зависимости от геометрических параметров волновода и частоты. Здесь метод частичных областей с учетом структуры поля вблизи прямоугольного ребра [3] распространен на указанный выше класс открытых ЖВ.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об определении спектра собственных волн, распространяющихся вдоль продольной оси z открытого ЖВ и зависящих от координаты z и времени t как  $e^{i(hz-\omega t)}$ , где  $\omega$  — круговая частота,  $h = \beta + i\alpha$  — постоянная распространения,  $\beta$  — фазовая постоянная,  $\alpha$  — постоянная затухания (или постоянная вытекания). Полагаем, что омические потери в металлических стенках отсутствуют, но допускаются потери в диэлектрике, т. е. диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = \operatorname{Re}(\varepsilon) + \varepsilon$  $i \text{Im}(\varepsilon)$ . Пусть волновод является симметричным относительно плоскости, перпендикулярной к стенкам и проходящей через середину желоба (плоскость x =0). Тогда задача распадается на две независимые задачи для половинных структур (рис. 1), имеющих в



основании либо электрическую, либо магнитную стенку. Отметим, что в отличие от симметричного закрытого волновода, рассмотренного в [3], в данной статье исследуется в общем случае несимметричный открытый волновод.

Выделим две частичные области: І — область желоба, заполненного диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , и II — полубесконечную область вне желоба (см. рис. 1). Пусть электромагнитное поле будет задано в виде двух векторов Герца: электрического  $\vec{P}_{\rm e}(P_{\rm e},0,0)$  и магнитного  $\vec{P}_{\rm m}(P_{\rm m},0,0)$ . Представим  $P_{\rm e}$  и  $P_{\rm m}$  в виде разложения по полной ортогональной нормированной системе собственных функций  $Y_n(y)$ :

$$P_{\rm a}^q(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{q,{\rm a}} X_n^{q,{\rm a}}(x) Y_n^{q,{\rm a}}(y) e^{ihz}, \tag{1}$$

где индекс q=I,II обозначает соответствующую область желоба, индекс "а"принимает значения "е"или "m",

$$\begin{split} Y_n^{\mathrm{I},\mathrm{e}}(y) &= \mu_n^{\mathrm{I}} \sin[\alpha_n(y+b+c)], \qquad Y_n^{\mathrm{I},\mathrm{m}}(y) = \mu_n^{\mathrm{I}} \cos[\alpha_n(y+b+c)], \\ Y_n^{\mathrm{II},\mathrm{e}}(y) &= \mu_n^{\mathrm{II}} \sin[\beta_n(y+c)], \qquad Y_n^{\mathrm{II},\mathrm{m}}(y) = \mu_n^{\mathrm{II}} \cos[\beta_n(y+c)], \\ X_n^{\mathrm{I},\mathrm{e}}(x) &= \cos[p_n x - \pi s/2], \qquad X_n^{\mathrm{I},\mathrm{m}}(x) = \sin[p_n x - \pi s/2], \\ \alpha_n &= \pi (n+1/2)/a_1, \quad \beta_n = \pi n/(2c), \quad p_n^2 = k^2 \varepsilon - h^2 - \alpha_n^2, \\ \mu_n^{\mathrm{I}} &= \sqrt{(2-\delta_{0,\alpha_n})/a_1}, \quad \mu_n^{\mathrm{II}} = \sqrt{(2-\delta_{0,\beta_n})/(2c)}, \quad \delta_{0,(\alpha_n,\beta_n)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \\ a_1 &= 2a = b + 2c + d, \end{split}$$

где s = 0 соответствует электрической стенке в основании ЖВ, s = 1 — магнитной стенке,  $k = 2\pi/\lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — длина волны в свободном пространстве.

Принципиальным моментом является подчинение выражения (1) условию излучения. В связи с этим здесь в отличие от [3] функции  $X_n^{II,a}(x)$  выбираются иначе, а именно в виде

$$X_n^{\mathrm{II,a}}(x) = e^{iq_n(x-g)},\tag{2}$$

где  $q_n^2 = k^2 - \beta_n^2 - h^2$ . При этом при вычислении величины  $q_n$  выбирается та ветвь корня, для которой

$$\operatorname{Re}(q_n) > 0, \quad \operatorname{Im}(q_n) < 0$$
 при  $\operatorname{Re}(q_n^2) > 0,$   
 $\operatorname{Re}(q_n) < 0, \quad \operatorname{Im}(q_n) > 0$  при  $\operatorname{Re}(q_n^2) < 0.$ 
(3)

Из (2), (3) видно, что область определения h представляет собой поверхность Римана  $\Re$  с бесконечным числом точек ветвления второго порядка  $\{h_n\} = \{h : q_n(h) = 0\}_{n=-\infty}^{\infty}$ . Первый (основной) лист этой поверхности полностью определяется разрезами (см. рис. 2) вдоль линий

$$k^{2} - (\operatorname{Re}(h))^{2} + (\operatorname{Im}(h))^{2} - \beta_{n}^{2} = 0$$
, где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\operatorname{Re}(h) \operatorname{Im}(h) > 0$ .



Две точки ветвления  $h = \pm k$  расположены на действительной оси  $\operatorname{Re}(h)$ , остальные с координатами  $\gamma_n = \sqrt{\beta_n^2 - k^2}$ , где  $n = 1, 2, \ldots$ , расположены на мнимой оси  $\operatorname{Im}(h)$ . На основном листе  $\Re$  значения  $q_n(h)$  выбираются в соответствии с (3). Последующие листы  $\Re$  отличаются от основного тем, что для конкретных значений индекса n знаки при реальных и мнимых частях  $q_n(h)$  меняются на противоположные. В данной статье будут рассмотрены волны, постоянные распространения которых расположены на основном, физическом листе поверхности  $\Re$ . Отметим также, что если  $h = h_0$  является решением, т. е. существует симметрия решений относительно начала координат (рис. 2).

### 2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛН В НЕСИММЕТРИЧНОМ ОТКРЫТОМ ЖВ

Компоненты электромагнитного поля можно выразить через электрический и магнитный векторы Герца известным образом. Удовлетворяя граничным условиям при x = g для компонент поля  $E_y$  и  $E_z$ , полагая

$$E_y = \begin{cases} f_1(y)e^{ihz}, & y \in [-c,c] \\ 0, & |y| > c \end{cases}, \qquad E_z = \begin{cases} if_2(y)e^{ihz}, & y \in [-c,c] \\ 0, & |y| > c \end{cases},$$

а также удовлетворяя условиям непрерывности для компонент поля  $H_z$  и  $H_y$ , получим систему связанных интегральных уравнений относительно функций  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$ , аналогичную приведенной в [3]. Далее применяем метод Галеркина, представляя функции  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$  в виде разложений в ряды по полиномам Гегенбауэра  $C_m^{\eta}(y/c)$ :

$$f_1(y) = \sigma_1(y) \sum_{i=0}^{\infty} U_{i+1} \varphi_{1i}(y), \qquad f_2(y) = \sigma_1(y) \sum_{i=0}^{\infty} V_{i+1} \varphi_{2i}(y),$$
$$\sigma_1(y) = \left[1 - (y/c)^2\right]^{\tau - 1/2}, \qquad \sigma_2(y) = \left[1 - (y/c)^2\right]^{\tau + 1/2},$$
$$\varphi_{1i}(y) = C_i^{\tau}(y/c), \quad \varphi_{2i}(y) = C_i^{\tau + 1}(y/c), \quad \tau = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\sqrt{1 + 2/\varepsilon}) - \frac{1}{2}.$$

где

1080

А.Е.Свеженцев

В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов *U<sub>i</sub>* и *V<sub>i</sub>* 

$$\sum_{i=1}^{N+M} Z_i D_{ki} = 0$$

где k = 1, ..., N + M,

$$Z_{i} = \begin{cases} U_{i}, & i = 1, \dots, N \\ V_{i-N}, & i = N+1, \dots, N+M \end{cases}, \quad ||D_{ki}|| = \left| \begin{vmatrix} D_{ki}^{11} & D_{k,i-N}^{12} \\ D_{k-N,i}^{21} & D_{k-N,i-N}^{22} \end{vmatrix} \right|$$

Коэффициенты  $D_{ki}$  этой системы здесь не приводятся по причине их громоздкости и схожести с коэффициентами системы, приведенной в [3]. Отметим, что отличия состоят в коэффициентах, содержащих функции  $X_n^{\text{II,a}}(g)$ , а также в результатах вычисления интегралов, содержащих функции  $Y_n^{\text{I,e}}(y)$ ,  $Y_n^{\text{I,m}}(y)$ , которые несут в себе информацию о несимметричности волновода, а именно об отличии плеч d и b. Таким образом, мы приходим к дисперсионному уравнению

$$\det[D_{ki}] = 0,$$

решения которого, т. е. постоянные распространения h, находились методом Ньютона.

### 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

### 3.1. Симметричный прямоугольный ЖВ

Исследуемый несимметричный ЖВ (рис. 1) становится симметричным, когда плечи его равны, т. е. b = d. Напомним, что стенка, расположенная в основании волновода может быть как электрической, так и магнитной. При  $c/a \rightarrow 1$  симметричный ЖВ превращается в известный Н-волновод, а при  $c/a \rightarrow 0$  — в прямоугольный волновод, заполненный диэлектриком.

На рис. З представлены зависимости нормированных постоянных распространения h/k волн симметричного ЖВ от параметра c/a при g/a = 0,3, ka = 2 и  $\varepsilon = 2,25$ . Видно, что в этом случае при  $c/a \rightarrow 1$  для выбранных значений параметров существуют три распространяющихся без затухания волны. Воспользуемся известной классификацией волн Н-волновода [5], согласно которой возможно выделить два независимых семейства волн, а именно  $H S_{mn}$ -волны ( $E_x = 0$ ) и  $E S_{mn}$ -волны ( $H_x = 0$ ). В свою очередь, относительно вертикальной плоскости симметричными (электрическая стенка для  $E S_{mn}$ -волн), так и несимметричными (магнитная стенка для  $E S_{mn}$ -



Рис. 3.

волн и электрическая стенка для  $HS_{mn}$ -волн). Отметим, что наибольший интерес представляет имеющая наибольшую постоянную распространения  $ES_{11}$ -волна Н-волновода, затухание которой уменьшается с ростом частоты в связи с отсутствием продольных токов. Согласно введенной классификации волн в случае, изображенном на рис. 3, при  $c/a \rightarrow 1$  кривая 1 соответствует  $ES_{11}^c$ -волне,

А.Е.Свеженцев

кривая 2 —  $H S_{01}^{c}$ -волне, кривая 3 —  $H S_{11}^{c}$ -волне, где индекс "с"соответствует волнам, симметричным относительно плоскости x = 0. Отметим, что  $H S_{01}^{c}$ -волна является квази-TEM-волной, распространяющейся между двумя металлическими плоскостями, возмущенной диэлектрической вставкой. С уменьшением параметра  $c/a E S_{11}^{c}$ -волна непрерывно переходит в  $H_{01}$ -волну прямоугольного волновода, нормированная постоянная распространения  $H S_{01}^{c}$ -волны стремится к 1 при  $c/a \rightarrow 0$ , при этом  $H S_{01}^{c}$ -волна исчезает при c/a = 0. В промежуточных случаях, когда 0 < c/a < 1, для обозначения рассмотренных волн необходимо добавлять приставку квази-.

Дисперсионные характеристики трех рассмотренных выше волн изображены на рис. 4, где кривая 1 соответствует  $H S_{01}^{c}$ -волне, кривая 2 —  $E S_{11}^{c}$ -волне, кривая 3 —  $H S_{11}^{c}$ -волне. Видно, что квази- $H S_{01}^{c}$ -волна при изменении частотного параметра ka всегда остается медленной волной и является основной волной, т. е.  $h/k \rightarrow 1$  при  $ka \rightarrow 0$ . Две другие волны, квази- $E S_{11}^{c}$  и квази- $H S_{11}^{c}$ , могут быть как медленными (h/k > 1), так и быстрыми (h/k < 1). Эти волны распространяются без радиационных потерь; они соответствуют магнитной стенке в основании волновода, и поперечное распределение электрического поля в таких волнах симметрично относительно оси y. Очевидно, что область существования одномодового режима квази- $E S_{11}^{c}$ -волны возможна только для случая электрической стенки в основании волновода.



На рис. 5 приведены дисперсионные характеристики представляющей наибольший интерес квази- $E S_{11}^c$ -волны при различных значениях параметра g/a, а именно при g/a = 0,3 (жирные линии) и g/a = 0,5 (тонкие линии), и c/a = 0,3; 0,45; 0,6; 0,75; 1. Отметим, что кривые 5 соответствуют дисперсионным характеристикам  $E S_{11}^c$ -волны H-волновода.

### 3.2. Несимметричный прямоугольный ЖВ

Если плечи ЖВ различны ( $b \neq d$ ), то волновод становится несимметричным. Пусть в основании волновода расположена электрическая стенка. Дисперсионные характеристики квази- $E S_{11}^c$  и квази- $E S_{21}^c$ -волн изображены на рис. 6 и соответствуют значениям параметров  $b/a_1 = 0,1, c/a_1 = 0,3$  и  $g/a_1 = 0,15$ . Реальные и мнимые части нормированных постоянных распространения обозначены соответственно цифрами 2 и 1 для квази- $E S_{11}^c$ -волны и цифрами 3 и 4 для квази- $E S_{21}^c$ -волны. При этом кривые 2 и 3 соответствуют реальной части нормированных постоянных распространения, а кривые 1 и 4 — постоянной затухания (или вытекания). Видно, что при изменении частотного параметра  $ka_1$ происходит трансформация медленной квази- $E S_{11}^c$  моды в вытекающую волну. Таким образом, несимметричный ЖВ в отличие от симметричного может поддерживать вытекающую квази- $E S_{11}^c$ -волну и использоваться в качестве антенны вытекающей волны. Видно, что для второй изображенной на рис. 6 волны кривые 3 и 4 изменения  $\operatorname{Re}(h)$  и  $\operatorname{Im}(h)$  являются более резкими, чем для первой.



Зависимости постоянной распространения квази- $E S_{11}^c$ -волны от нормированного расстояния  $b/a_1$ , характеризующего степень асимметрии ЖВ, изображены на рис. 7 для параметров  $c/a_1 = 0,3$  и  $g/a_1 = 0,15$  и соответствуют различным значениям  $ka_1$ : кривые 1, 2 соответствуют  $ka_1 = 4$ , кривые 3 и 4 —  $ka_1 = 3,3$ . Кривые 1 и 3 описывают реальную часть постоянных распространения, а кривые 2 и 4 — мнимую часть. Параметры ЖВ выбраны таким образом, что при  $b/a_1 = 0$  (предельная асимметрия, соответствующая случаю так называемого L-волновода) постоянные распространения соответствуют медленным волнам. Однако при увеличении параметра  $b/a_1$  имеет место трансформация медленных волн в вытекающие. При некотором значении  $b/a_1$  наблюдается максимум для постоянной вытекания. Дальнейший ход кривых Im(h/k) характеризуется уменьшением радиационных потерь и их отсутствием в предельном случае  $b/a_1 = 0,2$ , что соответствует симметричному расположению плеч.

Отметим, что если поля поверхностных волн экспоненциально убывают в поперечном направлении и не затухают в направлении распространения в отсутствие омических потерь, то поля вытекающих волн растут в поперечном направлении и затухают в направлении распространения. Вытекающие волны уносят энергию от структуры, что приводит к радиационным потерям.

### выводы

В строгой электродинамической постановке исследованы характеристики собственных волн в симметричном и несимметричном ЖВ, желоб которых заполнен диэлектрической средой. Сформулированы условия излучения и показано существование как медленных, так и быстрых вытекающих волн. При изменении параметров волновода и частоты возможно взаимное преобразование этих классов волн.

Исследованы модовый состав и дисперсионные характеристики волн в симметричном ЖВ. Показано, что одномодовый режим представляющей интерес квази- $E S_{11}^c$ -волны возможен в задаче с электрической стенкой для соответствующей половинной секции ЖВ. Установлено, что введение асимметрии в расположении плеч приводит к появлению режима излучения, причем максимум вытекания квази- $E S_{11}^c$ -волны приходится на некоторое промежуточное значение параметра асимметрии  $b/a_1$ .

Также отметим, что в процессе исследования были проведены многочисленные тесты. В частности, для случая Н-волновода [5] и для полых симметричного [2, 5] и несимметричного [1] ЖВ наблюдалось полное согласие результатов данной статьи и указанных работ.

Таким образом, показано, что ЖВ с диэлектрическим заполнением желоба может быть использован как в качестве линии передачи, так и в качестве антенны вытекающей волны.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1. Lampariello P., Frezza F., Shigesava H., Tsuji M., Oliner A. // Trans. on AP. 1998. V. 46, № 7. P. 1032.
- 2. Силин Р.А., Чепурных И.П. Электроника СВЧ. 1983, вып. 1. С. 65.
- 3. Заргано Г. Ф., Лерер А. М., Ляпин В. П., Синявский Г. П. Линии передачи сложных сечений. Ростов-на-Дону: Ростовский университет. 1983. 320 с.
- 4. Shigesava H., Tsuji M., Lampariello P., Frezza F., Oliner A. // IEEE Trans. on MTT. 1994. V. 42, № 8. P. 1548.
- 5. Вапнэ Г. М., Глаголев Б. С. Обзоры по электронной технике. Сер. 1: "Электроника СВЧ", вып. 11. Перспективные линии передачи КВЧ диапазона. М.: ЦНИИ "Электроника". 1986. 136 с.

Институт радиофизики и электроники НАН Украины им. акад. А. Я. Усикова, г. Харьков, Украина Поступила в редакцию 21 января 1999 г.

# ANALYSIS OF GROOVE WAVEGUIDES WITH DIELECTRIC-FILLED GROOVE

A. Ye. Svezhentsev

We perform rigorous electrodynamical analysis of waves in a rectangular groove waveguide with dielectricfilled groove. Both symmetric and nonsymmetric waveguides are studied. The radiation conditions are formulated, which allows one to consider both surface and leaky waves. The mode structure is determined, and the propagation constants are examined depending on frequency and the geometrical parameters of the waveguide.

### УДК 621.396.67

# ПРОСТРАНСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЬЦЕВОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ С РАДИАЛЬНЫМИ РЕФЛЕКТОРАМИ ПРИ МОДОВЫХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ

# А. Л. Бузов

На основе электродинамического анализа исследуется многовходовая кольцевая антенная решетка с радиальными рефлекторами. Показана возможность ослабления взаимной связи между излучателями и улучшения за счет этого энергетических свойств решетки.

Многомодовая кольцевая антенная решетка (КАР), возбуждаемая через соответствующую диаграммообразующую схему (ДОС), обеспечивает, как известно, изотропное излучение и схемно-пространственное сложение сигналов нескольких некогерентных генераторов [1–5]. Однако во многих случаях удовлетворительные энергетические характеристики КАР обеспечиваются не для всех мод (т. е. не для всех входов ДОС), а лишь для некоторых из них, т. к. входной импеданс решетки существенно зависит от индекса моды вследствие сильной взаимной связи между излучателями [5].

Одним из известных способов ослабления связи между излучателями в плоских решетках является установка между излучателями перпендикулярных апертуре перегородок в виде тонких металлических пластин [6]. Применительно к КАР это соответствует установке между излучателями плоских (сплошных или проволочных) радиальных рефлекторов (PP). Отметим, что подобный способ ослабления взаимной связи между излучателями многомодовых КАР, обеспечивающей изотропное излучение, ранее не применялся. Улучшение энергетических характеристик достигалось за счет увеличения радиуса КАР, что сопровождается ухудшением равномерности азимутальной диаграммы направленности (ДН) [2, 3, 5, 7].

Настоящая работа посвящена исследованию возможностей улучшения энергетических показателей КАР с РР без ухудшения ДН. С этой целью проведено исследование пространственно-энергетических свойств КАР, представляющей собой набор вертикальных вибраторов у цилиндрического экрана, при отсутствии и наличии РР. Последние могут быть реализованы в виде системы параллельных оси цилиндра вертикальных проводников, соединенных между собой и прикрепленных к цилиндрическому экрану посредством горизонтальных консолей (рис. 1а). Консоли, будучи расположенными перпендикулярно к вибраторам, не возбуждаются и не влияют на характеристики КАР. Отметим, что подобное конструктивное исполнение пассивных элементов в составе КАР применяется на практике и хорошо себя зарекомендовало [5]. На частотах 1 ГГц и выше РР более целесообразно выполнять в виде пластин (возможно — с вертикальными прорезями для снижения ветровых и гололедных нагрузок).

В рамках данной работы исследовались кольцевые антенные решетки с различным числом излучателей N при радиусе цилиндрического экрана  $R = (0,25\div0,5) \lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны излучения, обладающие зеркальной симметрией относительно горизонтальной плоскости (перпендикулярной к вибратору плоскости, проходящей через его точку питания, см. рис. 1а). Для каждой моды определялись входные импедансы излучателей  $z_m = r_m + jx_m$ , где m — индекс моды,  $r_m = \text{Re}(z_m), x_m = \text{Im}(z_m)$  [2, 5], определяющие потери на отражение, диаграммы направленности  $F_m(\varphi)$  в горизонтальной плоскости, где  $\varphi$  — азимутальный угол, коэффициенты равномерности  $\beta_m = \min{\{F_m(\varphi)\}/\max{\{F_m(\varphi)\}}}$  [5], характеризующие направленные свойства КАР, а также усредненный по азимуту коэффициент направленного действия (КНД)  $D_m$ , который характеризует как направленные свойства КАР, так и ее энергетику. Цилиндрический экран при  $R = \lambda/4$  аппроксимировался 63-мя вертикальными проводниками высотой  $\lambda$ , при  $R = \lambda/2$  — вдвое большим числом таких проводников. Вибраторы имели вид вертикальных проводников высотой около  $\lambda/2$  (высота варьировалась в некоторых пределах с целью улучшения импедансных свойств). В качестве PP рассматривалась проволочная структура в виде равномерно распределенных по радиусу вертикальных проводников высотой (0,55÷0,65)  $\lambda$  (рис. 1а).



Электродинамический анализ (расчет токов в проводниках) выполнялся на основе интегрального уравнения (ИУ) Харрингтона [8] в приближении тонкого провода [5, 8–10], которое заключается в учете только продольных (направленных вдоль провода) составляющих тока и электрического поля и в замене поверхностного тока линейным (осевым). При анализе учитывались симметрия КАР относительно ее поворота, зеркальная симметрия относительно горизонтальной плоскости, а также характер возбуждения решетки — равноамплитудное при линейном фазовом сдвиге от вибратора к вибратору с полным набегом фазы на решетке, кратным  $2\pi$  [2, 3, 5]. Все это позволяет применить весьма эффективные численные алгоритмы [5, 11, 12].

Пусть  $L_1 = L_{11} \cup L_{12} \cup ... \cup L_{1N}$  — разрывный контур, образованный совокупностью осей всех проводников, расположенных выше горизонтальной плоскости, а  $L_{1k}$  — часть контура  $L_1$ , соответствующая k-й симметричной (симметрия поворота) части, включающей один вибратор, один PP и 1/N-ю часть экрана, где N — порядок симметрии поворота. Некоторый контур  $L_{1i}$  отображается в контур  $L_{1k}$ при азимутальном повороте на угол  $2\pi (k - i)/N$ . Аналогичным образом введем зеркально симметричный контур  $L_2 = L_{21} \cup L_{22} \cup ... \cup L_{2N}$ , расположенный ниже экваториальной плоскости симметрично контуру  $L_1$ . Криволинейную координату, отсчитываемую вдоль некоторого контура  $L_{ik}$ , обозначим  $l_{ik}$ . С учетом только продольных составляющих поля и тока (все проводники вертикальные и направлены вдоль оси z), а также свойств симметрии искомого распределения тока при модовых возбуждениях (зеркальная симметрия относительно горизонтальной плоскости и линейный фазовый сдвиг при повороте [5, 11]) ИУ Харрингтона принимает вид

$$E(l_{11}) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{N} \exp\left(j2\pi mk/N\right) \int_{L_{ik}} \left[ j\omega\mu G(l_{11}, l_{ik}')I(l_{11}') - (j\omega\varepsilon)^{-1} \frac{\partial G(l_{11}, l_{ik}')}{\partial l_{11}} \left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l'}\right)_{l'=l_{11}'} \right] \mathrm{d}l_{ik}', \quad (1)$$

где  $E(l_{11}) - z$ -составляющая стороннего поля на поверхности провода,  $\omega$  — частота излучения,  $\mu$  и  $\varepsilon$  — соответственно магнитная и диэлектрическая проницаемости,  $G(l_{11}, l'_{ik}) = \exp\{-j2\pi(r^2 + a^2)^{1/2}/\lambda\}/[4\pi(r^2 + a^2)^{1/2}]$  — функция Грина, r — расстояние между точкой на контуре  $L_{ik}$  с координатой  $l'_{ik}$  и точкой на контуре  $L_{11}$  с координатой  $l_{11}$ , a — радиус провода в точке с координатой  $l_{11}$ ,

 $I(l'_{11})$  — искомое распределение тока. При интегрировании в (1) по некоторому контуру  $L_{ik}$  распределение тока определяется в точке  $l'_{11}$ , симметричной точке  $l'_{ik}$ . Таким образом, область определения искомой и заданной функций в ИУ составляет 1/(2N)-ю часть полной области, что позволяет успешно решать ИУ при ограниченных объемах оперативной памяти ЭВМ [11, 12]. Учет радиуса провода при определении функции Грина устраняет ее особенность при  $r \approx 0$  (знаменатель данной функции всегда конечен).

ИУ (1) решалось методом Галеркина при кусочно-синусоидальном базисе разложения распределения тока с соответствующим разбиением проводников на сегменты [5, 8]. Расчеты проводились в режиме возбуждения вибраторов источниками тока (при модовых возбуждениях внутреннее сопротивление генераторов не влияет на характеристики КАР [1–5]). При этом ток центрального сегмента k-го вибратора фиксировался (рис. 16), его максимальное значение принималось равным входному току вибратора  $i_k = I_N \exp(j2\pi mk/N)$ , что соответствует возбуждению КАР на m-й моде [5].

Следует отметить, что таким образом поставленная задача относится к классу так называемых некорректных задач (в приближении тонкого провода ИУ перестает быть сингулярным), вследствие чего могут возникать серьезные проблемы при получении устойчивого и достоверного решения [13]. Однако подобные приближенные подходы получили весьма широкое распространение благодаря универсальности (в смысле геометрии объекта) и простоте алгоритмизации. Широкая практика применения свидетельствует о надежности таких подходов, по крайней мере, при радиусах проводов, не превышающих  $0.01\lambda$ [5, 8, 14]. В то же время, известные строгие методы регуляризации [13–15] недостаточно универсальны и являются весьма ресурсоемкими при машинной реализации.

Тем не менее, отмеченное обстоятельство делает необходимой тщательную проверку достоверности получаемых результатов. В данном случае это делалось путем проверки внутренней сходимости, оценки невязки решения ИУ, а также экспериментальной проверкой отдельных результатов.

Внутренняя сходимость проверялась путем проведения серии расчетов при монотонном увеличении числа сегментов. Сходимость контролировалась по значению входного импеданса и по ДН. Входной импеданс излучателя вычислялся по входному напряжению, которое находилось интегрированием *z*-составляющей электрического поля, взятой с обратным знаком, по прямолинейному контуру *L* между точками А и В (см. рис. 16), т. е. в пределах сегмента, соответствующего зазору вибратора [8–10]. Активная составляющая импеданса вычислялась, кроме того, как сопротивление излучения, отнесенное ко входу (по мощности излучения и КНД [5, 8]). Ненормированная ДН КАР находилась как суперпозиция ДН отдельных сегментов КАР, взятых в качестве элементарных вибраторов.

Сходимость решения по ДН оценивалась по отклонению ДН  $F_m^{(K)}$  от ДН  $F_m^{(T)}$ , полученных соответственно при числе сегментов K и T, в квадратичной метрике:

$$\Delta_F = \left[ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |F_m^{(K)}(\theta,\varphi) - F_m^{(T)}(\theta,\varphi)|^2 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \right]^{1/2},\tag{2}$$

где *θ* — широтный угол.

Оценка невязки решения (погрешность выполнения граничного условия на поверхности проводников) делалась отдельно для каждого проводника по предложенному Г. Тилом [8] критерию минимума среднего за период потока энергии через поверхность проводника

$$P_k = -\operatorname{Re}\left\{ \int_{\Gamma_k} I^*(l) E_z(l) \, \mathrm{d}l \right\} / 2,\tag{3}$$

где  $\Gamma_k$  — прямолинейный контур, параллельный оси k-го провода и проходящий по его поверхности,  $E_z(l) - z$ -составляющая полного поля на поверхности проводника.

С целью уменьшения погрешности определения распределения тока вблизи концов проводников, где имеет место особенность поля [8], система проекционных (весовых) и базисных функций усекалась путем отбрасывания одной—двух функций на сегментах вблизи концов согласно рекомендациям Р. Терпина [8].

На рис. 2–5 приведены результаты исследования 9-элементной КАР для всех 9-ти мод: активная  $r_m$  и реактивная  $x_m$  составляющие входного импеданса (рис. 2 и 3 соответственно), коэффициент равномерности ДН  $\beta_m$  (рис. 4) и усредненный по азимуту КНД  $D_m$  (рис. 5). Точки, соответствующие значениям указанных параметров на разных модах, для наглядности соединены отрезками прямых. При этом сплошные линии соответствуют КАР без РР с радиусом экрана  $R = \lambda/4$ , пунктирные — КАР без РР с  $R = \lambda/2$ , штрих-пунктирные — КАР с  $R = \lambda/4$ , снабженной РР в виде системы из трех вертикальных проводников (см. рис. 1а). При этом выбирались следующие параметры РР: ширина  $S_p = 0.2\lambda$ , высота проводников  $0.6\lambda$ , расстояние от оси цилиндра до оси решетки  $R_p = 0.45\lambda$ .

С целью экспериментальной проверки полученных результатов проведены измерения ДН и входного коэффициента отражения модели 9-элементной КАР с радиусом экрана  $\lambda/4$  при наличии и при отсутствии РР. Измерения проводились в безэховой камере [16] при синфазном равноамплитудном возбуждении излучателей (на 9-й моде), которое достаточно просто реализуется в условиях эксперимента. Снятие ДН осуществлялось посредством селективного микровольтметра SMV 8.5 при возбуждении излучателей КАР генератором Г4–176. Коэффициент отражения измерялся на входе делителя мощности прибором Р4–37.

Уровень локальных минимумов (общим числом 9) экспериментальной ДН как при наличии PP, так и при их отсутствии составил от -1,0 до -0,5 дБ по отношению к максимуму ДН, что соответствует коэффициенту равномерности  $\beta_9 = 0,89 \div 0,95$ . Такое отклонение от расчетного значения коэффициента равномерности (см. рис. 4) остается в пределах погрешности эксперимента [16].

Сопоставление импедансных характеристик с расчетными выполнялось следующим образом. Предполагалось, что на 9-й моде КАР без РР полностью согласована посредством внешних согласующих цепей с 75-омным фидером. Применительно к расчетному значению импеданса  $z_9 = 125 + 20j$  Ом (см. рис. 2 и 3) это означает, что ко входу каждого вибратора последовательно подключен двухполюсник с импедансом -20j Ом, а затем (в сторону генератора) — трансформатор 125/75 Ом (коэффициент трансформации 1,67). Тогда при введении РР импеданс на входе такой цепи будет  $z_9 = 30+29j$  Ом, что соответствует модулю коэффициента отражения  $|\Gamma| = 0,49$ . При проведении эксперимента была смоделирована описанная выше ситуация, т. е. модель КАР была согласована на синфазной 9-й моде при отсутствии РР. Измеренный после установки РР модуль коэффициента отражения (на входе делителя мощности) составил 0,53, т. е. отклонение не превысило 10%, что также остается в пределах погрешности эксперимента. С целью исключения согласующего действия потерь в фидерах калибровка прибора Р4—37 выполнялась на их выходах. Отметим, что такая достаточно сложная процедура экспериментальной проверки обусловлена трудностью непосредственного измерения импеданса на входах вибраторов.

Из представленных результатов видно, что КАР без РР при  $R = \lambda/4$  с точки зрения направленных свойств обеспечивает 9 рабочих мод, т. е. может объединить сигналы 9-ти передатчиков. Однако с точки зрения согласования и потерь на отражение 4-я и 5-я моды (возбуждение, близкое к противофазному) неработоспособны. Нетрудно подсчитать, что при согласовании КАР на 9-й моде потери на отражение на этих модах составят около 3 дБ. Увеличение КНД относительно 9-й моды компенсирует потери лишь в некоторой степени (на 1,6 дБ). Кроме того, весьма низкий коэффициент бегущей волны (КБВ) в фидерах (менее 0,2) может привести к другим нежелательным последствиям: взаимное ослабление сигналов передатчиков, искажению передаваемого сигнала из-за многократных переотражений и т. д.

Увеличение радиуса КАР позволяет улучшить импедансные свойства: при  $R=\lambda/2$  потери на отра-





# А. Л. Бузов

жение на 4-й и 5-й моде уменьшаются до 1 дБ (КБВ возрастает до 0,38). Однако одновременно резко ухудшаются направленные свойства КАР, прежде всего ДН на 4-й и 5-й модах (рис. 4).

Применение PP в составе KAP практически не влияет на ее направленные свойства, но позволяет получить значительно более равномерные зависимости входного импеданса от индекса моды. В результате потери на отражение на 4-й и 5-й модах не превышают 0,5 дБ (КБВ около 0,55) и полностью компенсируются увеличением КНД. Следует также отметить, что улучшение импедансных свойств в данном случае не сопровождается увеличением габаритов КАР, что имеет немаловажное практическое значение.

В то же время, как видно из рис. 2 и 3, введение PP сопровождается увеличением среднего уровня  $x_m$  относительно среднего уровня  $r_m$ , что свидетельствует об увеличении добротности всей системы (это также подтверждается расчетами в полосе рабочих частот решетки). Данный эффект является нежелательным, поскольку ухудшает диапазонные свойства КАР.

Аналогичные исследования, проведенные для КАР с другим числом излучателей и при другом строении РР (изменение числа проводников, размеров рефлектора и его пространственного положения), привели к подобным результатам, что позволило сделать вывод о возможности и целесообразности применения радиальных рефлекторов с целью улучшения энергетических показателей КАР за счет ослабления взаимной связи между излучателями и уменьшения зависимости входного импеданса от типа возбуждения (индекса моды). Что касается увеличения добротности, то здесь следует отметить два обстоятельства. Во-первых, системы подвижной связи (где требуются многомодовые режимы КАР) работают, как правило, в узких диапазонах частот, так что проблема обеспечения диапазонных свойств не относится к числу наиболее актуальных. Во-вторых, другие способы ослабления взаимной связи между излучателями, которые при всем многообразии сводятся к введению дополнительных компенсирующих связей в схеме питания решетки [1], также приводят к увеличению добротности.

Между тем, проблема минимизации добротности (или определение оптимального сочетания между потерями на отражение и добротностью) требует, очевидно, своего решения. Этот, а также ряд других нерешенных вопросов (оптимизация PP с учетом массогабаритных параметров, ветровой и гололедной нагрузок, выявление общих закономерностей, позволяющих разрабатывать инженерные методики проектирования КАР с PP и т. д.) делают необходимым продолжение исследований в данной области.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Носов Ю. Н. // Труды НИИР. 1982. № 3. С. 30.
- 2. Носов Ю. Н. // Труды НИИР. 1984. № 3. С. 47.
- 3. Корнеев В. Д. // ТСС. Техника радиосвязи. 1989. Вып. 4. С. 97.
- 4. Трусканов Д. М., Иванов А. Ф. // Электросвязь. 1985. № 5. С. 35.
- 5. Бузов А.Л. УКВ антенны для радиосвязи, радиовещания и телевидения. М.: Радио и связь, 1997.
- Сканирующие антенные системы СВЧ. / Пер. с англ. под ред. Г.Т. Маркова и А.Ф. Чаплина. Т. 2. — М.: Сов. радио, 1969.
- 7. Бузов А. Л. // Изв. ВУЗов Радиофизика. 1998. Т. 41. № 7. С. 940.
- 8. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. / Пер. с англ. под ред. Э. Л. Бурштейна. М.: Мир, 1977.
- 9. Корнилов М. В., Калашников Н. В., Рунов А. В. и др. // Радиотехника. 1989. №7. С. 82.
- 10. Назаров В. Е., Рунов А. В., Подининогин В. Е. // Радиотехника и электроника. Минск: Вышейшая школа, 1976. Вып. 6. С. 153.
- 11. Рунов А. В. // Радиотехника и электроника. Минск: Вышейшая школа, 1976. Вып. 6. С. 161.
- 12. Юдин В. В. // Труды НИИР. 1995. С. 57.

1999

- 13. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.мат. лит., 1986.
- 14. Радциг Ю. Ю., Сочилин А. В., Эминов С. И. // Радиотехника. 1995. № 3. С. 55.
- 15. Эминов С. И. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. Вып. 12. С. 2160.
- 16. Бузов А. Л., Кольчугин Ю. И., Носов Н. А., Павлов А. В. // Метрология и измерительная техника в связи. 1998. № 4. С. 12.

Самарский отраслевой научно-исследовательский институт радио, г. Самара, Россия Поступила в редакцию 23 декабря 1998 г.

## PATTERN AND ENERGY CHARACTERISTICS OF A CIRCULAR ANTENNA ARRAY WITH RADIAL REFLECTORS UNDER MODE EXCITATIONS

# A.L.Buzov

We study a multiport circular antenna array with radial reflectors by electrodynamic methods. We show that interconnections of emitters can be diminished and thus the power performance of the array can be improved.

УДК 537.52

# ВЛИЯНИЕ ОТРАЖЕНИЯ СВЧ СИГНАЛА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГЕНЕРАЦИИ ГИРОТРОНОВ С ПЕРЕСТРОЙКОЙ ЧАСТОТЫ

М. Ю. Глявин<sup>1</sup>, В. Е. Запевалов<sup>1</sup>, М. Л. Кулыгин<sup>2</sup>

Для широкополосного гиротрона с перестройкой частоты, осуществляемой за счет возбуждения последовательности мод, проведена оценка снижения эффективности генерации из-за отражения сигнала от окна вывода СВЧ мощности. Полученные теоретические оценки сопоставлены с экспериментальными данными.

Как известно, перестройка частоты генерации гиротронов в достаточно широких пределах — несколько десятков процентов — возможна за счет перестройки магнитного поля и возбуждения последовательности мод. Недостатком такой перестройки является ее большое характерное время, обусловленное большой постоянной времени сверхпроводящих соленоидов. Однако для ряда задач требуется перестройка частоты в пределах  $1 \div 2\%$ , но с малыми характерными временами. Подобная перестройка может быть реализована изменением ускоряющего напряжения и возбуждением близких к основному типу колебаний мод, отличающихся, как правило, радиальными индексами.

Во всех перечисленных случаях перестройка частоты приводит к отражению части выходной мощности от окна вывода СВЧ излучения. Традиционное окно представляет собой диэлектрический диск, толщина d которого выбирается из условия минимального отражения основного (рабочего) типа колебаний, т. е. из равенства оптической разности хода в диске целому числу m длин полуволн:  $d = \frac{m\Delta}{2\varepsilon\cos\vartheta}$ Здесь  $\vartheta$  — угол падения волны на диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , отсчитываемый от нормали к поверхности диска,  $\lambda$  — длина волны основного типа колебаний. Коэффициент отражения при переходе на другой тип колебаний увеличивается из-за рассогласования выходного окна вследствие изменения длины волны генерации  $\lambda$ . Избежать этого можно, используя так называемые окна Брюстера. Известно, что при падении на диэлектрик электромагнитной волны под некоторым углом  $\varphi_{\rm D}$ , определяемым соотношением tg  $\varphi_{\rm D} = n$ , где n — показатель преломления диэлектрика, компонента электрического поля, лежащая в плоскости падения не отражается. Поскольку выходное излучение современных гиротронов, предназначенных для работы в установках управляемого термоядерного синтеза (УТС), представляет собой линейно поляризованную волну, возможно создание окон, прозрачных в широком диапазоне частот. Однако из-за сложности изготовления и высокой стоимости окон Брюстера в настоящее время большинство гиротронов комплектуется стандартными окнами вывода СВЧ мощности. В связи с этим представляет интерес оценка влияния отраженного сигнала на условия взаимодействия электронов с высокочастотным (ВЧ) полем в резонаторе лампы, т. е. на эффективность генерации. Подобное иследование проведено в работе [1], в которой анализируется изменение частоты генерации в зависимости от величины коэффициента отражения и времени задержки отраженного сигнала. В [1] было показано, что наряду с медленными изменениями частоты, связанными, по-видимому, с нагревом резонатора и изменением его размеров, возможны скачкообразные изменения, связанные с отражением части сигнала от выходного окна. Более подробное исследование указанных вопросов не проводилось, поскольку в гиротронах со встроенным квазиоптическим преобразователем, рассчитанных на генерацию одной моды, отражения сигнала от выходного окна малы и, кроме того, довольно трудно оценить, какая часть отраженного сигнала возвращается непосредственно в резонатор. Появление гиротронов для технологического использования с прямым выводом мощности и гиротронов с перестройкой частоты заставило вернуться к задаче о влиянии отражений.

Влияние отраженного от окна сигнала на КПД гиротрона подтверждается экспериментальными исследованиями [2]. В настоящей работе описана методика вычислений, позволяющая учитывать влияние отраженного сигнала на выходную мощность и КПД, сходная с использованной в [1], и проведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных.

Для решения этой задачи использовалась аксиально-симметричная модель гиротрона, в которой пренебрегалось разбросом скоростей электронов и радиусов ведущих центров электронных орбит в трубчатом пучке, а также полями пространственного заряда. Поскольку резонатор может возбуждаться не только протекающим внутри объема током, но и любым полем, попадающим в резонатор извне, представим фактор  $\Phi$  возбуждения ВЧ поля в виде суммы фактора  $\Phi_0$  возбуждения резонатора электронным пучком в отсутствие отражений и слагаемого, пропорционального попадающему в резонатор отраженному сигналу. Нестационарные процессы в таком гиротроне описываются самосогласованной системой уравнений (см., например, [3, 4]), состоящей из укороченного уравнения движения электронов во внешнем магнитном поле и в ВЧ поле рабочей моды гиротрона

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\zeta} - i\left(\Delta + |p|^2 - 1\right)p = i\left(p^{n-1}Ffe^{i(\Psi - n\vartheta_0)}\right)^*, \quad p(\zeta_0) = 1,\tag{1}$$

уравнения возбуждения ВЧ поля, которое при малой величине внешнего сигнала имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = i\frac{\omega_0}{2Q}F\left[\Phi_0\tilde{I} + i2Q\frac{\omega_0 - \omega_s}{\omega_s} + Ae^{-i\phi}\frac{1}{F}\right],\tag{2}$$

и выражения, определяющего фактор возбуждения рабочей моды электронным пучком:

$$\Phi_{0} = \Phi_{0}^{\dagger} + i\Phi_{0}^{\parallel} = -i\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{F}\int_{\zeta_{0}}^{\zeta_{\kappa}}p^{*}f^{*}e^{-i(\Psi - n\vartheta_{0})}\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\vartheta_{0}.$$
(3)

В этих уравнениях величина электронного тока задается параметром I, пропорциональным постоянной составляющей тока пучка. Комплексная величина р представляет собой нормированный импульс осцилляторного движения электронов и описывает изменение энергии и фазы вращательного движения электронов под действием высокочастотного поля с комплексной амплитудой  $F = |F|e^{i\psi}$ и продольным распределением, характеризуемым функцией f. Определение величин F,  $\Psi$  и  $\tilde{I}$  дано, например, в [5]. Интегрирование по приведенной продольной координате  $\zeta = \beta_{\perp}^2 \omega_0 z / (2\beta_{\parallel}c)$  ведется по всей длине взаимодействия, от координаты  $\zeta_0$ , соответствующей входу в пространство взаимодействия, до  $\zeta_{\kappa}$ , соответствующей выходу. Здесь  $\beta_{\perp,\parallel} = V_{\perp,\parallel}/c$ ,  $V_{\perp}$  и  $V_{\parallel}$  — соответственно поперечная и продольная по отношению к магнитному полю компоненты скорости электронов пучка,  $\omega_0$  — частота генерируемых колебаний,  $\omega_s$  — собственная частота резонатора, z — продольная координата, с — скорость света. Условия оптимального отбора энергии электронного пучка тормозящей фазой ВЧ поля обеспечиваются подбором расстройки  $\Delta = 2(\omega_0 - n\omega_H)/(\beta_\perp^2 \omega_0)$  циклотронного резонанса, где *п* — номер гармоники,  $\omega_H$  — гирочастота электронов. Положение электронов на входе в пространство взаимодействия описывается азимутальной координатой  $\phi$  ведущих центров орбит электронов и их начальной фазой  $\vartheta_0$ . Возбуждение резонатора попадающим извне сигналом определяется параметром  $A = 2 \frac{Q}{Q_{\mu\nu\phi}} |R| e^{i\phi} F(t-T)$ , зависящим от добротности резонатора Q, дифракционной добротности резонатора  $Q_{
m gub}$ , коэффициента отражения по амплитуде  $R = |R| e^{i\phi}$  ( $|R| \ll 1$ ), который в общем случае является комплексной величиной, времени Т запаздывания отраженного сигнала с частотой  $\omega$ , и набегом фазы отраженного сигнала за проход до точки отражения с координатой z = L и обратно  $\phi = 2 \int_{0}^{L} h(z) dz = \omega T$ , где h(z) — продольное волновое число. КПД гиротрона может быть вычислен

по формуле

$$\eta = \left(1 - \frac{Q}{Q_{\text{OM}}}\right) \frac{g^2}{1 + g^2} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(\zeta_{\text{K}})|^2 \,\mathrm{d}\vartheta_0\right),\tag{4}$$

где  $g = \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}}, \frac{g^2}{1+g^2}$  — относительная осцилляторная энергия электронов,  $Q_{\text{ом}}$  — омическая доброт-

ность. Наиболее спорным в принятых упрощениях является предположение о том, что весь отраженный от окна сигнал попадает в резонатор гиротрона. Последнее обстоятельство полностью реализуется лишь в гиротронах с так называемым прямым выводом СВЧ мощности [6, 7]. В современных гиротронах со встроенным квазиоптическим преобразователем, предназначенных для установок УТС, значительная часть мощности должна рассеиваться при обратном прохождении через зеркальную линию, не попадая в резонатор. Тем не менее, как будет показано ниже, используемый метод расчета позволяет получить удовлетворительное согласование результатов расчетов и экспериментальных данных.



чениях коэффициента отражения R. Безразмерное время задержки отраженного сигнала T = 0.5. Для численного моделирования процессов в гиротроне реальная продольная структура ВЧ поля в резонаторе аппроксимировалась близкой к ней гауссовой функцией  $f = \exp(-(2\zeta/\mu)^2)$ , где  $\mu = \zeta(L)$  — приведенная длина резонатора. В качестве временной переменной используется безразмерное время  $\tau = \omega_0 t/Q$ . На рис. 1 изображена зависимость КПД гиротрона с основной рабочей модой TE<sub>22,6</sub> [8] от времени  $\tau$  для коэффициентов отражения R = 0 и R = 0,32 ( $\exp\{i\phi\} = 1$ ). Время запаздывания отраженного от окна сигнала принято равным 3 нс, что соответствует безразмерному времени запаздывания T = 0,5[7]. Если считать параметры электронного пучка постоянными, то КПД гиротро-

на определяется длиной резонатора, током пучка (безразмерной амплитудой ВЧ поля в резонаторе) и величиной магнитного поля (расстройкой циклотронного резонанса) [9]. Как видно из графиков, для основной рабочей моды, находящейся в режиме генерации с максимальным КПД, реализуется  $\eta = 0.40$ , близкий к экспериментальному значению (см. рис. 2). При этом амплитуда ВЧ поля в резонаторе имеет оптимальную для энергообмена с электронами величину [4, 9]. Для режима с R = 0.32реализуется КПД  $\eta = 0.31$ , поскольку отраженный сигнал изменяет амплитуду ВЧ поля в резонаторе, ухудшая условия группировки и энергообмена электронов с ВЧ полем. Как следует из рис. 2, коэффициент отражения R = 0.3 соответствует генерации моды  $TE_{23.6}$  (ближайшей к рабочей моде  $TE_{22.6}$ ) с азимутальным индексом, отличающимся на единицу от азимутального индекса моды TE<sub>22,6</sub>, и с тем же радиальным индексом. Для мод, азимутальный индекс которых отличается на единицу, условия генерации и эффективность квазиоптического преобразователя очень близки, что и подтверждается рис. 2. Как легко видеть, при установке согласованного окна Брюстера обе моды позволили достигнуть выходной мощности P около 1 MBт, что соответствует  $\eta \approx 0.4$ . Это позволяет считать, что в отсутствие отраженного сигнала условия генерации для обеих мод близки к оптимальным по КПД. Однако снижение выходной мощности, наблюдаемое в эксперименте с обычным окном, не может быть объяснено только отражением части сигнала от выходного окна без изменения условий генерации. Коэффициент отражения по амплитуде R = 0.32 соответствует примерно 10% отражаемой от окна мощности, и при сохранении условий генерации (электронного КПД) выходная мощность  $P \propto \eta (1 - R^2)$  должна составлять около 0,9 МВт. В то же время, исходя из рис. 1, выходная мощность должна составлять около 0,7 МВт, что значительно ближе к экспериментально полученному значению выходной мощности 0,62 МВт. Расхождение результатов расчета и эксперимента объясняется, видимо, некорректностью аппроксимации продольной структуры ВЧ поля гауссовым распределением и может быть уменьшено при методах расчета, использующих нефиксированную структуру ВЧ поля, как это сделано, например, в [10].



Рис. 2. Экспериментальная зависимость выходной мощности *P* гиротрона с различными окнами вывода СВЧ мощности (■ — стандартное кварцевое однодисковое окно, *d* = 6,58 мм = 12λ/2; ∘ — кварцевое окно Брюстера, *d* = 7 мм; ● — кремниевое окно Брюстера, *d* = 3,16 мм) и коэффициент отражения *R* от обычного окна вывода для различных мод.

Аналогичные вышеизложенным вычисления, сделанные для других мод в данном гиротроне и для гиротрона с прямым выводом СВЧ мощности [8], подтвердили корректность использованного подхода. Полученные результаты демонстрируют существенное влияние отражений на КПД генерации. Если для мод с низким коэффициентом отражения ( $R \le 0,1$ ) уменьшение выходной мощности незначительно, то отражение примерно 10% мощности ( $R \approx 0,3$ ) приводит к снижению КПД в 1,5÷2 раза и должно учитываться при проектировании гиротронов с перестройкой частоты.

Авторы выражают глубокую признательность О. Думбрайсу (Технологический университет, Хельсинки) за стимулирующие дискуссии и помощь при проведении расчетов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 97-02-17061.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Antonsen T. M., Cai S. Y., Nusinovich G. S. // Phys. Fluids B. 1992. T. 4. № 12. P. 4131.
- 2. Dammertz G., Braz O., Kuntze M., Pioczyk B., Thumm M. // Conf. Digest 22 Int. Conf. On Infrared and Millimeter Waves, Wintergreen, Virginia, 1997. P. 150.
- 3. Юлпатов В.К. // Гиротрон. Горький, 1981. С. 26.
- 4. Глявин М. Ю., Запевалов В. Е. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1998. Т. 41. № 10. С. 1348.

М.Ю.Глявин и др.

- 5. Нусинович Г. С., Моисеев М. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 11. С. 1709.
- 6. Гольденберг А. Л., Денисов Г. Г., Запевалов В. Е., Литвак А. Г., Флягин В. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1996. Т. 39. № 6. С. 635.
- 7. Thumm M. et al. // Conf. Digest 20 Int. Conf. On Infrared and Millimeter Waves, Orlando, Florida, 1995. P. 199.
- 8. Thumm M., Flyagin V., Zapevalov V. et al. // Proc. of the 3 Int. Workshop on Strong Microwaves in Plasmas, N. Novgorod, 1996. V.2. P. 614.
- 9. Нусинович Г. С., Эрм Р. Э. // Электронная техника. Электроника СВЧ. 1972. № 8. С. 55.
- 10. Dumbrajs O., Pavelyev A. // J. Electronics. 1997. T. 82. № 3. P. 261.

<sup>1</sup>Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород, Россия, <sup>2</sup> АОЗТ НПП "ГИКОМ", Н. Новгород, Россия Поступила в редакцию 19 января 1999 г.

# INFLUENCE OF VHF-SIGNAL REFLECTION ON GENERATION EFFICIENCY OF GYROTRONS WITH FREQUENCY TUNING

M. Yu. Glyavin, V. E. Zapevalov, and M. L. Kulygin

We estimate the decrease of generation efficiency due to signal reflection from the VHF output window of a wide-band tunable gyrotron in which the frequency tuning is realized using sequential mode excitation. The obtained theoretical estimates are compared to experimental data.

### УДК 537.521.7;621.385.6

# НАСЫЩЕНИЕ ОДНОСТОРОННЕГО МУЛЬТИПАКТОРА В ТОРМОЗЯЩЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### М. А. Горшкова, В. Е. Нечаев

Представлен анализ механизма насыщения вакуумного резонансного СВЧ разряда (мультипактора) в тормозящем электростатическом поле, обеспечивающем возврат электронов к поверхности с вторично-эмиссионным размножением. Дано обоснование стационарного состояния, в котором кулоновская дефокусировка электронных сгустков превышает СВЧ фокусировку (к резонансной фазе поля), так что воспроизведение сгустков на поверхности происходит с необходимым отсевом избытка вторичных электронов. На основе предложенной модели найдены основные характеристики разряда: величина и фазовое расположение резонансного сгустка электронов. Дано объяснение нарастания мощности разряда с увеличением коэффициента вторичной эмиссии.

Вторично-эмиссионный резонансный СВЧ разряд (ВЭРР), или мультипактор, [1, 2] является инициатором пробоев внутри различных вакуумных устройств мощной СВЧ электроники [2, 3]. В частности, для релятивистских черенковских генераторов особую опасность представляет ВЭРР, локализованный вблизи одной из стенок (односторонний разряд) [3, 4], в котором электроны перемещаются вдоль сильного магнитостатического поля под действием СВЧ поля и тормозящего электрического поля основного электронного пучка в приборе. Возможность и условия сведения соответствующего анализа к известному для одностороннего мультипактора [1, 5] установлены в работе [6], в которой рассмотрена начальная стадия разряда. Время пробоя [4] зависит от характеристик разряда на стадии насыщения, когда эффекты СВЧ фокусировки и кулоновской дефокусировки осциллирующего электронного сгустка обеспечивают его точное воспроизведение при попадании на поверхность за счет вторичной эмиссии. В данной работе представлены аналитическая модель и рассчитанные с ее помощью характеристики насыщенного мультипактора в тормозящем электрическом поле. При этом использована методика, подобная предложенной в [7], где удалось объяснить наблюдаемые характеристики мультипактора [8] в магнитостатическом поле, параллельном разрядной поверхности.

1. Анализ базируется на одномерной модели движения электронов вблизи плоской поверхности x = 0 (границы применимости модели указаны ниже). Движение электронов с зарядом -e и с массой m под действием электрического поля  $\vec{E} = \vec{x}_0 (-E_1 \sin \omega t + E_0)$ , являющегося суперпозицией СВЧ и тормозящего статического полей, описывается уравнением

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{m} \left( E_1 \sin \omega t - E_0 \right). \tag{1}$$

В пренебрежении начальной скоростью (средняя энергия электрона при эмиссии, составляющая около 3 эВ, много меньше характерных энергий движения в разряде) решение удобно представить в форме

$$\frac{\dot{x}}{a} = \cos T_0 - \cos T - \varepsilon (T - T_0) \equiv \cos T_0 \cdot (1 - \cos \tau) + \sin T_0 \cdot \sin \tau - \varepsilon \tau,$$

$$\frac{x}{a} = \cos T_0 \cdot (T - T_0) + \sin T_0 - \sin T - \frac{\varepsilon}{2} (T - T_0)^2 \equiv \cos T_0 \cdot (\tau - \sin \tau) + \sin T_0 \cdot (1 - \cos \tau) - \frac{\varepsilon}{2} \tau^2,$$
(2)

где  $T = \omega t$ ,  $T_0 = \omega t_0$ ,  $\tau = T - T_0$  — соответственно безразмерные время, момент вылета, время пролета,  $\varepsilon = E_0/E_1$ ,  $a = eE_1/(m\omega^2)$  — пространственный масштаб осцилляций, точкой обозначена производная по T.

2. До тех пор, пока можно пренебречь взаимодействием электронов, разряд проходит лавинную стадию, если коэффициент вторичной эмиссии  $\sigma > 1$ . Лавина создается резонансными электронами,

полное время пролета которых до момента возвращения к поверхности x = 0 кратно периоду СВЧ поля  $\tau = 2\pi k$ , где k — кратность резонанса, или номер зоны разряда. Для резонансной фазы  $T_{0r}$  из (2) следует

$$\cos T_{0\rm r} = \varepsilon \pi k. \tag{3}$$

Типичная траектория резонансного электрона показана пунктиром на рис. 1 между границами насыщенного сгустка, обозначенными сплошными линиями (см. ниже).

Согласно соотношениям (2), (3) скорость бомбардировки поверхности электронами составляет  $\dot{x}_{\rm b} = -2a\cos T_{0\rm r}$ , откуда с учетом условия  $\sin T_{0\rm r} > \varepsilon$  инжекции электронов в разряд (см. (1)) находится диапазон возможных начальных фаз:  $T_{0\rm r} \in [\arcsin \varepsilon, \pi/2]$ . Однако не все эти фазы устойчивы. Электроны, соседние с резонансными, могут сближаться за полный цикл движения от инжекции до оседания (группирование, или СВЧ фокусировка) или разлетаться (дефокусировка). В последнем случае электроны, репродуцируемые на следующих циклах, удаляются от фазы  $T_{0\rm r}$ , попадают в область начального замедления (от поверхности), и резонансный сгусток не формируется. Из (2) следует связь моментов вылета  $T_0$  и бомбардировки  $T_{\rm b}$ :

$$\cos T_0 \cdot (T_b - T_0) + \sin T_0 - \sin T_b - \frac{\varepsilon}{2} (T_b - T_0)^2 = 0.$$
(4)

Фокусировка имеет место, если  $\left|\frac{\partial T_{\rm b}}{\partial T_0}\right| \le 1$  при условии  $(T_{\rm b} - T_{0{\rm r}}) = 2\pi k$ . Согласно (4) и (3)

$$\left(\frac{\partial T_{\rm b}}{\partial T_0}\right)_{T_0=T_{\rm 0r}} = 1 - \frac{\sin T_{\rm 0r}}{\varepsilon} = 1 - \pi k \operatorname{tg} T_{\rm 0r} < 0, \tag{5}$$

из него следует, что минимальная резонансная фаза (при идеальной фокусировке) равна  $T_{0r}^{\min} = = \arctan(1/\pi k)$  при наибольшем тормозящем поле, когда  $\varepsilon_{\max} = (1 + \pi^2 k^2)^{-1/2}$ . С уменьшением торможения резонансная фаза нарастает и фокусировка ухудшается, при этом вылетевшие позже электроны прилетают раньше. Фокусировка исчезает на границе устойчивости фазы  $T_{0r}^{\text{st}}$ , когда левая часть (5) равна -1, т. е.  $T_{0r}^{\text{st}} = \arctan(2/\pi k)$  и  $\varepsilon_{\text{st}} = (4 + \pi^2 k^2)^{-1/2}$ . Границы зон резонансных движений приведены в табл. 1. Видно, что разряд может развиваться только при небольших тормозящих полях  $E_0 \leq 0, 3E_1$ , тормозящие поля уменьшаются с ростом номера зоны. Сами зоны с ростом номера k быстро сужаются, а между ними существуют большие промежутки по  $\varepsilon$ . На этом заканчивается изложение известных положений [1, 5], представленное в терминах, наиболее удобных для последующего анализа.

3. Если коэффициент вторичной эмиссии  $\sigma > 1$ , то разряд может возникать и при некоторой CBЧ дефокусировке (при неустойчивой фазе  $T_{0r}$ ), когда размножение электронов при взаимодействии электронного сгустка с поверхностью превышает их потерю, связанную с разлетом. Поэтому нижнюю границу  $\varepsilon_{\min}$  зоны резонансных движений можно грубо оценить из соотношений

$$\left(\frac{\partial T_{\rm b}}{\partial T_0}\right)_{T_0=T_{\rm 0r}} = 1 - \pi k \operatorname{tg} T_{\rm 0r} = -\sigma, \quad T_{\rm 0r}^{\rm max} = \operatorname{arctg} \frac{1+\sigma}{\pi k}, \quad \varepsilon_{\rm min} = \left[(1+\sigma)^2 + \pi^2 k^2\right]^{-1/2}.$$
 (6)

С учетом возможности такой дефокусировки зоны разряда заметно расширяются (см. последнюю строку в табл. 1). В насыщенном режиме границы зон определены ниже. Однако уже из такого рассмотрения видно, что заряд формируемых сгустков должен нарастать с ростом коэффициента вторичной эмиссии  $\sigma$  и очень быстро убывать с ростом номера зоны k, так как поле сгустка  $E_{\rm b}$  не может превышать величины  $E_1 (\varepsilon_{\rm max} - \varepsilon_{\rm min})$ , см. табл. 1. Отсюда ясна актуальность расчета насыщенного разряда только для первых зон.

М. А. Горшкова, В. Е. Нечаев

Т	9	б	п	ы	п	9	1
1	a	υ	Л	И	ш	a	1

Номер зоны $k$	1	2	3
Верхняя граница зоны, $arepsilon_{ ext{max}}=(E_0/E_1)_{ ext{max}}$	0,303	0,157	0,106
Граница устойчивости, $\varepsilon_{ m st} = (E_0/E_1)_{ m st}$	0,268	0,152	0,104
Нижняя граница зоны (6) при $\sigma=2,  arepsilon_{\min}=(E_0/E_1)_{\min}$	0,230	0,144	0,101

Отметим еще одно важное обстоятельство: согласно (2) движение электронных слоев в разряде происходит без обгонов, так как

$$\frac{\partial x}{\partial T_0} = -a\left(\sin T_0 - \varepsilon\right)\left(T - T_0\right) < 0\tag{7}$$

для фаз инжекции, так что вылетевшие позже электроны все время находятся ближе к поверхности и поэтому раньше на нее возвращаются. Кулоновские силы, приводящие в итоге к стабилизации сгустка, тем более не могут привести к пересечениям электронных слоев, что и обуславливает корректность ламинарной модели сгустка в процессе насыщения.

Величина скорости бомбардировки поверхности согласно (2), (3) составляет

$$|v_{\rm b}| = \frac{2\pi k e E_0}{m\omega} = \frac{2eE_1}{m\omega} \cos T_{0\rm r},\tag{8}$$

что с учетом известного диапазона энергии падающих электронов от 50 до 2500 эВ (для  $\sigma > 1$  при нормальном падении [2]), т. е.  $|v_{\rm b}|/c = 0.014 \div 0.1$ , где c — скорость света, приводит к следующему диапазону амплитуды СВЧ поля в разряде:

$$23\,\mathrm{\kappa}\mathrm{B} \le \lambda E_1 \cos T_{0\mathrm{r}} \le 165\,\mathrm{\kappa}\mathrm{B},\tag{9}$$

где  $\lambda$  — длина волны. Амплитуда СВЧ поля при  $\lambda = 3$  см находится в пределах от 8 до 55 кВ/см (разряд возникает в области малых фаз  $T_{0r}$ ). В сильном магнитостатическом поле, наклоненном к поверхности, разряд может развиться при существенно бо́льших СВЧ полях как из-за уменьшения силы, действующей вдоль основного направления движения, так и из-за повышения верхней границы диапазона энергий до нескольких десятков кэВ при наклонном ударе [2]. Масштаб осцилляций составляет  $a \approx |v_{\rm b}|/(2\omega) = |v_{\rm b}|\lambda/(4\pi c)$ , т. е.  $a \leq 0,01\lambda$  (при угле наклона магнитостатического поля к поверхности около  $\pi/4 a \leq 0,1\lambda$  [4]), что позволяет использовать плоскую модель для поверхностей с радиусом кривизны более  $0,1\lambda$ .

4. Можно считать, что на стадии насыщения в ламинарном электронном сгустке верхний электрон (дальний от разрядной поверхности и первый по времени инжекции, рис. 1) движется только под влиянием внешних полей, так как, во-первых, поле зарядов (в т. ч. и наведенных) над сгустком близко к нулю, если расстояние до других поверхностей велико (более чем 0,1λ) по сравнению с масштабом осцилляций, что обычно выполняется; во-вторых, учет замедления полем падающего сверху сгустка на малом начальном интервале движения (см. рис. 1) не приводит к существенному изменению характеристик движения (расчет см. ниже).

Нижний электрон (ближний к поверхности и последний по времени инжекции, рис. 1) все время находится под действием полного поля сгустка  $E_b$ , составляющего некоторую часть q от амплитуды CBЧ поля:  $q = E_b/E_1$ . Приведенные выше соображения позволяют не вникать во внутреннюю структуру сгустка для определения его основных характеристик: начальной фазы инжекции  $\varphi$  верхнего электрона, конечной фазы инжекции  $\varphi + \psi$  нижнего электрона и нормированного поля сгустка q, соответствующего заряду сгустка. Взаиморасположение фаз инжекции показано на увеличенном фрагменте в правом верхнем углу на рис. 1.

М. А. Горшкова, В. Е. Нечаев

1100

Для нахождения величин  $\varphi, \psi, q$  к уравнениям движения верхнего и нижнего электронов сгустка необходимо добавить условие, что суммарное поле падающего и восходящего сгустков на поверхности не может превышать внешнего ускоряющего поля на интервале инжекции  $T_0 \in [\varphi, \varphi + \psi]$ . При квазиоднородном заполнении сгустков (идеализация справедлива ввиду слабой зависимости скорости бомбардировки (8) от начальной фазы) тормозящее поле на поверхности, создаваемое восходящим сгустком, нарастает пропорционально  $q(T_0 - \varphi)/\psi$  в указанном интервале  $T_0$ . При  $\sigma = 1$  интервал фаз бомбардировки равен интервалу фаз инжекции следующего сгустка, и поле падающего сгустка на поверхности убывает как  $q (\varphi + \psi - T_0)/\psi$ , так что суммарное нормированное поле обоих сгустков равно q. Сгусток может насыщаться до состояния, в котором его поле в момент  $T_0 = \varphi$  сравнивается с внешним полем:  $\sin \varphi - \varepsilon = q$ . Однако при  $\sigma > 1$  воспроизведение сгустка возможно только при условии отсева частиц, т. е. ширина падающего сгустка должна составлять  $\sigma\psi$ , и часть его должна попадать на поверхность в интервале фаз с замедляющим полным полем, когда эмиссия вторичных электронов еще не приводит к их инжекции в восходящий сгусток. Поскольку сгустки зарождаются в областях небольших фаз  $T_0$ , где CBЧ поле быстро нарастает, то отсев вторичных электронов возможен только в интервале фаз  $T_0 \in [\varphi + \psi - \sigma \psi, \varphi]$ , предшествующем инжекции восходящего сгустка (см. рис. 1). При этом поле падающего сгустка  $E_{\mathrm{b}\downarrow}$  удовлетворяет соотношению



В момент  $T_0 = \varphi$  начала инжекции восходящего сгустка поле  $E_{b\downarrow} = q/\sigma$ , т. е. редуцировано в  $\sigma$  раз. Поэтому условие смены торможения ускорением для эмитированных электронов в момент  $T_0 = \varphi$ 

М. А. Горшкова, В. Е. Нечаев

представляется в виде

$$\sin\varphi - \varepsilon - \frac{q}{\sigma} = 0. \tag{11}$$

Описанная модель отсечки избытка электронов справедлива, если начальное ускорение сохраняется до конца эмиссии сгустка, т. е.  $\sin(\varphi + \psi) - \varepsilon - q > 0$ , что выполняется для всех практически интересных случаев.

5. Из уравнения (2) движения верхнего электрона под действием только внешних полей с момента  $T_0 = \varphi$  и до удара о поверхность в момент  $T_{\rm b} = (2\pi k + \varphi + \psi)$  имеем

$$\cos\varphi \cdot (2\pi k + \psi - \sin\psi) + \sin\varphi \cdot (1 - \cos\psi) - \frac{\varepsilon}{2} (2\pi k + \psi)^2 = 0$$
(12)

Аналогично для нижнего электрона, движущегося под действием внешних полей и поля всего сгустка от  $T_0 = (\varphi + \psi)$  до  $T_{\rm b} = (2\pi k + \varphi + \psi - \sigma \psi)$  получаем

$$\cos(\varphi + \psi) \cdot (2\pi k - \sigma\psi + \sin\sigma\psi) + \sin(\varphi + \psi) \cdot (1 - \cos\sigma\psi) - \frac{\varepsilon + q}{2} (2\pi k - \sigma\psi)^2 = 0.$$
(13)

Уравнения (11)–(13) отражают условия точного воспроизведения сгустка при его взаимодействии с поверхностью с учетом динамики СВЧ фокусировки и кулоновской дефокусировки на пролетном цикле движения. Из них находятся границы и величина заряда резонансного сгустка (параметры  $\varphi, \psi, q$ ) при заданных полях и вторичной эмиссии (параметры  $\varepsilon, \sigma$ ). Вблизи верхней границы зоны разряда (см. табл.1), где фокусировка близка к идеальной, поле сгустка должно быть мало (стремиться к нулю на границе (sin  $\varphi - \varepsilon$ )  $\rightarrow$  0) из-за малости внешнего поля. Вблизи нижней границы зоны разряда поле сгустка также мало из-за исчезновения СВЧ фокусировки. Результаты расчета величины q в зависимости от тормозящего поля при различной величине вторичной эмиссии  $\sigma$  подтверждают сказанное (см. рис. 2). Они позволяют определять как поле насыщенного сгустка  $E_b = qE_1$ , так и число электронов в нем на единицу поверхности

$$N_s = \frac{qE_1}{4\pi e}, \quad N_s[cm^{-2}] = 5.52 \cdot 10^8 qE_1[\kappa B/cm].$$
(14)

Заряд сгустка быстро увеличивается с ростом коэффициента  $\sigma$  (рис. 2) — факт, наблюдаемый для всех типов разряда (и в магнитостатическом поле [8], и в двухстороннем мультипакторе [1]). Только модель с фазовой отсечкой части сгустка у поверхности позволяет объяснить такой эффект.

Разрядные токи быстро ослабляются с ростом номера зоны k, и влияние разрядов с большими пролетными временами (при малых торможениях, см. табл. 1 и рис. 2) быстро падает. Фазовые границы насыщенного сгустка (см. рис. 3) расширяются по мере снижения фокусировки СВЧ полем (с уменьшением  $\varepsilon$ ), постепенно расходясь от резонансной фазы  $T_{0r}$ . Рассчитанные перемещения крайних электронов разрядного сгустка показаны на рис. 1 в сравнении с движением резонансного электрона (пунктир) для типичного варианта  $\sigma = 1,6$ ,  $\varepsilon = 0,26$ . Видно действие кулоновской дефокусировки, приводящей к расширению сгустка в  $\sigma$  раз за цикл его движения. Электроны сначала медленно поднимаются, достигают наибольшего удаления от поверхности заметно позже полупериода движения, затем, постепенно ускоряясь к поверхности, падают на нее с максимальной (почти удвоенной средней) скоростью (8).

6. Учтем теперь замедление верхнего электрона на стартовом участке в интервале времени *T* ∈ [*φ*, *φ* + *ψ*] под действием находящихся выше него электронов падающего сгустка (медленно подни-мающиеся электроны не создают полей в области находящихся выше быстро падающих электронов, т. е. обратное воздействие ничтожно). На этом интервале уравнение движения верхнего электрона несколько изменяется по сравнению с (1) за счет поля оседающего на поверхность сгустка и принимает вид

$$\frac{\ddot{x}}{a} = \sin T - \varepsilon - \frac{q}{\sigma} \left( 1 - \frac{T - \varphi}{\psi} \right).$$
(15)

М. А. Горшкова, В. Е. Нечаев 1101

В результате в основной зоне k = 1 вместо (12) получается слегка измененное уравнение, в котором появляется добавка с небольшими q и  $\psi$ :



Эта малая добавка связана с изменением скорости и смещения на стартовом участке. Из рис. 4 видно, что уточненные зависимости поля сгустка от тормозящего поля (пунктир) слабо отличаются от полученных выше (сплошные кривые). Для вторичной эмиссии с  $\sigma \approx 1$  различия почти нет, при  $\sigma \approx 2$  поле сгустка увеличивается на несколько процентов.

7. В целом поля разрядных сгустков не превышают единиц процентов от амплитуды СВЧ поля (рис. 2) даже в основной зоне k = 1 при типичных для металлов значениях  $\sigma$ . Поля формируемых в таком разряде сгустков несколько слабее, чем в случае ВЭРР с магнитным удержанием у поверхности [7]. Оценка рассеиваемой при бомбардировке мощности из скорости бомбардировки (8), числа электронов (14) и частоты следования сгустков дает, по аналогии с [3, 7], от единиц до десятков киловатт на 1 см<sup>2</sup> поверхности при  $\lambda = 3$  см. Выделение такой энергии в тонком слое металла (с толщиной, равной глубине проникновения электронов) ведет к нагреву на приблизительно 500 K за микросекунду. При меньших временах тепловая десорбция молекул остаточного газа с поверхности остается слабее десорбции, стимулированной электронными ударами [4]. Десорбция способствует нарастанию плазменных образований в процессе ионизации газа СВЧ полем и мультипактором, который инициирует весь процесс. Соответствующий механизм пробоя имеет вид взрывной неустойчивости, развивающейся за десятки наносекунд и описан в [4], где поле осциллирующего сгустка в насыщенном мультипакторе полагалось заданным и определялось из грубой оценки. Полученные выше результаты позволяют точнее рассчитывать параметры разряда для конкретных ситуаций.

8. Время установления насыщенной поверхностной плотности электронов  $N_s$  (14) можно оценить, исходя из логистической функции установления:

$$N(t) = N_0 \sigma^{ft} \left[ \frac{N_s}{N_s + N_0 \left( \sigma^{ft} - 1 \right)} \right].$$
(17)

М. А. Горшкова, В. Е. Нечаев

Здесь  $f = \omega/2\pi$  — частота соударений сгустка с поверхностью,  $N_0$  — начальная концентрация свободных электронов (порядка 10 см<sup>-2</sup>). На начальной стадии, пока  $N \ll N_s$ , идет лавинный процесс. При  $N \gg N_0$  из (17) следует

$$t = \frac{\lambda}{c \ln \sigma} \left[ \ln \frac{N_s}{N_0} + \ln \frac{N}{N_s - N} \right].$$
(18)

Первое слагаемое в скобках обусловлено лавиной, а второе описывает замедление процесса при выходе на стационар и в типичных ситуациях дает поправку 10% при  $N = 0.9N_s$  и 20% при  $N = 0.99N_s$ . Так что при оценке времени установления можно исходить только из времени развития электронной лавины  $t_s$ [нс]  $\approx 2/\ln\sigma$  при  $\lambda = 3$  см. Обычно разряд формируется за несколько десятков периодов СВЧ поля.

Авторы благодарят М. И. Петелина за поддержку и полезные замечания.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 98-02-17665.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Сливков И. Н. Процессы при высоком напряжении в вакууме. М.: Энергоатомиздат, 1986. 256 с.
- 2. Vaughan J. R. M. // IEEE Trans. Electr. Dev. 1988. V. ED-35. P. 1172.
- 3. Александров А. Ф., Бляхман Л. Г., Галузо С. Ю., Нечаев В. Е. // Релятивистская высокочастотная электроника: Сб. научн. тр. Горький: ИПФ АН СССР, 1983. Вып. 3. С. 219.
- 4. Kovalev N. F., Nechaev V. E., Petelin M. I., Zaitsev N. I. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1998. V. PS-36. № 3. P. 246.
- 5. Vance E. F. // J. Appl. Phys. 1963. V. 34. № 11. P. 3237.
- Blyachman L. G., Nechaev V. E. // Proc. XVI Int. symp. on discharges and electrical insulation in vacuum: Moscow–St.Peterburg, SPIE. 1994. V. 2259. P. 534.
- 7. Бляхман Л. Г., Нечаев В. Е. // ЖТФ. 1984. Т. 54. № 11. С. 2163.
- 8. Ганичев Д. А., Филатов В. А., Фридрихов С. А. // Радиотехника и электроника. Т. 17. № 8. С. 1639.

Институт прикладной физики РАН, г. Н. Новгород, Россия Поступила в редакцию 24 января 1999 г.

### SATURATION OF THE ONE-SIDED MULTIPACTOR IN DECELERATING ELECTROSTATIC FIELD

M. A. Gorshkova and V. E. Nechaev

We analyze saturation mechanism of the vacuum resonance RF discharge (multipactor) in the case where the decelerating electrostatic field returns electrons to the secondary-emission multiplying surface. It is found that the defocusing of electron beams prevails their RF focusing (toward the resonance phase of the field) at the stationary state, so that the bunch reproduction takes place on the surface with the necessary extraction of the superfluous secondary electrons. Using the suggested model, we determine main characteristics of this multipactor, such as the value and phase disposition of the resonant electron beam. The explanation of the increase of the discharge power with increasing yield of the secondary emission is proposed.

УДК 621.384.64

# ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В $n-n^+-$ И $p-p^+-$ ПЕРЕХОДАХ С ПРОДОЛЬНЫМ ТОКОМ ДРЕЙФА

Р. А. Браже, Р. М. Мефтахутдинов, Т. А. Новикова

В рамках обоснованного авторами гидродинамического приближения исследованы конвективные неустойчивости в динамике свободных носителей заряда в  $n-n^+$  - и  $p-p^+$ -переходах при наличии продольного тока дрейфа в одном из приконтактных слоев.

### 1. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

В работе [1] показана возможность существования контактных электрогидродинамических волн (КЭГДВ) свободных носителей заряда на границе раздела двух полупроводниковых слоев, находящихся в поперечном к плоскости раздела внешнем электрическом поле. Теория таких волн построена в предположении, что в режиме баллистического переноса, реализуемого при толщине полупроводникового образца, приблизительно равной 0,05÷0,35 мкм, динамика возмущений свободных электронов (дырок) в слаболегированных примесных полупроводниках может быть описана в рамках гидродинамического приближения.

Здесь этот подход распространяется на случай  $n-n^+$ - и  $p-p^+$ -переходов, получаемых автоэпитаксиальным наращиванием [2] более высокоомного слоя на полупроводниковую подложку из электронного или дырочного полупроводника. Рассмотрим для определенности  $n-n^+$ -переход (рис. 1), относительно свойств и параметров которого примем следующие допущения.

1. Полупроводник примесный, слаболегированный, так что свободные электроны имеют приблизительно одинаковую кинетическую энергию  $E - E_c$  и одинаковую скорость, где E — полная энергия электрона,  $E_c$  — энергия, соответствующая дну зоны проводимости полупроводника.

2. Режим переноса электронов в обла-



Рис. 1. Структура исследуемого  $n-n^+$ -перехода.

сти  $n-n^+$ -перехода баллистический. Последнее допущение справедливо, если толщины приконтактных слоев  $d_n$ ,  $d_n^+$  меньше толщины баллистичности  $L_b$  [1]. Здесь, в приближении резкого перехода [3],

$$d_{\rm n} = \frac{\varrho_{\rm n}}{\varrho_{\rm n} + \varrho_{\rm n}^+} d\,, \qquad d_{\rm n}^+ = \frac{\varrho_{\rm n}^+}{\varrho_{\rm n} + \varrho_{\rm n}^+} d\,, \tag{1}$$

$$d \approx \left(2\varepsilon_0 \varepsilon \mu \varrho_{\rm n} U_{\rm c}\right)^{1/2},\tag{2}$$

$$U_{\rm c} = \frac{k_{\rm B}T}{e} \ln \frac{\rho_{\rm n}}{\rho_{\rm n}^+},\tag{3}$$

$$L_{\rm b} = \tau_{\rm s} \left(\frac{2\hbar\omega_0}{m^*}\right)^{1/2},\tag{4}$$

где  $\rho_{\rm n}$  и  $\rho_{\rm n}^+$  — удельные сопротивления соответственно высокоомного и низкоомного слоев,  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость полупроводника,  $\mu$  — подвижность свободных электронов,  $U_{\rm c}$  — напряжение контактного электрического поля при температуре полупроводника  $T, \tau_{\rm s} =$  $10^{-12} \div 10^{-13}$  с — время спонтанного испускания оптических фононов,  $\omega_0$  — предельная частота фононов,  $m^*$  — эффективная масса электронов, которая считается постоянной и не зависящей от направления, е — элементарный заряд, k<sub>B</sub> — постоянная Больцмана,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\hbar$  — постоянная Планка.

В качестве примера приведем рассчитанные по формулам (1)–(4) параметры для  $n-n^+$ -перехода на основе селенида цинка (ZnSe) со значениями  $\rho_n = 5.0 \cdot 10^{-2}$  Ом·м и  $\rho_n^+ = 1.0 \cdot 10^{-2}$  Ом·м:  $d_n = 0.078$  мкм,  $d_n^+ = 0.016$  мкм,  $U_c = 0.04$  В,  $L_b = 0.124$  мкм. Расчеты выполнены для T = 300 К. 3. Приконтактные слои не тоньше дебаевского радиуса экранирования:  $d_{\rm n} > r_{\rm D}, d_{\rm n}^{+} > r_{\rm D}^{+},$  где

$$r_{\rm D} = \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mu \varrho_{\rm n} k_{\rm B} T}{e}\right)^{1/2}, \quad r_{\rm D}^+ = \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mu \varrho_{\rm n}^+ k_{\rm B} T}{e}\right)^{1/2}.$$
(5)

В рассматриваемом примере  $r_{\rm D} = 0.052$  мкм,  $r_{\rm D}^+ = 0.023$  мкм. Здесь необходимо пояснить, что при толщине приконтактного слоя порядка дебаевского радиуса следует учитывать пространственную дисперсию колебаний возмущений электронной плотности. Но дисперсия становится существенной лишь при заметном разбросе электронов по скоростям. В нашем случае (см. условие 1) пространственной дисперсией можно пренебречь.

 ${
m B}$  общем случае движение свободных электронов в полупроводнике под действием силы  $ec{F}$  в режиме баллистического транспорта описывается бесстолкновительным кинетическим уравнением Больцмана (уравнением Власова) [4]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{m^*} \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$
(6)

для неравновесной функции f распределения электронов по скоростям  $\vec{v}$  и координатам  $\vec{r}$ . Однако в частном случае приближений 1, 2 при слабых возмущениях равновесной скорости электронов уравнение (6) сводится к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{nm^*} \nabla p - \frac{e}{m^*}\vec{E}, \qquad (7)$$

так как сила  $\vec{F}$  в каждой точке складывается из силы, обусловленной градиентом концентрации n (и, следовательно, газокинетического давления p) частиц, вызванным возмущением, и силы, действующей со стороны электрического поля контакта:  $\vec{F} = - \bigtriangledown p/n - e\vec{E}$ .

### 2. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В высокоомном слое рассматриваемой системы полупроводников (рис. 1) протекает продольный ток с плотностью  $j = en_1U$ , где  $n_1$  — концентрация электронов в высокоомном слое, U — скорость дрейфа электронов. Предположим, что для данной структуры выполняются условия, приведенные в предыдущем пункте, и движение заряженных частиц в контактной области полупроводников описывается в рамках гидродинамического приближения.
Для рассматриваемого поведения заряженных частиц прослеживается аналогия с классическим примером — относительным движением двух жидкостей различной плотности [5], если принять, что электронная квазижидкость низкокоомного слоя (z < 0) с плотностью  $n_2m^*$  покоится, а электронная квазижидкость высокоомного слоя с плотностью  $n_1m^*$  движется со скоростью  $U = j/(en_1)$ . Будем предполагать, что более плотная неподвижная квазижидкость обладает вязкостью  $\nu_2$ , а у движущейся электронной жидкости вязкость отсутствует. Максимальное значение коэффициента вязкости из кинетических соображений примем равным величине коэффициента диффузии электронов:

$$\nu_2 = D_2 = \frac{\mu k_{\rm B} T}{e}$$

Математическая постановка задачи о КЭГДВ в рассматриваемой полупроводниковой структуре отличается от приведенной в [1] лишь учетом скорости дрейфа электронов в n-слое и вязкости электронной квазижидкости в  $n^+$ -слое в уравнениях движения, а также диссипативного члена в динамическом граничном условии. Решение данной задачи приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$a(\omega - Uk)^{2} \operatorname{th}(kd_{n}^{+}) + \omega^{2} \operatorname{th}(kd_{n}) - (1 - a) kw \operatorname{th}(kd_{n}) \operatorname{th}(kd_{n}^{+}) = -4i\nu_{2}\omega k^{2} \operatorname{th}(k_{l}d_{n}^{+}).$$
(8)

Здесь  $a = n_1/n_2 < 1$ ,  $k_l^2 = k^2 - i\omega/\nu_2$ ,  $w = eE_{\max}/m^*$  — эффективное ускорение электронов в контактном электрическом поле, максимальное значение напряженности которого определятся выражением

$$E_{\max} = (E_{1,2})_{\max} = \frac{en_1 d_n}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{d_n}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \varrho_n},$$

где  $E_{1,2}$  — напряженность контактного электрического поля в соответствующей области перехода.

В коротковолновом приближении дисперсионное уравнение (8) приводится к виду

$$a(\omega - Uk)^{2} + \omega^{2} - (1 - a)kw = -4i\nu_{2}\omega k^{2}.$$
(9)

### 3. АНАЛИЗ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

Проанализировав решение дисперсионного уравнения (9), обсудим возможность появления неустойчивостей, связанных с КЭГДВ в  $n-n^+$ - и  $p-p^+$ -переходах. Введем следующие обозначения:

$$k^* = \frac{1 - a^2}{aU^2}w, \quad \omega^* = \frac{aU}{1 + a}k^*.$$
(10)

В отсутствие диссипации энергии в низкоомном слое (вязкость неподвижной квазижидкости  $\nu_2 = 0$ ) решение дисперсионного уравнения имеет вид

$$\omega_{1,2} = \omega^* \frac{k}{k^*} \left( 1 \pm \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{k^*}{k} - 1 \right) \right]^{1/2} \right) \,. \tag{11}$$

На рис. 2 изображено семейство дисперсионных кривых при различных значениях параметра *а*. Для вещественной части  $\omega/\omega^*$  нижние ветви дисперсионных кривых пересекают ось  $k/k^*$ , происходит изменение знака  $\operatorname{Re}(\omega)/\omega^*$ . Волнам отрицательной энергии (ВОЭ) отвечает область от точки пересечения нижних ветвей кривых с горизонтальной осью до точки ветвления  $k/k^* = 1$ . Напомним, что под ВОЭ понимаются волны, усиливающиеся за счет полной энергии системы волна—среда. Волнам положительной энергии (ВПЭ) соответствуют верхние ветви кривых, для которых величина  $\operatorname{Re}(\omega)/\omega^*$  всегда больше нуля. За точкой ветвления происходит смыкание верхних и нижних ветвей дисперсионных

кривых и частота становится комплексной: связь контактных электрогидродинамических ВОЭ и ВПЭ приводит к неустойчивости, известной в гидродинамике как неустойчивость Кельвина—Гельмгольца [5, 6]. Для всех  $k > k^*$  ВОЭ усиливаются, а ВПЭ затухают (на рис. 2 для этих типов волн соответственно Im( $\omega$ )/ $\omega^* > 0$  и Im( $\omega$ )/ $\omega^* < 0$ ).



Рис. 2. Дисперсионные кривые КЭГДВ в контакте двух одинаковых примесных полупроводников с различным удельным сопротивлением в отсутствие диссипации.

Предположим теперь, что в низкоомном слое имеет место диссипация энергии. В этом случае решение уравнения (9) выглядит следующим образом:

$$\omega_{1,2} = \omega^* \frac{k}{k^*} \left( 1 - i\nu_{2r} \frac{k}{k^*} \pm \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{k^*}{k} - 1 \right) - \nu_{2r}^2 \left( \frac{k}{k^*} \right)^2 - i2\nu_{2r} \frac{k}{k^*} \right]^{1/2} \right).$$
(12)

Здесь  $\nu_{2r} = 2\nu_2 k^*/(aU)$ . Из (12) следует, что при наличии диссипации энергии ВПЭ и ВОЭ оказываются неустойчивыми при всех k > 0 (Im  $\omega_{1,2} \neq 0$ ). В области неустойчивости Кельвина–Гельмгольца ВОЭ усиливаются, а ВПЭ — затухают.

Дисперсионные кривые КЭГДВ при малых значениях  $\nu_{2r}$  изображены на рис. 3, при средних  $\nu_{2r}$  — на рис. 4, при больших  $\nu_{2r}$  — на рис. 5. Из рисунков видно, что увеличение диссипации энергии приводит к более быстрому затуханию ВПЭ. Диссипация также оказывает стабилизирующее действие на усиление контактных ВОЭ. С увеличением значения  $\nu_{2r}$  усиление этих волн уменьшается (Im $\omega$  становится меньше). Кроме того, влияние диссипации сказывается на частоте КЭГДВ. При средних и больших значениях  $\nu_{2r}$  частота ВОЭ резко уменьшается: нижние ветви зависимости  $\text{Re}(\omega)/\omega^*$  практически совпадают с горизонтальной осью. Следовательно, достаточно большое увеличение диссипации может привести не только к уменьшению инкремента ВОЭ, но и к невозможности распространения этих волн в  $n-n^+$ -переходе.



Рис. 3. Дисперсионные кривые КЭГДВ при наличии слабой диссипации в низкоомном слое. Пунктиром для сравнения показаны кривые без учета диссипации (случай *a* = 0,2 на рис. 2).



Рис. 4. Дисперсионные кривые КЭГДВ при наличии средней диссипации в низкоомном слое.



Рис. 5. Дисперсионные кривые КЭГДВ при наличии сильной диссипации в низкоомном слое.

В качестве примера рассмотрим возможность применения полученных результатов к конкретному  $n-n^+$ -переходу на основе ZnSe, рассмотренного в п. 1. В соответствии с (10)

$$\nu_{2\mathbf{r}} = \frac{2\nu_2(1-a^2)w}{a^2 U^3} \,.$$

Тогда при T = 300 К, a = 0,2 и  $U = c_0 = 1,0 \cdot 10^5$  м/с ( $c_0$  — скорость распространения в ZnSe линейной КЭГДВ [7, 8]) получаем значение  $\nu_{2r} = 2,8 \cdot 10^4$ , т. е. имеет место режим сильной диссипации.

Тем не менее, подбирая *a*, *U* и (или) используя другие полупроводниковые материалы, можно надеяться на надежное возбуждение КЭГДВ рассматриваемого вида.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 98-02-03313) и Федеральной целевой программой "Интеграция" (проект № К-0179).

## ЛИТЕРАТУРА

- 1. Браже Р. А., Садулин В. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1997. Т. 40. № 9. С. 1164.
- 2. Технология СБИС: В 2-х кн. Кн. 1 Пер. с англ. / Под ред. С. Зи. М. : Мир, 1986. 404 с.
- 3. Орешкин П. Т. Физика полупроводников и диэлектриков. М. : Высш. шк., 1977. 448 с.
- 4. Балеску Р. Статистическая механика заряженных частиц. М.: Мир, 1967. 516 с.
- 5. Островский Л. А., Рыбак С. А., Цимринг Л. Ш. // УФН. 1986. Т. 150, вып. З. С. 417.
- 6. Островский Л. А., Степанянц Ю. А. // Изв. АН СССР. Механика жидкостей и газов. 1982. № 4. С. 63.
- 7. Браже Р. А. // Пятый Межд. сов.—семинар "Инженерно-физические проблемы новой техники": Тез. докл. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1998. С. 234.
- 8. Браже Р. А., Новикова Т. А. // Тр. Пятой Всеросс. научно-техн. конференции с межд. участ. " Актуальные проблемы твердотельной электроники и микроэлектроники"(Таганрог—Дивноморское, 1998). С. 105.

Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск, Россия Поступила в редакцию 28 января 1999 г.

# ELECTROHYDRODYNAMIC INSTABILITIES IN n-n<sup>+</sup>- AND p-p<sup>+</sup>-TRANSITIONS WITH LONGITUDINAL DRIFT CURRENTS

R. A. Brazhé, R. M. Meftahutdinov, and T. A. Novikova

Using the hydrodynamic approximation formulated by the authors, convective instabilities of free-carrier dynamics in n-n<sup>+</sup>- and p-p<sup>+</sup>-transitions with longitudinal drift current in one of the near-contact layers are analyzed.

#### УДК 538.915:539.182

# ЭЛЕКТРОННАЯ РЕЗОНАНСНАЯ ДИНАМИКА В ДВОЙНОЙ КВАНТОВОЙ ЯМЕ

## В.А.Бурдов

Рассматривается двухуровневая электронная динамика в двойной квантовой яме в периодическом, но негармоническом внешнем электрическом поле. Предложен метод решения уравнения Шредингера, основанный на обобщении обычного резонансного приближения для системы с произвольным числом резонансов, применимый как в слабых, так и в сильных полях. Получены выражения для квазиэнергетических волновых функций и электронного дипольного момента системы. Показано, что зависимость дипольного момента от постоянной составляющей внешнего поля является почти периодической, причем на различных половинах периода дипольный момент имеет разные знаки.

#### введение

Исследование свойств различных полупроводниковых наноструктур, содержащих квантовые ямы, представляет интерес с точки зрения непосредственного воздействия на волновую функцию электрона путем изменения внешних макроскопических параметров системы. Так, например, с помощью электрического поля, воздействующего на электронную подсистему полупроводника, можно управлять заселенностью квантовых ям в двухъямной или многоямной гетероструктуре [1].

Применительно к гетероструктурам на основе двойной квантовой ямы обсуждалось явление динамической локализации электронной волновой функции в области одной из ям под действием синусоидального внешнего поля [2, 3], а в работах [4–6] вычислялся дипольный момент системы и исследовалась возможность низкочастотного дипольного излучения такой структурой. Осцилляции электронного волнового пакета и порождаемое этими осцилляциями электромагнитное излучение наблюдались экспериментально [7–9]. Наконец, в работах [1, 10] изучалась зависимость распределения электронной плотности в квантовых ямах от характеристик внешнего периодического воздействия.

Практически во всех цитируемых работах (за исключением [1] и [5]) рассматривалась модель симметричной двойной квантовой ямы, подверженной воздействию сильного и строго гармонического электрического поля. В работах [1] и [5] рассматривались несимметричные структуры и даже негармоническое воздействие в виде последовательности прямоугольных импульсов [1], однако основное внимание было уделено расчету квазиэнергий двухуровневой системы и выявлению условий, при которых происходит пересечение (кроссинг) квазиэнергетических уровней. При этом исследовалась временная эволюция распределения электронной плотности именно в условиях кроссинга или антикроссинга квазиэнергетических уровней, что имеет место лишь при строго определенных значениях постоянного внешнего поля и амплитуды переменного.

Вместе с тем, представляется интересным построить более общую теорию для случая воздействия на систему периодического, но негармонического поля произвольной амплитуды с отличным от нуля средним значением (постоянной составляющей) и проанализировать структуру волновых функций и дипольного момента системы в зависимости от величины постоянной составляющей внешнего поля.

В данной работе предпринята попытка построения именно такой теории и предложен метод решения уравнения Шредингера, позволяющий получать единые выражения для волновых функций частицы в негармоническом поле при любых значениях его постоянной составляющей.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим несимметричную двойную квантовую яму (две потенциальные ямы, разделенные почти непроницаемым барьером) в периодическом, но не обязательно гармоническом поле V(x, t) частоты  $\omega$ , среднее по времени значение которого равно нулю. Ось x направим по нормали к квантовым слоям, а начало отсчета по x выберем в середине потенциального барьера. Предположим для определенности (хотя это предположение и не носит обязательный характер), что несимметричная двойная квантовая яма получена из симметричной двойной квантовой ямы наложением постоянного электрического поля  $\mathcal{E}$ , направленного по оси структуры.

Примером двойной квантовой ямы может служить гетероструктура, составленная из двух типов полупроводников с разной шириной запрещенной зоны, причем два слоя полупроводника с меньшей шириной запрещенной зоны (например GaAs) помещаются в полупроводник с большей шириной запрещенной зоны (AlAs). В результате образуются две потенциальные ямы (дно зоны проводимости GaAs), разделенные потенциальным барьером (запрещенной зоной AlAs). Если слои GaAs имеют одинаковую толщину, профиль потенциала оказывается симметричным. Если теперь наложить на систему постоянное и однородное электрическое поле (о чем шла речь выше), двухъямный потенциал утратит исходную симметрию.

Квантовые эффекты начинают играть заметную роль, когда ширина ямы достигает нескольких сотен нанометров (сказывается размерное квантование). Дальнейшее уменьшение ширины потенциальной ямы (толщины слоя полупроводника) приводит к уменьшению числа уровней энергии (подзон размерного квантования) электрона в яме и к увеличению расстояния между уровнями.

Если двойная квантовая яма симметрична, уровни энергии в каждой из ям (в приближении изолированных ям) расположены на одинаковой глубине. В этом случае ввиду существования слабой туннельной связи между ямами осуществляется резонансное туннелирование электронной волновой функции из одной ямы в другую с образованием симметричного и антисимметричного состояний. При этом произвольный энергетический уровень расщепляется на два подуровня, энергия перехода между которыми  $\hbar \Delta_0$  определяется туннельным интегралом через разделительный потенциальный барьер и является экспоненциально малой величиной.

Для структур типа GaAs/AlAs величина энергии перехода между двумя образовавшимися уровнями может изменяться в достаточно широких пределах в зависимости от высоты и, особенно, от ширины разделительного барьера. Это объясняется тем, что величина  $\hbar\Delta_0$  экспоненциально зависит от этих параметров (показатель экспоненты пропорционален произведению ширины барьера на квадратный корень из его высоты). Поэтому при увеличении ширины барьера в несколько раз энергия перехода между образовавшимися уровнями уменьшается на несколько порядков.

Однако слишком малые значения  $\hbar\Delta_0$ , по-видимому, вряд ли могут проявиться в реальном эксперименте ввиду существования неоднородного уширения уровней, обусловленного, например, неидеальностью границ между различными полупроводниковыми слоями. Характерная величина уширения составляет  $10^{-3}$  эВ, что может быть принято в качестве наименьшего значения энергии перехода. При этом ширина барьера не должна превышать нескольких десятков нанометров при высоте барьера около 0,1 эВ.

Будем в дальнейшем предполагать, что ширина каждой из ям в симметричном случае невелика (порядка нескольких десятков нанометров), так что внутри ямы существуют лишь два уровня дискретного спектра с энергиями  $E_{0,1}^{(0)} = \pm \hbar \Delta_0/2$ , получившиеся в результате расщепления уровня энергии основного состояния в каждой из ям. Волновые функции стационарных состояний такой симметричной двухуровневой системы обозначим  $\chi_{0,1}(x)$ , причем  $\chi_0(x)$  является симметричной, а  $\chi_1(x)$  — антисимметричной. Распределение электронной плотности в состояниях  $\chi_{0,1}(x)$  является симметричным, а разность  $\chi_0^2(x) - \chi_1^2(x)$  по порядку величины [11] определяется соотношением  $\sqrt{\hbar \Delta_0/E_2^{(0)}} \ll 1$ , где

 $E_2^{(0)}$  — следующий за  $E_1^{(0)}$  уровень энергии; значение  $E_2^{(0)}$  сопоставимо с высотой разделительного барьера. В дальнейшем будем считать величину  $\sqrt{\hbar\Delta_0/E_2^{(0)}}$  самым малым параметром задачи.

Наличие постоянного электрического поля приводит к перекосу симметричного двухъямного потенциала и расхождению уровней энергии на величину  $E_1 - E_0 = \hbar \Delta = \sqrt{(\hbar \Delta_0)^2 + 4e^2 x_0^2 \mathcal{E}^2}$ , где e величина элементарного заряда,  $x_0 = \langle \chi_0(x) | \hat{x} | \chi_1(x) \rangle$  — матричный элемент оператора координаты в базисе  $\chi_{0,1}(x)$ . Волновые функции при наличии поля  $\mathcal{E}$  — обозначим их  $\varphi_{0,1}(x)$  в отличие от волновых функций  $\chi_{0,1}(x)$  симметричной системы — уже не обладают какой-либо симметрией по отношению к замене  $x \to -x$ , и по мере увеличения поля  $\mathcal{E}$  каждая из них локализуется в своей яме.

Если постоянное электрическое поле будет достаточно сильным, расхождение уровней энергии может оказаться существенным настолько, что энергия перехода  $\hbar\Delta$  при наличии поля заметно превысит исходное значение  $\hbar\Delta_0$ . Например, для увеличения энергии перехода от значений  $\hbar\Delta_0 \sim 10^{-3}$  эВ на порядок потребуется электрическое поле с напряженностью в несколько сотен вольт на сантиметр. Следует подчеркнуть, что, несмотря на расхождение уровней, энергия перехода между ними попрежнему остается много меньше высоты барьера, и в рассматриваемом нами двухъямном потенциале число уровней энергии дискретного спектра, так же, как и при отсутствии поля, равно двум.

Впоследствии, рассматривая уже нестационарную электронную динамику в двойной квантовой яме при наличии еще и переменного электрического поля, будем считать, что переменное поле взаимодействует только с парой уровней  $E_{0,1} = \pm \hbar \Delta/2$  дискретного спектра в ямах, при этом искажениями, связанными с существованием более высоких энергетических состояний, будем пренебрегать. Для этого необходимо, чтобы матричный элемент оператора возмущения был всегда много меньше энергии следующего за  $E_1$  дискретного уровня  $E_2$ , а в случае отсутствия дискретного спектра (исключая  $E_{0,1}$ ) энергетической высоты барьера. Кроме того, частоту  $\omega$  переменного поля будем полагать совпадающей по порядку величины с частотой  $\Delta_0$  квантового перехода при отсутствии постоянного поля, чтобы исключить возможные резонансные переходы на более высокие уровни.

Указанные условия представляют собой критерий применимости двухуровневого приближения, которое мы в дальнейших расчетах будем полагать выполненным.

Перейдем теперь к уравнениям, описывающим нестационарную динамику электрона в двойной квантовой яме. Вводя безразмерное время  $\tau = \omega t$ , параметр  $\gamma = \Delta/\omega$  и периодическую функцию

$$\varepsilon(\tau) = e_{01}(\tau) \exp\left\{i \int (e_{00}(\tau) - e_{11}(\tau)) \,\mathrm{d}\tau\right\},\,$$

где  $e_{ij}(\tau) = V_{ij}(\tau)/\hbar\omega$  — безразмерный матричный элемент оператора возмущения, вычисленный в базисе  $\varphi_{0,1}(x)$ , запишем уравнения эволюции двухуровневой системы в виде

$$i\frac{\mathrm{d}C_0}{\mathrm{d}\tau} = \varepsilon(\tau) \, e^{-i\gamma\tau} C_1, \quad i\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}\tau} = \varepsilon^*(\tau) \, e^{i\gamma\tau} C_0, \tag{1}$$

где  $C_{0,1}(\tau)$  — с точностью до некоторых фазовых множителей коэффициенты разложения волновой функции

$$\Psi(x,\tau) = C_0(\tau) \exp\left(-i \int e_{00}(\tau) \,\mathrm{d}\tau + i\gamma\tau/2\right) \varphi_0(x) + C_1(\tau) \exp\left(-i \int e_{11}(\tau) \,\mathrm{d}\tau - i\gamma\tau/2\right) \varphi_1(x) \tag{2}$$

по базису стационарных состояний.

Оценку величины матричных элементов  $e_{ij}$  можно легко произвести, если выразить их через матричные элементы  $\langle \chi_0 | V(x,\tau) | \chi_1 \rangle$ , которые в силу уже упомянутых свойств симметрии функций  $\chi_{0,1}(x)$ можно считать совпадающими по порядку величины с самой потенциальной энергией возмущения

Ì

 $V(x, \tau)$ . Выполняя несложные расчеты и пренебрегая при вычислениях разностью  $\chi_0^2(x) - \chi_1^2(x)$ , получаем

$$e_{00}(\tau) - e_{11}(\tau) = -2\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_0}{\Delta}\right)^2} \frac{\langle \chi_0 | V(x,\tau) | \chi_1 \rangle}{\hbar\omega}, \quad e_{01}(\tau) = \frac{\Delta_0}{\Delta} \frac{\langle \chi_0 | V(x,\tau) | \chi_1 \rangle}{\hbar\omega}.$$
 (3)

Из (3) видно, что в случае сильного постоянного поля ( $\Delta_0 \ll \Delta$ ) матричный элемент  $e_{01}(\tau)$  может оказаться малым, при этом вся функция  $\varepsilon(\tau)$  будет мала.

Описание эволюции квантовой системы в периодическом внешнем поле наиболее корректно может быть проведено в базисе квазиэнергетических функций  $U_{\nu}(x, \tau)$ , которые обладают блоховской структурой:

$$U_{\nu}(x,\tau) = \exp\left\{-i\nu\tau\right\} \Phi_{\nu}(x,\tau),\tag{4}$$

где число  $\nu$ , определенное с точностью до единицы, называется квазиэнергией [12], а функции  $\Phi_{\nu}(x, \tau)$  являются периодическими по  $\tau$  с периодом  $2\pi$ . В случае двухуровневой системы число квазиэнергетических уровней и квазиэнергетических волновых функций равно двум.

Учитывая определение (4), будем искать коэффициенты  $C_{0,1}( au)$  в виде

$$C_0(\tau) = f(\tau) e^{-i\nu\tau - i\gamma\tau/2}, \quad C_1(\tau) = g(\tau) e^{-i\nu\tau + i\gamma\tau/2},$$
 (5)

где  $f(\tau)$  и  $g(\tau)$  — периодические функции с периодом  $2\pi$ , которые, следовательно, могут быть разложены в ряд Фурье:

$$f(\tau) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} f_n e^{-in\tau} , \quad g(\tau) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} g_n e^{-in\tau} .$$

Подставляя (5) в (1), получаем следующую систему бесконечной размерности для определения коэффициентов  $f_n, g_n$ :

$$\left(\nu + \gamma/2 + n\right) f_n - \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m \varepsilon_{m-n} = 0, \quad \left(\nu - \gamma/2 + n\right) g_n - \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \varepsilon_{n-m}^* = 0, \tag{6}$$

где  $\varepsilon_n$  — коэффициенты разложения в ряд Фурье периодической функции  $\varepsilon(\tau)$ . Решения системы (6) позволят определить впоследствии квазиэнергетические функции (4) (а следовательно и величину дипольного момента, соответствующего квазиэнергетическим состояниям) во всей области изменения параметра  $\gamma$ .

В случае слабого синусоидального поля, как показано, например, в [12], в системе (6) реально отличными от нуля оказываются по одному фурье-коэффициенту функций  $f(\tau)$  и  $g(\tau)$  для каждого квазиэнергетического состояния, в то время как все остальные коэффициенты пренебрежимо малы. В более общем случае негармонической зависимости функции  $\varepsilon(\tau)$  количество отличных от нуля коэффициентов ряда Фурье существенно возрастает, что связано с существованием большого числа резонансных гармоник внешнего поля.

Для определения зависимости квазиэнергий и квазиэнергетических волновых функций от параметра  $\gamma$  обратимся к системе уравнений (6) для коэффициентов разложения  $f_n$ ,  $g_n$ . В общем случае при произвольной амплитуде возмущения  $V(x, \tau)$  система (6) может быть решена, по всей видимости, лишь численно. Аналитическое же решение ее возможно, когда фурье-амплитуды  $\varepsilon_n$  становятся малыми, что и будет продемонстрировано ниже.

Заметим, что малость  $\varepsilon_n$  вовсе не означает, что потенциальная энергия электрона во внешнем поле  $V(x, \tau)$  обязательно должна быть много меньше величины энергии кванта поля  $\hbar\omega$ . Отношение  $V(x, \tau)/(\hbar\omega)$  может быть и большим — в этом случае коэффициенты разложения в ряд Фурье функции

 $\exp\left\{i\int (e_{00}-e_{11})\,\mathrm{d}\tau\right\}$  по порядку величины равны  $\sqrt{\hbar\omega/V}$ , а величина коэффициентов  $\varepsilon_n$  составит примерно  $\sqrt{V/\hbar\omega}\,\Delta_0/\Delta$ . Если последнее выражение окажется малым, система (6) может быть решена аналитически. В частном случае сильного однородного внешнего поля (в дипольном приближении), коэффициенты  $\varepsilon_n \sim \sqrt{\hbar\omega/V_0}$ , где  $V_0$  — амплитуда переменной составляющей  $V(x,\tau)$  [13], что также дает значения  $|\varepsilon_n| \ll 1$ , и, следовательно, система (6) оказывается разрешима.

#### 2. КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ

Перейдем к решению системы уравнений (6), считая все коэффициенты  $\varepsilon_n$  малыми. Ограничиваясь для квазиэнергий первой зоной Бриллюэна ( $|\nu| \leq 1/2$ ), находим, что в пределах первой зоны существуют две ветви квазиэнергии, отвечающие двум квазиэнергетическим состояниям, для которых  $\nu_{\pm}(\gamma) = \pm \nu(\gamma)$ . При этом в окрестности целочисленных резонансных значений  $\gamma$  для  $\nu(\gamma)$  можно использовать обычное резонансное приближение (см., например, [14]).

Так, в окрестности четных резонансов ( $\gamma = 2n$ ) при малых, но конечных значениях  $\varepsilon_{2n}$ , сохраняя в системе (6) коэффициенты  $g_n$  и  $f_{-n}$ , а в окрестности нечетных резонансов ( $\gamma = 2n + 1$ ) — коэффициенты  $g_n$ ,  $f_{-n-1}$  (для "+"состояния) или коэффициенты  $f_{-n}$ ,  $g_{n+1}$  (для "–"состояния), получаем

$$\nu_{\pm} = \begin{cases} \pm \sqrt{(\gamma/2 - n)^2 + \mu_{2n}^2} &, \quad |\gamma - 2n| \ll 1 ,\\ \pm \left(1/2 - \sqrt{(\gamma/2 - n - 1/2)^2 + \mu_{2n+1}^2}\right) &, \quad |\gamma - 2n - 1| \ll 1 , \end{cases}$$
(7)

где  $\mu_n = |\varepsilon_n|$ . Так как коэффициенты  $\varepsilon_n$  могут зависеть от параметра  $\gamma$ , в резонансном приближении в выражениях (7) их значения следует брать непосредственно в точке резонанса  $\gamma = n$ .

Квазиэнергетическая функция каждого из состояний в окрестности резонанса оказывается составленной из двух фурье-гармоник, причем амплитуда каждой из гармоник зависит от значения  $\gamma$ . Для "+"состояния соотношение между коэффициентами ряда Фурье в интервале значений  $2n \leq \gamma \leq 2n+1$  может быть записано в виде

$$f_{-n} = \frac{\varepsilon_{2n}g_n}{\nu_{2n} + \gamma/2 - n}, \quad f_{-n-1} = -\frac{\varepsilon_{2n+1}g_n}{\nu_{2n+1} - \gamma/2 + n + 1/2};$$
(8)

для "-"состояния (в том же интервале значений  $\gamma$ ) — в виде

$$g_n = -\frac{\varepsilon_{2n}^* f_{-n}}{\nu_{2n} + \gamma/2 - n}, \quad g_{n+1} = \frac{\varepsilon_{2n+1}^* f_{-n}}{\nu_{2n+1} - \gamma/2 + n + 1/2}, \tag{9}$$

где  $\nu_l = \sqrt{(\gamma - l)^2/4 + \mu_l^2}$ . Из выражений (8) и (9) следует, что при строгом выполнении условия резонанса обе гармоники, составляющие квазиэнергетическую функцию, имеют равные весовые множители, а по мере удаления от резонансного значения  $\gamma$  одна из гармоник начинает преобладать.

Так, для "+"состояния в окрестности резонанса  $\gamma = 2n$  при  $\gamma > 2n$  преобладает коэффициент  $g_n$ , а коэффициент  $f_{-n}$  монотонно убывает; а при  $\gamma < 2n$  коэффициент  $f_{-n}$  растет с уменьшением  $\gamma$ , а  $g_n$  убывает. В окрестности резонанса  $\gamma = 2n + 1$  при  $\gamma < 2n + 1$  коэффициент  $g_n$  значительно превосходит  $f_{-n-1}$ . По мере увеличения  $\gamma$  коэффициент  $f_{-n-1}$  растет, а  $g_n$  уменьшается, и при  $\gamma > 2n + 1$  уже коэффициент  $f_{-n-1}$  становится большим, а  $g_n$  спадает до нулевых значений. Для "-"состояния наблюдается та же закономерность в возрастании и убывании коэффициентов ряда Фурье в зависимости от параметра  $\gamma$  с точностью до замены  $f_{-k} \rightarrow g_k$ .

Уравнения связи (8), (9) в совокупности с условием нормировки позволяют полностью определить абсолютные значения фурье-коэффициентов  $g_n$  для "+"состояний и фурье-коэффициентов  $f_{-n}$  для "-"состояний:

$$|g_n^{(+)}| = |f_{-n}^{(-)}| = \left(1 + \frac{\mu_{2n}^2}{(\nu_{2n} + \gamma/2 - n)^2} + \frac{\mu_{2n+1}^2}{(\nu_{2n+1} - \gamma/2 + n + 1/2)^2}\right)^{-1/2},$$
(10)

где верхние индексы (+) и (-) означают принадлежность соответственно к "+"и "-"состоянию.

Как следует из (10), для "+"состояния коэффициент  $g_n$  (аналогично  $f_{-n}$  для "-"состояния) близок к единице почти на всем интервале значений параметра  $\gamma$  между двумя резонансами (2n-м и (2n + 1)-м). Если величина  $\gamma$  приближается к своим резонансным значениям и попадает в резонансную область ( $|\gamma - 2n| \sim \mu_{2n}$  или  $|\gamma - 2n - 1| \sim \mu_{2n+1}$ ), коэффициент  $g_n$  начинает резко убывать, а при выходе за границы интервала спадает до нулевых значений по закону  $\mu_{2n}/(2n - \gamma)$  или  $\mu_{2n+1}/(\gamma - 2n - 1)$ . При этом, в отличие от нулевого приближения, фурье-коэффициент  $g_n$  проникает в соседние интервалы, но это проникновение является крайне незначительным и существенно лишь на масштабах порядка  $\mu_{2n}$  или  $\mu_{2n+1}$ . В соответствии с формулами (8), (10) фурье-коэффициенты  $f_{-n}$ ,  $f_{-n-1}$ , которые в нулевом приближении обращались в нуль на границах интервала  $2n \leq \gamma \leq 2n + 1$  и были равны единице в соседних интервалах, теперь также незначительно проникают через границы интервала на масштабы, определяемые значениями  $\mu_{2n}$  и  $\mu_{2n+1}$ .

Совершенно аналогично можно рассмотреть интервал  $2n - 1 \le \gamma \le 2n$ . Здесь уже для "+"состояния основным коэффициентом ряда Фурье почти на всем интервале будет  $f_{-n}$ , а для "-"состояния — коэффициент  $g_n$ . В результате приходим к следующим выражениям для  $|g_n^{(-)}|$  и  $|f_{-n}^{(+)}|$ :

$$|g_n^{(-)}| = |f_{-n}^{(+)}| = \left(1 + \frac{\mu_{2n}^2}{(\nu_{2n} - \gamma/2 + n)^2} + \frac{\mu_{2n-1}^2}{(\nu_{2n-1} + \gamma/2 - n + 1/2)^2}\right)^{-1/2}.$$
 (11)

Соотношения между фурье-коэффициентами для "+"состояния на указанном интервале записываются в виде

$$g_n = \frac{\varepsilon_{2n}^* f_{-n}}{\nu_{2n} - \gamma/2 + n}, \quad g_{n-1} = -\frac{\varepsilon_{2n-1}^* f_{-n}}{\nu_{2n-1} + \gamma/2 - n + 1/2}, \tag{12}$$

для "- "состояния — в виде

$$f_{-n} = -\frac{\varepsilon_{2n}g_n}{\nu_{2n} - \gamma/2 + n}, \quad f_{-n+1} = \frac{\varepsilon_{2n-1}g_n}{\nu_{2n-1} + \gamma/2 - n + 1/2}.$$
(13)

Коэффициенты  $f_{-n}^{(+)}$  и  $g_n^{(-)}$ , оставаясь близкими по модулю к единице почти во всем интервале, при попадании  $\gamma$  в резонансную область начинают резко убывать и проникают в соседние интервалы также лишь на масштабы порядка  $\mu_{2n}$  или  $\mu_{2n-1}$ .

По всей видимости, выражения (10), (11) для абсолютных значений фурье-коэффициентов будут справедливы на всей оси  $\gamma$ , несмотря на то, что анализ системы (6) дает более быстрый закон убывания коэффициентов  $f_{-n}$ ,  $g_n$  за пределами того интервала значений  $\gamma$ , в котором они близки к единице. Тем не менее, можно надеяться, что эта неточность не приведет к сколько-нибудь существенной погрешности при вычислении квазиэнергетических функций (4), поскольку вне интервалов, в которых коэффициенты  $f_{-n}$ ,  $g_n$  близки к единице, данные коэффициенты все равно малы (порядка  $\mu_n$ ).

На рис. 1 представлены зависимости квадрата модуля коэффициентов  $f_{-n}^{(+)}$  (или  $g_n^{(-)}$ ) и  $g_n^{(+)}$  (или  $f_{-n}^{(-)}$ ) — кривые 1 и 2 соответственно — от параметра  $\gamma$ , вычисленные по формулам (8), (9), (12), (13). Пунктирными линиями показаны зависимости  $|g_{n-1}^{(+)}|^2 = |f_{-n+1}^{(-)}|^2$  (слева) и  $|g_{n+1}^{(-)}|^2 = |f_{-n-1}^{(+)}|^2$  (справа). Видно, что каждый из коэффициентов практически отличен от нуля лишь в одном интервале единичной длины на оси  $\gamma$ , и наоборот — в каждом единичном интервале отличен от нуля только один коэффициент ряда Фурье. Исключение из этого правила составляют узкие (при  $\mu_n \ll 1$ ) резонансные области  $|\gamma - n| \sim \mu_n$ , где имеет место перекрытие функций  $g_n(\gamma)$  и  $f_{-n}(\gamma)$  (или  $f_{-n-1}(\gamma)$ ). Следовательно, волновая квазиэнергетическая функция каждого из состояний в нерезонансных областях значений  $\gamma$  состоит всегда из одной гармоники и только в узких резонансных областях оказывается суперпозицией двух фурье-гармоник. Случай, представленный на рис. 1, соответствует параметрам  $\mu_{2n-1} = 0,05$ ,

 $\mu_{2n} = 0.03, \mu_{2n+1} = 0.01,$  поэтому характерная ширина резонансной области, как видно из рисунка, убывает с ростом номера резонанса.

Для построения самих квазиэнергетических функций необходимо определить не только абсолютные значения фурье-коэффициентов  $f_{-n}$ ,  $g_n$ , но и их фазовые множители, что можно сделать с помощью выражений (8), (9), (12), (13). При этом фазовый множитель одного из коэффициентов можно выбрать произвольно, тогда фазы всех остальных коэффициентов будут определяться относительно этого произвольно выбранного значения. Положим, например,  $f_0 = |f_0|$ , тогда, применяя (5), (4) и (2), для "+"состояния нетрудно получить

$$\Phi_{+}(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \left\{ \frac{\varphi_{0}(x) e^{i(n\tau - \alpha_{n} - \int e_{00}(\tau) \,\mathrm{d}\tau)}}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^{2} w_{2n-1} + \mathrm{ctg}^{2} w_{2n}}} + \frac{\varphi_{1}(x) e^{-i(n\tau + \beta_{n} + \int e_{11}(\tau) \,\mathrm{d}\tau)}}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^{2} w_{2n} + \mathrm{ctg}^{2} w_{2n+1}}} \right\}.$$
 (14)

Здесь фазы  $\beta_n$  и  $\alpha_n$  задаются выражениями

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \phi_k, \quad \alpha_n = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \phi_k, \quad \alpha_0 = 0,$$

 $\phi_k$  представляет собой фазу фурье-амплитуды  $\varepsilon_k$ , а угол  $w_n$  определяется соотношениями

$$\sin(2w_n) = \mu_n / \nu_n, \quad \cos(2w_n) = (\gamma - n) / (2\nu_n),$$

причем значение  $w_{-1}$  следует считать равным нулю.

Как следует из (14), квазиэнергетическая функция "+"состояния при любых  $\gamma$ , за исключением узких резонансных областей, с точностью до некоторых фазовых множителей практически совпадает с волновой функцией какого-либо из стационарных состояний. При этом имеет место поочередное совпадение функции  $\Phi_+(x,\tau)$  с  $\varphi_0(x)$ или  $\varphi_1(x)$  при каждом переходе через точку резонанса.



Рис. 1.

Если же значение  $\gamma$  близко к какому-либо целому положительному числу (случай резонанса), динамика двухуровневой системы становится более сложной, и вклад в квазиэнергетическую функцию дают оба стационарных состояния. В этом случае квантовая система начинает совершать периодические осцилляции между состояниями  $\varphi_0(x)$  и  $\varphi_1(x)$ с частотой, кратной частоте внешнего поля, причем амплитуда осцилляций максимальна в условиях точного резонанса и быстро спадает при удалении от него.

Аналогичные вычисления, проделанные для "- "состояния, дают

$$\Phi_{-}(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{\varphi_1(x) e^{-i(n\tau - \alpha_n + \int e_{11}(\tau) d\tau)}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 w_{2n-1} + \operatorname{ctg}^2 w_{2n}}} - \frac{\varphi_0(x) e^{i(n\tau + \beta_n - \int e_{00}(\tau) d\tau)}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 w_{2n} + \operatorname{ctg}^2 w_{2n+1}}} \right\} .$$
(15)

Так же, как и для "+"состояния, функция  $\Phi_{-}(x, \tau)$  в зависимости от того, какому из единичных интервалов принадлежит значение  $\gamma$ , будет практически совпадать с волновой функцией какого-либо из стационарных состояний. Однако если  $\Phi_+(x,\tau)$  близка, например, к  $\varphi_0(x)$ , то  $\Phi_-(x,\tau)$  совпадает с  $\varphi_1(x)$ , и наоборот, т. е. квазиэнергетические функции  $\Phi_+(x,\tau)$  всегда соответствуют разным стационарным состояниям. Если же значение  $\gamma$  попадает в резонансную область, функция  $\Phi_{-}(x, \tau)$ , являясь

суперпозицией обоих стационарных состояний, также описывает периодические осцилляции между этими состояниями с той же частотой, что и  $\Phi_+(x, \tau)$ .

## 3. ЭЛЕКТРОННЫЙ ДИПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ

Перейдем к вычислению дипольного момента системы в квазиэнергетических состояниях. Предварительно заметим, что базис квазиэнергетических функций, как показано в [12], является полным и ортонормированным, следовательно, волновую функцию системы в нашем случае можно разложить по функциям  $U_{\pm}(x, \tau)$ . Коэффициенты разложения оказываются при этом не зависящими от времени [12], поэтому, если в начальный момент времени волновая функция совпадает с одной из квазиэнергетических функций, в дальнейшем состояние электрона также будет описываться этой квазиэнергетической функцией. В таком случае электронный дипольный момент будет совпадать с дипольным моментом данного квазиэнергетического состояния.

В соответствии с определением дипольный момент системы

$$D^{(\pm)} = -e\langle \Phi_{\pm}(x,\tau) | \hat{x} | \Phi_{\pm}(x,\tau) \rangle,$$

откуда с учетом полученных выражений (14), (15) для квазиэнергетических функций имеем

$$D^{(\pm)} = \pm ex_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\sqrt{1 - \Delta_0^2 / \Delta^2}}{1 + \mathrm{tg}^2 w_{n-1} + \mathrm{ctg}^2 w_n} - \frac{\mu_n \Delta_0}{\nu_n \Delta} \cos\left(n\tau \pm \Theta_n(\tau)\right) \right),\tag{16}$$

где  $\Theta_n(\tau) = \int (e_{00} - e_{11}) d\tau - \phi_n$ . Дипольный момент как в "+", так и в "-"состояниях является периодической функцией времени, период которой совпадает с периодом внешнего поля.

Следует, однако, заметить, что зависимость дипольного момента от времени проявляется только в узкой окрестности резонансов, когда значение параметра  $\gamma$  близко к какому-либо целому числу, поскольку в этом случае отношение  $\mu_n/\nu_n$  порядка единицы. Если же значение  $\gamma$  выходит за пределы малой резонансной окрестности, отношение  $\mu_n/\nu_n$  становится малым, и амплитуда переменной составляющей дипольного момента быстро уменьшается по мере удаления от резонанса.

Как следует из выражения (16), в рассматриваемой нами системе возможно появление статического дипольного момента — в случае, когда постоянное внешнее поле является достаточно сильным, так что частота  $\Delta$  квантового перехода двухуровневой системы существенно превышает частоту  $\Delta_0$  перехода при отсутствии поля. При этом амплитуда переменной составляющей дипольного момента оказывается пренебрежимо малой независимо от того, попадает значение  $\gamma$  в окрестность какого-либо резонанса или нет, и дипольный момент совпадает со своей постоянной составляющей, имеющей в этом случае наибольшее значение:

$$D^{(\pm)}(\gamma) = \pm e x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \operatorname{tg}^2 w_{n-1} + \operatorname{ctg}^2 w_n} \,. \tag{17}$$

Каждое слагаемое в (17), как уже отмечалось, при малых  $\mu_n$  локализовано в пределах одного из единичных интервалов на оси  $\gamma$ , следующих последовательно друг за другом. Поэтому дипольный момент в каждом единичном интервале близок к своему максимальному или минимальному значению ( $\pm ex_0$ ), а при переходе через границу интервала, соответствующую очередному резонансу, дипольный момент резко меняет знак.

На рис. 2 представлена зависимость  $d(\gamma) = D^{(+)}(\gamma)/(ex_0)$ , рассчитанная по формуле (17) для сильного переменного поля вида  $\langle \chi_0 | V(x,\tau) | \chi_1 \rangle = V_0 \cos \tau$  при  $V_0 = 3\hbar\omega$ ,  $\omega = 5\Delta_0$ . При расчете полагалось  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\varepsilon_n = J_n(6)/10$  при  $n \neq 0$ , где  $J_n(x)$  — функция Бесселя первого рода порядка n. Выбранный при расчетах интервал изменения параметра  $\gamma$  от 0,6 до 10 соответствует

изменению  $\Delta$  от  $3\Delta_0$  до  $50\Delta_0$ .

В соответствии с выражением (17) характерная ширина перепада функций  $D^{(\pm)}(\gamma)$  в резонансной области совпадает с размером этой области, определяемым коэффициентом  $\mu_n = |\varepsilon_n|$ , где n — номер данного резонанса. Из рис. 2 видно, что в области  $\gamma \lesssim 6$  перепады более плавные, а при  $\gamma \gtrsim 7$  они становятся достаточно резкими, причем с ростом  $\gamma$  ширина перепадов монотонно убывает. Это объясняется тем, что функция Бесселя  $J_n(x)$  в области значений n, превышающих значение ее аргумента, быстро убывает с ростом своего номера по закону  $J_n(x) \sim (x/2)^n/(n!)$ . В результате коэффициенты  $\mu_n$  в области  $n \leq 6$  оказываются наибольшими, а при  $n \geq 7$  начинают резко спадать.

Следует, однако, сразу оговориться, что на форму кривой  $d(\gamma)$  окажут свое естественное влияние различные неупругие процессы, приводящие к уширению энергетических или квазиэнергетических уровней (излучение, рассеяние, температурное уширение, упоминавшееся ранее неоднородное уширение и т. д.). В частности, эти процессы будут определять характерную ширину перепадов на кривой  $d(\gamma)$  в окрестности резонансов наряду с динамической составляющей, вклад которой задается коэффициентами  $\mu_n$ . Наиболее



заметно влияние указанных процессов скажется в области резонансов с большими номерами n, когда коэффициенты  $\mu_n$  резко спадают до нуля, и ширина перепада почти полностью определяется временем жизни электрона на данном квазиэнергетическом уровне. Очевидно, что учет конечности времени жизни электрона на квазиэнергетическом уровне должен привести к некоторому сглаживанию перепадов в области больших значений  $\gamma$  по сравнению с рассмотренным выше динамическим режимом.

Как видно из рис. 2, электронный дипольный момент в квазиэнергетических состояниях является существенно нелинейной и даже почти периодической функцией внешнего постоянного поля. В случае, когда переменное поле слабое, подобная зависимость легко объяснима. Как уже говорилось ранее, наложение постоянного поля на симметричную двойную квантовую яму ведет к перекосу двухъямного потенциала, расхождению уровней энергии и локализации волновых функций каждого из стационарных состояний в своей яме. Если теперь создать состояние, совпадающее с одним из стационарных, оно будет почти полностью локализовано в одной из ям, обладая при этом дипольным моментом, близким к максимальному. При дальнейшем увеличении постоянного поля степень локализации волновой функции частицы будет усиливаться, а величина дипольного момента асимптотически приближаться к  $ex_0$  или  $-ex_0$ .

Включение слабого переменного поля при наличии более сильного постоянного поля практически никак не будет сказываться на динамике системы (в силу малости возмущения) до тех пор, пока расстояние между уровнями не совпадет с частотой какой-нибудь гармоники переменной составляющей внешнего поля. В этом случае двухуровневая система попадает в резонанс, когда даже слабое поле способно резонансным образом связать два уровня энергии. Если до попадания в резонанс система находилась на нижнем энергетическом уровне, резонансное воздействие будет инициировать единственно возможный переход — с нижнего уровня на верхний с поглощением квантов энергии поля. Если же система находилась на верхнем энергетическом уровня, то под действием резонансного поля она будет переходить на нижний уровень с испусканием квантов энергии на резонансной частоте. Однако, как показано выше волновые функции "верхнего"и "нижнего"состояний локализованы в разных ямах, поэтому переход с одного уровня энергии на другой обязательно будет сопровождаться пространственным переходом из одной ямы в другую со сменой направления дипольного момента.

Структура квазиэнергетических функций (14), (15) полностью соответствует сказанному выше. Ес-

ли значение параметра  $\gamma$  далеко от резонансного, квазиэнергетическая функция с точностью до некоторого фазового множителя совпадает с волновой функцией одного из стационарных состояний, которые в сильном постоянном поле локализованы в своих ямах. Переход по параметру  $\gamma$  через очередное целочисленное значение ведет к смене области локализации квазиэнергетической функции, поскольку она уже будет совпадать с волновой функцией другого стационарного состояния, как это видно из (14) и (15).

Динамика двухуровневой системы в сильном переменном электрическом поле является более сложной. Тем не менее, выражения (14), (15) для квазиэнергетических функций применимы и в этом случае, поскольку при их выводе было использовано лишь условие малости коэффициентов  $\mu_n$ , которое можно реализовать и в случае сильного поля ( $V \gg \hbar \omega$ ), если  $\sqrt{V/\hbar \omega} \Delta_0 / \Delta \ll 1$ .

В сильных переменных полях целочисленные значения параметра  $\gamma$  также соответствуют равенству энергии перехода  $\hbar\Delta$  двухуровневой системы целому числу квантов  $n\hbar\omega$  внешнего переменного поля и оказываются резонансными. Однако теперь это равенство не означает совпадения частоты перехода с частотой n-й гармоники возмущения, как это имело место в слабых полях. В условиях, когда максимальное значение функции  $V(x, \tau)$  сравнимо с энергией перехода  $\hbar\Delta$  или даже превышает эту энергию, вклад в резонансные переходы дают не только однофотонные процессы с частотой  $n\omega$ , но и всевозможные многофотонные процессы, в которых конечная разность частот излученных и поглощенных фотонов равна  $n\omega$ . Коэффициент  $\mu_n$  соответствует, таким образом, амплитуде вероятности всех этих резонансных процессов. При этом нетрудно убедиться, что в случае слабых полей коэффициент  $\mu_n$  описывает вероятность однофотонного процесса на n-й гармонике возмущения потенциала.

В сильном поле, так же, как и в слабом, каждый резонанс имеет свою характерную ширину по параметру  $\gamma$  для *n*-го резонанса, по-прежнему определяемую коэффициентом  $\mu_n$ . Однако теперь коэффициент  $\mu_n$  уже не совпадает с амплитудой *n*-й гармоники возмущения, а как только что было отмечено, описывает суммарную амплитуду вероятности всех одноквантовых и многоквантовых процессов с конечной разностью частот излученных и поглощенных фотонов, равной *n* $\omega$ . Тем не менее, резонансный характер воздействия внешнего переменного поля на двухуровневую систему сохраняется и в сильных полях, следовательно, все рассуждения относительно зависимости дипольного момента от величины приложенного к системе постоянного внешнего поля могут быть автоматически перенесены и на этот случай.

Вообще взаимодействие двухуровневой системы с переменным внешним полем, по всей видимости, достаточно универсально в том смысле, что реакция двухуровневой системы на внешнее воздействие оказывается практически одинаковой как в слабых, так и в сильных переменных полях. Индивидуальные же особенности внешнего переменного поля, воздействующего на систему, отражаются лишь в числовой последовательности фурье-амплитуд  $\varepsilon_n$ , которая соответствует вполне конкретной зависимости  $\varepsilon(\tau)$ .

В заключение подчеркнем еще раз, что дипольный момент в квазиэнергетических состояниях  $D^{(\pm)}(\gamma)$  меняет знак всякий раз, когда параметр  $\gamma$  достигает очередного целочисленного резонансного значения, что соответствует такому изменению внешнего постоянного поля (по сравнению с предыдущим значением, отвечающим равенству  $D^{(\pm)}(\gamma) = 0$ ), при котором энергия перехода  $\hbar\Delta$  между уровнями изменяется на величину одного кванта  $\hbar\omega$  энергии переменного поля.

Таким образом, двойная квантовая яма при монотонном увеличении постоянного поля будет периодически менять направление вектора поляризации, поляризуясь на одном полупериоде по направлению внешнего поля, а на другом полупериоде — против него. При этом возникает антиполяризационный эффект, обусловленный дополнительным действием на электрон переменного внешнего поля и наиболее отчетливо проявляющийся, по-видимому, именно в гетероструктурах на основе двойной квантовой ямы благодаря строгому пространственному разделению областей локализации волновой функции.

В.А.Бурдов

Наконец заметим, что упомянутые в разделе 1 критерии применимости двухуровневого приближения являются чисто динамическими, которые позволяют получить решение уравнения Шредингера и количественно описать поведение электронного волнового пакета в двухъямном потенциале. Однако для того, чтобы рассмотренные эффекты могли проявиться в реальных квантовых структурах, необходимо также выполнение и определенных статистических условий.

В частности, как уже отмечалось, всегда должны быть занятыми только одна или две нижние подзоны размерного квантования (уровни  $E_{0,1}$ ), что выполняется, если тепловая энергия и разность между энергией Ферми и уровнем  $E_0$  не превышают величины энергии перехода  $\hbar\Delta$ . Как показывают оценки, при указанных в разделе 1 параметрах системы эти условия выполняются при температурах порядка 10 К и поверхностной концентрации электронов  $n_{\rm s} \sim 10^{11}$  см<sup>-2</sup>.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Горбацевич А. А., Капаев В. В., Копаев Ю. В. // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. С. 1321.
- 2. Grossmann F., Dittrich T., Jung P., Hanggi P. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 516.
- 3. Kayanuma Y. // Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 843.
- 4. Dakhnovskii Y., Bavli R. // Phys. Rev. B. 1993. V. 48. P. 11020.
- 5. Dakhnovskii Y., Bavli R. // Phys. Rev. B. 1993. V. 48. P. 11010.
- 6. Gauthey F.I., Keitel C. H., Knight P.L., Maquet A. // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. P. 615.
- Leo K., Shah J., Gobel E. O., Damen T. C., Schmitt-Rink S., Schafer W., Kohler K. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 201.
- Brener I., Planken P. C. M., Nuss M. C., Pfeiffer L., Leaird D. E., Weiner A. M. // Appl. Phys. Lett. 1993. V.63. P. 2213.
- Luo M. S. C., Chuang S. L., Planken P. C. M., Brener I., Nuss M. C. // Phys. Rev. B. 1993. V.48. P. 11043.
- 10. Bavli R., Metiu H. // Phys. Rev. A. 1993. V. 47. P. 3299.
- 11. Бурдов В. А. // ТМФ. 1996. Т. 108. С. 69.
- 12. Зельдович Я. Б. // УФН. 1973. Т. 110. С. 139.
- 13. Бурдов В. А. // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. С. 1209.
- 14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М: Наука, 1989.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия Поступила в редакцию 24 марта 1999 г.

1121

#### **RESONANCE ELECTRON DYNAMICS IN A DOUBLE QUANTUM WELL**

## V.A.Burdov

We consider two-level electron dynamics in a double quantum well in periodic, anharmonic external field. We propose a method for solving the Schrödinger equation, which is based on the generalization of the conventional resonance approximation for a system with arbitrary number of resonances. The method is applicable for the cases of both weak and strong fields. We obtain the expressions for the quasi-energy wave functions and the electron dipole momentum. We show that the dependence of the dipole momentum on the constant voltage applied to the structure is quasi-periodic function, and the dipole momentum changes sign at different halfperiods of this function.

В.А.Бурдов

# КОММЕНТАРИЙ К СТАТЬЕ О. Э. Гулина и И. О. Ярощука "ФЛУКТУАЦИИ ИМПУЛЬСОВ, РАССЕЯННЫХ СЛОЕМ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ" (Известия ВУЗов. Радиофизика. 1999. Т. 42, №. 4, С. 383–393)

К сожалению, приведенный ниже рис. 4, описание которого имеется в тексте статьи (с. 390, последний абзац), не был включен в окончательный вариант статьи. Кроме того, в рукописи статьи были перепутаны знаки. В формуле (2а) на с. 384 вместо  $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_2}\frac{\partial}{\partial t}\right)$  следует читать  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_2}\frac{\partial}{\partial t}\right)$ , а в (2б) вместо  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_1}\frac{\partial}{\partial t}\right)$  следует читать  $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_1}\frac{\partial}{\partial t}\right)$ . Наконец, на с. 385 (вторая строка абзаца ниже формулы (6))  $\exp[i(kx + \omega t)]$  следует заменить на  $\exp[i(-kx + \omega t)]$ . Авторы и редакция приносят извинения читателям.

