

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLII № 10

Нижний Новгород

1999

С о д е р ж а н и е

Кисляков А. Г., Савельев Д. В., Шкелёв Е. И. Переменность атмосферной линии N_2O ($J = 3 \rightarrow 4$)	933
Гайкович К. П., Жилин А. В. Восстановление двумерного распределения радиояркости по измерениям с известной диаграммой направленности	940
Арефьев А. С., Неганов В. А. Собственные волны экранированной двухсторонней несимметричной полосковой линии передачи	950
Кузелёв М. В., Лазутченко О. В., Рухадзе А. А. Режимы и спектры черенковской пучковой неустойчивости в нелинейной плазме	958
Данилов Ю. Ю., Петелин М. И. К теории компрессора микроволновых импульсов на основе бочкообразного резонатора	977
Смирнов И. П., Карузерс Дж. В., Хилько А. И. Условия существования слаборасходящихся пучков в плоскостойких волноводах	982
Вебер В. Л. Флуктуации лидарного сигнала при зондировании моря через взволнованную поверхность	992
Двинских В. А., Фролов С. В. Оценка значений параметра бифуркации последовательности удвоений периодов в решениях системы уравнений Ресслера	1006
Усанов Д. А., Вениг С. Б., Орлов В. Е. Стимулированная внешним сверхвысоко-частотным излучением работа туннельного диода в режиме генерации	1009
Мальцев А. А., Зимина С. В. Статистические характеристики адаптивных антенных решёток	1013
Агудов Н. В., Девятайкин Р. В., Малахов А. Н. Переходная бимодальность неравновесных состояний моностабильных систем с шумами	1025

ПЕРЕМЕННОСТЬ АТМОСФЕРНОЙ ЛИНИИ N₂O (J = 3 → 4)

А. Г. Кисляков, Д. В. Савельев, Е. И. Шкелев

Анализируются результаты проведенных в Нижнем Новгороде в период с марта по май 1997 г. наблюдений радиоизлучения атмосферной закиси азота в линии перехода $J = 3 \rightarrow 4$ (на частоте около 100,5 ГГц). При этом контролировалось содержание N₂O на высотах $h > 20$ км. Обнаружены вариации декремента оптической толщины в линии, что можно объяснить перераспределением закиси азота по высоте в интервале $h = 20 \div 55$ км. Это предположение не противоречит опубликованным данным контактных измерений плотности N₂O в интервале $h = 5 \div 35$ км. На основе указанных данных выполнены расчеты линий вращательного спектра атмосферной закиси азота. Отмечено некоторое превышение измеренных декрементов оптических толщин в линии над рассчитанными. Обсуждаются перспективы наблюдений линий N₂O в миллиметровом диапазоне длин волн как метода контроля вертикального перемешивания в атмосфере.

ВВЕДЕНИЕ

Измерение относительно слабых радиолиний ($\lambda \geq 3$ мм) малых атмосферных составляющих, к которым относится и N₂O, при всей его сложности имеет некоторое преимущество перед наблюдениями более интенсивных линий субмиллиметрового и ИК диапазонов. Высокочастотные линии имеют большие доплеровские ширины, что ограничивает возможности восстановления высотных профилей концентрации атмосферных составляющих. Кроме того, с ростом частоты усиливается затухание излучения в линиях из-за поглощения и рассеяния атмосферными аэрозолями и облаками.

Сложность измерения малых оптических толщин (меньше 10^{-3} Нп) теллурических линий обусловлена наличием значительного стороннего тропосферного поглощения радиоволн, имеющего существенную частотную зависимость и подверженного флуктуациям. В связи с этим особую важность приобретает разработка адекватной методики наблюдений. Такая методика создана и описана авторами в работах [1, 2].

В [1, 3] сообщалось об успешном обнаружении атмосферной линии N₂O перехода $J = 3 \rightarrow 4$ (резонансная частота $\nu_0 \approx 100493$ МГц), в марте—апреле 1997 г. Здесь представлены результаты более продолжительных, чем в работе [3], наблюдений этой линии, которые позволили установить ее переменность. Результаты измерений сопоставляются с расчетами характеристик линии $J = 3 \rightarrow 4$ по данным контактных измерений высотных профилей концентрации N₂O в атмосфере. Оценивается эвристичность наблюдений радиолиний закиси азота как метода контроля вертикального перемешивания в атмосфере.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ЛИНИИ N₂O

Основные характеристики вертикального профиля плотности закиси азота установлены при выполнении международной программы по изучению озона “Стратосфера 1981” [4]. Отношение смеси N₂O в тропосфере практически не зависит от высоты до $h \leq 17$ км и в умеренных широтах близко к $3,2 \cdot 10^{-7}$. В озоносфере и выше действует фотолиз N₂O, в связи с чем отношение смеси закиси азота резко убывает. Отмечены существенные временные флуктуации концентрации N₂O в стратосфере при $h = 20 \div 35$ км (экспериментальные данные о плотности закиси азота на высотах $h > 35$ км отсутствуют). В связи с переменностью содержания N₂O высотный профиль концентрации аппроксимировался

двумя кривыми, охватывающими область вероятных значений отношений смеси, а расчет проводился по обеим кривым.

Атмосфера разбивалась на слои толщиной $\Delta h = 2$ км, в пределах каждого слоя концентрация закиси азота, давление P и температура T считались постоянными. Высотные зависимости P и T для средних широт выбраны соответствующими стандартной атмосфере 1964 г. [5]. Концентрация молекул закиси азота рассчитывалась для заданного давления по упомянутым аппроксимирующим кривым отношений смеси, при этом использовалось уравнение состояния идеального газа.

Расчет зависимости коэффициента молекулярного поглощения $\kappa(\nu, h)$ для вращательных переходов молекулы N_2O проводился по формулам известной монографии [6], где приводятся также и спектроскопические константы закиси азота. При расчетах использовался лоренцовский форм-фактор линии с полушириной

$$\Delta\nu [\text{ГГц}] = 3 \frac{P}{760} \frac{300}{T}, \quad (1)$$

где P — давление в мм рт. ст., T — температура воздуха в градусах Кельвина. Нетрудно убедиться, что для интересующих нас высот $h \leq 60$ км доплеровская ширина линии пренебрежимо мала по сравнению с $\Delta\nu$. Особенности высотного профиля концентрации закиси азота позволяют ограничиться этой высотой.

Расчитанные для каждого i -го слоя резонансные кривые $\kappa(\nu, h_i)$ суммировались в интервале высот $0 \div 40$ км, в результате чего получено приближенное выражение для зенитного спектра оптической толщины теллурической линии $\Gamma_T(\nu)$, справедливое при $\Gamma_T(\nu) \ll 1$:

$$\Gamma_T(\nu) \simeq \sum_{i=1}^{20} \kappa(\nu, h_i) \Delta h. \quad (2)$$

Ширина кривой $\Gamma_T(\nu)$ на уровне -3 дБ от максимума составляет $\Delta\nu_T \simeq 900$ МГц, а резонансные значения варьируются в пределах $(5,78 \div 7,50) \cdot 10^{-4}$ Нп. Как уже отмечалось, содержание N_2O в тропосфере стабильно, поэтому эти вариации интегральной оптической толщины обусловлены изменениями содержания закиси азота в стратосфере.

Поскольку главным источником эмиссии N_2O в атмосферу является поверхность Земли [4], то наиболее вероятной причиной стратосферных изменений концентрации этой примеси является изменчивость вертикального переноса воздушных масс. В связи со сказанным представляет интерес расчет параметров линии N_2O для экваториальных широт, где атмосферная конвекция наиболее интенсивна. Такой расчет, выполненный также по данным отчета [4], дает существенно меньшее значение $\Delta\nu_T \simeq 600$ МГц при пиковых значениях $\Gamma_T(\nu)$, в пределах $(6,58 \div 7,53) \cdot 10^{-4}$ Нп. Отметим совпадение максимальных интегральных интенсивностей линий, хотя отношение смеси N_2O в экваториальной тропосфере было принято, согласно [4], равным $3 \cdot 10^{-7}$. Таким образом, для атмосферы низких широт характерно перераспределение закиси азота по высоте, обусловленное более интенсивным вертикальным перемешиванием. Отношение смеси N_2O в зоне экватора при $h \simeq 30$ км доходит до $2 \cdot 10^{-7}$, в то время как в умеренных широтах эта величина не превышает $6 \cdot 10^{-8}$ [4]. Отличие вертикальных профилей плотности закиси азота и объясняет разницу в ширине ее теллурической линии, рассчитанной для низких и умеренных широт.

Как уже отмечалось, отсутствуют экспериментальные данные о содержании N_2O в стратосфере и нижней мезосфере. Между тем, такие сведения интересны как в аспектах озонной проблемы, так и для понимания кинетики химических реакций в верхней атмосфере. С целью оценки возможностей радиометрического определения содержания закиси азота в этой части атмосферы был проведен расчет оптической толщины линии при экстраполяции аппроксимирующих концентрацию N_2O кривых в интервал высот $40 \div 60$ км. Контур линии, соответствующий максимальным значениям отношений смеси

N_2O , получает в результате экстраполяции приращение оптической толщины порядка $5 \cdot 10^{-5}$ Нп на резонансной частоте. Это приращение имеет форму линии шириной около 10 МГц.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ ЛИНИИ $J = 3 \rightarrow 4$

Наблюдения линии N_2O , соответствующей переходу $J = 3 \rightarrow 4$ (резонансная частота около 100,5 ГГц), проводились в Нижнем Новгороде в период с марта по май 1997 г. с помощью спектрометра трехмиллиметрового диапазона длин волн [7, 8] с последовательно-параллельным анализом спектра. Характеристики спектрометра были улучшены благодаря использованию нового преобразователя частоты. Шумовая температура системы в период наблюдений заключалась в пределах $1200 \div 1700$ К (DSB).

В данной работе использован метод, хорошо апробированный авторами при наблюдениях линий озона [2]*. Основная особенность этого метода заключается в применении калибровки антенных температур по радиоизлучению атмосферы, интегрированному по частоте. Спектрорадиометр с преобразователем частоты на входе имеет два широких (около 0,5 ГГц) интегрирующих канала, разнесенных по частоте приблизительно на 3 ГГц. Калибровка по широкому каналу позволяет существенно ослабить влияние флуктуаций атмосферного радиоизлучения на точность спектральных измерений (погрешность определения декремента оптической толщины составляет около $5 \cdot 10^{-4}$ Нп при интегрировании сигнала в течении приблизительно 1 часа). Абсолютное значение оптической толщины измеряется с меньшей точностью из-за неопределенности базовой линии вследствие частотной зависимости стороннего тропосферного поглощения (более подробно эта проблема обсуждается в [1], там же приводится спектр оптической толщины тропосферы в интервале частот $93 \div 110$ ГГц).

Спектр радиоизлучения закиси азота измерялся с помощью 30-канального фильтрового анализатора с разрешением по частоте 2 МГц. Кроме того, использовался перестраиваемый частотный фильтр с полосой пропускания около 18 МГц. В первом случае с помощью соотношения (1) по декрементам оптической толщины при соответствующей расстройке от центра линии может быть оценено содержание N_2O в атмосфере на высотах $h \simeq 36 \div 55$ км, а во втором — при $h \simeq 23 \div 40$ км.

Результаты измерений декрементов оптической толщины с фильтровым анализатором (расстройка 25 МГц от центра линии) суммированы в табл. 1**. В 1-м цикле наблюдений измерялся только левый склон линии [1], а во 2-м и 3-м циклах измерялись попеременно оба склона. Сопоставление полученных спектров позволяет вычестить линейный частотный тренд нерезонансного поглощения. Декременты оценивались по сглаженным с интервалом усреднения 5 МГц спектрам (см. рис. 1). Отметим, что начало отсчета оптической толщины на всех рисунках соответствует среднему по прямому и зеркальному каналам значению нерезонансной оптической толщины [1, 2]. Данные наблюдений первого и третьего циклов, учитывая погрешности измерений, можно удовлетворительно согласовать с рассчитанными в разделе 1 спектрами оптической толщины закиси азота, хотя измеренные декременты оптической толщины несколько превышают рассчитанные. Действительно, из табл. 1 можно видеть, что минимальные измеренные значения декремента оптической толщины составляют $0,7 \cdot 10^{-4}$ и $1,2 \cdot 10^{-4}$ Нп (из средних значений вычтены утроенные стандарты отклонения), в то время как расчет полной оптической толщины в линии дает приблизительно $8 \cdot 10^{-5}$ Нп.

* Там же описана установка для измерений радиоизлучения атмосферы.

** В работе [1] приведены данные только первого цикла измерений.

Т а б л и ц а 1

Результаты наблюдений радиоизлучения в линиях N_2O

Номер цикла	1	2	3
Период наблюдений	11.03–11.04.97	23.04–06.05.97	21–29.05.97
Декремент оптической толщины, 10^{-4} Нп	$1,9 \pm 0,4$	$7,0 \pm 0,6$	$3,0 \pm 0,6$

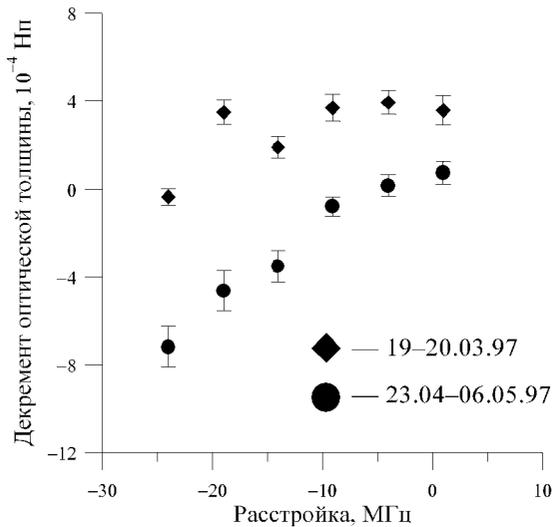


Рис. 1. Спектры декрементов оптической толщины в линии N_2O , измеренные в 1-м и 2-м циклах наблюдений (см. табл. 1), сглаженные с интервалом усреднения 5 МГц. Для удобства сравнения кривые раздвинуты по оси ординат

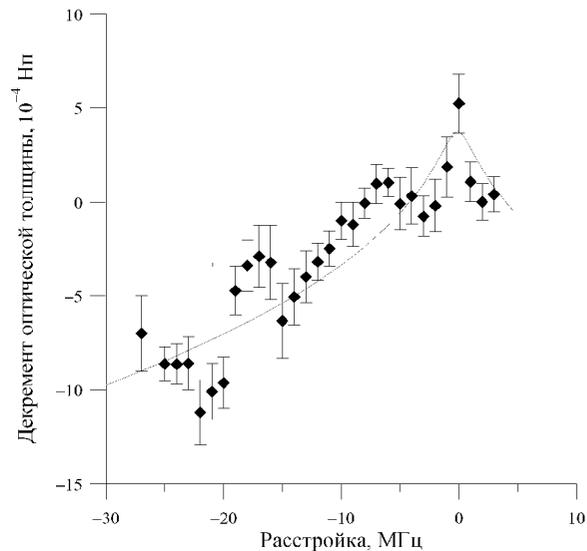


Рис. 2. Масштабированный расчетный спектр (сплошная линия) декремента оптической толщины линии N_2O , полученный во 2-м цикле наблюдений с помощью 30-канального анализатора

Данные 2-го цикла показывают, что в период с 23.04.97 по 06.05.97 декремент в линии возрос в $3 \div 5$ раз по сравнению с наблюдавшимся в 1-м и 3-м циклах. Изменение интенсивности линии регистрируется достаточно надежно (см. рис. 1). Отмеченное явление можно объяснить выносом значительного количества N_2O из тропосферы в стратосферу вследствие интенсивной весенней конвекции. Средний за период с 23.04.97 по 06.05.97 спектр вершины линии $J = 3 \rightarrow 4$ представлен на рис. 2 (без сглаживания). Там же представлен масштабированный расчетный спектр (расчет проводился с экстраполяцией экспериментальных данных в интервале высот $h = 40 \div 60$ км). Хотя уровень шумов в линии достаточно высок, можно видеть удовлетворительное сходство расчета с экспериментом. Очень вероятно присутствие в измеренном спектре узкого пика шириной около 5 МГц, выявляющего наличие значительных количеств закиси азота на высотах $h \geq 35$ км. Некоторая изрезанность склона линии связана с влиянием аддитивного нестационарного шума, проявляющегося в интервале промежуточных частот $30 \div 40$ МГц.

Результаты анализа спектра излучения N_2O с разрешением около 18 МГц (с помощью перестраиваемого фильтра) в интервале частот $\Delta\nu_{\text{л}} = \nu_0 \pm 100$ МГц в окрестности пика линии перехода $J = 3 \rightarrow 4$ показаны на рис. 3. Экспериментальные точки здесь также сопоставляются с рассчитанной кривой, хотя форма линии в этом случае не может быть определена вследствие недостаточного количества

точек. Можно только утверждать, что декремент оптической толщины в линии при расстройке от ее центра на 100 МГц заключается в пределах $(1 \div 3) \cdot 10^{-3}$ Нп, что существенно выше ожидаемого из теории значения. Заметим, что спектр рис. 3 измерен в период 3-го цикла наблюдений, поэтому возникает естественное предположение о перераспределении N_2O по высоте. К сожалению, подобные спектры для 1-го и 2-го циклов не были получены.

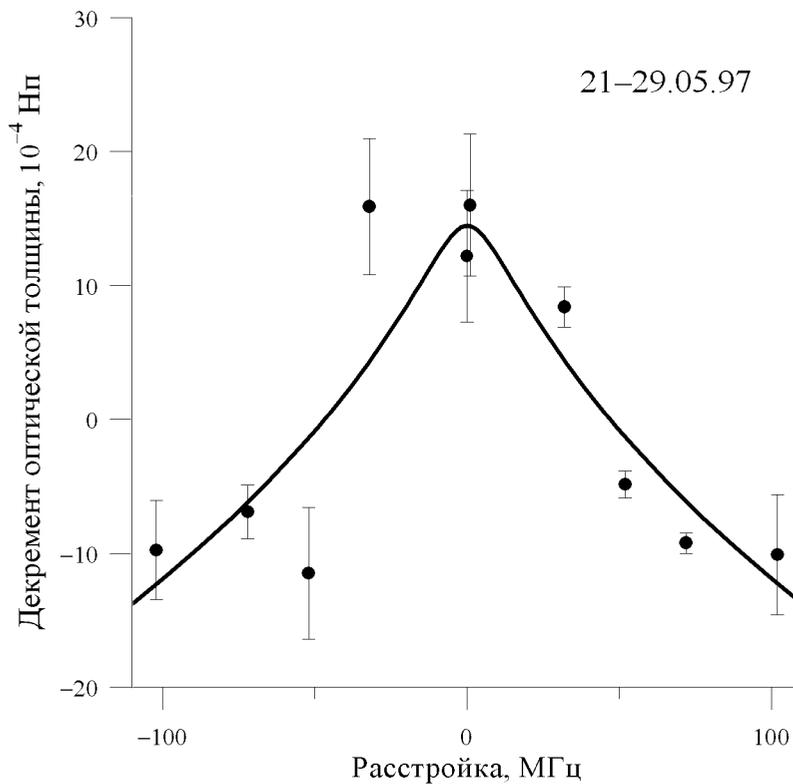


Рис. 3. Масштабированный расчетный спектр (сплошная линия) декремента оптической толщины линии $J = 3 \rightarrow 4 N_2O$, измеренный в 3-м цикле наблюдений с помощью перестраиваемого фильтра

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Наблюдения радиоизлучения в линии закиси азота (переход $J = 3 \rightarrow 4$), проведенные в период с марта по май 1997 г. в Нижнем Новгороде, показывают переменность строения линии. Обнаруженные эффекты можно объяснить выносом закиси азота в область высот $h = 20 \div 55$ км из нижележащих слоев атмосферы. Это предположение не противоречит результатам контактных измерений концентрации N_2O в стратосфере [4].

Следует отметить заметное превышение измеренных декрементов в линии над рассчитанными по данным контактных измерений. Расчет не дает, в частности, таких больших декрементов оптической толщины при расстройке порядка 25 МГц, какие измерены в период с 23.04.97 по 06.05.97. Как отмечено в статье, увеличение декремента можно объяснить выносом N_2O в область высот $h = 36 \div 55$ км. Контактные измерения не охватывают этот интервал высот, а экстраполяция известных данных о распределении закиси азота на высотах $h \leq 35$ км в интервал $h = 40 \div 60$ км, очевидно, неадекватна реальному профилю концентрации N_2O , формирующемуся в ходе нестационарных процессов переноса в атмосфере. Что касается результатов измерений линии N_2O путем последовательного анализа

спектра при расстройке ± 100 МГц (в этом случае контролируемый интервал высот $h \simeq 23 \div 40$ км), то их пока недостаточно для окончательного вывода о расхождении результатов расчета и экспериментальных данных. Широкий контур линии в большей степени подвержен возможным искажениям из-за погрешностей в определении базовой линии.

Тем не менее можно констатировать, что современное состояние техники приема миллиметровых радиоволн позволяет ставить задачу контроля содержания стратосферной закиси азота радиометрическими методами. Не только эксперимент, но и приведенные выше результаты расчетов теллурических линий N_2O также приводят к такому выводу. Действительно, ожидаемые изменения оптической толщины в линии перехода $J = 3 \rightarrow 4$ составляют порядка 10^{-4} Нп, в то время как минимальный обнаружимый декремент в линии близок к $3 \cdot 10^{-7}$ Нп (принято, что ширина полосы пропускания частот радиометра равна 10 МГц, время накопления — около 3 ч, а оптическая толщина тропосферы — 0,1 Нп). Методика таких оценок описана в [9], но следует учесть, что при этом не учитываются флуктуации теплового радиоизлучения атмосферы, интенсивность которых зависит от состояния тропосферы и определяется только эмпирически.

Актуальной представляется и задача обнаружения N_2O в мезосфере. Для реализации максимальной чувствительности и разрешения по частоте в радиометрических измерениях оптической толщины атмосферы необходимо понижение шумовой температуры радиометра (технически возможно уменьшить ее до $T_{ш} \simeq 25$ К (DSB) на частоте порядка 100 ГГц). В настоящей работе использовался радиометр с $T_{ш} \simeq 10^3$ К (DSB).

Возможно, что наблюдения более высокочастотных линий закиси азота дадут возможность сократить время их измерений и повысить качество получаемых результатов. Согласно [6] резонансная оптическая толщина линии N_2O пропорциональна J^3 вплоть до $J \sim 10$. На частоте приблизительно 250 ГГц, соответствующей "окну прозрачности" атмосферы в окрестности длины волны $\lambda \approx 1,3$ мм, оптическая толщина в пике линии перехода $J = 10 \rightarrow 11$ примерно в 20 раз выше, чем в линии перехода $J = 3 \rightarrow 4$. Однако следует учитывать, что с ростом частоты возрастает и нерезонансная оптическая толщина атмосферы (а значит, усиливаются и флуктуации ее радиоизлучения). Кроме того, субмиллиметровый диапазон длин волн плотнее заселен сильными линиями вращательных спектров других газов (например, озона), что внесет дополнительные сложности в методику наблюдений. Поэтому перспективы наблюдений высокочастотных линий N_2O требуют более тщательного анализа.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-02-16988а) и МОПО РФ (грант по программе "Фундаментальные проблемы окружающей среды и экологии человека").

ЛИТЕРАТУРА

1. Вакс В. Л., Вдовин В. Ф., Кисляков А. Г., Лапкин И. В., Савельев Д. В., Шкелев Е. И. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1997. Т. 40. С. 1365.
2. Кисляков А. Г., Савельев Д. В., Шкелев Е. И., Вакс В. Л. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 6. С. 668.
3. Вакс В. Л., Вдовин В. Ф., Кисляков А. Г., Лапкин И. В., Савельев Д. В., Шкелев Е. И. // Пробл. совр. радиоастрономии. XXVII конф. по радиоастрономии: Тез. докл. Т. 2. — С.-П., 1997. С. 47.
4. The Stratosphere 1981. Theory and Measurements. WMO Global Ozone Research and Monitoring Project. Rept. 1981. № 11.
5. Глаголев Ю. А. Справочник по физическим параметрам атмосферы. — Л.: Гидрометиздат, 1970.
6. Таунс Ч., Шавлов А. Радиоспектроскопия. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
7. Шкелев Е. И., Кисляков А. Г., Савельев Д. В. // Приборы и техника эксперимента. 1995. № 6. С. 132.

8. Вакс В. Л., Канаков В. А., Кисляков А. Г., Пелюшенко С. А., Ракуть И. В., Савельев Д. В., Шкелев Е. И. // Вестник ВВО АТН России. 1997. № 1(3). С. 37.
9. Зинченко И. И., Кисляков А. Г. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1974. Т. 10. С. 1275.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
2 ноября 1998 г.

VARIABILITY OF THE ATMOSPHERIC LINE N_2O ($J = 4$)

A. G. Kislyakov, D. V. Savelyev, and E. I. Shkelev

We analyze results of the observations of radio emission of the atmospheric N_2O in the line $J = 3 \rightarrow 4$ at frequency near 100.5 GHz. The observations aimed at the monitoring of N_2O content at altitudes $h > 20$ km were performed in Nizhny Novgorod from March to May, 1997. We discover variations of the optical-depth decrement in the line, which can be explained by the redistribution of N_2O over the altitude range $h = 20 \div 55$ km. This assumption does not contradict with the published data on in-situ measurements of N_2O density at $h = 5 \div 35$ km. Using the obtained data we calculate the rotational-line spectra of the atmospheric N_2O . We point out that the measured decrements of the optical depths are greater than the calculated ones. We discuss observations of the N_2O lines in mm-wave band as a promising method for monitoring the vertical mixing in the atmosphere.

УДК 523.164,621.371:551.46

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИОЯРКОСТИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ С ИЗВЕСТНОЙ ДИАГРАММОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

К. П. Гайкович, А. В. Жилин

Разработан метод восстановления двумерного распределения яркостной температуры по измеренному распределению антенной температуры, основанный на теории некорректных задач Тихонова. Эффективность метода исследована путем численного моделирования как для однолучевых измерений, так и для многолучевых радиометрических систем с синтезированной апертурой. Метод применяется к данным вертолетных измерений радиотеплового излучения подстилающей поверхности.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной проблемой измерений теплового излучения в радиоастрономии и в задачах дистанционного зондирования естественных сред является определение истинного распределения яркостной температуры по измеренному распределению антенной температуры, которое представляет собой двумерную свертку истинного распределения радиояркости с диаграммой направленности антенной системы. При этом происходит сглаживание (размывание) реальной картины теплового излучения. Если известна форма диаграммы направленности (обычно имеется возможность измерить ее с довольно высокой точностью), то можно сформулировать обратную задачу восстановления радиояркости по данным измерений с точностью, определяемой порогом дифракционного предела разрешения.

Эта задача сводится к решению некорректного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода типа двумерной свертки, которое, как известно, является некорректным, т. е. неустойчивым по отношению к сколь угодно малым погрешностям измерений. Для решения этого уравнения необходимо привлекать дополнительную (априорную) информацию о точном решении. Специфика этой информации и определяет различные методы регуляризации (см. [1–3]). Так, в радиоастрономии широко применяются итерационные алгоритмы “чистки изображений” [4–8], основанные на сглаживании высокочастотных составляющих решения. Существуют методы, основанные на статистических свойствах точного решения, такие как метод наименьших квадратов, оптимальная фильтрация по Винеру [2], метод максимальной энтропии (статистическая регуляризация) [9–12]. Существует также подход, основанный на разложении решения по собственным функциям (анализ сингулярных систем) [3, 13]. Используется и регуляризация “по здравому смыслу”, когда неустойчивость решения преодолевается путем сглаживания, выбора достаточно редкой сетки дискретизации и т. п. Во многих работах с целью регуляризации рассматривалась более простая одномерная задача.

В данной работе применяется метод обобщенной невязки Тихонова [1], в котором используется весьма общая информация о квадратичной суммируемости искомой функции и ее производных.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Если задано двумерное распределение яркостной температуры на плоскости $xу$, где x и y — декартовы координаты, то при сканировании этого распределения антенной с заданной диаграммой направленности мы получаем двумерное распределение антенной температуры. Ставится задача восстановления распределения радиояркости по распределению антенной температуры, если известна форма

диаграммы направленности. Связь между антенной и яркостной температурами представляется в виде двумерной свертки

$$\mathbf{K}_h T_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_h(x-s, y-t) T_b(s, t) ds dt = T_a^\delta(x, y), \quad (1)$$

где $K_h(w, W)$ — диаграмма направленности антенны (ядро уравнения), $T_a^\delta(x, y)$ — измеренная антенная температура, $T_b(s, t)$ — яркостная температура (искомое распределение). Это интегральное уравнение представляет собой уравнение Фредгольма 1-го рода типа двумерной свертки. Разрешение его относительно $T_b(s, t)$ позволяет восстановить распределение яркостной температуры. Мера δ ошибки измеряемой антенной температуры T_a^δ и мера h ошибки ядра уравнения (1) удовлетворяют неравенствам [1]

$$\|T_a^\delta - T_a\|_{L_2} \leq \delta, \quad \|\mathbf{K} - \mathbf{K}_h\|_{W_2^2 \rightarrow L_2} \leq h, \quad (2)$$

где антенная температура T_a соответствует точному решению. Согласно методу обобщенной невязки [1] приближенное решение T_b^α уравнения (1) находится из условия минимума функционала обобщенной невязки

$$\mathbf{M}_\alpha[T_b] = \|\mathbf{K}_h T_b - T_a^\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|T_b\|_{W_2^2}^2 \quad (3)$$

при дополнительном условии, которое и составляет содержание принципа обобщенной невязки — условия равенства невязки суммарной мере погрешности измерений и ядра:

$$\|\mathbf{K}_h T_b^\alpha - T_a^\delta\|_{L_2}^2 = (\delta + h \|T_b^\alpha\|)^2.$$

Это условие устанавливает взаимно однозначную связь между степенью сглаженности приближенного решения, которая определяется величиной параметра регуляризации α в (3), и суммарной мерой погрешности измерений и ядра. В [1] показано, что с уменьшением меры погрешности параметр α монотонно стремится к нулю и роль сглаживания в приближенном решении постепенно уменьшается. Это позволяет с увеличением точности восстанавливать все более сложные распределения яркостной температуры. Верхний индекс в обозначении приближенного решения T_b^α указывает на его соответствие параметру регуляризации, определенному согласно методу обобщенной невязки.

Для уравнений типа свертки использование свойств преобразования Фурье позволяет получить решение задачи в аналитическом виде:

$$T_b^\alpha(s, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}_h^*(\omega, \Omega) \tilde{T}_a^{\delta*}(\omega, \Omega) e^{i(\omega s + \Omega t)} d\omega d\Omega}{L(\omega, \Omega) + \alpha[1 + (\omega^2 + \Omega^2)^2]} \quad (4)$$

где $\tilde{K}_h^*(\omega, \Omega) = \tilde{K}_h(-\omega, -\Omega)$, $L(\omega, \Omega) = |\tilde{K}_h(\omega, \Omega)|^2$,

$$\tilde{T}_a^\delta(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_a^\delta(x, y) e^{-i(\omega x + \Omega y)} dx dy, \quad (5)$$

$$\tilde{K}_h(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_h(u, w) e^{-i(\omega u + \Omega w)} du dw. \quad (6)$$

Весьма важное преимущество описанного метода состоит в том, что в его численной реализации могут быть использованы стандартные алгоритмы быстрого двумерного преобразования Фурье, что позволяет преодолеть известные трудности решения двумерной задачи на сетках большой размерности.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Известно [1], что точность решения некорректных обратных задач может быть определена только из результатов численного моделирования. Для исследования возможностей метода численное моделирование проводилось при различных значениях задаваемой ошибки измерений. В численном эксперименте рассматривались два типа исходных распределений яркостной температуры: кусочно-однородное распределение с резкими границами и двугорбое распределение с плавным изменением антенной температуры. В первом случае распределение выбиралось в виде слова ART с постоянным значением яркостной температуры внутри слова и нулевым значением — во внешней области. Этот случай характеризует возможности метода, связанные с различием двумерных образов. Во втором случае яркостная температура задавалась суммой двух двумерных симметричных гауссовых распределений. Этот случай позволяет исследовать метод с точки зрения достижимой разрешающей способности при различном уровне погрешностей. Такое же двугорбое распределение использовалось для исследования применимости метода восстановления распределения яркостной температуры в случае многолучевой диаграммы направленности, реализуемой в радиометрических системах с синтезированной апертурой. Исходные распределения задавались в условных единицах, что позволяет использовать полученные результаты при рассмотрении других аналогичных задач, сводящихся к уравнению (1), таких как задача увеличения разрешения в микроскопии и т. п.

В численной реализации изложенного выше метода существенным моментом является правильный переход от бесконечной к конечной области, в которой ищется решение и берутся соответствующие интегралы. В рассматриваемом случае проблему решает расширение области восстановления на масштаб локального носителя ядра. При этом решение ищется во всей области определения правой части уравнения (1), а граничные эффекты проявляются только в указанной зоне расширения. Это позволяет периодически продолжить и решение, и ядро уравнения на всю бесконечную область и использовать приведенные формулы.

2.1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С РЕЗКИМИ ГРАНИЦАМИ

В результате моделирования измерений яркостной температуры в заданной двумерной области при помощи антенны с широкой двумерной гауссовой диаграммой направленности в полученном распределении антенной температуры тонкая структура исходного распределения оказалась совершенно замаскированной. Разработанный метод позволил восстановить исходное распределение. Результаты восстановления представлены при точности измерения антенной температуры порядка 1%, а также исследована сходимость решения при стремлении моделируемого уровня погрешности к нулю (моделируемая ошибка 0,01%). Ошибка измерений антенной температуры моделировалась с помощью датчика псевдослучайных чисел с нормальным распределением и фиксированным (задаваемым) значением дисперсии $\sigma_{T_a}^2$ в любой выборке. Ошибка определения ядра уравнения полагалась равной нулю. В соответствии с определением мера погрешности представляла собой двумерный интеграл по области восстановления от квадрата погрешности в каждой точке. Поскольку дисперсия в любой выборке постоянна, то $\delta^2 = S\sigma_{T_a}^2$, где S — площадь области восстановления. Относительная величина ошибки определялась отношением δ к квадратному корню из интеграла от квадрата точного решения по области восстановления. Погрешность задавалась некоррелированной в точках выбранной сетки. Таким образом, радиус ее корреляции был порядка величины шага дискретизации. При таком способе задания погрешности ее искажающее влияние на качество восстановления максимально. Систематические ошибки можно не учитывать в анализе, поскольку в силу линейности решаемого уравнения их наличие приводит к соответствующему систематическому сдвигу решения.

На рис. 1 и 2 представлены двумерные распределения исходного радиотеплового поля и результатов его измерения антенной системой с несимметричной двумерной гауссовой формой диаграммы

направленности, при которой исходное изображение слова становится совершенно неразличимым.

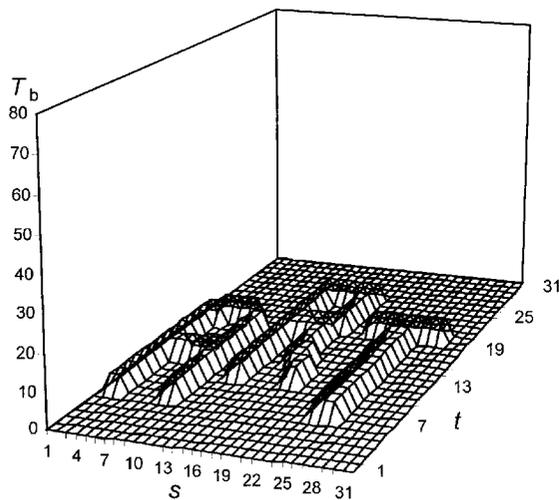


Рис. 1. Исходное (моделируемое) распределение яркостной температуры

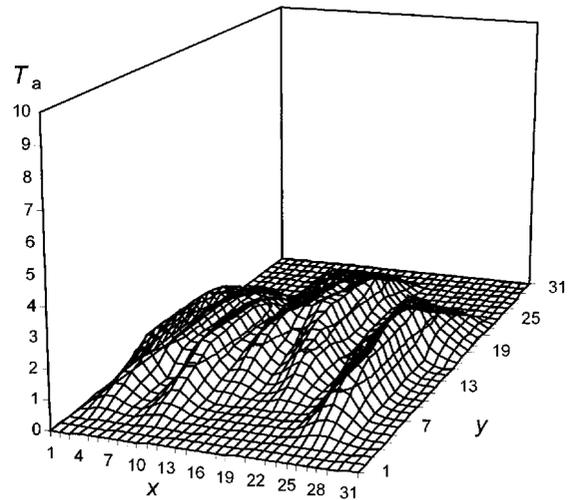


Рис. 2. Распределение антенной температуры в условных единицах, соответствующее рис. 1

При восстановлении методом Тихонова параметром является оценка интегральной погрешности измерений, которой в методе обобщенной невязки ставится в соответствие величина параметра регуляризации, определяющего степень сглаженности решения. При стремлении ошибки к нулю параметр регуляризации также стремится к нулю, но более медленно. Решение при стремлении ошибки к нулю в интегральной метрике сходится к точному равномерно, что составляет существенное преимущество метода Тихонова, позволяя оценивать погрешность восстановления по максимуму модуля моделируемых распределений, которые в данной физической задаче могут рассматриваться либо как типичные, либо как экстремальные в зависимости от ориентации задачи на гарантированное отсутствие в решении ложных особенностей или, наоборот, на обнаружение тонких деталей восстанавливаемого распределения.

Представленные на рис. 3 и 4 результаты восстановления яркостной температуры, выраженные в условных единицах, позволяют сделать вывод о том, что метод достаточно эффективен для решения поставленной задачи в случае, когда исходные распределения обладают резкими границами. При умеренной точности решение еще несколько сглаживает истинную картину, но при уменьшении погрешности восстановление становится безупречным.

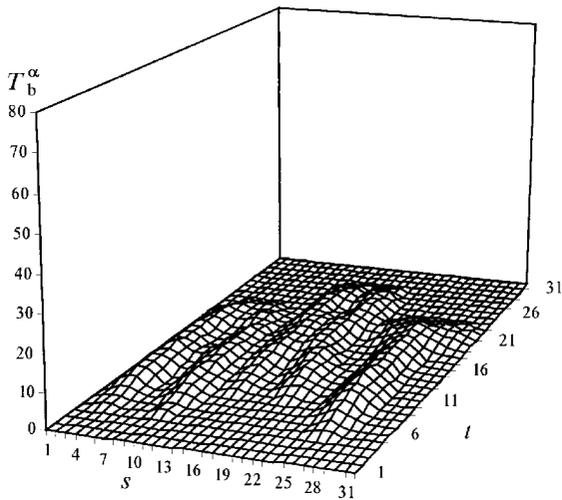


Рис. 3. Восстановленное распределение яркостной температуры при точности измерений антенной температуры 1%

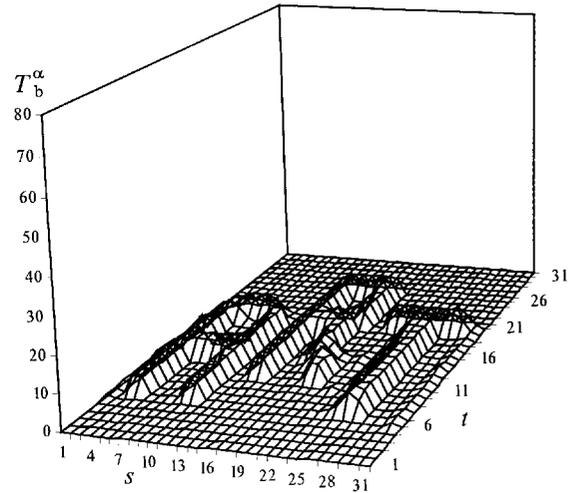


Рис. 4. Восстановленное распределение яркостной температуры при точности измерений антенной температуры 0,01%

Следует отметить, что точность восстановления исходного распределения в некорректных задачах рассматриваемого типа возрастает не пропорционально уменьшению ошибки, а значительно медленнее. Кроме того, она зависит также от специфики самого восстанавливаемого распределения (например если характерные детали распределения много шире луча диаграммы направленности, то антенная температура будет просто равна яркостной). Эта особенность весьма затрудняет и введение понятия разрешающей способности, которая также должна зависеть не только от формы диаграммы направленности и погрешности измерений, но и от специфики самого восстанавливаемого распределения.

2.2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДВУГОРБОГО ГАУССОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ОЦЕНКА ДОСТИГНУТОГО ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ УВЕЛИЧЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Для качественной характеристики достигнутого увеличения разрешающей способности рассмотрен случай восстановления плавного распределения яркостной температуры с двумя острыми близко расположенными пиками гауссовой формы (см. рис. 5).

Можно видеть, что широкая гауссова диаграмма направленности антенны, использованная при моделировании, полностью сгладила исходное двугорбое распределение и оно выглядит как одногорбое (см. рис. 6). Тем не менее, алгоритм восстановления позволяет разрешить двугорбую структуру исходного распределения радиояркостной температуры уже при умеренной точности измерений (см. рис. 7). Можно видеть, что при уровне погрешности 1% в решении возникают несуществующие в исходном распределении детали в виде разбегающихся волн незначительной амплитуды. По мере роста точности восстановления (см. рис. 8) решение, как и в первом случае, сходится к исходному распределению и при точности 0,01% уже практически не содержит ложных деталей.

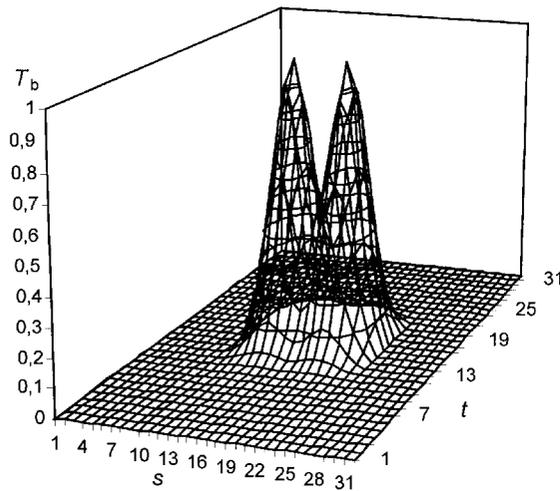


Рис. 5. Исходное (моделируемое) распределение яркостной температуры.

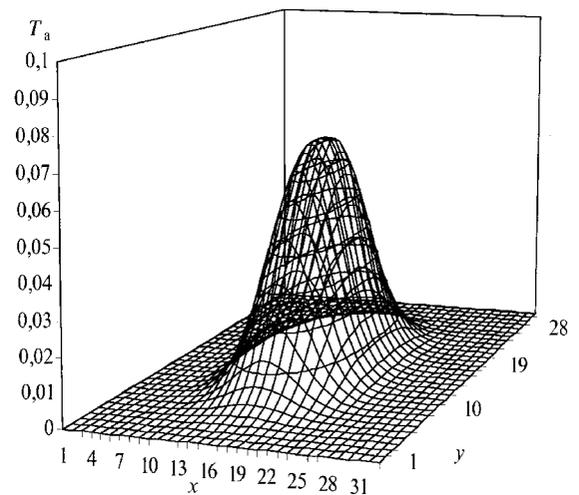


Рис. 6. Распределение антенной температуры в условных единицах, соответствующее рис. 5

Способность к восстановлению скрытых в наблюдаемом распределении деталей и характеризует разрешающую способность метода. Рост разрешающей способности можно приблизительно оценить как отношение размера наименьших деталей в восстановленном распределении к ширине диаграммы направленности.

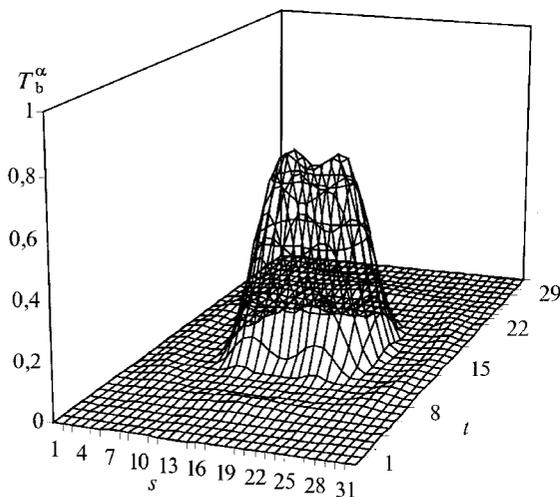


Рис. 7. Восстановленное распределение яркостной температуры при точности измерений антенной температуры 1%

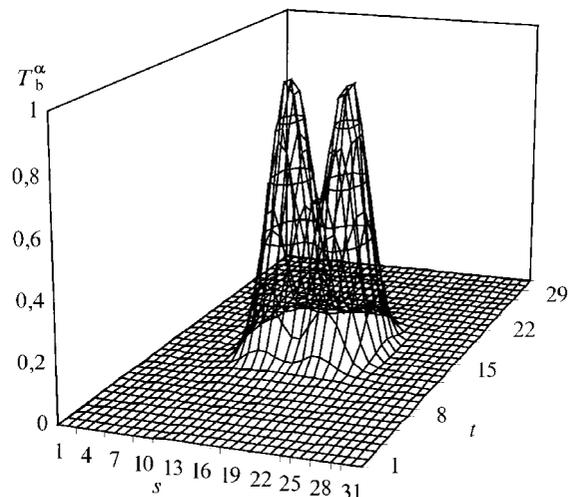


Рис. 8. Восстановленное распределение яркостной температуры при точности измерений антенной температуры 0,01%

В рассматриваемом случае при ошибке измерения антенной температуры 1% разрешающая способность возрастает в 3 ÷ 4 раза, точность восстановления составляет 20 ÷ 40% от характерной величины неоднородности радиояркости. Разумеется, при решении конкретной физической задачи необходимо

проводить аналогичное моделирование с учетом ее специфики. В частности, известно, что диаграммы направленности реальных антенн имеют ограниченный спектр пространственных частот, что затрудняет восстановление мелких деталей истинного распределения радиояркости (с угловым размером меньшим дифракционного предела угловой разрешающей способности, который приблизительно определяется отношением длины волны к эффективному диаметру апертуры) без использования дополнительной априорной информации о точном решении. Применение рассматриваемого метода позволяет реализовать максимально возможную для данной антенны разрешающую способность при заданной точности измерений в рассматриваемом классе функций.

2.3. СЛУЧАЙ МНОГОЛУЧЕВОЙ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

В практику современной радиометрии входят системы с синтезированной апертурой, обладающие многолучевой диаграммой направленности (см., например, [14–15]). Так, в [14] рассматривается существующая самолетная система радиометрии земной поверхности, основанная на гибридном апертурном синтезе. В поперечном к траектории полета направлении обзор осуществляется 8-элементной одномерной антенной решеткой с многолучевой диаграммой направленности с последующей компьютерной корреляционной обработкой сигнала (параллельный синтез), а в продольном направлении для последовательного синтеза используется собственное движение самолета. Аналогичные системы разрабатываются и для космических проектов. Рассматриваются возможности применения и двумерного апертурного синтеза [14], когда при движении разные лепестки диаграммы направленности проходят через одни и те же элементы поверхности.

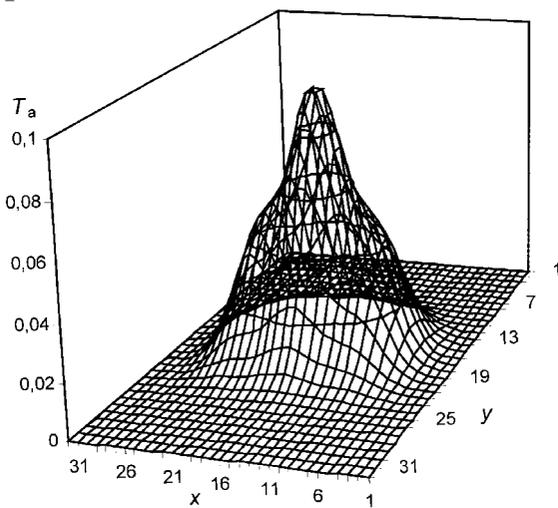


Рис. 9. Распределение антенной температуры, соответствующее двухлучевой диаграмме направленности антенны и исходному распределению яркостной температуры на рис. 5

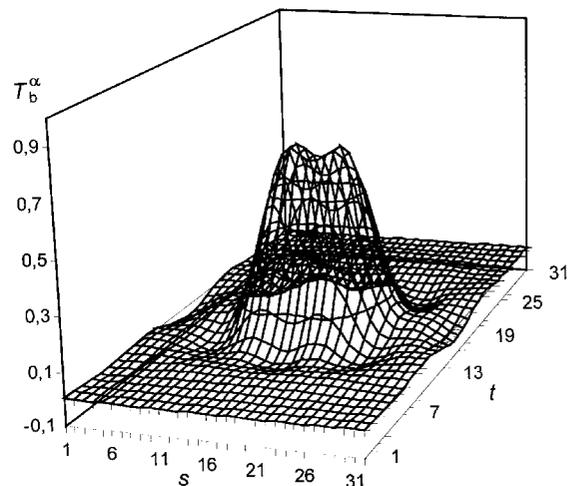


Рис. 10. Восстановленное распределение яркостной температуры при точности измерений антенной температуры 1%

Интерпретация наблюдаемого распределения антенной температуры при перекрытии вклада от различных лепестков диаграммы направленности, когда это распределение может существенным образом отличаться от истинного распределения радиояркости даже при достаточно малой ширине каждого из лучей, также может быть основана на применении рассматриваемого метода решения обратной

задачи. Для моделирования такой ситуации снова воспользуемся приведенным на рис. 5 двугорбым гауссовым распределением яркостной температуры. Для компактности представления результатов форма диаграммы направленности антенны также полагалась двугорбой и, более того, в точности повторяющей исходное распределение на рис. 5.

На рис. 9 показано получившееся распределение антенной температуры, в котором исходное двугорбое распределение превращается в одnogорбое. На рис. 10 можно видеть, как при точности измерения антенной температуры 1% начинают разрешаться максимумы исходного распределения яркостной температуры, а на рис. 11 — как при ошибке измерения 0,01% исходное распределение восстанавливается с хорошей точностью. Таким образом, метод Тихонова может эффективно решать и проблему восстановления истинного распределения радиояркостности по данным многолучевых измерений.

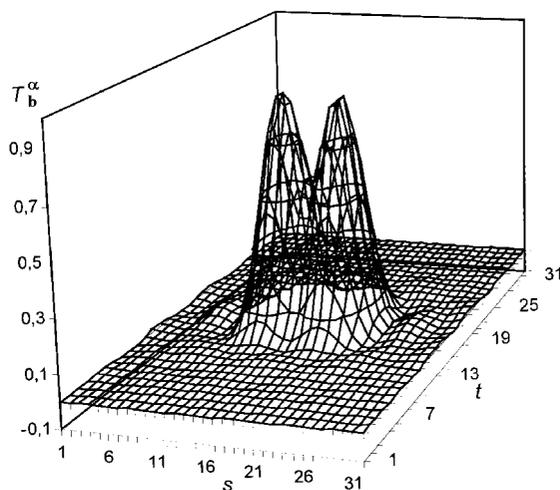


Рис. 11. Восстановленное распределение яркостной температуры при точности измерений антенной температуры 0,01%

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРИ РАДИОМЕТРИЧЕСКОМ ЗОНДИРОВАНИИ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Изложенный метод применялся для восстановления двумерного распределения радиояркостности подстилающей поверхности по данным вертолетных радиометрических измерений [16] с высоты 50 м в надир на длине волны 3 см при ширине диаграммы направленности рупорной антенны 20° (см. рис. 12). В ходе эксперимента методом параллельных разрезов измерялось двумерное распределение восходящего теплового излучения выбранного участка поверхности размером 150 на 250 м (озеро с нефтяными загрязнениями, берег). Неоднородность излучательной способности поверхности создавала большие контрасты радиояркостности (более 100 К). Флуктуационная чувствительность радиометров составляла около 0,1 К при постоянной интегрирования 1 с. Максимальная абсолютная погрешность измерения, связанная с ошибками калибровки и вариациями фона переотраженного излучения атмосферы, оценивалась величиной 5 К, а среднеквадратичное по поверхности значение абсолютной погрешности не превышало 2 К. Таким образом, учитывая, что среднеквадратичное по зондируемой поверхности значение восстанавливаемой яркостной температуры составляло около 200 К, мера погрешности измерений в смысле рассмотренного выше алгоритма восстановления задавалась равной 1%.

В данном эксперименте было затруднительно добиться повышения разрешающей способности измерений путем уменьшения высоты антенны над поверхностью, поскольку на меньших высотах поток воздуха от пропеллера вертолета начинал разгонять нефтяную пленку на озере, а основной целью эксперимента было измерение теплового излучения именно нефтяной пленки. Увеличение размеров рупора, которое также могло бы улучшить разрешающую способность, было невозможно из-за условий компоновки аппаратуры на борту вертолета. Таким образом, использование описываемого в данной работе метода восстановления является в данном случае единственным способом увеличения разрешающей способности.

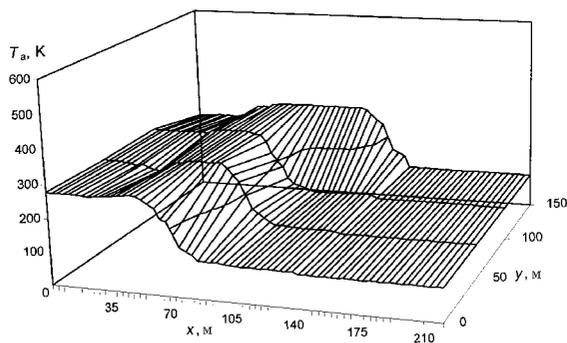


Рис. 12. Измеренное распределение антенной температуры участка земной поверхности на длине волны 3 см

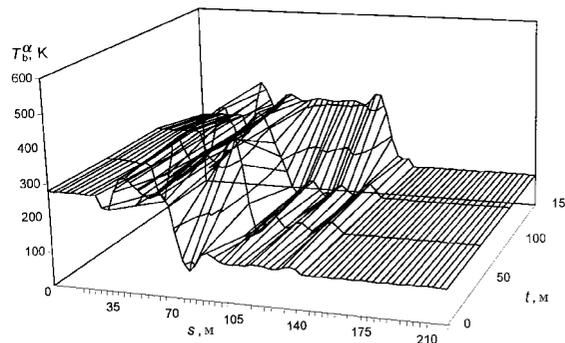


Рис. 13. Восстановление распределения яркостной температуры по данным, приведенным на рис. 12, при ошибке радиометрических измерений 1%

Форма диаграммы направленности антенны при восстановлении полагалась гауссовой. Область восстановления была шире представленной на рисунке на величину утроенного размера пятна диаграммы с целью исключения влияния граничных эффектов на результаты. На рис. 13 можно видеть, что предложенный алгоритм восстановления позволяет обнаружить более тонкую структуру распределения радиояркостности, чем в измеренном распределении антенной температуры. Восстановленная тонкая структура вариаций толщины пленки качественно соответствует визуальной наблюдаемой складчатой структуре пленки, которая образуется у подветренной части берега под влиянием ветра. Приведенные выше результаты численных экспериментов при точности радиометрических измерений 1% позволяют судить о качестве полученного распределения и степени достоверности его деталей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты работы показали высокую эффективность алгоритмов восстановления распределения радиояркостности, основанных на применении метода обобщенной невязки Тихонова для двумерных уравнений типа свертки [1]. Выполнено численное моделирование как при реализуемой на практике точности измерений, так и при экстремально высокой точности; с помощью результатов моделирования показана сходимость решения к точному. Метод был применен к реальным измерениям в практическом случае, когда не было другой возможности для повышения разрешающей способности.

Можно надеяться, что данный метод может быть использован не только в рассмотренном круге задач, но и в других случаях, когда проблемой является ограничение разрешающей способности прибора или искажение истинной картины под влиянием аппаратной функции и когда задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода типа свертки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983. — 200 с.
2. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986. — 304 с.
3. Bertero M., de Mol C., Pike E. R. // Inverse methods in electromagnetic imaging / Ed. by W. M. Boerner et al. — D. Reidel Publishing Company, Boston. P. 319.
4. Hogbom J. A. // Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 1974. V. 15. № 3. P. 417.

5. Clark B. G. // *Astron. Astrophys.* 1980. V. 89. № 2. P. 377.
6. Cornwell T. J. // *Astron. Astrophys.* 1983. V. 121. № 2. P. 281.
7. Steer D. J., Dewdney P. E., Ito M. R. // *Astron. Astrophys.* 1984. V. 137. № 2. P. 159.
8. Tan Sze M. // *MNRAS.* 1986. V. 220. № 4. P. 971.
9. Frieden B. R., Wells D. G. // *J. Opt. Soc. America.* 1978. V. 68. № 1. P. 93.
10. Skilling J., Brian R. K. // *MNRAS.* 1984. V. 211. № 1. P. 111.
11. Cornwell T. J., Evans K. F. // *Astron. Astrophys.* 1985. V. 143. № 11. P. 77.
12. Reiter J., Pfeleiderer J. // *Astron. Astrophys.* 1986. V. 166. № 1/2. P. 381.
13. Bardaty F., Mongiardo M., Solimini D. // *Proceedings of IGARSS'86 Symp. (Zurich, 8–11 Sept. 1986).* ESA Publ. Division, 1986. P. 595.
14. Le Vine D. M. // *Radio Science.* 1990. V. 25. № 4. P. 441.
15. Swift C. T., Le Vine D. M., Christopher S. R. // *Trans. Microwave Theory and Techniques.* 1991. V. 39. № 12. P. 1931.
16. Гайкович К. П., Снопик Л. М., Троицкий А. В. // *Изв. ВУЗов. Радиофизика.* 1995. Т. 38. № 11. С. 1105.

Институт физики
микроструктур РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
26 ноября 1998 г.

**RETRIEVING TWO-DIMENSIONAL DISTRIBUTION OF RADIO BRIGHTNESS USING MEASUREMENTS BY
ANTENNA WITH THE KNOWN ANGULAR PATTERN**

K. P. Gaikovich and A. V. Zhilin

We develop a method for retrieving two-dimensional distribution of brightness temperature using the measured antenna temperature. The method is based on the Tikhonov theory of ill-posed problems. The efficiency of the method is analyzed by virtue of numerical simulations of the single- and multiple-beam synthetic-aperture radiometric systems. The proposed method is applied to helicopter measurements of thermal radio emission of the soil.

УДК 621.372.832

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ЭКРАНИРОВАННОЙ ДВУХСТОРОННЕЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

А. С. Арефьев, В. А. Неганов

С помощью метода почти полного обращения оператора проведен анализ собственных волн экранированной двухсторонней несимметричной полосковой линии передачи. На примере данной волноведущей структуры рассмотрен алгоритм понижения порядка систем интегральных уравнений, описывающих линии передачи, поперечные сечения которых инвариантны относительно поворота на 180° .

Несмотря на интенсивное совершенствование современной вычислительной техники, остаются актуальными проблемы оптимизации затрат машинного времени при расчете характеристик полосково-щелевых линий передачи и резонаторов. С этой точки зрения учет симметрии исследуемой электродинамической структуры на этапе ее моделирования может оказаться весьма продуктивным. В настоящей работе обсуждается возможность двукратного понижения порядка системы интегральных уравнений, описывающей экранированную двухстороннюю несимметричную полосковую линию передачи (ЭДНПЛ), в случае, когда поперечное сечение данной волноведущей структуры инвариантно относительно поворота на 180° .

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КЛАССИФИКАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН ВОЛНОВЕДУЩЕЙ СТРУКТУРЫ

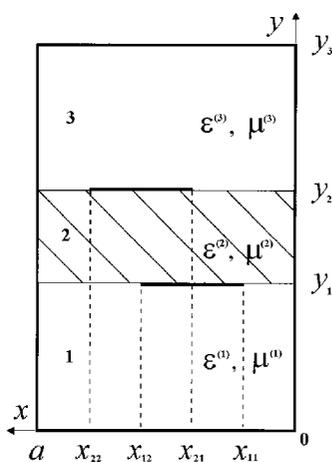


Рис. 1.

Поперечное сечение ЭДНПЛ приведено на рис. 1. Металлические полоски, нанесенные на границы раздела диэлектрических слоев, считаются бесконечно тонкими и идеально проводящими. Вдоль оси z структура предполагается регулярной. Мы будем рассматривать собственные волны, распространяющиеся в направлении оси z (зависимость поля от координаты z и времени t имеет вид $\exp\{i(\omega t - \gamma z)\}$, где γ — неизвестная постоянная распространения, ω — циклическая частота).

Наложим некоторые ограничения на параметры рассматриваемых полосковых линий. Будем считать, что диэлектрические слои 1 и 3 (рис. 1) обладают идентичными размерами поперечных сечений и одинаковой диэлектрической и магнитной проницаемостями:

$$y_3 - y_2 = y_1, \quad \varepsilon^{(3)} = \varepsilon^{(1)}, \quad \mu^{(3)} = \mu^{(1)}. \quad (1)$$

Кроме того, условимся считать ширину металлических полосок одинаковой, а центры их — сдвинутыми на равные расстояния относительно плоскости $x = a/2$:

$$x_{21} = a - x_{12}, \quad x_{22} = a - x_{11}. \quad (2)$$

Тип симметрии, определяемый соотношениями (1), (2), можно охарактеризовать как инвариантность поперечного сечения линии передачи относительно поворота на 180° .

Можно показать, что в линии, удовлетворяющей условиям (1), (2), возможно независимое существование волн двух типов. Дадим им определение, исходя из распределений компонент плотности тока

на металлических полосках. Собственную волну ЭДНПЛ будем называть поперечно-симметричной, или TS-волной, если компоненты плотности тока на полосках удовлетворяют соотношениям

$$J_x^{[2]}(a-x) = J_x^{[1]}(x), \quad J_z^{[2]}(a-x) = -J_z^{[1]}(x), \quad (3)$$

где $x_{11} < x < x_{12}$. Верхний индекс соответствует номеру полоски (полоска 1 расположена на границе диэлектрических слоев 1 и 2, полоска 2 — на границе слоев 2 и 3 (см. рис. 1)). Соответственно, будем называть волну продольно-симметричной, или LS-волной, если при $x_{11} < x < x_{12}$ справедливы равенства

$$J_x^{[2]}(a-x) = -J_x^{[1]}(x), \quad J_z^{[2]}(a-x) = J_z^{[1]}(x). \quad (4)$$

Опираясь на представления для полей и токов, полученные в результате применения к ЭДНПЛ метода частичных областей, можно обобщить определения собственных волн (3), (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp(a-x, y_3-y) &= \pm \vec{E}_\perp(x, y), \\ E_\parallel(a-x, y_3-y) &= \mp E_\parallel(x, y), \\ \vec{H}_\perp(a-x, y_3-y) &= \pm \vec{H}_\perp(x, y), \\ H_\parallel(a-x, y_3-y) &= \mp H_\parallel(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь верхний знак соответствует TS-волне, нижний — LS-волне, индексами \perp и \parallel отмечены соответственно поперечные и продольные составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} напряженностей электрического и магнитного полей, $0 < x < a$, $0 < y < y_3$.

При моделировании ЭДНПЛ будем исходить из следующей системы векторных равенств:

$$\vec{E}_n = \hat{Z}_n \vec{J}_n. \quad (6)$$

Здесь $n = 0, 1, \dots$, \hat{Z}_n — тензор импедансов поверхностей частичной металлизации [1], векторы

$$\vec{E}_n = (E_{zn}^{[1]}, -E_{xn}^{[1]}, E_{zn}^{[2]}, -E_{xn}^{[2]})^T, \quad \vec{J}_n = (J_{zn}^{[1]}, J_{xn}^{[1]}, J_{zn}^{[2]}, J_{xn}^{[2]})^T$$

содержат коэффициенты Фурье разложений компонент векторов плотности тока и напряженности электрического поля на границах раздела диэлектрических слоев по тригонометрическому базису:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} J_z^{[j]}(x) \\ E_z(x, y_j) \end{Bmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} J_{zn}^{[j]} \\ E_{zn}^{[j]} \end{Bmatrix} \sin(\beta_n x), \\ \begin{Bmatrix} J_x^{[j]}(x) \\ E_x(x, y_j) \end{Bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} J_{xn}^{[j]} \\ E_{xn}^{[j]} \end{Bmatrix} \cos(\beta_n x). \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс T соответствует операции транспонирования, индекс j принимает значения 1 и 2, $\beta_n = \frac{\pi n}{a}$, $0 < x < a$.

Соотношения (6) приводят к системе из четырех интегральных соотношений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{G}_n(x_1, x_2) \hat{Z}_n \vec{J}_n = 0, \quad (7)$$

где $x_{11} < x_1 < x_{12}$, $x_{21} < x_2 < x_{22}$,

$$\hat{G}_n(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(\beta_n x_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta_n x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\beta_n x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\beta_n x_2) \end{pmatrix}.$$

С учетом (2) получаем

$$J_{zn}^{[2]} = -(-1)^n \tilde{J}_{zn}^{[2]}, \quad J_{xn}^{[2]} = (-1)^n \tilde{J}_{xn}^{[2]}, \tag{8}$$

где

$$\tilde{J}_{zn}^{[2]} = \frac{2}{a} \int_{x_{11}}^{x_{12}} J_z^{[2]}(a-x') \sin(\beta_n x') dx', \quad \tilde{J}_{xn}^{[2]} = \frac{2}{a(1+\delta_{0n})} \int_{x_{11}}^{x_{12}} J_x^{[2]}(a-x') \cos(\beta_n x') dx',$$

δ_{mn} — символ Кронекера. Подстановка (8) в (7) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{G}_n(x, x) \hat{Z}_n \vec{J}_n = 0, \tag{9}$$

где $x_{11} < x < x_{12}$,

$$\hat{Z}_n = \begin{pmatrix} Z_{n11} & Z_{n12} & -(-1)^n Z_{n13} & (-1)^n Z_{n14} \\ Z_{n21} & Z_{n22} & -(-1)^n Z_{n23} & (-1)^n Z_{n24} \\ -(-1)^n Z_{n31} & -(-1)^n Z_{n32} & Z_{n33} & -Z_{n34} \\ (-1)^n Z_{n41} & (-1)^n Z_{n42} & -Z_{n43} & Z_{n44} \end{pmatrix},$$

$$\vec{J}_n = (J_{zn}^{[1]}, J_{xn}^{[1]}, \tilde{J}_{zn}^{[2]}, \tilde{J}_{xn}^{[2]})^T.$$

Преимуществом системы (9) является то, что все ее интегральные соотношения определены на одном и том же интервале.

Теорема о собственных волнах ЭДНПЛ. В ЭДНПЛ, удовлетворяющей условиям (1), (2), могут существовать TS- и LS-волны.

Доказательство. Образует из неизвестных компонент плотности тока на металлических полосках вектор вида

$$\vec{p}(x) = (J_z^{[1]}(x), J_x^{[1]}(x), J_z^{[2]}(a-x), J_x^{[2]}(a-x))^T. \tag{10}$$

Предположим, что известен некоторый собственный вектор

$$\vec{\varphi}(x) = (\varphi_z^{[1]}(x), \varphi_x^{[1]}(x), \varphi_z^{[2]}(x), \varphi_x^{[2]}(x))^T$$

системы (9), понимаемый в смысле (10). В этом случае, как легко убедиться, подстановка в (9) вместо $\vec{\varphi}(x)$ вектора

$$\vec{\tilde{\varphi}}(x) = (-\varphi_z^{[2]}(x), \varphi_x^{[2]}(x), -\varphi_z^{[1]}(x), \varphi_x^{[1]}(x))^T$$

также обращает (9) в тождество. При этом необходимо учесть инвариантность тензора \hat{Z}_n относительно операции транспонирования, а также наличие в его структуре дополнительной симметрии, обусловленной предположениями (1):

$$Z_{n33} = Z_{n11}, \quad Z_{n34} = Z_{n12}, \quad Z_{n44} = Z_{n22}, \quad Z_{n41} = Z_{n32}.$$

Таким образом, вектора $\vec{\varphi}(x)$ и $\vec{\tilde{\varphi}}(x)$ одновременно являются решениями системы (9), причем оба эти решения соответствуют одному и тому же значению спектрального параметра, в качестве которого здесь выступает постоянная распространения γ . Но в силу линейности системы уравнений (9) к ее собственным векторам можно отнести также комбинации

$$\vec{\varphi}(x) + \vec{\tilde{\varphi}}(x), \quad \vec{\varphi}(x) - \vec{\tilde{\varphi}}(x),$$

первая из которых описывает TS-волну, а вторая — LS-волну. Таким образом, теорема доказана.

Учет доказанных выше свойств симметрии (3), (4) позволяет понизить порядок системы уравнений (9). Легко обнаружить, что задача о собственных волнах ЭДНПЛ сводится к системе из двух интегральных соотношений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{L}_n(x) \hat{Q}_n \vec{j}_n = 0, \quad (11)$$

где $x_{11} < x < x_{12}$,

$$\hat{L}_n(x) = \begin{pmatrix} \sin(\beta_n x) & 0 \\ 0 & \cos(\beta_n x) \end{pmatrix}, \quad \vec{j}_n = \begin{pmatrix} J_{zn}^{[1]} \\ J_{xn}^{[1]} \end{pmatrix},$$

$$\hat{Q}_n = \begin{pmatrix} Z_{n11} & Z_{n12} \\ Z_{n21} & Z_{n22} \end{pmatrix} \pm (-1)^n \begin{pmatrix} Z_{n13} & Z_{n14} \\ Z_{n23} & Z_{n24} \end{pmatrix}.$$

Верхний знак в определении тензора \hat{Q}_n соответствует TS-волне, нижний — LS-волне.

Замена порядка операций суммирования и интегрирования в (11) приводит к возникновению расходящихся рядов. Поэтому данную манипуляцию приходится предварять интегрированием по частям в одной из компонент вектора \vec{j}_n . В результате получаем систему интегральных уравнений первого рода

$$\int_{x_{11}}^{x_{12}} \hat{K}(x, x') \vec{j}(x') dx' = 0 \quad (12)$$

относительно неизвестной функции

$$\vec{j}(x) = (J_z^{[1]}(x), J_x^{[1]'}(x))^T,$$

где $J_x' = \frac{d}{dx} J_x$, $x_{11} < x < x_{12}$. Элементы тензора $\hat{K}(x, x')$ имеют вид

$$K_{11} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n11} \sin(\beta_n x) \sin(\beta_n x'),$$

$$K_{12} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Q_{n12} \sin(\beta_n x) \sin(\beta_n x'),$$

$$K_{21} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n21} \cos(\beta_n x) \sin(\beta_n x'),$$

$$K_{22} = -\frac{x'}{a} Q_{022} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Q_{n22} \cos(\beta_n x) \sin(\beta_n x').$$

Особенности функций K_{ij} определяются асимптотическим поведением элементов тензора \hat{Q}_n при неограниченном увеличении индекса n . Нетрудно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n Q_{n11}) = q_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} Q_{n22} \right) = q_3, \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n12} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n21} = q_2.$$

Константы q_1, q_2 и q_3 определяются следующим образом:

$$q_1 = \frac{ia}{k\pi} \left[\frac{\gamma^2}{\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}} - \frac{k^2}{1/\mu^{(1)} + 1/\mu^{(2)}} \right],$$

$$q_2 = \frac{\gamma}{k} \frac{1}{\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}}, \quad q_3 = -\frac{i\pi}{ka} \frac{1}{\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}},$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, c — скорость света, i — мнимая единица. На основании (13) делаем вывод, что при $x' \rightarrow x$ функции K_{1j} , где индекс j принимает значения 1 и 2, имеют логарифмическую особенность, а функции K_{2j} обладают сингулярностью вида $(\cos(\beta_1 x') - \cos(\beta_1 x))^{-1}$.

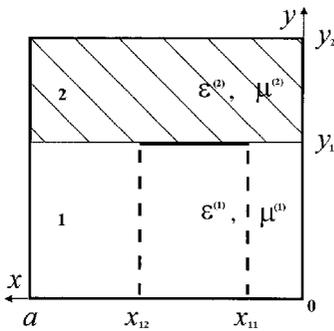


Рис. 2.

Соотношения симметрии (1), (2) не гарантируют в общем случае наличие в поперечном сечении ЭДНПЛ горизонтальной либо вертикальной плоскости симметрии, что дало бы возможность перейти к анализу более простых волноведущих структур путем введения в линию дополнительных электрических или магнитных стенок. Тем не менее, условия (1), (2) позволяют понизить порядок исходной системы интегральных соотношений. При этом время численного решения дисперсионного уравнения для определения постоянных распространения собственных волн сокращается в 4 раза. Кроме того, легко обнаружить, что подстановка вместо \hat{Q}_n тензора \hat{Z}'_n импедансов поверхностей частичной металлизации двухслойной структуры, изображенной на рис. 2, превращает (12) в систему интегральных уравнений для

экранированной несимметричной полосковой линии передачи (ЭНПЛ) [2]. Таким образом, программа расчета ЭНПЛ легко может быть приспособлена для анализа ЭДНПЛ, обладающей симметрией (1), (2). Для этого в программе следует лишь переопределить некоторые скалярные коэффициенты, присутствующие в дисперсионном уравнении, а именно произвести замену Z'_{nij} на Q_{nij} .

2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследование волновых параметров ЭДНПЛ проводилось с помощью метода почти полного обращения оператора [1]. Высказанные замечания позволяют использовать для анализа TS- и LS-волн рассмотренной полосковой линии алгоритм обращения, развитый в работе [2] на примере ЭНПЛ. При этом существенно, что числовые последовательности Q_{nij} и Z'_{nij} , $n = 0, 1, \dots$, удовлетворяют одним и тем же предельным соотношениям (13). На рис. 3 и 4 приведены зависимости постоянных распространения TS- и LS-волн ЭДНПЛ от ширины полосок d при фиксированных координатах их центров. Параметры линии выбраны следующим образом: $ka = 2\pi, \frac{y_1}{a} = 0,9916, \frac{y_2 - y_1}{a} = 0,0168, \varepsilon^{(1)} = 1, \varepsilon^{(2)} = 10, \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 1$, координата центра 1-й полоски $x_0 = 3a/8$. Таким образом, максимальное значение ширины полосок d_{max} соответствует их перекрытию: $x_{12} - x_{21} = a/2$; значение $d = d_{max}/3$ отвечает случаю нулевого перекрытия ($x_{12} = x_{21}$).

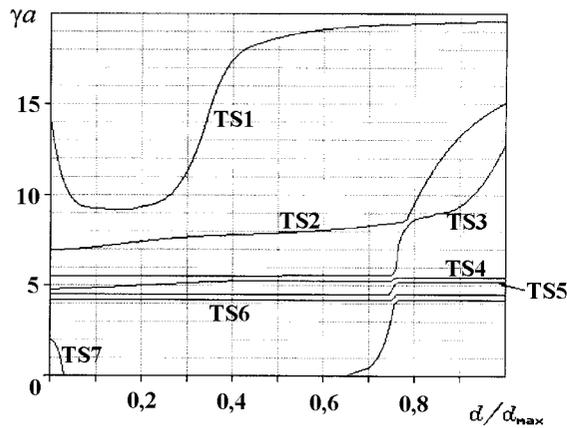


Рис. 3.

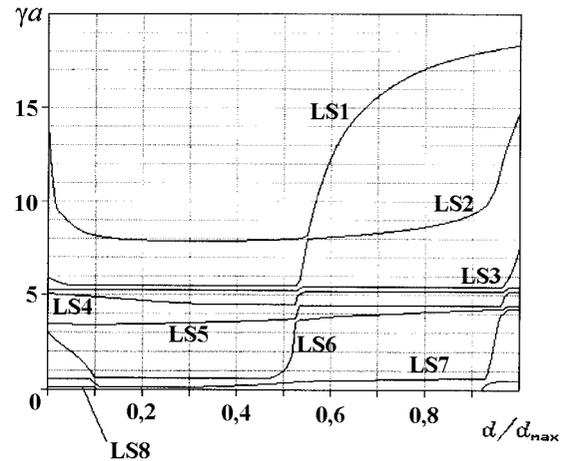


Рис. 4.

В случае неограниченного уменьшения ширины полосок постоянные распространения волн TS1 и LS1 выходят на значение $\gamma_0 = k\sqrt{(\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)})/2}$. При значительном перекрытии полосок некоторые из кривых приобретают форму своеобразных дуг (LS1 при $d > 0,55 d_{\max}$; TS2 при $d > 0,78 d_{\max}$), которые соответствуют межполосочным волнам. Такие волны реализуются в модели прямоугольного волновода с параметрами диэлектрического заполнения $\varepsilon^{(2)}$, $\mu^{(2)}$, экран которого образован металлическими полосками (в области их перекрытия), а с боков дополнен магнитными стенками. Данный модельный волновод допускает существование Т-волны. Природу квази-Т-волны имеет основная мода ЭДНПЛ (кривая TS1) в области перекрытия полосок. Ее постоянная распространения при $d > 0,5 d_{\max}$ слабо зависит от ширины полосок, приближаясь с ростом d к значению $\gamma = k\sqrt{\varepsilon^{(2)}}$.

Кривые LS1 $\left(0,1 < \frac{d}{d_{\max}} < 0,55\right)$, LS2 $\left(0,55 < \frac{d}{d_{\max}} < 0,9\right)$, TS2 $\left(0,1 < \frac{d}{d_{\max}} < 0,78\right)$ и TS3 $\left(0,8 < \frac{d}{d_{\max}} < 0,9\right)$ описывают экранные квази-Т-волны, поля которых сосредоточены между полосками и горизонтальными стенками экрана в 1-м и 3-м диэлектрических слоях. В случае приближения одного из ребер каждой полоски к вертикальным стенкам экрана ($d \rightarrow d_{\max}$) постоянные распространения данных мод вновь приобретают значение $\gamma = \gamma_0$. При этом поля их все более концентрируются в области малых щелей ($0 < x < x_{11}$, $x_{22} < x < a$).

При $d = 0$ все распространяющиеся собственные волны ЭДНПЛ, за исключением двух нижних мод, имеют экранный характер. Волны данного типа характерны для прямоугольного волновода с трехслойным диэлектрическим заполнением (ПВТЗ) — структуры без токопроводящих полосок [3]. Анализируя зависимости, представленные на рис. 3 и 4, можно сделать вывод о том, что некоторые экранные волны нечувствительны к введению в линию передачи металлических полосок. Степень влияния введения проводящих полосок на характеристики той или иной собственной волны ПВТЗ можно охарактеризовать с помощью параметра $\zeta = \left| \frac{\vec{E}_\tau(x, y_1)}{\vec{H}_\tau(x, y_1)} \right|$, где \vec{E}_τ , \vec{H}_τ — касательные к границе раздела диэлектриков составляющие напряженностей электрического и магнитного полей идеальной экранный волны (собственной волны ПВТЗ). Логика определения ζ такова. Чем больше значение $|\vec{E}_\tau(x, y_1)|$ в предполагаемой области металлизации, тем больше полоски препятствуют распространению в линии данной волны. Однако компоненты поля любой собственной волны определены с точностью до произвольного множителя. Нам необходимо устранить этот множитель, поскольку с помощью ζ мы собираемся сравнивать поведение различных экранных волн. С этой целью в определение ζ введен знаменатель.

Подставляя вместо $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ выражения для компонент поля в первом диэлектрическом слое, находим

$$\zeta = (k\mu^{(1)})^2 \left| \frac{\operatorname{tg}(\alpha_n y_1)}{\alpha_n} \right|^2 \quad \text{для } LE_{nm}\text{-волны,}$$

$$\zeta = \frac{|\alpha_n|^2}{(k\varepsilon^{(1)})^2} |\operatorname{tg}(\alpha_n y_1)|^2 \quad \text{для } LM_{nm}\text{-волны,}$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{k^2 \varepsilon^{(1)} \mu^{(1)} - \gamma^2 - \beta_n^2},$$

LE_{nm} и LM_{nm} — собственные моды ПВТЗ (по классификации [3]).

В табл. 1 приведены значения ζ для различных волн ПВТЗ. В последнем столбце таблицы указаны соответствующие моды ЭДНПЛ (рис. 3 и 4), переходящие при $d \rightarrow 0$ в те или иные моды ПВТЗ. Мы обнаруживаем, что волны LE_{02} , LE_{04} , LE_{12} , LM_{11} , LM_{13} и LM_{21} обладают на 3 порядка меньшими ζ , чем все остальные распространяющиеся моды ПВТЗ. Характеристики соответствующих экранных волн ЭДНПЛ свидетельствуют об их не критичности по отношению к введению металлических полосок.

В заключение необходимо отметить, что метод почти полного обращения оператора применим к анализу ЭДНПЛ вне зависимости от справедливости соотношений (1), (2). В общем случае придется лишь решать систему из четырех интегральных уравнений второго рода. Что же касается алгоритма понижения порядка системы интегральных уравнений, то он может быть использован при расчете других направляющих структур, поперечные сечения которых инвариантны относительно поворота на 180° . В частности, анализ TS- и LS-волн экранированной несимметричной двухщелевой линии передачи проводился в работе [4], где, однако, основное внимание было уделено описанию метода почти полного обращения оператора.

Т а б л и ц а 1

Мода ПВТЗ	γa	ζ	Мода ЭДНПЛ
LE_{01}	6,92816	4,57673	TS2
LM_{11}	5,47218	$2,29021 \cdot 10^{-3}$	TS3
LE_{03}	4,76969	3,97181	TS4
LM_{13}	4,49474	$2,41877 \cdot 10^{-3}$	TS5
LE_{12}	4,44304	$2,83416 \cdot 10^{-3}$	TS6
LE_{21}	2,91906	4,57673	TS7
LE_{11}	6,17493	4,57673	LS2
LE_{02}	5,44153	$2,83416 \cdot 10^{-3}$	LS3
LM_{12}	5,24187	3,52969	LS4
LE_{13}	3,58892	3,97181	LS5
LM_{14}	3,21112	3,52680	LS6
LM_{21}	0,57958	$2,29021 \cdot 10^{-3}$	LS7
LE_{04}	0,07480	$2,83816 \cdot 10^{-3}$	LS8

ЛИТЕРАТУРА

- Неганов В. А., Нефедов Е. И., Яровой Г. П. Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневых частот. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1996. — 304 с.
- Арефьев А. С., Неганов В. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 8. С. 1008.
- Егоров Ю. В. Частично заполненные прямоугольные волноводы. — М.: Сов. радио, 1967. — 216 с.

4. Арефьев А. С., Неганов В. А., Нефедов Е. И. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 4. С. 507.

Поволжская государственная
академия телекоммуникаций
и информатики, г. Самара, Россия

Поступила в редакцию
25 января 1999 г.

EIGENWAVES OF A SHIELDED TWO-SIDE ASYMMETRIC STRIP LINE

A. S. Aref'ev, V. A. Neganov

We analyze eigenwaves of a shielded two-side asymmetric strip line using the method of almost-complete operator inversion. The example of the considered waveguiding structure allows us to point out the algorithm of the order reduction of the integral-equation systems describing transmission lines with cross-sections that are invariant with respect to rotation by the angle of 180° .

УДК 537.533.7,537.86:539.12

РЕЖИМЫ И СПЕКТРЫ ЧЕРЕНКОВСКОЙ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАЗМЕ

М. В. Кузелев, О. В. Лазутченко, А. А. Рухадзе

Исследована нелинейная эволюция произвольного начального возмущения при развитии черенковской пучковой неустойчивости в замагниченной поперечно-ограниченной пучково-плазменной системе. Рассмотрены одночастичный, коллективный и аperiodический режимы данной неустойчивости. Для случаев квазимонохроматического, импульсного и шумового начальных возмущений рассчитаны нелинейные пространственные спектры волн, возбуждаемых на разных этапах развития пучковой неустойчивости в плазме. Рассмотрены формирование и разрушение регулярных структур в пучке и в плазме на развитой нелинейной стадии процесса. Обнаружено, что нелинейность плазмы приводит к перекачке энергии возмущений в коротковолновую область спектра. Показано, что шумовое начальное возмущение имеет при развитии пучковой неустойчивости тенденцию к монохроматизации, тогда как возмущение импульсного типа имеет тенденцию к сохранению своей формы. Исследован процесс трансформации монохроматических пространственных возмущений в процессе неустойчивости в квазимонохроматические плазменные волны.

1. Явление пучковой неустойчивости в плазме, впервые описанное в работах [1, 2], обычно трактуется как процесс вынужденного излучения электронным пучком собственных колебаний плазмы. Суть данной трактовки проста: плазма делает возможным существование волны с подходящим для взаимодействия с электронным пучком законом дисперсии, а пучок подпитывает эту волну энергией. Именно такая трактовка на долгое время определила подходы при теоретическом исследовании явления пучковой неустойчивости в плазме [3–9]. Она же сыграла положительную роль для становления и успешного развития нового научного направления — плазменной СВЧ электроники [10–14].

В работах [7–9] и в ряде других работ было показано, что электронный пучок, влияя на плазму, а не только на волну в плазме, меняет картину пучковой неустойчивости: неустойчивость может существовать, а пучок перестает излучать, либо излучает менее эффективно. Кроме того, еще в работах [1–3] отмечалось существование аperiodической неизлучательной пучковой неустойчивости в плазме, обусловленной известными эффектами типа отрицательной массы, отрицательной диэлектрической проницаемости и т. п. [15]. И наконец, чисто математически (хотя бы на уровне дисперсионного уравнения линейной теории) между пучковой неустойчивостью в плазме и известной двухпучковой (двухпотоковой) неустойчивостью [16] никакой разницы нет. Между тем, трактуя физический смысл двухпучковой неустойчивости, обычно не говорят о вынужденном излучении волн, так как мнимая часть частоты при этой неустойчивости может быть больше действительной части.

В настоящей работе пучковая неустойчивость в плазме рассматривается без каких-либо предварительных предположений типа линейности плазмы, малого изменения скорости электронов пучка, медленного изменения амплитуд плазменных волн и т. д. При таком подходе пучок и плазма входят в теорию равноправно, что позволяет автоматически описать вынужденное излучение, если оно есть, или исследовать какие-либо иные процессы. Единственным предположением является то, что пучок нерелятивистский, поскольку релятивистский случай имеет определенные особенности [17, 18] и ему целесообразно посвятить специальное исследование. Кроме того, именно в нерелятивистском случае можно без больших сложностей проиллюстрировать все основные режимы и особенности пучково-плазменного взаимодействия, связанного с вынужденным излучением волн плазмы и другими процессами.

2. Начнем с описания некоторой идеализированной, но близкой к исследуемой в экспериментах [13, 14] пучково-плазменной системы и сформулируем математическую модель, являющуюся основной для настоящей работы. Рассмотрим цилиндрический металлический волновод с произвольным односвязным поперечным сечением, в котором находятся бесконечно тонкие в поперечном сечении (“игольчатые”) электронный пучок и плазма. Волновод помещен в сильное продольное внешнее магнитное поле, препятствующее поперечным движениям электронов пучка и плазмы, при этом движение тяжелых ионов вообще не учитывается. Электронный пучок является нерелятивистским, а возбуждаемое таким пучком в плазме поле считается потенциальным.

Потенциальные (электростатические) возмущения в такой системе описываются следующими уравнениями [9]:

$$\begin{aligned} \left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi &= -4\pi e \sum_{\alpha} S_{\alpha} \delta(\vec{r}_{\perp} - \vec{r}_{\alpha}) n_{\alpha}, \\ n_{\alpha} &= \int f_{\alpha}(t, z, v) dv, \\ \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z} + \frac{e}{m} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь φ — скалярный потенциал, индекс α обозначает сорт частиц ($\alpha = p$ — электроны плазмы, $\alpha = b$ — электроны пучка), z — координата в продольном направлении волновода, \vec{r}_{\perp} — координата в поперечном сечении волновода, Δ_{\perp} — поперечная часть оператора Лапласа, v , e и m — соответственно скорость, заряд и масса электрона, n_{α} и f_{α} — соответственно плотность (здесь и далее под плотностью понимается объемная плотность) и функция распределения частиц сорта α , S_{α} — площадь поперечного сечения системы частиц сорта α , \vec{r}_{α} — средняя координата частиц сорта α в поперечном сечении волновода. Предполагаем, что в начальный момент времени функции распределения удовлетворяют условиям

$$f_{\alpha}(0, z, v) \equiv f_{0\alpha}(v) = n_{0\alpha} \delta(v - v_{0\alpha}). \quad (2)$$

Здесь $n_{0\alpha}$ и $v_{0\alpha}$ невозмущенные плотности и скорости частиц сорта α . В нашем случае для холодной покоящейся плазмы $v_{0p} = 0$, а для движущегося моноэнергетического пучка $v_{0b} = u$ (в (1) и (2) использованы обобщенные δ -функции Дирака).

В работе [19] показано, что в общем случае решение уравнения Власова для функции распределения f_{α} выражается в виде следующего интеграла по начальным данным характеристической системы уравнения Власова:

$$f_{\alpha}(t, z, v) = \iint dz_0 dv_{0\alpha} f_{0\alpha}(v_{0\alpha}) \delta(z - z_{\alpha}(t, z_0, v_{0\alpha})) \delta(v - v_{\alpha}(t, z_0, v_{0\alpha})). \quad (3)$$

Здесь $z_{\alpha}(t, z_0, v_{0\alpha})$ и $v_{\alpha}(t, z_0, v_{0\alpha})$ — решения характеристической системы

$$\frac{dz_{\alpha}}{dt} = v_{\alpha}, \quad \frac{dv_{\alpha}}{dt} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (4)$$

дополненной начальными условиями**

$$z_{\alpha}|_{t=0} = z_0, \quad v_{\alpha}|_{t=0} = v_{0\alpha}. \quad (5)$$

*В действительности имеют смысл погонные плотности $S_{\alpha} n_{0\alpha}$, измеряемые экспериментально ($n_{0\alpha}$ определены ниже).

**Мы пишем просто z_0 , а не $z_{0\alpha}$, поскольку распределение электронов пучка и плазмы по продольной координате для вывода основных уравнений несущественно.

В справедливости решения (3) нетрудно убедиться путем его подстановки в уравнение Власова с учетом свойств δ -функции и уравнений (4). Подставляя далее (3) в (1) и выполняя интегрирование по скоростям с учетом (2), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi' &= \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 S_{\alpha} \delta(\vec{r}_{\perp} - \vec{r}_{\alpha}) \int dz_0 \delta(z - z_{\alpha}(t, z_0, v_{0\alpha})), \\ \frac{dz_{\alpha}}{dt} &= v_{\alpha}, \quad \frac{dv_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}(t, z_{\alpha}, \vec{r}_{\alpha}), \\ z_{\alpha}|_{t=0} &= z_0, \quad v_{\alpha}|_{t=0} = v_{0\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\varphi' = -e\varphi/m$, $\omega_{\alpha} = \sqrt{4\pi e^2 n_{0\alpha}/m}$ — ленгмюровские частоты частиц сорта α .

Предположим, что начальное возмущение в рассматриваемой системе имеет характерный продольный размер (период) L . Тогда все возмущенные величины, в том числе и потенциал φ' , можно представить в виде

$$\varphi' = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n(\vec{r}_{\perp}, t) \exp(inkz) + \text{к. с.}), \quad (7)$$

где $k = 2\pi/L$ — основное продольное волновое число, к. с. — обозначает комплексно-сопряженное слагаемое. Подставляя (7) в (6) и используя ортогональность функций $\exp(inkz)$, получим следующие уравнения для коэффициентов разложения φ_n в (7):

$$(\Delta_{\perp} - n^2 k^2) \varphi_n = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 S_{\alpha} \delta(\vec{r}_{\perp} - \vec{r}_{\alpha}) \rho_{\alpha n}, \quad (8)$$

где $\rho_{\alpha n}$ — функции, определяемые формулами

$$\rho_{\alpha n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-iny_{\alpha}) dy_0, \quad (9)$$

где $y_{\alpha} = kz_{\alpha}$, $y_0 = kz_0$.

Предположим теперь, что известны собственные функции и собственные значения поперечного сечения волновода, то есть известны решения задачи

$$\Delta_{\perp} \phi_m = -k_{\perp m}^2 \phi_m, \quad \phi_m|_{\sigma=0} = 0, \quad (10)$$

где ϕ_m — собственная функция m -го порядка, $k_{\perp m}$ — соответствующее собственное значение, $m = 1, 2, \dots, \sigma = 0$ — уравнение металлической поверхности волновода. Используя разложение

$$\varphi_n = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{n,m}(t) \phi_m(\vec{r}_{\perp}), \quad (11)$$

получим из (8) следующие соотношения для величин $\tilde{\varphi}_{n,m}$:

$$\tilde{\varphi}_{n,m} = -\frac{1}{\|\phi_m\|^2 (k_{\perp m}^2 + n^2 k^2)} \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 S_{\alpha} \phi_m(\vec{r}_{\alpha}) \rho_{\alpha n}, \quad (12)$$

где $\|\phi_m\|^2 = \int d\vec{r}_{\perp} \phi_m^2(\vec{r}_{\perp})$. Теперь остается собрать вместе выражения (12), (11), (9), (7) и подставить (7) в уравнения движения электронов плазмы и пучка из системы (6). В результате придем к

следующим уравнениям [17, 20, 21]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_p}{d\tau^2} &= -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(a_{pn}\rho_{pn} + \nu q_{bn}\rho_{bn}) \exp(iny_p) - \text{к. с.}], \\ \frac{d^2 y_b}{d\tau^2} &= -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(q_{pn}\rho_{pn} + \nu a_{bn}\rho_{bn}) \exp(iny_b) - \text{к. с.}]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь использованы обозначения:

$$a_{\alpha n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^2 k^2 S_{\alpha} \phi_m^2(\vec{r}_{\alpha})}{\|\phi_m\|^2 (k_{\perp m}^2 + n^2 k^2)}, \quad q_{\alpha n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^2 k^2 S_{\alpha} \phi_m(\vec{r}_p) \phi_n(\vec{r}_b)}{\|\phi_m\|^2 (k_{\perp m}^2 + n^2 k^2)} \quad (14)$$

$\tau = \omega_p t$ — безразмерное время, а параметр ν определяется отношением плотностей пучка и плазмы

$$\nu = \omega_b^2 / \omega_p^2. \quad (15)$$

В обычных условиях параметр ν достаточно мал (порядка сотых), что справедливо и в настоящей работе. Конечно, при малых ν исключается из рассмотрения классическая двухпучковая неустойчивость (неустойчивость пучков со сравнимой плотностью), но зато это соответствует условиям экспериментальных исследований взаимодействия пучков с плазмой [10, 13, 14].

В уравнения (13) входят еще геометрические коэффициенты $a_{\alpha n}$ и $q_{\alpha n}$. В ряде случаев, например в случае волновода круглого поперечного сечения, эти величины вычисляются точно [22]. Мы не приводим здесь результатов соответствующих вычислений, т. к. для наших целей они не требуются. Физический смысл величин $a_{\alpha n}$ состоит в том, что они определяют дисперсию плазменных и пучковых волн. Коэффициенты $q_{\alpha n}$ определяют степень связи (взаимодействия) между плазменными и пучковыми волнами.

В настоящей работе, чтобы уменьшить число свободных параметров, будем считать $a_{pn} = a_{bn} \equiv a_n$ и $S_b = S_p$. При этом уравнения (13) могут быть переписаны в более симметричном виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_p}{d\tau^2} &= -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} [(\rho_{pn} + \nu q_n \rho_{bn}) \exp(iny_p) - \text{к. с.}], \\ \frac{d^2 y_b}{d\tau^2} &= -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} [(q_n \rho_{pn} + \nu \rho_{bn}) \exp(iny_b) - \text{к. с.}], \end{aligned} \quad (16)$$

а коэффициенты q_n легко вычислить по формулам (14). О конкретных значениях a_n и q_n будет сказано при обсуждении решений уравнений (16). Сейчас же отметим один важный факт [20, 22]: если $\vec{r}_b = \vec{r}_p$, то $q_n \equiv 1$, а при $\vec{r}_b \neq \vec{r}_p$ выполняется неравенство $0 < q_n < 1$.

Легко видеть, что уравнения (13) и (16) представляют собой обычные уравнения движения, в правые части которых входят поля, выраженные через заряды с помощью уравнения Пуассона. Как и любые уравнения движения, уравнения (13) и (16) должны быть дополнены начальными условиями на координаты и скорости электронов, в качестве которых выберем

$$y_p(0) = y_0, \quad \dot{y}_p(0) = 0, \quad y_b(0) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(ny_0 + \zeta_n), \quad \dot{y}_b(0) = \frac{ku}{\omega_p} \equiv \Delta. \quad (17)$$

Первое условие в (17) означает, что электроны плазмы в начальный момент времени равномерно распределены в пространстве, второе условие означает, что начальная скорость электронов плазмы равна нулю. Третье условие в (17) означает, что пучок промодулирован по плотности: глубина модуляции на

n -й гармонике пропорциональна b_n ($|b_n| \ll 1$), а ζ_n — некоторые фазы. И наконец, последнее условие в соотношениях (17) означает, что в начальном состоянии все электроны пучка имеют скорость u , в чем легко убедиться из определений безразмерных величин y_b и τ .

Мы будем рассматривать три варианта начальных условий (17). Эти варианты отличаются различным заданием амплитуд b_n и фаз ζ_n . Первый вариант соответствует задаче об эволюции пространственно квазимонохроматического начального возмущения. При этом в сумме по n , входящей в третье условие (17), отлично от нуля малое число (несколько единиц) соседних слагаемых или даже только одно такое слагаемое. Вторым вариантом соответствует задаче об эволюции немонохроматического регулярного начального возмущения. В этом случае в сумме по n отлично от нуля большое число (несколько десятков) слагаемых, но все фазы ζ_n одинаковы, например, равны нулю. Такое начальное возмущение имеет форму пространственного импульса. Например, если в сумме отличны от нуля S_{\max} первых слагаемых и все амплитуды b_n одинаковы, то форма импульса имеет вид

$$\operatorname{Re} \left(\sum_n^{S_{\max}} \exp(iny) \right) = \frac{\sin(S_{\max}y/2)}{\sin(y/2)}. \quad (18)$$

Наконец, третий вариант соответствует шумовому начальному возмущению. При этом в сумме по n содержится большое число слагаемых, но фазы ζ_n являются случайными числами из диапазона от 0 до 2π .

Получим первые интегралы уравнений (16). Проинтегрируем каждое из уравнений (16) по y_0 от нуля до 2π , умножим второе уравнение на ν и сложим с первым. В результате получим закон сохранения импульса

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \dot{y}_p dy_0 + \nu \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \dot{y}_b dy_0 = \text{const}. \quad (19)$$

Первое слагаемое в (19) есть импульс электронов плазмы, второе слагаемое — импульс электронов пучка. Поскольку рассматриваемые возмущения потенциальны, в закон сохранения импульса не входят импульсы электромагнитных полей (в случае потенциальных возмущений они просто равны нулю).

Несколько более сложно, но в принципе аналогично получается закон сохранения энергии

$$P_p + P_b + P_{bp} = \text{const}. \quad (20)$$

Здесь

$$P_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \dot{y}_p dy_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} |\rho_{pn}|^2 \quad (21)$$

— плотность энергии возмущений в плазме,

$$P_b = \nu \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \dot{y}_b dy_0 + \nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} |\rho_{bn}|^2 \quad (22)$$

— плотность энергии возмущений в пучке,

$$P_{bp} = \nu \sum_{n=1}^{\infty} q_n (\rho_{bn} \rho_{pn}^* + \rho_{bn}^* \rho_{pn}) \quad (23)$$

— плотность энергии электростатического взаимодействия плазмы и пучка. Сохранение интегралов (19) и (20) тщательно контролировалось при численном решении уравнений (15).

Еще раз отметим, что приведенные уравнения и соотношения являются точными в том смысле, что при их получении не использованы предположения о линейности плазмы, малом изменении скорости электронов пучка и медленности изменения амплитуд волн (при выводе уравнений (13) и (16) вообще не используются понятия о волнах). Полученные уравнения пригодны для исследования систем с плотными пучками, для изучения нелинейных эффектов в плазме, рассмотрения генерации гармоник, конкуренции мод и возбуждения в плазме колебаний в широком спектральном интервале. Естественно, что из уравнений (13) или (16) следуют и известные упрощенные модели [5–9], на которых мы здесь останавливаться не будем.

3. Для лучшего уяснения смысла параметров и порядков величин рассмотрим линейное приближение. Как видно из начальных условий (17), решения уравнений (16) можно представить в виде

$$y_p = y_0 + \tilde{y}_p, \quad y_b = y_0 + \Delta\tau + \tilde{y}_b \quad (24)$$

и линеаризовать соотношения (16) и (9) по величинам $\tilde{y}_{p,b}$. Поскольку в линейном приближении гармоники с различными номерами n не взаимодействуют, в линеаризованных уравнениях достаточно учесть одну гармонику с каким-либо произвольным номером n . В результате линеаризации приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d^2 \rho_{pn}}{d\tau^2} + a_n \rho_{pn} = -q_n \nu a_n \rho_{bn} \exp(-in\Delta\tau), \quad \frac{d^2 \rho_{bn}}{d\tau^2} + \nu a_n \rho_{bn} = -q_n a_n \rho_{pn} \exp(in\Delta\tau). \quad (25)$$

Первое уравнение здесь описывает колебания плазмы, возбуждаемые электронным пучком. Второе уравнение описывает колебания пучка, возбуждаемые плазмой. Одной из особенностей уравнений (25) является то, что в них плазма рассматривается в лабораторной системе отсчета, а пучок — в системе отсчета, движущейся со скоростью u . Эта особенность заложена уже в формулах (24), использованных при выводе (25).

Решение (25) ищем в виде

$$\rho_{pn} = c_p \exp(-i\delta_n \tau), \quad \rho_{bn} = c_b \exp(-i\delta_n \tau + in\Delta\tau), \quad (26)$$

где c_p и c_b — постоянные, δ_n — безразмерная частота n -й пространственной гармоники (размерная частота ω_n , очевидно, есть $\delta_n \omega_p$). Подставляя (26) в (25) и исключая постоянные, получим дисперсионное уравнение для определения безразмерной частоты:

$$(\delta_n^2 - a_n) \left((\delta_n - n\Delta)^2 - \nu a_n \right) = q_n^2 \nu a_n^2. \quad (27)$$

В размерных переменных уравнение (27) принимает обычный вид [8, 9] (для перехода к размерным переменным в (27) достаточно подставить явные выражения для Δ и ν):

$$(\omega_n^2 - a_n \omega_p^2) \left((\omega_n - nku)^2 - a_n \omega_b^2 \right) = q_n^2 a_n \omega_b^2 a_n \omega_p^2. \quad (28)$$

Из (27) следуют важные для дальнейшего рассмотрения резонансы. Спектры плазменной и медленной пучковой волн (о медленных и быстрых пучковых волнах см. [23]) определяются соответственно соотношениями

$$\delta_n = \sqrt{a_n} \equiv \delta_n^p, \quad \delta_n = n\Delta - \sqrt{\nu a_n} \equiv \delta_n^b. \quad (29)$$

Совпадение частот плазменной и пучковой волн $\delta_n^p = \delta_n^b$ определяет резонанс волна–волна, или, как еще говорят, коллективный резонанс. Номер волн, находящихся в коллективном резонансе, определяется из уравнения

$$n\Delta = \sqrt{a_n} (1 + \nu^{1/2}). \quad (30)$$

Если подставить в (30) явное выражение для a_n , то получим явное выражение для номера волн, на которых реализуется коллективный резонанс. Соответствующие значения для номеров волн будут приведены при обсуждении результатов численных расчетов. При $a_n = 1$ номер резонансных волн определяется выражением $n = (1 + \nu^{1/2})\Delta^{-1}$ (точнее, ближайшим к значению этого выражения целым числом).

Совпадение частоты плазменной волны с частотой nku , что в безразмерной форме записывается в виде $\delta_n^p = n\Delta$, определяет резонанс волна—частица, или одночастичный резонанс. Номер плазменной волны, находящейся в одночастичном резонансе, отличается от (30) отсутствием слагаемого $\nu^{1/2}$ и при $a_n = 1$ определяется выражением $n = \Delta^{-1}$. Коллективный и одночастичный резонансы являются частными случаями черенковского резонанса, возникающего при близости скорости излучающей частицы к фазовой скорости излучаемой волны.

Рассмотрим линейные инкременты нарастания резонансных волн. Для этого разложим уравнение (27) в окрестности резонанса волна—волна. Представим частоту в виде

$$\delta_n = \delta_n^p + \tilde{\delta}_n = \delta_n^b + \tilde{\delta}_n,$$

где $\tilde{\delta}_n$ — безразмерный комплексный инкремент нарастания n -й волны. При выполнении неравенства

$$|\tilde{\delta}_n| \ll \delta_n^p = \sqrt{a_n}, \quad (31)$$

которое сводится к принятому нами условию малости ν , дисперсионное уравнение (27) преобразуется к виду

$$2\sqrt{a_n}\tilde{\delta}_n(2\sqrt{\nu a_n}\tilde{\delta}_n - \tilde{\delta}_n^2) = -q_n^2\nu a_n^2. \quad (32)$$

Решая уравнение (32), следует различать два случая: случай, когда

$$|\tilde{\delta}_n| \gg \sqrt{\nu a_n}, \quad (33)$$

и противоположный. Смысл неравенства (33), как это видно из второго выражения (29), состоит в том, что инкремент больше частоты пучковой волны в движущейся с пучком системе отсчета. В случае (33) коллективный и одночастичный резонансы перекрываются и инкремент определяется выражением

$$\tilde{\delta}_n = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} q_n^2 \nu a_n^{3/2} \right)^{1/3}, \quad (34)$$

а неравенство (33) сводится к

$$\nu^{1/4} \ll q_n. \quad (35)$$

Неустойчивость с инкрементом (34) называют одночастичным эффектом Черенкова.

Весьма характерен вид дисперсионных кривых волн в системе, в которой выполнено неравенство (35). На рис. 1а построены дисперсионные кривые для системы с параметрами $\Delta = 0,1$, $\nu = 10^{-2}$, $q_n = 1$. По вертикальной оси отложена безразмерная частота (в единицах ω_p), по горизонтальной — волновое число, выраженное в единицах $k = 2\pi/L$. Вертикальными линиями показан возможный дискретный набор возбуждаемых волн. Видно, что неустойчивы волны с номерами n от 1 до 13. Максимальный инкремент имеет волна с номером 10 или 11. Этот инкремент определяется формулой (34) и составляет $0,15\omega_p$.

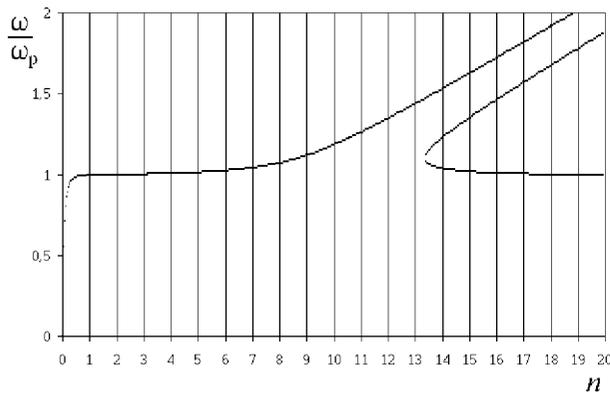


Рис. 1а.

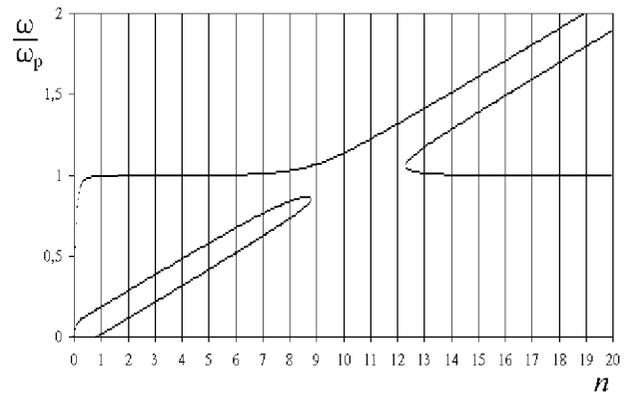


Рис. 1б.

При выполнении обратного (35) неравенства коллективный и одночастичный резонансы не перекрываются и инкремент определяется иным выражением:

$$\tilde{\delta}_n = i \frac{1}{2} q_n \nu^{1/4} a_n^{1/2}. \quad (36)$$

Неустойчивость с инкрементом (36) называют коллективным эффектом Черенкова. Дисперсионные кривые для случая, когда нарушено неравенство (35), представлены на рис. 1б. Параметры системы выбраны те же, что и для рис. 1а, только $q_n = 0,5$. Видно, что картина кардинально изменилась: неустойчивы теперь только волны с номерами 9, 10, 11, 12. Максимум инкремента приходится на волну с номером $n = 11$ и составляет приблизительно $0,08\omega_p$. Отметим, что в случаях, изображенных на рис. 1а и рис. 1б, неравенство (35) и обратное ему при выбранных параметрах не являются сильными. Случаи сильных неравенств легко исследовать аналитически, но сложно изобразить на графике. Тем не менее, как видно из рисунков, и при несильных неравенствах эффект смены режима оказывается сильным.

Упомянем еще о нерезонансной аperiodической неустойчивости, связанной с отрицательностью диэлектрической проницаемости плазмы в области низких частот. Нерезонансная неустойчивость развивается в области малых волновых чисел (малые номера n). Как видно из приведенных выше рисунков, моды с малыми n неустойчивы только при q_n , близких к единице. Поэтому ограничимся случаем $q_n = 1$, в котором при выполнении неравенства $n\Delta \ll \sqrt{a_n}$ из дисперсионного уравнения (27) получаем выражение для частоты

$$\delta_n = n\Delta + in\Delta\nu^{1/2}. \quad (37)$$

Мнимая часть (37) и есть искомый инкремент аperiodической нерезонансной неустойчивости. С этим инкрементом нарастают моды с малыми номерами ($n \ll 10$, см. рис. 1а). Для параметров, выбранных при построении дисперсионных кривых на рис. 1а, инкремент равен $0,01n\omega_p$. Это достаточно малая величина. Ниже будет показано, что реально нерезонансная неустойчивость проявляется слабо. Отметим, что в отличие от неустойчивостей в коллективном и одночастичном режимах, связанных с излучением плазменных волн, аperiodическая нерезонансная неустойчивость является неизлучательной [8, 15].

4. Рассмотрим теперь результаты численного решения уравнений (16). Для численного решения большое значение имеет выбор геометрических коэффициентов a_n и q_n . Как следует из работ [20, 22], структура коэффициентов a_n правильно передается формулой $a_n = n^2 / ((kR)^{-2} + n^2)$, где R по порядку величины соответствует поперечному размеру плазменно-пучковой системы. В настоящей работе мы рассмотрим коротковолновую пучковую неустойчивость, при которой $kR \gg 1$ и все a_n порядка

единицы (в конкретных расчетах, в том числе и при построении рис. 1, полагалось $kR = 10$). В противоположном, длинноволновом пределе для не очень больших n имеем $a_n \propto n^2$. Этот случай, сильно отличающийся от коротковолнового, рассматривался в работах [9, 24]. С коэффициентами q_n ситуация еще проще: рассматривая одночастичный эффект Черенкова, полагаем $q_n = 1$, а при коллективном эффекте считаем, что $q_n = 1/2$ (см. рис. 1б и параметры, при которых он построен). Положим также $\nu = 10^{-2}$, что соответствует условиям экспериментов [13, 14]. Тогда из существенных параметров свободным остается только Δ , входящий в начальные условия (17). Этот параметр определяет, как видно из (30), номер резонансной моды. Удобнее определять Δ , задавая номер моды n , при этом целесообразно учитывать, что при одночастичном эффекте Черенкова одночастичный и коллективный резонансы перекрываются, а при коллективном эффекте Черенкова основным является именно резонанс коллективный, т. е. независимо от типа резонанса Δ можно определять из условия (30).

Начнем рассмотрение численных решений с одночастичного эффекта Черенкова при резонансе пучка с первой ($n = 1$) пространственной гармоникой плазменных колебаний, для чего положим в (16) $q_n = 1$ и $\Delta = 1,0945$. В суммах по n в уравнениях (16) и условиях (17) пока оставим только первые пять слагаемых, что соответствует задаче об эволюции пространственно квазимонохроматического начального возмущения. Основным, конечно, является первое, резонансное слагаемое, а члены с $n = 2 \div 5$ могут стать существенными в процессе развития неустойчивости из-за нелинейной генерации гармоник.

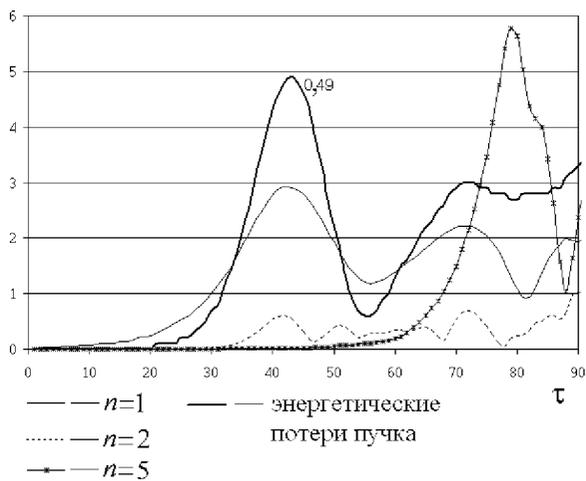


Рис. 2.

На рис. 2 изображены временная динамика безразмерных амплитуд ρ_{pn} первой, второй и пятой гармоник возмущения плотности электронов плазмы и динамика относительных энергетических потерь пучка. Для получения абсолютных значений следует представленные на рис. 2 амплитуды гармоник плотности умножить на $n_{0p}(\nu/2)^{2/3} \approx 3 \cdot 10^{-2} n_{0p}$, а зависимость для энергетических потерь разделить на десять. На рисунке показано максимальное значение энергетических потерь, достигающее приблизительно половины от первоначальной энергии пучка. Приведенные на рис. 2 зависимости в основном соответствуют общепринятой теории, описывающей стабилизацию неустойчивости пучка в плазме при одночастичном эффекте Черенкова за счет захвата электронов пучка плазменной

волной [4–6]. Однако в традиционной теории плазма считается линейной. В настоящей же работе это предположение не делается, что приводит к важным последствиям. Прежде чем их рассмотреть, напомним основные положения теории захвата [4–6].

Насыщение пучковой неустойчивости при одночастичном эффекте Черенкова обусловлено разбиением пучка на сгустки, торможением сгустков до скорости равной фазовой скорости резонансной гармоники плазменной волны и захватом сгустков в потенциальных ямах поля этой гармоники. Окончание первого торможения сгустков и есть момент насыщения неустойчивости и стабилизации роста амплитуды резонансной гармоники плазменной волны. В дальнейшем захваченные сгустки совершают колебания в потенциальных ямах, то ускоряясь, то тормозясь. Амплитуда резонансной гармоники и энергетические потери также совершают колебания, уменьшаясь при ускорении сгустка и увеличиваясь при его торможении. При этом плазма остается линейной, а амплитуда резонансной гармоники

плазменной волны подавляюще превосходит амплитуды других гармоник.*

Из рис. 2 видно, что до момента $\tau \approx 60$ все происходит так, как сказано выше. Но на более поздней стадии наблюдается значительное нарастание амплитуд высших гармоник (например пятая гармоника на рис. 2). Это говорит о том, что имеется механизм перекачки энергии плазменных колебаний из области резонансных длин волн в более коротковолновую область. Механизм этот тесно связан с нелинейностью электронов плазмы. Если в системе (16) линеаризовать уравнения движения электронов плазмы, то нарастание высших гармоник в численных расчетах наблюдаться не будет. Понятно, что для корректного описания перекачки энергии по спектру, особенно на больших временах, недостаточно учета в численных расчетах пусть большого, но конечного числа гармоник — необходим учет диссипации энергии плазменных колебаний в коротковолновой области спектра. В дальнейшем обсуждается один из механизмов такой диссипации.

Поведение электронов плазмы и пучка на стадии возбуждения высших гармоник плазменных колебаний иллюстрируется на рис. 3. На нем для момента времени $\tau \approx 80$ представлены фазовые плоскости электронов: нижняя группа точек представляет электроны плазмы, верхняя — электроны пучка. По горизонтали отложены пространственные координаты электронов, а по вертикали их скорости. Нижняя горизонтальная пунктирная линия соответствует нулевой скорости, верхняя пунктирная линия соответствует скорости u . Видно, что модуляция электронов плазмы происходит на двух пространственных масштабах, при этом особенно хорошо заметна модуляция по скорости. Крупномасштабная (длинноволновая) модуляция обусловлена возбуждением резонансной гармоники плазменной волны. Это обычная при пучковой неустойчивости модуляция, имеющаяся на любом этапе развития неустойчивости. Однако на фоне обычной модуляции образовалась и существенно более мелкомасштабная структура, с которой и связано возбуждение высших гармоник плотности плазмы.

Расчеты также показывают, что модуляция электронов плазмы на всех пространственных масштабах и на всех этапах неустойчивости невелика. Так, из рис. 3 видно, что возмущения скорости электронов плазмы по абсолютной величине на порядок меньше начальной скорости пучка u , а относительные возмущения плотности плазмы (см. выше) порядка $(\nu/2)^{2/3} \ll 1$. Электронный же пучок модулируется полностью. Из рис. 3 видно, что возмущения скорости электронов пучка достигают половины невозмущенной скорости, а расчеты показывают, что на нелинейной стадии все $|\rho_{bn}|$ порядка единицы. Следовательно, насыщение неустойчивости в основном определяется сильными нелинейностями в пучке, а более слабые нелинейности плазмы сказываются только на поздней стадии в виде процесса перекачки энергии колебаний в коротковолновую область спектра.

Рассмотрим теперь вопрос о частотном (или временном) спектре возбуждаемых плазменных колебаний. Это важный вопрос, поскольку в уравнениях (16), не использующих традиционный для плазменной СВЧ электроники метод медленных амплитуд, вообще не используются понятия "частота" и "волна". Введем функции

$$\tilde{\rho}_{pn}(\Omega) = \left| \int_0^{\tau} \rho_{pn} \exp(i\Omega\tau') d\tau' \right|, \quad (38)$$

где $\Omega = \omega/\omega_p$ — безразмерная частота, определяющие спектральную плотность пространственных гармоник плазменных колебаний. На рис. 4 представлены спектральные плотности (38) для первой, второй и пятой гармоник плазменных колебаний в момент времени $\tau \approx 80$, соответствующий рис. 3. Номера пространственных гармоник указаны на рис. 4 рядом с соответствующими кривыми. Видно, что спектр первой пространственной гармоники весьма узок и имеет резкий максимум при $\Omega = 1$, что соответствует принятому в работе закону дисперсии $\omega \approx \omega_p$. Таким образом, представление о первой пространственной гармонике как о резонансно возбуждаемой пучком плазменной волне с медленной

*Сказанное, конечно, верно только при $\nu \ll 1$.

амплитудой является в целом верным. Однако в спектре первой гармоники присутствуют еще два заметных максимума, которые не описываются в терминах медленных амплитуд. Появление дополнительных максимумов в спектре резонансной гармоники является следствием известной спутной неустойчивости [25, 26].

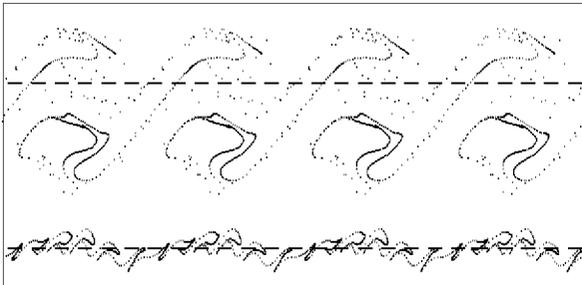


Рис. 3.

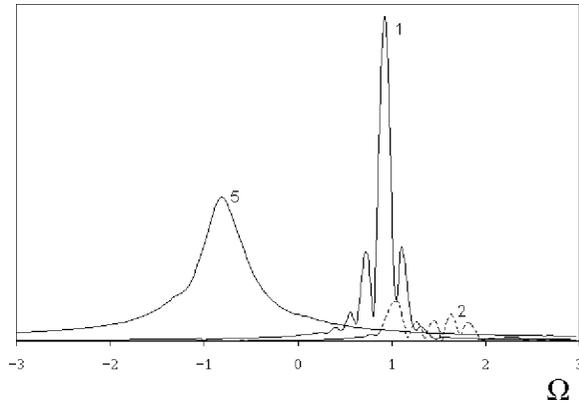


Рис. 4.

Из рис. 4 видно, что и вторая, существенно менее интенсивная по сравнению с резонансной пространственной гармоникой также имеет максимум в районе плазменной частоты ($\Omega \approx 1$). Это свидетельствует о нелинейности плазмы. Действительно, если плазма линейна, то вторая гармоника обусловлена лишь нелинейностью пучка. Тогда частота второй гармоники в размерных переменных должна быть порядка $2ku$, или в безразмерных — порядка $2ku/\omega_p = 2\Delta$, что для выбранного Δ приблизительно равно 2. Следовательно, максимум при $\Omega \approx 1$ в спектре второй пространственной гармоники обусловлен нелинейностью плазменной волны. Другие же максимумы обусловлены нелинейностью пучка.

Но наиболее примечателен спектр пятой пространственной гармоники. Как видно из рис. 4, максимум ее спектральной плотности приходится на отрицательную частоту $\Omega \approx -1$, что соответствует условию $\omega = -\omega_p$. Из выражения (7) легко установить, что пространственной гармонике с таким спектром соответствует плазменная волна с фазовой скоростью равной $(-1) \cdot \omega_p/5k$. Эта волна распространяется навстречу пучку. И вообще, на каждом этапе в спектре плазменных волн имеется составляющая с фазовой скоростью $(-1) \cdot \omega_p/nk$, где n — номер пространственной гармоники, имеющий тенденцию к увеличению. Попытаемся пояснить возникновение этих составляющих.

Рассмотрим наряду с резонансной плазменной волной

$$E_{рез} = A_0 \exp(-i\omega_p t + ikz) + \text{к. с.}, \tag{39}$$

волну вида

$$E_n = A_n \exp(-i\omega_n t + inkz) + \text{к. с.}, \tag{40}$$

где $n = 1, 2, \dots$, $E_{рез}$ и E_n — продольные составляющие электрических полей волн, ω_n — некоторая частота. В нелинейной силе, действующей на электроны плазмы, есть составляющая, пропорциональная $E_n E_{рез}$, т. е.

$$A_0 A_n \exp(-i(\omega_p + \omega_n)t + i(n + 1)kz) + \text{к. с.} \tag{41}$$

и

$$A_0 A_n^* \exp(-i(\omega_p - \omega_n)t + i(n - 1)kz) + \text{к. с.} \tag{42}$$

Часть нелинейной силы (41) является гармоникой более высокого порядка, чем (40). Часть силы (42), как гармоника более низкого порядка, интереса не представляет. Значительное взаимодействие между волнами (39) и (40) возможно, если сила (41) находится в резонансе либо

с какой-нибудь третьей волной, либо с электронами плазмы. Так как подходящей третьей волны нет, а электроны плазмы имеют скорость близкую к нулю (точнее, как это видно из рис. 3, $|v_p| \ll u$), то резонансное взаимодействие волн (39) и (40) возможно, если в выражениях (40) и (41) $\omega_n \approx -\omega_p$, при этом (40), как и (39), будет собственной плазменной волной. Следовательно, перекачка энергии плазменных колебаний в коротковолновую часть спектра обусловлена индуцированным рассеянием плазменных волн на медленных электронах плазмы.

Чтобы закончить с вопросом об эволюции квазимонохроматического возмущения при одночастичном эффекте Черенкова, рассмотрим случаи, когда в резонансе с пучком находятся вторая и третья гармоники начального возмущения. Ограничимся анализом частотных спектров первой, второй и третьей пространственных гармоник.

На рис. 5 изображены частотные спектры (38) вблизи момента насыщения ($\tau \approx 45$) для случая, когда резонансной является вторая гармоника (при резонансе на второй гармонике $\Delta = 0,5495$). Момент насыщения определяется по резонансной гармонике. Видна доминирующая роль резонансной второй пространственной гармоники, имеющей максимум спектральной плотности на плазменной частоте. Первая же гармоника возникает за счет нерезонансной аperiodической неустойчивости, которая значительно слабее неустойчивости на второй гармонике. Как следует из (34), для резонансной второй гармоники инкремент $\text{Im } \delta_2 = 0,16$, а для первой гармоники, как видно из (37), инкремент $\text{Im } \delta_1$ существенно меньше и составляет 0,05. Кроме того, из (37) видно, что действительная часть частоты первой гармоники примерно вдвое меньше плазменной, что полностью согласуется со спектрами, приведенными на рис. 5. Третья гармоника в рассматриваемом случае очень мала и поэтому на рисунке не приводится.

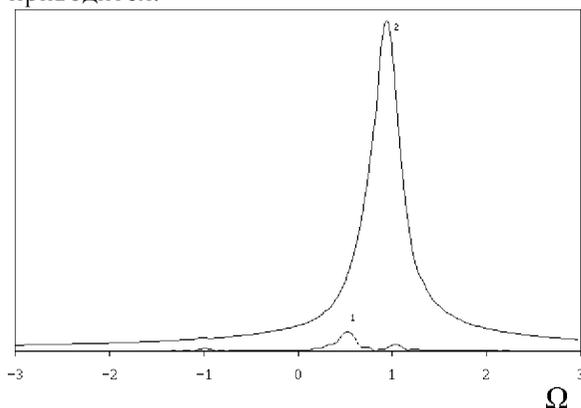


Рис. 5.

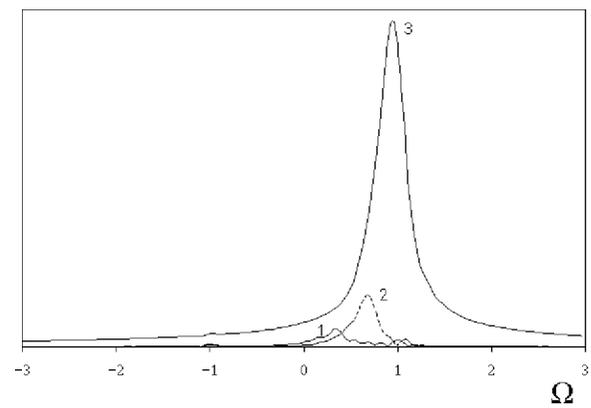


Рис. 6.

На рис. 6 изображены спектральные плотности (38) при $\tau \approx 45$ для случая, когда резонансной является третья гармоника ($\Delta = 0,3665$). Опять видно доминирование резонансной третьей гармоники по сравнению с первой и второй гармониками, возникшими за счет аperiodической неустойчивости. Из рис. 6 видно, что частота первой гармоники равна примерно $1/3$ плазменной частоты, а частота второй — примерно $2/3$ плазменной частоты. Это же следует и из формулы (37).

Рассмотрим теперь неустойчивость квазимонохроматического начального возмущения при коллективном эффекте Черенкова. Зададим параметры такими же, как и при исследовании одночастичного режима при резонансе на первой пространственной гармонике, но положим $q_n = 0,5$. На рис. 7 изображено то же, что и на рис. 2, но уже при коллективном эффекте. Видно, что в целом сохранились прежние закономерности. Отметим уменьшение по сравнению с одночастичным случаем максимальных амплитуд пространственных гармоник и энергетических потерь (до 0,35), а также увеличение времени насыщения неустойчивости и исчезновение регулярных осцилляций амплитуды первой гармоники на стадии после насыщения. Связано это с уменьшением инкремента неустойчивости и с изменением

механизма ее нелинейной стабилизации. На рис. 8 в тех же обозначениях, что и на рис. 3, изображены фазовые плоскости электронов пучка и электронов плазмы к моменту насыщения неустойчивости ($\tau \approx 75$). Видно, что плазма еще практически линейна, а насыщение, как и при одночастичном эффекте, обусловлено нелинейностью электронов пучка. В частности, на каждом периоде первой пространственной гармоники имеется группа отраженных электронов (на рис. 8 одна из таких групп помечена символом "O"). Электроны отражаются от "горбов" потенциала ленгмюровской волны самого пучка, т. е. при коллективном эффекте Черенкова электроны пучка захватываются пучковой волной. В [8, 9] такое явление названо самозахватом. Напомним, что при одночастичном эффекте электроны пучка также захватываются, но не пучковой волной, а ленгмюровской волной плазмы. Поэтому при одночастичном эффекте такие группы отраженных электронов, как на рис. 8, отсутствуют. При захвате электронов пучковой волной разрушается и сама волна, что приводит к быстрой последующей хаотизации электронного пучка и исчезновению регулярных осцилляций амплитуды резонансной гармоники.

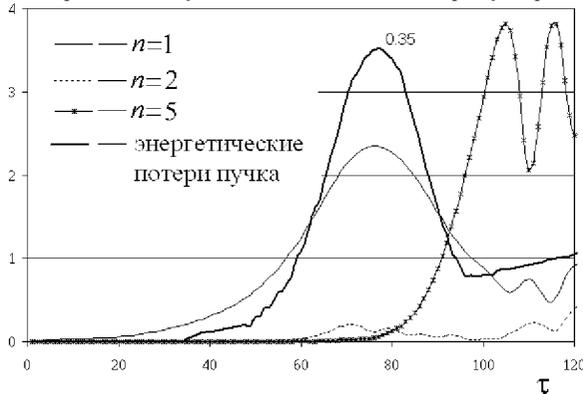


Рис. 7.

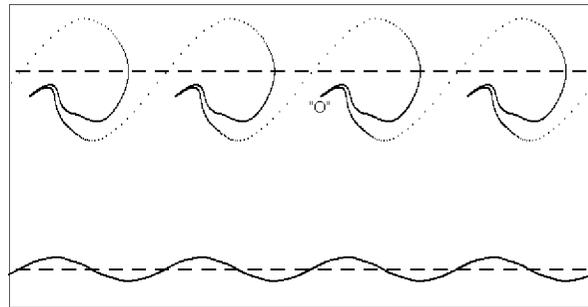


Рис. 8.

Итак, расчеты показывают, что существует механизм перекачки энергии плазменных колебаний, возбуждаемых электронным пучком, в коротковолновую часть спектра. Поскольку этот механизм обусловлен нелинейностью плазмы, то проявляется он приблизительно одинаково как в одночастичном, так и в коллективном режимах. Но если есть механизм перекачки энергии в коротковолновую часть спектра и нет механизма поглощения энергии в этой области спектра, то энергия должна аккумулироваться около наивысшей из учтенных гармоник, что и подтверждается численными расчетами. Конечно, зависимость спектра от числа учитываемых гармоник не является физическим эффектом и свидетельствует о недостатках используемой модели, в которой необходим учет поглощения энергии в коротковолновой области спектра. Физическим механизмом такого поглощения может быть затухание Ландау [27], которое именно в коротковолновой части спектра велико [28]. Можно дать следующую оценку для максимального номера присутствующей в спектре пространственной гармоники:

$$n_{\max} = \frac{u}{\max\{V_{Te}, V_{bp}\}}, \tag{43}$$

где V_{Te} — тепловая скорость электронов плазмы, а V_{bp} — разброс по скоростям электронов плазмы, возникший в результате развития неустойчивости. В настоящей работе тепловая скорость равна нулю, поэтому оценим V_{bp} .

Из уравнения непрерывности для электронов плазмы имеем

$$V_{bp} \approx \frac{\omega_p}{k} |\tilde{n}/n_{0p}|, \tag{44}$$

где \tilde{n} — возмущение плотности электронов плазмы. Но по определению безразмерных гармоник плотности $|\tilde{n}/n_{0p}| \approx |\rho_{p1}| \approx (\nu/2)^{2/3}$. Последнее приближенное равенство уже фигурировало ранее при

пояснениях к рис. 2. Таким образом, получаем оценку: $n_{\max} \approx (\nu/2)^{-2/3}$. При принятом в работе значении параметра ν это достаточно большая величина, приблизительно равная 22. Значит, затухание Ландау могло бы проявиться только на очень больших временах, когда начали бы возбуждаться гармоники с номерами выше 20. Столь поздние стадии процесса в настоящей работе не рассматривались.

5. Рассмотрим теперь эволюцию начального возмущения, не являющегося монохроматическим. Оставим в суммах по n в уравнениях (16) и начальных условиях (17) пятьдесят первых слагаемых. Коэффициенты b_n , определяющие начальную модуляцию пучка, положим равными 0,05. Выберем также безразмерную скорость электронов пучка $\Delta = 0,055$, а геометрические параметры a_n оставим прежними. При этом из условия (30) следует, что резонансной с пучком оказывается примерно двадцатая пространственная гармоника плазменных колебаний.

Начнем с одночастичного эффекта Черенкова, который реализуется, если все $q_n = 1$. При выбранном Δ в одночастичном режиме неустойчивыми оказываются пространственные гармоники с номерами от 1 до 26 включительно (резонансно неустойчива, как уже говорилось выше, 20-я гармоника).

На рис. 9 представлены зависимости энергетических потерь пучка относительно его начальной энергии от безразмерного времени τ . Здесь различаются два случая, соответствующие импульсной и шумовой начальной модуляции электронного пучка. Начнем с рассмотрения случая импульсной модуляции.

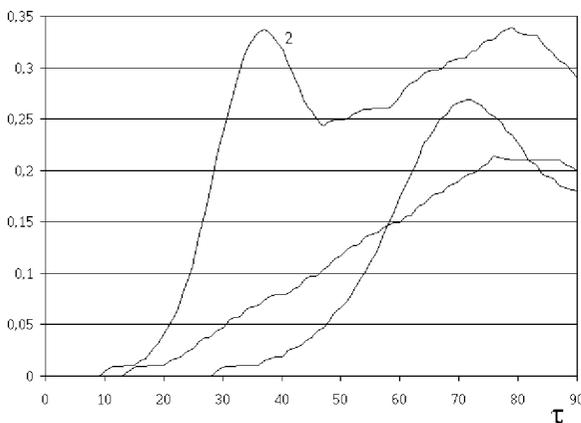


Рис. 9.

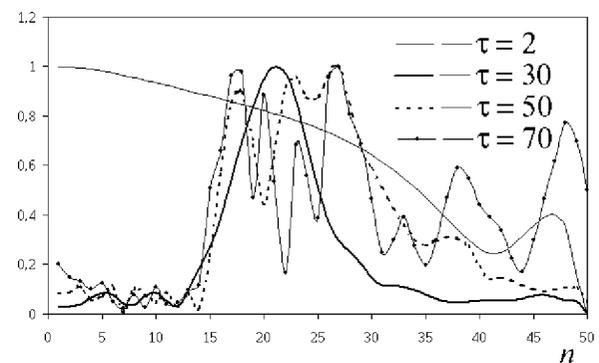


Рис. 10.

При импульсной начальной модуляции фазы ζ_n в начальных условиях (17) постоянны (например равны нулю). При этом в момент $\tau = 0$ плотность электронного пучка представляет собой однородный фон, на котором последовательно расположены компактные слабые возмущения. В безразмерных единицах расстояние между возмущениями равно 2π , а пространственный размер возмущения имеет порядок $2\pi/S_{\max} = 2\pi/50$ (см. (18) и фазовую плоскость электронов пучка при $\tau = 2$ на рис. 11а). Энергетические потери электронного пучка для случая импульсной начальной модуляции представлены на рис. 9 кривой 1. Характер этой кривой существенно отличается от соответствующей зависимости для квазимонохроматического начального возмущения, представленной на рис. 2. При импульсной начальной модуляции потери растут медленно, не по экспоненте и выходят на почти постоянное значение, приблизительно равное 0,22. На рис. 10 для нескольких моментов времени представлены пространственные спектры возмущения плотности плазмы (спектры нормированы на соответствующие максимальные амплитуды, по горизонтали отложен номер пространственной гармоники). На начальном этапе ($\tau = 2$) спектр почти однороден и соответствует импульсной модуляции пучка, при которой в спектре все гармоники представлены одинаково. При $\tau = 30$ за счет начавшейся неустойчивости успели вырасти амплитуды гармоник вокруг резонансной двадцатой. Видно, что неустойчивость проявляется в широком диапазоне длин волн: относительная ширина спектра $|\Delta n/n| > 0,5$. В дальнейшем ($\tau = 50$) спектр возбуждаемых плазменных колебаний расширяется в сторону больших n . Это

связано с уже обсуждавшейся перекачкой энергии плазменных колебаний в коротковолновую область спектра. И наконец, при $\tau = 70$ ширина спектра возбужденных плазменных колебаний достигла предельной в данных расчетах величины.

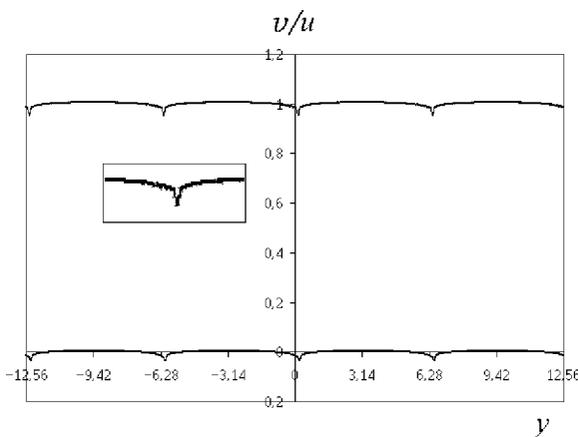


Рис. 11а.

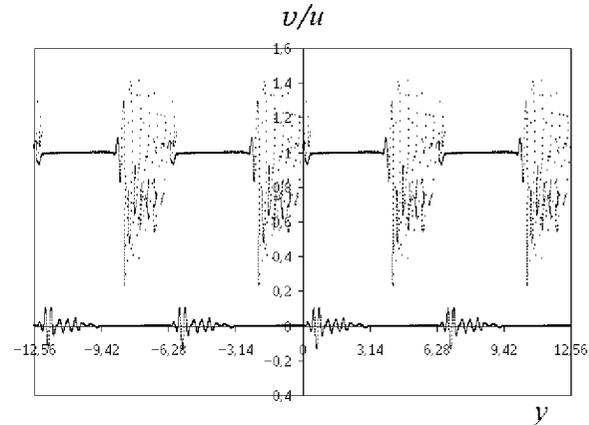


Рис. 11б.

На рис. 11а-в, в представлении фазовые плоскости электронов пучка и электронов плазмы для различных моментов времени. Рис. 11а соответствует начальной стадии процесса, когда $\tau = 2$ (на вставке показан в увеличенном виде участок фазовой плоскости электронов пучка для $y \in [-\pi; \pi]$). Видно, что при $\tau = 2$ имеются резко локальные, небольшие по величине возмущения скорости электронов. Они являются следствием начальных возмущений плотности пучка. Сами возмущения плотности на фазовых плоскостях заметны плохо. Следующий рис. 11б соответствует моменту $\tau = 50$. Модуляция и пучка, и плазмы уже достигла значительной величины. Пучок сильно нелинеен, поскольку возмущения скорости некоторых электронов достигают их первоначальной скорости. Возмущения плазмы по-прежнему носят локализованный характер и имеют вид отрезков синусоид, что соответствует широкому спектру возбужденных колебаний и согласуется с рис. 10. Наконец, на рис. 11в $\tau = 70$. Видно, что импульсный характер возмущений в пучке и в плазме сохранился, хотя ширина импульсов значительно возросла. Эти расчеты (см. также [29]) показывают, что при пучково-плазменной неустойчивости в режиме одночастичного эффекта Черенкова импульсный характер начальных возмущений сохраняется в течении длительного времени, а значит, при эволюции подобных возмущений спектр нарастающих колебаний широк.

Перейдем теперь к одночастичному эффекту Черенкова при шумовой (хаотической) начальной модуляции пучка. При такой начальной модуляции фазы ζ_n в начальных условиях (17) являются случайными числами из диапазона $[0; 2\pi]$. При этом в момент $\tau = 0$ плотность электронного пучка представляет собой однородный фон, на котором хаотически расположены некоторые слабые возмущения. Энергетические потери электронного пучка для случая шумовой начальной модуляции представлены на рис. 9 кривой 2. Вид этой кривой очень напоминает представленную на рис. 2 соответствующую зависимость для квазимонохроматического начального возмущения: обе кривые имеют близкие времена насыщения, сходные уровни стабилизации и демонстрируют снижение эффективности потерь вслед за достижением максимума. Максимальные энергетические потери при шумовой начальной модуляции достигают 0,34. На рис. 12 для нескольких моментов времени представлены пространственные спектры возмущения плотности плазмы, нормированные так же, как на рис. 10, для случая шумовой модуляции пучка. На начальном этапе ($\tau = 2$) спектр представляет собой некоторый хаотический набор пиков самой разнообразной величины в максимумах. При $\tau = 30$ за счет неустойчивости успели вырасти гармоники, близкие к резонансной двадцатой. Видно, что при шумовом начальном возмущении неустойчивость проявляется в более узком диапазоне длин волн (относительная ширина спектра

$|\Delta n/n| < 0,3$), чем при импульсном начальном возмущении. В дальнейшем ($\tau = 50$) спектр возбуждаемых плазменных колебаний расширяется в сторону больших n . Это связано с уже обсуждавшейся перекачкой энергии плазменных колебаний в коротковолновую область спектра. На еще более поздней стадии, при $\tau = 70$, ширина спектра возбужденных плазменных колебаний достигает максимальной величины.

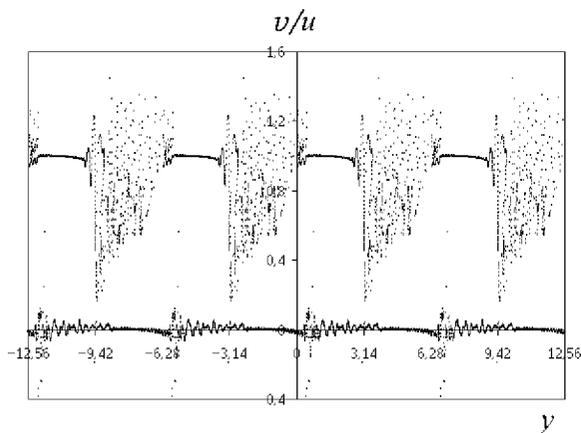


Рис. 11в.

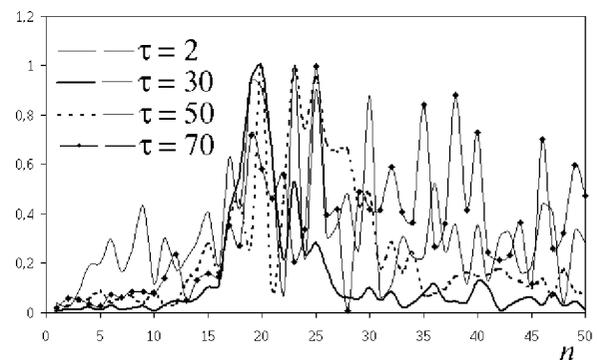


Рис. 12.

На рис. 13а-в в представлены фазовые плоскости электронов пучка и электронов плазмы для различных моментов времени. Видно, что на начальном этапе, при $\tau = 2$ (рис. 13а), имеются небольшие по величине хаотические возмущения скорости электронов пучка и плазмы, которые являются следствием хаотических начальных возмущений плотности пучка. Следующий рис. 13б соответствует моменту времени $\tau = 30$, близкому, как следует из рис. 9, к моменту стабилизации. Появилась заметная модуляция пучка и плазмы, носящая явно регулярный характер в отличие от хаотической модуляции на начальной стадии. Это согласуется и с достаточно узким спектром колебаний, установившихся в плазме к моменту $\tau = 30$ (см. рис. 12). Отсюда (см. также [29]) следует, что при пучково-плазменной неустойчивости в режиме одночастичного эффекта Черенкова шумовой характер начального возмущения к моменту насыщения неустойчивости теряется. Оказывается, что нарастают колебания в узкой полосе длин волн вблизи резонанса, то есть первоначально шумовое возмущение по мере развития неустойчивости монохроматизируется. Полоса длин волн, в которой нарастают колебания, существенно меньше, чем можно было ожидать из линейной теории. Однако на больших временах из-за нелинейности плазмы спектр расширяется, как и в остальных рассмотренных случаях. На рис. 13в показаны фазовые плоскости при $\tau = 70$. Видно, что модуляция плазмы, хотя и неглубокая, далека от квазимонохроматической, а в электронном пучке установилось некое хаотическое распределение с разбросом по скоростям порядка начальной скорости пучка u .

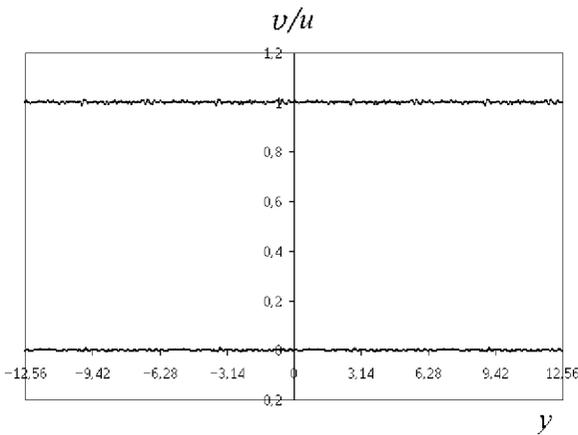


Рис. 13а.

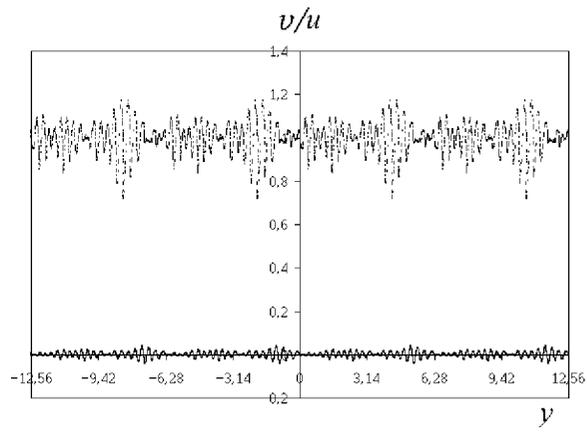


Рис. 13б.

Завершая рассмотрение одночастичного эффекта Черенкова, заметим, что вне зависимости от начального возмущения неустойчивые по линейной теории пространственные гармоники с малыми номерами (в расчетах $n < 15$) не возбуждаются вовсе. Последнее свидетельствует о несущественной роли аperiodической неустойчивости, что ранее уже отмечалось для случая квазимонохроматического начального возмущения (рис. 5 и рис. 6).

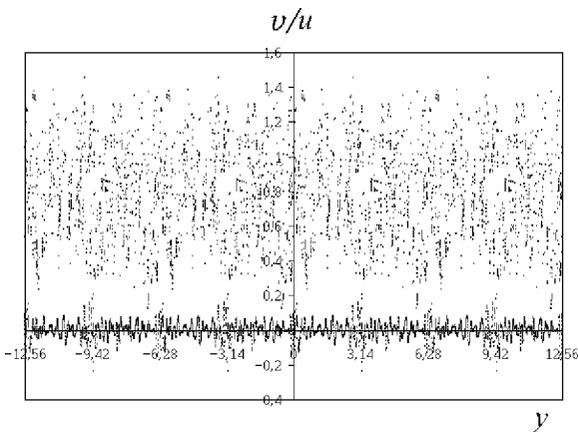


Рис. 13в

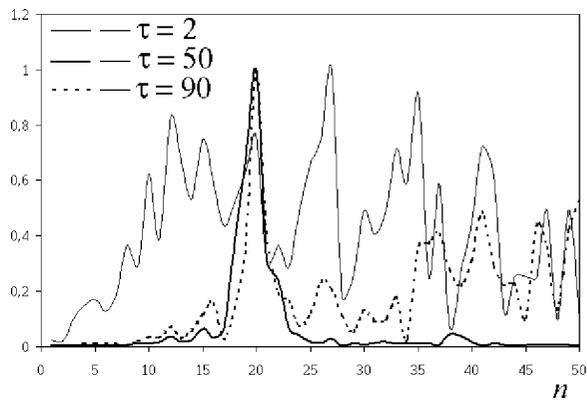


Рис. 14

Рассмотрим теперь эволюцию немонохроматического начального возмущения в режиме коллективного эффекта Черенкова. Выберем те же параметры, что и в предыдущем расчете, но положим $q_n = 0,5$. При этом неустойчивыми оказываются пространственные гармоники с номерами n от 18 до 24 включительно. Поскольку при коллективном эффекте Черенкова диапазон неустойчивых пространственных гармоник является узким, становится несущественной структура начальных возмущений пучка, а ширина спектра возбуждаемых колебаний всегда мала. Поэтому ниже для определенности ограничимся только случаем шумового начального возмущения.

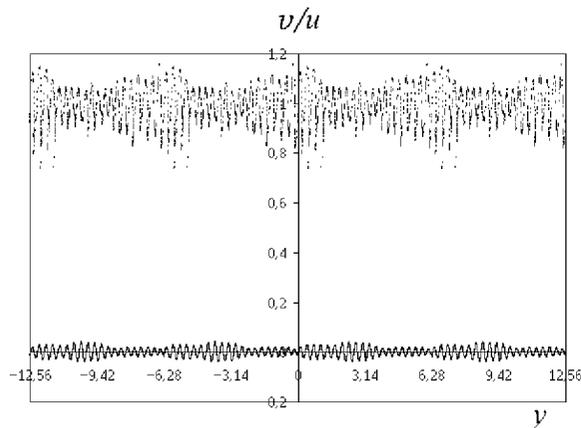


Рис. 15а.

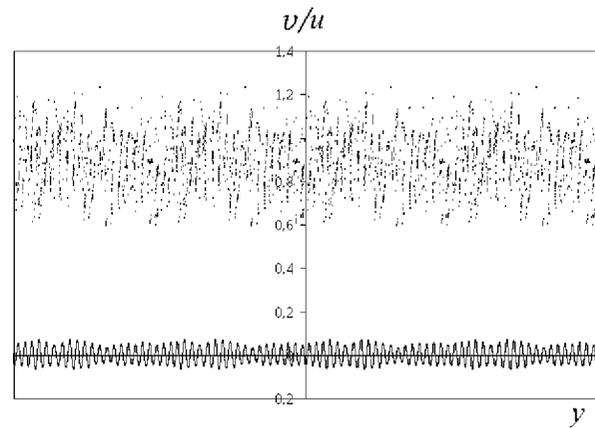


Рис. 15б.

Относительные энергетические потери электронного пучка представлены для этого случая на рис. 9 кривой 3. Кривая напоминает соответствующую зависимость, приведенную на рис. 7. Такой результат становится понятным, если учесть, что при коллективном эффекте Черенкова диапазон неустойчивых пространственных гармоник является узким, а значит, должно быть сходство со случаем квазимонохроматического начального возмущения. Максимальные энергетические потери пучка при коллективном эффекте Черенкова достигают 0,27. Динамика пространственных спектров при коллективном эффекте Черенкова представлена на рис. 14 (спектры отнормированы на максимальные значения). Самый ранний из представленных спектров ($\tau = 2$) соответствует шумовому начальному возмущению. При $\tau = 50$ уже сформировался узкий спектр возбужденных колебаний с резким максимумом на резонансной длине волны. Еще позднее ($\tau = 90$) произошло обычное уширение спектра в коротковолновую область. Отметим, что, несмотря на это уширение, прежний пик в спектре излучения на резонансной длине волны сохранился и при $\tau = 90$.

На рис. 15а и рис. 15б представлены фазовые плоскости электронов пучка и плазмы соответственно для моментов $\tau = 50$ и $\tau = 90$. Видно, что даже на поздней стадии, когда пучок уже полностью хаотизировался, в плазме сохраняется значительная доля регулярных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б. // ДАН СССР. 1949. Т. 69. № 3. С. 551.
2. Bohm D., Gross T. P. // Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 1981.
3. Файнберг Я. Б. // УФН. 1969. Т. 93. С. 1851.
4. O'Neil T. // Phys. Fluids. 1965. Т. 8. P. 2255.
5. Онищенко И. Н., Линецкий А. Р., Шапиро В. Д. и др. // Письма ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 407.
6. Ковтун Р. И., Рухадзе А. А. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 1709.
7. Айзацкий Н. И. // Физика плазмы. 1980. Т. 6. С. 597.
8. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. // УФН. 1987. Т. 152. С. 285.
9. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука, 1990. — 331 с.
10. Бернашевский Г. А., Богданов Е. Б., Чернов З. С. Плазменные и электронные усилители и генераторы СВЧ. — М.: Сов. радио, 1965.
11. Богданкевич Л. С., Кузелев М. В., Рухадзе А. А. // УФН. 1981. Т. 133. No 3.
12. Трубецков Д. И., Пищик Л. А. // Физика плазмы. 1989. Т. 15. С. 342.
13. Кузелев М. В., Мухаметзянов Ф. Х., Рабинович М. С. и др. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1358.
14. Кузелев М. В., Лоза О. Т., Пономарев А. В. и др. // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. С. 2048.

15. Богданов В. В., Кузелев М. В., Рухадзе А. А., // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 548.
16. Бриггс Р. Двухпучковая неустойчивость. — М.: Мир, 1974. — 131 с.
17. Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Санадзе Г. В. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 1591.
18. Дорофеенко В. Г., Красовицкий В. Б., Фомин Г. В. // ЖЭТФ. 1990. Т. 98. С. 419.
19. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1993. Т. 36. № 10. С. 867.
20. Кузелев М. В., Халилов А. Н. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3: Физика. Астрономия. 1990. Т. 31. С. 27.
21. Кузелев М. В., Бобылев Ю. В. // Физика плазмы. 1989. Т. 15. С. 1057.
22. Александров А. Ф., Кузелев М. В., Халилов А. Н. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 1714.
23. Незлин М. В. // УФН. 1976. Т. 120. С. 481.
24. Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Бобылев Ю. В., Панин В. А. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1620.
25. Мациборко Н. Г. и др. // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. С. 874.
26. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. // Физика плазмы. 1981. Т. 7. С. 91.
27. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. — 527 с.
28. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1975. — 205 с.
29. Биро М., Красильников М. А., Кузелев М. В., Рухадзе А. А. // УФН. 1997. Т. 167. С. 1028.

Институт общей физики РАН,
г. Москва, Россия

Поступила в редакцию
21 декабря 1998 г.

**REGIMES AND SPECTRA
OF THE ČERENKOV BEAM INSTABILITY IN NONLINEAR PLASMA**

M. V. Kuzelev, O. V. Lazutchenko, and A. A. Rukhadze

We study the nonlinear evolution of arbitrary initial disturbance due to development of the Čerenkov beam instability in magnetized plasma–beam system of a finite transverse size. Single-particle, collective, and aperiodic regimes of this instability are considered. We calculate nonlinear spatial spectra of the waves excited at different stages of development of the beam instability in the plasma for the cases of quasi-monochromatic, pulsed, and noise initial disturbances. We analyze formation and decay of regular structures in the beam and plasma at the developed nonlinear stage of the process. We find that the plasma nonlinearity leads to the transfer of disturbance energy to the short-wave region of the spectrum. We show that, due to the development of the beam instability, a noise initial disturbance tends to become more monochromatic, whereas the shape of a pulsed one tends to remain unchanged. Transformation of monochromatic spatial disturbances into quasi-monochromatic plasma waves in the course of the instability development is analyzed.

К ТЕОРИИ КОМПРЕССОРА МИКРОВОЛНОВЫХ ИМПУЛЬСОВ НА ОСНОВЕ БОЧКООБРАЗНОГО РЕЗОНАТОРА

Ю. Ю. Данилов, М. И. Петелин

Для предложенного в [1] пассивного компрессора микроволновых импульсов на основе открытого бочкообразного резонатора, связанного с волноводом посредством перфорации в общей стенке, рассчитаны радиационный декремент резонаторной моды и коэффициент передачи проходящей волны.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одним из наиболее эффективных компрессоров микроволновых импульсов является предложенный В. Е. Балакиным и И. В. Сырачевым [1] открытый бочкообразный резонатор (рис. 1), в котором волновод сквозь перфорацию в общей стенке возбуждает вращающуюся моду шепчущей галереи. По своим электродинамическим характеристикам эта система эквивалентна хорошо известному компрессору SLED [2], однако в отличие от последнего более пригодна для использования в коротковолновой части диапазона СВЧ. Например, описанный в [3] компрессор бочкообразного типа формировал на частоте 11,4 ГГц импульс мощностью 35 МВт и длительностью 110 нс при КПД 74% и коэффициенте усиления по мощности 3,7.

Связь резонатора с волноводом в работах [1, 3] определялась численно. Настоящая статья посвящена построению приближенной аналитической теории компрессора описанного типа при несколько более общем по сравнению с выбранным в [1, 3] типе связи между модами.

1. СТРУКТУРА СОБСТВЕННЫХ МОД РЕЗОНАТОРА И ВОЛНОВОДА

Рассмотрим случай [1], когда в качестве рабочих мод выбраны H_{10} — мода в волноводе (зависимость от времени $\exp(i\omega t)$ далее опускается)

$$E_{y_j} = ik \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \frac{\partial H_{z_j}}{\partial x}, \quad H_{x_j} = -\frac{h_j}{k} E_{y_j},$$

$$H_{z_j} = \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \exp(-ih_j z),$$

где $k = \omega/c$, $h_j = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$, a — больший из поперечных размеров волновода, ω — частота волны, c — скорость света в вакууме и E — мода в резонаторе (оптимальная с точки зрения электропрочности)

$$\vec{H}_{\perp s} = ik \left(\frac{R}{\nu_{mn}} \right)^2 (\nabla_{\perp} E_{y_s} \times \vec{y}^0),$$

$$E_{y_s} = J_{m_s} \left(\frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \exp(-im_s \varphi) F(y),$$

где $R(y)$ — радиус резонатора, ν_{mn} — n -ый корень функции Бесселя I-го рода m -го порядка, m_s — азимутальный индекс рабочей моды резонатора. Обозначения координат соответствуют осям, изображенным на рис. 1.

Ю. Ю. Данилов, М. И. Петелин

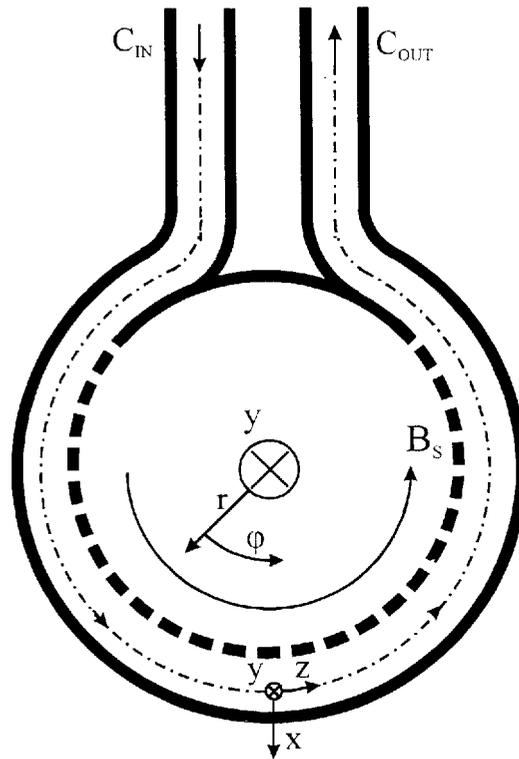


Рис. 1. Схема компрессора [1]

Протяженность резонатора по координате y предполагается намного превышающей длину волны $\lambda = 2\pi c/\omega$, что позволяет пренебречь радиальной и азимутальной компонентами электрического поля рабочей “одногоорбой” квазикритической моды по сравнению с продольной компонентой, зависимость которой от координаты y описывается медленно меняющейся действительной функцией $F(y)$, удовлетворяющей уравнению неоднородной струны

$$\frac{d^2 F(y)}{dy^2} + k_y^2(y)F(y) = 0,$$

где $k_y(y) = \sqrt{k^2 - (\nu_{mn}/R)^2}$, и экспоненциально спадающей за пределами резонатора.

Среди последних работ по исследованию бочкообразных резонаторов следует отметить [4–6].

2. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕЗОНАТОРОМ И ВОЛНОВОДОМ

Предположим, что в общей стенке резонатора и волновода прорезана эквидистантная система отверстий с периодом d таким, что переизлучение всех отверстий из волноводной моды в резонаторную (и наоборот) синфазно:

$$h_j - m_s/R_0 = 2\pi n/d, \quad (1)$$

где R_0 — радиус резонатора в месте расположения отверстий, n — целое число. Осуществленный в [3] вариант равенства фазовых скоростей волн в волноводе и резонаторе ($n = 0$) является частным случаем (1).

Размеры отверстий будем считать малыми по сравнению с длиной волны и другими характерными размерами системы (включая расстояние между отверстиями), что позволяет воспользоваться дипольным приближением, когда связь между выбранными резонаторной и волноводной модами является чисто магнитной и может быть описана введением магнитного тока $\vec{j}^m = i\omega \sum_{k=1}^N \vec{m}_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$, где \vec{m}_k и \vec{r}_k — соответственно магнитный дипольный момент и координата k -ого отверстия, N — полное число отверстий. Эффективные дипольные моменты \vec{m}_{c_k} и \vec{m}_{w_k} , возбуждающие резонатор и волновод, определяются формулой [7]

$$\vec{m}_{c_k} = \kappa_m (\vec{H}_{c_k} - \vec{H}_{w_k})/2 = -\vec{m}_{w_k},$$

где \vec{H}_{c_k} и \vec{H}_{w_k} — невозмущенные составляющие резонаторной и волноводной мод на месте k -ого отверстия, κ_m — магнитная поляризуемость отверстия. В частности, для круглого отверстия радиусом r_0 , прорезанного в бесконечно тонкой стенке [8],

$$\kappa_m = 4r_0^3/3\pi. \quad (2)$$

Напомним, что в общем случае отверстие в стенке характеризуется также и электрическим дипольным моментом, однако последний для принятой здесь поляризации высокочастотного поля равен нулю.*

Соответственно для комплексных амплитуд B_s и $C_j(z)$ резонаторной и волноводной мод имеем [9]:

$$B_s = -\frac{i}{4(\omega - \omega_{s0})W_s} \int \vec{j}^m \vec{H}_s^* dV, \quad (3)$$

$$C_j(z) = C_{in} + \frac{1}{4P_j} \int \vec{j}^m \vec{H}_j^* dV, \quad (4)$$

где ω_{s0} — невозмущенная собственная частота резонатора, $W_s = \frac{1}{8\pi} \int |\vec{E}_s|^2 dV$ — энергия рабочей моды резонатора, $P_j = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \int (\vec{E}_j \times \vec{H}_j^*) \cdot \vec{z}^0 dx dy$ — мощность, переносимая рабочей модой волновода, $C_{in} = C_j(-\infty)$.

Из (3) и (4) при условии (1) получаем систему уравнений относительно B_s и $C_j(z_m)$ — амплитуды волноводной моды между m -ым и $(m+1)$ -ым отверстиями:

$$(\omega - \omega_{s0})B_s = N\beta_1^0 B_s - 2\beta_2^0 \sum_{k=1}^N C_j(z_k), \quad (5)$$

*Обоснование дипольного приближения, данное Л. И. Мандельштамом [7], допускает некоторое методическое упрощение. А именно, пусть две части электродинамической системы разделены тонкой сплошной металлической перегородкой. В малой окрестности любой точки на этой перегородке перпендикулярное ей электрическое поле \vec{E}^0 можно считать квазистатическим и кусочно-однородным: равным \vec{E}_+^0 по одну сторону от перегородки и \vec{E}_-^0 — по другую. Представим совокупное поле \vec{E}^0 в виде суммы $\vec{E}^0 = \vec{E}_s + \vec{E}_{as}$ симметричной $\vec{E}_s = (\vec{E}_+^0 + \vec{E}_-^0)/2$ и антисимметричной $\vec{E}_{as} = (\vec{E}_+^0 - \vec{E}_-^0)/2$ составляющих. Если в перегородке прорезать небольшое отверстие, то однородная составляющая поля \vec{E}_s сохранится неизменной, а разрывная (антисимметричная) составляющая поля \vec{E}_{as} деформируется, причем поправка к этому полю при удалении точки наблюдения от отверстия стремится к полю диполя, момент которого определяется из соответствующей электростатической (или гидродинамической) задачи. Подобное построение справедливо и для описания деформации отверстием квазистационарного магнитного поля.

Следует заметить, что квазистатическая дипольная поправка аппроксимирует деформацию реального поля лишь на расстояниях от отверстия, больших по сравнению с его линейным размером и малых по сравнению с длиной волны. Однако этого достаточно для отыскания высокочастотного поля и во всей системе, т. к. по теореме единственности поле, найденное на замкнутой поверхности, окружающей отверстие, определяет (наряду с другими источниками) поле во всей внешней области.

$$C_j(z_m) = C_j(z_{m-1}) - i\gamma_1^0 B_s + i\gamma_2^0 [C_j(z_{m-1}) + C_j(z_m)] \quad \text{при } z \leq z_m, \quad 1 \leq m \leq N, \quad (6)$$

где $C_j(z_0) = C_{in}$, $\gamma_1^0 = \omega \kappa_m H_{s\varphi 0} H_{jz_0}^* / 8P_j$, $\gamma_2^0 = \omega \kappa_m |H_{jz_0}|^2 / 8P_j$, $\beta_1^0 = \omega \kappa_m |H_{s\varphi 0}|^2 / 8W_s$, $\beta_2^0 = \omega \kappa_m H_{jz_0} H_{s\varphi 0}^* / 8W_s$, $H_{s\varphi 0}$ и H_{jz_0} — компоненты невозмущенных полей резонаторной и волноводной мод на месте отверстий. Пренебрегая в (6) последним слагаемым, ответственным за вклад порядка $(\kappa_m / \lambda^3)^2$ в сдвиг собственной частоты резонатора, вызванный излучением в волновод, получаем

$$C_j(z_m) = C_{in} - im\gamma_1^0 B_s \quad \text{при } z \geq z_m, \quad 1 \leq m \leq N. \quad (6a)$$

На основании (6a) и (5), пренебрегая малыми по параметру $1/N$ членами, получаем систему уравнений для амплитуды поля в резонаторе B_s и амплитуды волны на выходе системы $C_{out} = C_j(\infty)$:

$$(\omega - \omega_{s0})B_s = (\beta_1 + i\gamma_1\beta_2)B_s - 2\beta_2 C_{in}, \quad (7a)$$

$$C_{out} = C_{in} - i\gamma_1 B_s, \quad (7b)$$

где $\gamma_1 = N\gamma_1^0$, $\beta_n = N\beta_n^0$, $n = 1, 2$.

3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РЕЗОНАТОРА, ИЗЛУЧАЮЩЕГО В ВОЛНОВОД

В отсутствие падающей волны ($C_{in} = 0$) колебания резонатора описываются уравнением (7a), которое дает сдвиг собственной частоты резонансной моды, вызванный излучением в волновод,

$$\delta\omega'_s = \omega / I_r, \quad (7)$$

радиационный декремент

$$\omega''_s = \omega / 2Q_s \quad (8)$$

и радиационную добротность резонатора

$$Q_s = h_j a^3 b I_r / (4\pi^3 N \kappa_m),$$

где b — меньший из поперечных размеров волновода,

$$I_r = \frac{R^2 \int_{-\infty}^{\infty} F^2(y) dy}{N \kappa_m F^2(0)}.$$

4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РЕЗОНАТОРА. КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ ВОЛНОВОДНОЙ МОДЫ

Для режима вынужденных колебаний ($C_{in} \neq 0$) из системы (7) получаем коэффициент передачи волноводной моды $T = C_{out} / C_{in}$:

$$T = \frac{\omega - \omega_s^*}{\omega - \omega_s}, \quad (9)$$

где $\omega_s = \omega_{s0} + \delta\omega'_s + i\omega''_s$, а $\delta\omega'_s$ и ω''_s определяются соответственно выражениями (8) и (9).

Поскольку соотношение (10) универсально для любых консервативных резонаторов кольцевого типа [10], прохождение сигнала через систему, изображенную на рис. 1 (в частности компрессия микроволновых импульсов), может быть описано стандартным методом [2, 10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные здесь соотношения могут быть использованы лишь для предварительного приближенного расчета компрессора, поскольку в реальных конструкциях использованная выше малость некоторых параметров оказывается условной. В частности, с учетом конечной толщины общей стенки резонатора и волновода их связь является более слабой, чем описываемая формулой (2). Для соответствующей коррекции в [8] предложено дополнить коэффициент связи κ_m множителем $\exp(-\alpha\delta)$, где δ — толщина стенки, α — декремент для низшей моды в отверстии. Для еще более точных расчетов представляется необходимым использование численных методов.

Авторы благодарны В. Е. Балакину за обсуждение данной статьи.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (проекты № NOT 000 и № NOT 300) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 1.8 МНТП России "Физика микроволн" за 1997 год).

ЛИТЕРАТУРА

1. Balakin V. E., Syrachev I. V. — In: Proc. III-rd Int. Workshop on Next Generation Linear Collider, Branch INP, Protvino, Russia, 1991. P. 145.
2. Wilson P. B. — In: Application of High-Power Microwaves / Ed. by A. V. Gaponov-Grekhov, V. Granatstein. — Boston, London: Artech House, 1994. P. 229.
3. Syrachev I. V., Vogel V. F., Mizuno H., Odagiri J., Otake Y., Tokumoto S. — In: Proc. Int. Conference LINAC-94, Tsukuba, Japan, 1994. P. 475.
4. Клеев А. И., Маненков А. Б., Ямада Х. // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 1. С. 46.
5. Клеев А. И., Маненков А. Б., Ямада Х. // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 3. С. 270.
6. Клеев А. И., Ямада Х. // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 42. № 7. С. 801.
7. Мандельштам Л. И. // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. № 9. С. 471.
8. Вайнштейн Л. А. — В кн.: Электроника больших мощностей, вып. 3. / Под. ред. П. Л. Капицы. — М.: Наука, 1964. С. 216.
9. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988. — 440 с.
10. Petelin M. I., Tai M. L. // AIP Conf. Proc. 1995. № 337. P. 303.

Институт прикладной
физики РАН, г. Н. Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
6 января 1999 г.

ON THE THEORY OF MICROWAVE PULSE COMPRESSOR
BASED ON A BARREL-LIKE CAVITY

Yu. Yu. Danilov and M. I. Petelin

We consider the passive microwave pulse compressor based on an open barrel-like cavity coupled to a waveguide with perforation on the common wall [1] and calculate the radiation decrement of the cavity mode and the transmission coefficient of the waveguide mode.

УДК 537.876.23

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБОРАСХОДЯЩИХСЯ ПУЧКОВ В ПЛОСКОСЛОИСТЫХ ВОЛНОВОДАХ

И. П. Смирнов¹, Дж. В. Карузерс², А. И. Хилько³

В работе находятся условия существования слаборасходящихся пучков (СРП) лучей различных типов для волноводов со степенной зависимостью квадрата коэффициента преломления.

Известно, что в рефракционных плоскостойких волноводах могут возникать слабо расходящиеся пучки вблизи соответствующих им особых лучей. Такого рода особые лучи соответствуют гладким экстремумам угловых зависимостей длины цикла лучей.

Как показывают измерения и расчеты [1, 2], слаборасходящиеся пучки локализованы в пространстве и имеют квазипериодическую пространственную структуру. Интенсивность поля в окрестности пучка заметно превышает интенсивность окружающего поля. При достаточно плавном изменении характеристик вдоль волновода пучки трансформируются, изменяя свою структуру [3]. Внутренняя структура пучка описывается дифракционными эффектами [4–6].

Кроме повышенной интенсивности, пучки характеризуются также относительно высокой когерентностью как при возбуждении их частично когерентными источниками, так и при наличии случайно распределенных неоднородностей толщи волновода [7]. Перечисленные свойства пучков вызывают интерес с точки зрения их возможного использования при разработке схем томографического мониторинга океана [4, 6, 7].

Некоторые важные свойства пучков еще недостаточно исследованы. В частности, для практического их использования важно научиться прогнозировать возможности возникновения пучков в реальных условиях (например, в океанических волноводах). В настоящей работе находятся условия существования слаборасходящихся пучков для широкого класса рефракционных волноводов со степенной зависимостью квадрата коэффициента рефракции.

Для кусочно-линейной аппроксимации профиля коэффициента преломления поперек волновода (по координате z) условия существования слаборасходящихся пучков (СРП) обсуждались в [3]. Критерии существования СРП для n^2 -билинейных профилей коэффициента преломления были получены ранее в [7].

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЦИКЛА ЛУЧА

Рассматривается стратифицированный волновод в области $-h_2 \leq z \leq h_1$, $-h_2 < 0 < h_1$, заполненный средой с коэффициентом преломления $n = n(z)$. Пусть $D(a)$ обозначает цикл луча, выходящего под углом скольжения θ_S из источника, расположенного на горизонте z_S , $-h_2 < z_S < h_1$, $a = n(z_S) \cos \theta_S$ — сохраняющаяся вдоль луча нормированная фазовая скорость.

Определение. Соответствующий параметру a луч порождает слаборасходящийся пучок, если функция $D(a)$ имеет локальный экстремум в точке a и производная $D'(a) = 0$.

Заметим, что данное определение несколько уже принятого в работе [3], где существование СРП определяется условием $dD/d\theta_S = D'(a) n(z_S) \sin \theta_S = 0$. Особый луч $\theta_S = 0$ всегда удовлетворяет последнему условию, но не обязательно удовлетворяет условию $D'(a) = 0$, поэтому он может не порождать СРП в смысле принятого здесь определения.

Для функции $D(a)$ известно интегральное представление [8]

$$D(a) = 2 \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{adz}{\sqrt{n^2(z) - a^2}}, \quad (1)$$

где $z_{\min} = z_{\min}(a)$ и $z_{\max} = z_{\max}(a)$ — соответственно минимальная и максимальная z -координаты точек луча (горизонты поворота луча). Функции $z_{\min}(a)$, $z_{\max}(a)$ являются соответствующими решениями уравнения

$$n(z) = a, \quad (2)$$

если эти решения лежат в интервале $[-h_2, h_1]$ или принимают значения границ указанного интервала. Помимо (1) будем использовать также следующую формулу для цикла:

$$D(a) = \frac{d}{da} \phi(a), \quad (3)$$

где

$$\phi(a) \equiv 2 \int_{z_{\max}}^{z_{\min}} \sqrt{n^2(z) - a^2} dz, \quad (4)$$

которая легко выводится из (1) с учетом (2) дифференцированием интеграла по параметру.

Как и в работе [7], будем относить луч в плоскостром волноводе к одному из четырех типов в соответствии с расположением горизонтов поворота луча (см. табл. 1). В работе [3] показано, что СРП не могут принадлежать к 4-му типу. СРП 3-го типа не представляют большого интереса, поскольку могут быть разрушены неоднородностями стенок волновода при отражении. Учитывая сказанное, сосредоточим усилия на поиске условий существования СРП первых двух типов.

Т а б л и ц а 1

Тип луча	Условия на z_{\min} и z_{\max}	
1-й	$z_{\min} > -h_2$	$z_{\max} < h_1$
2-й	$z_{\min} > -h_2$	$z_{\max} = h_1$
3-й	$z_{\min} = -h_2$	$z_{\max} < h_1$
4-й	$z_{\min} = -h_2$	$z_{\max} = h_1$

2. СРП В ОДНОКАНАЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ СО СТЕПЕННЫМИ ПРОФИЛЯМИ n^2

Пусть профиль n^2 имеет единственный максимум на оси канала рефракционного волновода. Запишем $n^2(z)$ в форме

$$n^2(z) = n_0^2 - \varphi^2(z),$$

где $-h_2 \leq z \leq h_1$, $-h_2 < 0 < h_1$, $n_0 = n(0)$ — максимальная величина коэффициента рефракции, достигаемая на оси канала. Функцию $\varphi(z)$ предположим монотонно возрастающей и поэтому обратимой. Пусть $\psi(t)$ — обратная к $\varphi(z)$ функция. Тогда после замены переменных вида $z = \psi(st)$, $s \equiv s(a) \equiv \sqrt{n_0^2 - a^2}$ получим для функции (4) следующее интегральное представление:

$$\phi(a) = s^2 \int_{\varphi(z_{\max})/s}^{\varphi(z_{\min})/s} \psi'(st) \sqrt{1 - t^2} dt. \quad (5)$$

Для лучей 1-го типа $\varphi(z_{\min}) = -s$, $\varphi(z_{\max}) = s$. В этом случае (5) переходит в соотношение

$$\phi(a) = -s^2 \int_{-1}^1 \psi'(st) \sqrt{1 - t^2} dt. \quad (6)$$

Для лучей 2-го типа

$$\phi(a) = -s^2 \int_{-1}^{\varphi(h_1)/s} \psi'(st) \sqrt{1-t^2} dt. \quad (7)$$

Далее рассматривается множество волноводных профилей коэффициента рефракции со степенной зависимостью от z

$$\varphi(z) = \begin{cases} (\beta_1 z)^{m_1}, & z \geq 0, \\ -(-\beta_2 z)^{m_2}, & z < 0, \end{cases} \quad (8)$$

где $m_{1,2} > 0$, $\beta_{1,2} > 0$. В частности, симметричный относительно оси вариант профиля (8) задается функцией

$$\varphi(z) = \begin{cases} (\beta z)^m, & z \geq 0, \\ -(-\beta z)^m, & z < 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $m > 0$, $\beta > 0$.

Будучи достаточно простым для исследования, данный класс профилей оказывается подходящим для целей настоящей работы — для него удастся сформулировать простые критерии существования СРП 1-го и 2-го типов. Заметим, что к числу подобных профилей относится, в частности, широко используемый в акустике n^2 -билинейный профиль ($m_1 = m_2 = 1/2$), при котором уравнения лучевых траекторий интегрируются в квадратичных сплайнах. Отметим также, что при $m_{1,2} > 1/2$ профиль $n^2(z)$ является гладким.

2.1. СРП 1-го типа в несимметричных волноводах

Подстановка степенного профиля (8) в (6) приводит к выражению

$$\phi(a) = -(C_{\nu_1} s^{\nu_1+1} + C_{\nu_2} s^{\nu_2+1}),$$

$$C_{\nu_1} = \frac{2\nu_1}{\beta_1} \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|^{1-\nu_1}} dt, \quad C_{\nu_2} = \frac{2\nu_2}{\beta_2} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^{1-\nu_2}} dt,$$

где $\nu_{1,2} = 1/m_{1,2} > 0$.

В соответствии с (3)

$$D(a) = \frac{d}{da} \phi(a) = a(C_{\nu_1}(1+\nu_1)s^{\nu_1-1} + C_{\nu_2}(1+\nu_2)s^{\nu_2-1}),$$

$$D'(a) = \frac{1}{s^3} [n_0^2(C_{\nu_1}(1+\nu_1)s^{\nu_1} + C_{\nu_2}(1+\nu_2)s^{\nu_2}) - a^2([\nu_1 C_{\nu_1}(1+\nu_1)s^{\nu_1} + \nu_2 C_{\nu_2}(1+\nu_2)s^{\nu_2}])].$$

Решения уравнения $D'(a) = 0$ совпадают с решениями уравнения

$$a^2 = \frac{C_{\nu_1}(1+\nu_1)s^{\nu_1} + C_{\nu_2}(1+\nu_2)s^{\nu_2}}{\nu_1 C_{\nu_1}(1+\nu_1)s^{\nu_1} + \nu_2 C_{\nu_2}(1+\nu_2)s^{\nu_2}} n_0^2.$$

Вычитая правую и левую части этого уравнения из n_0^2 и учитывая, что $n_0^2 - a^2 = s^2$, получаем уравнение относительно неизвестного s , $0 \leq s \leq n_0$:

$$s^2 = \chi(s)n_0^2,$$

где

$$\chi(s) \equiv \frac{C_{\nu_1}(\nu_1^2 - 1)s^{\nu_1} + C_{\nu_2}(\nu_2^2 - 1)s^{\nu_2}}{\nu_1 C_{\nu_1}(\nu_1 + 1)s^{\nu_1} + \nu_2 C_{\nu_2}(\nu_2 + 1)s^{\nu_2}}.$$

Значения функции $\chi(s)$ заключены в интервале $[1 - 1/\nu_{\min}, 1 - 1/\nu_{\max}]$, где $\nu_{\max} = \max(\nu_1, \nu_2)$, $\nu_{\min} = \min(\nu_1, \nu_2)$. Следовательно, при $\nu_{\max} < 1$ уравнение решений не имеет.

Если $\nu_{\min} > 1$, то значения правой части уравнения положительны и строго меньше n_0^2 при всех значениях s . Поскольку левая часть уравнения при изменении s в интервале $[0, n_0]$ изменяется от нуля до максимального значения n_0^2 , то из непрерывности обеих частей уравнения следует существование корня. С учетом сказанного выражение для корня имеет вид

$$s^2 = \left(1 - \frac{1}{\bar{\nu}}\right)n_0^2,$$

где $\bar{\nu}$ — среднее между величинами ν_1, ν_2 . Для соответствующей фазовой скорости a имеем

$$a = \frac{n_0}{\sqrt{\bar{\nu}}} = n_0\sqrt{\bar{m}},$$

где $\bar{m} = 1/\bar{\nu}$ — среднее между величинами m_1, m_2 .

Легко видеть, что производная $D'(a)$ меняет знак в окрестности найденного a , при котором она равна нулю. Таким образом, установлено существование хотя бы одного СРП для волновода с указанным профилем коэффициента преломления. Для того чтобы этот СРП действительно принадлежал к первому типу, необходимо и достаточно потребовать выполнения условий

$$\sqrt{\bar{m}}n_0 \leq n(z_S), \sqrt{\bar{m}}n_0 > n_1, \sqrt{\bar{m}}n_0 > n_2,$$

эквивалентных неравенству $\max(n_1, n_2) < \sqrt{\bar{m}}n_0 \leq n(z_S)$, где $n_1 \equiv n(h_1)$, $n_2 \equiv n(-h_2)$ — значения коэффициента рефракции соответственно на верхней и нижней границах волновода. Для скоростей $c(z) = 1/n(z)$ распространения волны соответствующие условия имеют вид

$$\min(c_1, c_2) > \frac{c_0}{\sqrt{\bar{m}}} \geq c_S,$$

где $c_1 = c(h_1)$, $c_2 = c(h_2)$, $c_0 = 1/n_0$, $c_S = c(z_S)$. Таким образом, величина \bar{m} должна находиться в интервале

$$\left(\frac{c_0}{\min(c_1, c_2)}\right)^2 < \bar{m} \leq \left(\frac{c_0}{c_S}\right)^2.$$

Для выполнения этих неравенств *достаточно*, чтобы выполнялись условия

$$\left(\frac{c_0}{\min(c_1, c_2)}\right)^2 < m_{1,2} \leq \left(\frac{c_0}{c_S}\right)^2.$$

Полученный результат имеет в действительности локальный характер. Пусть лишь в некоторой окрестности $[-\tilde{h}_2, \tilde{h}_1]$ оси волноводного канала $z = 0$ профиль показателя преломления имеет вид

$$n^2(z) = \begin{cases} n_0^2 \left(1 - \gamma_1 \left|\frac{z}{\tilde{h}_1}\right|^{2m_1}\right), & 0 < z < \tilde{h}_1, \\ n_0^2 \left(1 - \gamma_2 \left|\frac{z}{\tilde{h}_2}\right|^{2m_2}\right), & -\tilde{h}_2 < z < 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $\tilde{h}_{1,2} > 0$, а положительные постоянные $m_{1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ удовлетворяют ограничениям

$$0 < 1 - \gamma_{1,2} \leq m_{1,2} \leq 1, \quad \min(m_1, m_2) < 1. \quad (11)$$

Тогда среди лучей, выходящих из любого источника, расположенного в окрестности оси канала (а именно удовлетворяющего условию $n_S \geq \sqrt{\bar{m}} n_0$), существуют лучи, порождающие СРП 1-го типа. Такие лучи выходят из источника под углами

$$\theta = \pm \arccos \left(\frac{n_0 \sqrt{\bar{m}}}{n_S} \right),$$

где \bar{m} — определенное выше среднее между величинами m_1 и m_2 . Горизонты поворота таких лучей равны соответственно,

$$z_{\max, \min} = \pm \tilde{h}_{1,2} \left(\frac{1 - \bar{m}}{\gamma_{1,2}} \right)^{\frac{\nu_{1,2}}{2}},$$

поэтому они не выходят из интервала $[-\tilde{h}_2, \tilde{h}_1]$. Следует заметить, что при источнике, расположенном на границах указанного интервала, когда $n_S = n_0 \sqrt{\bar{m}}$, найденные СРП совпадают и имеют нулевой угол выхода.

Отметим следующие два обстоятельства. Во-первых, в случае многоканального волновода образование подобных СРП возможно в окрестности оси каждого из каналов при помещении источника в соответствующую окрестность оси канала. Во-вторых, теоретически образование СРП возможно для профилей (10) с произвольными значениями $0 < m_{1,2} \leq 1$. Заметим, однако, что для такого профиля

$$n^2(h_{1,2}) = n_0^2(1 - \gamma_{1,2}) \leq m_{1,2} n_0^2,$$

то есть $n(h_{1,2}) \leq \sqrt{m_{1,2}} n_0$. При малых $m_{1,2}$ это условие вряд ли может выполняться в природных волноводах. С другой стороны, при $m_{1,2} \simeq 1$ это условие не является слишком жестким, что увеличивает возможность существования подобных каналов в естественных волноводах.

Сделаем более точные оценки для симметричного канала (9). Пусть СРП выходит из расположенного на оси канала источника и имеет горизонты поворота $\pm h$. Тогда $\gamma = 1 - m$, а соответствующий профиль коэффициента рефракции

$$n^2(z) = n_0^2 \left(1 - (1 - m) \left| \frac{z}{h} \right|^{2m} \right). \quad (12)$$

Далее, $n(z_{\max}) = n_0 \sqrt{\bar{m}} \simeq n_0 - |\nabla n| h$, поэтому

$$m \simeq 1 - 2 \left| \frac{\nabla n}{n} \right| h.$$

Полагая для примера $|\nabla n/n| \simeq 0,05 \div 0,25 \text{ км}^{-1}$, $h \simeq 0,2 \text{ км}$, имеем $m \simeq 0,9 \div 0,98$. При этом для углов выхода СРП из источника имеем $\theta = \arccos \sqrt{\bar{m}} \simeq 7 \div 18^\circ$.

На рис. 1 представлен профиль скорости звука $c(z)$, соответствующий распределению коэффициента рефракции (12) при $m = 0,923$, $h = 0,2$, $c_0 = 1,47$, а на рис. 2 — график зависимости цикла $D(a)$ для этого профиля. На этом графике виден гладкий локальный экстремум в точке $a = \sqrt{\bar{m}} n_0 \simeq 0,653$, что отвечает углу выхода луча из источника приблизительно 16° .

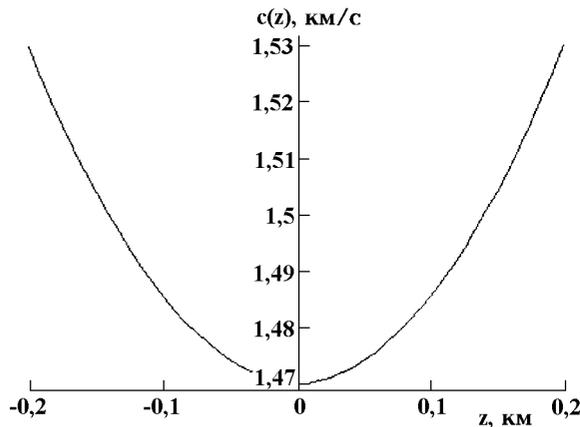


Рис. 1. Профиль скорости звука для симметричного профиля коэффициента преломления вблизи оси канала.

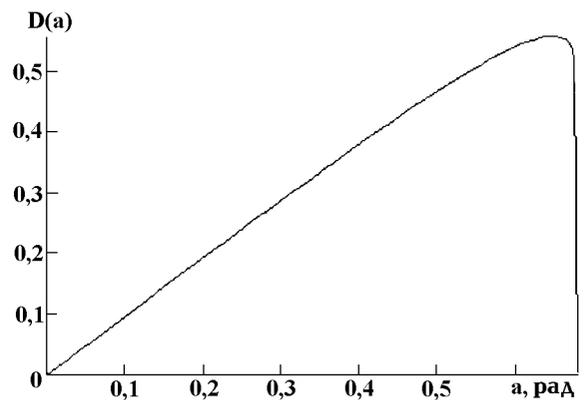


Рис. 2. График зависимости цикла луча от фазовой скорости a для профиля, приведенного на рис. 1.

2.2. СРП 2-го типа в симметричных волноводах

При исследовании вопроса о существовании СРП 2-го типа ограничимся случаем симметричных профилей (9).

Для любого луча 2-го типа $n_2 < a < n_1$. Из выражения (7) при этом получаем

$$\phi(a) = -\frac{2\nu}{\beta} s^{1+\nu} \int_{-1}^{b_1/s} \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|^{1-\nu}} dt \equiv -\frac{\nu}{\beta} F(s),$$

где $b_1 \equiv \varphi(h_1)$. Поэтому

$$D(a) = \frac{d}{da} \phi(a) = -\frac{\nu}{\beta} F' s' = \frac{\nu}{\beta} \frac{a F'}{s},$$

$$D'(a) = \frac{\nu}{\beta} \frac{n_0^2 F' - a^2 s F''}{s^3}.$$

После преобразований уравнение $D'(a) = 0$ можно привести к виду

$$D(a) = \frac{a^3 b_1^\nu}{\beta (a^2 - n_0^2 m) \sqrt{n_1^2 - a^2}}. \quad (13)$$

Определим условия, при которых уравнение (13) имеет хотя бы одно решение в интервале $n_2 < a < n_1$. В случае $m \geq 1$ правая часть (13) отрицательна при всех a . Так как в левой части уравнения $D > 0$, то в волноводах с подобными профилями СРП 2-го рода отсутствуют.

В случае $m < 1$ уравнение (13) может иметь решения при определенных условиях на параметры волновода. Правая часть уравнения положительна лишь при $a > n_0 \sqrt{m}$. Следовательно, для существования СРП 2-го рода *необходимо*, чтобы параметры волновода (9) удовлетворяли следующим условиям:

$$m < \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^2 < 1. \quad (14)$$

Чтобы сформулировать *достаточные* условия, поступим следующим образом. При выполнении условий (14) правая часть уравнения (13) положительна на интервале $n_0\sqrt{m} < a < n_1$ и стремится к $+\infty$ при приближении к границам данного интервала. В точке $a_*^2 = 3n_1^2n_0^2m/(n_1^2+2mn_0^2)$ данного интервала она принимает свое наименьшее значение

$$d^* = 3\sqrt{3m} \frac{b_1^{1/m} n_1^2 n_0}{\sqrt{n_1^2 - mn_0^2}}.$$

Так как левая часть уравнения (13) конечна при всех a , то достаточное условие существования решения уравнения можно записать в форме $D(a_*) > d^*$. В общем случае это условие громоздко и неудобно для анализа. Поэтому в данной работе мы приведем лишь полученные в [7] достаточные условия для частного случая n^2 -билинейного профиля при $m = 1/2$:

$$\begin{cases} p \equiv \frac{1}{2} f\left(\frac{n_1}{n_2}\right) / f\left(\frac{n_0}{n_2}\right) < 1, \\ n_2 < n_1, \end{cases}$$

где $f(x) \equiv (2-x)/\sqrt{x-1}$. В природных океанических волноводах параметр p обычно изменяется в пределах от 0,1 до 0,5, поэтому данные условия выполняются и СРП 2-го рода в таких волноводах существуют.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Реальные профили коэффициента преломления обычно представляются в виде таблиц после прямых или косвенных измерений. Пусть мы имеем такую таблицу для скоростей звука $c^{(i)}$, измеренных при соответствующих значениях поперечной координаты z_i в интервале $[-h_2, h_1]$:

z_i	$c^{(i)}$	(15)
$-h_2$	$c(-h_2)$	
$-h_2 + \Delta h_1$	$c(-h_2 + \Delta h_1)$	
\dots	\dots	
h_1	$c(h_1)$	

Предполагая, что профиль скорости звука $c(z)$ отвечает распределению (8), с помощью метода наименьших квадратов найдем соответствующие параметры $\gamma_{1,2}$, $m_{1,2}$ для оценки возможности существования СРП. Для определения параметров γ_1 , m_1 необходимо минимизировать величину

$$\Upsilon(\gamma_1, m_1) = \sum_{i=2}^{N_1} \left[y_i - 1 + \gamma_1 \left| \frac{z_i}{h_1} \right|^{2m_1} \right]^2$$

с учетом условий $\gamma_1 > 0$, $m_1 > 0$. Здесь $y_i = (c_0/c^{(i)})^2$, c_0 — значения скорости на оси волноводного канала, $c^{(i)}$ — значения скоростей выше оси канала, $i = 1, 2, \dots, N_1$, N_1 — число измерений скорости выше оси канала.

Приравняв градиенты функции $\Upsilon(\gamma_1, m_1)$ по отношению к переменным γ_1, m_1 нулю, получим следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^{N_1} \left[y_i - 1 + \gamma_1 \left| \frac{z_i}{h_1} \right|^{2m_1} \right] |z_i|^{2m_1} = 0, \\ \sum_{i=2}^{N_1} \left[y_i - 1 + \gamma_1 \left| \frac{z_i}{h_1} \right|^{2m_1} \right] |z_i|^{2m_1} \ln \left| \frac{z_i}{h_1} \right| = 0. \end{cases}$$

После исключения γ_1 , получим уравнения относительно m_1 :

$$\sum_{i=2}^{N_1} (1 - y_i) |z_i|^{2m_1} \ln \left| \frac{z_i}{h_1} \right| \sum_{j=2}^{N_1} |z_j|^{4m_1} = \sum_{i=2}^{N_1} (1 - y_i) |z_i|^{2m_1} \sum_{j=2}^{N_1} |z_j|^{4m_1} \ln \left| \frac{z_j}{h_1} \right|,$$

или

$$\sum_{i=2}^{N_1} \sum_{j=2}^{N_1} (1 - y_i) |z_i z_j^2|^{2m_1} \ln \left| \frac{z_i}{z_j} \right| = 0. \quad (16)$$

Решив уравнение (16) относительно m_1 , получим

$$\gamma_1 = \gamma_1(m_1) = \frac{\sum_{i=2}^{N_1} (1 - y_i) |z_i|^{2m_1}}{\sum_{j=2}^{N_1} |z_j|^{4m_1}} |h_1|^{2m_1}. \quad (17)$$

В частности, для эквидистантных по поперечной координате измерений скорости волны, когда $z_i = i\Delta h$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $h_1 = N_1\Delta h$, получим из (16) следующее уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^{N_1} (1 - y_i) (ij^2)^{2m_1} \ln \left| \frac{i}{j} \right| = 0.$$

Соответственно, для коэффициента $\gamma_1(m_1)$ имеем из (17)

$$\gamma_1(m_1) = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} (1 - y_i) i^{2m_1}}{\sum_{i=1}^{N_1} i^{4m_1}} N_1^{2m_1}.$$

Аналогично можно оценить параметры γ_2 , m_2 . После этого можно проверить выполнение условий реализуемости СРП. Например, для существования СРП 1-го типа согласно (11) достаточно выполнения неравенств $\gamma_{1,2}(m_{1,2}) \geq 1 - m_{1,2} \geq 0$. Отсюда получаем следующие условия:

$$\begin{cases} m_1 \leq 1, m_2 \leq 1, \\ \sum_{i=2}^{N_1} (1 - y_i) |z_i|^{2m_1} |h_1|^{2m_1} \geq (1 - m_1) \sum_{j=2}^{N_1} |z_j|^{4m_1} > 0, \\ \sum_{i=2}^{N_2} (1 - y_i) |z_i|^{2m_2} |h_2|^{2m_2} \geq (1 - m_2) \sum_{j=2}^{N_2} |z_j|^{4m_2} > 0 \end{cases} \quad (18)$$

выполнение которых означает, что измеренные в эксперименте данные (15) хорошо аппроксимируются профилем, в котором реализуются СРП 1-го типа.

Заметим, однако, что невыполнение некоторых из условий (18) еще не позволяет категорически утверждать, что СРП отсутствуют, так как параметры $\gamma_{1,2}$, $m_{1,2}$ определяются лишь с некоторой точностью, зависящей от точности измерений профиля скорости, и сами условия носят лишь достаточный характер. С другой стороны, при выполнении большей части условий (18) можно, по-видимому, рассматривать данный волновод как потенциально допускающий существование в нем СРП. Более глубоким явился бы выходящий за рамки настоящей работы вероятностный подход, при котором на основании статистики распределения случайных ошибок измерений скорости звука определяется статистика флуктуаций оценок параметров $\gamma_{1,2}$, $m_{1,2}$ по методу наименьших квадратов и вероятность выполнения неравенств (18). В этом случае индикатором возможности существования СРП явилась бы высокая вероятность выполнения данных неравенств.

Т а б л и ц а 2

$-z_i$	0,040	0,060	0,080	0,100	0,120	0,140	0,160
$c^{(i)}$	1,4634	1,4560	1,4551	1,4552	1,4578	1,4612	1,4634

В качестве примера рассмотрим зависимость скорости звука от глубины, наблюдавшуюся в реальном приповерхностном канале в северной части Тихого океана (см. табл. 2). Численным решением (16) можно получить следующие приближенные значения параметров: $m_1 \simeq 0,92$; $m_2 \simeq 0,66$; $\gamma_1 \simeq 0,46$; $\gamma_2 \simeq 0,14$.

Можно видеть, что здесь только одно из четырех достаточных условий (18) не удовлетворяется, а именно $\gamma_2 < 1 - m_2$. Таким образом, данный волновод можно считать потенциально допускающим существование в нем СРП 1-го типа.

В заключение отметим, что сформулированные в настоящей работе условия существования пучков могут быть использованы для построения карты мирового океана, показывающей возможные области расположения СРП в различных регионах. Это может быть полезно при планировании натуральных экспериментов по измерению интенсивности и когерентности пучков, а также при практической разработке систем томографического наблюдения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 97-02-17536).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Гончаров В. В., Дремучев С. А. и др. // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 2. С. 824.
2. Буслаев В. С., Прель М. В. // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 3. С. 296.
3. Гончаров В. В., Куртепов В. М. // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 5. С. 773.
4. Петухов Ю. В. // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 5. С. 807.
5. Петухов Ю. В. // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 1. С. 111.
6. Абросимов Д. И., Петухов Ю. В. Влияние дифракционных эффектов на формирование слаборасходящихся акустических пучков в подводном звуковом канале. — Препринт № 389. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996. 21 с.
7. Smirnov I. P., Caruthers J. W., Khil'ko A. I. — In book: The formation of acoustical fields in oceanic waveguides. Coherence Phenomena. — N. Novgorod: IAP RAS, 1997. P. 71.
8. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 264 с.

¹Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия,

²Naval Research Laboratory, USA,

³Институт прикладной физики РАН, г. Н. Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
11 ноября 1998 г.

**EXISTENCE CONDITIONS FOR WEAKLY DIVERGENT BUNDLES
IN REFRACTIVE WAVEGUIDES**

I. P. Smirnov,¹ J. V. Caruthers,² and A. I. Khil'ko³

We obtain the existence conditions for weakly divergent bundles (WDB) of different types in refractive waveguides with power-law dependence of square of the refraction index.

УДК 551.463:535.361:535.31

ФЛУКТУАЦИИ ЛИДАРНОГО СИГНАЛА ПРИ ЗОНДИРОВАНИИ МОРЯ ЧЕРЕЗ ВЗВОЛНОВАННУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

В. Л. Вебер

Разработана строгая методика расчета флуктуационных характеристик лидарного сигнала при зондировании верхнего слоя моря через поверхность, возмущенную одномерным ветровым волнением. Исследована зависимость среднего значения, дисперсии и коэффициента вариации сигнала моностатического моноаксиального лидара с идентичными параметрами излучателя и фотоприемника от глубины зондирования, скорости ветра и ширины диаграммы направленности лидара. Проведен анализ зависимости коэффициента корреляции лидарного сигнала от глубины зондирования. Дана физическая интерпретация полученных результатов.

При импульсном оптическом зондировании толщи моря через случайно-неровную поверхность раздела воздух—вода возникает ряд специфических эффектов, связанных с двукратным прохождением светового излучения через коррелированные участки этой поверхности. Наиболее изученным из таких эффектов является эффект усиления сигнала обратного рассеяния (СОР), состоящий в том, что среднестатистическое значение мощности эхо-сигнала, прошедшего через взволнованную границу раздела, при определенных условиях может превышать значение эхо-сигнала, прошедшего через гладкую границу (см., например, [1–4]). Менее исследованы задачи определения вторых статистических моментов лидарного СОР, в частности коэффициента вариации и функции корреляции СОР по глубине зондирования. В работах [4, 5] флуктуации лидарного сигнала исследованы в рамках “однолинзовой” модели, основой которой служит предположение о том, что граница раздела воздух—вода в области входа зондирующего пучка и выхода отраженных толщей воды и принимаемых фотоприемником лидара световых лучей является линзой со случайной кривизной. Соотношения для вторых статистических моментов мощности сигнала, обратно рассеянного толщей моря, полученные в этих работах, позволили, в частности, выявить немонотонный характер зависимости дисперсии флуктуаций сигнала от глубины зондирования. Достоинством этой модели является ее очевидная физическая простота, а основным недостатком — невозможность получения на ее основе правильных количественных оценок в большинстве реальных ситуаций зондирования. Более общий подход к задаче определения вторых моментов СОР развит в работах [6–8]. В рамках этого подхода процесс распространения оптического излучения рассматривается с позиций геометрической оптики и уравнения переноса излучения; поверхность раздела воздух—вода предполагается случайной, с гауссовой статистикой. Однако в работах [6, 8] при расчете дисперсии флуктуаций лидарного СОР использовано линейное по уклонам волн приближение, основой которого является предположение о малости относительных флуктуаций сигнала. Условие малых флуктуаций реализуется в тех случаях, когда механизм углового отклонения световых лучей, обусловленный преломлением их на неровной границе раздела воздух—вода, оказывает на процесс формирования подводного светового поля более слабое влияние по сравнению с эффектами рассеяния света в водной среде. Очевидно, что это условие также ограничивает набор условий зондирования, при которых возможно применение данного подхода.

Цель данной работы состоит в получении достаточно строгих расчетных соотношений для первого и второго статистических моментов лидарного СОР (без использования линейного приближения) и исследовании на их основе зависимостей коэффициента вариации и функции корреляции СОР от глубины зондирования, скорости ветра одномерного волнения и параметров лидара.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На высоте H в плоскости z_1 , параллельной плоскости z_2 невозмущенной границы раздела воздух—вода (см. рис. 1), находится импульсный источник света с распределением светимости

$$B_s(\vec{r}_1, \vec{\Omega}_1, t) = B_s D_s(\vec{r}_1, \vec{\Omega}_1) D'_s(t),$$

где $B_s = W_s/(\Sigma_s \Delta_s)$, W_s — энергия излучаемого импульса, Σ_s — площадь апертуры источника, Δ_s — телесный угол излучения. Здесь и далее $\vec{\Omega}_i$ обозначает проекцию единичного вектора $\vec{\Omega}_i^0$ на плоскость $z = \text{const}$, \vec{r}_i — координаты точек в плоскости z_i . Апертурная функция источника удовлетворяет условиям

$$D_s(\vec{0}, \vec{0}) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} D'_s(t) dt = 1.$$

Источник света облучает случайно-неровную поверхность раздела под небольшими углами относительно вертикали. Световое излучение, проникающее в воду через взволнованную поверхность, рассеивается и частично поглощается в водной толще. Часть рассеянного излучения возвращается в атмосферу и попадает в приемник лидара, имеющий приемную диаграмму $D_r(\vec{r}'_1, \vec{\Omega}'_1)$, $D_r(\vec{0}, \vec{0}) = 1$.

Соотношение, определяющее связь сигнала обратного рассеяния с характеристиками трассы распространения излучения (лидарное уравнение), выведено в [7]. Из него, в частности, следует, что временная структура эхо-сигнала описывается сверткой функции источника $D'_s(t)$ с функцией $P(h)$, определяющей величину сигнала, отраженного от однородного рассеивающего экрана на глубине h в условиях непрерывного освещения. Это позволяет в дальнейшем перейти от рассмотрения нестационарной задачи к решению соответствующей стационарной задачи.

2. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Запишем выражение для случайной реализации мощности лидарного сигнала, принятого через взволнованную поверхность с глубины h [7]:

$$P(h) = \frac{B_s R_d}{\pi m^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} E_s(\vec{r}_3, h) E_r(\vec{r}_3, h) d\vec{r}_3, \quad (1)$$

где

$$E_{s,r}(\vec{r}_3, h) = \iint_{-\infty}^{+\infty} D_{s,r}(\vec{r}_1, \vec{\Omega}_1) e_{s,r}(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_3, \vec{\Omega}_1, h) d\vec{r}_1 d\vec{\Omega}_1,$$

$$e_{s,r}(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_3, \vec{\Omega}_1, h) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G_a(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2, \vec{\Omega}_1 \rightarrow \vec{\Omega}_{12}) G_n(\vec{\Omega}_{12} \rightarrow \vec{\Omega}_2, \vec{r}_2) e_c(\vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_3, \vec{\Omega}_2, h) d\vec{r}_2 d\vec{\Omega}_{12} d\vec{\Omega}_2,$$

G_a — функция Грина уравнения переноса излучения в атмосфере, определяющая яркость светового поля в точке \vec{r}_2 в направлении $\vec{\Omega}_{12}$ при облучении среды точечным мононаправленным

источником единичной мощности, расположенным в точке \vec{r}_1 и излучающим в направлении $\vec{\Omega}_1$ (см. рис. 1), G_n — функция Грина поверхности раздела, описывающая деформацию тела яркости при прохождении светового излучения через неровную поверхность, e_c — функция рассеяния водной среды, m — показатель преломления воды, $R_d = \sigma_\pi dh/4$ — коэффициент диффузного отражения слоя воды толщиной dh , σ_π — коэффициент рассеяния элементарного объема воды при угле рассеяния 180° .

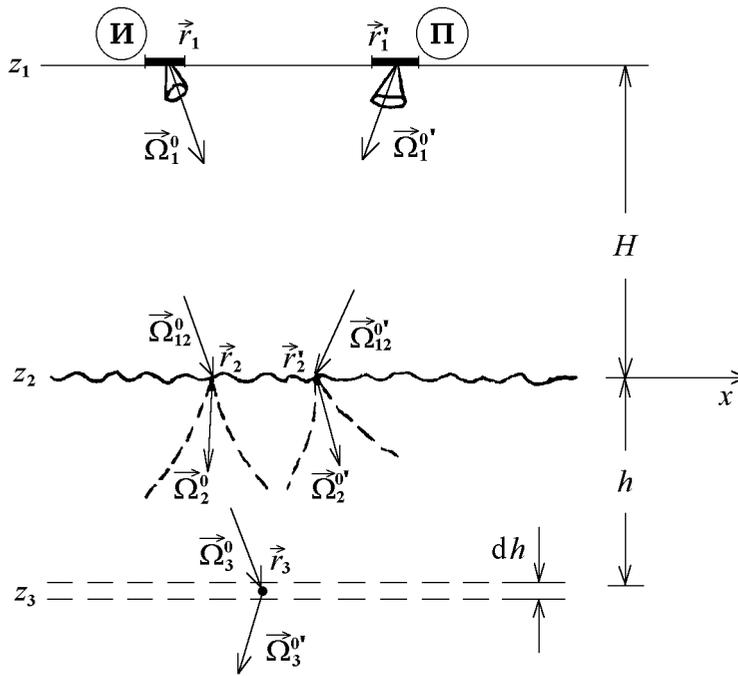


Рис. 1. Схема зондирования толщи моря

При зондировании в надир выполняются условия малоуглового приближения, в рамках которого выражение (1) имеет вид [7]

$$P(h) = \frac{B_s R_d}{\pi m^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_s(\vec{k}, h) \tilde{E}_r(-\vec{k}, h) d\vec{k}, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{s,r}(\vec{k}, h) = & F_c(\vec{k}, h) \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} F_{s,r}(\vec{\omega}, H\vec{\omega} + \frac{h}{m}\vec{k}) F_a(\vec{\omega}, \frac{h}{m}\vec{k}) \times \\ & \times \exp \left\{ i[(\vec{\omega} - \vec{k})\vec{r}_2 - a\vec{k}\vec{q}(\vec{r}_2)] \right\} d\vec{\omega} d\vec{r}_2, \end{aligned}$$

функции $F_{s,r}$ — Фурье-образы апертурных функций излучателя и приемника, $F_{a,c}$ — оптические передаточные функции атмосферы и воды, \vec{k} и $\vec{\omega}$ — пространственные частоты, $a = h(m - 1)/m$, $\vec{q}(\vec{r}_2)$ — вектор-градиент неровной поверхности раздела. Формула (2) учитывает все основные физические факторы задачи: случайный характер волнения на границе раздела, рассеивающие свойства морской воды, апертурные и угловые характеристики излучателя и приемника, геометрию зондирования рассеивающего объема водной среды. Заметим, что информация о геометрии зондирования в неявном виде содержится в функциях $F_{s,r}$. Соответствующие фазовые множители приводятся в дальнейших выражениях.

Поскольку аэрозондирование верхнего слоя моря осуществляется, как правило, со сравнительно небольших высот, влиянием атмосферы на формирование эхо-сигнала можно пренебречь и считать $F_a \equiv 1$.

Исходя из (2), запишем выражения для первого и второго статистических моментов сигнала обратного рассеяния. Выражение для первого момента имеет вид

$$\overline{P}(h) = \frac{B_s R_d}{\pi m^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{-\infty}^{+\infty} F_{s,r}(\vec{\omega}, H\vec{\omega} + \frac{h}{m}\vec{k}) F_c^2(\vec{k}, h) \times$$

$$\times \Theta_2(a\vec{k}, -a\vec{k}, \vec{\rho}) \exp \left\{ i[(\vec{k} - \vec{\omega})\vec{\rho} - (\vec{\omega}\Delta\vec{\rho}_0 + \alpha\vec{k}\Delta\vec{\rho})] \right\} d\vec{\omega} d\vec{k} d\vec{\rho}, \quad (3)$$

для второго момента —

$$\begin{aligned} M_P(h_1, h_2) &= \langle P(h_1) P(h_2) \rangle = \\ &= \left(\frac{B_s R_d}{\pi m^2} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^{10}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_s(\vec{\omega}_1, H\vec{\omega}_1 + \frac{h_1}{m}\vec{k}_1) F_s(\vec{\omega}_2, H\vec{\omega}_2 + \frac{h_2}{m}\vec{k}_2) \times \\ &\times F_r(\vec{\omega}_3, H\vec{\omega}_3 - \frac{h_1}{m}\vec{k}_1) F_r(-(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3), -H(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) + \frac{h_2}{m}\vec{k}_2) \times \\ &\times F_c^2(\vec{k}_1, h_1) F_c^2(\vec{k}_2, h_2) \Theta_4(a_1\vec{k}_1, a_2\vec{k}_2, -a_1\vec{k}_1, -a_2\vec{k}_2, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3) \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[(\vec{\omega}_1 - \vec{k}_1)\vec{\rho}_1 + (\vec{\omega}_2 - \vec{k}_2)\vec{\rho}_2 + (\vec{\omega}_3 + \vec{k}_1)\vec{\rho}_3 \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\Delta\vec{\rho}_0 + (\alpha_1\vec{k}_1 + \alpha_2\vec{k}_2)\Delta\vec{\rho} \right] \right\} d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{\omega}_1 d\vec{\omega}_2 d\vec{\omega}_3 d\vec{\rho}_1 d\vec{\rho}_2 d\vec{\rho}_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где Θ_2 и Θ_4 — двух- и четырехточечные характеристические функции распределения уклонов взволнованной морской поверхности,

$$\begin{aligned} F_{sr}(\vec{\omega}, H\vec{\omega} + \frac{h}{m}\vec{k}) &= F_s(\vec{\omega}, H\vec{\omega} + \frac{h}{m}\vec{k}) F_s(\vec{\omega}, H\vec{\omega} + \frac{h}{m}\vec{k}), \quad a_{1,2} = h_{1,2} \frac{m-1}{m}, \\ \alpha &= \frac{h}{mH}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{h_{1,2}}{mH}, \quad \Delta\vec{\rho} = H\Delta\vec{\Omega}, \quad \Delta\vec{\rho}_0 = \Delta\vec{\rho} + \Delta\vec{r}, \end{aligned}$$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_r - \vec{r}_s$ — база лидара, $\Delta\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_r - \vec{\Omega}_s$ — угловое рассогласование осей диаграмм направленности источника и приемника, $\vec{r}_{s,r}$ — координаты центров апертур источника и приемника, $\vec{\Omega}_{s,r}$ — проекции векторов, сонаправленных с осями диаграмм направленности соответственно источника и приемника, на плоскость $z = \text{const}$.

3. МОДЕЛИ ВОЛНЕНИЯ, СРЕДЫ, ИСТОЧНИКА И ПРИЕМНИКА

Дальнейший анализ требует задания конкретного вида входящих в (3), (4) апертурных функций источника и приемника, передаточной функции воды, характеристических функций уклонов волнения. Аппроксимируя диаграммы направленности источника и приемника гауссовыми функциями, получим

$$F_{s,r}(\vec{k}, \vec{p}) = \Sigma_{s,r} \Delta_{s,r} \exp \left[-(\Sigma_{s,r} k^2 + \Delta_{s,r} p^2) / 4\pi \right], \quad (5)$$

где $\Sigma_{s,r}$ — эффективная площадь излучающей (приемной) апертуры, $\Delta_{s,r}$ — эффективный телесный угол излучения (приема).

В качестве оптической передаточной функции рассеивающей толщи воды используем Фурье-образ распределения освещенности в среде с сильно анизотропным рассеянием, соответствующее автомодельному решению уравнения переноса излучения [3, 9, 10]:

$$F_c(\vec{k}, h) = \exp(-\kappa h) \sum_{i=1}^2 C_i(h) \exp \left[-g_i(h) k^2 / 4\pi \right], \quad (6)$$

где κ — коэффициент поглощения, C_1 и C_2 — амплитуды нерассеянной и рассеянной компонент излучения, $g_1 = 0$, g_2 — площадь сечения узкого пучка света в рассеивающей среде на расстоянии h от источника.

Выражения для двух- и четырехточечных характеристических функций уклонов морской поверхности приведены в [11]. Эти функции имеют следующий вид:

$$\Theta_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{\rho}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1-\infty}^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_z(\vec{\omega}) (\vec{\omega}\vec{k}_i) (\vec{\omega}\vec{k}_j) \exp(i\vec{\omega}\vec{\rho}) d\vec{\omega} \right\}, \quad (7)$$

$$\Theta_4(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1-\infty}^4 \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_z(\vec{\omega}) (\vec{\omega}\vec{k}_i) (\vec{\omega}\vec{k}_j) \exp(i\vec{\omega}\vec{\rho}_{ij}) d\vec{\omega} \right\}. \quad (8)$$

Здесь Φ_z — пространственный энергетический спектр возвышений взволнованной водной поверхности, $\vec{\rho}_{ij}$ выражаются через тройку векторов $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3$: $\vec{\rho}_{12} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_{34} = \vec{\rho}_3$ и т. д. (см. рис. 2).

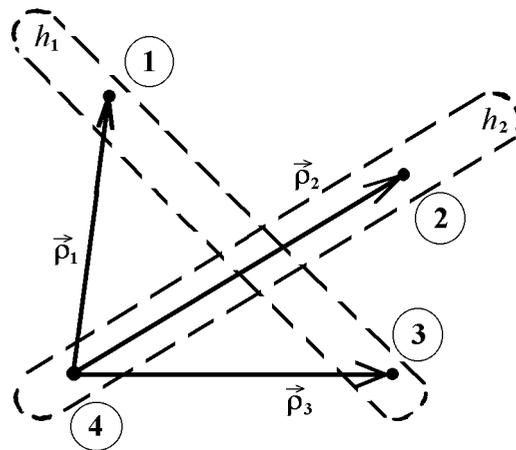


Рис. 2. Схема корреляторов для четырехточечной характеристической функции уклонов

4. ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ

Анализ формулы (4) для второго статистического момента лидарного СОР в работах [6, 8] осуществлялся путем разложения характеристической функции в степенной ряд с удержанием членов не выше второго порядка: k_i^2 и $\vec{k}_i\vec{k}_j$. Здесь мы откажемся от использования этого приема.

Сделаем одно упрощающее предположение, а именно будем рассматривать лишь случай одномерного волнения (с направлением распространения вдоль оси x). Это позволит нам, как будет видно из дальнейшего, прийти к достаточно простой окончательной формуле, выражающейся через трехкратный интеграл по переменным ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

Выражения для функций Θ_2 и Θ_4 , входящих в (3), (4), можно представить в виде

$$\Theta_2(ak, -ak, \rho) = \exp \left\{ -\frac{\Sigma_q}{4\pi} k^2 [1 - R_q(\rho)] \right\}, \quad (9)$$

$$\Theta_4(a_1k_1, a_2k_2, -a_1k_1, -a_2k_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3) = \exp \left[-(a_{13}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{24}k_2^2) \right],$$

где

$$a_{13} = a_1^2 \sigma_q^2 [1 - R_q(\rho_1 - \rho_3)], \quad a_{24} = a_2^2 \sigma_q^2 [1 - R_q(\rho_2)], \quad \Sigma_q = 4\pi a^2 \sigma_q^2,$$

$$a_{12} = \frac{1}{2} a_1 a_2 \sigma_q^2 [R_q(\rho_1 - \rho_2) + R_q(\rho_3) - R_q(\rho_1) - R_q(\rho_2 - \rho_3)],$$

σ_q^2 — дисперсия уклонов волн, R_q — нормированная корреляционная функция уклонов взволнованной поверхности ($R_q(0) = 1$); входящие в выражение (9) переменные k , ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 представляют собой x -компоненты соответствующих векторов, что отвечает случаю одномерного волнения границы раздела воздух–вода.

Без нарушения общности рассуждений можно считать, что векторы $\Delta\vec{r}$ и $\Delta\vec{\Omega}$ ориентированы вдоль оси x . Проведя последовательное интегрирование в (4) по переменным ρ_{1y} , ρ_{2y} , ρ_{3y} , ω_{1y} , ω_{2y} , ω_{3y} , k_{1y} , k_{2y} с использованием (5)–(9), получим в итоге

$$M_P(h_1, h_2) = \left(P_s \frac{\Sigma_r \Delta_r}{\pi m^2} R_d \right)^2 \exp[-2\kappa(h_1 + h_2)] \times \quad (10)$$

$$\times \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_i(h_1) C_j(h_1) C_k(h_2) C_l(h_2) \tilde{M}_P(h_1, h_2),$$

где

$$\tilde{M}_P(h_1, h_2) = M'_P(h_1, h_2) / \sqrt{[\Sigma_{sr} + S_{sr}(1 + \alpha_1)^2 + g_{ij}] [\Sigma_{sr} + S_{sr}(1 + \alpha_2)^2 + g_{kl}]},$$

$$M'_P(h_1, h_2) = \frac{1}{(2\pi)^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} [S_{sr}^0(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2S_r^0(\omega_3^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3) + \right.$$

$$+ 2(\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3) + S_{sr}(\alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2) + g_{ij} k_1^2 + g_{kl} k_2^2 \left. \right\} \exp [-(a_{13} k_1^2 + 2a_{12} k_1 k_2 + a_{24} k_2^2)] \times$$

$$\times \exp \{ i[k_1(\rho_3 - \rho_1 + \alpha_1 \Delta\rho) + k_2(\alpha_2 \Delta\rho - \rho_2)] \} dk_1 dk_2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3,$$

$$A_1 = \alpha_1 k_1 S_s + \alpha_2 k_2 S_r - 2\pi i \rho_1^0, \quad A_2 = \alpha_2 k_2 S_{sr} - 2\pi i \rho_2^0, \quad A_3 = S_r(\alpha_2 k_2 - \alpha_1 k_1) - 2\pi i \rho_3,$$

$$\rho_{1,2}^0 = \rho_{1,2} + \Delta\rho_0, \quad \Sigma_{sr} = \Sigma_s + \Sigma_r, \quad g_{ij} = g_i + g_j, \quad P_s = B_3 \Sigma_s \Delta_s$$

$$S_{sr} = S_s + S_r, \quad S_{s,r} = \Delta_{s,r} H^2, \quad S_{s,r}^0 = \Sigma_{s,r} + S_{s,r}, \quad S_{sr}^0 = S_s^0 + S_r^0.$$

Как и в (9), у всех входящих в (10) переменных подразумевается индекс x .

Дальнейшие преобразования сводятся к последовательному интегрированию выражения (10) по переменным ω_1 , ω_2 , ω_3 , k_1 и k_2 . В результате громоздких, но, в принципе, несложных выкладок получим

$$M'_P(h_1, h_2) = \frac{1}{\sqrt{2S_s^0 S_r^0 S_{sr}^0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{I_2}} \exp \left(-\frac{b_{33}}{2} - \pi \frac{I_3}{I_2} \right) d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3, \quad (11)$$

где

$$I_2 = b_{11} b_{22} - b_{12}^2, \quad I_3 = b_{11} b_{23}^2 + b_{22} b_{13}^2 - 2b_{12} b_{13} b_{23},$$

$$b_{11} = \gamma_{11} + 4\pi a_{13} + g_{ij}, \quad b_{22} = \gamma_{22} + 4\pi a_{24} + g_{kl}, \quad b_{12} = \gamma_{12} + 4\pi a_{12},$$

$$\begin{aligned}
b_{13} &= \alpha_1(\xi_1\rho_1^0 + \xi_2\rho_2^0 - \xi_3\rho_3) + \rho_1 - \rho_3 - \alpha_1\Delta\rho, \\
b_{23} &= \alpha_2(\xi_2\rho_1^0 + \xi_1\rho_2^0 + \xi_4\rho_3) + \rho_2 - \alpha_2\Delta\rho, \\
b_{33} &= \xi_5((\rho_1^0)^2 + (\rho_2^0)^2) + \xi_6\rho_3^2 - \xi_7\rho_1^0\rho_2^0 - \xi_8(\rho_1^0 + \rho_2^0)\rho_3, \\
\gamma_{11} &= \alpha_1^2\gamma_0, \quad \gamma_{22} = \alpha_2^2\gamma_0, \quad \gamma_{12} = \alpha_1\alpha_2(S_s S_r^0 - S_r S_s^0)^2 / (2S_s^0 S_r^0 S_{sr}^0), \\
\gamma_0 &= S_{sr} - [S_s^2(S_r^0)^2 + S_r^2(S_s^0)^2 + 2S_s^0 S_r^0(S_s^2 + S_r^2 + S_s S_r)] / (2S_s^0 S_r^0 S_{sr}^0), \\
\xi_1 &= [S_r + S_s(2 + S_r^0/S_s^0)] / (2S_{sr}^0), \quad \xi_2 = (S_r - S_s S_r^0/S_s^0) / (2S_{sr}^0), \\
\xi_3 &= [S_s + S_r(2 + S_s^0/S_r^0)] / (2S_{sr}^0), \quad \xi_4 = (S_r S_s^0/S_r^0 - S_s) / (2S_{sr}^0), \\
\xi_5 &= \pi(2 + S_r^0/S_s^0)/S_{sr}^0, \quad \xi_6 = \pi(2 + S_s^0/S_r^0)/S_{sr}^0, \\
\xi_7 &= 2\pi S_r^0/(S_s^0 S_{sr}^0), \quad \xi_8 = 2\pi/S_{sr}^0.
\end{aligned}$$

Выражение для среднестатистического значения мощности лидарного СОР ранее получено в [3]; в используемых здесь обозначениях оно имеет следующий вид:

$$\bar{P}(h) = P_s \frac{\Sigma_r \Delta_r}{\pi m^2} R_d \exp(-2\kappa h) \frac{1}{\sqrt{S_{sr}^0}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{C_i(h) C_j(h) J_\rho}{\sqrt{\Sigma_{sr} + S_{sr}(1 + \alpha)^2 + g_{ij}}}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
J_\rho &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{Q_{ij}}} \exp(-\pi\rho_0^2/S_{sr}^0) \exp[-\pi(\beta\rho_0 - \Delta\rho')^2/Q_{ij}] d\rho, \\
Q_{ij} &= S_f + \Sigma_q[1 - R_q(\rho)] + g_{ij}, \quad S_f = \Delta_{sr} \left(\frac{h}{m}\right)^2 \frac{\Sigma_{sr}}{S_{sr}^0}, \\
\beta &= 1 + \alpha S_{sr}/S_{sr}^0, \quad \rho_0 = \rho + \Delta\rho, \quad \Delta\rho' = \Delta\rho_0 + \alpha\Delta\rho.
\end{aligned}$$

Формулы (11), (12) являются самыми общими и позволяют рассчитывать статистические характеристики СОР для лидара с любыми параметрами и при любой геометрии зондирования. Здесь мы ограничимся подробным анализом лишь одного из возможных вариантов — моностатической моноаксиальной схемы лидара с идентичными апертурными функциями излучателя и приемника (аналогичная задача рассмотрена в [8] в линейном приближении). Для более ясного понимания роли взволнованной границы раздела воздух–вода в процессе формирования лидарного СОР в дальнейшем пренебрежем эффектами рассеяния и поглощения света в воде (анализ влияния этих эффектов на СОР предполагается провести в последующих работах).

Полагая в выражениях (11), (12)

$$\begin{aligned}
\Delta r = \Delta\Omega = 0, \quad \Sigma_s = \Sigma_r = \Sigma, \quad S_s = S_r = S, \\
\kappa = 0, \quad C_i = C_j = C_k = C_l = 1, \quad g_{ij} = g_{kl} = 0,
\end{aligned}$$

получим следующие формулы для 1-го и 2-го статистических моментов сигнала обратного рассеяния:

$$\bar{P}(h) = P_s \frac{\Sigma_r \Delta_r}{\pi m^2} R_d \frac{J_\rho}{\sqrt{S_0 [\Sigma + S(1 + \alpha)^2]}}, \quad (13)$$

где

$$J_\rho = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{Q}} \exp \left[-\pi \rho^2 \left(\frac{1}{2S_0} + \frac{\beta^2}{Q} \right) \right] d\rho,$$

$$Q = S_f + \Sigma_q [1 - R_q(\rho)], \quad S_f = 2\alpha^2 S \Sigma / S_0, \quad \beta = 1 + \alpha S / S_0, \quad S_0 = \Sigma + S;$$

$$M_P(h_1, h_2) = \left(P_s \frac{\Sigma_r \Delta_r}{\pi m^2} R_d \right)^2 \frac{1}{2S_0 \sqrt{S_0 S_{01} S_{02}}} M'_P(h_1, h_2), \quad (14)$$

где

$$M'_P(h_1, h_2) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{I_2}} \exp \left(-\frac{b_{33}}{2} - \pi \frac{I_3}{I_2} \right) d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3,$$

$$I_2 = b_{11} b_{22} - b_{12}, \quad I_3 = b_{11} b_{23}^2 + b_{22} b_{13}^2 - 2b_{12} b_{13} b_{23},$$

$$b_{11} = S_{f1} + \Sigma_{q1} [1 - R_q(\rho_1 - \rho_3)], \quad b_{22} = S_{f2} + \Sigma_{q2} [1 - R_q(\rho_2)],$$

$$b_{33} = \frac{\pi}{2S_0} \left[3(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2) - 2(\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3) \right],$$

$$b_{12} = \sqrt{\Sigma_{q1} \Sigma_{q2}} [R_q(\rho_1 - \rho_2) + R_q(\rho_3) - R_q(\rho_1) - R_q(\rho_2 - \rho_3)] / 2,$$

$$b_{13} = \gamma_1 (\rho_1 - \rho_3), \quad b_{23} = \gamma_2 \rho_2,$$

$$S_{0i} = 2 [\Sigma + S(1 + \alpha_i)^2], \quad \gamma_i = 1 + \alpha_i S / S_0,$$

$$S_{fi} = 2\alpha_i^2 S \Sigma / S_0, \quad \Sigma_{qi} = 4\pi a_i^2 \sigma_q^2.$$

Заметим, что формула для \bar{P} может быть получена из выражения для M_P , если в последнем положить $b_{12} = 0$.

Соотношения (13), (14) являются основными в последующем анализе. Поясним физический смысл некоторых входящих в них параметров: S_0 и S_{0i} определяют площади освещенных участков соответственно на поверхности раздела и на глубине зондирования h_i ; Σ_{qi} есть характерная площадь разброса лучей, обусловленного преломлением на неровной границе воздух-вода, на глубине h_i ; S_{fi} характеризует площадь фокусной перетяжки поверхностной линзы с фокусным расстоянием, равным h_i (отметим, кстати, что полагать равной нулю площадь апертуры или ширину диаграммы направленности лидара здесь, в отличие от линейной задачи [6, 8], нельзя, т. к. это привело бы к расходимости интегралов). Подынтегральная функция в (14) достаточно сложна и имеет острый максимум, положение которого зависит от многих параметров задачи. При проведении численного интегрирования весьма важно не пропустить этот максимум, т. к. он дает основной вклад в интеграл.

Произведем замену переменных в (14):

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{y-z}{\sqrt{2}} \right), \quad \rho_2 = y, \quad \rho_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{y+z}{\sqrt{2}} \right).$$

В результате такой замены подынтегральная функция в (14), как нетрудно убедиться, становится симметричной функцией переменных x, y, z . Это позволяет записать выражение для M'_P в виде

$$M'_P(h_1, h_2) = \frac{8}{\sqrt{2}} \iiint_0^\infty \frac{1}{\sqrt{I_2}} \exp \left(-\frac{b_{33}}{2} - \pi \frac{I_3}{I_2} \right) dx dy dz, \quad (15)$$

где I_2, I_3 определяются аналогично (14),

$$\begin{aligned} b_{11} &= S_{f1} + \Sigma_{q1}[1 - R_q(z)], & b_{22} &= S_{f2} + \Sigma_{q2}[1 - R_q(y)], \\ b_{12} &= \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma_{q1}\Sigma_{q2}} \{R_q[(\sqrt{2}x - y - z)/2] + R_q[(\sqrt{2}x + y + z)/2] - \\ &\quad - R_q[(\sqrt{2}x + y - z)/2] - R_q[(\sqrt{2}x - y + z)/2]\} \\ b_{13} &= -\gamma_1 z, & b_{23} &= \gamma_2 y, & b_{33} &= \pi(x^2 + y^2 + z^2)/S_0. \end{aligned}$$

Обращает на себя внимание определенное сходство структуры выражений (13) и (15). В силу этого можно ожидать некоторого подобия поведения первого и второго статистических моментов в зависимости от различных параметров задачи.

В качестве характеристик, определяющих зависимость флуктуаций рассеянного лидарного сигнала от различных параметров задачи, рассмотрим дисперсию $\sigma_P^2(h)$ флуктуаций,

$$\sigma_P^2(h) = M_P(h, h) - \bar{P}^2(h), \quad (16)$$

коэффициент $K_P(h)$ вариации СОР,

$$K_P(h) = \sigma_P(h)/\bar{P}(h), \quad (17)$$

коэффициент $R_P(h_1, h_2)$ корреляции СОР по глубине,

$$R_P(h_1, h_2) = \frac{M_P(h_1, h_2) - \bar{P}(h_1)\bar{P}(h_2)}{\sigma_P(h_1)\sigma_P(h_2)}. \quad (18)$$

5. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Соотношения (16)–(18) совместно с выражениями (13)–(15) позволяют исследовать зависимость коэффициентов вариации и корреляции лидарного сигнала от глубины зондирования, балльности волнения и ширины диаграммы направленности источника света и фотоприемника. Некоторые из полученных численным путем результатов представлены на рис. 3–7. Во всех рассмотренных случаях диаметр излучателя приемника составлял 0,04 м, высота размещения лидара — 100 м. Значения ширины диаграммы направленности лидара и скорости ветра в случаях, когда они не являются переменными, полагались равными соответственно $\Theta = 0,1^\circ$ и $v = 4$ м/с.

При анализе выражений (13)–(15) мы будем использовать следующие модели пространственной корреляционной функции уклонов.

Первая модель. Нормированная корреляционная функция уклонов выражается через корреляционную функцию возвышений поверхности, которая, в свою очередь, определяется путем Фурье преобразования энергетического спектра волнения. В качестве последнего берется спектр Пирсона–Московица, модифицированный введением обрезывающей функции:

$$\Phi_z(\vec{\omega}) = \mu / \left(2\omega^4\right) \exp\left(-\frac{\nu}{\omega^2} - \gamma\omega^2\right) \delta(\phi), \quad (19)$$

где $\delta(\phi)$ — дельта-функция, ϕ — угол в полярных координатах, $\mu = 11,5 \cdot 10^{-3}$, $\nu = 0,74g^2/v^4$, $g = 9,8$ м/с². Параметр γ обрезывающей гауссовой функции определяется из равенства рассчитанного по

(19) значения 4-го момента спектра и экспериментально полученной величины дисперсии кривизны морской поверхности. Подробно эта задача рассмотрена в [12].

Вторая модель. Функция $R_q(\rho)$ задается в гауссовом виде:

$$R_q(\rho) = \exp(-\rho^2/\rho_q^2),$$

где $\rho_q^2 = 2\sigma_q^2/\sigma_s^2$, $\sigma_q^2 = 2(3 + 1,92v) \cdot 10^{-3}$, $\sigma_s^2 = \frac{8}{3}(-4,13 + 1,23v)^2$, скорость ветра v выражена в м/с; экспериментальные соотношения для дисперсии уклонов σ_q^2 и кривизны σ_s^2 приведены соответственно в работах [13] и [14].

Третья модель. Корреляционная функция задается в виде параболы:

$$R_q(\rho) = 1 - \rho^2/\rho_q^2.$$

Подчеркнем, что корреляционные функции уклонов во всех моделях имеют одинаковые значения второй производной в нуле и, следовательно, обеспечивают одинаковые значения дисперсии кривизны.

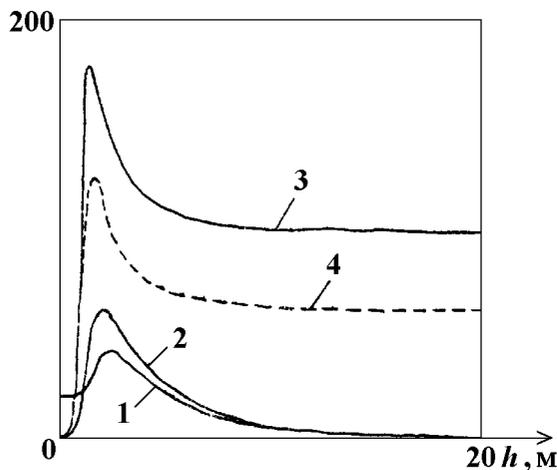


Рис. 3. Зависимости среднего значения мощности (кривая 1), корня из дисперсии, выраженного в относительных единицах (кривая 2), и коэффициента вариации (в процентах) лидарного сигнала (кривые 3 и 4) от глубины зондирования. Кривые 1, 2, 3 соответствуют гауссовой модели корреляционной функции R_q , кривая 4 — спектральной модели

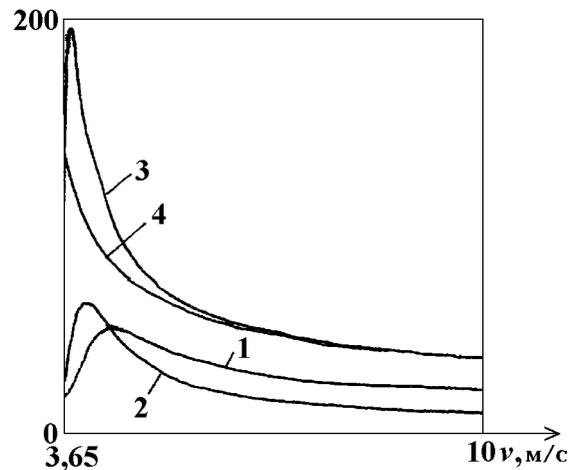


Рис. 4. Зависимости среднего значения мощности (кривая 1), корня из дисперсии, выраженного в относительных единицах (кривая 2), и коэффициента вариации (в процентах) лидарного сигнала (кривые 3 и 4) от скорости ветра. Кривые 1, 2, 3 соответствуют глубине зондирования $h = 2$ м, кривая 4 — $h = 10$ м.

На рис. 3 приведены зависимости среднего значения мощности, стандартного отклонения и коэффициента вариации лидарного СОР от глубины зондирования для гауссовой и спектральной моделей корреляционной функции. Как видно из рис. 3, зависимости $\bar{P}(h)$, $\sigma_P(h)$ и $K_P(h)$ являются немонотонными. Заметим, что положения максимумов зависимостей \bar{P} и $\sigma_P(h)$ не совпадают. Зависимости $K_P(h)$, полученные на основе разных моделей корреляционной функции уклонов, довольно сильно различаются по величине, однако обе модели дают одинаковое положение максимума $K_P(h)$. Расчеты для параболической модели $R_q(\rho)$ показали качественное согласие зависимости $K_P(h)$ с 1-й и 2-й моделями, однако коэффициент вариации для параболической модели имеет существенно большее значение. Различие значений $K_P(h)$ можно объяснить тем, что разным моделям $R_q(\rho)$ соответствует разная степень приближения формы поверхности раздела воздух—вода к форме линзы. Модель параболической $R_q(\rho)$ тождественна однолинзовой модели (это, в частности, проверено сравнением результатов

расчетов по (14), (15) с результатами [5]). Модель гауссовой корреляционной функции и более строгая первая модель, имеющая довольно сложный характер [12], моделируют поверхность раздела совокупностью линз гораздо более худшего качества (с отклонением формы участка поверхности раздела, попадающего в пятно разрешения лидара, от идеальной сферы), чем в случае параболической модели $R_q(\rho)$. Величина флуктуаций СОР определяется в основном степенью фокусировки света в толще воды. В свою очередь, степень фокусировки зависит от качества поверхностных линз, поэтому коэффициент вариации для 3-й модели имеет большее значение по сравнению со 2-й моделью, а для 2-й — большее, чем для 1-й. На глубинах $h \geq 10$ м наступает асимптотический режим, или режим глубинных флуктуаций. Здесь $K_P(h)$ имеет постоянное значение, которое можно рассчитать на основе формул (13), (15), в которых равны единице соответственно множители $\exp(-\pi\beta^2\rho^2/Q)$ и $\exp(-\pi I_3/I_2)$.

На рис. 4 приведены зависимости статистических характеристик лидарного СОР от скорости ветра (гауссовая модель корреляционной функции уклонов). В общем случае эти зависимости имеют немотонный характер. На начальном участке с ростом скорости ветра коэффициент вариации увеличивается. Это происходит вследствие поднятия зоны фокусировки светового излучения и приближения ее к выбранной глубине зондирования, а также вследствие роста дисперсии уклонов поверхности. На участке спада зависимости $K_P(v)$ определяющим является иной механизм. Так как с увеличением скорости ветра масштаб неровностей на границе раздела уменьшается, то на участке поверхности, освещенной лидаром, становится все больше “независимых” поверхностных линз. Вследствие этого все большую роль в формировании СОР начинают играть эффекты усреднения по пятну разрешения лидара. Расчеты показывают, что для параболической модели $R_q(\rho)$, в которой последний механизм принципиально не учитывается, зависимость $K_P(v)$ является монотонно растущей. Отметим, что использование линейного по уклонам волн приближения также приводит к неверному выводу о монотонном увеличении уровня флуктуаций СОР с ростом скорости ветра [6, 8]. Из физических соображений ясно, что в пределе — при переходе к границе раздела с мелкомасштабными неоднородностями — сигнал лидара не должен содержать флуктуационной составляющей. Такой же вывод справедлив и при переходе к гладкой границе раздела.

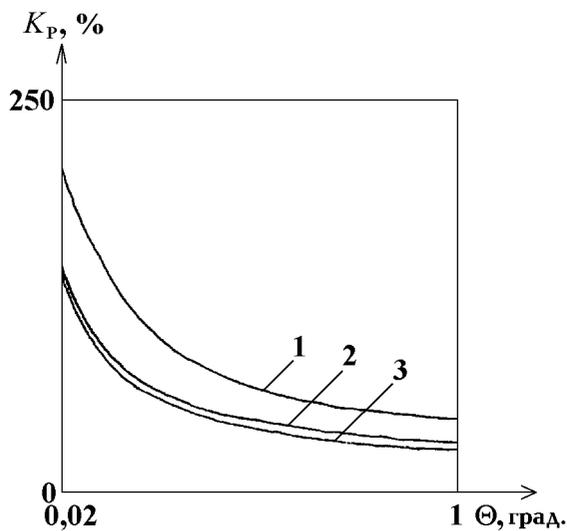


Рис. 5. Зависимость коэффициента вариации лидарного сигнала от угловой ширины диаграммы направленности лидара; кривая 1 соответствует глубине зондирования $h = 2$ м, кривая 2 — 10 м, кривая 3 — 30 м

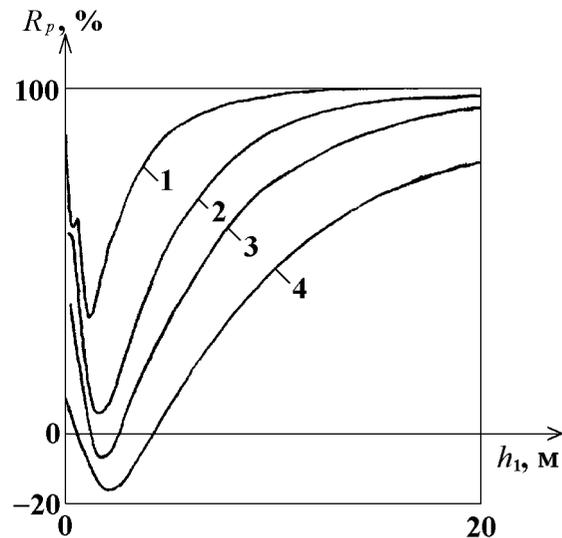


Рис. 6. Зависимость коэффициента корреляции лидарного сигнала от глубины зондирования; кривая 1 соответствует $\Delta h = 0,5$ м, кривая 2 — 2 м, кривая 3 — 5 м, кривая 4 — 20 м

На рис. 5 приведены зависимости коэффициента вариации лидарного СОР от ширины диаграммы направленности лидара (гауссовая модель зависимости $R_q(\rho)$). Эти зависимости имеют монотонно спадающий характер. С ростом Θ увеличивается площадь поверхности, освещенная лидаром, в результате чего происходит все более эффективное усреднение сигнала по независимым линзам поверхности, что, в свою очередь, ведет к снижению уровня флуктуаций. На больших глубинах (в режиме глубинных флуктуаций) зависимости $K_P(\Theta)$ практически повторяют друг друга. Аналогичные результаты получаются и для других моделей зависимости $R_q(\rho)$.

На рис. 6 приведены зависимости коэффициента корреляции лидарного СОР от глубины зондирования h_1 при фиксированном расстоянии между отсчетными глубинами $\Delta h = h_2 - h_1$ (гауссовая модель зависимости $R_q(\rho)$). Эти зависимости имеют сложный немонотонный характер. В качестве общей тенденции можно отметить рост коэффициента корреляции с увеличением глубины зондирования, причем скорость роста зависит от расстояния между отсчетными глубинами (скорость роста зависимости $R_P(h_1)$ максимальна для малых Δh). При большом разнесении отсчетов ($\Delta h \geq 5$ м) в зависимости $R_P(h_1)$ появляется участок с отрицательной корреляцией, положение минимума коэффициента корреляции при этом стабилизируется. Положение минимума зависимости $R_P(h_1)$, очевидно, связано с балльностью волнения, однако выявить эту связь из формул (13)–(18) нам пока не удалось. Качественно подобные результаты получаются и при расчетах с использованием параболической модели зависимости $R_q(\rho)$ [4, 5]. Отметим, что на основе расчетов для аналогичной схемы лидара в работе [8] сделан вывод о почти 100-процентной корреляции сигнала лидара в диапазоне глубин зондирования $0 \div 100$ м. Этот вывод противоречит нашим результатам и вряд ли верен. Скорее всего, он свидетельствует о некорректности использованного в [8] линейного приближения.

На рис. 7 приведены зависимости коэффициента корреляции лидарного СОР от расстояния между отсчетными глубинами Δh при фиксированной глубине зондирования h_1 . Данные зависимости также имеют сложный немонотонный характер, особенно на малых глубинах. На глубинах зондирования $1 \div 3$ м функция $R_P(\Delta h)$ имеет протяженный участок, характеризующийся отрицательными значениями корреляции. На глубинах $h_1 \geq 10$ м зависимость коэффициента корреляции является положительной, монотонно и медленно спадающей. На этих глубинах наблюдается высокая степень корреляции СОР, что следует также из рис. 6. Аналогичные закономерности поведения $R_P(\Delta h)$ отмечены при расчетах однолинзовой модели границы раздела воздух–вода [5].

В заключение отметим, что предложенная в данной работе методика расчета флуктуационных ха-

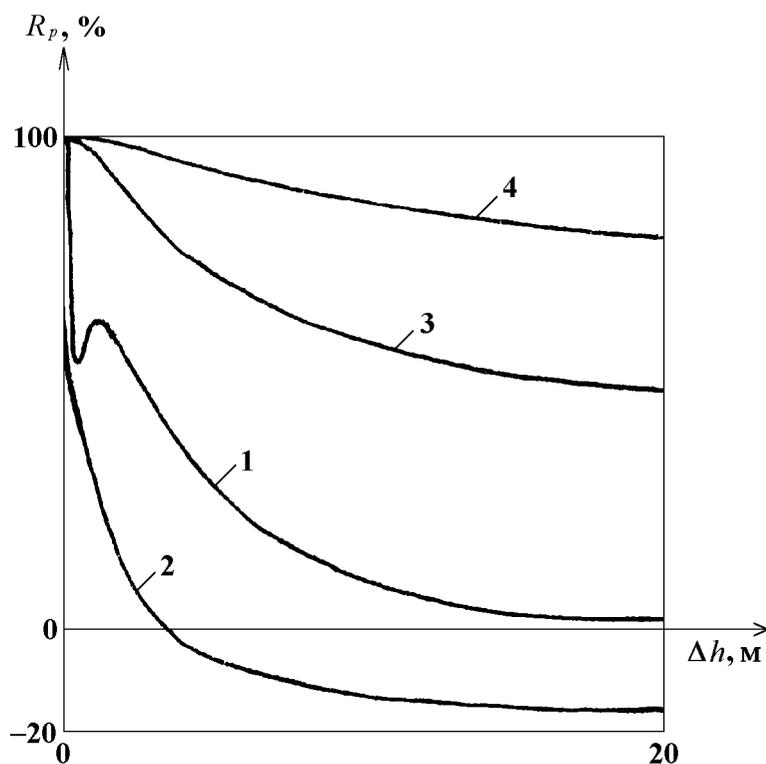


Рис. 7. Зависимость коэффициента корреляции лидарного сигнала от разности между отсчетными глубинами зондирования. Кривая 1 соответствует глубине зондирования $h_1 = 0,5$ м, кривая 2 — $h_1 = 2$ м, кривая 3 — $h_1 = 10$ м, кривая 4 — $h_1 = 20$ м

рактических характеристик лидарного сигнала может оказаться полезной как при проведении практических расчетов, так и для оценки пределов применимости других (приближенных) методик — как уже известных, так и новых. Полученные формулы для среднего значения, дисперсии, коэффициента вариации и функции корреляции лидарного СОР, несмотря на их относительную громоздкость, позволяют проводить расчеты для различных ситуаций зондирования на базе современных персональных ЭВМ достаточно оперативно. Например, для расчета одного значения коэффициента вариации на ЭВМ с процессором Pentium-100 требуется около одной минуты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 99-05-64798) и SPAWARSYSCEN (контракт № N68171-99-M-5352).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бункин А. Ф., Власов Д. В., Миркамилов Д. М., Слободянин В. П. // ДАН СССР. 1984. Т. 279, № 2. С. 335.
2. Varabanenkov Yu. N., Kravtsov Yu. A., Ozrin V. D., Saichev A. I. // Progress in Optics. 1991. V. 29. P. 65.
3. Вебер В. Л., Сергиевская И. А. // Изв. РАН. ФАО. 1992. Т. 28, № 3. С. 325.
4. Бункин А. Ф., Власов Д. В., Миркамилов Д. М. Физические основы лазерного аэрозондирования поверхности Земли. — Ташкент: ФАН, 1987. — 272 с.
5. Вебер В. Л. // Оптика моря и атмосферы. — Л.: ГОИ, 1988. — С. 406.
6. Лучинин А. Г. // Изв. АН СССР. ФАО. 1987. Т. 23, № 9. С. 976.
7. Вебер В. Л. // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24, № 6. С. 647.
8. Кондранин Т. В., Юрин Д. В. // Изв. РАН. ФАО. 1991. Т. 27, № 6. С. 648.
9. Долин Л. С. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1983. Т. 25, № 3. С. 300.
10. Долин Л. С. // Изв. АН СССР. ФАО. 1983. Т. 19, № 4. С. 400.
11. Вебер В. Л. // Изв. АН СССР. ФАО. 1984. Т. 20, № 3. С. 255.
12. Вебер В. Л. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8, № 9. С. 1394.
13. Cox S., Munk W. // J. Opt. Soc. Amer. 1954. V. 44, № 11. P. 838.
14. Бурцев Ю. Г., Пелевин В. Н. // Световые поля в океане. — М.: ИО АН СССР, 1979. — С. 231.

Институт прикладной
физики РАН, г. Н. Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
29 декабря 1998 г.

THE LIDAR SIGNAL FLUCTUATIONS FOR THE SEA SOUNDING THROUGH THE ROUGH SURFACE

W. L. Weber

We develop the rigorous calculation procedure for the characteristics of lidar-signal fluctuations for the sounding of the upper sea layer through surface disturbed by linear wind waves. We analyze the dependence of the mean value, dispersion and variation coefficient of mono-stationary mono-axial lidar signal with identical source and receiver parameters on the sounding depth, the wind velocity and the width of the lidar diagram. The analysis of the dependence of the correlation coefficient of the lidar signal on the sounding depth is carried out. The physical interpretation of the obtained results is given.

УДК 621.372.542

ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА БИФУРКАЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ УДВОЕНИЙ ПЕРИОДОВ В РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕССЛЕРА

В. А. Двинских, С. В. Фролов

В [1] рассмотрена процедура построения бифуркационных линий периода повторения циклов T одной из модельных систем Ресслера

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ey, \quad \dot{z} = b + xz - \mu z$$

с параметрами $e = b = 0,2$. При этом при $\mu = 2,5$ имеет место устойчивый предельный цикл с периодом T_0 , в единицах которого в дальнейшем будем измерять время. При $\mu \approx 2,83$ этот цикл претерпевает бифуркационное удвоение периода.

Известно, что классический метод вычисления параметров составляющих спектра цифровых сигналов, основанный на использовании дискретного преобразования Фурье, обладает низкой разрешающей способностью [2]. Ограниченность интервала наблюдения приводит к искажению вычисленного спектра из-за учета сигнала в боковых лепестках спектра основного колебания. Для уменьшения влияния боковых лепестков используются различные окна, спектры которых имеют более широкий главный лепесток по сравнению с прямоугольным окном, что снижает частотную избирательность. В последние годы начинают находить применение параметрические методы [2], обладающие более высокой избирательностью, реализующейся, однако, только при незначительном уровне шумов. При использовании указанных выше методов из данных должна быть предварительно удалена постоянная составляющая. Это, помимо усложнения процесса обработки, может приводить к появлению дополнительной погрешности при вычислении уровня переменных составляющих [3].

Целью работы является уменьшение влияния искажений спектра на оценку значений параметра бифуркаций.

При решении приведенной выше системы уравнений по методу Рунге—Кутты четвертого порядка с шагом 0,05 для уменьшения влияния переходного процесса вычисление спектра начиналось с десятого периода входной последовательности. Рассмотрим последовательность отсчетов $X(n)$, $n = 1, 2, \dots, N$, содержащую P периодических составляющих, число составляющих и их частоты неизвестны, можно указать лишь ожидаемый частотный диапазон. Разобьем этот диапазон на L интервалов, в каждом из которых аппроксимируем отсчеты тригонометрическим полиномом первого порядка [4]

$$y_j(n) = G_j + S_j \sin(h_j n) + C_j \cos(h_j n),$$

где $j = 1, 2, \dots, L \gg P$, G_j, S_j, C_j — постоянные на j -том интервале коэффициенты, $h_j = 2\pi/N_j$ — шаг вычислений на j -м интервале N_j — количество отсчетов за время j -того интервала. В отличие от преобразования Фурье этот шаг может принимать дробные значения, обеспечивая выявление мелких деталей спектра. Кроме того, одновременно определяется и постоянная составляющая сигнала, что позволяет проводить вычисления в реальном времени. По методу наименьших квадратов вычисляем значения коэффициентов G_j, S_j, C_j и определяем модули

$$M_j = \sqrt{S_j^2 + C_j^2},$$

где $j = 1, 2, \dots, L$, зависимость которых от частотных интервалов представляет собой спектр анализируемого процесса [2]. При шаге 0,0025 по частоте и обработке около десяти периодов входной последовательности для $\mu = 2,8$, получен спектр A_0 периодов исходного колебания, изображенный на

рис. 1. Анализ этого рисунка показывает, что из-за наличия боковых лепестков спектра основного колебания трудно обнаружить составляющую с удвоенным периодом и тем более оценить ее уровень. В [5] приведены аппроксимирующие выражения, позволяющие уменьшить влияние боковых лепестков вблизи максимума спектра, соответствующего основному колебанию. В рассматриваемом случае выделим основное колебание

$$q_k = G_k + S_k \sin(b_k i) + C_k \cos(b_k i),$$

соответствующее максимуму спектра на рис. 1. Здесь G_k, S_k, C_k — коэффициенты, b_k — частотный множитель, i — переменная изменяющаяся в тех же пределах, что и исходный процесс. Предполагая

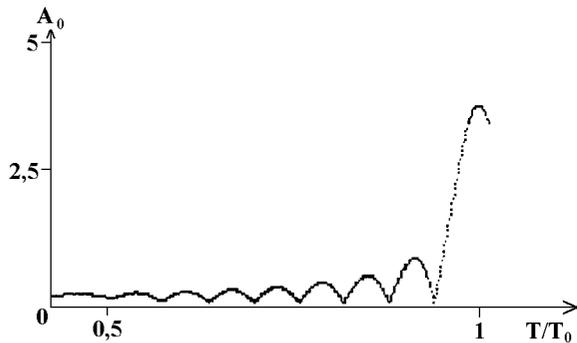


Рис. 1.

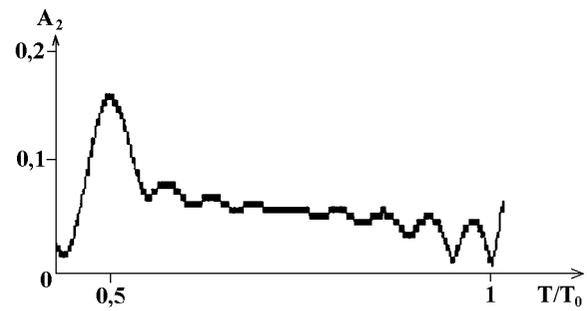


Рис. 2.

затем, что существует только это колебание, с тем же шагом вычисляем его спектр

$$MK_j = \sqrt{Z1_j^2 + Z2_j^2},$$

где $j = 1, 2, \dots, L$, $Z1, Z2$ — коэффициенты соответственно при синусах и косинусах спектра основного колебания. Далее осуществляется последовательное вычитание из коэффициентов исходного спектра соответствующих коэффициентов спектра основного колебания q_k :

$$W1_j = S_j - Z1_j, \quad W2_j = C_j - Z2_j,$$

где $j = 1, 2, \dots, L$. В результате получаем изображенный на рис. 2 разностный спектр A_2

$$MR_j = \sqrt{W1_j^2 + W2_j^2},$$

где $j = 1, 2, \dots, L$. Полученный разностный спектр позволяет наблюдать удвоение периода в решении системы уравнений. Наличие в этом спектре некоторой неравномерности связано с конечным шагом по частоте и влиянием боковых лепестков составляющей с удвоенным периодом.

В программе, составленной по методике аппроксимации последовательности отсчетов тригонометрическим полиномом первого порядка, предусмотрена непосредственная обработка входного отсчета по всем частотным составляющим. Это позволило при обработке приблизительно тысячи периодов входных последовательностей получить следующие значения параметров бифуркации: $\mu_2 = 2,71$, $\mu_4 = 3,8$, $\mu_8 = 4,24$, где нижний индекс указывает последовательность удвоений периода. В этом случае константы Фейгенбаума

$$\delta = (\mu_4 - \mu_2)/(\mu_8 - \mu_4) = 2,4772,$$

что находится в удовлетворительном соответствии с известным из литературы значением [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990. — 312 с.
2. Марпл С. Л. Цифровой спектральный анализ и его применение. — М.: Мир, 1990. — 535 с.
3. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры. — М.: Недра, 1987. — 221 с.
4. Двинских В. А. // ЖТФ, 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 168.
5. Двинских В. А. // Радиотехника и электроника, 1992. Т. 37. Вып. 6. С. 1129.

Саратовский госуниверситет,
г. Саратов, Россия

Поступила в редакцию
20 ноября 1998 г.

**THE ESTIMATE FOR THE BIFURCATION PARAMETER OF THE PERIOD DOUBLING SEQUENCE IN SOLUTIONS
OF THE RESSLER SYSTEM OF EQUATIONS**

V. A. Dvinskykh and S. V. Frolov

СТИМУЛИРОВАННАЯ ВНЕШНИМ СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ РАБОТА ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА В РЕЖИМЕ ГЕНЕРАЦИИ

Д. А. Усанов, С. Б. Вениг, В. Е. Орлов

Показано, что при подаче на диод напряжения смещения, меньшего пикового, под действием сверхвысоко-частотного излучения могут стимулироваться колебания в генераторной схеме. При этом частота и амплитуда стимулированной сверхвысокочастотным излучением генерации зависят от уровня мощности излучения.

Известно [1–3], что воздействие СВЧ излучения высокого уровня мощности оказывает существенное влияние на характеристики токопереноса в структурах на основе p - n переходов. В работах [4, 5] было экспериментально обнаружено и теоретически описано явление качественного изменения вида вольт-амперных характеристик туннельных диодов под действием мощного СВЧ сигнала. В частности, было установлено, что вследствие появления термотока горячих носителей заряда и детекторного эффекта при воздействии СВЧ излучения пиковое значение тока на прямой ветви вольт-амперной характеристики туннельного диода уменьшается, и при определенном уровне мощности СВЧ сигнала исчезает участок с отрицательным дифференциальным сопротивлением. При использовании в качестве активного элемента автогенератора туннельного диода, запитываемого от источника постоянного напряжения, это приводило к срыву автоколебаний [6].

Воздействие СВЧ сигнала вызывает перераспределение напряжения от источника питания и напряжений, появляющихся в результате процессов детектирования, между туннельным диодом и его нагрузочным сопротивлением или между последовательно соединенными туннельными диодами [7]. В частности, такой процесс может приводить к возникновению режимов отрицательного дифференциального сопротивления, переключения и генерации при напряжениях питания на туннельном диоде, существенно меньших пикового значения.

При проведении экспериментальных исследований влияния внешнего СВЧ сигнала на вид вольт-амперной характеристики туннельный диод или несколько последовательно соединенных диодов типа 1И308, пиковые значения напряжения и тока которых равны соответственно 100 мВ и 22 мА, с помощью держателей размещались в отрезке короткозамкнутого волновода сечением $7,2 \times 3,4$ мм. Частота воздействующего излучения составляла 38 ГГц. Вольт-амперная характеристика туннельного диода фиксировалась с помощью характериографа, при этом, как отмечалось выше, диапазон изменения подаваемых напряжений смещения в отсутствие СВЧ сигнала не выходил за пределы линейного участка вольт-амперной характеристики, а величина последовательно подключенного к диоду сопротивления была равна 50 Ом. Для уменьшения влияния теплового разогрева диодной структуры диод запитывался от источника переменного напряжения с частотой 10 кГц.

На рис. 1 представлены экспериментальные результаты измерения вольт-амперных характеристик туннельного диода при различных значениях тока I через диод (рис. 1а — $I < 0,5I_n$, рис. 1б — $I = 0,8I_n$) в отсутствие и при подаче внешнего сверхвысокочастотного сигнала (кривая 1 на рис. 1б соответствует случаю, когда мощность СВЧ сигнала $P = 0$ мВт, кривая 2 — $P = 2$ мВт, кривая 3 — $P = 200$ мВт, кривая 4 — $P = 1200$ мВт.). При значениях тока через диод, меньших половины пикового тока I_n , ни при каких значениях подаваемой СВЧ мощности, вплоть до максимального значения, использовавшегося в эксперименте и составлявшего 1,6 Вт, падающий участок на вольт-амперной характеристике не возникал. В этом случае вольт-амперная характеристика диода с ростом мощности внешнего СВЧ сигнала смещалась в область больших положительных значений напряжения (рис. 1а).

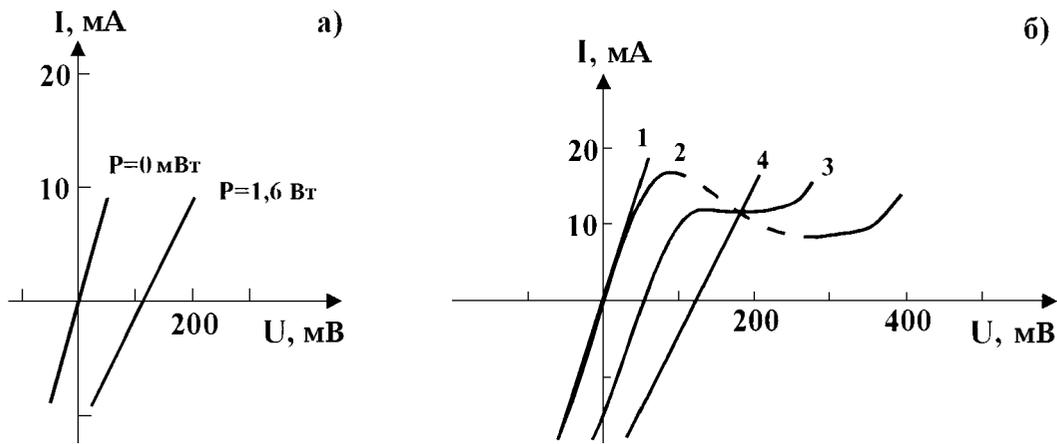


Рис. 1.

Для значений тока через диод в интервале $I_n/2 < I < I_n$ при подаче внешнего СВЧ сигнала начиная с некоторых значений уровня мощности воздействующего излучения на вольт-амперной характеристике диода возникал участок с отрицательным дифференциальным сопротивлением, причем с ростом тока через диод уменьшалась величина СВЧ мощности, при которой возникал этот участок. При дальнейшем повышении мощности воздействующего на диод СВЧ излучения начиная с некоторого значения мощности (в рассматриваемом случае 1,2 Вт) участок отрицательного дифференциального сопротивления исчезал и вольт-амперная характеристика туннельного диода вновь становилась практически линейной (рис. 1б).

Обнаруженный характер изменения вольт-амперной характеристики туннельного диода позволяет сделать вывод о том, что при воздействии на него внешнего сверхвысокочастотного сигнала возможно не только гашение колебаний, как показано в [4–6], но и их стимуляция при напряжениях на диоде в отсутствие СВЧ сигнала, существенно меньших пикового значения.

Для реализации этой возможности было создано устройство на туннельном диоде, в котором при наличии отрицательного сопротивления должен реализовываться режим, характерный для блокинг-генератора. Туннельный диод при этом размещался, как и при измерении его вольт-амперных характеристик, в волноводной камере. При начальных напряжениях U на диоде, подаваемых от источника питания и существенно меньших пикового значения U_n ($0,55U_n < U < U_n$), под воздействием внешнего СВЧ сигнала в генераторном устройстве возникали колебания, причем с ростом начального напряжения на диоде уменьшался уровень СВЧ мощности, необходимый для стимуляции колебаний (с 220 мВт до 2 мВт). На рис. 2 представлена зависимость мощности СВЧ сигнала, при которой стимулируются колебания, от величины напряжения на туннельном диоде, нормированной на пиковое значение. При исследовании зависимости характеристик стимулированных колебаний от уровня мощности внешнего СВЧ сигнала было обнаружено, что с ростом мощности амплитуда колебаний монотонно уменьшается, а частота монотонно увеличивается. На рис. 3 представлены зависимости частоты f генерации от мощности СВЧ излучения при различных значениях начального напряжения на диоде (кривая 1 на рис. 3 соответствует случаю, когда начальное напряжение на диоде $U = 55$ мВ, кривая 2 — $U = 60$ мВ, кривая 3 — $U = 88,5$ мВ, кривая 4 — $U = 220$ мВ). Как оказалось, изменение частоты колебаний в зависимости от уровня мощности сверхвысокочастотного сигнала значительно превышает (более чем в полтора раза для всего диапазона рабочих напряжений на диоде, подаваемых от источника питания) величину, характерную для соответствующего изменения частоты в зависимости от напряжения смещения на диоде, обусловленного источником питания. Такой характер изменения параметров гене-

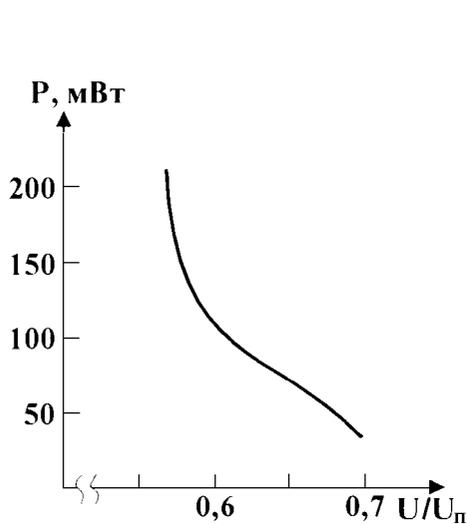


Рис. 2.

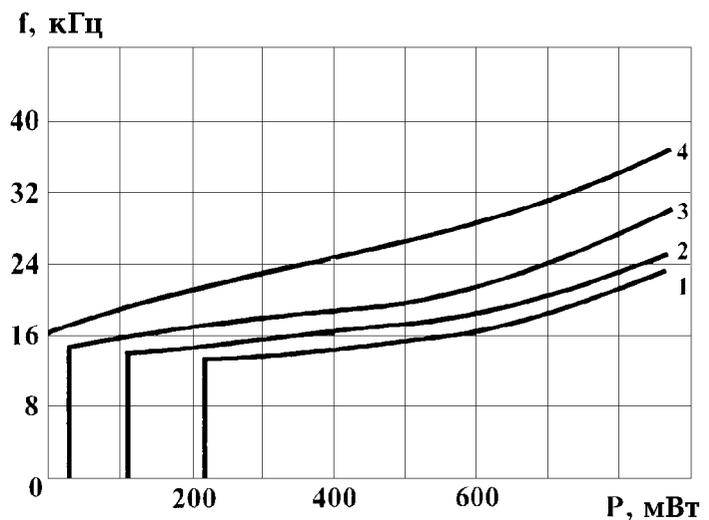


Рис. 3.

ратора на туннельном диоде при воздействии на него внешнего сверхвысокочастотного сигнала повышенной мощности может быть связан с тем, что под действием такого сигнала в широком диапазоне значений изменяется реактивное сопротивление диода.

Таким образом, показано, что при подаче на диод напряжения смещения, меньшего пикового, под действием сверхвысокочастотного излучения в генераторной схеме могут стимулироваться колебания. При этом частота и амплитуда стимулированных сверхвысокочастотным излучением колебаний зависит от мощности СВЧ излучения. Работа туннельного диода в режиме такой стимулированной генерации может служить основой для создания твердотельных устройств, например включающихся и выключающихся при определенных значениях мощности внешнего СВЧ сигнала. По изменению частоты генерации в таких устройствах можно судить о величине мощности воздействующего на диод СВЧ сигнала и, следовательно, и измерять это значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейнгер А. И., Парицкий А. Г., Акоюн Э. А., Дадамирзаев Г. // ФТП. 1975. Т. 9. № 2. С. 216.
2. Аблязимова Н. А., Вейнгер А. И., Питанов В. С. // ФТП. 1988. Т. 22. № 11. С. 2001.
3. Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Угрюмова Н. В. // ФТП. 1998. Т. 32. № 11. С. 1399.
4. Усанов Д. А., Коротин Б. Н., Орлов В. Е., Скрипаль А. В. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 8. С. 50.
5. Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Коротин Б. Н., Орлов В. Е. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. № 7. С. 81.
6. Усанов Д. А., Коротин Б. Н., Орлов В. Е., Скрипаль А. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 1. С. 98.
7. Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Орлов В. Е., Коротин Б. Н. // Изв. ВУЗов. Электроника. 1996. № 1–2. С. 129.

Саратовский госуниверситет,
г. Саратов, Россия

Поступила в редакцию
19 января 1999 г.

GENERATION-MODE OPERATION OF THE TUNNEL DIODE STIMULATED BY EXTERNAL MICROWAVE RADIATION

D. A. Usanov, S. B. Wenig, and W. E. Orlov

We show that oscillations in the generating circuit are stimulated under the action of microwave power if the feed bias voltage less than the peak value is applied to the diode. The frequency and amplitude of the generation stimulated by microwave radiation depend on the radiation power.

УДК 621.396.67

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

А. А. Мальцев, С. В. Зимица

С помощью метода последовательных приближений в первом, так называемом борновском, приближении получены выражения для спектрально-корреляционных характеристик выходного сигнала адаптивных антенных решеток в стационарном режиме работы. Показано, что флуктуации весовых коэффициентов приводят к искажениям спектра выходного сигнала, заключающимся в его уширении и появлении "провала" в полосе, несколько меньшей ширины спектра входного сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

Первоначальным этапом исследования адаптивных антенных решеток (ААР) является анализ усредненных уравнений алгоритма настройки без учета флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов и определение на этой основе скорости настройки и потенциальной эффективности работы системы в стационарном режиме [1, 2]. Даже при наличии флуктуаций волновых фронтов сигналов или быстрых флуктуаций параметров входных элементов анализ характеристик ААР, как правило, проводится или в квазистатистическом приближении, или в приближении "прямого размыкания" [3, 4].

Более серьезные проблемы возникают при статистическом анализе характеристик ААР с учетом флуктуаций адаптируемых (автоматически настраиваемых) весовых коэффициентов. Математически эти сложности проявляются в том, что процесс настройки адаптируемых весовых коэффициентов описывается стохастическими дифференциальными (или разностными для дискретных алгоритмов настройки) уравнениями, которые в качестве коэффициентов содержат некоторые функции от входных сигналов, помех и внутренних шумов системы.

Несмотря на актуальность решения такого типа задач, статистическая теория ААР в настоящее время далека от своего завершения. Среди публикаций, посвященных статистическому анализу ААР, в первую очередь следует отметить работы [5, 6]. В этих работах анализ ААР проводился для дискретного и непрерывного алгоритмов настройки в предположении статистической независимости флуктуаций весовых коэффициентов и входных сигналов. Было получено, что в этом приближении учет флуктуаций весовых коэффициентов приводит к появлению дополнительной ошибки (увеличению остаточной мощности) на выходе системы.

В работе [7] были получены точные качественные результаты статистического анализа адаптивных систем в непрерывном времени с учетом флуктуаций весовых коэффициентов. В частности, было показано, что для ААР с непрерывными градиентными алгоритмами настройки в стационарном режиме работы флуктуации весовых коэффициентов должны всегда приводить к возникновению эффекта перекомпенсации — уменьшению мощности сигнала на выходе системы.

В работе [8] исследовались статистические характеристики ААР при обработке дискретных сигналов с коррелированными временными отсчетами с учетом статистической зависимости флуктуаций весовых коэффициентов и входных сигналов. Было показано, что влияние флуктуаций весового вектора на выходной сигнал ААР может быть различным и в зависимости от величины коэффициента корреляции между отсчетами входного сигнала может приводить как к увеличению, так и к уменьшению (перекомпенсации) мощности выходного сигнала.

А. А. Мальцев, С. В. Зимица

1013

В настоящей статье исследуются статистические характеристики ААР с непрерывными градиентными алгоритмами методом последовательных приближений. Все результаты данной работы получены в первом, так называемом борновском, приближении. Поправки более высоких порядков имели следующий порядок малости по сравнению с результатами, полученными в борновском приближении, и их учет не приводил к существенным изменениям результатов анализа.

1. НАХОЖДЕНИЕ ВЕКТОРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ААР С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ДИАГРАММУ НАПРАВЛЕННОСТИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Настройка вектора весовых коэффициентов \vec{W} антенных решеток, работающих по градиентным алгоритмам с ограничениями, описывается N -мерным векторным уравнением [7, 8]

$$\tau_H \frac{d\vec{W}}{dt} + \vec{W} + \gamma \mathbf{P} \vec{X}^*(t) \vec{X}^T(t) \vec{W} = \vec{W}_q. \quad (1)$$

Здесь \vec{X} — зависящий от времени t вектор входных сигналов ($\langle \vec{X}(t) \rangle = 0$), индексы * и T обозначают соответственно операции комплексного сопряжения и транспонирования, τ_H — время релаксации системы, γ — коэффициент усиления в цепи корреляционной обратной связи, \vec{W}_q — вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующий требуемой диаграмме направленности (ДН) покоя (при отсутствии внешних помех), \mathbf{P} — проекционная матрица (пространственный матричный фильтр в контуре управления ААР), обеспечивающая введение многократных линейных ограничений на пространственные характеристики ААР.

Обычно проекционная матрица \mathbf{P} задается в виде $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^+ \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^+$, где $\mathbf{C} \equiv [\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_L]$ — матрица ограничений с размерностью $N \times L$, столбцами которой являются линейно независимые векторы ограничений \vec{C}_ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, L$, L — число вводимых ограничений, $+$ — знак эрмитова сопряжения. Можно показать, что матричный оператор \mathbf{P} осуществляет проекцию оценки градиента выходной мощности адаптивной системы по вектору весовых коэффициентов \vec{W} на гиперплоскость (в подпространство) ограничений:

$$\mathbf{C}^+ \vec{W} = \vec{H}, \quad (2)$$

где $\vec{H} \equiv \{H_1, \dots, H_L\}^T$ — вектор размерности L желаемого отклика адаптивной системы, компоненты которого задают фиксированные коэффициенты усиления адаптивной системы в направлениях векторов \vec{C}_ℓ^* .

Представим вектор весовых коэффициентов \vec{W} и стохастическую матрицу $\mathbf{M}_{xx}(t) \equiv \vec{X}^*(t) \vec{X}^T(t)$ в виде сумм их средних значений и флуктуационных составляющих:

$$\vec{W} = \langle \vec{W} \rangle + \tilde{\vec{W}}, \quad \mathbf{M}_{xx}(t) = \mathbf{R}_{xx} + \tilde{\Phi}(t), \quad (3)$$

где $\mathbf{R}_{xx} \equiv \langle \mathbf{M}_{xx}(t) \rangle$.

Усредняя (1) и используя обозначения (3), найдем точное уравнение для $\langle \vec{W} \rangle$:

$$\tau_H \frac{d\langle \vec{W} \rangle}{dt} + \langle \vec{W} \rangle + \gamma \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \langle \vec{W} \rangle = \vec{W}_q - \gamma \mathbf{P} \tilde{\mathbf{a}}_W, \quad (4)$$

где

$$\tilde{\mathbf{a}}_W \equiv \langle \tilde{\Phi} \tilde{\vec{W}} \rangle \quad (5)$$

— вектор кумулянтных функций третьего порядка, учитывающих статистическую зависимость флуктуаций весовых коэффициентов $\tilde{\vec{W}}$ и входных сигналов $\vec{X}(t)$.

Для определения статистических характеристик вектора весовых коэффициентов $\vec{W}(t)$ воспользуемся методом возмущений по параметру $\alpha = \frac{\tau_{\text{cor}}}{\tau_H}$, где τ_{cor} — время корреляции входных сигналов, который будем полагать малым ($\alpha \ll 1$). В качестве нулевого приближения возьмем среднее значение вектора весовых коэффициентов $\langle \vec{W} \rangle_0 \equiv \vec{W}_0$, получающееся из усреднения уравнения (1) в приближении прямого замыкания всех смешанных моментов:

$$\tau_H \frac{d\vec{W}_0}{dt} + \vec{W}_0 + \gamma \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_0 = \vec{W}_q. \quad (6)$$

В этом приближении мы вообще пренебрегаем флуктуациями весового вектора, считая $\vec{W}(t) = \langle \vec{W}(t) \rangle_0 = \vec{W}_0(t)$. Заметим, что для получения (6) из точного уравнения (4) следует положить

$$\vec{\alpha}_W \equiv \langle \tilde{\Phi} \vec{W} \rangle = \vec{\alpha}_{W_0} = \vec{0}. \quad (7)$$

Сравнение (4) и (6) также показывает, что статистическая зависимость флуктуаций весового вектора, вообще говоря, влияет на его среднее значение. Это влияние эквивалентно добавке к вектору \vec{W}_q вектора $\gamma \mathbf{P} \vec{\alpha}_W$, принадлежащего подпространству ограничений. Стационарное значение весового вектора в нулевом приближении $\vec{W}_{0\text{СТ}}$ будет удовлетворять уравнению

$$(\mathbf{I} + \gamma \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx}) \vec{W}_{0\text{СТ}} = \vec{W}_q, \quad (8)$$

решение которого можно найти известным способом [1, 9]:

$$\vec{W}_{0\text{СТ}} = (\mathbf{I} + \gamma \mathbf{R}_{xx})^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^+ (\mathbf{I} + \gamma \mathbf{R}_{xx})^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \vec{H}. \quad (9)$$

Вычитая (6) из (1), найдем уравнение для вектора поправки $\vec{W}_\Pi(t) \equiv \vec{W}(t) - \vec{W}_0(t)$ к нулевому приближению:

$$\tau_H \frac{d\vec{W}_\Pi}{dt} + \vec{W}_\Pi + \gamma \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_\Pi = -\gamma \mathbf{P} \tilde{\Phi} \vec{W}. \quad (10)$$

Можно показать, что в установившемся режиме $\vec{W}_\Pi(t) = \mathbf{P} \vec{W}_\Pi(t)$, т. е. все поправки (средние и флуктуационные) к нулевому приближению лежат в подпространстве ограничений. Поэтому уравнение (10) можно переписать в эквивалентном виде

$$\tau_H \frac{d\vec{W}_\Pi}{dt} + \vec{W}_\Pi + \gamma \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \vec{W}_\Pi = -\gamma \mathbf{P} \tilde{\Phi} \vec{W} \quad (11)$$

уже с эрмитовской матрицей $\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}$. Переходя по формулам

$$\vec{Y} \equiv \mathbf{Q}^{-1} \vec{W}_\Pi, \quad \vec{W}_\Pi \equiv \mathbf{Q} \vec{Y}, \quad \mathbf{Q}^{-1} \equiv \mathbf{Q}^+ \quad (12)$$

в \mathbf{Q} -матричное представление, диагонализующее эрмитовскую матрицу $\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}$, получим для \vec{Y} следующее уравнение:

$$\tau_H \frac{d\vec{Y}}{dt} + \vec{Y} + \gamma \Lambda \vec{Y} = -\gamma \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \tilde{\Phi} \vec{W}, \quad (13)$$

где

$$\Lambda = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \mathbf{Q}. \quad (14)$$

Матрица $\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}$ имеет точно L нулевых собственных значений, соответствующих ортонормированным векторам-столбцам \vec{C}_ℓ матрицы ограничений \mathbf{C} . Значения остальных $N - L$ собственных чисел

λ_n матрицы $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}$ заключены между наименьшим λ_{\min} и наибольшим λ_{\max} собственными числами матрицы \mathbf{R}_{xx} [10–12]. Таким образом, диагональная матрица Λ будет иметь вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{N-L} & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{\max} \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-L} \geq \lambda_{\min}. \tag{15}$$

В установившемся режиме решение уравнения (13) формально можно записать в виде

$$\vec{Y}(t) = -\frac{\gamma}{\tau_H} \int_0^\infty \Lambda(\tau) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \tilde{\Phi}(t - \tau) [\vec{W}_{\text{ОСТ}} + \mathbf{Q} \vec{Y}(t - \tau)] d\tau, \tag{16}$$

где $\Lambda(\tau)$ — диагональная переходная матрица уравнения (13) с элементами

$$\lambda_{nn}(\tau) = \exp \left\{ -\frac{1 + \gamma \lambda_n}{\tau_H} \tau \right\}. \tag{17}$$

Ряд теории возмущений можно построить путем итерирования интегрального уравнения (16) [13, 14]. В результате вектор $\vec{Y}(t)$ и соответствующий ему вектор поправки $\vec{W}_{\Pi}(t) = \mathbf{Q} \vec{Y}(t)$ запишутся в виде

$$\vec{Y}(t) = \vec{Y}_1(t) + \vec{Y}_2(t) + \vec{Y}_3(t) + \dots, \tag{18}$$

$$\vec{W}_{\Pi}(t) = \mathbf{Q} \vec{Y}(t) = \vec{W}_{\Pi 1}(t) + \vec{W}_{\Pi 2}(t) + \vec{W}_{\Pi 3}(t) + \dots \tag{19}$$

Члены ряда (18) соответственно будут равны

$$\begin{aligned} \vec{Y}_1(t) &= -\frac{\gamma}{\tau_H} \int_0^\infty \Lambda(\tau) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \tilde{\Phi}(t - \tau) \vec{W}_{\text{ОСТ}} d\tau, \\ \vec{Y}_2(t) &= -\frac{\gamma}{\tau_H} \int_0^\infty \Lambda(\tau) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \tilde{\Phi}(t - \tau) \mathbf{Q} \vec{Y}_1(t - \tau) d\tau = \\ &= \left(\frac{\gamma}{\tau_H} \right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \Lambda(\tau) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \tilde{\Phi}(t - \tau) \mathbf{Q} \Lambda(\tau') \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \tilde{\Phi}(t - \tau - \tau') \vec{W}_{\text{ОСТ}} d\tau d\tau', \\ &\dots\dots \\ \vec{Y}_{k+1}(t) &= -\frac{\gamma}{\tau_H} \int_0^\infty \Lambda(\tau) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \tilde{\Phi}(t - \tau) \mathbf{Q} \vec{Y}_k(t - \tau) d\tau, \\ &\dots\dots \end{aligned} \tag{20}$$

Для нахождения статистических характеристик ААР с помощью выражений (18)–(20) нам потребуется уточнить временную зависимость вектора входных сигналов. Будем полагать, что корреляционную матрицу входных сигналов можно аппроксимировать произведением:

$$\mathbf{R}_{xx}(t, t + \tau) \equiv \langle \vec{X}^*(t) \vec{X}^T(t + \tau) \rangle = \mathbf{R}_{xx} \exp \left\{ -\frac{|\tau|}{\tau_{\text{cor}}} \right\}, \tag{21}$$

где τ_{cor} — время корреляции входных сигналов. Условие (21) будет выполняться, например, для узкополосных ААР, если пренебрегать запаздыванием комплексных амплитуд $\vec{X}(t)$ на апертуре антенны. Это условие будет также выполняться при действии произвольного числа широкополосных помех (тогда τ_{cor} определяется полосой $\Pi_{\text{ВХ}}$ входных фильтров системы и равно $\tau_{\text{cor}} \approx 1/\Pi_{\text{ВХ}}$) и для узкополосных помех с одинаковыми временными корреляционными функциями (тогда $\tau_{\text{cor}} > 1/\Pi_{\text{ВХ}}$). При этом вид временной корреляционной функции входных сигналов при $\tau_{\text{cor}} \ll \tau_{\text{H}}$ ($\alpha \ll 1$) является несущественным и выбирается в экспоненциальном виде (21) только для удобства вычислений.

2. ОДНОМОМЕНТНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ААР

Основными одномоментными характеристиками ААР, которые будут нас интересовать являются стационарное среднее значение весового вектора $\vec{W}_{\text{СТ}}$, корреляционная матрица флуктуаций весовых коэффициентов $\mathbf{K}_{\vec{W}} \equiv \langle \vec{W}^* \vec{W}^T \rangle$ и суммарная мощность выходного сигнала $\langle |Z|^2 \rangle_{\text{СТ}}$.

Непосредственно из (3) и (20) видно, что в первом (борновском) приближении поправка к среднему значению весового вектора равна нулю ($\langle \vec{Y}_1(t) \rangle = 0$, $\langle \vec{W}_{\text{П1}}(t) \rangle = 0$), поскольку $\langle \vec{\Phi}(t) \rangle = 0$. Всюду ниже будем дополнительно предполагать, что $\vec{X}(t)$ является комплексным гауссовским случайным вектором. Тогда, воспользовавшись формулами (21) и формулой (59) приложения, можно найти поправку к среднему значению весового вектора $\vec{W}_{\text{0СТ}}$ с точностью до второго слагаемого ряда (19):

$$\langle \vec{W}_{\text{П2}} \rangle = \mathbf{Q} \langle \vec{Y}_2 \rangle = \frac{\alpha \gamma^2}{2} \text{Sp}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx}) [\mathbf{I} + \gamma \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{\text{0СТ}}, \quad (22)$$

где

$$\text{Sp}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx}) \equiv \text{Sp}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}) \equiv \langle (\mathbf{P} \vec{X}^*)^+ (\mathbf{P} \vec{X}^*) \rangle = \sum_{n=1}^{N-L} \lambda_n \quad (23)$$

— шпур матрицы $\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}$, имеющий физический смысл эффективной (или активной в смысле изменения весового вектора) суммарной мощности входных сигналов.

Для ААР с ограничениями на ДН, например, выражение (23) имеет смысл суммарной мощности проекции вектора входных сигналов на гиперплоскость ограничений (т. е. мощность составляющих, действующих в подпространстве, дополнительном к подпространству векторов \vec{C}_ℓ). Для ААР, работающих по критерию максимизации отношения сигнал/шум (ААР МОСШ), это просто суммарная мощность сигналов в каналах решетки, а для ААР, минимизирующих средний квадрат ошибки (ААР МСКО), или автокомпенсаторов, — суммарная мощность сигналов во вспомогательных (компенсирующих) каналах [7].

Можно показать, что поправка второго порядка (22) лежит в подпространстве ограничений, т. е. $\mathbf{P} \langle \vec{W}_{\text{П2}} \rangle = \langle \vec{W}_{\text{П2}} \rangle$.

Подставляя (20) в (5) и используя формулу (59), можно найти и выражение для вектора $\vec{\alpha}_W$, учитывающего статистическую зависимость $\vec{W}(t)$ и $\vec{X}(t)$. В борновском приближении имеем

$$\vec{\alpha}_W \equiv \langle \vec{\Phi} \vec{W} \rangle \approx \vec{\alpha}_{W1} \equiv \langle \vec{\Phi} \mathbf{Q} \vec{Y}_1 \rangle = -\frac{\alpha \gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx}) \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{\text{0СТ}}. \quad (24)$$

Для анализа влияния флуктуаций на смещение среднего значения весового вектора $\vec{W}_{\text{СТ}}$ удобно воспользоваться найденным для вектора $\vec{\alpha}_W$ выражением (24), а вместо формулы (22) использовать точное уравнение

$$\vec{W}_{\text{СТ}} + \gamma \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{\text{СТ}} + \gamma \mathbf{P} \vec{\alpha}_W = \vec{W}_q, \quad (25)$$

которое получено для стационарного среднего значения весового вектора $\vec{W}_{\text{СТ}} \equiv \langle \vec{W} \rangle_{\text{СТ}}$ в предположении, что входные сигналы адаптивной системы являются стационарными и стационарно-связанными

случайными процессами. Подставляя (24) в (25), получим следующее уравнение для \vec{W}_{CT} (с точностью до второго слагаемого ряда теории возмущений (19)):

$$\vec{W}_{CT} + \gamma \mathbf{P}\mathbf{R}_{xx} \left[1 - \frac{\alpha\gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \right] \vec{W}_{CT} = \vec{W}_q. \quad (26)$$

Решение уравнения (26) находится аналогично решению уравнения (8) и имеет вид (см. (9))

$$\vec{W}_{CT} = (\mathbf{I} + \gamma' \mathbf{R}_{xx})^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^+ (\mathbf{I} + \gamma' \mathbf{R}_{xx})^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \vec{H}, \quad (27)$$

где

$$\gamma' = \gamma \left[1 - \frac{\alpha\gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \right]. \quad (28)$$

Из сравнения (27) и (9) видно, что флуктуации весовых коэффициентов приводят к смещению их средних стационарных значений относительно \vec{W}_{0CT} . Однако это смещение легко учитывается путем простой замены в формуле (9) γ на γ' . Таким образом, действие флуктуаций на среднее значение \vec{W}_{CT} в рассматриваемом приближении эквивалентно небольшому уменьшению (так как $0 < \frac{\alpha\gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \ll 1$) коэффициента усиления γ в цепи корреляционной обратной связи.

Очевидно, что небольшим увеличением γ можно нейтрализовать это смещение, поэтому в дальнейшем различием между \vec{W}_{CT} и \vec{W}_{0CT} мы будем пренебрегать.

Используемое при вычислении средних значений кратных интегралов типа (20) предположение о малости времени корреляции входных сигналов (помех) по сравнению с эффективным временем релаксации системы имеет вид

$$\tau_{cor} \ll \tau_{n\text{eff}} \equiv \frac{\tau_H}{1 + \gamma\lambda_n}, \quad (29)$$

откуда получаем простое, легко проверяемое на практике достаточное условие применимости метода:

$$\alpha(1 + \gamma\lambda_n) < \alpha \left(1 + \gamma \sum_{n=1}^{N-L} \lambda_n \right) = \alpha[1 + \gamma \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})] \ll 1. \quad (30)$$

Как видно, для применения метода возмущений к анализу статистических характеристик адаптивных систем с корреляционными обратными связями требуются взаимосвязанные ограничения на время корреляции ($\alpha = \tau_{cor}/\tau_H \ll 1$) и эффективную мощность $\gamma \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})$ входных сигналов. Следует подчеркнуть, что при нормальных режимах работы ААР условие (30) обычно выполняется. Так, например, в работе [15] рекомендуется выбирать ширину полосы пропускания замкнутого контура управления, приблизительно равную $[1 + \gamma \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})]$, не более 0,1 от ширины полосы пропускания входных каналов решетки, примерно равной $1/\tau_{cor}$.

Матрицу ковариации вектора весовых коэффициентов в совпадающие моменты времени в борновском приближении можно представить так:

$$\mathbf{K}_{\vec{W}} \equiv \mathbf{K}_{\vec{W}}(t, t) \equiv \langle \vec{W}^*(t) \vec{W}^T(t) \rangle \approx \mathbf{Q}^* \langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t) \rangle \mathbf{Q}^T. \quad (31)$$

Используя (20) и (59), можно найти следующее выражение для элементов корреляционной матрицы $\langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t) \rangle$:

$$\langle \langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t) \rangle \rangle_{mn} = \frac{\alpha\gamma}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \frac{\gamma\lambda_n}{1 + \gamma\lambda_n} \delta_{mn}, \quad (32)$$

где $\langle |Z|^2 \rangle_0$ — величина выходной мощности без учета флуктуаций весовых коэффициентов, δ_{mn} — символ Кронекера. В практически важном случае

$$\gamma\lambda_{N-L} > \gamma\lambda_{\min} \gg 1 \quad (33)$$

корреляционная матрица $\langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t) \rangle$ принимает вид

$$\langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t) \rangle = \frac{\alpha\gamma}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{O} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Следовательно, при этом все ненулевые диагональные элементы матрицы ковариации вектора весовых коэффициентов в \mathbf{Q} -матричном представлении оказываются одинаковыми. Подставляя (34) в (31) и используя формулу (65) приложения, нетрудно найти ковариационную матрицу флуктуаций исходного весового вектора $\vec{W}(t)$:

$$\mathbf{K}_{\vec{W}} = \frac{\alpha\gamma}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \mathbf{P}^*. \quad (35)$$

Поскольку

$$\text{Sp}(\mathbf{P}) = \text{Sp}(\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^+) = N - L, \quad (36)$$

то из (35) легко получить и суммарную мощность флуктуаций весовых коэффициентов ААР:

$$\text{Sp}(\mathbf{K}_{\vec{W}}) = \langle \vec{\mathbf{W}}^T \vec{\mathbf{W}}^* \rangle = \frac{\alpha\gamma}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 (N - L). \quad (37)$$

Из найденных выражений (35), (37) следует, что введение ограничений на ДН в ААР делает флуктуации весовых коэффициентов взаимозависимыми (матрица $\mathbf{K}_{\vec{W}}$ становится не диагональной) и одновременно уменьшает суммарную дисперсию флуктуаций. Оба эти эффекта, очевидно, связаны с уменьшением числа степеней свободы для вектора $\vec{W}(t)$ за счет наложения L линейно независимых ограничений (можно показать, что для ААР без ограничений на ДН (ААР МОСШ и ААР МСКО) флуктуации регулируемых весовых коэффициентов будут взаимонезависимыми и иметь одинаковые дисперсии.)

Пропорциональность флуктуаций весовых коэффициентов величине выходной мощности $\langle |Z|^2 \rangle_0$ имеет простой физический смысл: сигнал с выхода ААР через цепи корреляционных обратных связей поступает на блок регулировки весовых коэффициентов и при конечном α приводит к их флуктуациям с дисперсией тем большей, чем больше коэффициент усиления цепи обратной связи γ .

Суммарную мощность на выходе ААР можно записать в виде

$$\langle |Z|^2 \rangle_{\text{СТ}} = \langle |Z|^2 \rangle_0 + \langle \vec{W}^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W} \rangle + [\vec{\mathbf{a}}_W^+ \vec{W}_{\text{СТ}} + \vec{W}_{\text{СТ}}^+ \vec{\mathbf{a}}_W] + \langle \vec{W}^+ \tilde{\Phi} \vec{W} \rangle, \quad (38)$$

где $\langle |Z|^2 \rangle_0 \equiv \vec{W}_{\text{СТ}}^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{\text{СТ}}$ — выходная мощность без учета флуктуаций весовых коэффициентов.

Слагаемые в (38), учитывающие влияние флуктуаций весовых коэффициентов, легко находятся из (24) и (35):

$$\langle \vec{W}^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W} \rangle = \text{Sp}(\mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}_{\vec{W}}^*) = \frac{\alpha\gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx}) \langle |Z|^2 \rangle_0, \quad (39)$$

$$\vec{\mathbf{a}}_W^+ \vec{W}_{\text{СТ}} + \vec{W}_{\text{СТ}}^+ \vec{\mathbf{a}}_W = -\alpha\gamma \text{Sp}(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx}) \langle |Z|^2 \rangle_0. \quad (40)$$

Последнее слагаемое в правой части (38) в борновском приближении можно получить, воспользовавшись формулами (20) и формулой (60) приложения:

$$\langle \vec{W}^+ \tilde{\Phi} \vec{W} \rangle = \frac{\alpha^2 \gamma^2}{2} \{ \text{Sp}^2(\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx}) \langle |Z|^2 \rangle_0 + \vec{W}_{\text{СТ}}^+ \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{\text{СТ}} \}. \quad (41)$$

Из (41) видно, что это слагаемое имеет следующий порядок малости по сравнению с (39), (40), и им в рассматриваемом приближении можно пренебречь. Ограничиваясь первым порядком малости по параметру α , в результате при $\gamma\lambda_{N-L} \gg 1$ найдем

$$\langle |Z|^2 \rangle_{CT} = \left\{ 1 - \frac{\alpha\gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_0. \quad (42)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении уменьшение суммарной мощности на выходе ААР за счет флуктуаций весовых коэффициентов прямо пропорционально относительному времени корреляции $\alpha = \tau_{\text{cor}}/\tau_H$ и эффективной мощности действующих помех, приблизительно равной $\gamma \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})$.

Используя формулы (20), (59) и (60), не испытывая принципиальных затруднений можно найти выражения для интересующих нас смешанных моментов и с точностью до членов второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \vec{a}_W &\approx \langle \tilde{\Phi} \mathbf{Q} \vec{Y}_1 \rangle + \langle \tilde{\Phi} \mathbf{Q} \vec{Y}_2 \rangle = \\ &= -\frac{\alpha\gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \mathbf{R}_{xx} \vec{W}_{CT} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{4} \mathbf{R}_{xx} [\text{Sp}^2(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \mathbf{I} + \mathbf{P}\mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}] \vec{W}_{CT}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\langle \vec{W}^+ \mathbf{R}_{xx} \vec{W} \rangle = \frac{\alpha\gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \langle |Z|^2 \rangle_0 - \frac{3}{4} \alpha^2 \gamma^2 [\text{Sp}^2(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \langle |Z|^2 \rangle_0 + \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})^2 \vec{W}_{CT}]. \quad (44)$$

Подставляя (41), (43) и (44) в (38), получим выражение для суммарной мощности на выходе ААР с точностью до членов второго порядка малости по α :

$$\begin{aligned} \langle |Z|^2 \rangle_{CT} &= \left\{ 1 - \frac{\alpha\gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \right\} \langle |Z|^2 \rangle_0 + \\ &+ \frac{\alpha^2\gamma^2}{4} [\text{Sp}^2(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \langle |Z|^2 \rangle_0 + \vec{W}_{CT}^+ \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})^2 \vec{W}_{CT}]. \end{aligned} \quad (45)$$

Отсюда видно, что учет поправок высших порядков не оказывает принципиального влияния на существование эффекта перекомпенсации, хотя с ростом $\frac{\alpha\gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})$ скорость уменьшения суммарной мощности $\langle |Z|^2 \rangle_{CT}$, как и следовало ожидать, спадает.

3. СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ААР

Найдем корреляционную матрицу флуктуаций весовых коэффициентов в несовпадающие моменты времени. Ограничиваясь борновским приближением, имеем

$$\mathbf{K}_{\vec{W}}(t, t') \equiv \langle \vec{W}^*(t) \vec{W}^T(t') \rangle \approx \mathbf{Q}^* \langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t') \rangle \mathbf{Q}^T. \quad (46)$$

Корреляционную матрицу флуктуаций в \mathbf{Q} -матричном представлении $\langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t') \rangle$, учитывая выражение (20), можно записать так:

$$\langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t') \rangle = \left(\frac{\gamma}{\tau_H} \right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \Lambda(\tau) (\mathbf{Q}^{-1})^* \mathbf{P}^* \langle \tilde{\Phi}^*(t-\tau) \vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^T \tilde{\Phi}^T(t'-\tau') \rangle \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^* \Lambda(\tau') d\tau d\tau'. \quad (47)$$

Используя формулу (59) приложения и представление (21), момент, стоящий под интегралом в (47), преобразуем к виду

$$\langle \tilde{\Phi}^*(t-\tau) \vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^T \tilde{\Phi}^T(t'-\tau') \rangle = \mathbf{R}_{xx}^* \text{Sp}(\vec{W}_{CT}^* \vec{W}_{CT}^T \mathbf{R}_{xx}^*) e^{-2|t'-\tau'-t+\tau|/\tau_{\text{cor}}} =$$

$$= \mathbf{R}_{xx}^* \langle |Z|^2 \rangle_0 e^{-2|t'-\tau'-t+\tau|/\tau_{\text{cor}}}.$$

Подставляя это выражение в (47) и выполняя интегрирование по τ' , получим

$$\langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t') \rangle = \left(\frac{\gamma}{\tau_H} \right)^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \int_0^\infty \Lambda(\tau) [\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \mathbf{Q}]^* \Lambda(t' - t + \tau) 1[\tau - (t - t')] d\tau. \quad (48)$$

При этом мы воспользовались малостью времени корреляции τ_{cor} функции $\exp \left\{ -\frac{2}{\tau_{\text{cor}}} |t' - t + \tau - \tau'| \right\}$ и упрощающим дальнейшие вычисления приближенным равенством

$$\int_0^\infty e^{-\frac{2|t'-t+\tau-\tau'|}{\tau_{\text{cor}}}} d\tau' \approx \tau_{\text{cor}} 1[\tau - (t - t')] = \tau_{\text{cor}} \begin{cases} 1, & \tau > t - t' \\ 0, & \tau < t - t' \end{cases}.$$

Учитывая (14), (15) и (17), выражение (48) можно переписать в более простом виде:

$$\langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t') \rangle = \left(\frac{\gamma}{\tau_H} \right)^2 \langle |Z|^2 \rangle_0 \int_0^\infty \Lambda \Lambda(2\tau + t' - t) 1[\tau - (t - t')] d\tau. \quad (49)$$

Выполняя в (49) поэлементное интегрирование диагональной матрицы Λ по τ , окончательно получим

$$\begin{aligned} \langle \vec{Y}_1^*(t) \vec{Y}_1^T(t') \rangle &= \frac{\alpha\gamma}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \gamma (\mathbf{I} + \gamma\Lambda)^{-1} \Lambda \Lambda(|t' - t|) \approx \\ &\approx \frac{\alpha\gamma}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 \begin{bmatrix} e^{-\frac{(1+\gamma\lambda_1)}{\tau_H} |t'-t|} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & e^{-\frac{(1+\gamma\lambda_{N-L})}{\tau_H} |t'-t|} & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (50)$$

Последнее приближенное равенство справедливо при выполнении условия (33). Подстановка (50) в (46) позволяет найти корреляционную матрицу флуктуаций вектора весовых коэффициентов в исходном представлении. Из (46) и (50) видно, что ширина спектра мощности флуктуаций весовых коэффициентов определяется максимальным собственным значением λ_1 и растет с увеличением мощности входных помех.

Рассмотрим влияние флуктуаций весовых коэффициентов на спектрально-корреляционные характеристики сигнала на выходе ААР. Корреляционная функция выходного сигнала может быть записана в виде

$$\begin{aligned} K_Z(t, t') &\equiv \langle Z^*(t) Z(t') \rangle = K_{Z_0}(t, t') + \\ &+ \langle \vec{W}^+(t) \vec{X}^*(t) \vec{X}^T(t') \vec{W}(t') \rangle + \vec{\alpha}_W^+(t', t) \vec{W}_{\text{CT}} + \vec{W}_{\text{CT}}^+ \vec{\alpha}_W(t, t'), \end{aligned} \quad (51)$$

где $K_{Z_0}(t, t') \equiv \vec{W}_{\text{CT}}^+ \langle \vec{X}^*(t) \vec{X}^T(t') \rangle \vec{W}_{\text{CT}}$ — корреляционная функция выходного сигнала без учета флуктуаций весового вектора,

$$\vec{\alpha}_W(t, t') \equiv \langle \tilde{\Phi}(t, t') \vec{W}(t') \rangle, \quad \tilde{\Phi}(t, t') \equiv \vec{X}^*(t) \vec{X}^T(t') - \langle \vec{X}^*(t) \vec{X}^T(t') \rangle. \quad (52)$$

Не останавливаясь на промежуточных вычислениях, которые выполняются аналогично сделанным выше, приведем сразу окончательные выражения для корреляционной функции (51) в стационарном режиме работы:

$$K_Z(\tau) = \langle |Z|^2 \rangle_0 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{cor}}}} + \frac{\alpha\gamma}{2} \langle |Z|^2 \rangle_0 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{cor}}}} \left(\sum_{n=1}^{N-L} \frac{\gamma\lambda_n^2}{1 + \gamma\lambda_n} e^{-\frac{(1+\gamma\lambda_n)|\tau|}{\tau_H}} \right) - \alpha\gamma \langle |Z|^2 \rangle_0 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{cor}}}} \left[1 + \frac{|\tau|}{\tau_{\text{cor}}} \right] \sum_{n=1}^{N-L} \lambda_n, \quad (53)$$

где $\tau = t' - t$. Из (53) видно, что спектр мощности выходного сигнала

$$S_Z(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_Z(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau \quad (54)$$

из-за модулирующего воздействия флуктуаций весовых коэффициентов претерпевает следующие искажения: во-первых, появляется положительная добавка с несколько уширенным спектром (второе слагаемое в правой части (53)) и, во-вторых, происходит уменьшение мощности сигнала (перекомпенсация) в полосе, несколько меньшей ширины спектра входного сигнала (за счет третьего слагаемого в правой части (53)). При выполнении условий (29) и (33) формула (53) существенно упрощается, принимая вид

$$K_Z(\tau) \approx \langle |Z|^2 \rangle_0 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{cor}}}} \left(1 - \frac{\alpha\gamma}{2} \left[1 + 2\frac{|\tau|}{\tau_{\text{cor}}} \right] \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \right), \quad (55)$$

и для спектральной плотности мощности сигнала на выходе ААР (54) нетрудно получить следующее выражение:

$$S_Z(\Omega) \approx \left(1 - \left[1 + \frac{2}{1 + \Omega^2\tau_{\text{cor}}^2} \right] \frac{\alpha\gamma}{2} \text{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \right) \frac{2\tau_{\text{cor}} \langle |Z|^2 \rangle_0}{1 + \Omega^2\tau_{\text{cor}}^2}, \quad (56)$$

из которого непосредственно видно, что эффект перекомпенсации выражен сильнее в центре полосы пропускания системы (при $\Omega \leq \frac{1}{\tau_{\text{cor}}}$).

В заключение отметим, что полученные в настоящей статье результаты (выражения для мощности и спектрально-корреляционных характеристик выходного сигнала ААР, количественное описание эффекта перекомпенсации) полностью согласуются с точными результатами работы [7] и позволяют утверждать, что корректный анализ адаптивных систем обработки непрерывных сигналов с конечным временем корреляции должен проводиться с обязательным учетом негауссовской статистической зависимости флуктуаций адаптируемых параметров и входных сигналов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Для комплексных совместно гауссовских случайных величин Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 моментная функция четвертого порядка может быть представлена в виде [1]

$$\langle Z_1^* Z_2 Z_3^* Z_4 \rangle = \langle Z_1^* Z_2 \rangle \langle Z_3^* Z_4 \rangle + \langle Z_1^* Z_4 \rangle \langle Z_2 Z_3^* \rangle. \quad (57)$$

На основании этой формулы несложно получить аналогичное выражение для комплексных совместно гауссовских случайных векторов $\vec{Z}_1, \vec{Z}_2, \vec{Z}_3, \vec{Z}_4$ размерности N :

$$\langle \vec{Z}_1^* \vec{Z}_2^T \mathbf{A} \vec{Z}_3^* \vec{Z}_4^T \rangle = \mathbf{R}_{z_1 z_2} \mathbf{A} \mathbf{R}_{z_3 z_4} + \mathbf{R}_{z_1 z_4} \text{Sp}(\mathbf{A} \mathbf{R}_{z_3 z_2}), \quad (58)$$

где \mathbf{A} — произвольная детерминированная квадратная матрица размерности $N \times N$, $\mathbf{R}_{z_\ell z_m}$ — ковариационная матрица \vec{Z}_ℓ, \vec{Z}_m .

Из (58) следует, что матричные моментные функции второго порядка для $\tilde{\Phi}_{lm} \equiv (\vec{Z}_\ell^* \vec{Z}_m^\top - \mathbf{R}_{z_\ell z_m})$ — флуктуационной составляющей стохастической матрицы $\vec{Z}_\ell^* \vec{Z}_m^\top$ — могут быть представлены в виде

$$\langle \tilde{\Phi}_{12} \mathbf{A} \tilde{\Phi}_{34} \rangle = \mathbf{R}_{z_1 z_4} \text{Sp}(\mathbf{A} \mathbf{R}_{z_3 z_2}). \quad (59)$$

Аналогично матричные моментные функции третьего порядка для $\tilde{\Phi}$ могут быть записаны так:

$$\langle \tilde{\Phi}_{12} \mathbf{A} \tilde{\Phi}_{34} \mathbf{B} \tilde{\Phi}_{56} \rangle = \mathbf{R}_{z_1 z_4} \mathbf{B} \mathbf{R}_{z_5 z_2} \mathbf{A} \mathbf{R}_{z_3 z_6} + \mathbf{R}_{z_1 z_6} \text{Sp}(\mathbf{A} \mathbf{R}_{z_3 z_2}) \text{Sp}(\mathbf{B} \mathbf{R}_{z_5 z_4}), \quad (60)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — произвольные детерминированные квадратные матрицы размерности $N \times N$.

2. Пусть \mathbf{P} — проекционная матрица размерности $N \times N$ вида

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^+ \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^+, \quad (61)$$

где \mathbf{C} — матрица размерности $N \times L$, состоящая из L линейно независимых вектор-столбцов ограничений.

Пусть \mathbf{Q} — унитарная матрица размерности $N \times N$, диагонализующая эрмитовскую матрицу $\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}$:

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P} \mathbf{Q} = \Lambda. \quad (62)$$

Используя известные свойства проекционных и унитарных матриц, несложно получить, что

$$\mathbf{P} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad (63)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица размерности $(N - L) \times (N - L)$.

С помощью этой формулы можно показать, что \mathbf{Q} -преобразование одновременно с матрицей $\mathbf{P} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{P}$ диагонализует и саму проекционную матрицу \mathbf{P} :

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{O} \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Отсюда получаем также следующее представление проекционной матрицы \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1}. \quad (65)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 97-02-16525, № 96-15-96718) и INTAS (грант № 96-2352).

ЛИТЕРАТУРА

1. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки / Пер. с англ.; / Под ред. В. А. Лексаченко. — М.: Радио и связь, 1986.
2. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. — М.: Радио и связь, 1989. — 440 с.
3. Мальцев А. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 8. С. 1013.
4. Мальцев А. А., Серебряков Г. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 1. С. 52.
5. Уидроу Б. и др. Стационарные и нестационарные характеристики обучения адаптивных фильтров, использующих критерий минимума СКО // ТИИЭР. 1976. Т. 64. № 8. С. 37.
6. Фединин В. В. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 8. С. 1548.
7. Мальцев А. А., Зими́на С. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1998. Т. 42. № 9.
8. Игнатенко С. В., Мальцев А. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1994. Т. 37. № 12. С. 1532.
9. Applebaum S. P., Chapman D. J. // IEEE Trans. 1976. V. AP24. № 5. P. 650.
10. Фрост О. // ТИИЭР. 1972. Т. 60. № 8. С. 5.
11. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1970.
13. Brennan L. E., Pugh E. L., Reed I. S. // IEEE Trans. 1971. V. AES7. № 2. P. 254.
14. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
15. Гейбриел У. // ТИИЭР. 1976. Т. 64. № 2. С. 55.

Нижегородский государственный
университет им. Н. И.
Лобачевского, г. Н. Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
6 апреля 1998 г.

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF ADAPTIVE ANTENNA ARRAYS

A. A. Mal'tsev and S. V. Zimina

Using the method of successive approximations, we obtain the expressions for spectral and correlation characteristics of the output signal of adaptive antenna array under stationary operation mode in the first, so-called Born, approximation. We show that weight-coefficient fluctuations result in distortion of the output-signal spectrum. In particular, the spectrum expands, and a "depression" appears that is somewhat less wide as compared to the spectrum of the output signal.

ПЕРЕХОДНАЯ БИМОДАЛЬНОСТЬ НЕРАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ МОНОСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМ С ШУМАМИ

Н. В. Агудов, Р. В. Девятайкин, А. Н. Малахов

Рассмотрен новый вид моностабильных потенциальных профилей, для которых в динамических системах возникает явление переходной бимодальности. Показано, что для возникновения переходной бимодальности достаточно, чтобы потенциальный профиль, описывающий систему, содержал линейный участок. Предложен новый метод вычисления времени жизни переходной бимодальности. Показано, что для рассмотренных потенциальных профилей время жизни переходной бимодальности увеличивается прямо пропорционально интенсивности флуктуаций.

ВВЕДЕНИЕ

Явление переходной бимодальности (ПБ), возникающее при неравновесных процессах в динамических системах с шумами, заключается в том, что во время перехода от начального неравновесного состояния системы к финальному равновесному состоянию возникают и некоторое время существуют одновременно два ярко выраженных фазовых состояния системы. При этом в начальном и финальном состояниях система имеет только одну фазу. Таким образом, бимодальность существует временно и исчезает при окончательном переходе системы в равновесие. Явление ПБ исследовалось теоретически, численными методами и в экспериментах (см., например, [1–7]). Особый интерес к этому явлению вызван тем, что ПБ возникает в моностабильных системах только благодаря наличию флуктуаций. В чисто динамическом случае, в отсутствие каких-либо флуктуаций, имеет место непрерывная эволюция фазового состояния системы от неравновесного состояния к равновесному. Именно воздействие флуктуаций приводит к образованию и параллельному существованию второго фазового состояния.

Простейшей математической моделью, позволяющей исследовать ПБ, является диффузия броуновских частиц в потенциальном силовом поле, описываемая уравнением

$$\dot{x} = -\frac{1}{h} \frac{dU(x)}{dx} + \xi(t), \quad (1)$$

где координата броуновской частицы $x(t)$ соответствует фазовому состоянию системы, $U(x)$ описывает моностабильный потенциал самой системы, $\xi(t)$ — белый гауссовый шум, $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = D \delta(\tau)$, D — интенсивность флуктуаций, $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака. Эквивалентная вязкость h в знаменателе первого слагаемого правой части принята для простоты равной единице. Как известно (см., например, [8]), уравнению (1) соответствует уравнение Фоккера–Планка (УФП) для плотности вероятности $W(x, t)$ координаты броуновской частицы:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dU(x)}{dx} W(x, t) \right) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$W(\pm\infty, t) = 0, \quad W(x, 0) = \delta(x - x_0),$$

где точка x_0 соответствует начальному состоянию системы.

Рассмотрим произвольный моностабильный потенциальный профиль, показанный на рис. 1. Пусть единственный минимум потенциала находится в точке $x = x_{\min}$. Плотность вероятности в начальный момент времени будет представлять собой дельта-функцию, расположенную в точке x_0 . С течением времени $W(x, t)$ будет расплываться и смещаться к точке минимума потенциала. При $t \rightarrow \infty$ в системе установится стационарное бальцмановское распределение

$$W_{\text{st}}(x) = A \exp\left(-\frac{2U(x)}{D}\right), \quad (3)$$

где A — нормировочный множитель. Минимуму потенциала $U(x)$ соответствует максимум распределения $W_{\text{st}}(x)$. Таким образом, точка x_{\min} будет соответствовать финальному состоянию системы. Явление переходной бимодальности заключается в том, что в процессе перехода от начального состояния к финальному (т. е. при некотором $0 < t < \infty$) плотность вероятности $W(x, t)$ имеет два четко выраженных разнесенных по координате максимума. Поскольку различные значения x соответствуют различным состояниям системы, это означает, что в системе могут реализоваться с максимальными вероятностями два состояния вместо одного, которое было бы при отсутствии флуктуаций единственно возможным. В последнем случае (при $D = 0$) плотность вероятности представляет собой дельта-функцию,двигающуюся с течением времени от x_0 к x_{\min} .

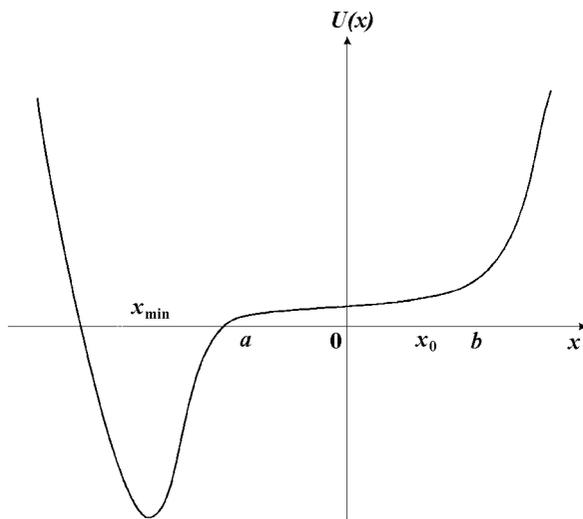


Рис. 1.

Важнейшей характеристикой данного процесса является продолжительность существования (или время жизни) ПБ. Кроме того, необходимо выяснить, при каких условиях возникает бимодальное распределение, т. е. каким должен быть потенциальный профиль $U(x)$, чтобы бимодальность могла наблюдаться. Авторы работ [1–3] пришли к выводу, что для возникновения бимодальности необходимо, чтобы потенциальный профиль имел плоский и почти горизонтальный участок, расположенный в непосредственной близости от глубокой потенциальной ямы, как это изображено на рис. 1. В работах [5–7] показано, что этот участок может быть и горизонтальным ($U'(x) = 0$ при $a \leq x \leq b$), т. е. ПБ может возникнуть при распаде не только нестабильных неравновесных, но и нестабильных равновесных состояний. Подчеркнем, что при этом считалось необходимым, чтобы потен-

циальный профиль имел довольно сложную форму, а именно плоский участок должен соседствовать со сравнительно глубоким минимумом (минимумами) потенциала, где находится финальное устойчивое состояние динамической системы. Во всех вышеперечисленных случаях время жизни переходной бимодальности, т. е. среднее время сосуществования двух или более пиков распределения $W(x, t)$, вычислялось приближенными методами.

В настоящей работе рассмотрен новый класс моностабильных кусочно-линейных потенциальных профилей, в которых возникает ПБ. Для этих профилей критерии возникновения ПБ, предложенные в вышеупомянутых работах, выполняются не полностью. Таким образом, эти критерии должны быть существенно скорректированы, что и является основной целью данной работы. С другой стороны, рассмотренные потенциальные профили предельно просты, что значительно облегчает анализ явления и дает возможность получить точные результаты.

Кроме того, в настоящей статье предложен новый метод определения времени жизни переходной бимодальности.

1. БИМОДАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим два потенциальных профиля $U(x)$, для которых при неравновесных начальных условиях распределение $W(x, t)$ становится бимодальным в процессе перехода к равновесному мономодальному состоянию. Преобразование Лапласа решения УФП (2)

$$Y(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} W(x, t) dt \quad (4)$$

для произвольного кусочно-линейного потенциального профиля было найдено в [9]. Мы воспользуемся результатами этой работы для определения преобразования Лапласа решений, соответствующих конкретным потенциальным профилям, приведенным ниже.

Рассмотрим клиновидный потенциальный профиль (рис. 2)

$$U(x) = k|x + L|. \quad (5)$$

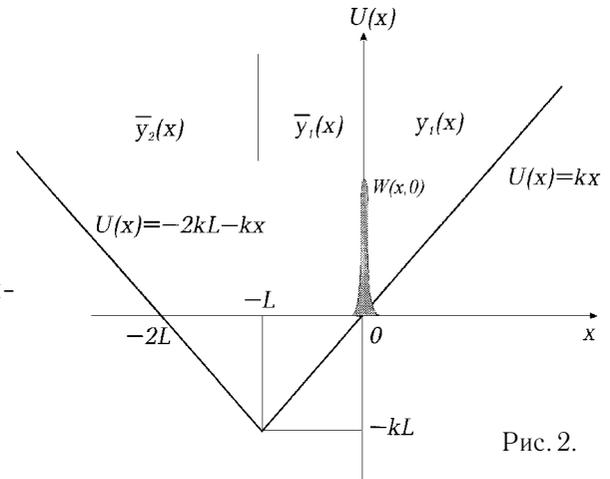


Рис. 2.

Согласно [9] при $x_0 = 0$ преобразование Лапласа решения УФП в данном случае имеет вид

$$Y(x, s) = \begin{cases} y_1(x, s), & \text{при } x \geq 0; \\ \bar{y}_1(x, s), & \text{при } -L \leq x \leq 0; \\ \bar{y}_2(x, s), & \text{при } x \leq -L, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{B}{2b} \left(1 + \frac{a}{\lambda} e^{-2bL} \right) e^{-\mu x}, \\ \bar{y}_1(x) &= \frac{B}{2b} \left(\frac{a e^{-2bL} e^{-\mu x}}{\lambda} + e^{\lambda x} \right), \\ \bar{y}_2(x) &= \frac{B}{2\lambda} e^{2aL} e^{\mu x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\lambda = b - a$, $\mu = b + a$, $b = \sqrt{a^2 + \gamma^2}$, $a = k/D$, $\gamma^2 = Bs$, $B = 2/D$. Пользуясь известными формулами преобразования Лапласа [10], можно получить следующее выражение для нестационарной плотности вероятности:

$$W(x, t) = \begin{cases} e^{2aL} W_g(x, \Delta, -kt) + W_{st}(x) \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left(\frac{-x - kt}{\sqrt{2\Delta}} \right), & \text{при } x \leq -L; \\ W_g(x, \Delta, -kt) + W_{st}(x) \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left(\frac{x - kt + 2L}{\sqrt{2\Delta}} \right), & \text{при } x \geq -L, \end{cases} \quad (8)$$

где функция

$$W_g(x, \Delta, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \exp - \left(\frac{(x - m)^2}{2\Delta} \right). \quad (9)$$

есть гауссово распределение с дисперсией Δ и средним значением m ,

$$\Delta = \Delta(t) = Dt, \quad W_{st} = a \exp(-2a|x + L|).$$

Отметим, что задача о диффузии броуновской частицы в симметричной клиновидной потенциальной яме неоднократно рассматривалась ранее. В работе [11] эта задача решалась методом разделения переменных. Однако из-за неправильного выбора условий сшивки для плотности вероятности в точке $x = -L$, где происходит скачок производной потенциала, было получено неверное решение. Как показано в [12], при правильных условиях сшивки метод разделения переменных приводит к сплошному спектру собственных значений за исключением одного дискретного значения, равного нулю. Таким образом, решение в [12] записывается через интеграл от собственных функций по собственным значениям, поэтому сравнение его с решением (8) является сложной задачей, которая здесь не рассматривается. Кроме того, в [13] было найдено преобразование Лапласа нестационарной плотности вероятности. Результат совпадает с выражением (7), однако оригинал плотности вероятности (8) в [13] найден неправильно.

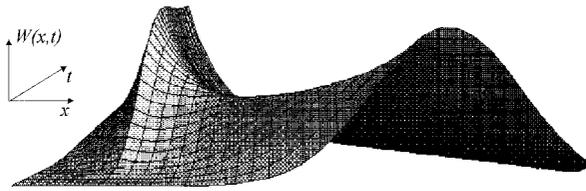


Рис. 3.

Чтобы нагляднее представить, как плотность вероятности изменяется со временем, на рис. 3 изображен график $W(x, t)$, построенный согласно (8). Первоначально плотность вероятности представляет собой дельта-функцию, расположенную в точке $x = 0$. С течением времени начальное распределение плотности вероятности начинает расплываться и дрейфовать по направлению к минимуму потенциала, расположенному в точке $x_{\min} = -L$.

Как видно из первого слагаемого в выражении (8), взятом при $x \geq -L$, скорость этого дрейфа постоянна и равна k , а характерная ширина движущегося пика равна $\sqrt{2Dt}$. Заметим, что это слагаемое описывает диффузию по наклонному потенциальному профилю $U(x) = kx$, когда частица “еще не знает” об изломе потенциала в точке $x_{\min} = -L$. В этом легко убедиться, положив $L \rightarrow \infty$ в выражении (8). Полученная плотность вероятности $W_k(x, t)$ описывает диффузию в потенциале $U = kx$ и равна

$$W_k(x, t) = W_g(x, \Delta(t), -kt). \quad (10)$$

Одновременно с движением первого пика вниз по потенциальному профилю от точки $x_0 = 0$ в точке минимума потенциала при $t > 0$ появляется и начинает расти второй пик. Как видно из второго слагаемого в выражении (8), он симметричен относительно точки минимума $x = -L$ потенциала (5) и растет в ширину и в высоту до тех пор, пока не превратится в стационарную плотность вероятности.

Таким образом, распределение $W(x, t)$ имеет два максимума во время перехода системы к равновесию. Это означает, что в системе возникает явление ПБ, которое имеет место при любых значениях параметра $k > 0$.

Потенциальный профиль (5) не обладает всеми теми свойствами, которые перечислены в работах [1–7] в качестве необходимых для возникновения ПБ. Именно, в профиле (5) нет резко выраженного минимума, расположенного за плоским линейным участком на интервале $a \leq x \leq b$ (см. рис. 1). Следовательно, наличие такого минимума несущественно для возникновения явления ПБ. Вероятно, основным критерием возникновения ПБ является наличие линейного участка в потенциальном профиле. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим другой потенциальный профиль, также имеющий линейный участок, но не имеющий глубокой потенциальной ямы, расположенной ниже линейного участка (см. рис. 4):

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & \text{при } x = -L; \\ kx, & \text{при } -L < x < 0; \\ \infty, & \text{при } x = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Пусть $x_0 = 0$, тогда преобразование Лапласа плотности вероятности будет следующим:

$$Y(x, s) = \frac{Be^{aL}}{2b} \left[\frac{b e^{\mu(x-L)}}{\lambda \operatorname{sh}(bL)} + e^{a(L-x)-b|x|} + \frac{b \operatorname{ch}(bL) + a \operatorname{sh}(bL)}{\lambda \operatorname{sh}(bL)} e^{-aL-\mu x} \right], \quad (12)$$

где параметры a, b, λ, μ и B те же, что и в (7).

Чтобы найти оригинал нестационарной плотности вероятности, представим $1/\operatorname{sh}(bL)$ в виде

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(bL)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)bL}$$

и применим к членам получившегося ряда обратное преобразование Лапласа. В итоге получим

$$W(x, t) = e^{-ax} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \exp\left(\frac{-a^2 \Delta}{2}\right) [W_g(x, \Delta, -(2n-1)L) + W_g(x, \Delta, -(2n+1)L) + W_g(x, \Delta, (2n+1)L) + W_g(x, \Delta, (2n+3)L)] + \frac{a}{2} [3f(x, -a, 2nL, \Delta) + f(-x, a, 2nL, \Delta) - f(x, -a, (2n+2)L, \Delta) - 3f(-x, a, (2n+2)L, \Delta)] \right\}, \quad (13)$$

где W_g — гауссовское распределение (9), $\Delta = \Delta(t) = Dt$, а функция f имеет вид

$$f(x, a, 2nL, \Delta) = e^{a(2nL+x)} \operatorname{Erfc} \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{2\Delta}} + a\sqrt{\frac{\Delta}{2}} \right).$$

Эволюция нестационарной плотности вероятности (13) изображена на рис. 5. Видно, что нестационарное распределение $W(x, t)$ является бимодальным: имеется два максимума плотности вероятности, соответствующих начальному состоянию (назовем этот максимум M_0) и финальному состоянию (назовем его M_{st}). Максимум M_0 движется по направлению к минимуму потенциала, в то время как максимум M_{st} остается в точке $x_{\min} = -L$ и лишь увеличивается в размерах. С течением времени оба максимума сливаются и образуют унимодальное стационарное распределение.

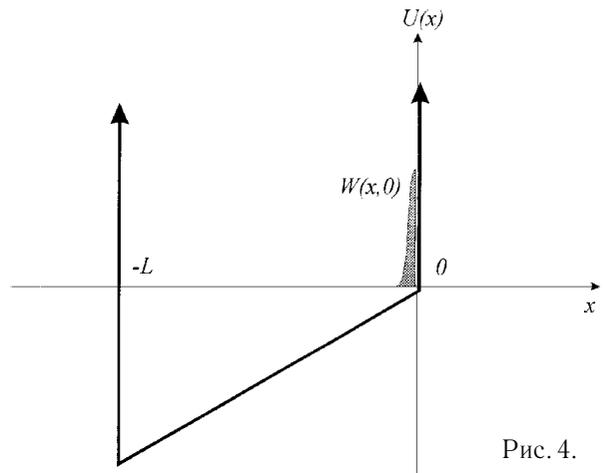


Рис. 4.

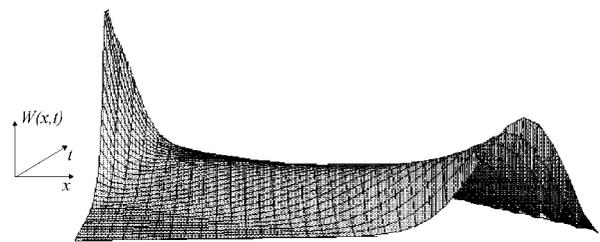


Рис. 5.

2. ВРЕМЯ ЖИЗНИ ПЕРЕХОДНОЙ БИМОДАЛЬНОСТИ

Как следует из вышесказанного, во время бимодального перехода к равновесию система может находиться с максимальными вероятностями в одном из двух выделенных состояний. Это означает, что в данный промежуток времени τ поведение системы будет существенно случайным. Поэтому время τ существования ПБ является важнейшей характеристикой таких систем.

Время τ можно определить следующим образом. Пусть t_{st} — время, за которое распределение в точке x_{min} , соответствующей минимуму потенциала, станет близким к стационарному. Эта точка выбрана потому, что в ней возникает максимум M_{st} бимодального распределения. Таким образом, можно считать, что при $t > t_{st}$ в системе существует максимум M_{st} плотности вероятности, соответствующий стационарному состоянию. С другой стороны, соответствующий начальному состоянию максимум M_0 , стартующий из точки x_0 , движется по направлению к x_{min} со скоростью k . Следовательно, M_0 будет существовать отдельно до тех пор, пока не сольется с неподвижным M_{st} в момент времени

$$t_0 = (x_0 - x_{min})/k.$$

Таким образом, бимодальное распределение будет существовать в системе в промежуток времени $t_{st} < t < t_0$, следовательно,

$$\tau = t_0 - t_{st}. \quad (14)$$

Определение времени жизни ПБ, подобное (14), впервые было предложено в [2]. Однако в (14) время t_{st} остается неизвестным. В работе [2] оно было вычислено приближенно при $D \rightarrow 0$. В настоящей работе используется правило равновеликого прямоугольника, позволяющее определить t_{st} точно:

$$t_{st} = \frac{1}{W_{st}(x_{min})} \int_0^{\infty} (W_{st}(x_{min}) - W(x_{min}, t)) dt. \quad (15)$$

Точное значение времени t_{st} , определенное согласно (15), может быть получено для любого потенциального профиля при помощи метода, предложенного в [14]

$$t_{st} = \frac{B}{A} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\psi(v)} F(v) [1 - F(v)] dv - \int_{-\infty}^{x_{min}} e^{\psi(v)} F(v) dv - \int_{x_0}^{\infty} e^{\psi(v)} [1 - F(v)] dv \right\}, \quad (16)$$

где

$$F(x) = A \int_{-\infty}^x e^{-\psi(v)} dv,$$

A — нормировочный множитель стационарного распределения (3), $\psi(x) = BU(x)$ — безразмерный потенциальный профиль.

Необходимо отметить, что определение времени t_{st} по правилу равновеликого прямоугольника дает корректный результат только в случае, если функция $W(t)$ возрастает до своего стационарного значения $W(\infty)$ так, что всегда выполняется условие $W(t) \leq W(\infty)$. В противном случае выражения (15), (16) дают заниженный результат.

Определим время жизни ПБ с помощью (16) для потенциальных профилей, рассмотренных выше. Для клиновидного потенциального профиля (5) время t_{st} получится следующим:

$$t_{st} = t_0 (1 - \sigma), \quad (17)$$

где $t_0 = L/k$, $\sigma = D/(2kL)$ — безразмерная интенсивность флуктуаций. При $\sigma > 1$ время (17) становится отрицательным. Очевидно, это связано с тем, что зависимость распределения $W(x_{min}, t)$ от времени монотонна только при $\sigma < \sigma_0 < 1$. В данном случае σ_0 можно определить непосредственно из (8). Из (17) и (14) следует, что время жизни ПБ в клиновидном потенциале при $\sigma < \sigma_0$ возрастает прямо пропорционально интенсивности флуктуаций:

$$\tau = t_0 \sigma = \frac{D}{2k^2}. \quad (18)$$

Обратимся теперь к потенциальному профилю (11). Используя (15) или (16), получим:

$$t_{st} = t_0 (\operatorname{cth}(1/2\sigma) - 2\sigma). \quad (19)$$

При $\sigma \ll 1$ из (19) следует

$$t_{st} \approx t_0 (1 - 2\sigma).$$

Следовательно, в этом случае время жизни ПБ

$$\tau = 2t_0\sigma = \frac{D}{k^2} \quad (20)$$

возрастает прямо пропорционально интенсивности флуктуаций, так же, как и в предыдущем случае. С дальнейшим увеличением D время жизни (20) выходит на постоянный уровень, равный t_0 (см. рис. 6). Таким образом, как и следовало ожидать, мы получили, что время жизни ПБ не может быть больше времени динамического (без учета флуктуаций) перехода t_0 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в настоящей работе показано, что для возникновения явления переходной бимодальности в моностабильных системах достаточно, чтобы соответствующие потенциальные профили содержали линейный участок. Именно благодаря наличию линейных участков распределение вероятности становится бимодальным. Наличие глубокого потенциального минимума не обязательно. С другой стороны, очевидно, что наличие такого минимума приведет к более явному разделению максимумов M_0 и M_{st} .

При достаточно малой интенсивности флуктуаций время жизни ПБ растет прямо пропорционально D .

Данная работа поддержана грантом программы "Университеты России — фундаментальные исследования" (проект № 3877), а также грантами РФФИ № 96–15–96718 и № 99–02–17544.

ЛИТЕРАТУРА

1. Frankowicz M., Nicolis G. // Journal of Statistical Physics. 1983. V. 33. № 3. P. 595.
2. Frankowicz M., Malek Mansour M., Nicolis G. // Physica. 1984. V. 125A. P. 237.
3. Arimondo E., Dangoisse D., Fronzoni L. // Europhysics Letters. 1987. V. 4. № 3. P. 287.
4. Broggi G., Lugiato L. A. // Physical Review A. 1984. V. 29. № 5. P. 2949.
5. Colet P., de Pasquale F., San Miguel M. // Physical Review A. 1991. V. 43. № 10. P. 5296.
6. Iwaniszewski J. // Physical Review A. 1992. V. 45. № 12. P. 8436.
7. Iwaniszewski J. // Physics Letters A. 1992. V. 171. P. 278.
8. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
9. Агудов Н. В., Малахов А. Н. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1993. Т. 36. № 2. С. 148.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. — М.: Наука, 1969.
11. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
12. Risken H. The Fokker–Planck Equation. Methods of Solution and Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 1989.
13. Caughey T. K., Dines J. K. // J. Appl. Phys. 1961. V. 32. P. 2476.

14. Malakhov A. N. // Chaos. 1997. V. 7. P. 488.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
29 декабря 1998 г.

**TRANSIENT BIMODALITY OF NONEQUILIBRIUM STATES
IN MONOSTABLE SYSTEMS WITH NOISE**

N. V. Agudov, R. V. Devyataikin, and A. N. Malakhov

We consider a new kind of potential profiles for which the phenomena of transient bimodality takes place. It is shown that the phenomena of transient bimodality occurs if the potential profile describing the dynamic system comprises a linear part. A new method for obtaining the lifetime of the transient bimodality is proposed. We show that lifetimes of the transient bimodality for the considered potential profiles are proportional to the fluctuation intensity.