МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XLI N 6 Нижний Новгород 1998

Содержание

Конторович В. М., Пименов С. Ф. Точное решение уравнений Компанейца для сильного точечного взрыва в среде с квадратичным законом убывания плотности 683

Николаенко А. П., Хайакава М. Электрические поля модельных грозовых разрядов в нейтральной атмосфере 699

Афраймович Э. Л., Паламарчук К. С. Спектрально-поляризационный метод анализа интерференционной картины радиосигнала 723

Яковенко В. М., Яковенко И. В. Бесстолкновительное затухание поверхностных колебаний и возможности его обращения в плазмоподобных средах 735

Власов С. Н., Копосова Е. В. Об использовании диэлектрических решеток в компрессорах импульсов электромагнитного излучения 747

Крючков С. В., Попов К. А. Эффект Франца–Келдыша в сверхшеретках в поле нелинейной электромагнитной волны 758

Малыкин Г. Б. К вопросу о возможности регистрации эффекта Саньяка с помощью π-мезонов 767

Монталбано Д., Серебряков Г. Помехоустойчивость протяженных адаптивных решеток при действии пространственно некогерентных помех 775

Золотовский И. О., Семенцов Д. И. Распространение и трансформация частотно-модулированного импульса в периодически неоднородном волокне 792

Глявин М. Ю., Запевалов В. Е., Куфтин А. Н. Конкуренция мод в нестационарных режимах мощных гиротронов 803

УДК 533

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КОМПАНЕЙЦА ДЛЯ СИЛЬНОГО ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА В СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗАКОНОМ УБЫВАНИЯ ПЛОТНОСТИ

В. М. Конторович и С. Ф. Пименов

Исследовано (в приближении Компанейца) распространение ударного фронта (УФ) от места вспышки в неоднородной среде со степенным законом изменения плотности, характеризуемой показателем n = 2, — важный случай, соответствующий внешним частям короны Солнца и звёзд. Получено неожиданно простое точное решение, позволяющее прояснить структуру общего решения при произвольном монотонном законе изменения плотности. Результаты для плоского случая сравниваются с результатами Кориканского для нецентрального точечного взрыва в радиально стратифицированной среде. Установлено соответствие между точными решениями в этих случаях и получено новое решение для нецентрального взрыва при плотности с особенностью на конечном радиусе, квадратично убывающей на бесконечности.

ВВЕДЕНИЕ

Уже из хорошо известной формулы Седова—Тэйлора [1, 2]

$$R = [E_0 t^2/\rho_0]^{1/5} \tag{1}$$

для зависимости радиуса R ударного фронта точечного сильного взрыва в однородной среде от времени t, отсчитываемого от момента взрыва, энергии взрыва E_0 и плотности среды ρ_0 можно сделать вывод, что УФ должен двигаться быстрее в сторону убывания плотности, если взрыв призойдет в регулярно неоднородной среде. Задача, однако, в неоднородном случае существенно усложняется, перестаёт быть автомодельной, и даже для численного анализа требует значительно более сложных вычислений (см. обзоры и статьи [3—5] и цитированную там литературу).

А. С. Компанейцем для сильного взрыва в экспоненциальной атмосфере было предложено уравнение [6] (см. ниже (3)), позволяющее анализировать ситуацию в приближении, когда давление за УФ предполагается равномерно распределённым вдоль последнего. При этом оказалось, что в случае экспоненциального изменения плотности с координатой, УФ самоускоряется и прорывается на бесконечность за конечное время. (Разумеется, значительно раньше отказывает приближение, а если учесть конечность плотности на бесконечности [7], то скорость УФ также выходит на насыщение, т. е. никаких противоречий с физикой и со здравым смыслом здесь нет). В не столь быстро спадающих по плотности средах, а именно, при степенном законе изменения плотности $\rho(z) \propto z^{-n}$, часто возникающем в астрофизических приложениях, поведение УФ существенно зависит от показателя степени n [2, 8, 9]. Асимптотически точное решение для головного участка УФ, движущегося в направлении убывания плотности, показывает, что по мере увеличения градиента (роста n) замедление скорости УФ со временем, описываемое в однородной среде решением Седова—Тэйлора, уменьшается.* Это подтверждается, в частности, и обсуждаемым ниже точным решением уравнений Компанейца для УФ при n = 2 [12],

*Заметим, что при n = 3 движение УФ происходит с постоянной скоростью. Для n, больших трёх, УФ начинает ускоряться, а начиная с n = 5 — совершает прорыв "на бесконечность"за конечное время [8, 9, 11]. Решение качественно становится похожим на решение Компанейца для экспоненциальной атмосферы.

соответствующим области ветра во внешних частях короны Солнца и звёзд (правда, без учёта его собственного движения). Анализу этого решения, имеющего исключительно простую форму, и посвящена данная публикация.

Следуя Компанейцу [6], введём новое "время" y вместо реального времени t, согласно

$$dy = dt\left[E_0\lambda(\gamma^2-1)/(2\rho_0 V(t))\right]^{1/2}, \tag{2}$$

включив в него корень из зависящего от времени объёма $V(t) = \pi\int r^2 dz$, после чего коэффициенты уравнения для УФ $r = r(y,z)$ уже не зависят от времени. Они зависят только от координаты z, вдоль которой меняется плотность $\rho(z)$ по закону, который в нашем случае будет выбран в виде $\rho(z) = \rho_0/(z/z_0)^2$. Здесь ρ_0 — плотность невозмущённой среды в точке взрыва z_0. Прочие, важные для применений, но несущественные для формальной стороны дела обозначения приведены в Приложении. Уравнение Компанейца для ударного фронта принимает вид

$$(\partial r/\partial y)^2\varphi(z) - [(\partial r/\partial z)^2 + 1] = 0. \tag{3}$$

Здесь $\varphi(z) = \rho(z)/\rho_0$. В случае n = 2 решение может быть написано сразу, но с целью прояснить его структуру в более общих ситуациях, представляющих интерес для астрофизических приложений (смена показателей n от 16 и 6 до 2 в короне Солнца; n = 3 в активных ядрах галактик, где нельзя получить простые решения) мы будем рассматривать решение как частный случай общей ситуации.

План статьи следующий. Вначале, для произвольного закона изменения плотности приводим решение уравнения (3) в квадратурах, выраженное в параметрическом виде через вспомогательную функцию $\xi(y,z)$ и содержащее произвольную функцию $\mu(\xi)$, вполне аналогичное [6]. В начальной стадии расширения УФ среду можно считать однородной и использовать решение Седова, что приводит к занулению μ в соответствии с [6]. При $\mu = 0$ для квадратичного убывания плотности с координатой находится явное решение, которое оказывается справедливым в двух областях, примыкающих к диаметрально противоположным лидирующим точкам фронта, где УФ представляется несмыкающимися сегментами одной и той же сферы. В промежуточной же области функция μ оказывается отличной от нуля, аналогично тому, как это было обнаружено Силичем и Фоминым для экспоненциального профиля с асимптотическим выходом на постоянную плотность [7]. Полученное решение в этой области достраивает УФ до полной сферы. Показано, что на малых временах (при $y \to 0$) промежуточная область исчезает. Далее получено преобразование, переводящее решение для плоского случая в решение для нецентрального взрыва в радиально стратифицированной среде с плотностью, обращающейся в бесконечность на конечном радиусе, и т. о. построено новое точное решение для УФ в этих условиях. (Предварительно проведено сравнение с решениями Кориканского [8] для чисто степенной радиально стратифицированной среды.) Чрезвычайно простая форма решения позволяет все выражения привести в явном виде, что может представить интерес и с точки зрения общего анализа распространения сильно нелинейных волн в неоднородной среде. В заключительном разделе показано, что обнаруженная нами корневая особенность ξ в лидирующих точках имеет место и при произвольной зависимости плотности от координат, что позволяет сделать некоторые заключения о характере движения. Необходимость различного представления решения в разных областях также является общим фактом и, по-видимому, связана с тем, что в окрестности каждой из лидирующих точек мы имеем дело с одной (нелинейной) волной, а в промежуточной области — с необходимостью учесть вклад обеих волн (с их нелинейной "интерференцией"), что и достигается с помощью выбора произвольной функции μ.

1. НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ

Полный интеграл уравнения (3), содержащий две произвольные постоянные (по числу независимых переменных), удаётся получить разделением переменных (см., напр., учебник [13] или справочник [14]). Считая константу интегрирования μ — произвольной функцией от константы разделения ξ и заменяя последнюю функцией от независимых переменных $\xi(y, z)$, которая должна быть найдена из условия [14, 13]

$$dr/d\xi = 0, \tag{4}$$

получаем общий интеграл в виде

$$r = -\operatorname{sign}(z - z_0) \int\limits_{z_0}^{z} dx \sqrt{\xi^2 \varphi(x) - 1} + \xi y + \mu(\xi)\,. \tag{5}$$

Общий интеграл и условие (3) для определения функции ξ дают её неявное выражение через z и y:

$$y = \operatorname{sign}(z - z_0) \int\limits_{z_0}^{z} dx \frac{\xi \varphi(x)}{\sqrt{\xi^2 \varphi(x) - 1}} - \mu', \qquad \frac{d\mu}{d\xi} \equiv \mu', \tag{6}$$

откуда для решения, описывающего УФ, имеем

$$r = \operatorname{sign}(z - z_0) \int\limits_{z_0}^{z} \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 \varphi(x) - 1}} + \mu - \xi \mu'. \tag{7}$$

При $y \to 0, \quad z \to z_0, \quad r \to 0,$

$$r \approx \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} |z - z_0| + \mu - \xi \mu', \qquad y \approx \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} |z - z_0| - \mu'. \tag{8}$$

Или

$$\left(\frac{r - \mu + \xi \mu'}{z - z_0} \right)^2 \approx \frac{1}{\xi^2 - 1}, \qquad \left(\frac{y + \mu'}{z - z_0} \right)^2 \approx \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1}\,. \tag{9}$$

Вспомогательные функции μ и ξ, вообще говоря, не предполагаются разложенными. Исключая ξ,

$$\left(\frac{r - \mu + \xi \mu'}{z - z_0} \right)^2 + 1 = \left(\frac{y + \mu'}{z - z_0} \right)^2. \tag{10}$$

Видно, что для предельного перехода к случаю Седова

$$r^2 + (z - z_0)^2 = y^2 \tag{11}$$

должно быть (если отвлечься от несущественной возможности сдвинуть начало отсчёта времени)

$$\frac{\xi \mu' - \mu}{r} \to 0, \;\; r \to 0; \quad \frac{\mu'}{y} \to 0, \;\; y \to 0. \tag{12}$$

И окончательно, получаем в этом предельном случае однородной в малом среды

$$\mu' = 0, \quad \mu = 0.$$

Мы увидим ниже, что ситуация несколько сложнее, а пока что используем полученное условие для интересующего нас случая n = 2.

2. РЕШЕНИЕ ДЛЯ n = 2, ПРИМЫКАЮЩЕЕ К ЛИДИРУЮЩИМ ТОЧКАМ

Этот случай, как уже упоминалось, важен с физической точки зрения (внешние части корон, область солнечного ветра и т. д.). Но здесь он интересует нас как ясный пример, на котором видны все детали представления решения через вспомогательные функции. При $\varphi(z) = 1/z^2$ $(z_0 = 1)$ интегралы выражаются через элементарные функции, но видно, что необходимо отдельно рассматривать области в плоскости z, y, обеспечивая положительность подкоренных выражений.

Пусть вначале $z_2 > z > z_{ex}$. В этой области, примыкающей к ведущей точке УФ, получаем ($\mu = 0$)

$$\xi^2\varphi > 1, \quad \xi|_{z_{ex}} = z_{ex} \quad (z_0 = 1)\,,$$

$$r = \sqrt{\xi^2 - 1} - \sqrt{\xi^2 - z^2} \quad (z > 1)\,, \tag{13}$$

$$\xi^2 = \frac{z^2\left(1 - e^{2y}\right)^2}{4e^{2y}\left(e^y - z\right)\left(z - e^{-y}\right)}\,. \tag{14}$$

Здесь

$$z_2 = e^y, \quad z_1 = e^{-y}, \quad z_{ex} = \operatorname{ch} y, \quad r|_{z_{ex}} = \operatorname{sh} y\,. \tag{15}$$

Вычисляя

$$\xi^2 - 1 = \frac{\left[z\left(1 + e^{2y}\right) - 2e^y\right]^2}{4e^{2y}\left(e^y - z\right)\left(z - e^{-y}\right)} \tag{16}$$

и

$$\xi^2 - z^2 = \frac{z^2\left(1 + e^{2y} - 2ze^y\right)^2}{4e^{2y}\left(e^y - z\right)\left(z - e^{-y}\right)}\,, \tag{17}$$

найдём

$$z > z_{ex}, \quad \sqrt{\xi^2 - z^2} = \frac{z\left(z - z_{ex}\right)}{\sqrt{\left(z_2 - z\right)\left(z - z_1\right)}} > 0, \quad \xi|_{z_{ex}} = z_{ex}\,, \tag{18}$$

$$z > z_{ex}^{-1}\,, \quad \sqrt{\xi^2 - 1} = \frac{zz_{ex} - 1}{\sqrt{\left(z_2 - z\right)\left(z - z_1\right)}}\,, \quad \xi|_{z_{ex}^{-1}} = 1. \tag{19}$$

Подставляя в (13), получим искомое решение, имеющее исключительно простой вид:

$$r = \sqrt{\left(z_2 - z\right)\left(z - z_1\right)}\,, \quad z_2 > z > z_{ex}\,. \tag{20}$$

Очевидно, это уравнение полусферы, подвешенной к верхней лидирующей точке z_2, с центром в точке z_{ex} и радиусом $(z_2 - z_1)/2$ (рис. 1а). Заметим, что в этой области действительно $\xi > z$ (17). При $z_1 < z < z_{ex}^{-1} < 1$ соответственно имеем (ξ^2 см. (14))

$$r = \sqrt{\xi^2 - z^2} - \sqrt{\xi^2 - 1}\,, \tag{21}$$

$$\sqrt{\xi^2 - z^2} = \frac{z\left(z_{ex} - z\right)}{\sqrt{\left(z_2 - z\right)\left(z - z_1\right)}}\,, \quad \sqrt{\xi^2 - 1} = \frac{1 - zz_{ex}}{\sqrt{\left(z_2 - z\right)\left(z - z_1\right)}}\,, \tag{22}$$

и, окончательно (рис. 1б), решение в той же форме

$$r = \sqrt{\left(z_2 - z\right)\left(z - z_1\right)}\,, \quad zz_{ex} < 1$$

описывает поверхность шарового сегмента той же сферы, опирающегося на нижнюю лидирующую точку z_1. Корневые особенности ξ в лидирующих точках являются общим свойством при любом n и существенно использовались в [9].

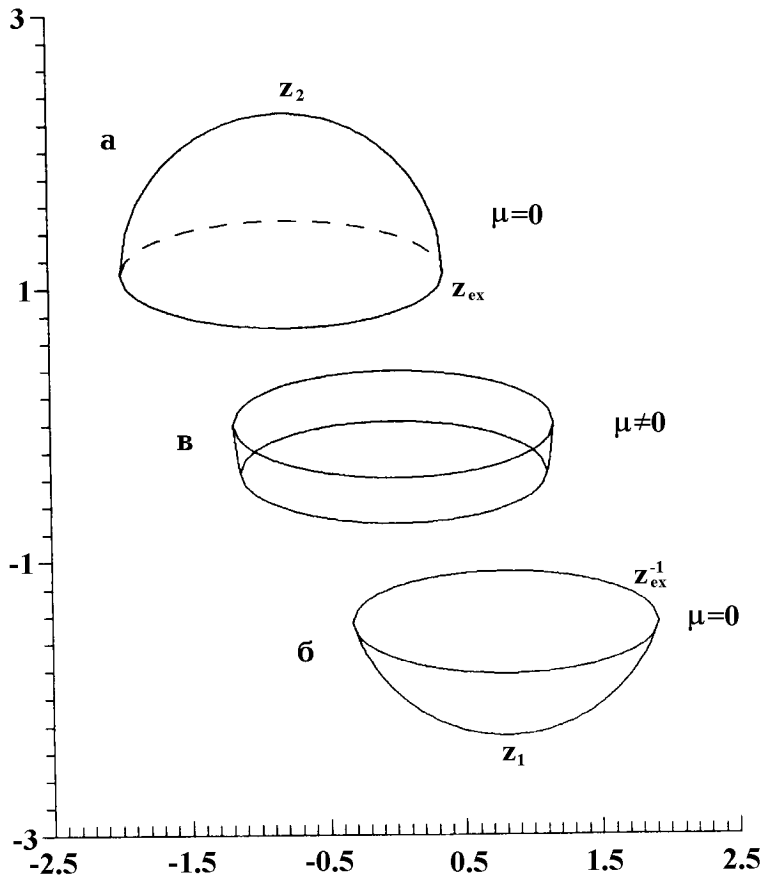


Рис. 1.

3. ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ОБЛАСТЬ

Здесь приходится вновь возвращаться к исходной полной форме решения с произвольной функцией, которую найдём из условия сшивки на границе между областями (ср. Силич и Фомин [7])

$$r|_{z_{ex}-0} = r|_{z_{ex}+0} \qquad \left(z_{ex} = \xi|_{z_{ex}}\right) , \tag{23}$$

$$\mu\left(\xi\right) = 2\sqrt{\xi^2 - 1} - 2\xi \ln\left\{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right\} , \tag{24}$$

$$\mu'\left(\xi\right) = -2 \ln\left\{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right\} . \tag{25}$$

Подставляя в

$$0 = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \int\limits_1^z \frac{\xi\varphi\, dx}{\sqrt{\xi^2\varphi - 1}} + y + \mu'\left(\xi\right) , \tag{26}$$

получаем уравнение для ξ при $z_{ex} > z > z_{ex}^{-1}$

$$y = \ln\left|\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - z^2}}{z}\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\right| . \tag{27}$$

Введём

$$\xi \equiv \operatorname{ch}\alpha\,. \tag{28}$$

Получим

$$\alpha = \ln\sqrt{\frac{z_2\,(zz_2-1)}{(z_2-z)}}\,, \tag{29}$$

$$\alpha\big|_{z_{ex}} = y, \qquad \alpha\big|_{z_{ex}^{-1}} = 0.$$

Соответственно в данной области находим ξ (рис. 2а)

$$\xi\big|_{z_{ex}} = \operatorname{ch} y = z_{ex}, \qquad \xi\big|_{z_{ex}^{-1}} = 1. \tag{30}$$

$$\xi = \operatorname{ch}\ln\sqrt{\frac{e^y\,(e^y z-1)}{e^y-z}}\,, \qquad z_{ex} > z > z_{ex}^{-1}. \tag{31}$$

Видим, что

$$\mu_{z_{ex}^{-1}} = \mu'_{z_{ex}^{-1}} = 0, \tag{32}$$

$$\mu \neq 0, \quad \mu' \neq 0 \qquad (z = z_{ex}).$$

То есть на нижней границе μ непрерывно, на верхней — терпит скачок вместе с производной (рис. 2б)

$$\mu\,(\xi_{ex}) = 2\,(\operatorname{sh} y - y\operatorname{ch} y)\;, \quad \mu'\,(\xi_{ex}) = -2y; \quad \xi_{ex} = \xi\,(z_{ex})\;. \tag{33}$$

Итак, в области $z_{ex} > z > z_{ex}^{-1}$ получаем для ξ

$$\xi = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{e^y\,(e^y z-1)}{e^y-z}} + \sqrt{\frac{e^y-z}{e^y\,(e^y z-1)}}\right\}. \tag{34}$$

Или

$$\xi = \frac{z\operatorname{sh} y}{\sqrt{(z_2-z)\,(z-z_1)}}\,. \tag{35}$$

После чего находим

$$\xi = \frac{z\,(z_2-z_1)}{2\sqrt{(z_2-z)\,(z-z_1)}}\,, \tag{36}$$

$$\xi^2 - 1 = \frac{(z\operatorname{ch} y-1)^2}{(z_2-z)\,(z-z_1)}\,, \quad \xi^2 - z^2 = \frac{z^2\,(\operatorname{ch} y - z)^2}{(z_2-z)\,(z-z_1)}\,. \tag{37}$$

Окончательно, в промежуточной области (рис. 1в) имеем

$$r = \sqrt{\xi^2 - z^2} + \sqrt{\xi^2 - 1} \tag{38}$$

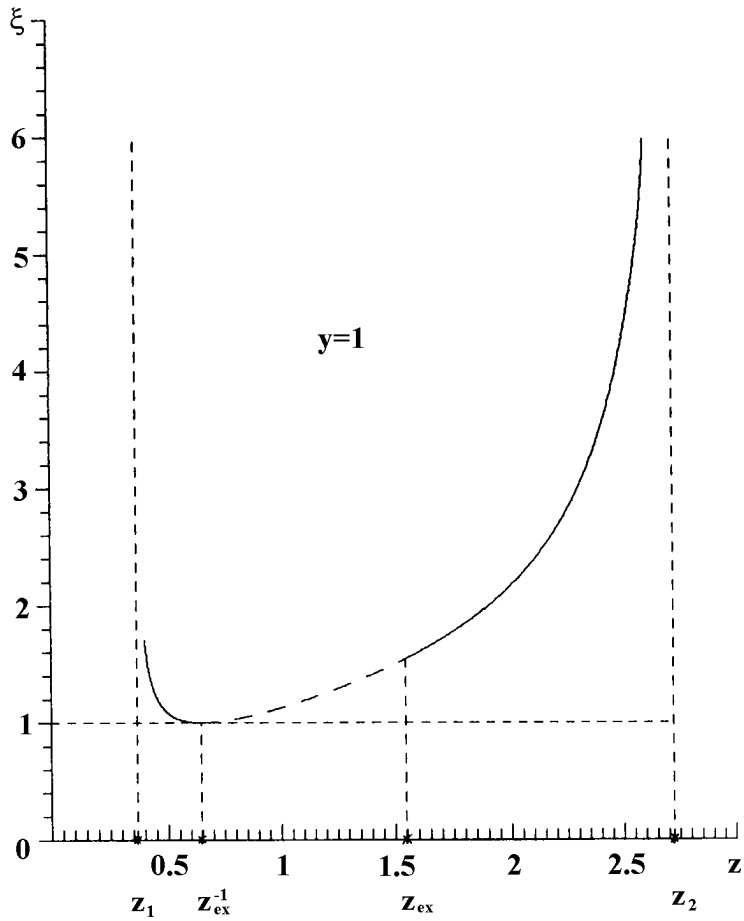
и, согласно (37),

$$r = \sqrt{(z_2-z)\,(z-z_1)}\,. \tag{39}$$

То есть мы получаем поверхность шарового слоя, дополняющего поверхности полученных выше сегментов до полной сферы, которая и является полным и исключительно простым решением задачи. Приведём его также в явной форме, в которой видны зависимости радиуса и положения центра от времени

$$r = z_0\,[(\exp\{y/z_0\} - z/z_0)(z/z_0 - \exp\{-y/z_0\})]^{1/2}\,. \tag{40}$$

а)


ξ
6
5
4
3
2
1
0
y=1
0.5
1
1.5
2
2.5
z
z1
z-1ex
zex
z2

б)

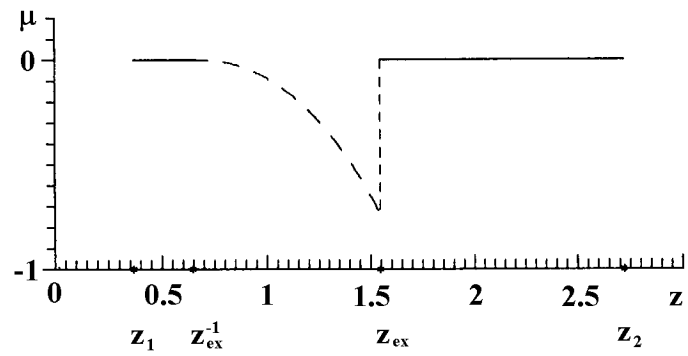

μ
0
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
z
z1
z-1ex
zex
z2

Рис. 2.

Решение удобно представить также и в канонической форме

$$r^2 + (z - z_0 \operatorname{ch}(y/z_0))^2 = z_0^2 \operatorname{sh}^2(y/z_0)\,. \tag{41}$$

Таким образом, в каждый момент решение представляет собой сферу, центрированную вокруг точки $z = z_0 \operatorname{ch}(y/z_0)$ с радиусом, растущим во времени как $z_0 \operatorname{sh}(y/z_0)$. Связь времени Компанейца y с реальным временем t

$$t \propto \int^y dy\ \operatorname{sh}^{3/2} y$$

точно не выражается через элементарные функции даже в этом простейшем случае, но асимптотики, очевидно, просто связаны между собой. Удивительна совершенная форма УФ, несмотря на существенную неоднородность среды. Качественно поведение решения более напоминает поведение решения Седова—Тейлора, чем Компанейца, как и должно быть в этом случае сравнительно плавного изменения плотности с координатой (см. сноску на стр. 684). Но убывание скорости лидирующей точки со временем на больших временах ($z_2 \gg z_0$) $dz_2/dt \propto t^{-1/3}$ происходит медленней, чем в случае однородной среды, где $dz_2/dt \propto t^{-3/5}$. Отметим, что на больших $y \gg 1$

$$z_{ex} \approx \frac{z_2}{2}\,, \qquad z_{ex}^{-1} \approx 2z_1\,.$$

На малых $y \ll 1$

$$z_{ex} \approx 1 + \frac{y^2}{2}\,, \qquad z_{ex}^{-1} \approx 1 - \frac{y^2}{2}\,.$$

С приближением к месту взрыва промежуточная область сужается и исчезает (рис. 3).

4. СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ

Здесь мы сравним обсуждавшиеся выше результаты с замечательным решением Кориканского [8] для нецентрального взрыва в радиально стратифицированной среде. В приближении Компанейца уравнение для УФ $\chi\,(R, y) = \theta$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\psi(R)}\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\right], \quad \psi(R) \equiv \frac{\rho(R)}{\rho_0} \tag{42}$$

(R, θ — сферические координаты, $R = a$, $\theta = 0$, ($y = 0$) — точка взрыва). При $\rho\,(R) = \rho_0 \left(\dfrac{a}{R}\right)^n$, замена [8] $\zeta = \left(\dfrac{R}{a}\right)^\alpha$, $\phi = \alpha\chi$, $\alpha = \dfrac{2-n}{2}$ приводит к уравнению в эффективной однородной среде

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{y_c^2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right], \qquad y_c = \frac{2a}{|2-n|}\,. \tag{43}$$

Решение [8]

$$2\zeta\cos\phi = 1 + \zeta^2 - x^2, \quad x \equiv \frac{y}{y_c}\,, \tag{44}$$

$$2\left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{2-n}{2}} \cos\frac{(2-n)\,\theta}{2} = 1 + \left(\frac{R}{a}\right)^{2-n} - \left[\frac{y\,(2-n)}{2a}\right]^2. \tag{45}$$

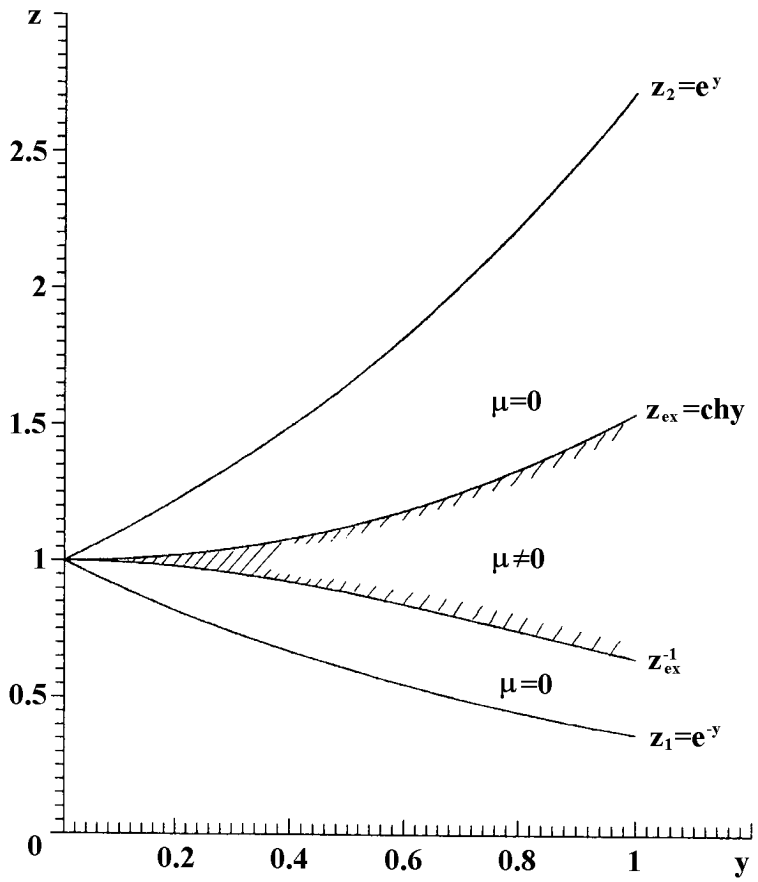


Рис. 3.

Для $n = 2$ имеет место особое решение [8]

$$\theta^2 + \ln^2 \frac{R}{a} = \left(\frac{y}{a}\right)^2. \tag{46}$$

Его легко усмотреть, переходя от сферического

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left[R^2\left(\frac{\partial \chi}{\partial R}\right)^2 + 1\right] \tag{47}$$

к эффективному плоскому случаю заменой $\eta = \ln R$, $y \to ya$:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta}\right)^2 + 1 \Longrightarrow \chi^2 + \eta^2 = y^2. \tag{48}$$

Заметим, что то же можно получить и из общей формулы (45) предельным переходом:

$$Ra^{\frac{2-n}{2}} \to \exp\frac{2-n}{2}\ln\frac{R}{a} \to 1 + \frac{2-n}{2}\ln\frac{R}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{2-n}{2}\right)^2 \ln^2\frac{R}{a} + \ldots \tag{49}$$

$$(2 - n \to 0)\,.$$

Нетрудно убедиться, что основные параметры поверхности (46) весьма близки к обсуждавшейся выше сфере. Соответствие со случаем однородной среды получим, переходя к цилиндрическим координатам

$$\left(\frac{\tilde{\rho}}{z}\right)^2 = \mathrm{tg}^2 \sqrt{\left(\frac{y}{z_0}\right)^2 - \ln^2 \frac{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + z^2}}{z_0}}\,, \quad \tilde{\rho} = R\sin\theta\,,\ z = R\cos\theta\,. \tag{50}$$

При малых временах

$$\left(\frac{\tilde{\rho}}{z}\right)^2 = \frac{(y/z_0)^2 - \ln^2(z/z_0)}{1 + \ln(z/z_0)}\,, \quad \tilde{\rho} \ll z, z_0\,, \tag{51}$$

получаем решение Седова в обычных переменных

$$\tilde{\rho}^2 + (z - z_0)^2 = y^2. \tag{52}$$

5. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ В ПЛОСКО–СЛОИСТОЙ И РАДИАЛЬНО–СЛОИСТОЙ СРЕДАХ И НОВОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ УФ В СЛУЧАЕ ОСОБЕННОСТИ ПЛОТНОСТИ НА КОНЕЧНОМ РАДИУСЕ

Обобщая преобразование Кориканского, свяжем заменой переменных

$$\frac{z}{z_0} = \ln\frac{R}{a} \qquad \left(R = a\exp\frac{z}{z_0}\right) \tag{53}$$

уравнения Компанейца для УФ в случаях плоско–слоистой (3) (в цилиндрических координатах z, r) и радиально–слоистой сред (42) (в сферических координатах R, χ), записанные соответственно для функций $r(z, y)$ и $\chi(R, y)$. При этом закону изменения плотности $\varphi(z)$ в плоском случае ставится в соответствие закон $\psi(R)$, в сферическом случае, согласно

$$\psi(R) = \varphi\left(z_0 \ln\frac{R}{a}\right)\frac{z_0^2}{R^2}\,, \tag{54}$$

и обратно —

$$\varphi(z) = \psi(R)\,\frac{R^2}{z_0^2} = (a/z_0)^2\,\psi\left(a\exp\frac{z}{z_0}\right)\exp\frac{2z}{z_0}\,. \tag{55}$$

Соответствующие решения уравнений Компанейца связаны соотношением

$$r = z_0\chi\,. \tag{56}$$

Заметим, что при этом экспоненциальные распределения плотности

$$\varphi(z) = \exp\{-\beta z\} \tag{57}$$

переходят в степенные

$$\psi(R) = \frac{z_0^2}{R^2}\exp\left\{-\beta z_0 \ln\frac{R}{a}\right\} \propto R^{-(\beta z_0 + 2)}\,. \tag{58}$$

Эквивалентная высота атмосферы для плоского экспоненциального случая определяет значение показателя степени для степенного радиально–стратифицированного. Это, в каком-то смысле, поясняет существование набора решений в варианте Кориканского [8], которые, таким образом, связаны с решениями Компанейца [6].

В особом случае

$$\varphi(z) \propto 1/z^2,$$

точное решение для которого построено в данной статье (см. (40)–(41)), соответствующий закон

$$\psi(R) \propto (1/R^2)\ln^2(R/a) \tag{59}$$

представляет собой распределение плотности, близкое к обратному квадратичному на больших расстояниях, но с особенностью на сфере радиуса a.

Соответствующее новое формальное решение с фиксированным положением точки взрыва при $R = ae$

$$\chi(R) = \sqrt{[\ln(R/a) - z_1/z_0][z_2/z_0 - \ln(R/a)]}\,, \tag{60}$$

где $z_{1,2}(y)/z_0$ даются формулой (15).

Указанную связь (53) удобно использовать при численном анализе нецентрального взрыва в радиально–слоистых средах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты хорошо коррелируют с известными автомодельными либо численными решениями [15–17]. Они могут найти применение не только в случае солнечной короны, но и в других, прежде всего, астрофизических ситуациях (ср. [18, 19]), где существенна неоднородность среды, тем более, что квадратичный закон убывания плотности с координатой встречается достаточно часто*, например, для вспышек сверхновых на периферии гигантских облаков, при анализе выбросов в туманностях [21], разновидностей галактических фонтанов [22], в галактиках со вспышками звездообразования [3], а также и в более экзотических случаях, таких как, например, обнаруженная недавно с помощью космического телескопа Хаббла [23] сверхновая в галактике NGC 6946 в непосредственной близости от другой сверхновой (т. е. в зоне её ветра), или при изучении столкновения галактик.

В частности, “сплывание"центра симметрии оболочки вниз по градиенту плотности может естественно объяснить нецентральное положение пульсара относительно остатка сверхновой без привлечения идеи несимметричного взрыва и отдачи. Решение в среде с особенностью плотности на конечном радиусе описывает огибание фотосферы ударной волной, что может быть интересно для Солнца и звёзд. Асимптотика решения в лидирующей точке демонстрирует возможность немонотонного поведения скорости ударной волны при монотонном спадании плотности (ср. [10]). Полученные решения допускают также интересные физические обобщения, если постоянную энергию E_0 заменить на функцию времени $E(t)$, что, в принципе, позволяет учесть как потери [22], так и дополнительное поступление энергии (см. замечание в [10]).

В. М. Конторович благодарит за поддержку Международную Соросовскую Программу поддержки образования в области точных наук Международного фонда “Відродження", грант SPU042029. С. Ф. Пименов благодарит Астросовет РАН за поддержку данных исследований в рамках федеральной программы “Астрономия".

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

*В солнечной короне это подтверждается, например, измерениями [20] в интервале от 4 до 200 солнечных радиусов. (Авторы благодарны Н. Лотовой за эту информацию.) Во внешних атмосферах молодых звёзд, на периферии молекулярных облаков наблюдается также подобная зависимость (см., напр., ссылки в обзоре [21]).

Уравнение Компанейца для УФ получается, если приравнять нормальную к фронту компоненту скорости $D = [p/(\rho - \rho^2/\rho')]^{1/2}$, следующую из граничных условий на поверхности сильной ударной волны, его формальному выражению через уравнение фронта $-(\partial f/\partial t)/|\nabla f|$. Здесь $p = (\gamma - 1)\lambda E_0/V$ — давление за фронтом, γ — показатель адиабаты, E_0 — энергия взрыва, ρ и ρ' — плотности впереди и позади ударной волны, причём $\rho'/\rho = (\gamma+1)/(\gamma-1)$. Объём же, ограниченный УФ, через который выражается плотность энергии взрыва, $V(t)$ выражается интегралом по области, ограниченной фронтом, и, т. о., является функционалом от решения $V(t) = \pi \int r^2 dz$. Константа λ, равная примерно 2–3, учитывает отклонение давления непосредственно за фронтом от среднего по всей полости. Наконец, $f(r, z, t) = 0$ — уравнение УФ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Сделаем некоторые выводы о поведении лидирующей точки для $\varphi(z) = (z/z_0)^{-n}$ и при n, отличном от 2. Из системы уравнений (5), (6) и условия пересечения фронтом оси z, задаваемого уравнением $r(z_{1,2}) = 0$, для величин $z_{1,2}(y)$ имеем

$$y = \int_{z_0}^{z_2} dz' \, [\varphi(z')]^{1/2} = \int_{z_1}^{z_0} dz' \, [\varphi(z')]^{1/2}. \tag{П.1}$$

В окрестности z_2 величина ξ велика и можно использовать при вычислениях разложение по $1/\xi \ll 1$. Это даёт следующее выражение для ξ^2 [9]:

$$\xi^2 \approx \left[2\,(z_2 - z)\,[\varphi(z_2)]^{1/2}\right]^{-1} \int_{z_0}^{z_2} du \; [\varphi(u)]^{-1/2} \,, \tag{П.2}$$

и, соответственно,

$$r \approx \frac{1}{\xi(z,y)} \cdot \int_{z_0}^{z} du \; [\varphi(u)]^{-1/2} \,, \qquad z \to z_2(y). \tag{П.3}$$

Таким образом, ξ имеет корневую особенность в согласии с (14). Используем это решение для оценки объёма $V(t)$, необходимой для описания движения в терминах реального времени t. Для z_2 получаем

$$z_2(t) = \frac{z_0}{[1 - \mathrm{sign}(n-5)t/t_*]^{2/(n-5)}} \,, \tag{П.4}$$

$$t_* = \sqrt{16\pi z_0^5 \rho_0/(n+2)(n-5)^2 E_0 \lambda(\gamma^2 - 1)} \,. \tag{П.5}$$

Из (П.1) следует, что в случае $n > 5$ [8, 9] наступает “катастрофическое"ускорение указанного участка фронта и он уходит на бесконечность ($z_2 = \infty$) за конечное время. Выражение для скорости принимает вид

$$dz_2/dt \propto (t_* - t)^{(n-3)/(5-n)}. \tag{П.6}$$

Момент “прорыва"t_* порядка

$$t_* \approx (z_0^5 \rho_0/E_0)^{1/2} \tag{П.7}$$

(см. также [9]). Хотя здесь использовалось решение, справедливое только вблизи лидирующей точки, из-за чего проблема вычисления объёма остаётся и некоторые тонкости, несомненно, ускользают, выражения (П.4) и (П.6), на наш взгляд, весьма адэкватным образом описывают картину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. – 736 с.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1981. – 428 с.
3. Bisnovatyi–Kogan G. S., Silich S. A. //Revs. Mod. Phys., 1995. V. 67. № 3. P. 661.
4. Климишин И. А. Ударные волны в оболочках звёзд. — М.: Наука, 1984. – 215 с.
5. Гнатык Б. И. //Письма в Астрон. журн., 1985. Т. 11. № 10. С. 785.
6. Компанеец А. С. //Докл. АН СССР, 1960. Т. 130. № 5. С. 1001.
7. Силич С. А., Фомин П. И. //Докл. АН СССР, 1983. Т. 268. № 4. С. 861.
8. Korycansky D. G. //Astrophys. J., 1992. V. 398. Pt. 1. P. 184.
9. Конторович В. М., Пименов С. Ф. //Доповіді НАН України, 1996. № 1. С. 54.
10. Kontorovich V. M., Pimenov S. F. //Solar Physics, 1997. V. 172. P. 93.
11. Конторович В. М., Пименов С. Ф. — В сб.: XXVI Радиоастрономическая конференция. Тез. докладов, Санкт-Петербург, 1995. С. 197.
12. Kontorovich V. M., Pimenov S. F. — In: Inform. Bulletin Astron. Ass. Ukraine, 1995. № 7. P. 93.
13. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. — М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 804 с.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1970. – 720 с.
15. Parker E. N. //Astrophys. J., 1961. V. 133. № 3. P. 1014.
16. Хундхаузен А. Расширение короны и солнечный ветер. — М.: Мир, 1976. – 302 с.
17. Sakurai A. //Comm. Pure and Appl. Math., 1960. V. 13. P. 353.
18. Chernin A. D. //Vistas in Astronomy, 1996. V. 40. P. 257.
19. Гварамадзе В. В. //Письма в Астрон. журн., 1997. Т. 23. № 8. С. 606.
20. Muhleman D. O., Anderson J. D. //Astrophys. J., 1981. V. 247. P. 1093.
21. Lada C. J. //Ann. Rev. Astron. Astrophys., 1985. V. 23. P. 267.
22. Коваленко И. Г., Щекинов Ю. А. //Астрофизика, 1985. Т. 23. № 2. С. 363.
23. Новости HST. Столкновение сверхновых. //УФН, 1997. Т. 167. С. 778.

Радиоастрономический Институт
НАН Украины, Харьков;
НИИ физики при
Ростовском-на-Дону
госуниверситете, Ростов-на-Дону,
Россия

Поступила в редакцию
22 апреля 1997 г.

STRICT SOLUTION OF KOMPANEITS EQUATIONS FOR A STRONG POINT EXPLOSION IN A MEDIUM WITH QUADRATIC DENSITY DECREASE

V. M. Kontorovich, S. F. Pimenov

It has been studied (in the Kompaneits approximation) the propagation of shock wave front from the explosion point in a nonuniform medium with a power density decrease for the case of exponent $n = 2$ corresponding to corona external parts of the Sun and stars. It has been unexpectedly obtained a simple strict solution allowing to dear up the structure of the general solution for an arbitrary monotone density decrease. The results for a plane case are compared with Korikansky's results for the noncentral point explosion in a radially stratified medium. A correspondence is established between strict solutions for these two cases and a new solution has been derived for the noncentral explosion for the density with a peculiarity on a finite radius with the quadratic decrease at infinity.

УДК 621.37+621.39

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ МОДЕЛЬНЫХ ГРОЗОВЫХ РАЗРЯДОВ В НЕЙТРАЛЬНОЙ АТМОСФЕРЕ

А. П. Николаенко, М. Хайакава

Проведён расчёт электрических полей, создаваемых грозовыми разрядами в нейтральной атмосфере во временном представлении. Показано, что асимметричные пробои, содержащие горизонтальные токи, способны генерировать значительные импульсные электрические поля. Мощное квазистатическое поле совместно с импульсами способно воздействовать на среднюю атмосферу. Движение волны тока в канале пробоя сложной геометрии может привести к увеличению числа излучаемых импульсов. Вектор электрического поля на периферии грозовой ячейки при приходе импульса поворачивается вверх, к оси пробоя и в стороны. Здесь же можно ожидать увеличения турбулентности атмосферы из-за конвекции на фронтальной части облака. Возникающие неоднородности температуры и плотности атмосферы могут облегчить начало плазменных процессов, генерируемых электрическим полем мощной грозы. Поскольку конвекция и фокусирующие электрические поля сосредоточены на периферии, их совместное воздействие способно привести к возникновению кольцевых и вытянутых светящихся образований.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появились работы, описывающие оптические явления, названные “голубыми струями, красными духами и эльфами"(blue jets, red sprites and elves), которые регистрируются над мощными грозами (см., например, [1–4]). Обширная литература посвящена также анализу СДВ и СНЧ радиосигналов, зарегистрированных совместно с оптическими наблюдениями, численному моделированию и интерпретации этих явлений, см. [5–15], а также ссылки, содержащиеся в этих работах.

Главное внимание уделялось параметрам оптических излучений, индуцированному нагреву, дополнительной ионизации нижней ионосферы и т. д. Очевидно, что причиной таких процессов служат электрические поля грозового облака. В литературе рассматривалось поле квазистатики при учёте конечной проводимости воздуха, построены пространственные зависимости тока атмосферы в глобальных и локальных масштабах [16–18], решалась задача об электромагнитном импульсе в проводящей среде [19, 20]. Как правило, электрическое поле рассчитывалось в рамках упрощённых моделей вертикальных грозовых разрядов. Роль горизонтальных токов молнии упоминалась только вкратце (см., например, [21]), а все три компоненты поля: статическая, индукционная и радиационная — вместе не рассматривались.

Целью настоящей работы является расчёт полного электрического поля во временном представлении. В качестве базовой, мы используем стандартную модель среднего возвратного разряда, предложенную в [22]. Затем этот разряд модифицируется, что позволяет моделировать поля мощных возвратных и позитивных разрядов, “изломанных"и “паутинных"пробоев (spider strokes). решение задачи в пространственно–временном представлении позволило найти особенности электрического поля, способные объяснить структуру оптического свечения и рассеяние СДВ радиоволн на возникающих при этом неоднородностях [13].

БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим электрические поля, генерируемые средним возвратным разрядом. В качестве базовой модели мы используем формулы, предложенные в работе [22]. Ток пробоя начинается при $t = 0$ и представляется у основания молнии в виде четырёх экспоненциальных слагаемых

$$I(t) = \sum_{k=1}^{4} I_k \cdot \mathrm{e}^{-\omega_k t}, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Здесь I_k — амплитуды отдельных составляющих тока, а ω_k — соответствующие им обратные постоянные времени. В модели используются следующие числовые значения:

$$I_1 = -28{,}45 \text{ кА}, \quad I_2 = 23{,}0 \text{ кА}, \quad I_3 = 5{,}0 \text{ кА}, \quad I_4 = 0{,}45 \text{ кА},$$

$$\omega_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = 3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_3 = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_4 = 147 \text{ с}^{-1}.$$

При $t \cong 5{,}5$ мкс ток достигает пикового значения $I_\text{р}(t) \cong 24$ кА, а затем экспоненциально уменьшается до нуля. Этот ток направлен вертикально вверх. Пробой переносит на землю отрицательный электрический заряд, равный $Q = \int\limits_0^\infty I(t)\,dt = -6{,}3$ Кл. Предполагается, что волна тока распространяется вдоль вертикального канала пробоя со скоростью, экспоненциально убывающей во времени: $V(t) = V_0 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_V t}$. Таким образом, используется модель длинной линии [23]. Максимальная скорость движения волны тока у земли равна $V_0 = 8 \cdot 10^7$ м/с (примерно четверть скорости света), а её уменьшение во времени описывается параметром $\omega_V = 2 \cdot 10^4$ с$^{-1}$. Полное расстояние, проходимое волной тока за бесконечное время (длина пробоя), составляет $L = \dfrac{V_0}{\omega_V} = 4$ км.

Последовательные положения фронта и распределение тока по каналу пробоя показаны на рис. 1. Амплитуда тока в килоамперах отложена вдоль оси абсцисс. Высота или вертикальная длина канала отложена вдоль оси ординат в километрах. Нижняя кривая демонстрирует начальную стадию движения (14,4 мкс после начала пробоя). Верхняя кривая показывает распределение тока на финальной стадии пробоя, когда волна тока приближается к концу канала (примерно 340 мкс от начала). Соответствующие временные задержки показаны вдоль левой ординаты рисунка. Поскольку скорость движения убывает экспоненциально, то время t, необходимое для прохождения пути l, находится из формулы $t = \dfrac{1}{\omega_V} \ln\left(\dfrac{V_0}{V_0 - \omega_V l}\right)$.

Как видно из рисунка, волна тока представляет собой изолированный импульс. Рассмотрим, например, окрестность $t = 35$ мкс, что соответствует току, достигающему высоты 2 км. Амплитуда тока у основания пробоя спадает до 60% от максимального значения. Пик находится на высоте $l = 1{,}7$ км, а область, где амплитуда тока превышает уровень 70% его максимальной величины, лежит между высотами 0,5 и 1,9 км. Ещё через 35 мкс волна продвинется вверх и высоты составят соответственно 2,7 , 1,5 и 2,9 км. Физически, токовый “пакет"эквивалентен бунчу частиц в электронных приборах СВЧ.

Электрическое поле в ближней зоне разряда состоит из трёх составляющих: статической, индукционной и радиационной. При расчёте соответствующих моментов заряда, тока и излучения можно использовать традиционное интегрирование вдоль канала молнии, описанное в [24]. Мы применим для вычисления этих характеристик подход, предложенный в работе [22]. Получаемые соотношения оказываются простыми, а соответствие с результатами процедуры интегрирования по каналу разряда сохраняется. Это становится очевидным, если рассмотреть распространение δ-импульса тока вдоль канала молнии (тогда вся волна тока представляется как сумма таких элементарных бунчей).

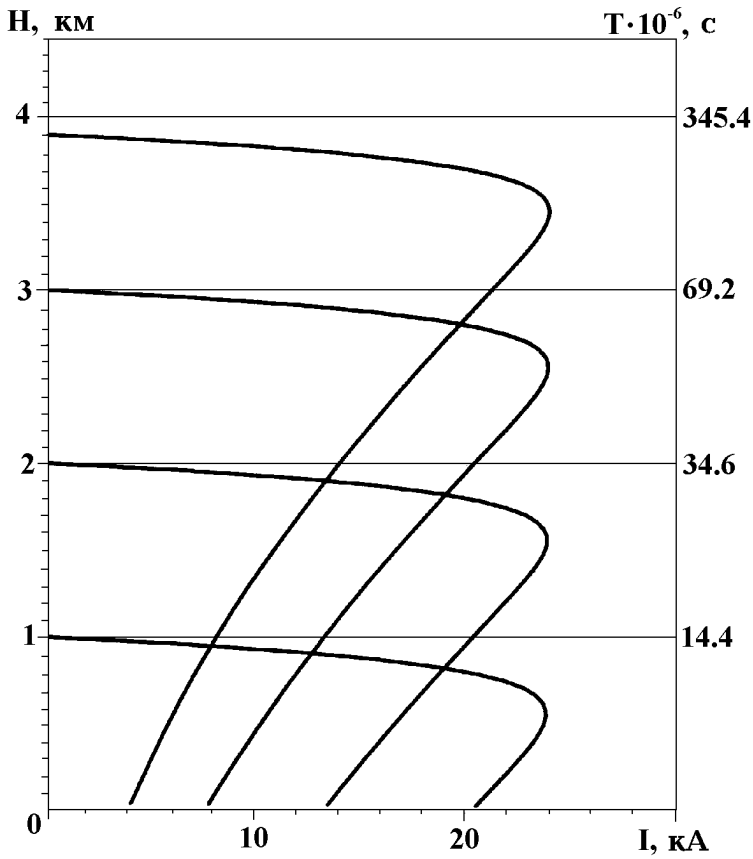


Рис. 1. Движение волны тока вдоль канала разряда. Базовая модель.

Токовый момент пробоя описывается следующим соотношением

$$M_{\mathrm{c}}(t) = I(t) \cdot l(t) = \frac{V_0}{\omega_V} \sum_{k=1}^{4} I_k \cdot \mathrm{e}^{-\omega_k t} \left\{ 1 - \mathrm{e}^{-\omega_V t} \right\}, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Моменты излучения и заряда получаются с помощью дифференцирования и интегрирования соотношения (2) по времени:

$$M_{\mathrm{r}}(t) = \frac{dM_{\mathrm{c}}}{dt} = V_0 \sum_{k=1}^{4} I_k \cdot \mathrm{e}^{-\omega_k t} \left[\left(1 + \frac{\omega_k}{\omega_V} \right) \mathrm{e}^{-\omega_V t} - \frac{\omega_k}{\omega_V} \right], \quad t \geq 0, \tag{3}$$

и

$$M_{\mathrm{q}}(t) = \int I(t) \cdot l(t) dt = \frac{V_0}{\omega_V} \cdot \sum_{k=1}^{4} I_k \left\{ \frac{\mathrm{e}^{-(\omega_k + \omega_V)t}}{\omega_V + \omega_k} - \frac{\mathrm{e}^{-\omega_k t}}{\omega_k} \right\}, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Моменты (2) и (3) равны нулю до начала пробоя (отрицательные значения времени), тогда как момент заряда остаётся при этом постоянным и отрицательным:

$$M_{\mathrm{q}}(t) = M_Q = -V_0 \sum_{k=1}^{4} \frac{I_k}{\omega_k(\omega_V + \omega_k)}, \tag{5}$$

Видно, что начальный электростатический момент (его конечное значение равно нулю) в форме (5) оказывается близким к интуитивно ожидаемому значению:

$$M_Q = LQ = \frac{V_0}{\omega_V} \sum \frac{I_k}{\omega_k} \cong -25 \text{ Кл} \cdot \text{км}. \tag{6}$$

Точное значение (5) составит $M_Q = -22{,}5$ Кл·км. Расхождение объясняется пространственным распределением заряда перед пробоем, соответствующим модели волны тока, что в простой геометрии не учитывается. Всё же, описание молнии с помощью диполя Герца с компактным зарядом Q, расположенным на высоте L, оказывается весьма точным.

При пробое возникает короткий электромагнитный импульс, зависящий от моментов тока и излучения. Момент заряда, ответственный за поле электростатики, монотонно изменяется от начального отрицательного значения до нуля. Временные зависимости всех трёх величин приведены на рис. 2.

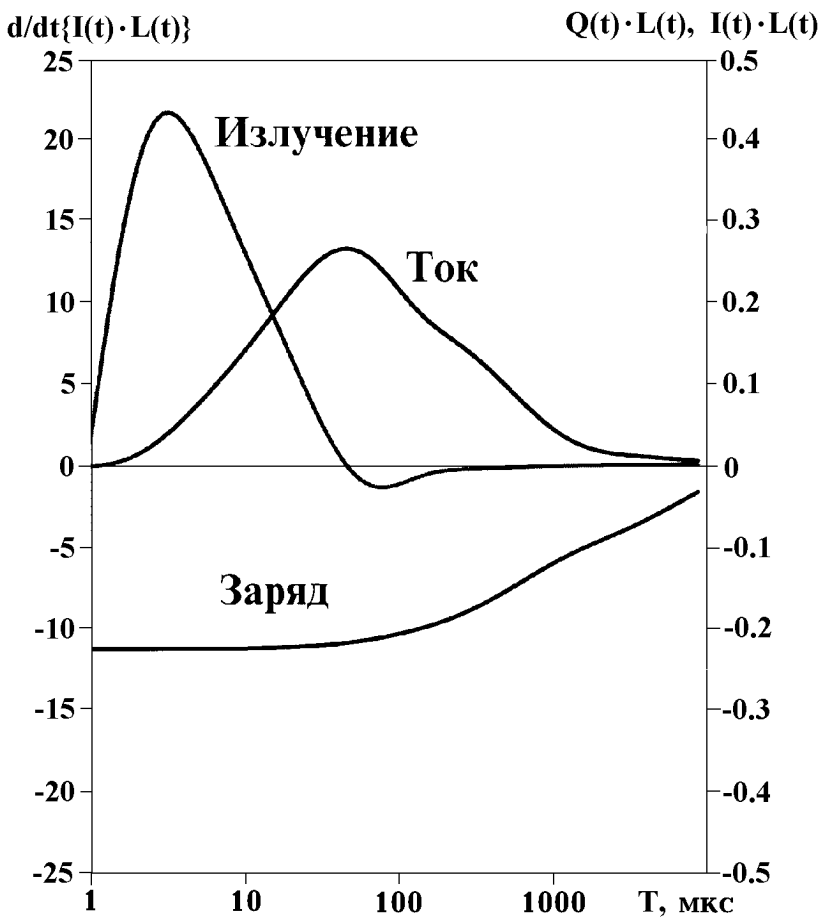


Рис. 2. Электрические моменты: заряда — $M_Q/10^5$, тока — $M_c/10^8$ и излучения — $M_R/10^{11}$.

Поскольку временные масштабы изменений отличаются на несколько порядков, вдоль горизонтальной оси использована логарифмическая шкала. Момент излучения нормирован на 10^{11} и отложен вдоль левой ординаты. Моменты тока и заряда нормируются на 10^8 и 10^5, соответственно, и отложены вдоль правой ординаты. Пик излучения молнии приходится на $t \cong 3$ мкс, максимум токового момента разряда отвечает $t \cong 45$ мкс. Момент заряда изменяется медленнее всего и убывает вдвое при $t \cong 1{,}5$ мс.

Здесь уместно напомнить, что электромагнитные процессы, длящиеся от миллисекунд до долей секунды, остаются предметом пристального внимания при интерпретации свечения атмосферы над грозами. Для получения “долгоживущих"процессов использовались различные модели и подходы. Один из них основан на квазистатическом поле мощного облака [7–10]. Остаётся, однако, вопрос: поскольку поле статики достигает максимума *до пробоя*, почему светящиеся образования наблюдаются *после* него? По нашему мнению ответ следует искать в комбинированном воздействии кратковременных полей индукции и излучения и медленно меняющегося поля статики. Эти поля в отдельности не способны вызвать свечение или ионизацию. Короткий мощный импульс, возникающий при пробое, сложившись с фоновым статическим полем, может запустить плазменные процессы, которые потом поддерживаются медленно убывающим полем статики.

Мы ограничимся исследованием электрических полей на дистанциях до 100 км от молнии. Ниже будет показано, что суперпозиция трёх компонент приводит к модуляции результирующего поля по амплитуде и направлению. Так возникает фокусирующее и отклоняющее воздействие на свободные электроны атмосферы.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ СРЕДНЕГО ВОЗВРАТНОГО РАЗРЯДА

Проведём анализ полей, создаваемых пробоем на высоте 50 км в нейтральной атмосфере. На больших высотах в решении задачи необходимо использовать спектральный подход, т. к. там существенную роль играет проводимость воздуха и появляются потери электромагнитной энергии, зависящие от частоты и волнового числа. В результате как переменное, так и статическое поля в проводящей среде изменятся. Мы не учитываем также отражений от ионосферы. Поскольку отражённые импульсы запаздывают на сотни микросекунд относительно прямой волны, приводимые результаты остаются строгими в этом временном интервале.

Вертикальная E_z и горизонтальная E_h компоненты электрического поля, создаваемые током вертикального возвратного пробоя в точке наблюдения на высоте H над землёй, равны

$$E_{z1}(t-\tau_1) = E_{R1}(t-\tau_1)\cos\theta_1(t-\tau_1) - E_{\theta 1}(t-\tau_1)\sin\theta_1(t-\tau_1), \tag{7}$$

$$E_{h1}(t-\tau_1) = E_{R1}(t-\tau_1)\sin\theta_1(t-\tau_1) + E_{\theta 1}(t-\tau_1)\cos\theta_1(t-\tau_1), \tag{8}$$

где

$$E_{R1}(t-\tau_1) = 2\cos\theta(t-\tau_1)\left(\frac{M_{\rm q}(t-\tau_1)}{R_1(t-\tau_1)^3} + \frac{M_{\rm c}(t-\tau_1)}{c\cdot R_1(t-\tau_1)^2}\right), \tag{9}$$

$$E_{\theta 1}(t-\tau_1) = \sin\theta_1(t-\tau_1)\left(\frac{M_{\rm q}(t-\tau_1)}{R_1^3(t-\tau_1)} + \frac{M_{\rm c}(t-\tau_1)}{c\cdot R_1^2(t-\tau_1)} + \frac{M_{\rm r}(t-\tau_1)}{c^2\cdot R_1(t-\tau_1)}\right), \tag{10}$$

$$\cos\theta_1(t-\tau_1) = \frac{H - l(t-\tau_1)}{R_1(t-\tau_1)} \tag{11}$$

и

$$\sin\theta_1(t-\tau_1) = \frac{D}{R_1(t-\tau_1)}, \tag{12}$$

наклонная дистанция

$$R_1(t-\tau_1) = \sqrt{[H - l(t-\tau_1)]^2 + D^2}, \tag{13}$$

а запаздывание за счёт распространения составляет

$$\tau_1 = R_1/c\,. \tag{14}$$

Используется цилиндрическая система координат, связанная с источником. Отражения от идеально проводящей земли учтены с помощью фиктивного разряда. Наклонная дистанция R_2, полярный угол θ_2, отсчитываемый от вертикальной оси z, и запаздывание волны, отражённой от земли, получаются из уравнений (7)–(14) при замене индекса 1 на 2 и одновременной замене знака $l(t-\tau_2) \to -l(t-\tau_1)$, например:

$$R_2(t-\tau_2) = \sqrt{[H + l(t-\tau_2)]^2 + D^2}\,. \tag{15}$$

Для заданного “абсолютного"времени наблюдателя $t_{\rm a}$ существуют два отдельных запаздывания и два собственных “времени источника". Различия возникают из-за движения волны тока в канале молнии, что приводит к изменениям расстояний R_1 и R_2. В начале пробоя обе дистанции (и оба запаздывания) равны друг другу: $R_1 = R_2 = R$ и $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, т. к. волны реального и фиктивного токов стартуют с нулевой высоты z. Истинная волна тока движется вверх, и на следующем шаге абсолютного времени $t_{\rm a}$ оказывается, что $l > 0$. Поэтому дистанция R_1 убывает, а R_2 увеличивается. Соответствующим образом изменяются запаздывания τ_1 и τ_2. Поэтому, начиная со второго шага вычислений, приходится использовать разные дистанции и различные “собственные"времена реального и фиктивного источников. Поскольку волна реального тока приближается к наблюдателю, расположенному над землей, соответствующий импульс приходит раньше и при этом сжимается во времени благодаря эффекту Доплера. Отражённый импульс запаздывает всё сильнее и оказывается растянутым во времени. Сжатие–растяжение приводит к расщеплению прямого и отражённого импульсов, которое становится заметным при использовании в вычислениях мелких временных шагов (меньше микросекунды). Отмеченный эффект, таким образом, не имеет практического значения за исключением отладки вычислительной программы.

Вертикальное и горизонтальное электрические поля в нейтральной атмосфере на высоте $H = 50$ км рассчитывалось по приведённым выше формулам и показано на рис. 3. Верхняя часть рисунка демонстрирует временные изменения вертикальной компоненты поля, а горизонтальное поле показано в нижней части рисунка. Горизонтальная дистанция между молнией и наблюдателем составляла $D = 0,\ 10,\ 25,\ 50$ и 100 км и показана рядом с кривыми.

Начальная часть графиков длиной около 200 мкс представляет квазистатическое поле, что обусловлено запаздыванием импульса за счёт распространения. Это поле оказывается преимущественно отрицательным, поскольку на вершине облака сосредоточен отрицательный заряд. Амплитуда поля достигает нескольких [В/м]. На больших дистанциях ($D = 100$ км и более) статическое поле оказывается положительным, что легко объясняется его дипольной геометрией.

После начала возвратного разряда в вертикальной компоненте поля появляется отрицательный короткий ($\cong$ 3 В/м) импульс излучения. На близких дистанциях от молнии этот импульс исчезает. Поле индукции создаёт широкий положительный импульс длительностью около 200 мкс, быстро убывающий с дистанцией. Самые медленные вариации обусловлены снижением заряда облака, которое длится несколько миллисекунд.

Горизонтальное квазистатическое поле возвратного разряда, как видно из рис. 3, остаётся всегда отрицательным, а поле излучения всегда положительно. Над источником горизонтальное поле исчезает. Для дистанций, больших 25 км, импульс излучения начинает превышать отрицательный “пьедестал"поля, создаваемый статическим моментом источника.

Как видно из графиков рис. 3, облако, в котором происходит возвратный разряд, создаёт над собой поле, вынуждающее отрицательно заряженные частицы двигаться вверх и наружу. Статическое поле исчезает в течение нескольких миллисекунд после начала пробоя. На это плавно уменьшающееся поле накладывается короткий импульс, во время действия которого горизонтальная компонента поля способна изменять свой знак. Так возникает фокусирующая сила, толкающая свободные электроны вверх и по напрвлению к оси молнии.

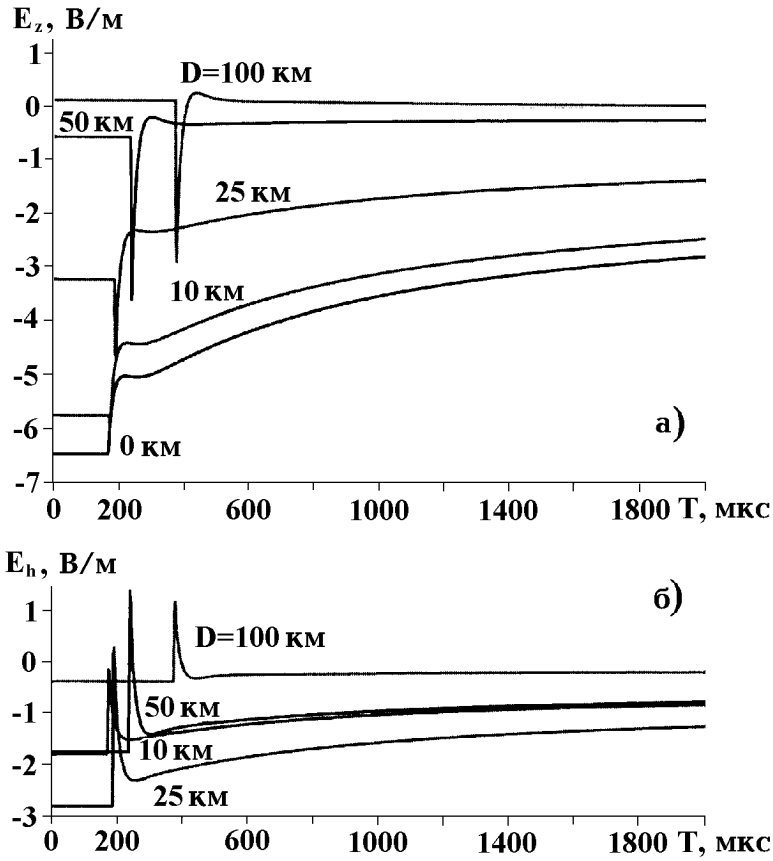


Рис. 3. Средний возвратный пробой. $H = 50$ км.

Ниже мы оценим изменения энергии свободных электронов атмосферы на высоте 50 км, связанные с электрическим полем грозы. Интегрирование уравнений движения показывает, что средний возвратный пробой не способен привести к заметным эффектам. По этой причине мы переходим к рассмотрению модифицированных моделей.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ВОЗВРАТНОГО РАЗРЯДА

Базовая модель изменяется следующим образом. Токи разряда увеличиваются в 50 раз, тогда переносимый на землю заряд возрастает от $-6{,}3$ до -315 Кл. Длина канала молнии увеличивается с 4 до 10 км. Последнее изменение достигается за счёт уменьшения постоянной времени ω_V от $2 \cdot 10^4$ с$^{-1}$ до $8 \cdot 10^3$ с$^{-1}$, т. к. начальная скорость движения волны тока уже составляет $1/4$ скорости света.

Расчёты вертикального электрического поля на поверхности земли на стандартном расстоянии от молнии $D = 100$ км показали, что модифицированный возвратный пробой обеспечивает более мощные вариации поля (усиление примерно в 45 раз), длительность импульса также увеличивается, но незначительно. Величина электростатического “пьедестала"и амплитуда импульса в модифицированной модели попадают в область максимальных значений, измеренных экспериментально [25—27], рассчитанных [20, 28] или использованных при моделировании оптического излучения над разрядами [10, 11]. Поскольку импульсы в нейтральной атмосфере возросли, увеличатся и силы, разгоняющие электроны.

ПОЗИТИВНЫЙ ПРОБОЙ

Параметры модифицированного возвратного разряда близки к величинам, характерным для позитивных пробоев. Поля, создаваемые таким пробоем, моделируются при следующих дополнительных предположениях.

1. Амплитуды токов базовой модели умножаются на (-50), что соответствует переносу из облака на землю положительного заряда в 315 Кл.
2. Предполагается, что пробой (движение волны тока) начинается от облака, а не от земли.

Зависимости вертикального электрического поля от времени для наблюдателя, расположенного на земле и удалённого от молнии на 100 км, в моделях модифицированного и позитивного пробоя оказались одинаковыми и отличаются только знаком: форма импульса, регистрируемого на поверхности земли, не зависит от направления движения волны тока в пробое. Поэтому наземный наблюдатель не в состоянии обнаружить разряды, у которых волны тока стартуют от облака. Причина состоит в одновременном приходе прямой и отражённой от земли волн в пункт наблюдения.

Приподнятый наблюдатель обнаружит два импульса, если волна тока бежит от облака. Первый импульс отвечает прямой волне, которая распространяется вдоль самой короткой дистанции. Второй импульс обусловлен отражениями от земли и проходит наибольшую начальную дистанцию. Поскольку амплитуда излучения максимальна в начале пробоя (см. рис. 2), принимаемый сигнал расщепляется на два импульса, амплитуды которых почти равны друг другу. Амплитуда этих импульсов уменьшается, а их взаимное запаздывание растёт, если точка наблюдения приближается к оси разряда при постоянной высоте над землёй равной $H = 50$ км.

“ИЗЛОМАННЫЙ"ПРОБОЙ

В модели пробоя с изломанным каналом число импульсов также увеличивается. В настоящее время хорошо изучены вертикальные разряды. Поля наклонных пробоев представлялись как простая комбинация полей синфазных вертикального и горизонтального диполей, что является сильным упрощением. Мы применим более реалистичную модель канала молнии, который состоит из вертикальной и горизонтальной частей (см. рис. 4).

Модель тока (1) сохраняется. В изломанном пробое волна тока стартует от земли и сначала распространяется вверх. По достижении высоты $z_k = 5$ км ток поворачивает в горизонтальном направлении. Полная длина канала молнии равна 10 км. Это означает, что при начальной скорости $V_0 = 8 \cdot 10^7$ м/с выбирается постоянная времени $\omega_V = 8 \cdot 10^3$ с$^{-1}$. Точка наблюдения удалена от источника в направлении оси x, а угол между этой осью и горизонтальной частью пробоя обозначен через ψ (см. рис. 4).

Изломанный пробой генерирует двойное поле: первое из них возникает от вертикального канала, а второе создаётся его горизонтальной частью. В отличие от упрощённой модели наклонного диполя, переходные поля этих частей возникают последовательно, поскольку начало горизонтального тока задержано относительно начала пробоя на время

$$t_k = \frac{1}{\omega_V} \ln\left(\frac{V_0}{V_0 - \omega_V \cdot z_k}\right). \tag{16}$$

За это время скорость движения волны тока снизится до величины $V_H = = V_0 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_V t_k}$ (начальная горизонтальная скорость), а её убывание во времени останется прежним. Иными словами, мы взяли базовый пробой, увеличили его длину до 10 км, а затем “сломали"его на высоте в 5 км. Выражения (2)–(4) для вертикальных моментов заряда, тока и излучения модифицируются к следующему виду:

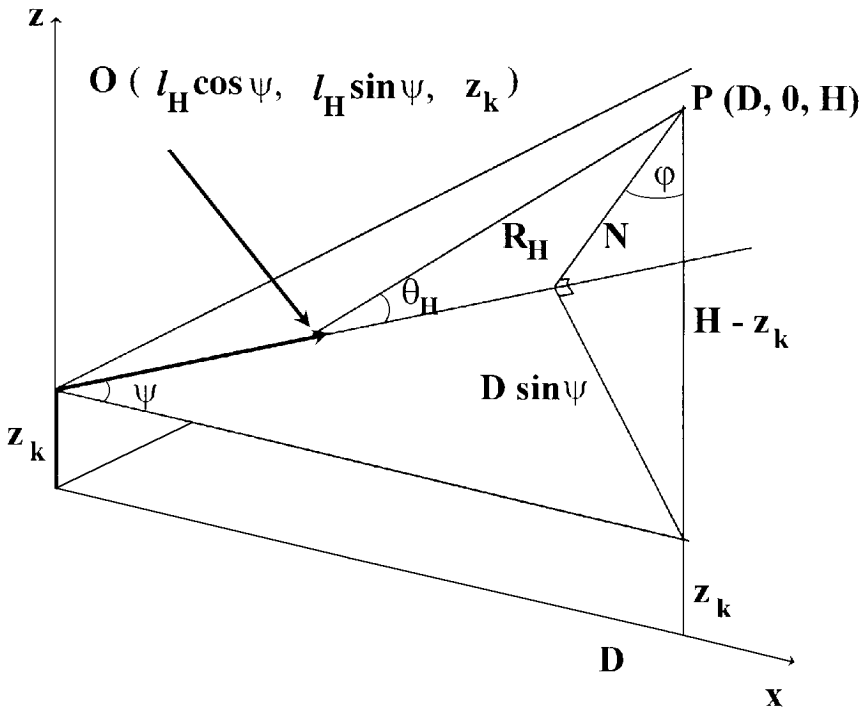


Рис. 4.

$$M_{\rm c} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{V_0}{\omega_V}(1 - {\rm e}^{-\omega_V t}) \displaystyle\sum_k I_k \cdot {\rm e}^{-\omega_k t}, & 0 \le t < t_k\,, \\ z_k \displaystyle\sum_k I_k \cdot {\rm e}^{-\omega_k t}, & t \ge t_k\,, \end{cases} \tag{17}$$

$$M_{\rm r} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ V_0 \displaystyle\sum_k I_k \cdot {\rm e}^{-\omega_k t} \left[\left(1 + \dfrac{\omega_k}{\omega_V}\right) \cdot {\rm e}^{-\omega_V t} - \dfrac{\omega_k}{\omega_V} \right], & 0 \le t < t_k\,, \\ z_k \displaystyle\sum_k (-\omega_k) \cdot I_k \cdot {\rm e}^{-\omega_k t}, & t \ge t_k\,, \end{cases} \tag{18}$$

$$M_{\rm q} = \begin{cases} -V_0 \displaystyle\sum_k \dfrac{I_k}{\omega_k(\omega_k + \omega_V)}\,, & t < 0, \\ -\dfrac{V_0}{\omega_V} \displaystyle\sum_k I_k \cdot {\rm e}^{-\omega_k t} \left(\dfrac{1}{\omega_k} - \dfrac{{\rm e}^{-\omega_V t}}{\omega_k + \omega_V} \right), & 0 \le t < t_k\,, \\ -z_k \displaystyle\sum_k I_k \dfrac{{\rm e}^{-\omega_k t}}{\omega_k}\,, & t \ge t_k\,. \end{cases} \tag{19}$$

Как видно из сравнения формул (17)–(19) с (2)–(4), изменения коснулись лишь области $t > t_k$. Дополнительные строки в формулах учитывают поворот тока и прекращение удлинения вертикальной части канала молнии. Выражения для дополнительных моментов $M_{\rm qH}$, $M_{\rm cH}$ и $M_{\rm rH}$, создаваемых горизонтальной частью пробоя, формально совпадают с (2)–(4), если заменить начальную скорость V_0 на V_H, а вместо t подставить $\tau = (t - t_k)$.

Очевидно, что изломанный разряд генерирует несколько импульсов излучения. Это дополнительный импульс от горизонтального тока, который начинается при $t = t_k$, кроме того появляются сигналы, отражённые от земли.

Электрические поля вертикальной части пробоя рассчитываются по формулам (7) и (8) после подстановки соответствующих моментов (17)–(19). Поля от горизонтальной части рассчитываются с помощью соотношений

$$E_z = -(E_{RH}\sin\theta_H + E_{\theta H}\cos\theta_H)\sin\varphi\,, \tag{20}$$

$$E_x = (E_{RH}\cos\theta_H - E_{\theta H}\sin\theta_H)\cos\psi - \\ -(E_{RH}\sin\theta_H + E_{\theta H}\cos\theta_H)\cos\varphi\cdot\sin\psi\,, \tag{21}$$

$$E_y = (E_{RH}\cos\theta_H - E_{\theta H}\sin\theta_H)\sin\psi + \\ +(E_{RH}\sin\theta_H + E_{\theta H}\cos\theta_H)\cos\varphi\cdot\cos\psi\,, \tag{22}$$

$$E_{RH} = \frac{2\cos\theta_H}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{M_{\mathrm{qH}}}{R_H^3} + \frac{M_{\mathrm{cH}}}{cR_H^2}\right), \tag{23}$$

$$E_{\theta H} = \frac{\sin\theta_H}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{M_{\mathrm{qH}}}{R_H^3} + \frac{M_{\mathrm{cH}}}{cR_H^2} + \frac{M_{\mathrm{rH}}}{c^2R_H}\right). \tag{24}$$

Геометрические параметры моделей находятся из следующих уравнений (см. рис. 4):

$$\sin\theta_H = \frac{N}{R_H} \qquad \text{и} \qquad \cos\theta_H = \frac{D\cos\psi - l_H}{R_H}\,, \tag{25}$$

$$\cos\varphi = -\frac{H - z_k}{N} \qquad \text{и} \qquad \sin\varphi = -\frac{D\sin\psi}{N}\,, \tag{26}$$

$$N = \sqrt{(D\sin\psi)^2 + (H - z_k)^2}\,, \tag{27}$$

$$R_H = \sqrt{(D - l_H\cos\psi)^2 + (l_H\sin\psi)^2 + (H - z_k)^2}\,. \tag{28}$$

Здесь через $l_H(t) \geq 0$ обозначена текущая длина горизонтальной части канала молнии ($l_H(t) = l(t) - z_k$).

Импульс, порождаемый горизонтальным током, сдвинут во времени на начальное запаздывание t_k плюс задержка на распространение R_H/c.

Отражения от земли приводят к появлению дополнительных импульсов. Соответствующие формулы совпадают с уравнениями, выписанными выше, после подстановки $z_k \to -z_k$, например:

$$R_L = \sqrt{(D - l_H\cos\psi)^2 + (l_H\sin\psi)^2 + (H + z_k)^2}\,. \tag{29}$$

При этом задержка на распространение составляет R_L/c.

Расчёты для наземного наблюдателя снова показывают, что он не видит временных деталей, возникающих благодаря излому пробоя. Ещё раз оказывается, что такой наблюдатель не способен отличать разряды друг от друга. Если же точку наблюдения приподнять над землёй, то ситуация изменится. На рис. 5 показаны две взаимно перпендикулярные горизонтальные и вертикальная компоненты поля, рассчитанные для наблюдателя, расположенного на высоте 50 км. Горизонтальная дистанция принимает значения $D = 0,\ 10$ и 50 км. Ось x системы координат направлена от основания пробоя к наблюдателю (см. рис. 4). Использованы две взаимно ортогональные ориентации тока. Одна из них, $\psi = 0$, обозначена словом “вдоль"на рисунке, а вторая, $\psi = \pi/2$, снабжена надписью “поперёк". Горизонтальное электрическое поле представлено продольной E_x и поперечной E_y составляющими.

На графиках рис. 5 появились дополнительные импульсы, связанные с горизонтальным током пробоя и его отражением в земле. Характерной особенностью излучения “изломанного"пробоя является наличие почти симметричного импульса излучения в поперечной компоненте поля E_y. Максимум амплитуды этого поля достигается при $\psi = \pi/2$. Соответственно, такой пробой способен генерировать не только радиальные фокусирующие поля (компонента E_x), но и вызывать поперечное движение заряженных частиц. Это последнее может сыграть роль при запуске плазменных процессов и формировании вытянутых неоднородностей или волокон спрайта.

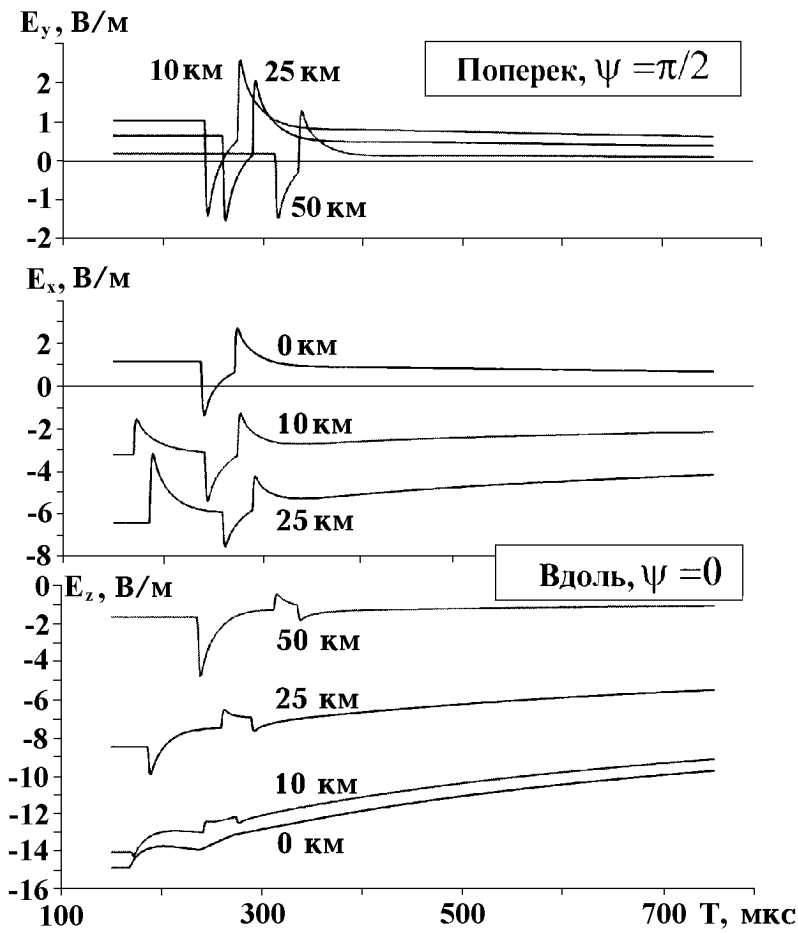


Рис. 5. Изломанный пробой. $H = 50$ км.

ПРОБОЙ ТИПА “СПАЙДЕР”

В качестве дальнейшей модификации базовой модели источника мы используем модель “паутинного"пробоя или “спайдера". Такой разряд состоит из розетки горизонтальных токовых каналов, которые расходятся из общего вертикального ствола. Структура молнии напоминает раскрытый зонтик или паутину. Мы сохраним все характеристики изломанного пробоя, за исключением одной. Горизонтальный ток, протекающий на высоте 5 км, теперь будет равномерно распределён между восемью каналами, ориентированными вдоль лучей $\psi = 0,\ \pi/4,\ \pi/2, \ldots, 7\pi/4$. Все горизонтальные волны тока стартуют одновременно из общего центра. Поэтому создаваемые ими поля стремятся взаимно компенсировать друг друга (помимо уменьшения каждого тока до $1/8$). Главный вклад в поле обеспечивается

вертикальным каналом молнии. Спайдер оказывается аналогичным вертикальной антенне с верхней ёмкостной нагрузкой.

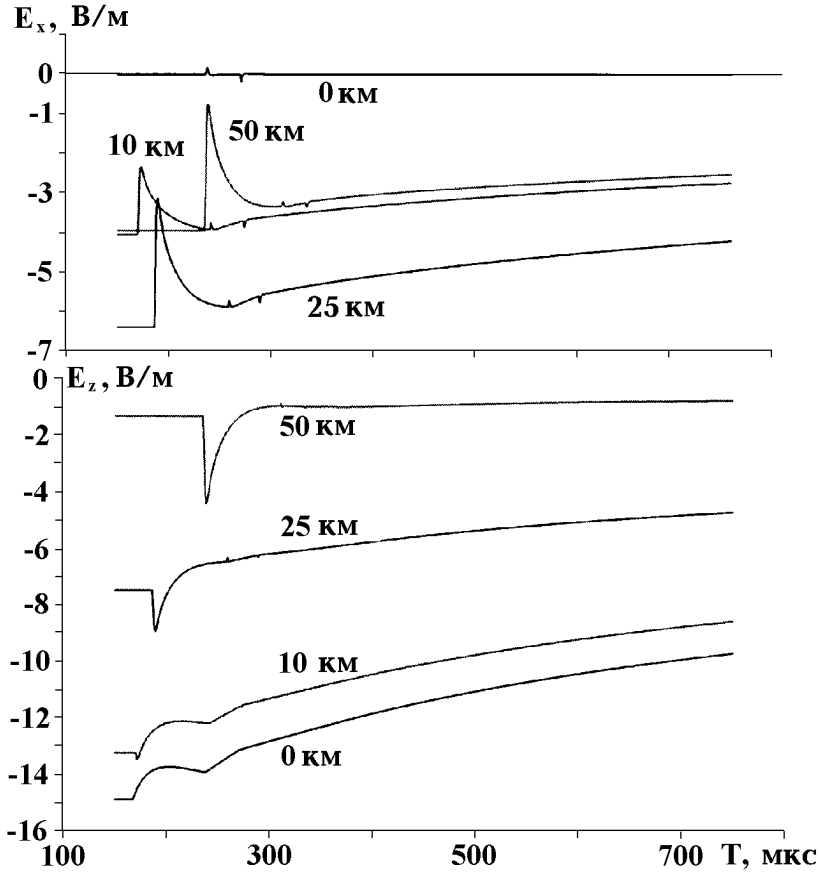


Рис. 6. Спайдер. $H = 50$ км.

На рис. 6 приведены временные зависимости атмосферного электрического поля, генерируемого спайдером. Осевая симметрия источника приводит к отсутствию поперечного горизонтального поля, $E_y = 0$. Амплитуды вертикальной $E_z(t)$ и продольной горизонтальной $E_x(t)$ компонент поля занимают промежуточное положение между моделями изломанного пробоя и базовой моделью. Статическая компонента поля спайдера совпадает по величине с полем изломанного пробоя и превышает поле возвратного пробоя примерно вдвое. Напомним, что высота возвратного разряда составляла 4 км, тогда как для спайдера и изломанного пробоя она равна $z_k = 5$ км. Вынуждающая сила теперь всегда направлена наружу (отсутствует изменение знака поля при приходе импульса), что обусловлено возрастанием статического поля спайдера и изломанного пробоя. Дополнительные импульсы в горизонтальном поле на рис. 6 отсутствуют из-за осевой симметрии разряда. Видны только остатки фронтов этих импульсов.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Высоты, где проводимостью атмосферы можно пренебречь. Мы вычисляли электрические поля, создаваемые модельными разрядами, в нейтральной среде, используя пространственно-временное представление. Поэтому необходимо указать область высот, где проводимость атмосферы не играет

существенной роли. Применим модель экспоненциального вертикального профиля проводимости воздуха [29]. Для оценок используем результаты [30], полученные в одномасштабной модели:

$$\sigma(z) = 2\pi\varepsilon_0 \mathrm{e}^{(z-G)/\zeta}. \tag{30}$$

Здесь z — высота над поверхностью земли в км, ζ — высотный масштаб проводимости воздуха, а G — начальная высота, т. е. такая высота, на которой токи проводимости равны токам смещения на частоте 1 Гц.

Результаты измерений глобального СНЧ (шумановского) резонанса [31–33], позволили получить следующие оценки для дневных условий: $\zeta \cong 3{,}4$ км и $G \cong 38{,}8$ км. Высота, на которой токи проводимости и смещения на произвольной частоте f оказываются равными друг другу, находится из соотношения

$$h_0 = G + \zeta \cdot \ln f\,. \tag{31}$$

После подстановки в (31) характерных постоянных времени импульсов, показанных на рис. 2, можно убедиться, что проводимость воздуха не играет существенной роли вплоть до высот 60, 69 и 77 км для статического, индукционного и радиационного полей, соответственно. В настоящей работе мы используем высоту наблюдателя $H = 50$ км.

Сила, движущая электроны. Показанные выше временные зависимости горизонтального и вертикального электрического поля позволяют описать структуру сил, ускоряющих электроны атмосферы. На рис. 7 мы приводим пространственно-временные диаграммы такой силы, создаваемой позитивным пробоем для трёх дистанций от источника. Здесь изображены три сечения, построенные для приподнятого наблюдателя ($H = 50$ км) и радиальных удалений $D = 10,\ 50,\ 75$ км. Вдоль оси абсцисс и оси ординат отложены компоненты $-E_x(t)$ и $-E_z(t)$, соответственно. Время выступает в роли параметра. Каждая из точек графика отвечает изменению времени с шагом в 2 мкс. В таком построении вектор движущей силы (для единичного отрицательного заряда) — это стрелка, соединяющая начало координат с текущей точкой графика. Стрелки на рис. 7 показывают такие векторы перед началом пробоя, во время прихода импульса и при окончательном спадании статического поля. Движущая сила всегда направлена в сторону облака (надпись “до") и способна опустить нижнюю ионосферу над грозой. При приходе импульсов вектор поворачивается к вертикали (“пик"), а затем возвращается к прежней ориентации и медленно убывает после окончания импульса (“спад"). Квазистатическая сила на больших дистанциях направлена почти горизонтально, что объясняется с помощью геометрических соображений [17, 34].

Движущая сила, способная приводить к фокусировке электронов в бунч, появляется с горизонтальных дистанций в 50 км. Она направлена к оси пробоя и вниз (см. рис. 7 б и в). Поскольку волна тока положительного разряда стартует от облака к земле, появляются дополнительные особенности годографов.

1. Переходный процесс удлиняется и происходит расщепление импульса на два. Каждый из них имеет длительность около 20 мкс.
2. Импульсная движущая сила всегда направлена внутрь и вниз.

Фокусировка электронов будет зависеть от скорости частиц, приобретаемой в квазистатическом поле до прихода импульса, от амплитуды и длительности воздействия повёрнутого поля и от частоты соударений. При известных сторонней силе и частоте соударений задача сводится к интегрированию уравнения движения. На высоте в 50 км частота соударений свободных электронов с нейтральными

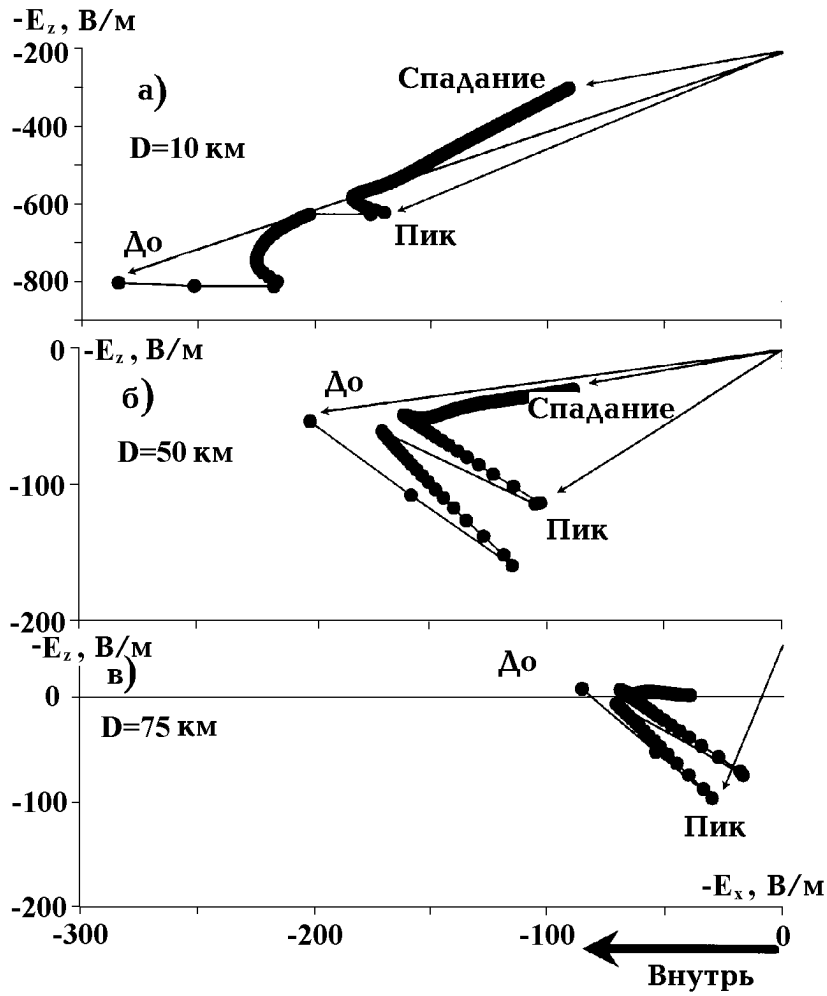


Рис. 7. Сторонняя сила, позитивный пробой. $H = 50$ км.

частицами атмосферы велика и для всех составляющих пробоя (1) выполняется условие $\nu \gg \omega_k$. Поэтому мгновенная скорость электрона и пройденный им путь находятся из тривиальных соотношений

$$\vec{U}(t) = \frac{1{,}76 \cdot 10^{11}}{\nu} \cdot \{\vec{E}(t)\} \tag{32}$$

и

$$\vec{S}(t) = \frac{1{,}76 \cdot 10^{11}}{\nu^2} \cdot \{\vec{E}(t)\}. \tag{33}$$

Здесь скорость U, путь S и электрическое поле E измеряются соответственно в [м/с], [м] и [В/м].

Таким образом, рис. 7 демонстрирует одновременно временную эволюцию скорости и пути электрона. Переходные коэффициенты от [В/м] к [м/с] и от [В/м] к [м] для $\nu = 10^8$ с$^{-1}$ ($H = 50$ км) равны соответственно $1{,}76 \cdot 10^3$ и $1{,}76 \cdot 10^{-5}$. Иными словами, электрическое поле в 1 В/м обеспечивает разгон электрона до скорости в 1,8 км/с, а соответствующая длина свободного пробега составит всего $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ м.

Приведённые выше элементарные оценки позволяют заключить, что:

- Электрические поля, создаваемые средним возвратным разрядом, способны обеспечить длину пути, проходимого электроном, в 1 м при частоте соударений, равной $\nu = 4 \cdot 10^5$ с$^{-1}$, что соответствует высоте в 95 км.

- Для получения той же длины свободного пробега на высоте в 50 км требуется увеличить поле среднего грозового облака в $5 \cdot 10^4$ раз.

Непосредственный расчёт показывает (см. рис. 7), что на высоте 50 км поля позитивного пробоя обеспечивают длину свободного пробега электрона от 0,4 до 1,4 см, что обеспечивает приобретение энергии между столкновениями от 0,7 до 8,6 эВ. Такой разряд разгоняет электроны до энергий, когда нелинейность окажется настолько существенной, что начнутся процессы ограничения, см. [35].

И всё же, для генерирования нелинейных и оптических явлений приходится предполагать предельно высокую электрификацию облака. Желательно было бы указать процессы, уменьшающие частоту соударений над грозой и снижающие требования к полям молний.

Уменьшение ν может вознитнуть благодаря интенсивной конвекции на периферии грозовой ячейки. Действительно, локальные флуктуации плотности и температуры воздуха могут привести к образованию “дыр", где облегчается ускорение электронов. Пусть, например, частота соударений уменьшится на порядок, тогда для начала плазменных явлений стороннее электрическое поле достаточно увеличить в 500 раз: заряд — до 600 Кл, а длину пробоя — до 20 км, — что приводит нас к параметрам, использованным в работах [8, 9].

Оценим энергию, до которой разгонится электрон в области с пониженной частотой соударений. Предположим, что над мощной грозой флуктуации плотности атмосферы достигают 30%. Тогда на высоте 50 км частота столкновений электронов с нейтральными молекулами упадёт с 10^8 до $7 \cdot 10^7$ с$^{-1}$. Приведённые выше поля мощных позитивных пробоев могут разогнать электроны до энергий в десятки электрон-вольт, что заведомо приведёт к сильным нелинейнам эффектам.

Вернёмся к влиянию геометрии токового канала на свойства атмосферного электрического поля. Рис. 8 демонстрирует движущие силы, создаваемые изломанным пробоем. Рассматривается случай, когда горизонтальная часть пробоя направлена перпендикулярно линии разряд—наблюдатель ($\psi = \pi/2$). Левая колонка графиков показывает радиальное сечение, т. е. $-E_z(t)$ как функцию $E_x(t)$. Правая колонка показывает поперечное сечение: $-E_z(t)$ как функцию $-E_y(t)$. Время служит параметром. Горизонтальные дистанции источник—наблюдатель равны 10, 25 и 50 км.

Левая колонка графиков рис. 8 похожа на графики для базовой модели разряда за исключением двукратного увеличения статического поля. При приходе импульса электроны ускоряются вверх и в сторону вертикальной оси пробоя, а сама сила немного флуктуирует относительно гладкой зависимости чисто вертикального пробоя. Боковые ускорения, показанные на правой колонке графиков, начинаются после того, как радиальная сила возвращается к невозмущённому положению. В результате внешняя сила заставляет электроны сканировать небо, помогая “найти слабое место"в атмосфере. Поперечные силы могут объяснить также волокнистую структуру спрайта или джета.

В заключение статьи упомянем ещё одну особенность полей, вызывающих модификации в нижней ионосфере. Проводимость среды приводит к затуханию падающей волны и одновременно выступает в роли фильтра нижних частот. В некоторой области высот может возникнуть равновесие между падающей волной E на данной частоте и пороговым полем плазмы $E_{\rm pl}$, что обеспечит их “синхронизм". Амплитуда первой убывает с масштабом, равным глубине скин-слоя, который зависит от частоты и коэффициента преломления среды. Плазменное поле $E_{\rm pl}$ пропорционально $\nu^{1/2}$, а частота соударений ν пропорциональна плотности атмосферы. Обе величины убывают с высотой экспоненциально. Поэтому для заданного интервала высот можно подобрать такую частоту, что отношение $E/E_{\rm pl}$ будет постоянным. Таким образом, величина нелинейных эффектов, вызванных внешним полем, будет неизменной в континууме высот. Становится возможным “резонансное взаимодействие"волны и среды, которое обеспечит характерный масштаб наблюдаемых явлений.

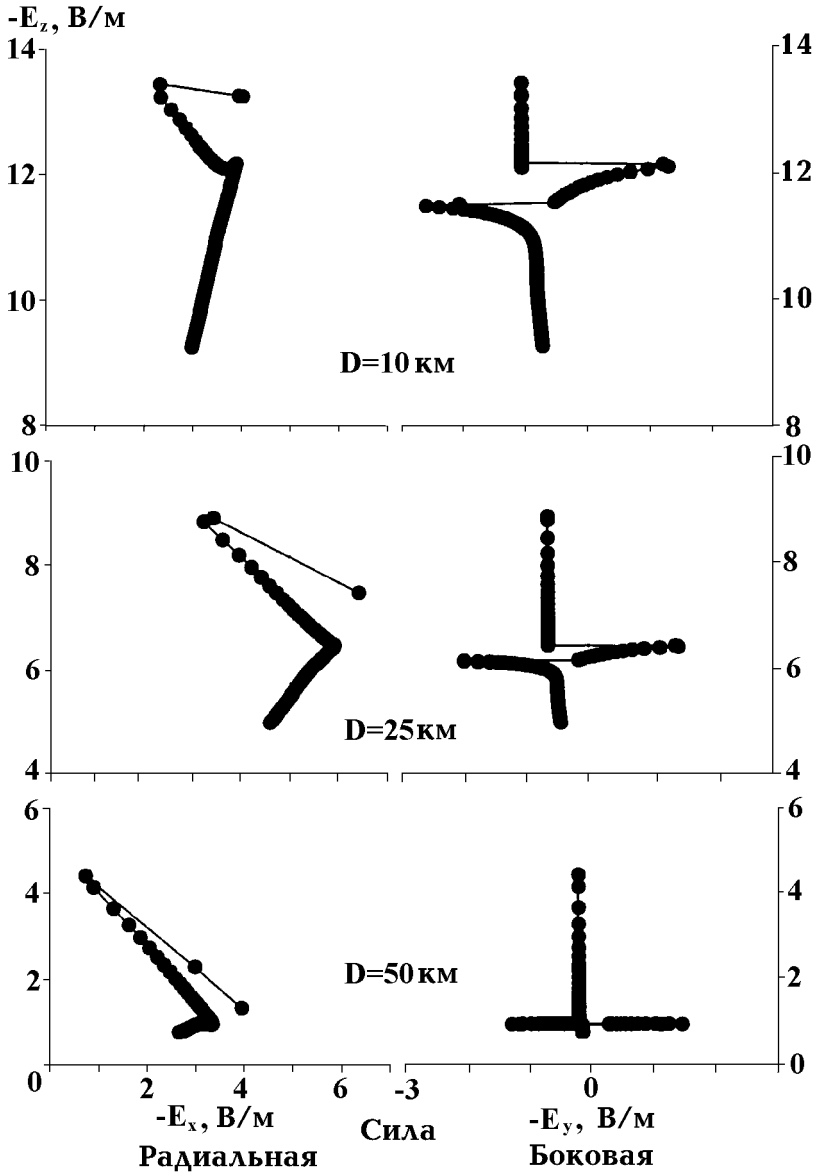


Рис. 8. Сторонняя сила, изломанный пробой. $H = 50$ км, $\psi = \pi/2$.

“Равновесная"частота находится из условия равенства локальной глубины скин-слоя δ и высотного масштаба $Z_{\rm a}$ нейтральной атмосферы:

$$\delta = \frac{\lambda}{\mathrm{Im}\{n(z,f)\}} = Z_{\rm a} = 8 \text{ км}. \tag{34}$$

Из (34) нетрудно получить искомую частоту f_e, если использовать (30):

$$f_e = \frac{4\pi}{Z_{\rm a}\mu_0} \cdot \mathrm{e}^{[(G-z)/\zeta]} \cong 2{,}5 \cdot 10^5 \cdot \mathrm{e}^{[(G-z)/\zeta]}. \tag{35}$$

Из (35) получаем следующую серию равновесных частот и периодов, как функцию высоты в свободной атмосфере.

Таблица

Высота, км	50	60	70	80	90
Равновесная частота f_e	9,3 кГц	490 Гц	26 Гц	1,4 Гц	0,07 Гц
Период	107 мкс	2 мс	38,5 мс	0,7 с	14,.3 с

Из таблицы видно, что длительность наблюдаемых оптических явлений указывает на взаимодействие в области высот от 60 до 70 км. Впрочем, затухание волн в нижней ионосфере по пути к высоте равновесия приведёт к более резкому спаданию частоты f_e, что корректно вычисляется только в частотном представлении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Параметры использованных модельных разрядов и величины электрических полей согласуются с литературными данными. Геометрия пробоя и характер движения волны тока в канале молнии обуславливают многообразие импульсов, которые делают эффекты многократными и более длительными. Квазистатическое поле есть наибольшее среди трёх компонент как по амплитуде, так и по длительности. Совместное влияние статического и импульсного полей способно запустить плазменные процессы, которые впоследствии поддерживаются медленно спадающим статическим полем. Тонкая структура оптических излучений может объясняться совместным влиянием вращающегося электрического поля и флуктуаций плотности атмосферы во внешней конвективной области грозы.

Ниже перечислены основные результаты работы.

1. Для получения существенных переходных электрических полей в атмосфере требуются асимметричные пробои с горизонтальными каналами. Квазистатическое поле создаётся при этом вертикальным электрическим моментом. Это поле сохраняется пока существует заряд облака. Горизонтальные токи возбуждают интенсивные импульсы, способные запустить процессы в плазме.
2. Комбинация вертикального и горизонтального токов в источнике увеличивает его электрическое поле. Это позволяет использовать меньшие высоты разделения зарядов в облаке, сохраняя достаточный уровень полей на границе нижней ионосферы.
3. Спусковой механизм, связанный с импульсной компонентой, состоит в модификации электродвижущей силы. При приходе импульса в периферийную часть грозовой ячейки (горизонтальные дистанции в 50–100 км) вектор этой силы отклоняется вертикально вверх, в сторону разряда и в стороны.
4. Турбулентность и конвекция могут приводить к флуктуациям плотности и температуры нейтральной атмосферы, которые помогают развитию плазменных процессов. Поскольку конвекция на периферии облака усиливается, то там следует ожидать возникновения светящихся образований, имеющих преимущественно кольцевидную и волокнистую форму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boeck W. L., Vaughan Jr., Blakslee B., Vonnegut B. and Brook M. //Geophys. Res. Lett., 1992. V. 19. P. 99.
2. Sentman D. D. and Westcott E. M. Red sprites and blue jets, Video. — Fairbanks: Geophys. Ins. Univ. of Alaska, 1994.

3. Sentman D. D., Westcott E. M., Osborne D. L., Hampton D. L. and Heavner M. J. //Geophys. Res. Lett., 1995. V. 22. P. 1205.
4. Westcott E. M., Sentman D. D., Osborne D. L., Hampton D. L. and Heavner M. J. //Geophys. Res. Lett., 1995. V. 22. P. 1209.
5. Bell T. F., Pasko V. P., Inan U. S. //Geophys. Res. Lett., 1995. V. 22. № 16. P. 2127.
6. Boccippio D. J., Williams E. R., Lyons W. A., Baker I. and Boldi R. //Science, 1995. V. 269. P. 1088.
7. Pasko V. P., Inan U. S., Taranenko Yu. N. and Bell T. F. //Geophys. Res. Lett., 1995. V. 22. P. 365.
8. Pasko V. P., Inan U. S., Bell T. F. //Geophys. Res. Lett., 1996. V. 23. № 3. P. 301.
9. Pasko V. P., Inan U. S., Bell T. F. — In: Attracts of URSI GAB, Lille-France, Aug. 28–Sept. 5, 1996. P. 700 (HG2.P15).
10. Inan U. S., Sampson W. A., and Taranenko Yu. N. //Geophys. Res. Lett.,1996. V. 23. № 2. P. 133.
11. Rowland H. L., Fernsler R. F., Huba J. D., and Bernardt. //Geophys. Res. Lett., 1995. V. 22. № 4. P. 361.
12. Lyons W. A. //Geopys. Res. Lett., 1994. V. 21. P. 875.
13. Dowden R., Brundell J., Rodger C., Molchanov O., Lyons W., and Nelson T. //Anten. and Propag. Magaz., 1996. V. 38. № 3. P. 7.
14. Hale L. C. — In: Abstracts of XXVth URSI General Assembly, Lille France, Aug. 28–Sept. 5, 1996. P. 233 (E2.2.14).
15. Rycroft M. J. //J. Atmos. Terr. Phys., 1994. V. 56. P. 343.
16. Krider E. P. and Musser C. //J. Geophys. Res., 1982. V. 87. P. 171.
17. Ogawa T. //J. Geophys. Res., 1985. V. 90. P. 5951.
18. Hale L. C. and Baginski M. E. Current to the ionosphere following a lightning stroke //Nature, 1987. V. 329.
19. Gurevich A. V., Milikh G. M., and Roussel-Dupre R. A. //Phys. Lett. A., 1992. V. 165. P. 463.
20. Sukhorukov A. I. //J. Atmos. Terr. Phys., 1996. V. 58. № 15. P. 1711.
21. Nikolaenko A. P. and Hayakawa M. //Geophys. Res. Lett., 1995. V. 22. № 22. P. 3015.
22. Jones D. L1. //J. Atmos. Terr. Phys., 1970. V. 32. P. 1077.
23. Uman M. The lightning Discharge. — New York, Boston, London, Tokyo: Academic Press, Inc., 1987.
24. Ogawa T. — In: Handbook of atmospheric electrodynamics. V. 1. Atmospheric electricity /Ed. by H. Volland. — London, Tokyo: CRC press Inc., Boca Raton, 1995. P. 93.
25. Krider E. P. — In: The Earth's electrical environment. — Washington DC: Nat. Academy press, 1986. P. 30.
26. Krider E. P. and Guo C. //J. Geophys. Res., 1983. V. 88. P. 8471.
27. Holzworth R. H., Kelley M. C., Siefring C. L., Hale L. C., and Mitchell J. D. //J. Geophys. Res., 1985. V. 90. P. 9824.
28. Sukhorukov A. I., Rudenchik E. A., and Stubbe P. — In: Abstracts of URSI GA, Lille, France, Aug. 28–Sept. 5, 1996. P. 692 (HG2.P8).
29. Galejs J. //IRE Trans., AP, 1961. V. QA-9. P. 554.
30. Greifinger C. and Greifinger P. //Radio Sci., 1978. V. 13. P. 831.
31. Bliokh P. V., Nickolaenko A. P., and Filippov Yu. F. — In: Schumann resonances in the Earth–ionosphere cavity /Ed. by D. Ll. Jones. — Oxford, New York, Paris: Peter Perigrinus, 1980.
32. Nickolaenko A. P. and Rabinowicz L. M. //Space Research, 1982. V. 20. № 1. P. 82 (in Russian).
33. Sentman D. D. — In: Handbook of atmospheric electrodynamics. V. 1. Atmospheric electricity /Ed. by H. Volland. — Boca Raton, London, Tokyo: CRC Press Inc., 1995. P. 267.
34. Baginski M. E., Jarriel G. W., Jr. //J. of Electrostatics, 1994. V. 33. P. 87.
35. Taranenko Y. N., Inan U. S., and Bell T. F. //Geophys. Res. Lett., 1993. V. 20. P. 1539.

Институт радиофизики и
электроники НАН Украины,
Харьков;
The University of
Electro-Communications, Tokyo,
Japan

Поступила в редакцию
14 мая 1997 г.

ELECTRIC FIELDS FROM MODEL LIGHTNING DISCHARGES IN THE NEUTRAL ATMOSPHERE

A. P. Nickolaenko, M. Hayakawa

The time domain electric field produced by the model lightning discharges in the neutral atmosphere is computed and its modifications due to geometrical changes of the stroke are examined. Combined effect of the motion of the current wave and the tortuosity of the lightning channel results in multiple pulses. Vector of the electric field in the atmosphere acquires transient vertical, inward/outward and sideways components. Therefore, the vector “scans"the sky at the onset of the pulse. Effects are unobservable at the ground surface or right above the stroke. To detect these features the airborne measurements should be performed at a distance of tens of kilimeters from the discharge and at as high altitude as possible. Quasi-static, induction and radiation field components of a severe stroke may trigger the modifications in the middle atmosphere. Disturbances above the storm may lead to the air density and temperature fluctuations that facilitate initiation of the plasma processes. Since both the atmospheric disturbances and focusing electric fields are enhanced at the periphery of a thunderstorm, the circular structures should be expected there, at some distance from the parent strokes.

УДК 338.550.2

СПЕКТРАЛЬНО–ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ КАРТИНЫ РАДИОСИГНАЛА

Э. Л. Афраймович, К. С. Паламарчук

В статье предлагается использование спектрально-поляризационного метода для восстановления формы и измерения скорости перемещения интерференционной картины (ИК) путём анализа трёх взаимоортогональных проекций вектора поля радиосигнала с помощью одной приёмной антенны. На первой стадии анализа вычисляются комплексные доплеровские спектры временных вариаций этих проекций. Затем для каждой составляющей спектров эти данные используются для определения спектров углов прихода. Совместно с данными о допплеровском смещении частоты это позволяет восстановить форму ИК и оценить скорость и направление её перемещения. Приведены формулы, иллюстрирующие предлагаемую технологию и результаты численного моделирования, показывающие возможность практического осуществления идеи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Подавляющий объём данных о динамике ионосферы получен при измерениях на уровне земной поверхности пространственно–временных характеристик интерференционной картины — ИК (фазы или амплитуды) радиосигнала, отражённого от ионосферы при вертикальном или слабонаклонном падении в ДВ, СВ, КВ-диапазонах, или при трансионосферном распространении от дискретных радиоисточников или передатчиков на ИСЗ в диапазоне УКВ. Проблема соответствия параметров ИК соответствующим характеристикам неоднородностей ионизации на определённой высоте в ионосфере обычно решается в рамках подходящей модели “фазового экрана” и не рассматривается в данной работе.

Эти измерения всегда проводились с использованием пространственного разнесения приёмных антенн, начиная от простейшего варианта из трёх антенн в пионерской работе [1], вплоть до больших многоантенных амплитудных матриц [2] или фазированных антенных решёток и радиоастрономических интерферометров ([3, 4] и т. д.).

Недостатком классического метода всегда была необходимость обеспечения необходимой пространственной апертуры, что ограничивало возможности определения характеристик движения в тех случаях, когда требовался большой пространственный разнос между антеннами. Кроме того, это существенно ограничивало возможности изучения пространственно–временных характеристик отражающей поверхности при дистанционном зондировании с подвижных платформ (самолёты, ИСЗ).

Предлагаемый метод может также повысить пространственное разрешение при дистанционном зондировании с подвижных платформ. Впервые, по-видимому, эта идея была высказана в монографии автора [5], однако до сих пор не получила должного развития.

Естественно, авторы не считают, что предлагаемый метод заменяет классический, но он может существенно дополнить его. Синтез предлагаемого и классического методов мы предполагаем рассмотреть в дальнейших работах так же, как и результаты экспериментальной проверки метода.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать принципиальную возможность измерения характеристик скорости перемещения ИК отражённого или трансионосферного радиосигнала на уровне земной поверхности без использования классического метода разнесения по пространству. Описание аппаратуры, программного обеспечения и данных, полученных в эксперименте по проверке осуществимости метода, и их сравнение с данными традиционного КВ-пеленгатора будут сообщены позже.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ КАРТИНЫ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗНЕСЁННОМ ПРИЁМЕ

Рассмотрим на достаточно общем примере вертикального зондирования ионосферы основные принципы определения скорости перемещения ИК в рамках простой интерференционной модели [5], основные выводы которой совпадают с многочисленными известными методами анализа данных при когерентном разнесённом приёме (см., напр., [6–8]).

Комплексную амплитуду радиосигнала в определённой точке земной поверхности с координатами $x = y = 0$ в момент времени t можно представить в виде дискретного набора s-мод (лучей)

$$\tilde{A}(x, y, t) = \sum_{s=1}^{n} r_s \exp\left[j\left(kP_s + \varphi_s(0)\right)\right] , \tag{1}$$

где r — амплитуда, P — фазовый путь сигнала, $k = 2\pi/\lambda$; λ — длина волны рабочей частоты, $\varphi_s(0)$ — начальная фаза, n — число мод.

Рассмотрим пространственные свойства $\tilde{A}$ в приближении близкоразнесённого приёма. При этом предполагается, что при малых пространственно–временных приращениях расстояния между приёмными антеннами d_x, d_y много меньше характерного пространственного масштаба возмущения в плоскости антенной системы, а интервал времени Δt между отсчётами много меньше временного масштаба возмущения, так что влиянием вторых производных можно пренебречь.

В этом случае фазовый фронт s-компоненты сигнала можно считать плоским, а коэффициент r — не зависящим от координаты x (измеряемой в северном направлении) и y (измеряемой в западном направлении), так что сигнал на разнесённых антеннах отличается только фазовым запаздыванием, зависящим от координат антенн и времени t.

$$\begin{aligned} kP_s(x, y, t) &= k_{x,s}x + k_{y,s}y - \omega_s t , \\ k_{x,s} &= k \sin\theta_s \cos\psi_s , \\ k_{y,s} &= k \sin\theta_s \sin\psi_s , \end{aligned} \tag{2}$$

где θ — угол места, отсчитываемый от зенита, ψ — азимутальный угол прихода, отсчитываемый от северного направления на запад, ω — допплеровский сдвиг частоты (см. рис. 1).

Тогда скорость V_s и направление ψ_s перемещения фазового фронта s-компоненты радиосигнала определяются значениями углов прихода и допплеровской частоты

$$\begin{aligned} V(\omega_s) &= \omega_s / 2\sqrt{k_{x,s}^2 + k_{y,s}^2} , \\ \psi(\omega_s) &= \operatorname{arctg}\left(k_{y,s}/k_{x,s}\right) . \end{aligned} \tag{3}$$

Соответствующие широко известные методы спектрального анализа комплексной амплитуды используются для разрешения отдельных компонент спектра и определения параметров скорости с использованием (3) (см., напр., [6–8]).

Амплитуда отражённого многолучевого сигнала определяется интерференцией всех составляющих в (1); подробный анализ приведён в [5]:

$$|\tilde{A}|^2 = \sum_q \sum_s r_q r_s \cos\left(k\Delta_{q,s}P + \Delta q, s\varphi(0)\right) ,$$

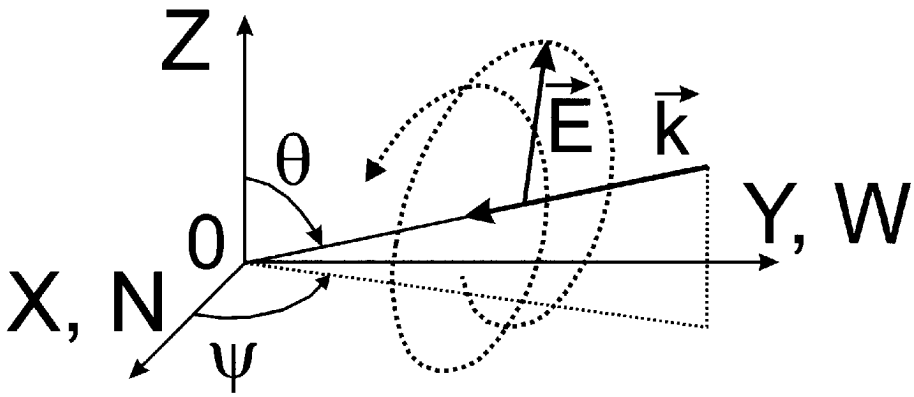


Рис. 1. Геометрия эксперимента. Направление прихода радиоволны с волновым вектором $\mathbf{k}$ задаётся углом места θ, отсчитываемым от оси Z, и азимутом ψ, отсчитываемым от оси X, в сторону оси Y. Вектор поля $\mathbf{E}$ описывает спиральную линию, форма которой определяется параметрами поляризации волны.

$$
\begin{aligned}
k\Delta_{q,s}P(x,y,t) &= \Delta_{q,s}k_x x + \Delta_{q,s}k_y y - \Delta_{q,s}\omega t\,, \\
\Delta_{q,s}k_x &= k(\sin\theta_q\cos\psi_q - \sin\theta_s\cos\psi_s)\,, \\
\Delta_{q,s}k_y &= k(\sin\theta_q\sin\psi_q - \sin\theta_s\sin\psi_s)\,, \\
\Delta_{q,s}\omega &= \omega_q - \omega_s\,, \\
\Delta_{q,s}\varphi(0) &= \varphi_q(0) - \varphi_s(0)\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Скорость $V_{q,s}$ и направление $\psi_{q,s}$ перемещения парциального амплитудного фронта определяются разностями углов прихода и допплеровских частот (q,s)-компонент сигнала

$$
\begin{aligned}
V_{q,s} &= \frac{\Delta_{q,s}\omega}{2\sqrt{(\Delta_{q,s}k_x)^2 + (\Delta_{q,s}k_y)^2}}\,, \\
\psi_{q,s} &= \operatorname{arctg}\left(\Delta_{q,s}k_y\,/\Delta_{q,s}k_x\right)\,.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Таким образом, наиболее общий вариант определения скорости перемещения ИК при когерентном приёме так или иначе основан на разделении компонент спектра комплексного сигнала с последующим определением допплеровских частот и углов прихода составляющих спектра

$$
\begin{aligned}
\omega_s &= \Delta\varphi_{q,s}\,/\Delta t\,, \\
k_{x,s} &= \Delta\varphi_{x,s}\,/d_x\,, \\
k_{y,s} &= \Delta\varphi_{y,s}\,/d_y\,,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $\Delta\varphi_t$, $\Delta\varphi_x$, $\Delta\varphi_y$ — разности фаз, а d_x, d_y — базы разноса по соответствующим переменным в случае расположения приёмных антенн в вершинах прямоугольного треугольника.

В действительности существует множество методов определения скорости и направления перемещения ИК, вовсе не обязательно связанных с предварительным вычислением допплеровских частот и углов прихода сигнала, однако все они могут быть сведены к принятой в этой работе форме, адекватной изложенному автором [5] методу.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОРМЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ КАРТИНЫ ПРИ НАБЛЮДЕНИЯХ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

Ещё в работе [9] было показано, что в свободном пространстве комплексные амплитуды трёх взаимоортогональных проекций поля одномодового регулярного сигнала определяют параметры эллипса поляризации и направление вращения вектора поляризации, а также углы прихода ψ и θ (положение волнового фронта). Перечисленные параметры составляют описание полного вектора поля плоской радиоволны и связаны с комплексными амплитудами $\tilde{A}_x$, $\tilde{A}_y$, $\tilde{A}_z$ проекций поля системой трансцендентных уравнений (ось z направлена в зенит).

$$\begin{aligned} \tilde{A}_x &= A_x \exp(j\varphi_x)\,, \\ \tilde{A}_y &= A_y \exp(j\varphi_y)\,, \\ \tilde{A}_z &= A_z \exp(j\varphi_z)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Не останавливаясь на подробном описании алгоритмов [9], выпишем только формулы, определяющие углы прихода плоской волны в свободном пространстве:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\psi &= A_x \sin(\varphi_x - \varphi_z)/A_y \sin(\varphi_z - \varphi_y)\,, \\ \operatorname{tg}^2\theta &= \frac{A_x^2 A_z^2 \sin^2(\varphi_x - \varphi_z) + A_z^2 A_y^2 \sin^2(\varphi_z - \varphi_y)}{A_x^2 A_y^2 \sin^2(\varphi_y - \varphi_x)}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Принцип определения углов прихода по измерениям в одной точке трёх проекций электрического или магнитного полей волны известен и применяется в исследованиях ОНЧ излучений; в работе [10] предлагается использовать такую технологию для зондирования магнитосферы.

Несомненно, весьма заманчива возможность определения параметров полного вектора поля, особенно углов прихода и скорости перемещения ИК, с помощью одной антенны. Однако непосредственное использование для обработки данных формул (8) возможно только для строго регулярного одномодового сигнала. Внешние помехи и рассеяние сигнала увеличивают ошибки измерений, а многомодовость при близких значениях амплитуд мод вызывает необратимые интерференционные искажения, что резко ограничивает использование этого метода в исследовательской и прикладной радиотехнике.

Выходом является разделение мод; в исследовательских системах обычно используется импульсное зондирование ионосферы, что позволяет в ряде случаев успешно разделить моды. Однако такой способ не годится для непрерывного или модулированного радиосигнала радиовещательных станций в ДВ, СВ и КВ диапазонах.

Проблему в значительной степени решает предложенный в [11] спектрально–поляризационный метод анализа полного вектора поля радиоволны на основе комплексной допплеровской фильтрации мод.

Суть метода сводится к тому, что во всех алгоритмах вычисления параметров полного вектора поля с помощью систем уравнений относительно взаимоортогональных проекций поля вместо комплексных

амплитуд проекций используются комплексные амплитуды составляющих комплексного допплеровского спектра этих проекций, т. е. амплитудные $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$, $S_z(\omega)$ и фазовые $\Phi_x(\omega)$, $\Phi_y(\omega)$, $\Phi_z(\omega)$ спектры, где ω — круговая частота. Эти спектры вычисляются для x, y, z — комплексных амплитуд сигнала с выхода соответствующих взаимоортогональных антенн с использованием алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) и подходящих временных или спектральных окон.

Таким образом, в уравнениях (8) мы предлагаем использовать не единичные значения измерений A_x, A_y и A_z, а комплексные амплитуды составляющих комплексного допплеровского спектра трёх проекций поля. Соответственно вычисляется спектр углов прихода. Для условий свободного пространства эти спектры примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\psi(\omega) &= S_x(\omega)\sin[\Delta_{xz}(\omega)]/S_y(\omega)\sin[\Delta_{zy}(\omega)]\,, \\ \operatorname{tg}^2\theta(\omega) &= \frac{S_x^2(\omega)S_z^2(\omega)\sin^2[\Delta_{xz}(\omega)] + S_z^2(\omega)S_y^2(\omega)\sin^2[\Delta_{zy}(\omega)]}{S_y^2(\omega)S_x^2(\omega)\sin^2[\Delta_{yx}(\omega)]}\,, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\Delta_{yx}(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega)$, $\Delta_{zy}(\omega) = \varphi_z(\omega) - \varphi_y(\omega)$ и $\Delta_{xz}(\omega) = = \varphi_x(\omega) - \varphi_z(\omega)$.

Комплексная допплеровская фильтрация позволяет не только разделить интерферирующие моды, но и обеспечивает большую помехозащищённость измерений и, как следствие, большую устойчивость решения трансцендентных уравнений. Применять алгоритмы спектрально—поляризационного метода следует только после экспертизы остаточной интерференции в допплеровских фильтрах [5].

Получение спектра углов прихода имеет самостоятельное значение; в рамках предлагаемого нами метода полученные значения $\psi(\omega)$ и $\theta(\omega)$ используются для восстановления пространственных характеристик ИК с использованием уравнений (2) с целью получения спектров $k_x(\omega)$ и $k_y(\omega)$.

Далее можно выбрать несколько путей анализа. Наиболее общий заключается в восстановлении пространственно—временного образа $\tilde{A}(x, y, t)$ путём синтеза ИК с использованием формул (1) и (4). Восстановленная таким образом ИК затем может быть обработана любым из известных методов анализа, в том числе с целью восстановления формы пространственно—временной корреляционной функции.

Таким образом, решение поставленной задачи определяется тем, с какой точностью удаётся определить углы прихода радиоволны с использованием трёхкомпонентной антенны.

4. ВЛИЯНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ НА ТОЧНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УГЛОВ ПРИХОДА (ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ)

Очевидно, что существует множество факторов, которые могут помешать осуществить идею описанного метода на практике. К ним прежде всего относятся шумы и межмодовая интерференция. Для исследования влияния этих факторов мы предприняли попытку анализа возможностей метода с помощью компьютерного имитационного моделирования. Возможные систематические ошибки определения углов прихода, обусловленные взаимным влиянием антенн и окружающего пространства, в рамках данной работы не рассматриваются.

Первый этап моделирования состоял в получении рядов мгновенных отсчётов проекций (7) вектора поля $\vec{E}$ электромагнитной волны на три взаимно перпендикулярные антенны (см. рис. 1). Осуществлялось это путём вычисления скалярного произведения вектора поля $\vec{E}$ на единичные векторы-орты вдоль осей OX, OY и OZ. Вектор поля $\vec{E}$ вычислялся для каждого момента времени, исходя из заданных для каждого конкретного сеанса амплитуды, углов прихода радиоволны, отношения полуосей эллипса

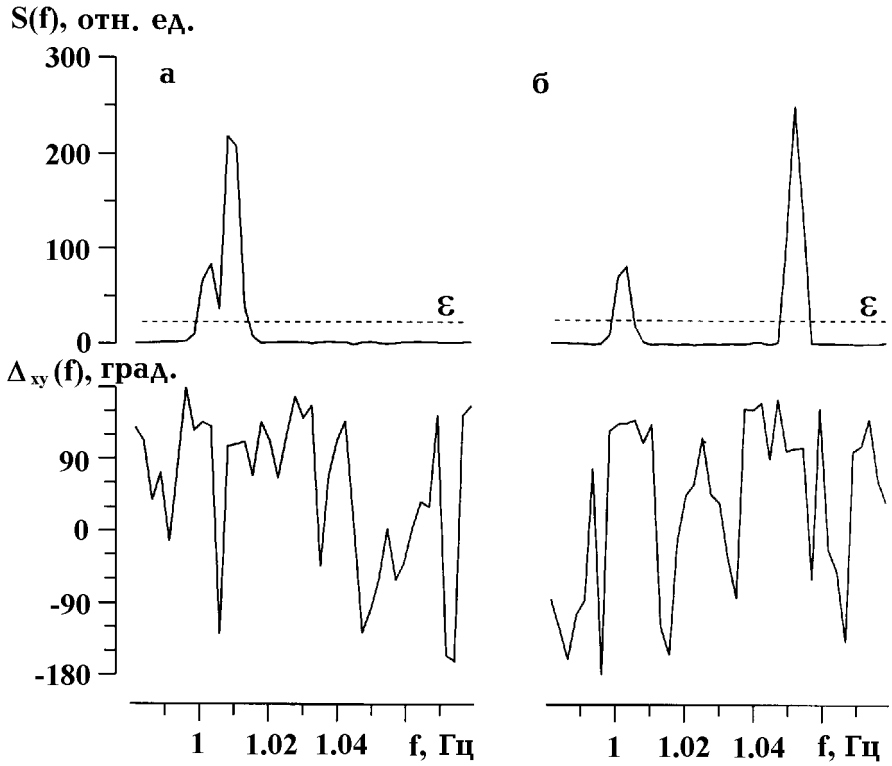


Рис. 2. Примеры модельных амплитудных $S(f)$ (вверху) и фазовых $\Delta(f)$ (внизу) спектров двухмодового сигнала, принятого одной из антенн. Использовались ряды длиной в 2048 точки при частоте сигнала $f = \omega/2\pi = 1$ Гц и частоте отсчётов 10 Гц. Разнос мод по частоте $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$. Штриховыми линиями показаны пороги ε, составляющие в данном случае 0,1 от амплитуды максимальной гармоники, ниже которых полагается $S(f) = 0$ (а — $\Delta f = 0{,}007$ Гц; б — $\Delta f = 0{,}05$ Гц).

поляризации и их ориентации в пространстве. Все приведённые ниже результаты получены для сигнала круговой поляризации с правым направлением вращения. С помощью генератора псевдослучайных чисел моделировался также шум, амплитуда которого тоже изменялась.

На втором этапе полученные ряды подвергались прямому преобразованию Фурье. Затем для каждой из спектральных компонент амплитудных $S(\omega)$ и разностно–фазовых $\Delta(\omega)$ спектров по формулам (9) вычислялись углы прихода. На рис. 2 представлены примеры амплитудных $S(f)$ и разностно–фазовых спектров $\Delta(f)$, смоделированных для одной из проекций двухмодового сигнала.

Все приводимые ниже результаты получены для тех компонент, чья амплитуда была выше заданного порога $\varepsilon = 0{,}1$. Все модельные расчёты велись на рядах длиной $1024 = 2^{10}$, $2048 = 2^{11}$ и $4096 = 2^{12}$ точек для удобства применения БПФ. Разница в длинах рядов обуславливает различия в естественной ширине спектральных линий. На практике ширину линий желательно свести к минимуму, для чего следовало бы увеличить время накопления данных, однако оно не должно превысить характерный период нестационарности, составляющий для КВ диапазона величину порядка 300 сек.

На рис. 3 представлены результаты анализа точности восстановления углов прихода на основе описанных преобразований для различных значений отношения сигнал/шум. Показаны результаты исследования лишь в одном октанте. Формулы (9) однозначно определяют угол ψ, а угол θ только в диапазоне $0° \div 90°$, оставляя неопределённым его знак. Поведение решений уравнений (9), лежащих в разных

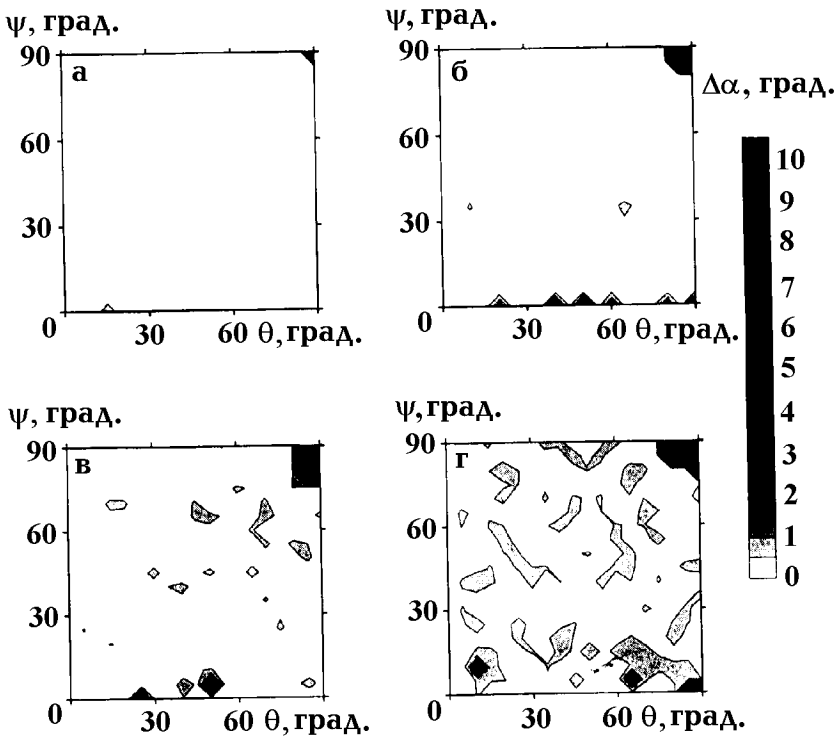


Рис. 3. Результаты анализа точности определения углов прихода в зависимости от отношения сигнал/шум (S/N). Степенью зачернения в соответствии с полутоновой шкалой, размещённой сбоку, представлена величина $\Delta\alpha(\theta, \psi)$. (а — $S/N = 2{,}0$; б — $S/N = 1{,}0$; в — $S/N = 0{,}66$; г — $S/N = 0{,}5$).

октантах, одинаково. На практике для измерения углов прихода и восстановления формы ИК всегда достаточно определять θ с точностью до знака.

Вычисления велись на рядах по 4096 точек при частоте полезного сигнала 1 Гц в предположении, что частота следования отсчётов составляет 10 Гц. В качестве параметра для оценки точности был выбран среднеквадратичный угловой диаметр круга на сфере, в который попадают расчетные точки, $\Delta\alpha(\theta, \psi)$. Центр круга лежит в точке, угловые координаты θ и ψ которой были заданы как исходные. Этот параметр измерялся в градусах.

В случае, когда амплитуда шума равна нулю, восстановление углов происходит с точностью вычислений на компьютере. При увеличении уровня шума вырисовываются "неблагонадёжные" области октанта при приближении θ и ψ к 90°, а далее и при стремлении ψ к 0°. При этом диаметр пятна разброса $\Delta\alpha(\theta, \psi)$ достигает 10°. Однако в большей части октанта, при отношении сигнал/шум не хуже 1,0 , $\Delta\alpha(\theta, \psi)$ не превосходит 0,5°.

На рис. 4 представлены результаты анализа точности восстановления углов прихода на основе описанных преобразований при интерференции двух мод с задаваемыми значениями допплеровской частоты и углов прихода и отношением сигнал/шум, равным 5,0. Кресты обозначают задаваемые при моделировании направления, а точки — восстановленные направления. Для одной моды могут быть восстановлены несколько направлений, поскольку естественная ширина спектральных линий отличается от 0 и профиль отдельной линии содержит несколько спектральных компонент, вычисленных с помощью БПФ. Для исследования точности мы использовали ряды длиной в 1024 точки при частоте сигнала 1 Гц и частоте отсчётов 10 Гц. При таких условиях естественная ширина спектральной линии составляет 0,021 Гц и в неё попадают 1–2 спектральных компоненты, таким образом, для каждого

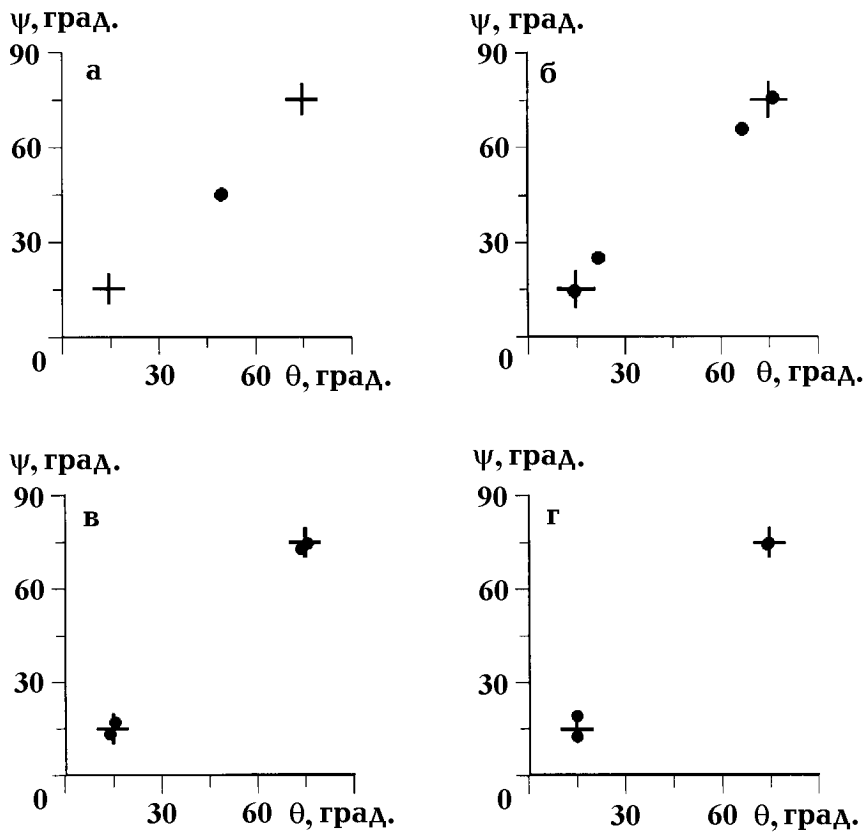


Рис. 4. Результаты анализа точности определения углов прихода при наличии двух лучей одинаковой амплитуды и разностью частот Δf. Крестами показаны заданные направления ($\theta = 15°$, $\psi = 15°$) и ($\theta = 75°$, $\psi = 75°$), кружочками — восстановленные направления (а — $\Delta f = 0{,}01$ Гц; б — $\Delta f = 0{,}02$ Гц; в — $\Delta f = 0{,}03$ Гц; г — $\Delta f = 0{,}05$ Гц)

заданного направления на рис. 4 показаны 1 или 2 восстановленных.

При отсутствии разнесения по частоте обе моды сливаются в одну и восстановленное направление (рис. 4а) лежит посреди двух заданных. При разнесении на $\Delta f = 0{,}01$ Гц эффект интерференции весьма велик — фазовые и амплитудные соотношения претерпевают такие изменения, что восстановленные углы прихода даже не лежат в рассматриваемом октанте (этот случай на рис. 4 не показан). Однако столь малый частотный разнос при большом угловом разносе практически встречается весьма редко. Но уже при частотном разнесении мод на ширину спектральной линии моды разрешаются вполне уверенно (рис. 4б). При дальнейшем увеличении частотного разноса (рис. 4в и 4г) качество разделения мод возрастает.

5. ВЫВОДЫ

На основании описанных результатов можно сделать следующие выводы:

1. точность определения углов прихода предложенным методом зависит от задаваемых значений θ и ψ и в большей части углового диапазона составляет величину порядка 1° при отношении сигнал/шум не хуже 1,0;

2. существуют секторы углов, в которых метод не гарантирует достаточной точности, однако они невелики (единицы градусов) и на практике в ионосферных исследованиях всегда можно сориентировать антенну таким образом, чтобы избежать подобной ситуации, поскольку ширина углового спектра обычно не превышает 10°;
3. допплеровское разделение позволяет определять направления прихода мод, разнесённых по частоте на величину порядка естественной ширины спектральной линии, с точностью лучше 10°; при увеличении частотного разноса до величины, в $2 \div 3$ раза большей ширины линии, интерференция перестаёт играть заметную роль.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований — гранты № 96–05–64162 и 97–02–96060.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афраймович Э. Л. и др. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1978. Т. 21. С. 338.
2. Агафонников Ю. М., Афраймович Э. Л., Полиматиди В. П. Способ измерения полного вектора поля. Авт. свид-во № 650026. //Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки, 1979. № 8. С. 153.
3. Афраймович Э. Л. Интерференционные методы радиозондирования ионосферы. — М.: Наука, 1982.
4. Brownlie G. D., Dryburgh L. G., and Whitehead J. D. //Nature, Phys. Sci., 1973. V. 243. № 129. P. 112.
5. Calvert W. et. al. //Radio Science, 1995. V. 30. № 5. P. 1577.
6. Jacobson A. R. and Carlos R. C. //J. Atm. and Terr. Phys., 1989. V. 51. P. 257.
7. Jacobson A. R., Massey R. S., and Erickson W. C. //Annales Geophysicae, 1991. V. 9. P. 546.
8. Jacobson A. R. et al. //J. Geophys. Res., 1995. V. 100. P. 1653.
9. Mitra S. N. //Proceedings of Institute of Electrical Engeneers, 1949. V. 96. P. 441.
10. Morgan M. and Evans W. //Proceedings of IRE, 1951. V. 39. P. 552.
11. Pfister W. //J. Atm. and Terr. Phys., 1971. V. 33. P. 999.

Институт солнечно–земной физики
СО РАН, Иркутск, Россия

Поступила в редакцию
13 ноября 1997 г.

A SPECTRAL-POLARIZATION METHOD FOR ANALYZING THE RADIO SIGNAL INTERFERENCE PATTERN

E. L. Afraimovich and K. S. Palamartchouk

This paper suggests a spectral-polarization method for measuring the velocity of displacement of the interference pattern by analyzing three mutually orthogonal projections of the radio signal field vector using a single receiving antenna. The initial stage of the analysis involves calculating complex Doppler spectra of time variations of these projections. Then, for each spectrum component, these data are used to determine angle-of-arrival spectra. In conjunction with data on frequency Doppler shifts, this procedure makes it possible to estimate the velocity and direction of interference pattern displacement. We give the equations to illustrate the proposed procedure and simulation results, showing the practicability of the idea implementation.

УДК 621.315.592

БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЕ ЗАТУХАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО ОБРАЩЕНИЯ В ПЛАЗМОПОДОБНЫХ СРЕДАХ

В. М. Яковенко, И. В. Яковенко

Построена квантовая теория бесстолкновительного затухания поверхностных плазмонов в условиях слабой пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости среды, показана возможность возникновения их неустойчивости при пересечении границы раздела сред моноэнергетическим потоком заряженных частиц.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что на границе раздела двух сред, различающихся электромагнитными свойствами, существуют поверхностные волны [1]. На границе электронной плазмы с вакуумом в пренебрежении эффектом запаздывания такие колебания называются поверхностными плазмонами [2].

В работах [3–5] рассматривалось влияние теплового движения электронов на дисперсионные характеристики поверхностных плазмонов и было найдено их бесстолкновительное затухание (затухание Ландау). При этом был исследован классический случай $\hbar\omega \ll T$, где T — температура электронов в энергетических единицах.

Заслуживает внимания, очевидно, и противоположный (квантовый) случай $\hbar\omega \gg T$. Он важен для неоднородных твёрдотельных структур (p–n- и гетеропереходы, полупроводниковые сверхрешётки, переходы металл—диэлектрик, границы с двумерным электронным газом и др.), интерес к исследованию свойств которых в последнее время возрастает в связи с успехами современной технологии. В подобного рода структурах, где концентрации носителей заряда велики, условия квантового предела при низких температурах легко могут быть выполнены.

Предлагаемая работа посвящена квантовой теории бесстолкновительного затухания поверхностных плазмонов в условиях слабой пространственной дисперсии среды. В ней определены пространственные структуры полей и токов в полуограниченной плазме, обсуждены механизмы затухания в классическом и квантовом пределах, показана возможность возникновения неустойчивости поверхностных плазмонов в квантовом пределе при пересечении границы раздела сред моноэнергетическим потоком заряженных частиц.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Мы рассмотрим затухание поверхностных плазмонов на границе двух сред, которые при $T = 0$ характеризуются диэлектрическими проницаемостями

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{0i} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2},$$

где ε_{0i} — диэлектрическая постоянная кристалической решётки, $\omega_{0i}^2 = \dfrac{4\pi e^2 n_{0i}}{m_i}$, n_{0i}, m_i — концентрация и эффективная масса носителей заряда в каждой из сред. Для нахождения спектра и

бесстолкновительного затухания поверхностных колебаний в условиях пренебрежения эффектом запаздывания электромагнитного поля воспользуемся следующими уравнениями:

$$\mathrm{rot}\vec{E}(x,y,t)=0,\quad \vec{E}(x,y,t)=\vec{E}(\omega,q_x,y)e^{i(q_x x-\omega t)},$$
$$\vec{E}(\omega,q_x,y)=(E_x,E_y,0), \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\vec{D}(\omega,x,y)=0,\quad \vec{D}(\omega,x,y)=\varepsilon_0(y)\vec{E}(\omega,x,y)+\frac{4\pi i}{\omega}\vec{j}(\omega,x,y), \tag{2}$$

$$\varepsilon_0(y)=\begin{cases}\varepsilon_{01}, & y>0,\\ \varepsilon_{02}, & y<0,\end{cases}\quad \vec{E}=\begin{cases}\vec{E}_1, & y>0,\\ \vec{E}_2, & y<0,\end{cases}\quad \vec{j}=\begin{cases}\vec{j}_1, & y>0,\\ \vec{j}_2, & y<0\end{cases}$$

с граничными условиями при $y=0$: непрерывностью тангенциальных составляющих электрического поля E_x и нормальных составляющих электрической индукции D_y.

Уравнения (1), (2) должны быть дополнены материальными уравнениями. Если связь тока проводимости с полем локальна, т. е. $\vec{j}(\omega,\vec{r})=\sigma(\omega)\vec{E}(\omega,\vec{r})$, то из уравнений (1), (2) и граничных условий при известной проводимости $\sigma=\sigma(\omega)$, получаемой, например, из уравнения движения частиц в холодной плазме, находится частота колебаний и их затухание, вызванное столкновением носителей заряда. При этом глубина проникновения поля в полубесконечную плазму превосходит характерные размеры её неоднородности (например, радиус экранирования Дебая). Очевидно, что для получения бесстокновительного затухания плазмонов, которое является малым по сравнению с ω, необходимо учесть нелокальный характер связи тока и поля и принять во внимание, что параметр длины, характеризующий пространственную дисперсию среды, мал по сравнению с глубиной проникновения поля в среду.

Мы будем исходить из модели однородной среды. Иными словами, будем считать, как и в случае холодной плазмы, обе среды безграничными, а поля и токи в каждой из них удовлетворяют граничным условиям на плоскости $y=0$ и убывают при $y\to\pm\infty$. Очевидно, что такая модель вполне оправдана, если граница является прозрачной для частиц, т. е. высота потенциального барьера мала по сравнению с энергией частиц. При этом $\omega_{01}=\omega_{02}$, $\varepsilon_{01}\neq\varepsilon_{02}$.

С другой стороны, если среды разделены бесконечно высоким потенциальным барьером $\omega_{01}\neq\omega_{02}$, то частицы испытывают с обеих сторон упругое (зеркальное) отражение от барьера, а электромагнитные свойства такой полуограниченной среды, как известно, идентичны свойствам безграничной [5]. При этом результаты, полученные в [3] в классическом приближении для границы плазма—диэлектрик (непоглощающая среда), могут быть перенесены на случай двух плазмоподобных сред, разделённых слоем диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с длиной волны.

Тогда материальное уравнение можно записать [6]

$$\vec{j}(\omega,\vec{r})=-\frac{e^2n_0}{mc}\vec{A}(\omega,\vec{r})+\vec{j}\,'(\omega,\vec{r})\,. \tag{3}$$

Здесь $\vec{A}(\omega,\vec{r})=\dfrac{c}{i\omega}\vec{E}(\omega,\vec{r})$ — вектор-потенциал, $n_0=\sum\rho_k^{(0)}\psi_k^*(\vec{r})\psi_k(\vec{r})$ — равновесная концентрация носителей заряда, $\rho_k^{(0)}$ — их равновесная функция распределения, $\psi_k(\vec{r})=V^{-1/2}\exp(i\vec{k}\vec{r})$ — волновая функция частицы с законом дисперсии $E_k=\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$, V — объём среды, $\vec{j}\,'(\omega,\vec{r})=$ $=\sum\rho_{kk'}(\omega)\vec{j}_{k'k}(\vec{r})$ — ток проводимости, обусловленный переходами электронов между состояниями $\vec{k}$ и $\vec{k}\,'$ $(k_z=k_z')$ вследствие их неупругого рассеяния на потенциале $\vec{A}(\omega,\vec{r})=\vec{A}(\omega,q_x,y)e^{i(q_x x-\omega t)}$

(далее полагаем для определённости $q_x > 0$, $\omega > 0$), $\rho^{(0)}_{kk'}(\omega)$ - возмущённая недиагональная поправка к равновесной функции распределения частиц, определяемая из уравнения движения для матрицы плотности

$$\rho_{kk'}(\omega) = \frac{\rho^{(0)}_k - \rho^{(0)}_{k'}}{\hbar(\omega_{kk'} - \omega^*)} H_{kk'}(\omega), \quad \omega_{kk'} = \frac{\hbar(k^2 - k'^2)}{2m}, \tag{4}$$

$$\omega^* = \omega + i\nu, \quad \nu \to 0,$$

$$H_{kk'} = \frac{ie\hbar}{2mc} \int \psi^*_k(\vec{r}) \left(\vec{A}\nabla + \nabla\vec{A}\right) \psi_{k'}(\vec{r})\, d\vec{r} \ \ — \tag{5}$$

матричный элемент гамильтониана взаимодействия носителей заряда с электромагнитным полем,

$$\vec{j}_{k'k} = \frac{ie\hbar}{2m} \left\{\nabla\psi^*_{k'}(r)\, \psi_k(\vec{r}) - \psi^*_{k'}(r)\, \nabla\psi_k(\vec{r})\right\} \ \ — \tag{6}$$

матричный элемент оператора плотности тока частицы. Окончательно $\vec{j}\,'(\omega, \vec{r})$ можно преобразовать к следующему виду:

$$\vec{j}\,'(\omega, \vec{r}) = -\frac{1}{\hbar c} \sum \vec{j}_{k'k}(\vec{r}) \frac{(\rho^{(0)}_k - \rho^{(0)}_{k'})}{\omega_{kk'} - \omega^*} \left[H^{(\mathrm{s})}_{kk'}(\omega) + \int \vec{j}_{kk'}(\vec{r'})\vec{A}(\omega, \vec{r'})\, d\vec{r'}\right], \tag{7}$$

где

$$H^{(\mathrm{s})}_{kk'} = \frac{ie\hbar}{2mc} \int dx\, dz\, \psi^*_k(x, 0, z)\, \psi_{k'}(x, 0, z)\, [A_y(\omega, x, +0) - A_y(\omega, x, -0)].$$

Таким образом, в выражении (3) для полного тока первое слагаемое определяет частоту поверхностных плазмонов, второе слагаемое должно определять их затухание.

Подставляя далее $\vec{j}(\omega, \vec{r})$ в уравнение (2) и принимая во внимание уравнение (1), получим

$$\frac{\partial^2 A_x(\omega, x, y)}{\partial y^2} - q_x^2 A_x(\omega, x, y) = -\frac{4\,\pi\, i\, q_x\, c}{\omega^2 \varepsilon(\omega)} \mathrm{div}\vec{j}\,'(\omega, x, y), \tag{8}$$

где

$$\varepsilon(\omega) = \begin{cases} \varepsilon_1(\omega), & y > 0, \\ \varepsilon_2(\omega), & y < 0, \end{cases}$$

2. СТРУКТУРА ПОЛЕЙ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Поскольку декремент затухания мал по сравнению с частотой колебаний, то решение уравнения (8) будем искать методом последовательных приближений. Полагая в первом приближении правую часть равной нулю, находим при $\varepsilon(\omega) \neq 0$ следующие выражения для потенциалов в каждой из сред:

$$\begin{aligned} &y > 0, \quad A_{1x}(y) = A_1\, e^{-q_x y}, \quad A_{1y}(y) = i\, A_{1x}(y), \\ &y < 0, \quad A_{2x}(y) = A_2\, e^{q_x y}, \quad A_{2y}(y) = -i\, A_{2x}(y). \end{aligned} \tag{9}$$

Продолжим потенциалы $\vec{A}_1(y)$ и $\vec{A}_2(y)$ соответственно на полупространства $y < 0$ и $y > 0$: $A_x(-y) = A_x(y)$, $A_y(-y) = -A_y(y)$. При этом нормальная составляющая $\vec{A}(y)$ испытывает разрыв на плоскости

$y = 0$. Подставляя значения $\vec{A}(\omega, \vec{r'})$ в формулу (7) и интегрируя по всему пространству $\vec{r'}$, получаем после замены суммирования $\sum_k$ на интегрирование $\dfrac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}$.

$$\vec{j}'(\omega,\vec{r}) = \frac{e^2\,\hbar\,A\,e^{iq_x x}}{2(2\pi)^4 m^2 c}\int \frac{d\vec{k}\,dk'_y}{\omega_{kk'}-\omega^*}(\rho_k^{(0)}-\rho_{k'}^{(0)})(\vec{k}+\vec{k'})\times$$
$$\times\left[1-\frac{k^2-k'^2}{q_x^2+(k_y-k'_y)^2}\right]e^{i(k_y-k'_y)y}\,. \qquad (10)$$

Здесь $k'_x = k_x - q_x$, $k'_z = k_z$.

Слагаемое, пропорциональное $\rho_k^{(0)}$, определяет ток, возникающий в результате перехода электрона из состояния $\vec{k}$ в состояние $\vec{k'}$ с излучением кванта $\hbar\omega$ электромагнитного поля. При этом можно провести интегрирование по k'_y, учитывая при $k_x \gg q_x$, $\omega \gg q_x v_x$ вклады полюсов $k'^2_y = k_y^2 - \dfrac{2m(\omega+i\nu)}{\hbar}$ соответственно в областях $y > 0$ и $y < 0$.

Слагаемое с $\rho_{k'}^{(0)}$ обусловливает ток, связанный с переходами электронов из состояния $\vec{k'}$ в состояние $\vec{k}$ при поглощении энергии $\hbar\omega$. Этот ток определяется полюсами $k_y^2 = k'^2_y + \dfrac{2m(\omega+i\nu)}{\hbar}$ при интегрировании по k_y. В результате интегрирования получаем

$$\vec{j}'(\omega,\vec{r}) = \frac{-ie^2\omega A e^{iq_x x}}{(2\pi)^3\hbar c}\left\{\int' \frac{d\vec{k}(\vec{k}+\vec{k}_-)\rho_k^{(0)}}{k_y^-(k_y-k_y^-)^2}\left[1-\frac{\hbar(k_y-k_y^-)^2}{2m\omega}\right]e^{i[k_y-k_y^-+i\delta_-]\,y}\right.$$
$$\left.-\int \frac{d\vec{k}(\vec{k}+\vec{k}_+)\rho_k^{(0)}}{k_y^+(k_y-k_y^+)^2}\left[1-\frac{\hbar(k_y-k_y^+)^2}{2m\omega}\right]e^{i[k_y^+-k_y+i\delta_+]y}\right\}. \qquad (11)$$

Здесь $y > 0$, $k_y^\pm = \sqrt{k_y^2 \pm \dfrac{2m\omega}{\hbar}} > 0$, $\vec{k_\pm} = (k_x, k_y^\pm, k_z)$, $\delta_\pm = \dfrac{m\nu}{\hbar k_y^\pm}$. Символ $\int'$ означает, что интегрирование по k_y проводится в областях $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{2m\omega}{\hbar}}\right)$ и $\left(\sqrt{\dfrac{2m\omega}{\hbar}}, \infty\right)$, где возможен процесс излучения кванта энергии электроном. Аналогичное выражение для $\vec{j}'$ легко получить в области $y < 0$.

Видно, что ток $\vec{j}'(\omega,\vec{r})$, возникающий в результате электронных переходов между состояниями k_y и k'_y, представляет собой бесконечный набор пространственных гармоник с периодом $\dfrac{2\pi}{|k_y - k_y^\pm|}$, зависящим от частоты поля и импульса частицы, с амплитудой, убывающей от границы как $\exp(-\delta_\pm|y|)$. В классическом пределе k_y^2, $k'^2_y \gg \dfrac{2m\omega}{\hbar}$ такого рода гармоники известны как “волны Ван-Кампена", фазовая скорость которых равна скорости частицы [7]. Возникновение этих волн обусловлено черенковским механизмом взаимодействия волны и частицы.

Подставляя (11) в уравнение (8), находим потенциал $\vec{A}'(\omega,x,y)$, возбуждаемый током $\vec{j}'(\omega,x,y)$:

$$A'_x(\omega,q_x,y) = \frac{i\alpha(\omega,q_x,y)}{\varepsilon(\omega)}\,A\,,$$

$$A'_y(\omega,q_x,y) = \frac{A}{q_x\,\varepsilon(\omega)}\frac{\partial\alpha}{\partial y}(\omega,q_x,y)\,,$$

$$\alpha(\omega,q_x,y) = \frac{e^2\,q_x\,m}{\pi^2\,\hbar^2}\left\{\int' \frac{\rho_k^{(0)}\,d\vec{k}}{k_y^-\,(k_y\mp k_y^-)^4}\left[1-\frac{\hbar(k_y\mp k_y^-)^2}{2m\omega}\right]e^{i(k_y\mp k_y^-\pm i\delta_-)y}\right.$$

$$- \int \frac{\rho_k^{(0)}\, d\vec{k}}{k_y^+ (k_y \mp k_y^+)^4} \left[1 - \frac{\hbar (k_y \mp k_y^+)^2}{2m\omega} \right] e^{i(\pm k_y^+ - k_y \pm i\delta_+)y} \Bigg\} . \tag{12}$$

Здесь верхние знаки перед $k_y^{\mp}$ и $\delta_{\mp}$ относятся к полупространству $y > 0$, нижние, соответственно, к полупространству $y < 0$.

Посредством граничных условий теперь можно исключить неопределённые константы A_1 и A_2 и получить дисперсионное уравнение

$$\varepsilon_1(\omega) \left[1 + i\, \frac{\alpha_2(\omega, q_x, 0)}{\varepsilon_2(\omega)} \right] + \varepsilon_2(\omega) \left[1 + i\, \frac{\alpha_1(\omega, q_x, 0)}{\varepsilon_1(\omega)} \right] = 0. \tag{13}$$

Отсюда, при $\left| \dfrac{\alpha(\omega, q_x, 0)}{\varepsilon(\omega)} \right| \ll 1$ получаем

$$\omega_{\rm s} = \left(\frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02}} \right)^{1/2},$$

$$\Delta\omega_{\rm s} = \frac{i\omega_{\rm s}}{2}\, \frac{[\alpha_1(\omega, q_x, 0) + \alpha_2(\omega, q_x, 0)]}{\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02}} .$$

3. ЗАТУХАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛАЗМОНОВ

Найдём теперь декременты затухания в различных физических ситуациях. В случае максвелловского распределения электронов $\rho_k^{(0)} = \dfrac{(2\pi\hbar)^3\, n_0}{(2\pi m T)^{3/2}}\, e^{-(\hbar^2 k^2)/(2mT)}$ выражение для $\alpha(\omega, q_x, 0)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$\alpha(\omega, q_x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\omega_0^2 q_x \upsilon_T\, T}{\hbar\omega^4}\, (e^{-\hbar\omega/T} - 1) \int\limits_0^\infty \frac{4x^2 + 3\frac{\hbar\omega}{T}}{\sqrt{x^2 + \frac{\hbar\omega}{T}}}\, x^2\, e^{-x^2}\, dx\, .$$

Отсюда получаем

$$\alpha = -\frac{3\omega_0^2 q_x \upsilon_T}{2\omega_{\rm s}^3} \sqrt{\frac{T}{2\hbar\omega_{\rm s}}}, \quad \frac{\hbar\omega_{\rm s}}{T} \gg 1,$$

$$\alpha = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\omega_0^2 q_x \upsilon_T}{\omega_{\rm s}^3}, \quad \frac{\hbar\omega_{\rm s}}{T} \ll 1. \tag{14}$$

В случае бесконечно малого барьера $\omega_{01} = \omega_{02}$, $\varepsilon_{01} \neq \varepsilon_{02}$, $\omega_{\rm s} = \omega_0 \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02}}}$ декременты колебаний соответственно равны

$$\Delta\omega_{\rm s} = -\frac{3i}{4}\, q_x\, \upsilon_T \sqrt{\frac{T}{2\hbar\omega_{\rm s}}}, \quad \hbar\omega_{\rm s} \gg T,$$

$$\Delta\omega_{\rm s} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, i\, q_x\, \upsilon_T\, , \quad \hbar\omega_{\rm s} \ll T. \tag{15}$$

На границе двух плазменных сред, разделённых бесконечно высоким потенциальным барьером, выражения для декремента приобретают вид

$$\Delta\omega_{\rm s} = -\frac{3}{4}\,\frac{iq_x}{\sqrt{2\hbar\omega_{\rm s}}}\,\frac{\sum\omega_{0i}^2\,v_{T_i}\,T_i^{1/2}}{\sum\omega_{0i}^2}\,,$$

$$\Delta\omega_{\rm s} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,iq_x\,\frac{\sum\omega_{0i}^2\,v_{T_i}}{\sum\omega_{0i}^2}\,,\quad i=1,2,\ldots \tag{16}$$

Видно, что на границе плазма—диэлектрик ($\omega_{02}=0$, $\omega_{01}=\omega_0$, $\varepsilon_2=\varepsilon_{\rm d}$) формулы (16) совпадают с формулами (15) и соответствуют известным выражениям для декремента поверхностных колебаний [3–5].

4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛАЗМОНОВ

Если границу раздела пересекает направленный (напр., из среды 2 в среду 1) поток частиц, функция распределения которых равна

$$\rho_{\rm b}^{(0)} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{(2\pi mT)^{3/2}}\,n_{0\rm b}\,e^{-[(\vec p-\vec p_0)^2/(2mT)]}\,,$$

где $\vec p_0=(0,p_0,0)$, то поверхностные плазмоны могут оказаться неустойчивыми. В самом деле, подставляя $\rho_{\rm b}^{(0)}$ в формулу (13) и используя при условии $\dfrac{p_0^2}{2m}\gg\hbar\omega\gg p_0v_T$ метод перевала, получим

$$\alpha_1^{(\rm b)}(\omega,q_x,0)=\frac{4\omega_{0\rm b}^2q_xv_o}{\omega^3}\,,\quad \frac{\alpha_2^{(\rm b)}}{\alpha_1^{(\rm b)}}\sim\left(\frac{\hbar\omega}{mv_0^2}\right)^4\ll 1, \tag{17}$$

$$\Delta\omega_{\rm s}=\frac{2i\omega_{0\rm b}^2q_xv_o}{(\varepsilon_{01}+\varepsilon_{02})\omega_{\rm s}^2}\,,\quad \text{где}\quad \omega_{0\rm b}^2=\frac{4\pi e^2n_{0\rm b}}{m},\quad \omega_{\rm s}^2=\frac{2\omega_{0\rm b}^2}{\varepsilon_{01}+\varepsilon_{02}}\,.$$

Такой же результат, естественно, получается и при

$$\rho_{\rm b}^{(0)}=(2\pi\hbar)^3\,\delta(p_x)\,\delta(p_y-p_0)\,\delta(p_z)\,.$$

Из анализа выражения для $\alpha(\omega,q_x,0)$ следует, что вероятность перехода электрона из состояния k_0 с энергией $E_{k_0}=\dfrac{p_0^2}{2m}$ в состояние k с энергией $E_k=\dfrac{p_0^2}{2m}+\hbar\omega_{\rm s}$ (поглощение плазмона) пропорциональна $\left(1+2\dfrac{\hbar\omega_{\rm s}}{mv_0^2}\right)^{-1/2}$, в то время как вероятность перехода в состояние $E_k=\dfrac{p_0^2}{2m}-\hbar\omega_{\rm s}$ с излучением плазмона пропорциональна $\left(1-2\dfrac{\hbar\omega_{\rm s}}{mv_0^2}\right)^{-1/2}$. При этом разность между соседними уровнями энергии $\hbar\omega_{\rm s}$ значительно превосходит ширину уровня p_0v_T.

Инкремент неустойчивости также можно получить, пользуясь формулой для потерь энергии частицы, проходящей через границу раздела двух сред, на возбуждение поверхностных плазмонов (эффект переходного излучения [8]). Будем исходить из следующих уравнений:

$$\mathrm{rot}\vec E(\vec r,t)=0,\quad \mathrm{div}\vec D=4\pi e\delta(x)\delta(y-v_0t)\delta(z),$$

$$\vec D(\vec r,t)=\int\limits_{\infty}^{t}\hat\varepsilon(t-t')\,\vec E(\vec r,t')\,dt'\,, \tag{18}$$

где $\hat{\varepsilon} = \begin{cases} \hat{\varepsilon}_1, \ y > 0 \\ \hat{\varepsilon}_2, \ y < 0 \end{cases}$, e — заряд, v_0 — скорость частицы, движущейся вдоль положительного направления оси y и пересекающей границу $y = 0$ в момент времени $t = 0$. Воспользовавшись разложением Фурье

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{q_x, q_z} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega, \vec{q}, y) e^{i(\vec{q}\vec{\rho} - \omega t)} \, d\omega \,,$$

получим выражение для компонент поля в каждой из сред в виде

$$\begin{aligned} E_{1x}(\omega, \vec{q}, y) &= A_1 e^{-qy} - \frac{B}{\varepsilon_1(\omega)} e^{(i\omega/v_o)\, y}, \quad y > 0, \\ E_{2x}(\omega, \vec{q}, y) &= A_2 e^{+qy} - \frac{B}{\varepsilon_2(\omega)} e^{(i\omega/v_o)\, y}, \quad y < 0, \\ E_{1,2y}(\omega, \vec{q}, y) &= \frac{1}{iq_x} \frac{\partial E_{1,2x}(\omega, \vec{q}, y)}{\partial y} \,, \quad E_{1,2z}(\omega, \vec{q}, y) = \frac{q_z}{q_x} E_{1,2x}(\omega, \vec{q}, y) \,, \end{aligned} \tag{19}$$

где $B = \dfrac{2ieq_x v_0}{S(\omega^2 + q^2 v_0^2)}$, $q = \sqrt{q_x^2 + q_z^2}$, $\varepsilon_{1,2}(\omega) = \int_0^\infty \hat{\varepsilon}_{1,2}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$, $S = L_x L_z$, L_x, L_z — поперечные размеры системы, $q_{x,z} = \dfrac{2\pi n_{x,z}}{L_{x,z}}$, n_x, n_z — целые числа.

Из граничных условий находим

$$A_1 = \frac{B}{\varepsilon_1(\omega)} \frac{\varepsilon_2(\omega) - \varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega)} \,, \quad A_2 = -\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_2(\omega)} A_1 \,. \tag{20}$$

Потери энергии частицы на возбуждение поверхностных колебаний, представляющих собой решение однородного уравнения, запишутся так

$$\Delta W = ev_0 \left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} E_{1y}(\vec{r}, t) dt + \int\limits_{0}^{\infty} E_{2y}(\vec{r}, t) dt \right\}. \tag{21}$$

Здесь значение поля берётся в точке нахождения заряда $x = 0, y = v_0 t, z = 0$.

В результате интегрирования (21) при $\varepsilon_{1,2}(\omega) = \varepsilon_{01,2} - \dfrac{\omega_{01,2}^2}{\omega(\omega + i\nu)}$, $\nu \to 0, \omega_{\rm s}^2 \gg q^2 v_0^2$ получим

$$\Delta W = \sum_{q_x, q_z} \Delta W_q \,, \quad \Delta W_q = -\frac{8\pi e^2 v_0^2 q}{S(\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02})\omega_{\rm s}^2} \,. \tag{22}$$

Принимая во внимание, что время пролёта частицы τ через всю систему равно $\tau = \dfrac{L_y}{v_0}$, находим среднюю величину потерь энергии частицы в единицу времени

$$\overline{\frac{dW_q}{dt}} = \frac{\Delta W_q}{\tau} = -\frac{8\pi e^2 v_0^2 q}{V(\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02})\omega_{\rm s}^2} \,. \tag{23}$$

Эту величину (с противоположным знаком) можно рассматривать как спонтанное излучение поверхностных плазмонов N_q в единицу времени

$$\hbar\omega_{\rm s} \frac{\partial N_q}{\partial t} = -\overline{\frac{dW_q}{dt}} \,. \tag{24}$$

С другой стороны, для числа плазмонов N_q можно составить кинетическое уравнение следующего вида [9]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_q}{\partial t} &= \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{kk'} \mid H_{kqk'} \mid^2 \delta(\omega_{kk'} - \omega_{\rm s}) \times \\ &\times \left[(N_q+1)\rho_k^{(0)}(1-\rho_{k'}^{(0)}) - N_q\rho_{k'}^{(0)}(1-\rho_k^{(0)})\right], \end{aligned} \tag{25}$$

где $H_{kqk'}$ — матричный элемент гамильтониана взаимодействия электронов и поверхностных плазмонов, суммирование производится по состояниям $\vec{k}$, k'_y ($k'_x = k_x - q_x, k'_z = k_z - q_z$). Отсюда при $N_q \to 0$, $\rho_k^{(0)} = \delta_{kk_0}, \vec{k}_0 = (0, k_0, 0)$ получим

$$\frac{\partial N_q}{\partial t} = \frac{L_y}{\hbar^2}\int\limits_0^\infty \mid H_{k_0qk'} \mid^2 \delta(\omega_{k_0k'} - \omega)\, dk'_y = \frac{L_y m H^2_{k_0qk_-}}{\hbar^2 k_-},$$

где $k_- = \sqrt{k_0^2 - \dfrac{2m\omega}{\hbar}}$. Интегрирование проводится по положительным значениям k'_y, поскольку для сопоставления с формулой (24) необходимо учитывать только процессы рассеяния электронов вперёд по ходу движения частиц.

Если перейти к случаю $k_0^2 \gg \dfrac{2m\omega}{\hbar}$ и воспользоваться равенством (24), то $H^2_{k_0qk}$ принимает вид

$$H^2_{k_0qk} = \frac{8\pi e^2 v_0^4 \hbar q}{V L_y \omega_{\rm s}^3(\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02})}. \tag{26}$$

Используя это выражение в уравнении (25) при $N_q \gg 1$, $\rho_k^{(0)} = (2\pi)^3 n_{0\rm b}\delta(k - \vec{k}_0)$, $k_0^2 \gg \dfrac{2m\omega}{\hbar}$, получим инкремент неустойчивости поверхностных плазмонов $\gamma = \dfrac{1}{2N_q}\dfrac{\partial N_q}{\partial t} = \dfrac{2\omega_{0\rm b}^2 q v_0}{(\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02})\omega_{\rm s}^2}$, совпадающий при $q_z = 0$ с формулой (17).

Наиболее вероятно неустойчивость поверхностных плазмонов можно реализовать, если пучок моноэнергетических электронов пропускать через границу вакуум—плазменная среда при условии превышения инкремента над декрементом: $v_0 > \dfrac{\omega_0^2}{\omega_{0\rm b}^2} v_T$. Легко показать, что в классическом пределе $\dfrac{p_0^2}{2m} \gg T \gg \hbar\omega$, поверхностные плазмоны затухают: $\Delta\omega_{\rm s} = -\dfrac{2i\omega_{0\rm b}^2 q_x v_0}{\omega_{\rm s}^2(\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02})}$. В этом случае объём фазового пространства, связанный с излучением плазмонов частицами, меньше такового при поглощении плазмонов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, бесстолкновительное затухание поверхностных плазмонов обусловлено, вообще говоря, взаимной трансформацией на границе поля поверхностных колебаний $\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega) = 0$ и поля объёмных волн пространственного заряда. Природу этих волн и механизм возникновения можно описывать различными способами. В классическом приближении в дополнение к работам [3–5] можно, например, воспользоваться понятием о волнах Ван-Кампена. Их возникновение определяется выбором модели границы раздела плазменных сред. В случае прозрачной границы они возбуждаются благодаря черенковскому резонансу ($\omega = q_y v_y$) при обмене энергией между пространственными гармониками поверхностных колебаний $\left(e^{-q_x|y|} = (q_x/\pi)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq_y y}}{q_y^2 + q_x^2}\, dq_y,\ \ q_x > 0\right)$ и частицами. В результате поток частиц, прошедших через границу, оказывается промодулированным, а поле, создаваемое

им, уже не локализовано на границе. Оно представляет собой набор гармоник, бегущих от границы со скоростью частиц v_y.

Если же граница непроницаема для частиц (например, плазма—диэлектрик), тогда решение кинетического уравнения можно представить в виде суммы двух решений: однородного (волны Ван-Кампена с произвольной амплитудой) и неоднородного уравнений. Затем, амплитуду волны Ван-Кампена можно связать с электрическим полем плазмона, воспользовавшись условием упругого (зеркального) отражения частиц от поверхности раздела. В обоих случаях декремент колебаний один и тот же.

С позицией квантовой механики возникновение объёмных волн обусловлено переходами электронов между различными состояниями при их рассеянии на потенциале поверхностного плазмона. Если границу пересекает моноэнергетический поток электронов $\frac{p_0^2}{2m} \gg T$, то обращение затухания (неустойчивость) плазмонов возможно только в квантовом пределе, когда ширина уровня энергии, связанная с тепловым движением частиц, меньше энергии плазмона.

Можно показать, что подобного рода неустойчивость возникает также при взаимодействии потока заряженных частиц с плазмонами в двумерном электронном газе [10].

Авторы выражают благодарность В. Л. Фалько и С. И. Ханкиной за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лишфиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. – 620 с.
2. Ritchie R. H. //Phys. Rev., 1957. V. 106. № 5. P. 874.
3. Романов Ю. А. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1964. Т. 7. № 3. С. 242.
4. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высшая школа, 1978. – 408 с.
5. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Колебания и волны в плазменных средах. — М.: Изд-во Московского университета, 1990. – 272 с.
6. Ландау Л. Д., Лишфиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974. – 752 с.
7. Кадомцев Б. Б. //УФН, 1968. Т. 95. № 1. С. 111.
8. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. — М.: Наука, 1984. – 360 с.
9. Яковенко В. М., Яковенко И. В. //Укр. физ. журнал, 1984. Т. 29. № 12. С. 1830.
10. Буртыка М. В., Яковенко В. М., Яковенко И. В. //ФНТ, 1995. Т. 21. № 6. С. 628.

Институт радиофизики и
электроники НАН Украины,
Научно–исследовательский и
проектно–конструкторский
институт
“Молния"Минобразования
Украины;
Харьков, Украина

Поступила в редакцию
28 июля 1997 г.

COLLISIONLESS DAMPING OF SURFACE OSCILLATIONS AND POSSIBILITIES OF ITS CONVERSION IN PLASMA–LIKE MEDIA

V. M. Yakovenko and I.V.Yakovenko

A quantum theory of collisionless damping of surface plasmons under the conditions of weak space dispersion of medium permittivity is worked out; a possibility of emerging their instability is shown when the medium interface is crossed by the monoenergetic charged particle flow.

УДК 537.874.2

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕШЁТОК В КОМПРЕССОРАХ ИМПУЛЬСОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

С. Н. Власов, Е. В. Копосова

Теоретически исследуются диэлектрические дифракционные решётки, обладающие большой электропрочностью, которые могут быть использованы в компрессорах импульсов электромагнитного поля. Теория строится на основе численного решения уравнений электромагнитного поля методом интегрального уравнения.

Одним из путей повышения мощности излучения является сжатие частотно—модулированных импульсов электромагнитного поля. Оно может быть осуществлено с помощью диспергирующей системы в виде набора дифракционных решёток [1—3], причём в рассеянном решёткой излучении используются дифракционные максимумы, обладающие дисперсией. Теоретический анализ сжатия импульса на них проведён в [1—5]. Рассматриваются, как правило, металлические отражательные решётки, используется минус первый порядок дифракции, имеющий эффективность, близкую к единице [5—6]. Однако известно, что в оптическом диапазоне длин волн электропрочность металлических структур — зеркал, решёток — ниже, чем у диэлектрических [7—8]. В [8] исследованы многослойные диэлектрические решётки, имеющие высокую эффективность в минус первом порядке дифракции. Ещё более электропрочными являются решётки из однородного материала, обладающие аналогичными дифракционными свойствами. Для создания таких решёток может быть использовано полное антизеркальное отражение от гофрированной границы двух диэлектриков [9]. Ниже приводятся более подробные результаты теоретического исследования такого рассеяния применительно к построению решёток компрессоров для двух случаев. В первом случае полное антизеркальное отражение имеет место при падении волны из оптически более плотной среды на гофрированную границу диэлектриков (рис. 1); во втором случае полное отражение от более сложной системы диэлектриков (рис. 2) имеет место в направлении, отличном от зеркального и антизеркального. Анализ ведётся на основе численного решения уравнений электромагнитного поля.

Рассмотрим границу двух диэлектриков (рис. 1) с проницаемостями ε и ε_0, имеющую период гофра d и его амплитуду A_0, описываемую в простейшем случае формулой

$$A(x) = A_0 \sin \frac{2\pi}{d} x \tag{1}$$

при $\varepsilon > \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 = 1$). Ограничимся исследованием двумерного случая, в котором отсутствует зависимость полей от координаты z. Пусть из более плотной среды на эту границу под углом θ (рис. 1) падает волна на частоте ω. В этих условиях можно по отдельности рассмотреть рассеяние ТЕ-волн, у которых вектор электрического поля параллелен гофру и перпендикулярен плоскости падения, и ТМ-волн, у которых вектор электрического поля перпендикулярен гофру и лежит в плоскости падения. Для описания ТЕ-волн удобно использовать E_z-компоненту электрического поля, а для описания ТМ-волн — H_z-компоненту магнитного поля, которые в падающей волне могут быть записаны в общем виде

$$\Psi^{(i)}(x, y) = e^{(0)} \exp\left(ik\sqrt{\varepsilon} \sim \theta x - ik\sqrt{\varepsilon}\cos\theta y\right) = \exp\left(ik_{0x}x - ik_{0y}y\right) , \tag{2}$$

где $k = \dfrac{\omega}{c}$, c — скорость света, $e^{(0)}$ — амплитуда волны, которую можно считать равной единице.

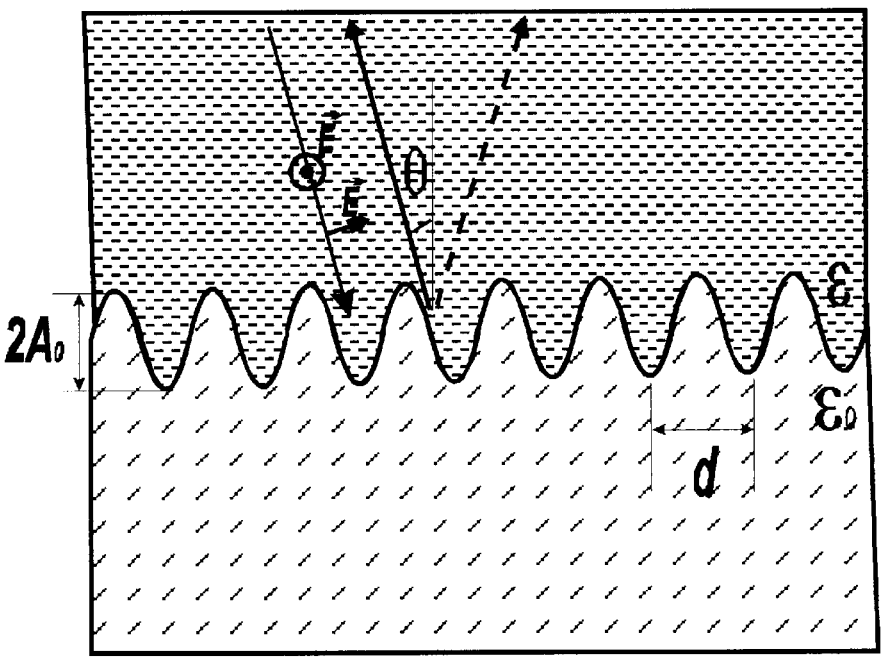


Рис. 1. Гофрированная граница диэлектриков.

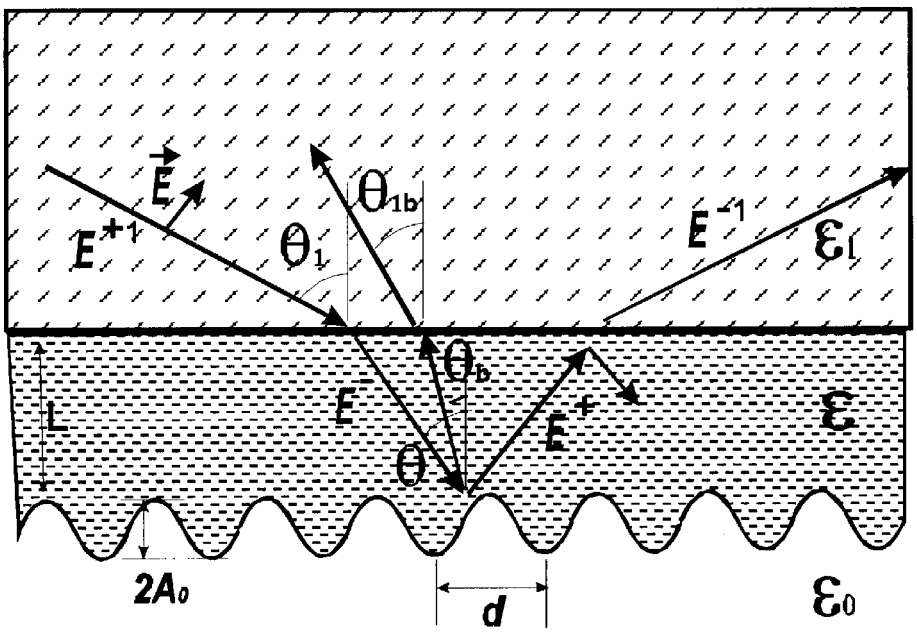


Рис. 2. Слой диэлектрика с одной гофрированной границей.

Как для ТЕ-волн, так и для ТМ-волн в задаче рассеяния может быть сформулировано интегральное уравнение [9–11]. Поле верхней и нижней сред может быть выражено через значение его и его нормальной производной соответственно на верхней и нижней сторонах границы:

$$\Psi(x,y) = \Psi^{(i)}(x,y) + \int ds' \left\{ G(x-x',\, y-y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(x',y') - \right.$$
$$\left. - \Psi(x',y') \frac{\partial}{\partial n'} G(x-x',\, y-y') \right\},$$

$$\Psi^{(0)}(x,y) = -\int ds' \left\{ G^{(0)}(x-x',\, y-y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi^{(0)}(x',y') - \right.$$
$$\left. - \Psi^{(0)}(x',y') \frac{\partial}{\partial n'} G^{(0)}(x-x',\, y-y') \right\},$$

где $y' = A(x')$, интегрирование производится вдоль кривой, описывающей форму гофра $ds' = dx'\sqrt{1+(dy'/dx')^2}$ по периоду d,

$$G(x-x',\, y-y') = \frac{1}{2id} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{ym}} \exp\left[ik_{xm}(x-x') + ik_{ym}(y-y')\right] \quad \text{и}$$

$$G^{(0)}(x-x',\, y-y') = \frac{1}{2id} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{ym}^{(0)}} \exp\left[ik_{xm}(x-x') + ik_{ym}^{(0)}(y-y')\right], \quad —$$

двумерные функции Грина верхней и нижней сред для решётки источников, не зависящих от координаты z, расположенных с периодом d по координате x и с разностью фаз между соседними элементами, равной $k\sqrt{\varepsilon}d\sin\theta$ для верхней и $k\sin\theta$ для нижней сред, соответственно,

$$k_{xm} = k_{xm}^{(0)} = k\sqrt{\varepsilon}\sin\theta + \frac{2\pi m}{d}, \quad m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm\ldots,$$

$$k_{ym} = \sqrt{k^2\varepsilon - k_{xm}^2} \text{ при } k^2\varepsilon > k_{xm}^2, \quad k_{ym} = i\sqrt{k_{xm}^2 - k^2\varepsilon} \text{ при } k_{xm}^2 > k^2\varepsilon,$$

$$k_{ym}^{(0)} = \sqrt{k^2 - k_{xm}^2} \text{ при } k^2 > k_{xm}^2, \quad k_{ym}^{(0)} = i\sqrt{k_{xm}^2 - k^2} \text{ при } k_{xm}^2 > k^2,$$

$\dfrac{\partial}{\partial n'} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(dy'/dx')^2}} \left[-\dfrac{dy'}{dx'}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \dfrac{\partial}{\partial y'} \right]$ — нормальные производные по координатам источников.

Значения поля и его производной по одну и по другую сторону границы связаны граничными условиями непрерывности тангенциальной компоненты полей E и H:

$$\Psi(x,y) = \Psi^{(0)}(x,y)\Big|_{y=A(x)},$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial n}\Psi(x,y) = \frac{\partial}{\partial n}\Psi^{(0)}(x,y)\Big| y = A(x),$$

где коэффициент $\rho = 1$ для ТЕ-волн и $\rho = 1/\varepsilon$ для ТМ-волн.

Введём некоторую вспомогательную функцию $\Phi(x',y')$, согласно следующей комбинации:

$$\int ds' \left\{ G(x-x',y-y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(x',y') - \Psi(x',y') \frac{\partial}{\partial n'} G(x-x',y-y') \right\} =$$
$$= \int ds'\, G(x-x',y-y')\Phi(x',y'),$$

представляющую собой наведённую влиянием нижней среды плотность поверхностного тока смещения с верхней стороны границы сред. Тогда поле верхней среды и его нормальная производная могут быть выражены через эту функцию:

$$\Psi(x,y) = \Psi^{(i)}(x,y) + \int ds'\, G(x-x', y-y')\Phi(x',y'),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\Psi(x,y) = \frac{\partial}{\partial n}\Psi^{(i)}(x,y) + \int ds'\, \frac{\partial}{\partial n}G(x-x', y-y')\Phi(x',y').$$

Помещаем точку наблюдения на границу $y = A(x)$, являющуюся местонахождением вторичных источников. Согласно [15], для интегралов, содержащих нормальные производные функций Грина, после выделения особенностей получаем

$$\int ds' \frac{\partial}{\partial n}G(x-x', y-y')\Phi(x',y') = \\ = \fint ds'\, \frac{\partial}{\partial n}G(x-x', y-y')\Phi(x',y') \pm \frac{1}{2}\Phi(x,y)\Big|_{y=A(x)},$$

$$\int ds' \frac{\partial}{\partial n'}G(x-x', y-y')\Phi(x',y') = \\ = \fint ds'\, \frac{\partial}{\partial n'}G(x-x', y-y')\Phi(x',y') \mp \frac{1}{2}\Phi(x,y)\Big|_{y=A(x)},$$

где под перечёркнутым интегралом $\fint$ понимается интеграл в смысле главного значения. Тогда нормальная производная поля верхней среды выражается так:

$$\frac{\partial}{\partial n}\Psi(x,y) = \frac{\partial}{\partial n}\Psi^{(i)}(x,y) + \fint ds'\, \frac{\partial}{\partial n}G(x-x', y-y')\Phi(x',y') + \frac{1}{2}\Phi(x,y)\Big|_{y=A(x)},$$

а выражение для поля нижней среды на границе принимает вид

$$\frac{1}{2}\Psi^{(0)}(x,y) = -\fint ds' \Big\{ G^{(0)}(x-x', y-y')\frac{\partial}{\partial n'}\Psi^{(0)}(x',y') - \\ - \Psi^{(0)}(x',y')\frac{\partial}{\partial n'}G^{(0)}(x-x', y-y') \Big\}\Big|_{y=A(x)}.$$

С учётом граничных условий получаем интегральное уравнение относительно функции $\Phi(x,y)$:

$$\int ds' \Big\{ \frac{1}{2}\Big[G(x-x', y-y') + \rho G^{(0)}(x-x', y-y')\Big] + \\ + \fint ds'' \Big[\Big\langle \rho G^{(0)}(x-x'', y-y'') \times \frac{\partial}{\partial n''}G(x''-x', y''-y') \Big\rangle - \\ - \Big\langle \frac{\partial}{\partial n''}G^{(0)}(x-x'', y-y'') \times G(x''-x', y''-y') \Big\rangle \Big] \Big\} \Phi(x',y') + \\ + \frac{1}{2}\Psi^{(i)}(x,y) + \fint ds' \Big[\rho G^{(0)}(x-x', y-y') \times \frac{\partial}{\partial n'}\Psi^{(i)}(x',y') - \\ - \frac{\partial}{\partial n'}G^{(0)}(x-x', y-y') \times \Psi^{(i)}(x',y') \Big] = 0\Big|_{y=A(x)}, \qquad (3)$$

которое является по структуре интегральным уравнением Фредгольма I рода.

Полное поле для TE- и TM-волн в верхней среде $(E_z(x,y),\ H_z(x,y))$ и в нижней среде $\left(E_z^{(0)}(x,y),\ H_z^{(0)}(x,y)\right.$ представленное в виде Ψ и $\Psi^{(0)}$, выражается через функцию $\Phi(x,y)$ посредством формул

$$\Psi(x,y) = \Psi^{(i)}(x,y) + \int ds'\, G(x-x', y-y') \times \Phi(x',y'), \tag{4а}$$

$$\Psi^{(0)}(x,y) = -\int ds' \left\{ \rho G^{(0)}(x-x', y-y') \times \left[\frac{\partial}{\partial n'} \Psi^{(i)}(x',y') + \frac{1}{2}\Phi(x',y') + \right.\right.$$
$$\left. + \fint ds'' \frac{\partial}{\partial n'} G(x'-x'', y'-y'') \times \Phi(x'',y'') \right] - \frac{\partial}{\partial n'} G^{(0)}(x-x', y-y') \times$$
$$\left. \times \left[\Psi^{(i)}(x',y') + \int ds'' G(x'-x'', y'-y'') \times \Phi(x'',y'') \right] \right\}, \tag{4б}$$

При представлении дифракционного поля обеих сред вне канавок в виде суперпозиции плоских волн

$$\Psi^{(0)}(x,y) = \sum_m R_m \exp(ik_{mx}x - ik_{my}y) \text{ при } y > \max|A(x)|\,,$$

$$\Psi(x,y) = \sum_m T_m \exp(ik_{mx}x - ik_{my}^{(0)}y) \text{ при } y < \min|A(x)|$$

определяются комплексные амплитуды гармоник R_m в верхнем и T_m в нижнем полупространстве

$$R_m = \int ds' \frac{1}{2idk_{my}} \exp\left(-ik_{my}y' - im\frac{2\pi}{d}x'\right) \Phi(x',y')\,, \tag{5а}$$

$$T_m = -\int ds' \left\{ \frac{\rho}{2idk_{my}^{(0)}} \exp\left(ik_{my}^{(0)}y' - im\frac{2\pi}{d}x'\right) \times \right.$$
$$\times \left[\frac{\partial}{\partial n'} \Psi^{(i)}(x',y') + \frac{1}{2}\Phi(x',y') + \fint ds'' \frac{\partial}{\partial n'} G(x'-x'', y'-y'') \times \Phi(x'',y'') \right] +$$
$$+ \frac{1}{2d\sqrt{1+(dy'/dx')^2}} \left(-1 - \frac{k_{my}}{k_{my}^{(0)}} \frac{dy'}{dx'}\right) \exp\left(ik_{my}^{(0)}y' - im\frac{2\pi}{d}x'\right) \times$$
$$\left. \times \left[\Psi^{(i)}(x',y') + \int ds'' G(x'-x'', y'-y'') \times \Phi(x'',y'') \right] \right\}. \tag{5б}$$

При условии

$$k < k\sqrt{\varepsilon}\sin\theta < \frac{2\pi}{d} - k \tag{6}$$

в менее плотной среде (нижнем полупространстве) существуют только локализованные вблизи гофры волны. В оптически более плотной среде (в верхнем полупространстве) при дополнительных условиях

$$k\sqrt{\varepsilon} - \frac{2\pi}{d} < k\sqrt{\varepsilon}\sin\theta\,,\ \ k\sqrt{\varepsilon}\sin\theta < \frac{4\pi}{d} - k\sqrt{\varepsilon}\,,\ \ -k\sqrt{\varepsilon} + \frac{2\pi}{d} < k\sqrt{\varepsilon}\sin\theta\,, \tag{7}$$

имеют действительные постоянные распространения и являются пространственными гармониками только две волны: зеркальная (нулевого порядка) и минус первого порядка. При условии

$$k\sqrt{\varepsilon}\sin\theta = \frac{\pi}{d} \tag{8}$$

первая гармоника распространяется навстречу падающей волне, и рассеяние происходит в двух направлениях: зеркальном и обратном. Нетрудно видеть, что при значениях $\sqrt{\varepsilon} \sim 1{,}5 \div 2$ условия (6)–(8) могут быть выполнены в широком диапазоне углов при соответствующем периоде гофра.

Было проведено численное решение уравнения (3). Известные методики решения подобных интегральных уравнений описаны в [9–12]. В данной работе использовалась простейшая методика представления неизвестной периодической функции N значениями на периоде в N точках. Аналогичным образом представлялись свободный член и ядро уравнения. В результате получалась система N линейных алгебраических уравнений, которая решалась до достижения сходимости результатов при возрастании N.

Полученные в результате расчётов величины энергии отражения в минус первую гармонику $|R_{-1}|^2$ в зависимости от дифракционного параметра $\kappa = \dfrac{d\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}$ $\left(\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}\right.$ — длина волны в вакууме$\left.\right)$ для $\varepsilon = 4$ соответственно для ТЕ-волн и ТМ-волн приведены на рис. 3. Кривые приведены для случаев падения волны под углами $\theta = 45°$ и $\theta = 60°$ вблизи режимов полного автоколлимационного отражения (ПАО) на синусоидальной гофрированной поверхности при подборе амплитуд гофра, обеспечивающих ПАО на указанных углах. Величины $|R_{-1}|^2$ в некоторой полосе частот близки к единице, точно равняясь последней на некоторой частоте (ПАО). Как и в случае металлической поверхности [10] при увеличении угла θ ширина полосы существования незеркального лепестка быстро сужается. Для ТМ-волн при исследуемых достаточно больших углах падения требуется для полного отражения несколько большая глубина гофрировки. Однако полоса эффективного отражения для них несколько шире.

Обратимся к системе, изображённой на рис. 2 и состоящей из диэлектрика с проницаемостью ε_1, покрытого слоем другого диэлектрика с проницаемостью ε, вторая граница которого с вакуумом гофрирована по закону (1). Покажем, следуя [13], что для волн с электрическим полем, лежащим в плоскости падения, может иметь место полное отражение под углом, отличным от зеркального и антизеркального. Пусть падающая на гофрированную границу волна под углом θ к нормали при выполнении условий (7) рассеивается гофрированной границей в двух направлениях: зеркальном — под углом θ, и под углом $-\theta_{\rm b}$, который совпадает с углом Брюстера $\theta_{\rm b} = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}$ к плоской границе диэлектриков и одновременно является углом распространения минус первого порядка дифракции на гофрированной границе, т. е. выполняется условие

$$-\sin\theta_{\rm b} = \sin\theta - \frac{\lambda}{d\sqrt{\varepsilon}}\,. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что только при отрицательной величине левой части (9) последнее равенство совместимо с (7) при добавочном условии $\sin\theta_{\rm b} > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Полагаем толщину слоя L (рис. 2) диэлектрика с проницаемостью ε существенно превосходящей глубину проникновения прижатых гармоник, существующих вблизи гофрированной поверхности этого слоя. Тогда их влиянием на рассеяние волн на плоской границе диэлектриков ε_1 и ε можно пренебречь и рассматривать задачи рассеяния на плоской и гофрированной границах независимо. Не работая вблизи условий появления новых пространственных гармоник и рассчитывая коэффициенты рассеяния на гофрированной границе по вышеописанной методике, опишем рассеяние волн на плоской границе. Условия непрерывности тангенциальных компонент электромагнитных полей нулевых гармоник на этой границе могут быть записаны в виде связи амплитуд x-компонент электрических полей брюстеровской ТМ-поляризации падающих $E^{(+1)}_{0{\rm TM}x}$, $E^{(+)}_{0{\rm TM}x}$ и отражённых $E^{(-1)}_{0{\rm TM}x}$, $E^{(-)}_{0{\rm TM}x}$ волн [14]:

$$E^{(-1)}_{0{\rm TM}x} = R_{11}E^{(+1)}_{0{\rm TM}x} + T_{21}E^{(+)}_{0{\rm TM}x}, \quad E^{(-)}_{0{\rm TM}x} = R_{22}E^{(+)}_{0{\rm TM}x} + T_{12}E^{(+1)}_{0{\rm TM}x}, \tag{10}$$

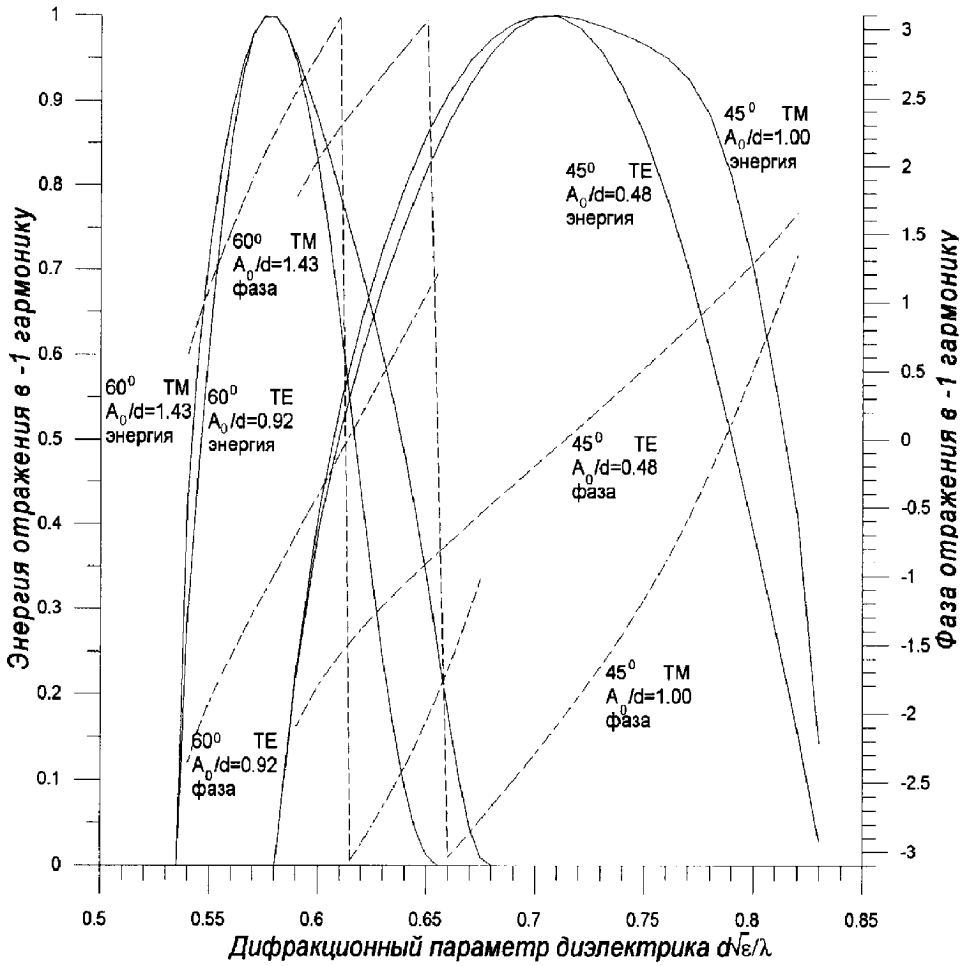


Рис. 3. Коэффициенты отражения по мощности (сплошные кривые) и фаза коэффициента отражения (пунктирные кривые) как функции частоты вблизи режима ПАО для TE- и TM-волн, падающих под углом 45 и 60 градусов.

где коэффициенты отражения R_{11}, R_{22} и прохождения T_{12} и T_{21} определяются по формулам Френеля

$$R_{11} = \frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}\,, \quad R_{22} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon}\cos\theta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon}\cos\theta_1}\,,$$
$$T_{12} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}\,, \quad T_{21} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_1}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}\,. \tag{11}$$

Угол θ_1 — угол падения волны на границу диэлектриков; он связан с углом θ формулой Снеллиуса

$$\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon}\sin\theta\,.$$

Ввиду наличия угла Брюстера для минус первого порядка дифракции и отсутствия, таким образом, других волн, падающих на гофрированную границу, кроме волны $E^{(-)}_{0\mathrm{TM}x}$, амплитуды волн $E^{(-)}_{0\mathrm{TM}x}$ и $E^{(+)}_{0\mathrm{TM}x}$ связаны между собой условием рассеяния на гофрированной границе

$$E^{(+)}_{0\mathrm{TM}x} = E^{(-)}_{0\mathrm{TM}x} R_{0\mathrm{TM}x} \exp\left(-2ik\sqrt{\varepsilon}\,L\cos\theta\right) = 0\,, \tag{12}$$

где $R_{0\mathrm{TM}x}$ — коэффициент рассеяния падающей волны в зеркальный максимум на гофрированной границе диэлектрика.

Из формул (10), (12), используя равенство $T_{12}T_{21} - R_{11}R_{22} = 1$, нетрудно получить условие отсутствия излучения под углом $-\theta_1$ от границы диэлектриков ε и ε_1:

$$R_{22} + R_{0\mathrm{TM}x} \exp\left(-2ik\sqrt{\varepsilon}\, L \cos\theta\right) = 0. \tag{13}$$

В этом случае всё излучение от последней границы идёт под углом Брюстера. Условию (13) можно удовлетворить выбором амплитуды гофра A_0/d и толщины диэлектрика L/λ. На рис. 4 приведена зависимость глубины гофрировки и толщины диэлектрика $\dfrac{L}{\lambda} = \dfrac{\pi(1+2n) + \phi_{\mathrm{TM}} - \phi_R}{4\pi\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}$, где n — целое число, ϕ_{TM} и ϕ_R — фазы коэффициентов отражения $R_{22} = |R_{22}|\exp(i\phi_R)$, $R_{0\mathrm{TM}x} = |R_{0\mathrm{TM}x}|\exp(i\phi_{\mathrm{TM}})$, зависящие от угла падения θ_1 при $\varepsilon_1 = 2{,}25$ и $\varepsilon = 4$, соответственно. Эти величины определены путём исследования решений интегрального уравнения (3). Следует отметить, что глубина гофрировки для получения полной трансформации падающей волны в минус первый максимум меньше при больших, далёких от угла Брюстера (близких к скользящим) углах падения, при которых существенную роль играет дополнительный слой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96–02–19620).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов А. С., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1990.
3. Penzkofer A. //Optical and Quantum Electronics, 1991. V. 23. P. 685.
4. Власов С. Н., Казакова Н. Г., Копосова Е.В. Компрессия СВЧ-импульсов с помощью дифракционных решеток. //ЖТФ, 1998. Т. 68. № 2 (в печати).
5. Fioroni C., Sauteret C., Rouyer C., Blanchot N., Seznec S., Migus A. //IEEE Journal of Quantum Electronics, 1994. V. 30. № 7. P. 1662.
6. Boyd R. D., Britten J. A., Decker D. E., Shore B. M., Stuart B. C., Perry M. D., Lifeng LI. //Applied optics, 1995. V. 34. № 4. P. 1697.
7. Koechner W. Solid-state laser engineering. — New York: Springer-Verlag; Berlin: Heidelberg, 1976.
8. Perry M. D., Boyd R. D., Britten J. A., Decker D., Shore B. M., Shannon C., Shoults E. //Optics letters, 1995. V. 20. № 8. P. 940.
9. Власов С. Н., Копосова Е. В. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1994. Т. 27. Вып. 3. С. 351.
10. Electromagnetic theory of gratings /Ed. by R. Petit. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1980.
11. Копосова Е. В. Рассеяние волн на решетках в квазиоптических системах: Дис. на степень канд. ф.-м. наук: /ННГУ. Нижний Новгород, 1993.
12. Вайнштейн Л. А., Суков А. И. //Радиотехника и электроника, 1984. Т. 19. Вып. 8. С. 1482.
13. Власов С. Н., Копосова Е. В. //Письма в ЖТФ, 1992. Т. 18. Вып. 9. С. 29.
14. Борн М., Вольф Э. Основы оптики /Пер. с англ.; Под ред. Г. П. Мотулевича, М.: Наука, 1970.
15. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. — М.: Наука, 1982.

Институт прикладной физики РАН,
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
16 сентября 1997 г.

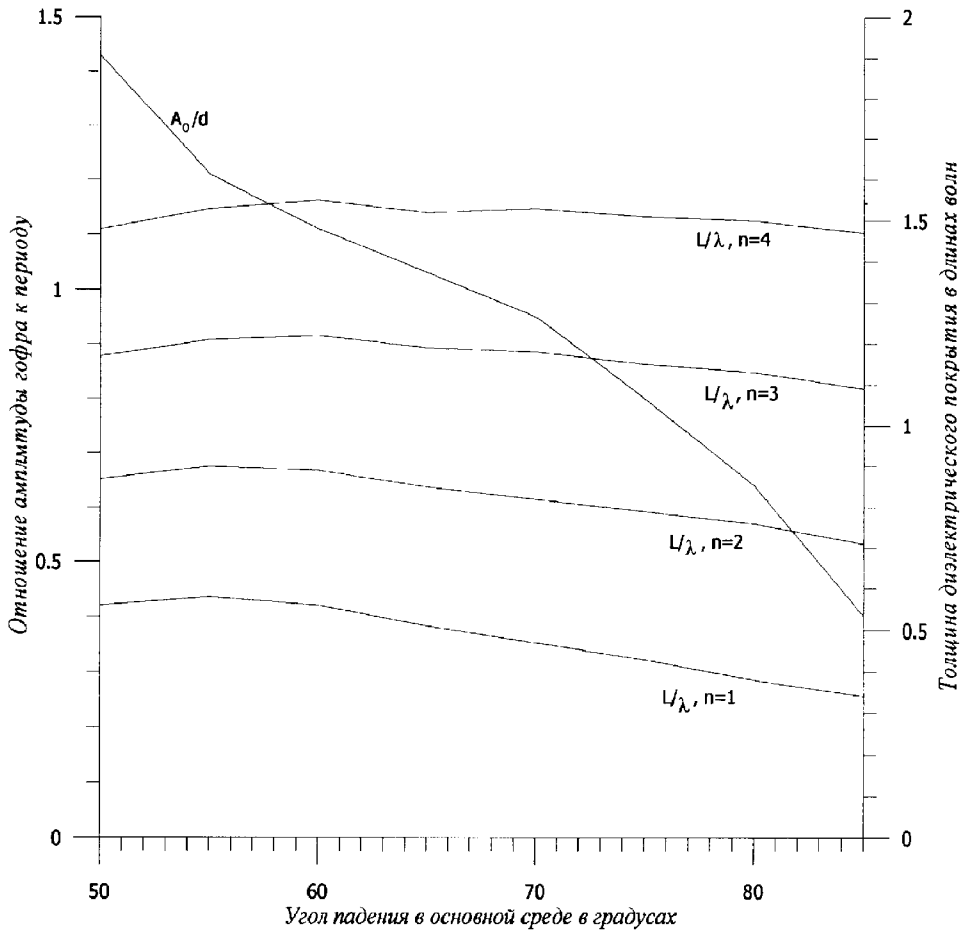


Рис. 4. Зависимость амплитуды гофрировки и толщины слоя диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 4$, лежащего на диэлектрике с проницаемостью $\varepsilon_1 = 2{,}25$, от функции угла падения, при которых имеет место полное отражение в направлении, отличном от зеркального и антизеркального.

ON APPLICATION OF DIELECTRIC GRATINGS IN COMPRESSORS OF ELECTROMAGNETIC RADIATION PULSES

S. N. Vlasov, E. V. Koposova

Dielectric diffractive gratings are theoretically studied. These gratings have a high threshold for laser damage and can be used in compressors of electromagnetic field pulses. The theory is built on the basis of the numerical solution of electromagnetic field equations by the integral equation method.

УДК 537.86:530.145

ЭФФЕКТ ФРАНЦА–КЕЛДЫША В СВЕРХРЕШЁТКАХ В ПОЛЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

С. В. Крючков, К. А. Попов

Исследован эффект межминизонного пробоя в полупроводниковой квантовой сверхрешётке в постоянном электрическом поле и поле нелинейной волны, напряжённости которых направлены вдоль оси сверхрешётки. Задача решена в квазиклассическом приближении при произвольном соотношении между ширинами разрешённой и запрещённой минизон. В частных случаях получены формулы для вероятности пробоя в присутствии лишь одного из полей, а также для линейной волны и уединённой волны (солитона). Показано, что с ростом параметра нелинейности электромагнитной волны k вероятность межминизонного пробоя растёт. Вычислен коэффициент поглощения нелинейной волны для типичных параметров сверхрешётки.

Эффект электропоглощения света в квантовых сверхрешётках (СР) может стать основой для создания целого ряда новых оптоэлектронных устройств [1] (например, оптических модуляторов [2], лазерных диодов с синхронизацией мод [3], оптических логических вентилей [4], оптических устройств сдвига уровня [5] и др.). С другой стороны, именно в экспериментах по межзонному электропоглощению [6] было надёжно экспериментально подтверждено такое тонкое явление, как эффект штарковского квантования энергетического спектра носителей тока в СР. Кроме того, эффект Франца–Келдыша может служить добротным инструментом в исследовании зонной структуры твёрдых тел [7].

В последнее время значительный интерес вызывает исследование различных нелинейных оптических эффектов в одиночных квантовых ямах и СР. Многофотонное поглощение света при межминизонном пробое в СР в присутствии сильных постоянного и переменного полей рассмотрено в [8]. В работе [9] показано влияние внешних электрического и магнитного полей на многофотонное межзонное и экситонное поглощение в СР на основе GaAs. В [10] проведено теоретическое исследование нелинейного межподзонного оптического поглощения третьего порядка в отсутствие электрического поля. Экспериментальное изучение двухфотонного поглощения в одиночной симметричной квантовой яме на основе GaAs/GaAlAs выполнено в [11].

В данной работе исследован эффект межминизонного пробоя в полупроводниковой квантовой СР в постоянном электрическом поле и поле нелинейной волны, напряжённости которых направлены вдоль оси СР. При выполнении условия $\hbar\omega \ll \epsilon_{\rm g}$ (ω — частота электромагнитной (ЭМ) волны, $\epsilon_{\rm g}$ — ширина запрещённой зоны) актуальными становятся многофотонные процессы и задача решается в квазиклассическом приближении. При этом (если интересоваться решением с экспоненциальной точностью) можно ограничиться одномерной ситуацией [12].

Примем двухзонную модель энергетического спектра СР в виде

$$\epsilon_{\rm c,v} = \pm\epsilon_{\rm g}/2 \pm \Delta_{\rm c,v}(1-\cos p_x d), \quad \hbar = 1,$$

здесь d — период СР, OX — ось СР, индексам c и v соответствуют параметры минизоны “проводимости"и “валентной"минизоны.

При таком выборе энергетического спектра ЭМ волны, распространяющиеся в бесстолкновительном режиме в СР, описываются уравнением sine–Gordon (SG) [13].Наиболее общее периодическое решение уравнения SG выражается через эллиптические функции Якоби $\mathrm{sn}(x,k)$, $\mathrm{cn}(x,k)$, $\mathrm{dn}(x,k)$. Волны такого типа представляют собой периодические нелинейные волны, при $k \to 0$ переходящие в линейные, а при $k \to 1$ — в уединённую волну (солитон). Отметим здесь, что условием выполнимости

бесстолкновительного режима является неравенство: $\nu \ll \omega_{\rm pl}$ (ν — частота столкновений электрона с нерегулярностями кристаллической решётки, $\omega_{\rm pl}$ — плазменная частота электрона в минизоне [13]).

При распространении ЭМ волны вдоль слоёв СР (по оси OZ), напряжённость электрического поля ориентирована по оси СР (OX) и определяется выражениями

$$E_x = E\,{\rm cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\ k\right), \quad 0 < k \le 1, \tag{1}$$

$$E_x = E\,{\rm dn}\left(\frac{2Kk\omega}{\pi}t,\ k^{-1}\right), \quad k > 1, \tag{2}$$

где $\omega = \pi\omega_{\rm pl}(2K)^{-1}\beta|1-\beta^2|^{-1/2}$, $k = edE(2\omega_{\rm pl})^{-1}|1-\beta^2|^{1/2}\beta^{-1}$, K — полный эллиптический интеграл первого рода ($K(k)$ при $k < 1$, $K(k^{-1})$ при $k > 1$), $\beta = u/c$, u — скорость распространения волны, c — скорость света в отсутствие электронов, E — амплитуда напряжённости поля ЭМ волны. Ниже мы подробно рассмотрим лишь волны типа (1), поскольку для волн типа (2) легко выполнить аналогичные рассуждения.

В квазиклассическом приближении вероятность пробоя может быть записана с экспоненциальной точностью так:

$$W = \exp\Big(-2\,{\rm Im}(S)\Big), \tag{3}$$

где S — классическое действие, набираемое частицей при подбарьерном движении.

Как было предложено в [8], межзонный переход можно представить в виде двух переходов: 1) "валентная зона — примесный уровень"; 2) "примесный уровень — зона проводимости". Такой математический приём значительно упрощает расчёты. При этом примесь удобно считать расположенной точно в середине запрещённой зоны, с энергией $V_i = 0$. В квазиклассической ситуации полная вероятность факторизуется, и полное действие частицы при межминизонном пробое имеет вид

$$S = S_{\rm v} + S_{\rm c}, \tag{4}$$

где $S_{\rm v}$ — действие при переходе 1, $S_{\rm c}$ — действие при переходе 2. Согласно [8, 12] $S_{\rm v}$ и $S_{\rm c}$ определяют следующим образом:

$$S_{\rm c,v} = \pm\int\limits_0^{t_{\rm c,v}} \epsilon_{\rm c,v}(t)dt, \tag{5}$$

причём моменты времени начала туннелирования $t_{\rm c,v}$ определяются условием

$$\epsilon_{\rm c,v}(t_{\rm c,v}) = 0 \tag{6}$$

и являются чисто мнимыми величинами. Процесс туннелирования заканчивается при $t = 0$.

Для нахождения зависимости $\epsilon_{\rm c,v}(t)$ достаточно рассмотреть одномерное классическое уравнение движения [12]

$$\frac{dp_x}{dt} = eE_x(t) \tag{7}$$

с начальным условием

$$p_x(0) = 0. \tag{8}$$

При действии на СР постоянного поля E_0 и поля нелинейной волны типа (1) полная напряжённость электрического поля имеет вид

$$E_x(t) = E_0 + E\,{\rm cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\ k\right). \tag{9}$$

Поставив это выражение в (7) и проинтегрировав, с учётом условия (8), получаем

$$p_x(t) = eE_0 t + \frac{2}{d}\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\, k\right)\right]. \tag{10}$$

Таким образом, для $\epsilon_{\mathrm{c,v}}(t)$ имеем выражение

$$\epsilon_{\mathrm{c,v}} = \pm\epsilon_{\mathrm{g}}/2 \pm \Delta_{\mathrm{c,v}}\left\{1 - \cos\left(\Omega_0 t + 2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\, k\right)\right]\right)\right\}, \tag{11}$$

где $\Omega_0 = eE_0 d$.

Из (6) следует, что $t_{\mathrm{c,v}}$ находится как корень трансцендентного уравнения

$$\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}} + 2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t_{\mathrm{c,v}},\, k\right)\right] = \arccos\left(1 + \frac{\epsilon_{\mathrm{g}}}{2\Delta_{\mathrm{c,v}}}\right). \tag{12}$$

Так как $t_{\mathrm{c,v}}$ — величина чисто мнимая, то последнее уравнение можно переписать, используя обозначение $t = i\tau$. При этом выражение (12) принимает вид

$$\Omega_0\tau_{\mathrm{c,v}} + 2\mathrm{arsh}\left[k\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}\tau_{\mathrm{c,v}},\, k'\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}\tau_{\mathrm{c,v}},\, k'\right)}\right] = \mathrm{arch}\left(1 + \frac{\epsilon_{\mathrm{g}}}{2\Delta_{\mathrm{c,v}}}\right), \tag{13}$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Подставив (11) в (5) и проведя интегрирование, получаем выражение для действия $S_{\mathrm{c,v}}$

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{c,v}} &= \left(\frac{\epsilon_{\mathrm{g}}}{2} + \Delta_{\mathrm{c,v}}\right)t_{\mathrm{c,v}} + \\ &+ \frac{(2k^2-1)\Delta_{\mathrm{c,v}}}{\Omega_0}\sin(\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}}) - \frac{\pi k\Delta_{\mathrm{c,v}}}{K\omega}\sin(\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}})\,\mathrm{cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t_{\mathrm{c,v}},\, k\right) - \\ &- 2ik^2\Delta_{\mathrm{c,v}}\int\limits_0^{\tau_{\mathrm{c,v}}}\frac{\mathrm{ch}(\Omega_0 t)}{\mathrm{cn}^2\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\, k'\right)}dt + \frac{i\pi k\Omega_0\Delta_{\mathrm{c,v}}}{K\omega}\int\limits_0^{\tau_{\mathrm{c,v}}}\frac{\mathrm{ch}(\Omega_0 t)}{\mathrm{cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\, k'\right)}dt, \end{aligned} \tag{14}$$

Расссмотрим далее предельные случаи. Положив $E = 0$, получаем $\mathrm{Im}(S_{\mathrm{c,v}})$ при наличии лишь постоянного поля

$$\mathrm{Im}(S_{\mathrm{c,v}}) = \frac{\Delta_{\mathrm{c,v}}}{\Omega_0}\left[(\mu_{\mathrm{c,v}}+1)\,\mathrm{arch}(1+\mu_{\mathrm{c,v}}) - \sqrt{\mu_{\mathrm{c,v}}(\mu_{\mathrm{c,v}}+2)}\right], \tag{15}$$

здесь $\mu_{\mathrm{c,v}} = \epsilon_{\mathrm{g}}/2\Delta_{\mathrm{c,v}}$, при этом время туннелирования определяется соотношением

$$t_{\mathrm{c,v}} = \frac{i}{\Omega_0}\,\mathrm{arch}(1+\mu_{\mathrm{c,v}}). \tag{16}$$

При наличии только поля нелинейной волны выражения (12) и (14) преобразуются, соответственно, к виду

$$t_{\mathrm{c,v}} = \frac{i\pi}{2K\omega}F\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\nu_{\mathrm{c,v}}}{k},\, k'\right), \tag{17}$$

$$\mathrm{Im}(S_{\mathrm{c,v}}) = \frac{\pi\epsilon_{\mathrm{g}}}{4K\omega}\left\{F\left[\mathrm{arctg}\,\frac{\nu_{\mathrm{c,v}}}{k},\, k'\right] + \right.$$
$$\left. +\nu_{\mathrm{c,v}}^{-2}E\left[\mathrm{arctg}\,\frac{\nu_{\mathrm{c,v}}}{k},\, k'\right] - \nu_{\mathrm{c,v}}^{-1}\sqrt{\frac{\nu_{\mathrm{c,v}}^2+1}{\nu_{\mathrm{c,v}}^2+k^2}}\right\}, \tag{18}$$

где$\nu_{\mathrm{c,v}} = \sqrt{\epsilon_{\mathrm{g}}/4\Delta_{\mathrm{c,v}}}$, $F(x,k)$ и $E(x,k)$ — эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода, соответственно.

При $k \to 0$ получаем уравнение для $t_{\mathrm{c,v}}$ в виде

$$\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}} + \frac{2\Omega}{\omega}\sin(\omega t_{\mathrm{c,v}}) = \arccos\left(1 + \frac{\epsilon_{\mathrm{g}}}{2\Delta_{\mathrm{c,v}}}\right). \tag{19}$$

Здесь $\Omega = eEd/2$, причём $\Omega/\omega \to 0$.

Далее из (14) находим выражение для действия

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{c,v}} &= \left(\frac{\epsilon_{\mathrm{g}}}{2} + \Delta_{\mathrm{c,v}}\right)t_{\mathrm{c,v}} - \Delta_{\mathrm{c,v}}\left[\frac{1}{\Omega_0}\sin(\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}}) - \frac{2\Omega\Delta_{\mathrm{c,v}}}{\omega(\omega^2-\Omega_0^2)}\times\right. \\ &\times \left.(\Omega_0\sin(\omega t_{\mathrm{c,v}})\cos(\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}}) - \omega\sin(\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}})\cos(\omega t_{\mathrm{c,v}}))\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Выражение (20) при $\omega \to \Omega_0$ принимает вид

$$S_{\mathrm{c,v}} = \left(\frac{\epsilon_{\mathrm{g}}}{2} + \Delta_{\mathrm{c,v}}\right)t_{\mathrm{c,v}} - \frac{\Delta}{\Omega_0}\sin(\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}}) + \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}t_{\mathrm{c,v}}\,.$$

Таким образом, формулы (19) и (20) описывают эффект Франца–Келдыша в режиме линейных волн.

Положив в (12) и (14) $k = 1$, получаем формулы для определения времени туннелирования и действия для солитона

$$\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}} + 2\arcsin\left(\mathrm{th}(\Omega t_{\mathrm{c,v}})\right) = \arccos\left(1 + \frac{\epsilon_{\mathrm{g}}}{\Delta_{\mathrm{c,v}}}\right), \tag{21}$$

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{c,v}} = \left(\frac{\epsilon_{\mathrm{g}}}{2} + \Delta_{\mathrm{c,v}}\right)t_{\mathrm{c,v}} + \frac{\Delta_{\mathrm{c,v}}}{\Omega_0}\sin(\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}}) - \frac{2\Delta_{\mathrm{c,v}}}{\Omega}\sin(\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}})\,\mathrm{sech}(\Omega t_{\mathrm{c,v}}) - \\ - 2i\Delta_{\mathrm{c,v}}\int\limits_0^{\tau_{\mathrm{c,v}}}\frac{\mathrm{ch}(\Omega_0\tau)}{\cos^2(\Omega\tau)}d\tau + \frac{2i\Omega_0\Delta_{\mathrm{c,v}}}{\Omega}\int\limits_0^{\tau_{\mathrm{c,v}}}\frac{\mathrm{ch}(\Omega_0\tau)}{\cos(\Omega\tau)}d\tau\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Численный анализ полученных выше формул позволяет сделать следующие выводы. С ростом амплитуды полей вероятность межминизонного пробоя растёт, а действие, соответственно, уменьшается (см. рис. 1, росту амплитуды постоянного поля соответствует более низкое положение графика). На рис. 2 показана зависимость вероятности пробоя W от амплитуды нелинейной волны. Заметим, что вероятность растёт с увеличением E неравномерно. Условно график можно разбить на участки “слабого"($W < 10^{-3}$) и “сильного"($W > 10^{-2}$) поглощения. Грубо эти участки разделяются точкой перегиба функции $W(\Omega)$, которую легко определить численно. Таким делением удобно пользоваться при вычислении диссипации энергии ЭМ волн с учётом потерь на межминизонных переходах. Ширина участка “слабого"поглощения уменьшается с увеличением напряжённости постоянного поля и

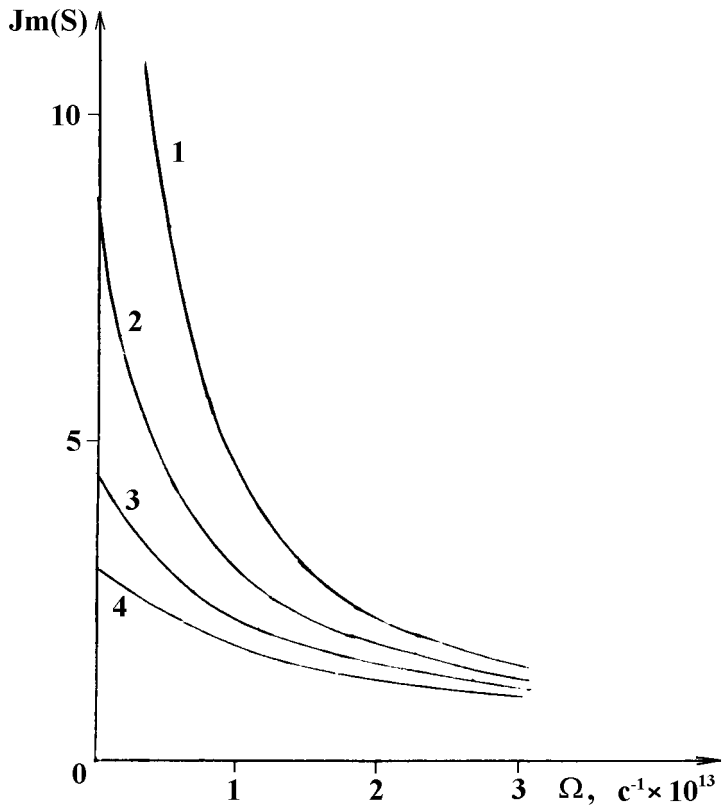


Рис. 1. Зависимость мнимой части действия от Ω при $k = 0{,}9$ для значений $\Omega_0(c^{-1} \cdot 10^{13})$: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

с уменьшением запрещённой зоны. Численный анализ отношения вероятности пробоя под действием нелинейной волны W_1 к вероятности перехода в поле линейной волны W_2 показывает, что $W_1/W_2 > 1$ при одинаковых амплитудах волн (отличие составляет лишь k) и параметрах среды распространения. Это означает рост вероятности поглощения волны с ростом её коэффициента нелинейности k.

Оценим коэффициент поглощения ЭМ волны, определяемый по формуле [8]

$$\alpha = \frac{4\pi\epsilon_{\rm g} N\varepsilon}{cE^2\tau} \exp\left(-2\,{\rm Im}(S)\right). \tag{23}$$

Здесь N — концентрация атомов, ε — диэлектрическая проницаемость. Пологая $N = 10^{22}$ см$^{-3}$, $\varepsilon = 3$, $\epsilon_{\rm g} = 0{,}1$ эВ, $\Delta_{\rm v} = \Delta_{\rm c} = 2 \cdot 10^{-2}$ эВ, $k = 0{,}9$, $d = 10^{-6}$ см, $E = 20$ ед. СГС ($6{\cdot}10^3$ В/см), $E_0 = 4$ ед. СГС ($1{,}25{\cdot}10^3$ В/см, получаем по порядку величины значение коэффициента поглощения $\alpha \approx 6 \cdot 10^3$.

В случае, когда напряжённость одного из полей гораздо меньше напряжённости другого поля, вычисление S может быть сильно упрощено с использованием процедуры из [14]. Согласно этой процедуре, действие записывается в виде

$$S_{\rm c,v} = S^0_{\rm c,v} + S^1_{\rm c,v}, \tag{24}$$

где $S^0_{\rm c,v}$ — действие в отсутствие поля“возмущения". Так при $E_0 \ll E$ действие $S^0_{\rm c,v}$ принимает вид (18),

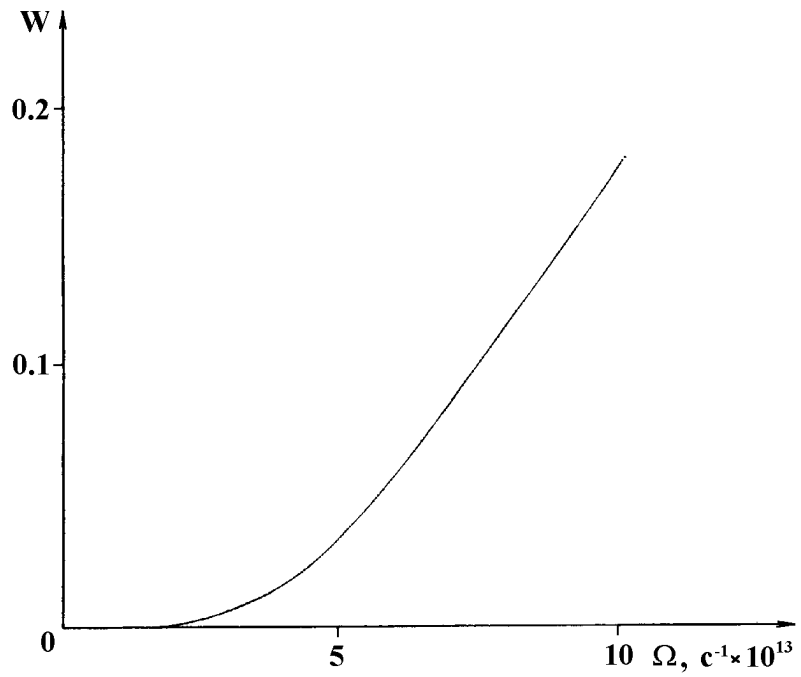


Рис. 2. Зависимость вероятности межминизонного пробоя от Ω при $k = 0{,}9$, $\Omega_0 = 0{,}2 \cdot 10^{13} c^{-1}$.

а $S^1_{\mathrm{c,v}}$ записывается так:

$$S^1_{\mathrm{c,v}} = -2eE_0 \int\limits_0^{t_{\mathrm{c,v}}} x(t)dt\,, \tag{25}$$

здесь $t_{\mathrm{c,v}}$ — время туннелирования при $E_0 = 0$, находимое из (17), $x(t)$ — траектория в отсутствие постоянного поля. Из (7) находим импульс электрона, приобретаемый под воздействием поля нелинейной волны (1):

$$p_x(t) = \frac{2}{d} \arcsin\left[k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\, k\right)\right].$$

Компонента скорости электрона по оси OX равна

$$v_x = 2\Delta_{\mathrm{c,v}} dk\,\mathrm{sn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\, k\right)\,\mathrm{dn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\, k\right).$$

Отсюда находим траекторию

$$x(t) = \frac{\pi\Delta_{\mathrm{c,v}} dk}{K\omega}\left[\mathrm{cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t_{\mathrm{c,v}},\, k\right) - \mathrm{cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\, k\right)\right]. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (25) получим формулу для $S^1_{\mathrm{c,v}}$

$$S^1_{\mathrm{c,v}} = -\frac{4\pi k\Delta_{\mathrm{c,v}}\Omega_0}{K\omega}\left\{\mathrm{cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t_{\mathrm{c,v}},\, k\right)t_{\mathrm{c,v}} - \frac{1}{\Omega}\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t_{\mathrm{c,v}},\, k\right)\right]\right\}. \tag{27}$$

Аналогичные преобразования можно проделать в случае $E_0 \gg E$. При этом действие $S^0_{\mathrm{c,v}}$ ищем по

формуле (15), тогда как $S^1_{\mathrm{c,v}}$, рассчитываемое по формуле

$$S^1_{\mathrm{c,v}} = -2eE \int\limits_0^{t_{\mathrm{c,v}}} x(t)\,\mathrm{cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\ k\right) dt\,, \tag{28}$$

принимает вид

$$\begin{aligned} S^1_{\mathrm{c,v}} &= -\frac{4\Delta_{\mathrm{c,v}}}{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t_{\mathrm{c,v}}\arcsin\left[k\,\mathrm{cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t_{\mathrm{c,v}},\ k\right)\right] + \\ &+ \frac{2i\Omega\Delta_{\mathrm{c,v}}}{\Omega_0}\int\limits_0^{\tau_{\mathrm{c,v}}} \frac{\mathrm{ch}(\Omega_0 t)}{\mathrm{cn}\left(\frac{2K\omega}{\pi}t,\ k'\right)} dt\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Численный анализ действий $S^1_{\mathrm{c,v}}$ в форме (27) и (29) показывает, что эта поправка к невозмущённому действию отрицательна и растёт с увеличением амплитуды поля “возмущения". Это, в свою очередь, означает резкий (экспоненциальный) рост вероятности пробоя в присутствии даже малого возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солимар Л., Уолш Д. Лекции по электрическим свойствам материалов. — М.: Мир, 1991. – 504 с.
2. Woodward T. K., Sizer Teodor (II), Sivco D. L., Cho A. Y. //Appl. Phys. Lett., 1990. V. 57. № 6. P. 548.
3. Silberberg Y., Smith P. W., Eilenberger D. J., Miller D. A. B. et. al. //Opt. Lett., 1984. V. 9. P. 507.
4. Miller D. A. B., Chemla D. S., Damen T. C., Gossard A. C. et. al. //Appl. Phys. Lett., 1984. V. 45. № 1. P. 13.
5. Miller D. A. B., Chemla D. S., Damen T. C., Wood T. H. et. al. //IEEE J. Quantum Electron., 1985. V. QE-21. P. 1462.
6. Fujiwara K., Shneider H., Cingolani R., Ploog K. //Solid State Commun., 1989. V. 72. № 9. P. 935.
7. Niki S., Kellner A. L., Lin S. C. et. al. //Appl. Phys. Lett., 1990. V. 56. № 5. P. 475.
8. Крючков С. В., Сыродоев Г. А. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1990. Т. 23. № 6. С. 762.
9. Монозон Б. С., Жилич А. Г. //ФТТ, 1995. Т. 37. № 4. С. 936.
10. Shi Jun-jie, Dai Xian-qi, Pan Shao-hua //Acta Phys. Sin. Overseas Ed., 1994. V. 3. № 6. P. 413.
11. Dupont E., Corcum P., Liu H. C., Wilson P. H. et. al. //Appl. Phys. Lett., 1994. V. 65. № 12. P. 1560.
12. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. — М.: Наука, 1971. – 544 с.
13. Басс Ф. Г., Булгаков А. А., Тетервов А. П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. — М.: Наука, 1989. – 288 с.
14. Ивлев Б. И., Мельников В. И. //ЖЭТФ, 1986. Т. 90. № 6. С. 2208.

Волгоградский педагогический
университет, г.Волгоград, Россия

Поступила в редакцию
10 марта 1997 г.

FRANTS–KELDYSH EFFECT IN HYPERLATTICES IN NONLINEAR ELECTROMAGNETIC WAVE FIELD

S. V. Kryuchkov, K. A. Popov

We have studied the effect of interminizone break-down in a semiconductor quantum hyperlattice being in constant electric field and nonlinear wave field with field strengths directed along the hyperlattice axis. The problem has been solved in the semiclassical approximation at an arbitrary relation between allowed and forbidden minizone widths. In particular cases we have got formulas for the break-down probability at the presence of only one of the fields as well as for a linear wave and a soliton. It has been shown that the interminizone break-down probability grows with the growth of electromagnetic wave nonlinearity parameter k. The nonlinear wave absorption coefficient has been calculated for typical parameters of the hyperlattice.

УДК 535.; 535.854

К ВОПРОСУ О ВОЗМОЖНОСТИ РЕГИСТРАЦИИ ЭФФЕКТА САНЬЯКА С ПОМОЩЬЮ π-МЕЗОНОВ

Г. Б. Малыкин

Предлагается измерение эффекта Саньяка для встречных волн де Бройля π^+ или π^- мезонов, спин которых равен нулю. Последнее обстоятельство позволяет избежать невзаимного сдвига фазы встречных волн, связанного как с томасовской прецессией (эффектом СТО), так и с обусловленной наличием магнитных полей ларморовской прецессией спина элементарных частиц. К преимуществам использования π мезонов относится наличие у них заряда, что позволяет использовать хорошо известные в электронной оптике устройства для фокусировки, разделения и соединения пучка частиц, а также сравнительно большое время их жизни. Предложен модуляционный метод обработки интерференционного сигнала. Проведена оценка ограниченной дробовыми шумами предельной чувствительности рассматриваемого метода.

Эффект Саньяка [1] заключается в том, что во вращающемся кольцевом интерферометре одна встречная волна приобретает фазовый сдвиг $\Delta\varphi_{\rm o}$ относительно другой, который пропорционален угловой скорости Ω и площади $S_{\rm o}$, охватываемой интерферометром:

$$\Delta\varphi_{\rm o} = \frac{8\pi S_{\rm o}\Omega}{\lambda c}\,, \tag{1}$$

где λ — длина волны света, c — скорость света.

Эффект Саньяка может использоваться как для целей навигации [2], так и для исследования фундаментальных физических явлений [3].

В настоящее время этот эффект обнаружен не только для электромагнитных волн, но и для волн де Бройля материальных частиц: электронов [4], нейтронов [5], атомов кальция [6], натрия [7] и цезия [8]. Основная причина, привлекающая внимание исследователей к де бройлевской интерферометрии, заключается в возможности существенно повысить чувствительность измерений по сравнению с оптическим диапазоном, поскольку волны де Бройля материальных частиц на много порядков короче длины волны света.

Приведём выражение для сдвига фазы волн де Бройля материальных частиц, вызванного эффектом Саньяка в кольцевом интерферометре [4]:

$$\Delta\varphi_{\rm m} = \frac{8\pi m S_{\rm m}\Omega}{h}\,, \tag{2}$$

где h — постоянная Планка, $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ — релятивистская масса частицы, m_0 — масса покоя частицы, v — скорость частицы, $S_{\rm m}$ — площадь интерферометра ($\lambda_{\rm m} = h/(mv)$ — длина волны де Бройля).

Здесь следует отметить одну интересную особенность — как следует из выражения (2), в нерелятивистском пределе величина эффекта Саньяка не зависит от скорости частицы. В случае использования немонохроматического пучка материальных частиц, т. е. частиц с различными скоростями, величина эффекта Саньяка будет одинаковой для волн де Бройля, создаваемых всеми частицами, и на выходе интерферометра будет иметь место чёткая интерференционная картина, независимо от угловой скорости вращения. Это является одним из преимуществ кольцевого интерферометра на волнах де Бройля

материальных частиц перед оптическим кольцевым интерферометром — в последнем, при использовании немонохроматического источника излучения, величина эффекта Саньяка будет различной для различных длин волн света (см. выражение (1)), и при увеличении угловой скорости вращения видность интерференционной картины падает [9].

Отметим, что для случая, когда изменение разности фаз волн де Бройля вызвано изменением квантовомеханического состояния спинов нейтронов под действием вектор-потенциала магнитного поля (скалярным эффектом Ааронова–Бома — эффектом Ааронова–Кашера [10]), то величина фазового сдвига также не зависит от скорости нейтронов [11]. Отметим также, что в ряде работ (см., напр., [12]) рассматривается некоторая аналогия между эффектом Саньяка и эффектом Ааронова–Бома.

В случае, если разность оптических путей для встречных волн в интерферометре на волнах де Бройля материальных частиц обусловлена другими причинами, например, незначительной разностью длин плеч равноплечного интерферометра Маха–Цендера (применение такого интерферометра для измерения эффекта Саньяка связано с рядом технических сложностей создания кольцевого интеферометра для встречных пучков материальных частиц) или ларморовской прецессией спина материальной частицы в магнитном поле, то видность интерференционной картины для немонохроматического пучка материальных частиц будет уменьшаться с увеличением разности фаз встречных пучков [11].

Следует иметь в виду, что чем меньше скорость материальных частиц, тем больше длина волны де Бройля и, следовательно, тем больше будет размер интерференционной полосы, что упрощает регистрацию эффекта Саньяка. В то же время, как было отмечено выше, величина разности фаз встречных волн де Бройля материальных частиц, обусловленная эффектом Саньяка, не зависит от скорости частиц, и, казалось бы, в данном случае выгодно использовать медленные материальные частицы. Однако в случае, если время жизни материальных частиц ограничено, то при уменьшении их скорости уменьшается и длина их пробега, вследствие чего придётся уменьшать размеры, а следовательно, и площадь интерферометра, что приведёт, в соответствии с выражением (2), к снижению чувствительности. Поэтому в каждом конкретном случае следует найти оптимальную скорость материальных частиц.

Основное ограничение точности измерения эффекта Саньяка в оптическом диапазоне – в волоконных кольцевых интерферометрах (ВКИ), изготовленных на основе одномодовых волоконных световодов (ОВС), – связано с явлением поляризационной невзаимности, которое приводит к появлению сдвига фазы интерференционной картины на выходе ВКИ, не связанного с вращением, — к сдвигу нуля ВКИ [13, 14]. В работе [13] показано, что если излучение на входе ВКИ полностью деполяризовано, иными словами, в нём в равной мере присутствуют фотоны с различными состояниями поляризации, то сдвига нуля не будет.

Отметим, что само явление поляризации света связано с наличием спина у фотона, и различным состояниям поляризации соответствует различный вид матрицы плотности квантовомеханического состояния спина [15]. Волны де Бройля материальных частиц: электронов нейтронов, атомов, — также поляризованы, поскольку перечисленные частицы имеют спин и его квантовомеханическое состояние определяет состояние поляризации частицы [16].

При измерении эффекта Саньяка с помощью электронов [4], последние движутся в электрическом и магнитном полях сложной конфигурации, что приводит к ларморовской прецессии спина электрона и вызывает невзаимный фазовый сдвиг встречных волн [17, 18], аналогичный поляризационной невзаимности ВКИ. Отметим здесь, что в работах [19, 20] решается задача об изменении квантовомеханического состояния спина электрона при одновременном наличии электрического и магнитного полей, в работе [21] рассматривается аналогия между ларморовской прецессией спина электрона и биениями состояния поляризации света в среде с двулучепреломлением.

Как показано в работах [17, 18], даже если полностью устранить влияние электрического и магнитного полей на квантовомеханическое состояние спина материальных частиц, то остаётся ещё одна причина, принципиально ограничивающая точность измерения разности фазы во встречных волнах коль-

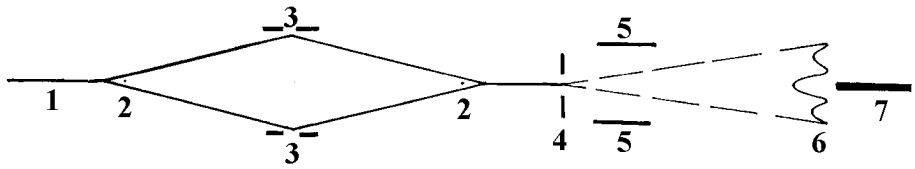


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 — пучок π мезонов на входе интерферометра, 2 — электростатические бипризмы Френеля–Моленштедта, 3 — электростатические зеркала, 4 — электростатическая линза, 5 — отклоняющая система, 6 — распределение интенсивности в пучке π мезонов на выходе фокусирующей и отклоняющей систем (интерференционная картина), 7 — счётчик π мезонов.

цевого интерферометра, — прецессия Томаса спина частицы, которая является эффектом СТО [22]. Следует однако отметить, что вследствие ряда технических причин, ограничивающих точность измерения, в настоящее время экспериментально не обнаружено влияние прецессии Томаса на сдвиг интерференции встречных волн де Бройля материальных частиц.

Целью настоящей работы является: предложить радикальный способ исключения влияния поляризации на интерферометрические измерения и, в частности, на измерение величины эффекта Саньяка — использование материальных частиц со спином, равным нулю, и, следовательно, не имеющих поляризации, а также провести оценку ограниченной дробовыми шумами предельной чувствительности рассматриваемого метода. В качестве таких частиц могут быть использованы π^+ и π^- мезоны, а также K^+ и K^- мезоны. С практической точки зрения наиболее целесообразно использовать π мезоны (масса покоя — 140 МэВ, длина свободного пробега — 7,8 м, заряд π^- мезона равен заряду электрона, π^+ мезон имеет заряд противоположного знака [23]), поскольку это одна из самых распространённых и хорошо изученных элементарных частиц.

Отметим, что уже более двадцати лет существуют так называемые “мезонные фабрики-— сравнительно небольшие и недорогие ускорители, в которых создаётся пучок π мезонов с током в сотни мА [24]. Наличие у мезонов электрического заряда позволяет использовать хорошо известные в электронной оптике устройства для фокусировки, разделения и соединения пучка частиц.

Отметим, что, в принципе, можно также использовать интерференцию волн де Бройля атомов, суммарный спин которых равен нулю, например, атомов ортоводорода, однако такие атомы могут самопроизвольно менять свой суммарный спин, поглощая или излучая при этом квант света.

Рассмотрим возможную схему экспериментальной установки, аналогичную применявшейся в работе [4] (рис. 1). Пучок π мезонов разделяется по фронту на два пучка электростатической бипризмой Френеля–Моленштедта [25], которая является аналогом бипризмы Френеля в оптике, пучки расходятся. Затем каждый из пучков отражается от электростатического зеркала [26]. Далее пучки сближаются и в точке пересечения вновь соединяются в один пучок второй бипризмой, после чего имеет место интерференция волн де Бройля пучков, прошедших разные плечи интерферометра. В случае вращения установки, разность хода между пучками меняется. Регистрацию фазового сдвига, вызванного вращением, следует проводить по сдвигу интерференционных полос на выходе интерферометра. С помощью электронной оптики [26] следует сфокусировать интерференционную картину таким образом, чтобы ширина интерференционной полосы существенно превосходила размер счётчика. Увеличение интерфенционной картины с помощью электронной оптики позволяет использовать достаточно быстрые (но не релятивистские, поскольку в этом случае, как было показано выше, величина эффекта Саньяка зависит от скорости частицы) π мезоны, со скоростью порядка 0,1 с, длина пробега которых составляет десятки сантиметров, что позволяет создать интерферометр соответствующих размеров.

Схему регистрации и обработки можно существенно упростить по сравнению с применявшейся

в [4], если применить метод модуляции: следует с помощью отклоняющей системы, которая хорошо известна в электронной оптике, с некоторой частотой сканировать пучок π мезонов после второй электронной бипризмы, перпендикулярно его оси, по синусоидальному закону, т. е. сканировать всю интерференционную картину в плоскости изображения (см. рис. 1). При этом можно использовать один счётчик, установленный на месте, где при отсутствии сканирования расположен главный максимум интерференционной картины. При отсутствии вращения на выходе счётчика будет иметь место модуляция сигнала только на удвоенной частоте сканирования. Но при наличии вращения вся интерференционная картина сдвинется и появится модуляция и на частоте сканирования, причём её глубина будет пропорциональна угловой скорости, а фаза будет зависеть от направления вращения. Обработку сигнала можно производить с помощью фазового детектора, причём в качестве опорного сигнала используется переменное напряжение, подаваемое на отклоняющую систему.

Отметим здесь, что в случае использования интерферометра Маха–Цендера эффективная площадь интерферометра, определяющая чувствительность установки, в два раза меньше, чем для кольцевого интерферометра тех же размеров, вследствие чего в выражении (2) будет стоять коэффициент 4, а не 8.

Проведём сравнение предельной чувствительности эффекта Саньяка для π мезонов ($\Omega_{\rm m}^{\min}$) и в оптическом диапазоне для ВКИ ($\Omega_{\rm o}^{\min}$). Из выражений (1) и (2) следует

$$\Omega_{\rm m}^{\min}\Big/\Omega_{\rm o}^{\min} = \left(\Delta\varphi_{\rm m}^{\min}\Big/\Delta\varphi_{\rm o}^{\min}\right)\frac{(h\,/4\pi S_{\rm m}m)}{(\lambda_{\rm o}c\,/8\pi S_{\rm o})}\,, \tag{3}$$

где $\Delta\varphi_{\rm m}^{\min}$ и $\Delta\varphi_{\rm o}^{\min}$ — ограниченная дробовыми шумами фазовая чувствительность соответсвенно для волн де Бройля материальных частиц и оптических волн, $(h/4\pi S_{\rm m}m)$ и $(\lambda_{\rm o}c/8\pi S_{\rm o})$ — так называемые масштабные коэффициенты соответственно для волн де Бройля материальных частиц и оптических волн. Используя результаты [27–29], можно записать

$$\Delta\varphi_{\rm m}^{\min}/\Delta\varphi_{\rm o}^{\min} = \sqrt{N_{\rm o}/N_{\rm m}}\,, \tag{4}$$

где $N_{\rm o}$ и $N_{\rm m}$ — соответственно число фотонов, поступающих за единицу времени на фотоприёмник на выходе ВКИ, и число π мезонов, поступающих за единицу времени (в данном случае, за секунду) на счётчик мезонов (гейгеровский, сцинциляционный, вильсоновский или черенковский), установленный на выходе интерферометра на волнах де Бройля материальных частиц. Для простоты в выражении (4) полагается, что фотоприёмник и счётчик мезонов имеют квантовую эффективность, равную единице, т. е. регистрируется каждая частица. Полагаем, что видность интерференционной картины также составляет единицу.

Для того, чтобы определить величину $N_{\rm o}$ в оптике, используем результаты работы [30], где были получены рекордные результаты по чувствительности ВКИ. Мощность излучения P на выходе ВКИ составляла 21 мкВт при длине волны света 0,8 мкм. Следовательно, $N_{\rm o} = P\lambda_{\rm o}/hc = = 8{,}4\cdot 10^{13}$. Для оценки интенсивности пучка π мезонов учтём тот факт, что, как показано в работе [4], для получения хорошей видности интерференции встречных пучков электронов приходилось ограничивать токи пучков до значений 20–100 нА. Увеличение интенсивности пучка приведёт к увеличению его поперечного сечения, что, в свою очередь, может привести к ухудшению его когерентности в поперечном сечении и, как следствие, к снижению видности интерференции. Поскольку движение пучков π^+ и π^- мезонов в электромагнитных полях качественно совпадает с движением электронов (позитронов) с тем различием, что первые имеют существенно большую массу, то для оценок предельной чувствительности примем ток пучка мезонов I равным 100 нА. В этом случае $N_{\rm m} = I/e = 6{,}2\cdot 10^{11}$, где e — заряд электрона. Следовательно, $\sqrt{N_{\rm o}/N_{\rm m}} = 11{,}6$.

Для того, чтобы вычислить отношение масштабных коэффициентов, нам необходимо знать отношение площадей интерферометров на π мезонах и на световых волнах. Для оценок положим, что площадь интерферометра на мезонах составляет 10 см^2, при этом интерферометр Маха–Цендера имеет размеры $20 \times 0{,}5$ см. Параметры исследуемого в [30] ВКИ были следуюшими: длина контура составляла 1 км, диаметр намотки — 32 см и, следовательно, площадь контура составляла 79 м^2. Тогда из выражений (3) и (4) следует $\Omega_{\rm m}^{\rm min}/\Omega_{\rm o}^{\rm min} = 2 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, несмотря на то, что площадь интерферометра на π мезонах почти в 10^5 раз меньше, а число частиц в единицу времени в 10^2 раз меньше, чем у ВКИ, чувствительность его в $5 \cdot 10^2$ раз больше, чем у ВКИ, рассмотренного в [30].

Основной результат работы заключается в том, что предложен метод измерения эффекта Саньяка с помощью π мезонов, который позволяет полностью исключить явление поляризационной невзаимности. Следует отметить, что хотя в настоящее время, из-за ряда технических причин, чувствительность интерферометров на волнах де Бройля материальных частиц не превосходит чувствительности лучших ВКИ — $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ рад/с [30] — и составляет порядка $6 \cdot 10^{-1}$ рад/с для электронов [4], $6 \cdot 10^{-5}$ рад/с — для нейтронов [5], и $3 \cdot 10^{-7}$ рад/с и $2 \cdot 10^{-8}$ рад/с соответственно для атомов натрия [7] и цезия [8] (в полосе 1 Гц), в перспективе она может на много порядков превзойти чувствительность соответствующих оптических интерферометров [31, 32]. Можно надеяться, что предложенный метод позволит реализовать достаточно высокую чувствительность.

В заключение автор выражает благодарность В. Л. Соловьянову (ИФВЭ) и А. А. Тяпкину (ОИЯИ) за ряд полезных консультаций, В. В. Кочаровскому и Вл. В. Кочаровскому за обсуждение результатов работы.

Работа частично поддержана грантом № 96-02-18568а РФФИ и № 96-15-96742.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sagnac M. G. //J. de Phys., 1914. № 4. P. 177.
2. Курицки М. М., Голдстайн М. С. //ТИИЭР, 1983. Т. 71. С. 47.
3. Scully M. O., Zubairy M. S., Haugan M. P. //Phys. Rev., 1981. V. A24. P. 2009.
4. Hasselbach F., Nicklaus M. //Phys. Rev., 1993. V. A48. P. 143.
5. Werner S. A., Staudemann J. L., Collela R. //Phys. Rev. Lett., 1979. V. 42. P. 1103.
6. Riehle F., Kisters T., Witte A. et all //Phys. Rev. Lett., 1991. V. 67. P. 177.
7. Lenef A. et all //Phys. Rev. Lett., 1997. V. 78. P. 760.
8. Gustavson T. L., Bouyer P., Kasevich M. A. //Phys. Rev. Lett., 1997. V. 78. P. 2046.
9. Burns W. K., Moeller R. P. //J. of Lightwave Techn., 1987. V. LT-5. P. 1024.
10. Aharonov Y., Casher A. //Phys. Rev. Lett., 1984. V. 53. P. 319.
11. Badurek G. et all //Phys. Rev. Lett., 1993. V. 71. P. 307.
12. Harris E. G. //Am. J. Phys., 1996. V. 64. P. 378.
13. Козел С. М., Листвин В. Н., Шаталин С. В. и др. //Оптика и спектроскопия, 1986. Т. 61. С. 1295.
14. Малыкин Г. Б. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1991. Т. 34. С. 817.
15. Биденхарн Л., Лаук Д. Угловой момент в квантовой физике. — М.: Мир, 1984. (Biedenharn L. C., Louck J. D. Angular momentum in quantum physics. — Massach.: Addison–Wesley, 1981.)
16. McMaster W. H. //Rev. Mod. Phys., 1961. V. 33. P. 8.
17. Anandan J. //Phys. Rev., 1981. V. D24. P. 338.
18. Mashoon B. //Phys. Rev. Lett., 1988. V. 61. P. 2639.
19. Bargmann V., Michel L., Telegdi V. L. //Phys. Rev. Lett., 1959. V. 2. P. 435.
20. Aharonov Y., Susskind L. //Phys. Rev., 1967. V. 138. P. 158.

21. Запасский В. С., Козлов Г. Г. //Оптика и спектроскопия, 1995. Тю 78. С. 100.
22. Moeller C. The Theory of relativity. — Oxford Claredon Press, 1952.
23. Particle Physics (booklet). — Am. Inst. of Physics, LBL and CERN, 1996.
24. Роузен Л. //УФН, 1972. Т. 106. С. 664.
25. Mollenstedt G., Duker H. //Zeischrift fur Physik, 1956. V. 145. P. 337.
26. Вайнриб Е. А., Милютин В. И. Электронная оптика. — М.-Л.: Энергоиздат, 1951.
27. Берштейн И. Л. //УФН, 1953. Т. 49. С. 631.
28. Андронова И. А., Берштейн И. Л., Зайцев Ю. И. //Изв. АН, сер Физ., 1982. Т. 46. С. 1590.
29. Чечик Н. О. //УФН, Т. 46. С. 74.
30. Moeller R. P., Burns W. K., Frigo N. G. //J. of Lightwave Techn., 1989. V. 7. P. 262.
31. Hasselbach F., Nicklaus M. //Physica, 1988. V. B151. P. 230.
32. Clauser J. F. //Physica, 1988. V. B151. P. 262.

Институт прикладной физики РАН,
Н.Новгород, Россия

Поступила в редакцию
2 июля 1997 г.

THE POSSIBILITY OF RECORDING THE SAGNAC EFFECT BY π-MESONS

G. B. Malykin

Recording of the Sagnac effect for counterrunning de Broglie waves by positive or negative π-mesons with spin equal to zero is suggested. The zero spin allows to avoid non-reciprocal phase shift of the counterrunning waves that is connected both with the Thomas precession, i.e. special relativity theory, as well as with the Larmor precession of the elementary particles spin. The Larmor precession is caused here by magnetic fields. Among the advantages of the π-mesons are their relatively long life time and the charge. The latter feature makes it possible to apply devices commonly used in electon optics for focusing as well as for separation and coupling the particle beam. A modulation method of interference signal processing is offered. The shot noise-limited maximum sensitivity of the discussed method is evaluated.

УДК 621.391.26

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОТЯЖЁННЫХ АДАПТИВНЫХ РЕШЁТОК ПРИ ДЕЙСТВИИ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕКОГЕРЕНТНЫХ ПОМЕХ

Д. Монталбано, Г. Серебряков***

Помехоустойчивость адаптивных антенных решёток обычно анализируется в случае известных и неискажённых волновых фронтов принимаемых сигналов. В то же время в некоторых приложениях, таких как сонары и подводные системы связи, среда распространения является неизотропной и случайной. Тогда волновые фронты сигналов могут быть искажены случайным образом. В настоящей работе анализируется потенциальная помехоустойчивость оптимальных/адаптивных алгоритмов пространственной обработки в случае неполной пространственной когерентности сигналов. Получены аналитические выражения для выходного отношения сигнал/шум как для случая полезного сигнала с уменьшенной пространственной когерентностью, так и для случая помехи. Теоретические результаты сравниваются с результатами численного анализа.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы применение адаптивных методов пространственной обработки сигналов стало очень популярным, благодаря более высокой по сравнению со стандартными методами, эффективностью подавления помеховых сигналов. Некоторые приложения требуют для достижения высокого усиления использования антенн с большой апертурой. В этих случаях сигнал, полученный широко разнесёнными приёмниками может быть неполностью пространственно когерентен, даже если передаваемый сигнал имеет полностью когерентный волновой фронт. Причины возникновения такой уменьшенной когерентности могут быть различны, но, в общем, разделены на два типа. Первый тип относится к механическим деформациям антенной решётки. Второй вызван особенностями среды распространения, например, существованием многолучёвости, различного рода неоднородностей, диффузией. Такие эффекты часто возникают в сонарах и подводных акустических системах связи.

Влияние сигналов с уменьшенной пространственной когерентностью на помехоустойчивость оптимальной/адаптивной обработки изучались многими авторами [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Однако, во всех выше цитируемых работах не учитывалость то, что помеховые сигналы, в силу вышеуказанных причин, также имеют неполностью когерентные волновые фронта.

В настоящей работе мы покажем, что помехоустойчивость протяжённых оптимальных антенных решёток может существенно ухудшаться в присутствии помех с ограниченной пространственной когерентностью, даже если полезный сигнал полностью когерентен на апертуре антенны.

2. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ФИЛЬТР

Будем рассматривать антенную решетку (АР) с N сенсорами, расположенными эквидистантно на расстоянии d, работающую с *узкополосным процессором*. Другими словами, передаваемые сигналы представляют собой комплексный пакет с шириной полосы много меньше по сравнению с центральной частотой, так что временной задержкой между приёмными сенсорами можно пренебречь. В дальнейшем будем полагать, что АР линейна. Собственный шум в элементах предполагается статистически независимым, взаимно некоррелированным, гауссовым, с нулевым средним. Полезный и помеховые

сигналы полагаются взаимно некоррелированными, также гауссовыми случайными процессами. Под термином *сигнал* будем подразумевать полезный сигнал. Выходной сигнал АР можно записать в виде

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)\,, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t)$ — N-размерный вектор входных сигналов, а N-размерный комплексный вектор $\mathbf{w}$ представляет N весовых коэффициентов процессора антенной решётки. Символ ^{H} означает комлексное сопряжение и транспонирование.

2.1. Обозначения

Мы будем обозначать через вектор $\mathbf{a}(\theta)$ вектор, соответствующий отклику решётки на единичный волновой фронт, имеющий сигнальный параметр θ. Вектор $\mathbf{a}(\theta)$ — это функция Грина, описывающая распространение данного сигнала на каждый элемент решётки, нормализованный так, что

$$\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta) = N\,.$$

Будем полагать, что θ — это действительный скаляр, описывающий направление прихода сигнала по отношению к нормали АР. Тогда, можно записать

$$\mathbf{a}(\theta) = [1\ \exp(\mathrm{j}u)\ \ldots\ \exp(\mathrm{j}(N-1)u)]\,,$$

где $u = 2\pi d \sin\theta/\lambda_0$, d — межэлементное расстояние, λ_0 — длина волны, соответствующая частоте f_0.

Положим, что входной вектор $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{x}_n(t)$, где $\mathbf{x}_s(t)$, $\mathbf{x}_i(t)$ и $\mathbf{x}_n(t)$ описывают сигнал, помехи и собственный шум, соответственно. Следовательно, $\mathbf{R}_s = \mathrm{E}\{\mathbf{x}_s\mathbf{x}_s^H\}$, $\mathbf{R}_i = \mathrm{E}\{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^H\}$ и $\mathbf{R}_n = \mathrm{E}\{\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^H\}$ описывают соответствующие ковариационные матрицы.

Заметим, что поскольку собственный шум пространственно белый, то соответствующая ковариационная матрица имеет вид $\mathbf{R}_n = \sigma_n^2\mathbf{I}_N$, где σ_n^2 — мощность шума в элементе АР и $\mathbf{I}_N$ — единичная матрица.

В дальнейшем, будем обозначать через $\mathbf{R}_{in} = \mathbf{R}_i + \sigma_n^2\mathbf{I}_N$ ковариационную матрицу шума+помехи.

В соответствии с данными обозначениями, статистически оптимальный весовой вектор $\mathbf{w}_{\mathrm{opt}}$ может быть записан в виде [7] *

$$\mathbf{w}_{\mathrm{opt}} = b\mathbf{R}_{in}^{-1}\mathbf{a}(\theta_s)\,, \tag{2}$$

где b — постоянная, θ_s — угол прихода сигнала.

Выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) может быть записано как

$$\rho = \frac{\mathbf{w}^H\mathbf{R}_s\mathbf{w}}{\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{in}\mathbf{w}}$$

и для $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\mathrm{opt}}$

$$\rho_{\mathrm{opt}} = \frac{\mathbf{a}_s^H\mathbf{R}_{in}^{-1}\mathbf{R}_s\mathbf{R}_{in}^{-1}\mathbf{a}_s}{\mathbf{a}_s^H\mathbf{R}_{in}^{-1}\mathbf{a}_s}\,. \tag{3}$$

Поскольку вектор отклика полагается известным, как и угол прихода полезного сигнала, влияние потери когерентности выражается только через ковариационные матрицы сигнала и помех.

*В принципе, известно (см., напр., [3]), что для полезного сигнала с уменьшенной пространственной когерентностью действительно оптимальный весовой вектор есть собственный вектор, соответствующий максимальному собственному числу ковариационной матрицы полезного сигнала. В настоящей работе мы исследуем поведение весового вектора, оптимального в предположении, что ковариационная матрица полезного сигнала имеет диадную форму (сигнал полностью когерентен на апертуре).

3. РАССМАТРИВАЕМЫЕ МОДЕЛИ

Для получения точных аналитических выражений мы должны определить ковариационные матрицы сигнала и помех.

Мы будем определять сигнал как комплексный пакет $s(t)$ с мощностью $\sigma^2 = \mathrm{E}\{|s(t)|^2\}$ и углом прихода θ. Вектор входных сигналов $\mathbf{x}(t)$, соответствующий источнику, имеет компоненты $s\,(t-(k-1)\tau;\, x_k)\exp\,(-2\pi \mathrm{j}\, f_0(k-1)\tau)$ для $k = 1, \ldots, N$, где x_k означает положение k-го сенсора и $\tau = \tau(\theta)$ — время задержки между двумя приёмными элементами. Заметим, что для АР с эквидистантно расположенными приёмниками, полагая $x_1 = 0$, мы имеем $x_k = (k-1)d$ для $k = 1, \ldots, N$. Предполагая падающие волны плоскими (предположение дальней зоны), мы имеем

$$\tau(\theta) = \frac{1}{f_0\lambda_0} d \sin\theta\,.$$

Поскольку источник предполагается стационарным процессом во времени и в пространстве, его ковариационная матрица $\mathbf{R} = \mathrm{E}\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\}$ имеет компоненты

$$R_{kl} = \exp[-\mathrm{j}(k-l)u]R\,((k-l)\tau;\, x_k - x_l)$$

для $k, l = 1, \ldots, N$, где $u = 2\pi f_0\tau(\theta)$ и $R((k-l)\tau;\, x_k - x_l) == \mathrm{E}\,\{s\,(t-(k-1)\tau;\, x_k)\; s^*\,(t-(l-1)\tau;\, x_l)\}$ — функция, обозначенная далее как R. В случае полностью когерентных волновых фронтов, функция R постоянна, $R(0) = \sigma^2$. В этом случае ковариационная матрица источника приобретает форму

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)\,. \tag{4}$$

Будем предполагать, что потеря когерентности искажает структуру идеальной ковариационной матрицы (4), так что амплитуда членов этой матрицы будет уменьшаться при удалении от главной диагонали, спадая до нуля для очень протяжённых АР.

Будем записывать компоненты ковариационной матрицы в следующем виде

$$R_{kl} = \sigma^2 \exp[-\mathrm{j}(k-l)u]p_{kl}\,, \tag{5}$$

где p_{kl} представляет амплитуду коэффициента корреляции между k и l приёмниками. Используя матричную запись можно представить ковариационную матрицу как

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^H\,, \tag{6}$$

где $\mathbf{F} = \mathrm{diag}\{\mathbf{a}(\theta)\}$ и $\mathbf{P}$ — *матрица пространственной когерентности* с компонентами p_{kl}. Заметим, что амплитуда коэффициента когерентности p_{kl} лежит между 0 (случай дополнительного теплового шума) и 1 (случай сигнала, полностью когерентного на апертуре АР).

3.1. Определение матрицы когерентности

Фактически проблема заключается в определении компонент p_{kl} *матрицы когерентности* $\mathbf{P}$. В общем случае, пространственная когерентность источника описывается *характерной длиной пространственной когерентности*, которую мы обозначим как L_c. Эта величина обычно известна из экспериментальных измерений.

Общая модель для p_{kl} даётся следующим выражением [8]

$$p_{kl} = \exp\left[-\left(\frac{d}{L}\right)^r |k-l|^r\right]\,, \tag{7}$$

где r — параметр, изменяющийся обычно между 1 (экспоненциальное уменьшение) и 2 (гауссово уменьшение) [9]. Мы определяем $L = L_c/(1 + |\sin\theta|)$ как *эквивалентную характерную длину пространственной когерентности*. Эта величина учитывает как влияние длины когерентности L_c, так и угла прихода сигнала θ.

Заметим, что угол прихода сигнала влияет на пространственную когерентность в точке приёма. Фактически, зная скорость распространения источника и соответствующую длину волны, временная задержка может быть записана как функция пространственной задержки (и наоборот).

В случае $r = 1$ мы можем определить $p = \exp(-d/L)$ так, что выражение (7) приобретает очень простую форму

$$p_{kl} = p^{|k-l|}\,. \tag{8}$$

Как будет показано в дальнейшем, этот случай позволяет получить важные аналитические результаты.

4. НЕПОЛНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ СИГНАЛА

В этой части мы рассматриваем влияние неполной пространственной когерентности сигнала на помехоустойчивость оптимальной АР в присутствии только белого собственного шума. Пусть L_s — эквивалентная длина пространственной когерентнотси сигнала, и θ_s — угол прихода полезного сигнала в случае полной когерентности. Ковариационная матрица сигнала $\mathbf{R}_s$ может быть представлена в форме

$$\mathbf{R}_s = \sigma_s^2 \mathbf{F}_s \mathbf{P}_s \mathbf{F}_s^H\,, \tag{9}$$

где σ_s^2 — мощность сигнала и $\mathbf{F}_s = \mathrm{diag}\{\mathbf{a}(\theta_s)\}$. Матрица $\mathbf{P}_s$ имеет компоненты $p_{s,kl}$ (7). Если $r = 1$ и $p_s = \exp(-d/L_s)$, то из (8) матрица когерентности сигнала $\mathbf{P}_s$ имеет вид

$$\mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} 1 & p_s & p_s^2 & \cdots & p_s^{N-1} \\ p_s & 1 & p_s & \cdots & p_s^{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_s^{N-2} & \cdots & p_s & 1 & p_s \\ p_s^{N-1} & \cdots & & p_s & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Используя выражение (3) мы можем записать для оптимального ОСШ на выходе антенной решётки

$$\rho_{\mathrm{opt}} = \frac{\sigma_s^2}{N\sigma_n^2}\mathbf{a}^H(\theta_s)\mathbf{F}_s\mathbf{P}_s\mathbf{F}_s^H\mathbf{a}(\theta_s)\,, \tag{11}$$

Заметим, что максимально достижимое выходное ОСШ даётся выражением

$$\rho_0 = N\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} = N\nu_0\,. \tag{12}$$

Это соотношение характеризует *оптимальный пространственный фильтр* в присутствии только белого гауссова шума. Эффекты влияния пространственной когерентности сигнала и помех будут изучаться по сравнению с максимально достижимой величиной ρ_0. Поэтому, мы определяем *усиление оптимальной АР* (фактически потери) как отношение между фактическим выходным ОСШ и максимально достижимым, т. е.

$$G = \frac{\rho_{\mathrm{opt}}}{\rho_0}\,. \tag{13}$$

Из выражений (3), (9)–(11) следует, что

$$\begin{aligned}\rho_{\rm opt} &= \frac{\sigma_s^2}{N\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} p_{s,\,kl} = \\ &= \frac{\rho_0}{N^2}\left[2\sum_{l=1}^{N-1} p_s^l(N-l)+N\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Следовательно, G равно

$$G = \frac{1}{N^2}\left[N + 2\sum_{l=1}^{N-1} p_s^l(N-l)\right]. \tag{15}$$

Заметим, что в случае полностью когерентного сигнала $p_s \approx 1$ и $G \approx 1$. С другой стороны, если p_s очень мал, так что $p_s \approx 0$, $G \approx \dfrac{1}{N}$, т. е. любое усиление по отношению к одиночному приёмнику отсутствует. Поскольку выражение (11) не требует обращений матриц, точное аналитическое выражение для G, в форме (15), может быть легко получено для любого $r \in [1,\ 2]$.

На рис. 1 показана зависимость усиления ОСШ от отношения эквивалентной характерной длины когерентности L_s и размеров апертуры $L_{\rm a}$ для различных величин r. АР имела $N = 16$ эквидистантных приёмников с межэлементным расстоянием $d = \lambda_0/2$.

Можно заметить, что G слабо зависит от r, L_s и числа элементов N, как это также было показано в [3].

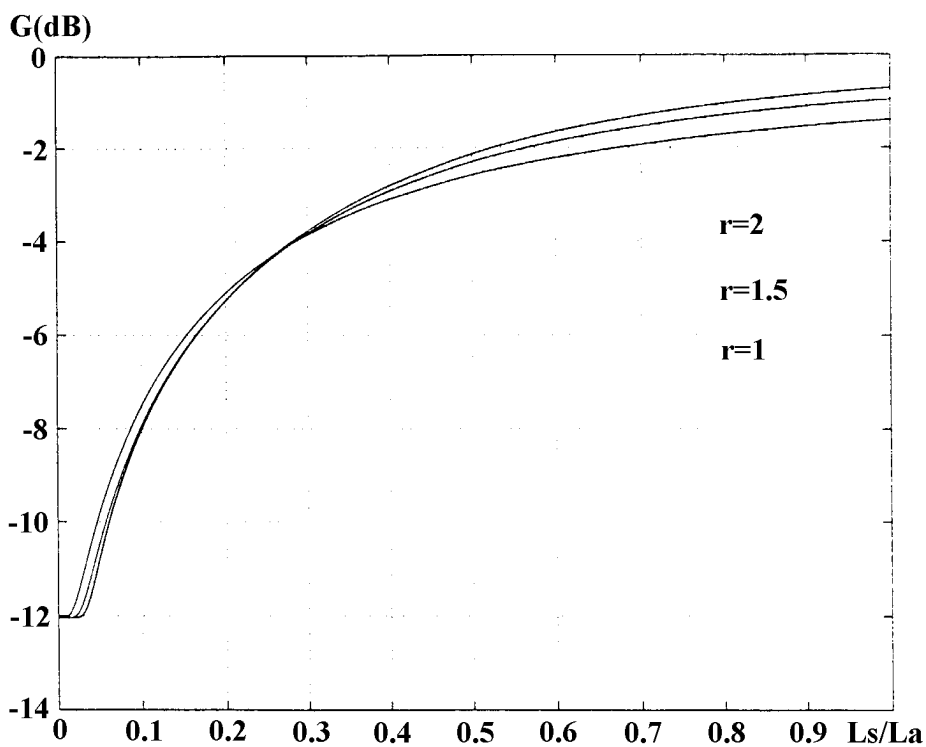


Рис. 1.

5. НЕПОЛНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ ПОМЕХИ

В этой части мы рассматриваем влияние помехи с неполной пространственной когерентностью на помехоустойчивость оптимального алгоритма. Для того, чтобы получить аналитические результаты, будем полагать, что на АР действует полностью когерентный сигнал и частично когерентная помеха.

Поскольку сигнал полагается полностью когерентным на апертуре АР, то соответствующая ковариационная матрица может быть представлена в форме (4), и выражение для выходного ОСШ записывается как [1, 2, 6, 7]

$$\rho_{\rm opt} = \sigma_s^2 \mathbf{a}^H(\theta_s)\mathbf{R}_{in}^{-1}\mathbf{a}(\theta_s)\,, \tag{16}$$

где $\mathbf{R}_{in}$ — шумовая ковариационная матрица.

Мы будем полагать, что θ_i — угол прихода помехового сигнала в отсутствие уменьшения пространственной когерентности, σ_i^2 — мощность помехи, и L_i — эквивалентная длина пространственной когерентности. Используя матричную запись (6), шумовая ковариационная матрица $\mathbf{R}_i$ может быть записана в виде

$$\mathbf{R}_i = \sigma_i^2 \mathbf{F}_i \mathbf{P}_i \mathbf{F}_i^H\,, \tag{17}$$

где $\mathbf{F}_i = \mathrm{diag}\{\mathbf{a}(\theta_i)\}$ и $\mathbf{P}_i$ описывает матрицу когерентности помехи с компонентами $p_{i,kl}$, определёнными в соответствии с (7).

Используя (17), обратная матрица $\mathbf{R}_i^{-1}$ даётся выражением

$$\mathbf{R}_i^{-1} = (1/\sigma_i^2)\mathbf{F}_i\mathbf{P}_i^{-1}\mathbf{F}_i^H\,. \tag{18}$$

Проблема обращения такой матрицы может быть решена аналитически только в случае $r = 1$. Тогда матрица $\mathbf{P}_i^{-1}$ может быть представлена как

$$\mathbf{P}_i^{-1} = \frac{1}{1-p_i^2}\begin{bmatrix} 1 & -p_i & 0 & \cdots & 0 \\ -p_i & 1+p_i^2 & -p_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -p_i & 1+p_i^2 & -p_i \\ 0 & \cdots & & -p_i & 1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Здесь мы полагаем $p_i = \exp[-(d/L_i)]$.

Аналитическое выражение для G может быть получено только для двух предельных случаев: первый соответствует случаю очень низкого входного отношения помеха/шум (ОПШ), второй — наоборот, очень высокого входного ОПШ.

5.1. Случай низкого ОПШ

Здесь мы будем рассматривать случай низкого входного отношения помеха/шум, т. е. $\sigma_n^2 \gg \sigma_i^2$. В принципе, такая ситуация не очень интересна с практической точки зрения, однако этот случай даёт гладкий аналитический переход между случаями полной и частичной пространственной когерентности. Более того, заметим, что если мощность помехи порядка величины собственного шума или меньше, то это эквивалентно добавочному цветному шуму.

Тогда обратная шумовая ковариационная матрица может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{in}^{-1} &= \frac{1}{\sigma_n^2}\left(\mathbf{I} + \frac{1}{\sigma_n^2}\mathbf{R}_i\right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\sigma_n^2}\mathbf{R}_i + \frac{1}{\sigma_n^4}\mathbf{R}_i^2 - \frac{1}{\sigma_n^6}\mathbf{R}_i^3 + \ldots\right). \end{aligned}$$

Выходное ОСШ определяется в большей степени мощностью собственного шума, чем интенсивностью помехи. Поэтому мы будем пренебрегать членами порядка выше второго, так что выходное ОСШ (16) запишется

$$\begin{aligned}\rho_{\rm opt} &\approx \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}\mathbf{a}^H(\theta_s)\left(\mathbf{I}-\frac{1}{\sigma_n^2}\mathbf{R}_i\right)\mathbf{a}(\theta_s)= \\ &= \nu_0[N-\nu_i\mathbf{a}^H(\theta_s)\mathbf{F}_i\mathbf{P}_i\mathbf{F}_i^H\mathbf{a}(\theta_s)]\,, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\nu_i = \sigma_i^2/\sigma_n^2$ означает входное отношение помеха/шум. Усиление оптимальной АР в этом приближении равно

$$G = 1-\frac{\nu_i}{N}\mathbf{a}^H(\theta_s)\mathbf{F}_i\mathbf{P}_i\mathbf{F}_i^H\mathbf{a}(\theta_s) \tag{21}$$

и после некоторых вычислений

$$G = 1-\frac{\nu_i}{N}\left[N+2\sum_{l=1}^{N-1}(N-l)p_i^l\cos(lu_{si})\right]\,, \tag{22}$$

где $u_s = 2\pi d\sin\theta_s/\lambda_0$ и $u_i = 2\pi d\sin\theta_i/\lambda_0$, параметр $u_{si} = |u_s - u_i|$ определяет угловое расстояние между сигналом и помехой.

Для очень малого коэффициента когерентности $p_i \approx 0$ выражение (22) уменьшается до $G = 1-\nu_i$. Заметим, что в этом случае, если $\nu_i = 1$, используемая ранее аппроксимация не применима и правильное выражение будет $G = 0{,}5$.

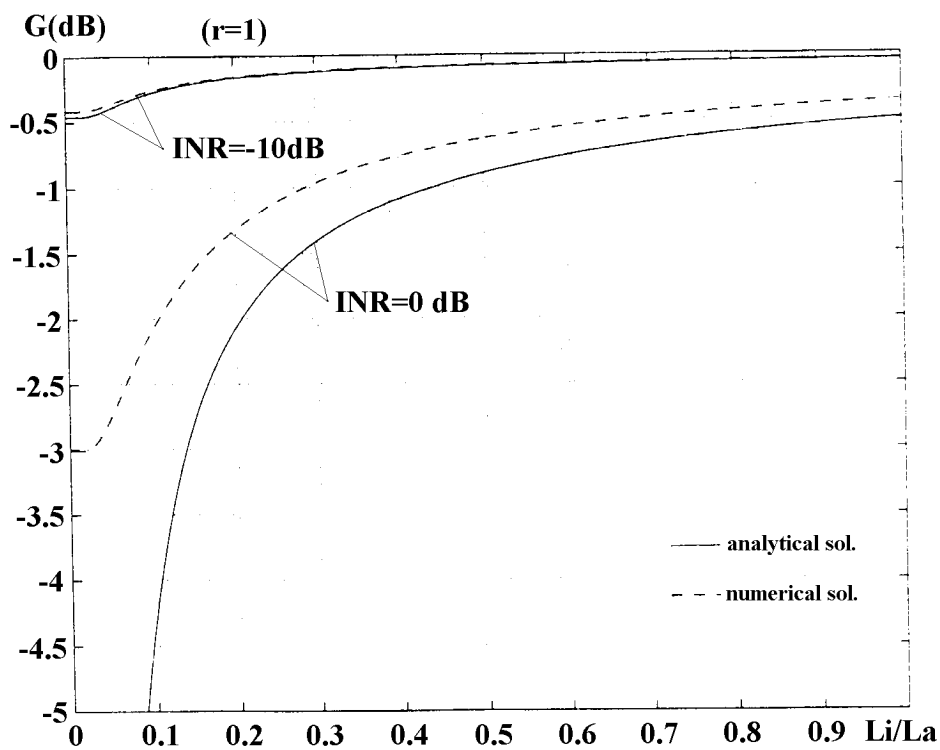


Рис. 2.

На рис. 2 показаны зависимости усиления выходного ОСШ G от отношения длины когерентности L_i и размеров апертуры $L_{\rm a}$ для различных величин ν_i (ОПШ) и $r = 1$. Угол прихода сигнала

полагался равным $\theta_s = 0°$, а угол прихода помехи $\theta_i = 30°$. Параметры АР полагались такими же, как и на рис. 1. Аналитические решения (сплошные линии) (22) сравнивались с численными (штрихованные линии), полученными путём численного обращения шумовой ковариационной матрицы. Как и ожидалось, разница между этими двумя решениями уменьшается при уменьшении входного ОПШ.

Если помеха полностью когерентна на апертуре АР, то $p_i \approx 1$ и G становится равным

$$G = 1 - \frac{\nu_i}{N}\left[N + 2\sum_{l=1}^{N-1}(N-l)\cos(lu_{si})\right].$$

Если же направление прихода помехового сигнала близко к полезному, $u_{si} \approx 0$, то

$$G = 1 - \nu_i N\,.$$

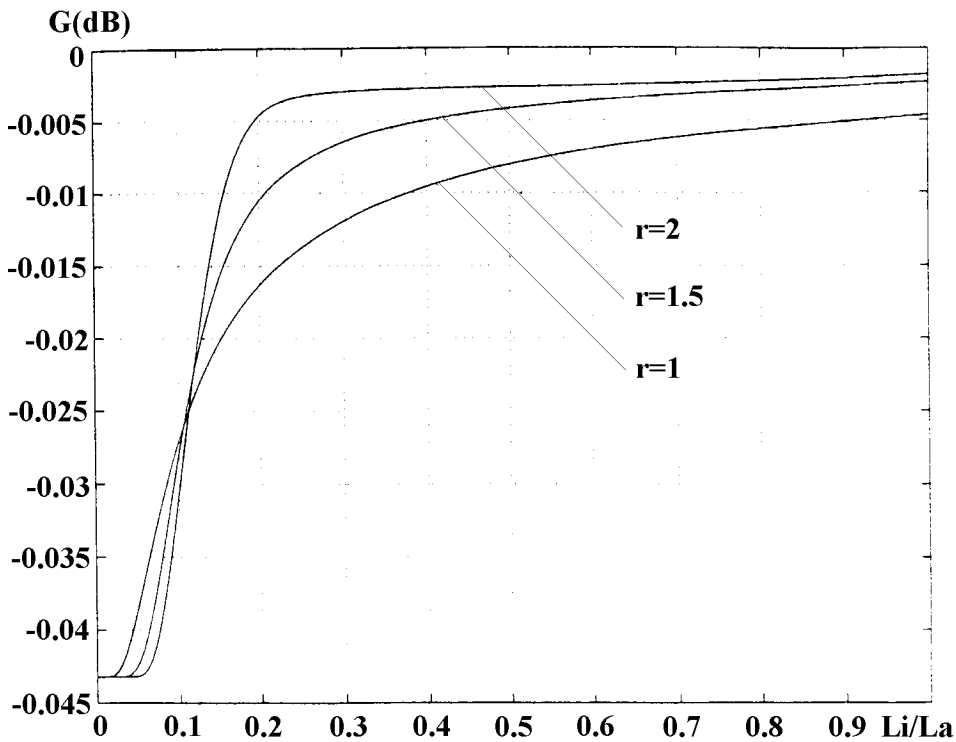


Рис. 3.

На рис. 3 приведены зависимости усиления выходного ОСШ G от $\dfrac{L_i}{L_{\rm a}}$ для различных величин r. Другие параметры — такие же, как и на рис. 2. Заметим, что особенных отличий в поведении кривых при изменении величины r не наблюдается.

5.2. Случай высокого ОПШ

Здесь мы рассмотрим случай мощной помехи, характерный для большинства практических ситуаций ($\sigma_n^2 \ll \sigma_i^2$).

Представим $\mathbf{R}_i$ и $\mathbf{R}_i^{-1}$ в следующем виде:

$$\mathbf{R}_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^H ,$$

$$\mathbf{R}_i^{-1} = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^H ,$$

где λ_j — j-е собственное число и $\mathbf{e}_j$ — соответствующий ему собственный вектор.

Тогда можно записать $\mathbf{R}_{in}$ и $\mathbf{R}_{in}^{-1}$ как

$$\mathbf{R}_{in} = \sum_{j=1}^{N} (\sigma_n^2 + \lambda_j) \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^H , \tag{23}$$

$$\mathbf{R}_{in}^{-1} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_n^2 + \lambda_j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^H . \tag{24}$$

Для очень слабого собственного шума имеем $\sigma_n^2 \ll \lambda_j$, для $j = 1, \ldots, N$. Тогда последнее выражение может быть переписано (опуская члены порядка выше второго)

$$\mathbf{R}_{in}^{-1} \approx \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^H - \sigma_n^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\lambda_j^2} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^H$$

или в векторном виде

$$\mathbf{R}_{in}^{-1} \approx \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{I}_N - \sigma_n^2 \mathbf{R}_i^{-1}) . \tag{25}$$

Используя (25), оптимальное выходное ОСШ даётся в форме

$$\rho_{\text{opt}} = \sigma_s^2 \, \mathbf{a}^H(\theta_s) \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{I}_N - \sigma_n^2 \mathbf{R}_i^{-1}) \mathbf{a}(\theta_s) , \tag{26}$$

и после некоторых вычислений

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_i^2} \mathbf{a}^H(\theta_s) \mathbf{F}_i \mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{F}_i^H \mathbf{a}(\theta_s) . \tag{27}$$

Из выражения (27) усиление оптимальной АР G в этом приближении может быть записано как

$$G = \frac{1}{N\nu_i} \mathbf{a}^H(\theta_s) \mathbf{F}_i \mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{F}_i^H \mathbf{a}(\theta_s) .$$

Если $r = 1$, $\mathbf{P}_i^{-1}$ даётся выражением (19) и G равно

$$G = \frac{1}{N\nu_i (1 - p_i^2)} [N + (N-2) p_i^2 - 2 p_i (N-1) \cos u_{si}] . \tag{28}$$

Из выражения (28) могут быть сделаны следующие наблюдения: 1. усиление оптимальной АР G есть монотонно уменьшающаяся функция коэффициента когерентности и мощности помехи; 2. для одинаковых коэффициентов когерентности выходное ОСШ уменьшается быстрее для более мощных помех.

Если апертура АР очень большая ($N \gg 1$), то из выражения (28) может быть получено для усиления оптимальной АР

$$G \approx \frac{1}{\nu_i(1-p_i^2)}(1+p_i^2-2p_i\cos u_{si})\,. \tag{29}$$

В этом случае G зависит лишь от амплитуды коэффициента когерентности между соседними приёмниками p_i и от углового расстояния между сигналом и помехой u_{si}. Если $u_{si}=0$, то имеем

$$G \approx \frac{1}{\nu_i}\,\frac{1-p_i}{1+p_i}\,.$$

Заметим, что выражения (28) и (29) справедливы, если $\sigma_n^2 \ll \lambda_j$ для $j=1,\,\ldots,\,N$. Легко показать, что это условие может быть сведено к двум следующим:

$$\nu_i \;\gg\; 1\,, \tag{30}$$

$$\nu_i(1-p_i^2) \;\gg\; 1\,. \tag{31}$$

Следовательно, выражение (28) несправедливо, если $p_i=1$ (что соответствует случаю полной пространственной когерентности помехи). В этом случае матрица $\mathbf{P}_i$ становится сингулярна и необратима. В этом случае G даётся из (3)

$$G = 1-\frac{N\nu_i|\mathbf{a}_i^H\mathbf{a}(\theta_s)|^2}{1+N\nu_i}\,, \tag{32}$$

что соответствует хорошо известному выражению

$$\rho=\rho_0\left[1-\frac{N\nu_i(N^2|F(u_{si})|^2)}{1+N\nu_i}\right], \tag{33}$$

где $|F(u_{si})|^2$ — нормализованная диаграмма направленности ($|F(0)|^2=1$).

На рис. 4 приведены зависимости G от $L_i/L_{\rm a}$ для различных ν_i и $r=1$. Аналитические решения (сплошные кривые) сравнивались с численными (штрихованные). Как видно из рис. 4, совпадения аналитических оценок и точных решений хорошие при достаточно больших интенсивностях помехи.

На рис. 5 показаны зависимости G при различных r от $L_i/L_{\rm a}$. Решения для $r>1$ были получены путём численного обращения ковариационной матрицы.

Заметим, что при увеличении параметра r выходное ОСШ также увеличивается, если $L_i/L_{\rm a}$ достаточно большое ($(L_i/L_{\rm a})>0{,}1$ в настоящем примере). С другой стороны, выходное ОСШ не зависит от r для очень малых величин $L_i/L_{\rm a}$.

5.3. Влияние углового расстояния

Особый интерес представляет поведение усиления оптимальной АР в зависимости от угла прихода помехового сигнала u_{si}, особенно в случае высокого входного ОПШ. Как показано на рис. 6, 7, угловое расстояние между помехой и сигналом сильно влияет на выходное ОСШ, особенно для больших величин параметра r.

На этих рисунках направление прихода полезного сигнала фиксировалось ($\theta_s=0^\circ$), а направление прихода помехи θ_i менялось. Можно видеть, что для некоторых углов прихода помехи и размеров апертуры $L_{\rm a}$ может быть выделена *критическая эквивалентная длина когерентности помехи*, соответствующая минимуму функции G. В случае $r=1$ для такой критической длины когерентности может быть получено аналитическое выражение путём приравнивания нулю первой производной выражения для G

$$p_{i\,\min}=\frac{1-\sin u_{si}}{\cos u_{si}}$$

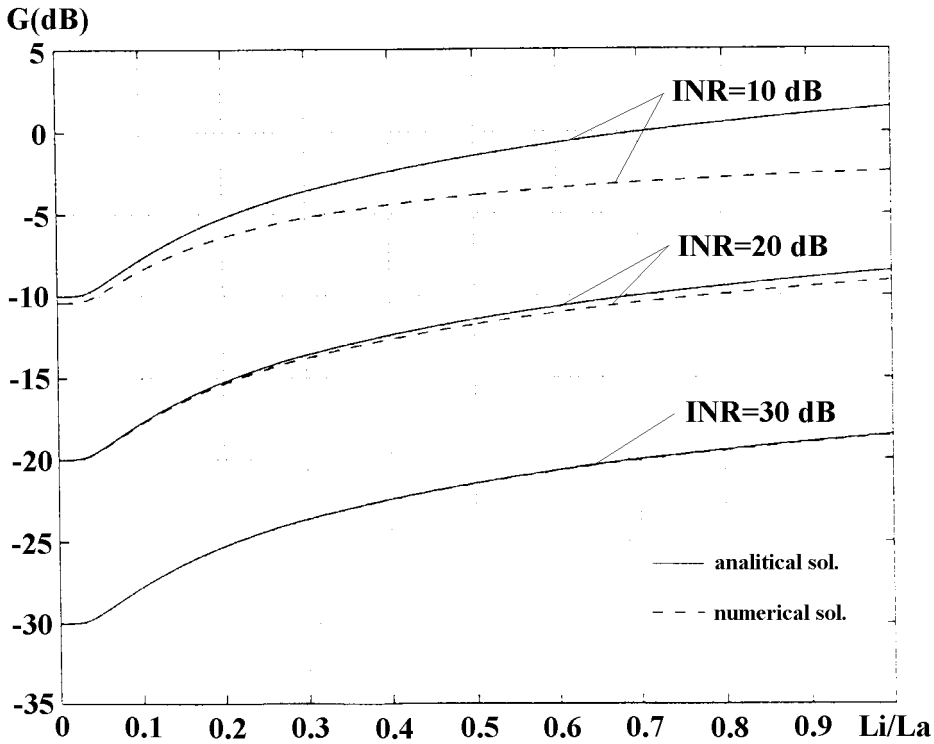


Рис. 4.

или в терминах $L_i/L_{\rm a}$

$$\left(\frac{L_i}{L_{\rm a}}\right)_{\min} = -\frac{1}{(N-1)\ln(p_{i\,\min})}\,. \tag{34}$$

Поведение критической величины $(L_i/L_{\rm a})_{\min}$ показано на рис. 8. Заметим, что эта критическая длина существует лишь для $p_{i\,\min} > 0$, что соответствует $0 \le u_{si} < \pi/2$ или $3\pi/2 < u_{si} \le 2\pi$. В представленном примере $(L_i/L_{\rm a})_{\min} > 0$, только если $\theta_i < 30\,\deg$. Окончательно из (34) мы заметим, что для фиксированной величины u_{si} уменьшение числа элементов антенны N ведёт к быстрому увеличению $(L_i/L_{\rm a})_{\min}$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известно, что оптимальный пространственный фильтр максимизирует выходное ОСШ для случая полностью пространственно когерентного на апертуре антенны сигнала и помех и белого собственного шума. В настоящей работе помехоустойчивость такого фильтра в случае потери когерентности сигналом и помехами была изучена. В качестве моделей пространственной когерентности использовались модели, соответствующие данным натурных экспериментов.

Был проведён анализ эффективности работы оптимальной/адаптивной антенной решётки. Показано, что качество работы резко ухудшается, особенно для крупноапертурных антенн и типичных масштабов пространственной когерентности. Доказано, что влияние частично когерентной помехи на помехоустойчивость оптимальных пространственных алгоритмов гораздо существеннее, чем влияние частично когерентного сигнала. Приведены результаты численного моделирования, подтверждающие теоретический анализ.

Эта работа была поддержана грантом ИНТАС № 96-2352 и грантом МЦФПИН.

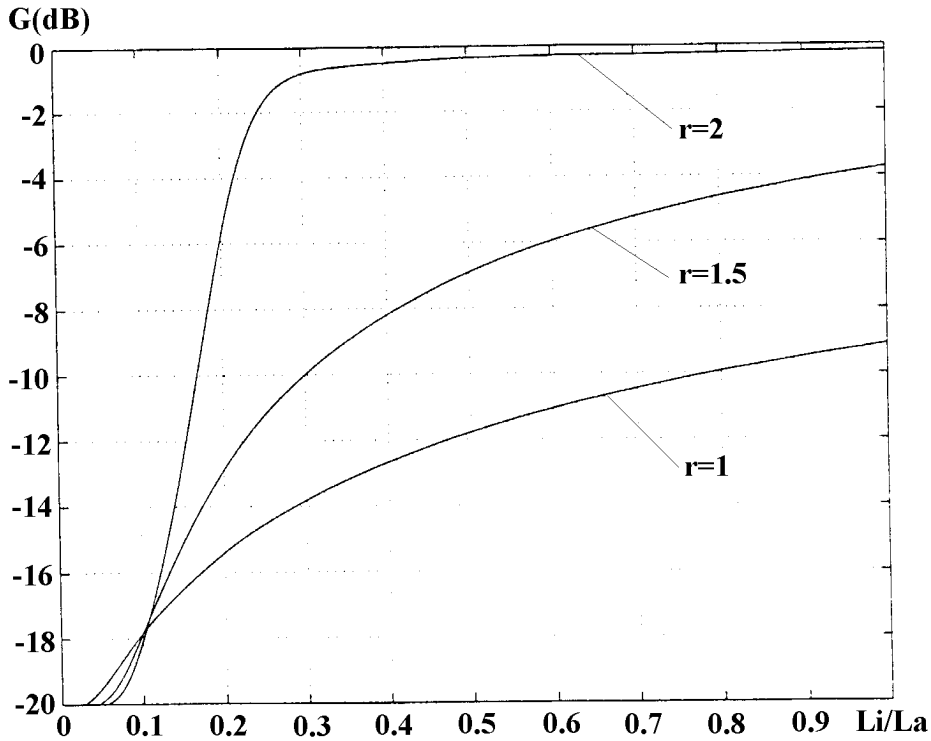

G(dB)
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Li/La
r=2
r=1.5
r=1

Рис. 5.

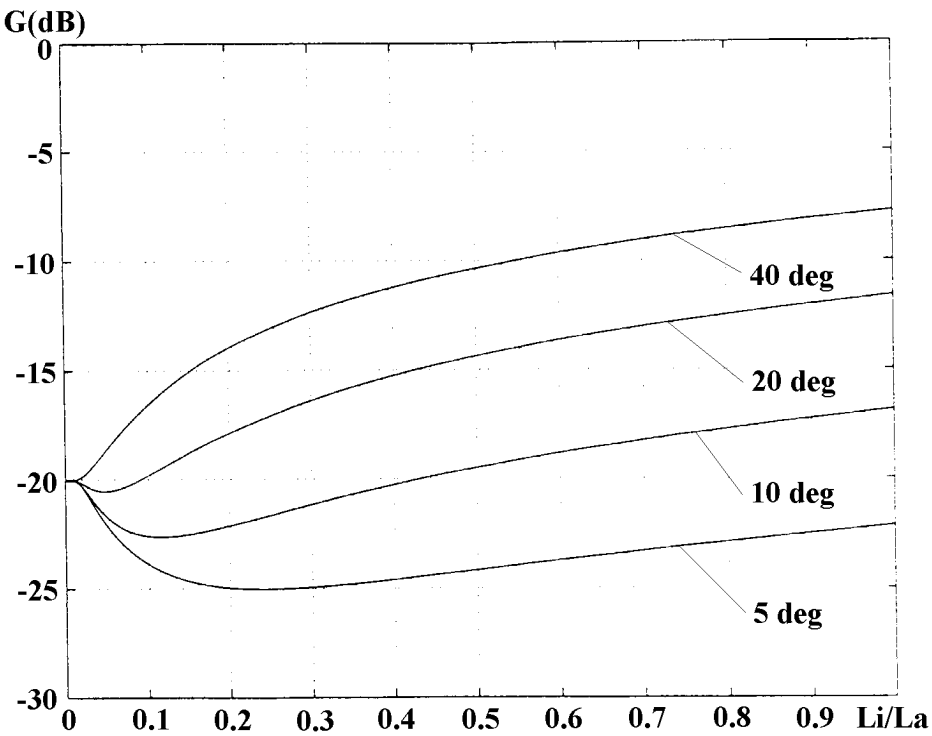

G(dB)
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Li/La
40 deg
20 deg
10 deg
5 deg

Рис. 6.

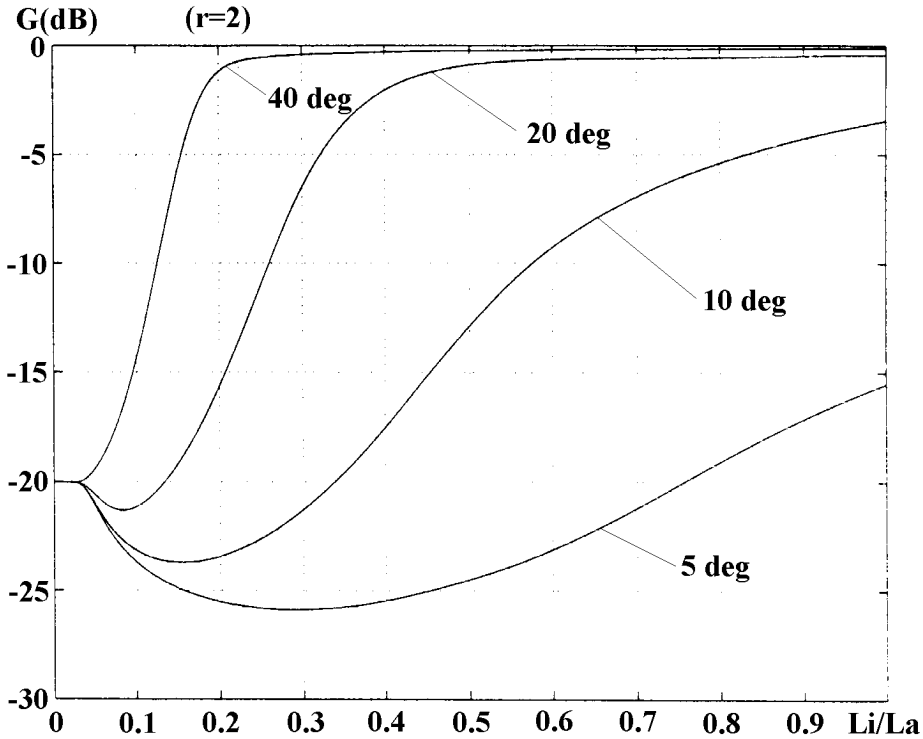


Рис. 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vural A. M. //IEEE Trans. on Aerospace and Elect. Syst., 1979. V. AES-15. № 1. P. 76.
2. Cox H. //J. of the Acoust. Soc. of America, 1973. V. 54. P. 1743.
3. Morgan D. R., Smith T. M. //J. of the Acoust. Soc. of America, 1990. V. 87. № 2. P. 737.
4. Serebryakov G. V., Sidorovich D., and Meclenbräuker C. — In: Proc. of Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP-95, Detroit, 1995. V. 5. P. 3016.
5. Малеханов А. А. и Серебряков Г. В. //Радиотехника и электроника, 1993. № 6. С. 1069.
6. Gammelsaeter. — In: *Underwater acoustic and signal processing,* Proc. of the NATO Advanced Study Inst., Copenhagen, 1980. /Ed. by L. Bjorno, D. Reidel. — Dordrecht-Boston, 1981. P. 307.
7. Monzingo R. A. and Miller T. W. Introduction to Adaptive Arrays. — New York: Wiley, 1980.
8. Dashen R., Flatte S. M., and Reynolds S. A. //J. of the Acoust. Soc. of America, 1985. V. 77. P. 1716.
9. Carey W. M., Gereben I. B., and Brunson B. A. //J. of the Acoust. Soc. of America, 1987. V. 81. P. 244.

Политехнико ди Торино,
Турин, Италия;
НИИ ПМК при Нижегородском
государственном университете, Россия

Поступила в редакцию
17 октября 1997 г.

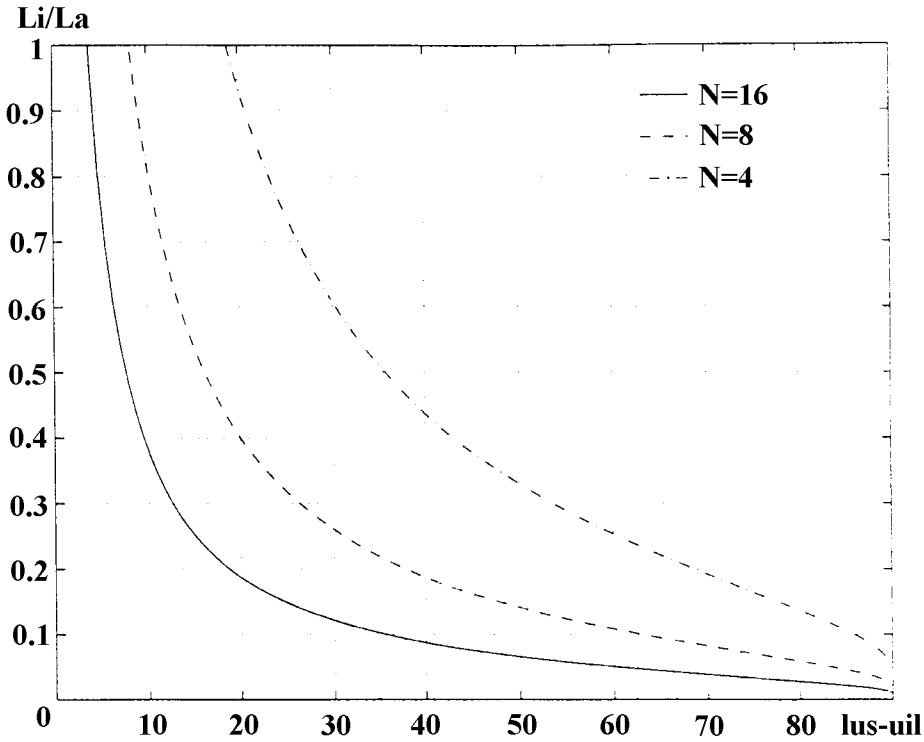


Рис. 8.

SIGNAL COHERENCE LOSS EFFECTS ON OPTIMUM–ADAPTIVE ARRAYS PERFORMANCE

G. Montalbano and G. Serebryakov

Optimum–adaptive array processing is generally analyzed and used assuming perfectly known wavefronts. Though several applications involve propagation media that are neither isotropic, nor homogeneous, nor deterministic and/or non-rigid arrays, such as SONAR and underwater communication systems. In this cases the wavefronts may result randomly distorted. Herein we intend to analyze the performance of an optimum–adaptive narrow band array processor when desired signal and/or interference undergo a spatial coherence degradation caused by the transmission channel. The effects of reduced spatial coherence over the array aperture, for both signal and interference cases, are evaluated in terms of loss of output signal-to-noise-plus-interference ratio (SINR) with respect to the ideal case of a fully coherent signal and white noise only. For this purpose, analytical expressions are derived considering several models of spatial coherence loss. Finally, this theoretic analysis is supported by several numerical results.

УДК 537.87

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ТРАНСФОРМАЦИЯ ЧАСТОТНО–МОДУЛИРОВАННОГО ИМПУЛЬСА В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОМ ВОЛОКНЕ

И. О. Золотовский, Д. И. Семенцов

Для гауссова частотно–модулированного импульса, распространяющегося в двухмодовом периодическом волокне, исследованы особенности трансформации временных огибающих модовых составляющих импульса с учётом материальной и межмодовой дисперсии и различных типов возбуждения волокна.

Вопросам распространения и преобразования мод в волоконных световодах с различным профилем показателя преломления в сечении световода, но однородных по его длине, посвящено достаточно много работ [1, 2]. Важным типом неоднородности является также периодическое по длине волновода возмущение, широко используемое в планарных пассивных и активных волноводах [3–5]. Интерес к периодическим волокнам связан с возможностью более эффективного управления лазерным излучением как в стационарных, так и импульсных режимах распространения. В [6, 7] показана возможность сжатия гауссова импульса в линейном и нелинейном режимах его распространения в периодическом двухмодовом волокне в условиях фазового синхронизма мод, формирующих импульс. В настоящей работе исследуются особенности трансформации гауссова частотно–модулированного импульса, обусловленные эффективной дисперсией периодического двухмодового волоконного световода, и условия максимальной компрессии импульса.

1. Рассмотрим двухмодовое волокно с показателем преломления, зависящим от координат следующим образом:

$$n^2(r,z) = n_0^2\{1 - f(r)[1 + \gamma\varphi(z)]\}, \tag{1}$$

где n_0 — показатель преломления на оси волокна; функции $f(r)$ и $\varphi(z)$ определяют распределение оптической неоднородности по сечению и длине волокна; параметр $\gamma \ll 1$ определяет глубину модуляции диэлектрической проницаемости по длине волокна. Пусть на вход такого волокна $z = 0$ подаётся гауссов частотно–модулированный импульс. Поле в световоде представим в виде суперпозиции двух мод:

$$E(t,r,z) = \frac{1}{2}\sum_j \{e_j R_j(r) A_j(t,z) \exp\left[i(\omega_0 t - \beta_j z)\right] + \text{к.с.}\}\,, \tag{2}$$

где β_j — константа распространения j-моды; $R_j(r)$ описывает распределение поля моды по сечению волновода; e_j — единичные векторы поляризации мод; $A_j(t,z)$ — временные огибающие двух собственных мод возмущённого периодичностью волокна; ω_0 — центральная частота вводимого волнового пакета. Эффективная связь между распространяющимися в волокне модами имеет место при условии их фазового синхронизма, которое с учётом периодичности волокна и импульсного его возбуждения должно выполняться на центральной частоте и имеет вид $\delta(\omega_0) = 0$, где

$$\delta(\omega) = \beta_1(\omega) - \beta_2(\omega) - 2\pi\iota/\Lambda, \tag{3}$$

Λ —период функции $\varphi(z)$, ι —номер гармоники разложения этой функции в ряд Фурье. В однородном по длине двухмодовом волокне выполнение условия фазового синхронизма $\beta_1(\omega) - \beta_2(\omega) = 0$ не может

быть реализовано, ввиду различия констант распространения в диапазоне рабочих частот (например, для мод LP_{01} и LP_{02}). Использование периодичности позволяет легко добиться выполнения условий фазового синхронизма на одной из гармоник функции $\varphi(z)$. В области параметров, где условие фазового синхронизма близко к выполнению, уравнения связанных волн для временных огибающих мод в импульсе, записанные в координатах бегущего времени $\tau = t - z/u$ с учётом материальной дисперсии, характеризуемой параметром d [8], имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{1}{\upsilon_1}\frac{\partial A_1}{\%}\partial\tau - i\frac{d}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial\tau^2} = -i\sigma_{12}A_2\exp(i\delta z), \\ &\frac{\partial A_2}{\partial z} + frac1\upsilon_2\frac{\partial A_2}{\partial\tau} - i\frac{d}{2}\frac{\partial^2 A_2}{\partial\tau^2} = -i\sigma_{21}^* A_1\exp(-i\delta z). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь параметры $\upsilon_j^{-1} = (u_1 - u_2)/u_j(u_1 + u_2)$, а u_j — групповые скорости мод; σ_{ij} —коэффициенты модовой связи, определяемые интегралами перекрытия профильных модовых функций:

$$\sigma_{ij} = \left(k^2\varepsilon_0\gamma\int e_i e_j f(r) R_i^* R_j r dr\right)\cdot\left(2\beta_i\int R_i^* R_j r dr\right)^{-1}, \tag{5}$$

где $k = \omega/c$, ω и c — частота и скорость света в вакууме.

Начальные временные огибающие модовых амплитуд A_j импульса, подаваемого на вход волокна, определяются типом его возбуждения и могут быть представлены в виде $A_j(\tau, 0) = A_{j0}\psi(\tau, \alpha)$. Наиболее часто используются одномодовое возбуждение, при котором $A_1(\tau, 0) = A_{10}\psi(\tau, \alpha)$, $A_2(\tau, 0) = 0$ (или наоборот), и двухмодовое, при котором $A_2(\tau, 0) = \xi A_1(\tau, 0)$. Для $\xi = \pm 1$ имеет место симметричное или асимметричное возбуждение, соответственно. Временная функция гауссова частотно–модулированного импульса длительностью τ_0 имеет вид

$$\psi(\tau, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}(1 + i\alpha\tau_0^2)\right], \tag{6}$$

где α характеризует скорость частотной модуляции [2].

Введём характерные длины — дисперсионную $L_{\rm d} = \tau_0^2/d$, групповой расстройки $L_{\rm g} = \tau_0\upsilon$, где $2\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$, и межмодового взаимодействия $L_\sigma = 1/\sigma$. В рассматриваемом нами случае $L_\sigma \ll L_{\rm d}$ и $L_\sigma \ll L_{\rm g}$, поэтому в отсутствие потерь изменение мощности импульса на длине L_σ, обусловленное материальной дисперсией волокна и дисперсией групповых скоростей мод, можно считать пренебрежимо малым. Следовательно, на длине L_σ выполняется условие $|A_1|^2 + |A_2|^2 \cong \text{const}$, из которого следует равенство $\sigma_{12} \cong \sigma_{21}^* \equiv \sigma$ и которое требует соответствующей нормировки профильных функций R_j [9]. С учётом сказанного решение уравнений (4) для временной огибающей j-й моды в области фазового синхронизма ($\delta \cong 0$) может быть представлено в виде

$$A_j = (-1)^{j+1}a_1(\tau, z)\exp(i\sigma z) + a_2(\tau, z)\exp(-i\sigma z), \tag{7}$$

где $a_{1,2}$ — медленно меняющиеся с координатой z амплитуды. Подставляя (7) в (4), получаем следующие уравнения для амплитуд:

$$\frac{\partial a_f}{\partial z} - \frac{i}{2}\left(d + \frac{(-1)^f}{\upsilon_1\upsilon_2\sigma}\right)\frac{\partial^2 a_f}{\partial\tau^2} = 0, \quad f = 1,\ 2. \tag{8}$$

Таким образом, исходный импульс может быть представлен как комбинация парциальных импульсов a_1 и a_2, эффективная дисперсия для которых определяется выражением $D_f = (-1)^f d_{\rm m} + d$, где

введена межмодовая дисперсия групповых скоростей мод $d_{\rm m} = 1/\upsilon_1\upsilon_2\sigma$. Знак параметра d определяется типом реализуемой материальной дисперсии на центральной частоте импульса — нормальной или аномальной. При некотором подборе параметров $\upsilon_{1,2}$, σ и d для одного из парциальных импульсов можно создать волноведущую среду с нулевой эффективной дисперсией, для которой на рабочей частоте выполняется условие $D_f = 0$.

2. Зависимость межмодовой дисперсии от параметров световода определим для градиентного волокна. Распределение показателя преломления по его сечению будем описывать функцией

$$f(r) = \left[\Delta_1(r/a) + \Delta_3(r/a)^3 + O(r/a)^5\right]^2, \tag{9}$$

где a — радиус сердцевины волокна, а $(\Delta_1 + \Delta_3)^2 = (1 - n_{\rm ob}^2/n_0^2)$, $n_{\rm ob}$ — показатель преломления оболочки волокна. Постоянная распространения соответствующей аксиально–симметричной LP_{0j}-моды в этом случае определяется выражением [10]

$$\beta_j = n_0 k \left[1 - \frac{\Delta_1 g_1}{n_0 ka} - \frac{\Delta_3 g_3}{(n_0 ka)^2}\right]^{1/2}, \tag{10}$$

где $g_1 = 2(2j-1)$, $g_3 = (2j-1)^2 + 3/2$. Учитывая (10), для межмодовой дисперсии LP_{01} и LP_{02} мод получаем

$$d_{\rm m} \cong \frac{1}{4\sigma}\left[\left(\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\omega}\right)^{-1} - \left(\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\omega}\right)^{-1}\right]^2 = \frac{4}{\rho^2\sigma}\left(\Delta_1^2 + \Delta_3\right)^2, \tag{11}$$

где $\rho = k^2a^2cn_0$. Для волокна с параболическим радиальным распределением показателя преломления ($\Delta_3 = 0$) радиальное распределение поля LP_{0j} моды задаётся в виде [9]

$$R_j = C_j L_{j-1}^{(0)}(2r^2/w^2)\exp(-r^2/w^2), \tag{12}$$

где эффективный радиус волокна $w = [2a/(n_0k\Delta_1)]^{1/2}$, $L_{j-1}^{(0)}$ — полиномы Лагерра, задаваемые для LP_{01} и LP_{02} мод выражениями $L_0^{(0)} = 1$ и $L_1^{(0)} = 1 - 2r^2/w^2$. С учётом приведённых соотношений для коэффициента связи указанных мод получаем $\sigma = \gamma\Delta_1/2a$. При этом выражение для эффективной дисперсии волокна может быть представлено следующим образом:

$$D_f = d\left[1 + (-1)^f(\omega_e/\omega)^4 \operatorname{sign} d\right], \tag{13}$$

где $\operatorname{sign} d$ — знаковая функция. Здесь также введена дисперсионная частота $\omega_e = (8\Delta_1^3c^2/\gamma\,|d|\,n_0^2\,a^3)^{1/4}$, на которой при заданном типе материальной дисперсии, т.е. определённом знаке параметра d, величина D_f обращается в нуль для одного из парциальных импульсов. На рис. 1 приведена зависимость эффективной дисперсии D_f от приведённой частоты ω/ω_e для парциальных импульсов a_1 (кривые 1 и 1′) и a_2 (кривые 2 и 2′) в случае нормальной и аномальной материальной дисперсии при $|d| = 10^{-26}$ с^2/м. Для периодического волокна с параболическим профилем показателя преломления и его параметров $\gamma = 10^{-5}$, $n_0 = 1{,}4$, $\Delta = 0{,}1$, $a = 5\cdot 10^{-6}$ м, дисперсионная частота имеет значение $\omega_e \cong 2{,}48\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. На частотах $\omega \gg \omega_e$ эффективная дисперсия для обоих парциальных импульсов определяется, в основном, материальной дисперсией волокна. С понижением частоты существенным оказывается вклад в D_f межмодовой дисперсии, которая приводит к её занулению для парциального импульса a_1 в случае нормальной материальной дисперсии ($d > 0$) и для парциального импульса a_2 — в случае аномальной ($d < 0$).

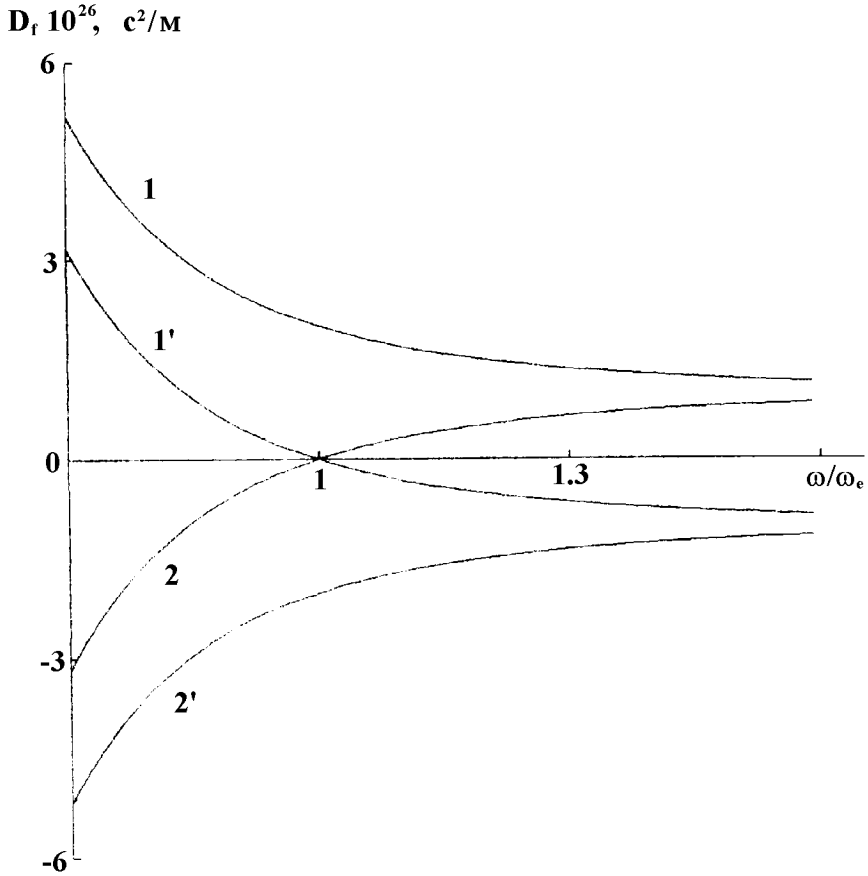


Рис. 1. Зависимость эффективной дисперсии для парциальных импульсов a_1 (кривые 1 и 1′) и a_2 (кривые 2 и 2′) от нормированной частоты ω/ω_e.

3. Решение системы (8) в общем виде может быть представлено следующим образом:

$$a_f = \frac{a_{f0}}{\sqrt{b_f}} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2 b_f^2} \pm i\theta_f\right], \quad f = 1, 2,$$

$$b_f = \left[(1 - \alpha D_f z)^2 + (z D_f/\tau_0^2)^2\right]^{1/2}, \tag{14}$$

$$\theta_f = \frac{1}{2b_f}\left[D_f z(\alpha^2 + \tau_0^{-4}) - \alpha\right]\tau^2 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{D_f z}{\tau_0^2(1 - \alpha D_f z)}\right],$$

где a_{f0} — начальные значения амплитуд парциальных импульсов. Используя (7) и (14), представим решение уравнений (4) для временных огибающих A_j в случае фазового синхронизма мод в матричной форме:

$$A_j = \frac{1}{2}\mathbf{T}_{ji} A_{i0}, \tag{15}$$

где элементы матрицы преобразования $\mathbf{T}$ определяются следующим образом:

$$T_{11} = T_{22} = \mu_1 + \mu_2 + i(\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad T_{12} = T_{21} = \mu_2 - \mu_1 - i(\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

$$\mu_f = \frac{1}{\sqrt{b_f}} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2 b_f^2}\right] \cos(\theta_f + \sigma z), \quad \vartheta_f = \mu_f \operatorname{tg}(\theta_f + \sigma z).$$

На основе полученного решения можно найти связь временных огибающих модовых интенсивностей $I_j = |A_j|^2$ с амплитудами временных огибающих на входе волокна

$$\left.\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix}\right\} = G_0 \left\{ \begin{matrix} [\mu_1 + \mu_2 + \xi(\mu_1 - \mu_2)]^2 + [\vartheta_1 - \vartheta_2 - \xi(\vartheta_1 + \vartheta_2)]^2 \\ [\mu_2 - \mu_1 + \xi(\mu_1 + \mu_2)]^2 + [\vartheta_1 + \vartheta_2 - \xi(\vartheta_1 - \vartheta_2)]^2 \end{matrix} \right. , \tag{16}$$

где $G_0 = I_0/4(1+\xi^2)$, $I_0 = |A_{10}|^2 + |A_{20}|^2$. Приведённые соотношения описывают трансформацию модовых временных огибающих частотно–модулированного гауссова импульса по мере его прохождения по волокну. В случае двухмодового симметричного или асимметричного возбуждения волокна ($\xi = \pm 1$) полный импульс представлен только одним из парциальных импульсов, поэтому поведение импульса определяется эффективной дисперсией D_f данного парциального импульса. При этом интенсивности модовых составляющих полного импульса одинаковы $I_1 = I_2 = I/2$ и

$$I = \frac{I_0}{b_f} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2 b_f^2}\right), \tag{17}$$

где $f = 1$ для асимметричного возбуждения и $f = 2$ для симметричного. Зависимость длительности импульса от пройденного по волокну пути в рассматриваемом случае даётся выражением $\tau_{\text{и}} = \tau_0 b_f$, которое с учётом (14) приводит к зависимости

$$\tau_{\text{и}}(z) = \tau_0 \left[(1 - \alpha D_f z)^2 + (z/L_f)^2\right]^{1/2}, \tag{18}$$

где $L_f = \tau_0^2/D_f$ — эффективная дисперсионная длина. Из (18) следует, что при $\alpha D_f < 0$ фазово–модулированный импульс расплывается по мере его прохождения по волокну, а при $\alpha D_f > 0$ — на начальном этапе сжимается, а затем расширяется. На длине волокна $z = L_{\text{c}}$, где $L_{\text{c}} = \dfrac{L_f \alpha \tau_0^2}{1 + \alpha^2 \tau_0^4}$ — длина компрессии, длительность импульса становится минимальной и равной $\tau_{\min} = \tau_0 [1 + \alpha^2 \tau_0^4]^{-1/2}$.

В случае одномодового возбуждения волокна суммарный импульс является комбинацией двух парциальных импульсов a_f и поведение каждого определяется соответствующей эффективной дисперсией D_f. Поэтому выражение для интенсивности суммарного импульса принимает вид

$$I = \frac{I_0}{2} \left[\frac{1}{b_1} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2 b_1^2}\right) + \frac{1}{b_2} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2 b_2^2}\right)\right]. \tag{19}$$

В этом случае длительность импульса может быть представлена комбинацией длительностей $\tau_1 = \tau_0 b_1$ и $\tau_2 = \tau_0 b_2$, каждая из которых имеет свою зависимость от координаты z, что приводит к более сложной зависимости $\tau_{\text{и}}(z)$ по сравнению с двухмодовым возбуждением при $\xi = \pm 1$. На рис. 2 (а, б) представлена зависимость относительной длительности импульса $\tau_{\text{и}}/\tau_0$ от приведённой координаты σz, полученная для симметричного и асимметричного двухмодового (а) и одномодового (б) типов возбуждения волокна при значениях параметров $\sigma = 10^2$ м$^{-1}$, $\tau = 10^{-12}$ с, $\alpha = 10^{-24}$ с$^{-2}$. В случае двухмодового возбуждения выбраны различные значения эффективной дисперсии $D_f = (3; 2; 1{,}5; 0; -1{,}5) \cdot 10^{-26}$ с^2/м (кривые 1–5). Минимальная длительность импульса при $\alpha D_f \le 0$ имеет место на входе в волокно, а при $\alpha D_f > 0$ — на длине компрессии $z = L_{\text{c}}$, которая с увеличением эффективной дисперсии уменьшается. При одномодовом возбуждении волокна поведение импульса при заданных выше параметрах определяется соотношением эффективных дисперсий парциальных импульсов D_f. Кривым 1–5 соответствуют следующие значения D_1 и D_2: (1,5 и 0; 1,5 и 0,5; 1,5 и 1,5; 1,5 и 3; 1,5 и

-3)·10^{-26} с^2/м. Согласно проведённому анализу, максимальная компрессия одномодового импульса достигается в случае $D_1 \cong D_2$ и $\alpha D_f > 0$, т. е. для межмодовой дисперсии, пренебрежимо малой по сравнению с материальной дисперсией волокна. При этом максимальная компрессия определяется величиной $\tau_0/\tau_{\min} = [1+\alpha^2\tau_0^4]^{1/2}$ и имеет место на длине $z \cong L_d\alpha\tau_0^2/(1+\alpha^2\tau_0^4)$. При росте межмодовой дисперсии по отношению к материальной компрессия убывает и стремится к значению $\tau_0/2\tau_{\min}$ при $d_{\mathrm{m}} \gg d$.

На рис. 3 представлена зависимость относительной суммарной интенсивности импульса $\eta = I/I_0$, где $I = I_1 + I_2$ и $I_0 = I_{10} + I_{20}$, от приведённой координаты σz, полученная для симметричного и асимметричного двухмодового (а) и одномодового (б) типов возбуждения волокна. Кривые, полученные на основе соотношений (17) и (19), соответствуют параметрам, используемым на рис. 2, и значению $\tau = 0$. Так как в отсутствие потерь полная энергия импульса не изменяется и можно принять, что $I\tau_f = \mathrm{const}$, то на длине $z = L_{\mathrm{c}}$, где имеет место максимальное сжатие импульса, $\eta(L_{\mathrm{c}})$ достигает своего максимума. Полученные зависимости наглядно демонстрируют влияние эффективной дисперсии на трансформацию импульса. Так, при двухмодовом возбуждении волокна кривым 1–3 соответствует режим компрессии импульса, а кривой 5 — его расплывание. При одномодовом возбуждении кривым 1, 3 и 4 соответствует режим компрессии импульса, кривой 2 — двухкратное сжатие, а кривой 5 — слабое начальное уширение с последующим сжатием.

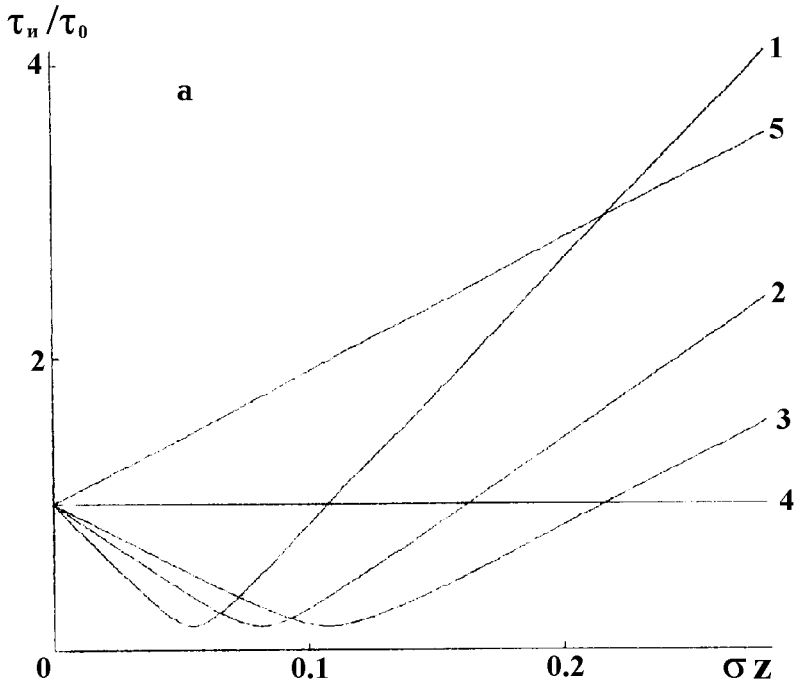
Приведённый анализ показывает, что варьируя параметрами волокна и вводимого импульса, можно управлять в широком диапазоне частот величиной и знаком эффективной дисперсии световода и динамикой преобразования распространяющихся импульсов. Наличие широкого набора параметров, управляющих дисперсионными свойствами волокна, делает перспективным использование двухмодовых периодически неоднородных волокон в качестве удобного модельного объекта для проведения различного рода экспериментальных исследований. Например, возможно создание двухмодового волокна, в котором минимум дисперсии будет совпадать с минимумом потерь кварцевых волокон в области $\lambda \cong 1{,}55$ мкм, что значительно расширяет возможности использования таких волокон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М., 1984.
2. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М., 1988.
3. Прохоров А. М., Смоленский Г. А., Агеев А. Н. //УФН, 1984. Т. 143. № 1. С. 33.
4. Семенцов Д. И., Широков А. А., Шутый А. М. //Радиотехника и электроника, 1994. Т. 39. Вып. 10. С. 1524.
5. Золотовский И. О., Семенцов Д. И. — В сб.: Тезисы докл. 15 Всерос. конф. “Новые магнитные материалы микроэлектроники". — М., 1994.
6. Выслоух В. А., Матвеева Т. А. //Препринт № 24. — М.: ФФ МГУ, 1985.
7. Выслоух В. А., Геворкян Л. П. //Изв. АН СССР, 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 323.
8. Золотовский И. О., Семенцов Д. И. //Опт. и спектр., 1997 (в печати).
9. Унгер Х. Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. — М., 1980.
10. Вешев Н. А. //Опт. и спектр., 1993. Т. 75. Вып. 1. С. 88.

Государственный университет,
Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию
22 июля 1997 г.



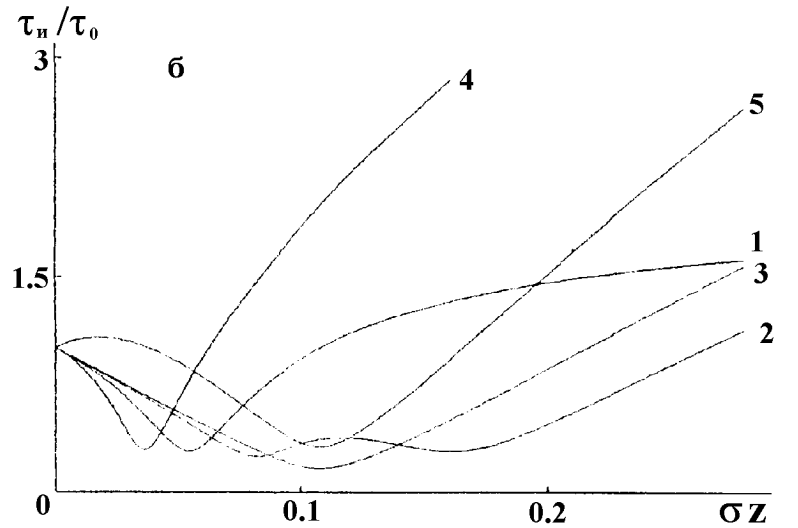
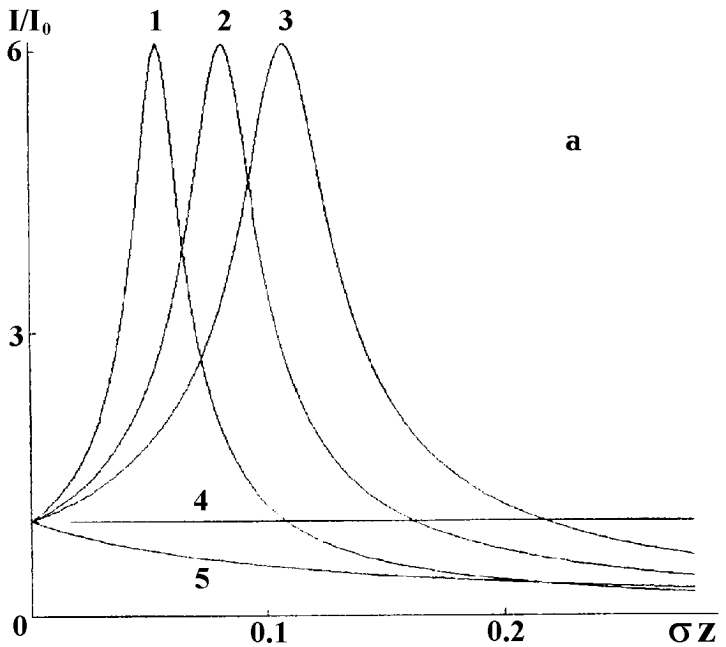


Рис. 2. Зависимость нормированной длительности импульса $\tau_и/\tau_0$ от приведённой координаты σz для двухмодового (а) и одномодового (б) типов возбуждения.



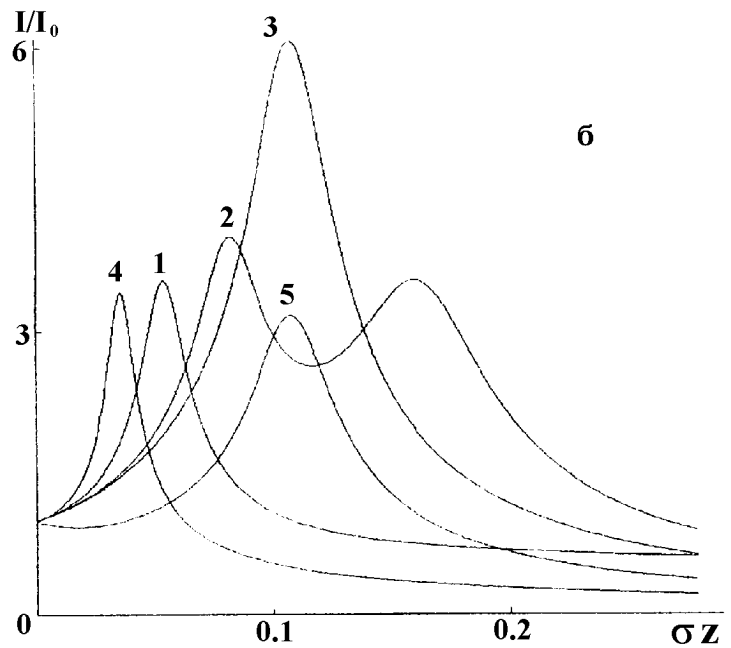


Рис. 3. Зависимость нормированной интенсивности импульса I/I_0 от приведённой координаты σz для двухмодового (а) и одномодового (б) типов возбуждения.

PROPAGATION AND TRANSFORMATION OF A FREQUANCY–MODULATED PULSE IN PERIODICALLY NONUNIFORM FIBER

I. O. Zolotovsky, D. I. Sementsov

For a gaussian frequancy–modulated pulse propagated in two-mode periodic fiber, we have studied the transformation of time envelopes of pulse mode components with an account of the material and intermode dispersion as well as different types of fiber excitation.

УДК 537.52

КОНКУРЕНЦИЯ МОД В НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ МОЩНЫХ ГИРОТРОНОВ

М. Ю. Глявин, В. Е. Запевалов, А. Н. Куфтин

Приводится метод анализа нестационарных процессов при изменении ускоряющего напряжения. Дано теоретическое обоснование наблюдавшейся в экспериментах генерации на паразитных модах при пониженном напряжении. Полученные результаты позволяют оценить возможность получения одномодовых колебаний различной частоты в гиротронах с резонаторами большого диаметра.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в плазменных исследованиях (в частности, на установках для управляемого термоядерного синтеза) требуются мощные источники когерентного электромагнитного излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн. Наиболее мощными генераторами в этом диапазоне являются гиротроны, в которых используются резонаторы, представляющие собой отрезки слабонерегулярных волноводов [1]. Работа на высоком уровне выходной мощности (около 1 МВт) требует развитого пространства взаимодействия (отношение $D/\lambda >> 1$) для снижения удельных тепловых нагрузок на стенки резонатора, однако при этом сгущается спектр собственных частот резонансной системы и условия самовозбуждения могут выполняться для нескольких мод [2–4]. Отсюда возникает необходимость анализа возможности получения устойчивой одномодовой генерации с высоким КПД в таких системах. Условия, при которых в гиротроне возникает взаимодействие мод, имеют вид

$$|\omega_1 - \omega_2| \leq \Delta\omega_{\text{р}} \tag{1а}$$

для несинхронного и

$$\begin{cases} |2\omega_0 - \omega_1 - \omega_{-1}| \leq \frac{\omega_0}{Q} \\ m_1 + m_{-1} = 2m_0 \end{cases} \tag{1б}$$

для синхронного взаимодействия мод. Здесь ω_s и m_s — соответственно частоты и азимутальные индексы взаимодействующих мод, индекс “0"относится к центральной моде, индексы “± 1-— к высокочастотному и низкочастотному сателлитам, Q — добротность колебаний, $\Delta\omega_{\text{р}} \sim 1/T_{\text{пр}}$ — ширина полосы циклотронного резонанса, обратно пропорциональная времени пролёта электронов через резонатор. Этим условиям, в частности, удовлетворяют моды $\text{TE}_{m,\text{р}}$ (р — радиальный индекс), отличающиеся только азимутальным индексом. Проблема селекции таких мод в гиротроне является наиболее сложной, т. к. селекцию мод по радиальному индексу обычно удаётся обеспечить подбором радиуса тонкого трубчатого электронного пучка. Поскольку практически все мощные гиротроны, используемые в плазменных экспериментах, работают в импульсном режиме, возникает необходимость анализа многомодовых процессов на фронте импульса, когда вероятность возбуждения паразитных мод является наибольшей.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для решения этой задачи использовалась аксиально–симметричная модель гиротрона в пренебрежении разбросом скоростей электронов и радиусов ведущих центров электронных орбит в трубчатом пучке, а также полями пространственного заряда. Нестационарные процессы в многомодовом гиротроне описываются самосогласованной системой уравнений (см., напр., [4–6]), состоящей из укороченного уравнения движения электронов во внешнем магнитном поле и полях существующих в гиротроне мод

$$\frac{da}{d\zeta} - i(\Delta + |a|^2 - 1)a = i\left\{\sum_s a^{n_s-1} F_s f_s e^{i(\Psi_s - n_s\vartheta_0)}\right\}^* , \quad a(0) = 1\,, \tag{2}$$

уравнений возбуждения мод

$$\begin{aligned} \frac{dF_s}{dt'} &= \left(\Phi_s' - \frac{n_s}{2I_sQ_s}\right) F_s\,, \\ \frac{d\Psi_s}{dt'} &= \Phi_s'' + \frac{\omega_s}{\omega} - 1 \end{aligned} \tag{3}$$

и выражения, определяющего приведённый фактор возбуждения мод электронным пучком. Комплексный фактор возбуждения $\Phi_s = \Phi_s' + i\Phi_s''$ характеризует комплексную мощность взаимодействия электронного пучка с полем s-й моды

$$\Phi_s = -i\frac{I_s}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{F_s}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\zeta_k} a^{n_s^*} f_s^* e^{-i(\Psi_s - n_s\vartheta_0)}\,d\zeta\,d\vartheta_0\,d\varphi\,. \tag{4}$$

Здесь комплексная величина a описывает изменение энергии и фазы вращательного движения электронов под действием высокочастотного поля, интегрирование по ζ ведётся по всей длине взаимодействия, $t' = \omega t$, t — реальное время, ω — опорная частота, в качестве которой принята частота рабочего типа колебаний, $\zeta = \dfrac{\beta_{\perp 0}^2}{2\beta_{\|0}}\dfrac{\omega z}{c}$ — приведённая продольная координата, $\Delta = \dfrac{2}{\beta_{\perp 0}^2}\dfrac{(\omega - \omega_H)}{\omega}$ — расстройка циклотронного резонанса, $\beta_{\perp,\|} = \dfrac{V_{\perp,\|}}{c}$ — безразмерные компоненты скорости, F_s и Ψ_s — соответственно амплитуда и фаза s-й моды, φ — азимутальная координата ведущих центров орбит электронов, ϑ_0 — начальная фаза электронов на входе в резонатор, f_s — функция, описывающая распределение высокочастотных полей мод в резонаторе, n_s — номер гармоники s-й моды, I_s — параметр тока, пропорциональный постоянной составляющей тока пучка. Определение F_s, Ψ_s и I_s дано, например, в [5]. Задача исследования режимов генерации подробно решена в [4], где показано, что в гиротроне может существовать как устойчивая одномодовая генерация рабочей моды, так и генерация паразитной моды или нескольких мод одновременно, в зависимости от тока пучка, расстройки циклотронного резонанса, спектра резонатора и начальных амплитуд взаимодействующих мод. Типичные сценарии установления стационарных режимов исследованы в работе [6]. Целью данной работы является расчёт сценария переходных процессов в гиротроне на фронте импульса ускоряющего напряжения, когда наиболее вероятно создание благоприятных условий для возбуждения паразитных мод.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Численное моделирование многомодовых процессов в мощном импульсном гиротроне с близкой к реальной продольной структурой высокочастотного поля проводилось при аппроксимации продольной структуры полей всех мод гауссовой функцией $f_s = e^{-(2\zeta/\mu)^2}$, где $\mu = \zeta(L)$ — приведённая длина

резонатора. Вычисления проводились по следующему алгоритму: после ввода технических параметров исследуемого гиротрона выбиралась оптимальная по КПД рабочего типа колебаний расстройка циклотронного резонанса, в окрестности рабочей моды выбирались моды с наибольшими факторами возбуждения, для данной группы мод рассчитывались стартовые токи в первой точке на фронте импульса, мода с наименьшим стартовым током считалась "центральной"и далее решалась задача установления стационарной генерации при синхронном или несинхронном (в зависимости от густоты спектра взаимодействующих мод) взаимодействии мод. Поскольку время установления колебаний $t_{\text{у}} \ll t_{\text{ф}}$ ($t_{\text{ф}}$ — длительность фронта импульса), можно считать напряжение постоянным при расчёте стационарных амплитуд взаимодействующих мод. Если амплитуды всех взаимодействующих мод достигали уровня 0,1 от стартового значения при отрицательной производной, происходил переход в следующую точку на фронте импульса, расчёт стартовых токов и т. д. Если после выхода на стационар амплитуды мод превышали стартовые значения, то стационарные значения амплитуд использовались как стартовые в следующей точке на фронте импульса. Поскольку сценарий переходного процесса существенно зависит от вольт—амперной характеристики гиротрона, при расчётах использовались типичные ВАХ электронных пушек реальных приборов, полученные экспериментально на прототипах промышленных гиротронов [7].

Для гиротрона с частотой выходного излучения 140 ГГц рассматривалось несколько типов резонаторов: на моде $\text{TE}_{22,5}$ с характерными длинами $\mu_1 \cong 8$ и $\mu_2 \cong 12$ и на моде $\text{TE}_{22,6}$ с характерной длиной $\mu \cong 8$. Все гиротроны рассчитывались на рабочее напряжение 70 кВ, ток 40 А, что обеспечивает уровень выходной мощности в районе 1 МВт. Определяющим фактором при определении начального типа колебаний является превышение током пучка стартового тока моды. На рис. 1 приведена для одного из случаев эволюция зон самовозбуждения мод. Как следует из этого рисунка, при расстройке циклотронного резонанса, соответствующей оптимальному поперечному КПД (около 55%), и малом ускоряющем напряжении наименьшим стартовым током обладает паразитная мода $\text{TE}_{23,5}$, а при номинальном напряжении условия самовозбуждения выполнены как для рабочей моды $\text{TE}_{22,5}$, так и для паразитных мод. При этом тип колебаний в рабочей точке существенным образом зависит от сценария переходного процесса. Согласно расчётам, типичным является следующий сценарий: при напряжении, соответствующем примерно половине рабочего, происходит возбуждение моды с тем же радиальным индексом, но более высоким азимутальным индексом (более высокочастотная мода), устойчивая одномодовая генерация этой моды в полосе 10—15 кВ, после чего, при дальнейшем увеличении напряжения, её амплитуда быстро спадает и происходит нарастание амплитуды рабочей моды, которая достигает наибольшего значения на полке импульса. Соответствующий переходный процесс на фронте импульса в гиротроне с рабочей модой $\text{TE}_{22,5}$, при характерной длине резонатора μ_1, приведён на рис. 2. В качестве временного параметра используется безразмерная переменная $\tau = \omega t/Q$, добротности всех возбуждаемых мод приняты равными. Приведённый сценарий хорошо согласуется с данными экспериментального исследования гиротрона на рабочей моде $\text{TE}_{22,5}$. Действительно, при напряжении 40 кВ (примерно половина от рабочего напряжения) в эксперименте наблюдалась устойчивая генерация на моде $\text{TE}_{23,5}$ ($\text{TE}_{m+1,\text{p}}$), срыв колебаний которой происходил при напряжении 50—55 кВ, в зависимости от величины тока пучка. При увеличении напряжения до 70 кВ наблюдалась генерация на моде $\text{TE}_{22,5}$ с КПД, близким к расчётному (рис. 3). Подобный сценарий переходных процессов на фронте импульса ускоряющего напряжения получен для гиротрона на моде $\text{TE}_{22,6}$ с характерной длиной $\mu \cong 8$. Подробные результаты экспериментального исследования гиротрона на моде $\text{TE}_{22,6}$ изложены в [8].

Как следует из расчётов, при превышении напряжения на 10% над расчётным происходит срыв колебаний рабочей моды $\text{TE}_{m,\text{p}}$ и переход на устойчивую одномодовую генерацию более низкочастотной моды с тем же радиальным, но на единицу меньшим азимутальным индексом ($\text{TE}_{m-1,\text{p}}$). Если в расчётах не учитывать скоростной разброс электронов, имеющий место в гиротроне, то получается аналогичный сценарий переходных процессов при некотором увеличении стационарных амплитуд мод

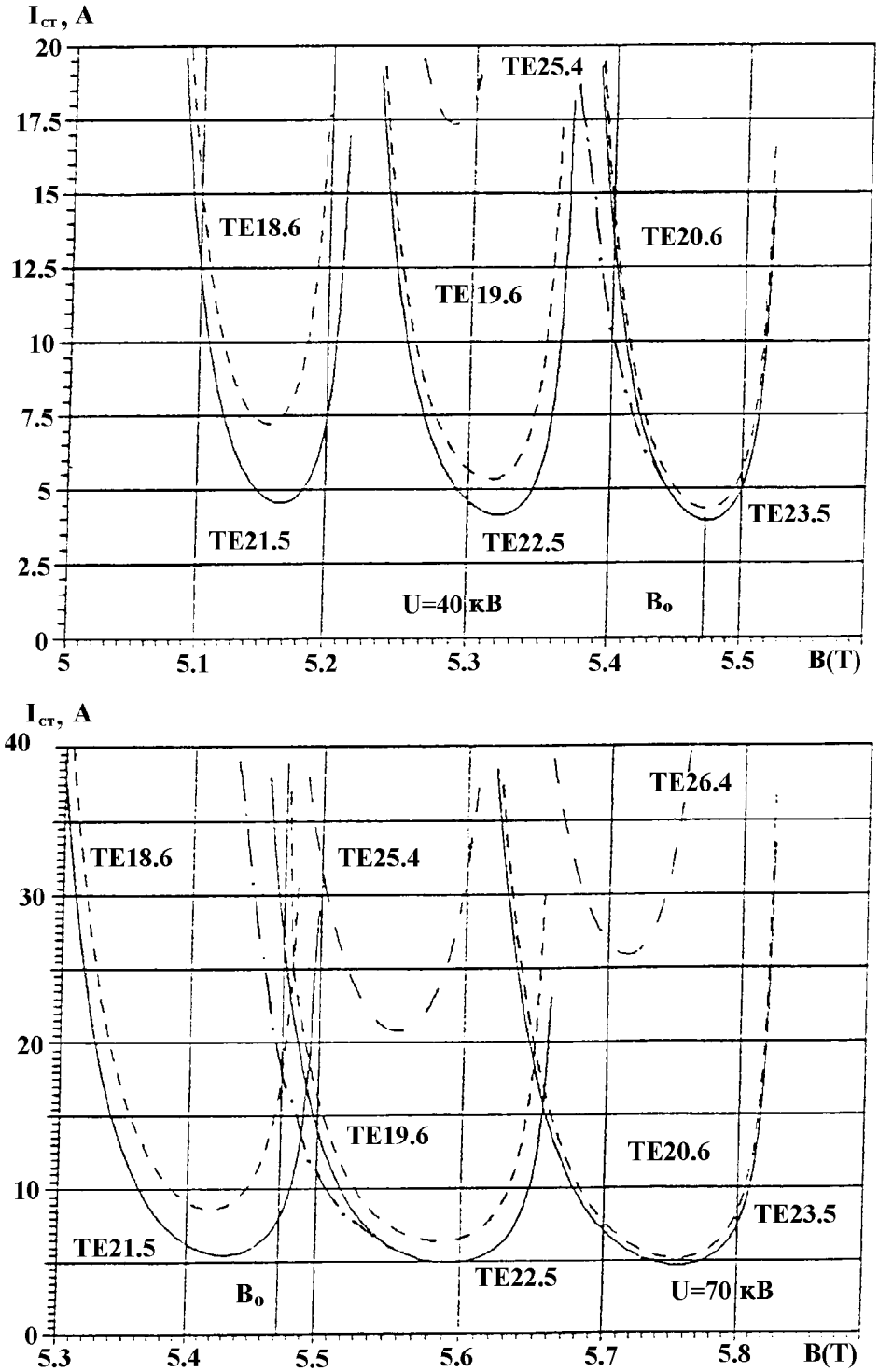


Рис. 1. Эволюция зон самовозбуждения мод в гиротроне при изменении ускоряющего напряжения. Штрих-пунктирная линия соответствует срыву автоколебаний.

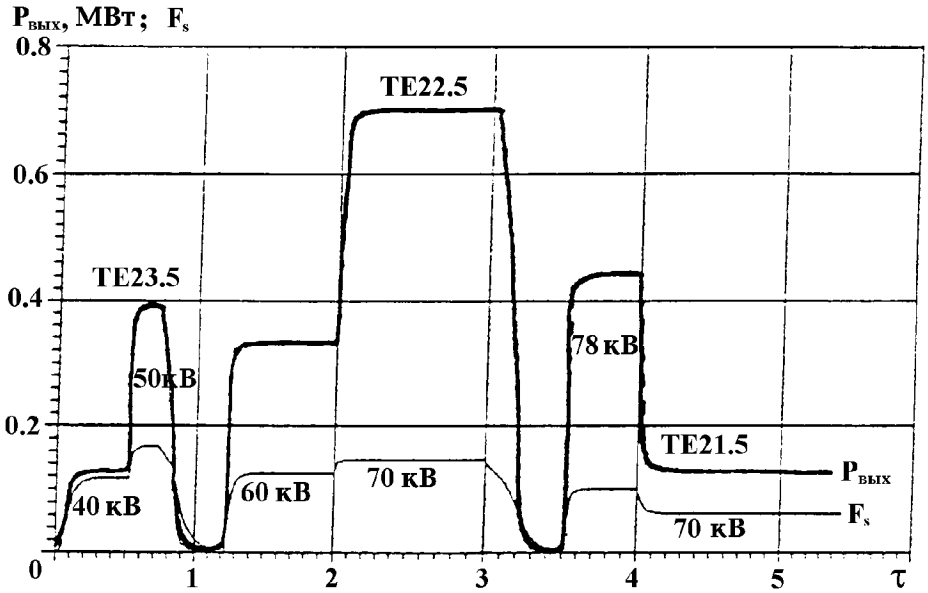


Рис. 2. Переходные процессы на фронте импульса ускоряющего напряжения гиротрона. F — амплитуда ВЧ поля мод, Pout — выходная мощность гиротрона.

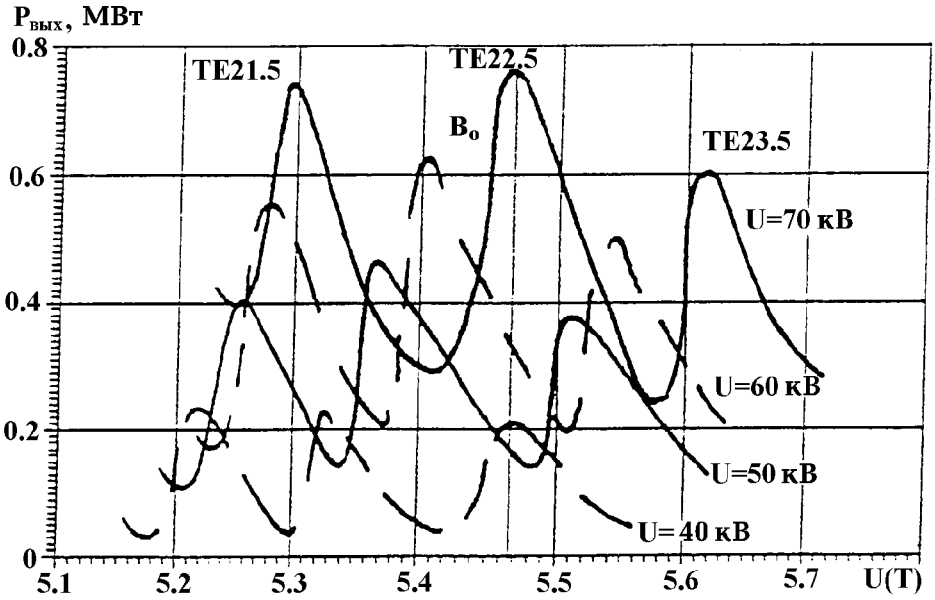


Рис. 3. Экспериментальная зависимость выходной мощности гиротрона от магнитного поля при различных значениях ускоряющего напряжения.

и результирующего КПД гиротрона. При использовании в расчётах реальной функции распределения электронов по поперечным скоростям, измеренной методом тормозящего поля [9], расчётное значение КПД составило 42%, а при расчётах без учёта разброса скоростей КПД равен 45%. Естественно, что учёт разброса скоростей электронов существенно увеличивает время счёта, поэтому в дальнейшем, при расчёте многомодовых процессов разбросом скоростей электронов пренебрегалось. Использование последовательного расчёта переходной характеристики является существенным, поскольку для проверки был сделан расчёт стационарного состояния лампы в одной точке — на полке импульса ускоряющего напряжения — при задании стартовых амплитуд взаимодействующих мод равными и малыми. При этом получена устойчивая генерация паразитной моды, что противоречит результатам последовательного расчёта и результатам эксперимента, когда возбуждалась рабочая мода $\mathrm{TE}_{m,\mathrm{p}}$.

Несколько более сложный сценарий реализуется в более длинном резонаторе с $\mu_2 \cong 12$, преимуществом которого является более высокий КПД гиротрона. В гиротроне с таким резонатором срыв колебаний рабочей моды происходит при превышении ускоряющего напряжения над номинальным значением на 5%. При этом возникает трёхмодовая генерация, вызванная синхронным взаимодействием мод. Мода $\mathrm{TE}_{21,5}$ будучи “центральной"провоцирует нарастание амплитуд своих сателлитов — высокочастотного $\mathrm{TE}_{22,5}$ и низкочастотного $\mathrm{TE}_{20,5}$. В стационарном режиме величины амплитуд мод $\mathrm{TE}_{21,5}$ и $\mathrm{TE}_{22,5}$ примерно равны, а мода $\mathrm{TE}_{20,5}$ имеет амплитуду, примерно в 10 раз меньшую. То, что нарастание амплитуды моды $\mathrm{TE}_{22,5}$ связано с модой $\mathrm{TE}_{21,5}$, подтверждается тем, что если амплитуду моды $\mathrm{TE}_{21,5}$ тождественно приравнять нулю, амплитуда моды $\mathrm{TE}_{22,5}$ при превышении номинального напряжения неуклонно уменьшается. Аналогично, отличная от нуля амплитуда моды $\mathrm{TE}_{20,5}$ связана со взаимодействием сателлитов и в отсутствие моды $\mathrm{TE}_{22,5}$ не наблюдается. Данная трёхмодовая генерация наблюдается и при уменьшении амплитуды ускоряющего напряжения до номинального значения, образуя своеобразный “гистерезис". Приведённый сценарий накладывает условия на параметры импульса ускоряющего напряжения, в частности, на величину выбросов на переднем фронте импульса, которые не должны превышать 3% от напряжения на полке импульса для гиротронов с “длинными"резонаторами.

В рамках этой же задачи рассматривалось влияние выбросов тока на переднем фронте импульса, имевшее место в эксперименте. Расчёты показывают, что в этом случае происходит изменение амплитуды колебаний рабочей моды при соответствующем снижении КПД, но нет процессов перехода на генерацию других мод или установление многомодовых режимов.

Приведённый метод позволяет одновременно с анализом установления стационарной генерации в гиротронах с резонаторами большого диаметра оценить вопрос о возможности электронной перестройки частоты. Как известно, в резонаторах постоянного сечения в полосе резонанса одной моды перестройка частоты определяется добротностью резонатора и составляет 0,1% [10]. Изменяя магнитное поле в широких пределах, возможно селективно возбуждать различные моды резонатора, при этом получая перестройку частоты до 30%, но эта перестройка является медленной в силу большой постоянной времени магнитной системы гиротронов. В то же время в ряде задач физики плазмы требуется перестройка частоты излучения на несколько процентов с характерным временем в десятки микросекунд. В этом случае наиболее предпочтительной является перестройка частоты выходного излучения гиротрона за счёт изменения ускоряющего (и/или анодного, в триодных лампах, что более предпочтительно) напряжения. При этом происходит последовательное возбуждение мод, отличающихся азимутальным индексом на единицу. Как следует из анализа переходного процесса, в каждом случае устанавливается устойчивая одномодовая генерация. При этом перестройка частоты гиротрона составляет 5% с характерным временем порядка микросекунд. В то же время изменение азимутального индекса на единицу в ту или иную сторону от рабочей моды не приводит к резкому снижению эффективности выходного преобразователя СВЧ излучения в узконаправленный волновой пучок. Как было показано в работе [11], изменение азимутального индекса рабочей моды приводит к изменению

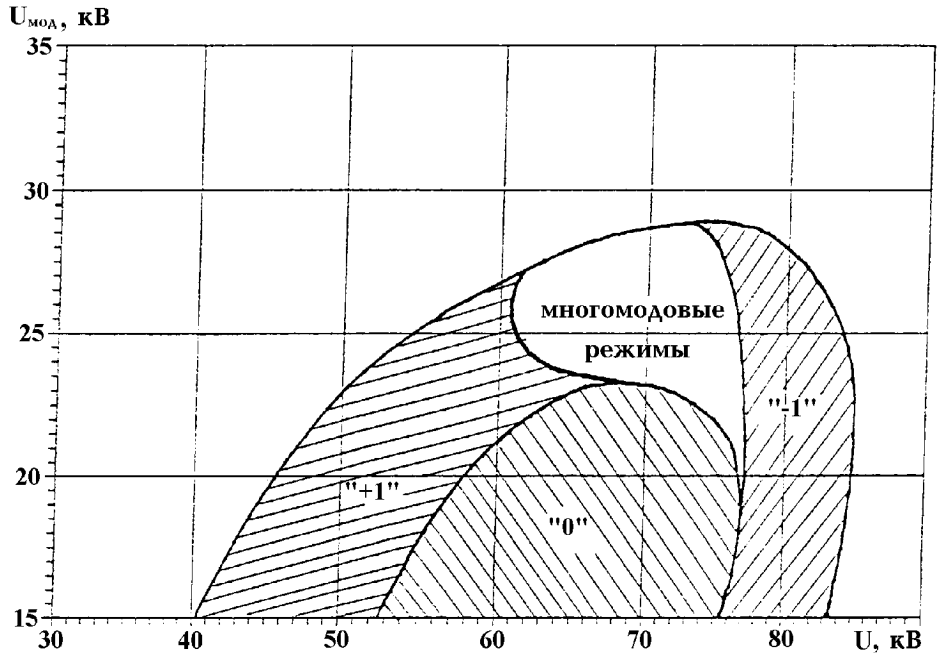


Рис. 4. Зоны генерации мод с различным азимутальным индексом m.

угла, под которым излучается СВЧ мощность на величину $\theta \approx \Delta m/\nu_{m,\mathrm{p}}$, где $\nu_{m,\mathrm{p}}$ — собственное число моды. При этом потери выходной мощности составляют около 10%. Использование системы коррекции установки квазипараболического зеркала позволяет вернуть эффективность квазиоптического преобразователя к исходной. Один из возможных вариантов стационарных режимов с возможностью перестройки частоты приводится на рис. 4 на плоскости параметров: ось абсцисс — ускоряющее напряжение, ось ординат — модулирующее напряжение. На рисунке в кавычках обозначена величина $m - m_0$, где m_0 — азимутальный индекс рабочей моды, зона без штриховки соответствует многомодовому режиму генерации.

ВЫВОДЫ

Полученные результаты находятся в полном соответствии с предположениями, сделанными в [4]. Теоретический расчёт и эксперимент дают хорошее согласование не только качественных, но и численных результатов. Они свидетельствуют об устойчивости одномодовых колебаний в оптимальных по КПД условиях и в то же время демонстрируют возможность электронной перестройки частоты в диапазоне порядка 5%. Проведение анализа переходных процессов представляется совершенно необходимым при проектировании гиротронов на модах с собственными числами порядка 55–60, когда возможно возбуждение паразитных колебаний с установлением стационарной многомодовой генерации. При этом установление устойчивой одномодовой генерации с высоким КПД может достигаться выбором сценария подачи напряжения на гиротрон [12] или требует применения методов модовой селекции, основанных на уменьшении добротности колебаний паразитных мод [13]. На основании приведённых результатов можно сформулировать требования к источникам питания импульсных гиротронов: для устойчивой одномодовой генерации выброс на переднем фронте импульса ускоряющего напряжения не должен превышать 3–4% от рабочего напряжения, в противном случае возможен срыв колебаний рабочей моды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиротроны. Сборник научных трудов. /Под ред. В. А. Флягина. — Горький: ИПФ АН СССР, 1989. – 216 с.
2. Запевалов В. Е., Нусинович Г. С. //Радиоэлектроника, 1985. Т. 30. № 3. С. 563.
3. Запевалов В. Е., Нусинович Г. С. //Изв. вузов. Радиофизика, 1984. Т. 27. С. 117.
4. Глявин М. Ю., Нусинович Г. С. //Радиоэлектроника, 1991. Т. 36. № 3. С. 512.
5. Моисеев М. А., Нусинович Г. С. //Изв. вузов. Радиофизика, 1974. Т. 17. № 11. С. 1709.
6. Глявин М. Ю. //Электроника СВЧ. Сер. 1. СВЧ-техника, 1994. Вып. 2(462). С. 33.
7. Венедиктов Н. П., Глявин М. Ю., Запевалов В. Е., Куфтин А. Н., Постникова А. С., Юлпатова М. В. Экспериментальное исследование катодов гиротронов по ВАХ характеристикам. //Изв. ВУЗов. Радиофизика (в печати).
8. Запевалов В. Е., Кейер А. П., Мясников В. Е., Малыгин С. А., Флягин В. А. //Электронная промышленность, 1991. № 6. С. 71.
9. Авдошин Е. Г., Гольденберг А. Л. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1973. Т. 16. № 10. С. 1605.
10. Antakov I. I., Zasypkin E. V., Sokolov E. V. //Infrared and Millimeter Waves, 1993. V. 14. № 5. P. 1001.
11. Denisov G. G., Petelin M. I., Shmelyov M. Yu., Vinogradov D. V., Zapevalov V. E. Frequency-Tunable Gyrotron ITER-IL-HD-6-012, 1990.
12. Нусинович Г. С. //Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1974. № 3. С. 44.
13. Гольденберг А. Л., Павельев А. Б., Хижняк В. И. — В сб.: Гиротроны. — Горький, 1989. С. 20.

АОЗТ НПП “Гиком", ИПФ РАН,
Н.Новгород, Россия

Поступила в редакцию
13 февраля 1997 г.

MODE COMPETITION IN NONSTATIONARY REGIMES OF POWERFUL GYROTRONS

M. Yu. Glyavin, V. E. Zapevalov, A. N. Kuftin

A method is presented to analyze nonstationary processes arising with the change of accelerating voltage. The theoretical explanation is given to the observed generation at parasitic modes at the reduced voltage. The results obtained make it possible to estimate the possibility of getting unimode oscillations at diffirent frequencies in gyrotrons with resonators of a large diameter.