МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Tom XLI N 4	Нижний Новгород	1998
	Содержание	
Tsedilina E.E. Electric by asymmetric rin	ctric field and field-aligned currents produc	ed 423
Иванов В.Б., Пол	ияков В.М. Эволюция волновых возм	1y-
щений в верхней	ионосфере	432
Моисеев С.Н. Ве	роятностные законы распределения мако	си-
мума ионизации	слоя E _s с учётом граничных условий	438
Ошарин А.М. М радиоволн в сухи	оделирование ослабления миллиметрова х снегопадах	ых 446
Докучаев В.П. Во	озбуждение прямоугольного волновода и	м-
пульсными элект	рическими и магнитными токами	
Белянцев А.Е., Ди	воряковский В.П., Файнштейн С.М	И.,
Чернова Е.А.	Параметрическая и высокочастотн	ая
неустойчивость с	альфвеновских и магнитозвуковых волн	и в
плоском волново)	де, пронизываемом потоком ионизирова	ан-
ного газа с попер	речным магнитным полем	469
Тюхтин А.В. Ди	фракция электромагнитных волн на пол	пу-
плоскости, распол	ложенной в движущейся холодной плазм	ze475
Дмитренко А.Г., нитных волн на и лочке	Корогодов С.В. Рассеяние электром деально проводящем теле в киральной об	ar- 50- k 495
Арефьев А.С., Не	еганов В. А., Нефёдов Е. И. Электро	ци-
намическая теор	ия экранированной несимметричной дв	ух-
щелевой линии по	ередачи	507
Малахов А.Н. У состояния нелин	Увеличение времени жизни нестабильно ейной динамической системы шумами	ого си- 519

Брюханов Ю.	А. Динамика цифровой рекурсивной системы	
второго поря	дка с нелинейностью насыщения	534
Personalia		544

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С.Я.БРАУДЕ, С.Н.ВЛАСОВ, А.В.ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В.Л.ГИНЗБУРГ (главный редактор), В.В.ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В.А.ЗВЕРЕВ, Ю.Л.КЛИМОНТОВИЧ, А.Н.КОНДРАТЕНКО, Ю.А.КРАВЦОВ, В.Н.КРАСИЛЬНИКОВ, А.Н.МАЛАХОВ, В.В.НИКО́ЛЬСКИЙ, В.Ю.ПЕТРУНЬКИН, М.И.РАБИНОВИЧ, А.И.САИЧЕВ, А.А.СЕМЕНОВ, С.А.ТАГЕР, В.И.ТАЛАНОВ, В.В.ТАМОЙКИН, Д.И.ТРУБЕЦКОВ, В.И.ТУРЧИН, В.П.УРЯДОВ, Г.И.ФРЕЙДМАН, А.В.ЯКИМОВ

Ответственный секретарь редакции О.А.ШЕЙНЕР

Формат 70х108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать. Усл.печ.л. 11,20. Усл.кр.-отт. 11.20. Уч.-изд.л. 13,60. Тираж 270 экз. Заказ№ ±39/сЦена 18 р.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород, ул.Большая Печёрская, 25, Научно-исследовательский радиофизический институт, редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71, e-mail rfj@nirfi.sci-nnov.ru

Отпечатано с готового набора в типографии НОКГС ООП 603600, Нижний Новгород, ул.Ошарская, 64

> © "Известия высших учебных заведений. Радиофизика", 1998

ELECTRIC FIELD AND FIELD-ALIGNED CURRENTS PRODUCED BY ASYMMETRIC RING CURRENT

E.E. Tsedilina

The formation of the problem concerning the calculation of electric field and field-aligned currents in the magnetosphere and ionosphere produced by asymmetric ring current is considered with the approach and equations developed by [1-3]. These equations were used previously for estimation of electric field in the ionosphere and magnetosphere appearing in the process of the spreading of energetic particles injected into the trapping zone of the magnetosphere as a result of nuclear explosion. According to this theory, energetic particles, injected into ring current, produce asymmetric divergent ring current, field-aligned currents, global electric field and currents in the ionosphere.

1. INTRODUCTION

Theoretical and experimental investigations of the electric field and currents in the Earth's magnetosphere and ionosphere are the subject of many papers [4–15]. Electric field is a result of the interaction of solar wind with the Earth's magnetosphere, and is associated with the whole complex of phenomena in the magnetospheric and ionospheric plasmas.

At the same time electric field, to a considerable extent, influences the dynamics and state of the ionosphere and magnetosphere. The electric field determines the currents and drifts of electrons and ions in the ionosphere, the appearance of various instabilities and waves [16, 17], and possible ionospheric irregularities [e.g., 18, 19]. The electric field influences the temperatures of the charged particles and electron-ion recombination balance in the F-layer, and produces rise and drop of the ionosphere layers [20]. As the result of these influences the ionospheric electron density during magnetic storms also changes. It means that the electric field also influences radio wave propagation.

Appearance of breaches of high-power electric lines during strong magnetic storms are dramatic examples of the effects, described above. These disturbances are connected with electric currents in the Earth's crust induced by the electric field in the ionosphere [21].

The existence and distribution of electric field, in general, was found to be in relation with the fieldaligned electric currents (FAC) in the ionosphere and magnetosphere [e.g., 22-25]. One of the sources of electric field is quasi-stationary divergent external current j_0 appearing during temporal variations of the density of energetic electrons and ions in the magnetosphere:

$$\operatorname{div} j_0 = e\left(\frac{\partial N_e}{\partial t} - \frac{\partial N_i}{\partial t}\right). \tag{1}$$

Here N_e and N_i are the density of energetic electrons and ions, e is electron charge.

The non-stationary variations of the density of energetic electrons and ions, trapped and quasi-trapped in the magnetosphere, also produce field-aligned currents j_p in the magnetosphere and ionosphere [e.g., 5, 9, 26]

$$j_p = \frac{1}{\sqrt{Q}} \int \sqrt{g} \operatorname{div} j_0 \, dx \,, \tag{2}$$

where *Q* and *g* are metric coefficients of the coordinate system [5]. These currents were detected during the measurements of magnetic variations [22, 27, 28] and also obtained as a result of simulations [e.g., 29].

The growth phase of field-aligned currents and their variations in the space and time is always accompanied by the excitations of instabilities of a various kind and waves in the magnetosphere [30–33]. The interaction

of the waves with energetic particles induces the heating of the plasmospheric, ionospheric, and thermospheric plasmas [34, 35].

Thus, field-aligned currents and electric field can be produced by a ring current that is asymmetric versus the longitude φ . Asymmetric ring current appears after injections of energetic particles of the energies $\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$ in the ring current bulk where McIlwain parameter *L* is approximately equal 2 to 8. Such injections usually happen during the main phase of magnetic storms at the night or dawn-dusk side of the magnetosphere [e.g., 36–38], when absolute value of D_{st} — variation is drastically increased. Trapped in geomagnetic field, particles drift transversally to the field line plane with different velocities depending mainly on their energy and radial distance *R* or McIlwain coordinate *L*. Variations of particle flux density as the results of the dispersion of particle velocities [e.g., 39], or divergent transversal currents generate FACs (2) and global electric field in the ionosphere and magnetosphere.

These FACs and global electric field of significant values exist until the distribution of energetic particles will become regular with respect to the coordinate φ . This happens after 2–3 rotations of the particles with the energy $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\varepsilon_{\min} \le \varepsilon_0 \le \varepsilon_{\max}$ around the Earth. During this time the belt of energetic particles is formed. Our investigation has uncovered a previously unreported effect: FACs develop in the form of spirals.

We will not consider in this paper the whole complicated complex of phenomena accompanying the formation of the Earth radiation belt, such as the influence of waves, charge-exchange losses, collision losses and so on [e.g., 40-42]. These effects influence significantly the number density of energetic particles trapped in magnetic field at the distances $L \approx 1$ to 8 and especially their low energy part during recovere phase of magnetic storms [e.g., 35]. We will evaluate here in general the process which takes place during the main phase of magnetic storm and lasts only during several hours.

2. BASIC EQUATIONS

The dynamics of energetic electron and ion inhomogeneities in the Earth's magnetosphere were investigated in [1-3]. The basic equations, received in these papers were used in [43, 44] for the evolution of the global electric field *E*, produced by the spreading of energetic electrons during the formation of artificial radiation belt. Such belts appeared in the magnetosphere after nuclear explosions. The electric field, that appeared in the magnetosphere after nuclear explosion "Starfish", of 9 July 1962, and it's influence on the ionosphere, was studied in [43, 45, 46].

The approach and the equations, established in these papers can be applied to the description of the ring current formation during magnetically disturbed periods when energetic particles are injected into the ring current on the night side of the magnetosphere. They drift across the field-lines with the velocities that depend on their energy, pitch-angle at the equator, and McIlwain parameter. Because of dispersion of their velocities on these parameters their number and energy densities vary with time, that initial inhomogeneities of these particles relax and form the radiation belt. This process completes after 2 for 3 evaluations of the particles around the Earth. During their spreading, particles produce electric field and field-aligned currents.

This scenario can be described with the use of the equation for electric potential Ψ ($E = -\text{grad}\Psi$) in equatorial plane, received in [1]

$$\frac{\partial}{\partial L} \left[(4L-3)\sqrt{\frac{L}{l-1}} \Sigma_P \frac{\partial \Psi}{\partial L} + \sqrt{\frac{4L-3}{L-1}} \Sigma_H \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[-\sqrt{\frac{4L-3}{L-1}} \Sigma_H \frac{\partial \Psi}{\partial L} + \frac{1}{\sqrt{L(L-1)}} \Sigma_P \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right] = e \frac{\partial}{\partial t} (\overline{N_{i\varepsilon}} - \overline{N_{e\varepsilon}}),$$
(3)

Е.Е.Цедилина

 $\overline{N_{i\varepsilon}}$ and $\overline{N_{e\varepsilon}}$ are bounce-averaged concentrations of energetic particles:

$$\overline{N_{i\varepsilon}} = \int A_{1i} f_{i\varepsilon} \, dJ_{\perp} \, d\varepsilon \,,$$

$$\overline{N_{e\varepsilon}} = \int A_{1e} f_{e\varepsilon} \, dJ_{\perp} \, d\varepsilon \,,$$
(4)

$$A_{1e} = 4\pi \frac{Mm_0^2}{cL\sqrt{1-\beta}} J_1(\alpha_e) , \quad \beta = (m_0 c^2/\varepsilon)^2,$$

$$J_1(\alpha_e) = a_1 - a_2 \sin\theta_0 \equiv 1.38 - 0.64 \sin\theta_0 , \quad \alpha_e = \sin\theta_0 .$$
(5)

In (4) M is magnetic dipole moment of the Earth, e and m_0 are electron charge and mass, θ_0 is the pith angle at the equator, J_{\perp} is first adiabatic invariant. Coefficient A_1 for ions has the same form, as A_1 for electrons, only electron mass m_0 should be substituted by the ion mass M_i , and electron pitch angle α_e should be substituted by the ion pitch angle α_i . Functions $f_{e\varepsilon}$ and $f_{i\varepsilon}$ are electron and ion energy distribution functions. The equations for them, bounce-averaged as it was done receiving (4), were also formulated in [1].

The temporal, bounce-averaged variation of the number density of energetic particles, trapped in magnetic field, (right part of (3)), yields field-aligned or Birkeland currents in the magnetosphere [e.g., 1, 5, 26]:

$$j_p = Ke \frac{\partial}{\partial t} (\overline{N_{e\varepsilon}} - \overline{N_{i\varepsilon}}), \qquad (6)$$

where K is a metric coefficient.

The process of relaxation of energetic particles, trapped in magnetic field, in general, depends on electric field in the magnetosphere. However, in the first approximation the influence of the electric field on the energy and the movement of energetic particles can be small. The influence of electric field on the energetic particles is described by the following parameter λ , obtained in [2]:

$$\lambda = \frac{ecR_E^4 \overline{N_\varepsilon} \sqrt{1 - 1/L}}{M\Sigma_P} \approx 2.7 \cdot 10^{-2} L^4 \sqrt{1 - 1/L} \, n_\varepsilon (10^{12} / \Sigma_P). \tag{7}$$

Here n_{ε} is the average concentration of injected energetic particles per 1 cm³, R_E is the Earth's radii. The value of integral conductivity varies from $(0.2 \text{ to } 10) \cdot 10^{12} \text{ cm/s}$ (night) to $(2 \text{ to } 40) \cdot 10^{12} \text{ cm/s}$ (day) [e.g., 47–49]. This means that parameter λ can very in large limits. When $\lambda \geq 1$, equation (3) and kinetic equations for distribution functions are nonlinear. In this case the distribution functions of energetic particles $f_{e\varepsilon}$ and $f_{i\varepsilon}$ and the right part of (3) depend on the electric field appearing during the relaxation of injected particles [2, 3]. In the conditions $\lambda < 1$ ($\lambda \to 0$) equations (3), (4) and kinetic equations for distribution functions and distribution of energetic particles is determined by their drift in magnetic and convection and corotation electric fields.

3. LINEAR APPROACH

Kinetic equations obtained in [1] have a simple solution in the case $\lambda = 0$ if we can neglect the collisions of energetic particles with ionospheric plasma and energetic neutrals [1–3]:

$$f_{\varepsilon i}(\varphi, t) = f_{i0}(\varphi + \omega_i t), \qquad (8)$$
$$\omega_i = \frac{3\varepsilon c R_0 L}{ZeM} (1 - \beta_i) I(\alpha_i) = 2\pi/T,$$

$$I(\alpha_i) \equiv 0.35 + 0.15\sin\theta_0, \quad \alpha_i = \sin\theta_0.$$
(9)

The function $f_{i0}(\varphi, t = 0)$ is initial distribution functions of φ of injected energetic ions at t = 0. It is seen from (8) that, while $\lambda = 0$, ions drift freely in the geomagnetic field.

It is very important that the drift velocity or the velocity of rotation ω mainly depends on particle energy ε and to a lesser extent on the first adiabatic invariant J_{\perp} [51]. The dispersion of drift velocity evidently leads to the space separation of particles with various energies. This statement follows from expression (8) if we take into account the dependence of frequency ω on energy ε . Furthermore, the dispersion of drift leads to spreading of initial inhomogeneity of energetic electrons and ions, similar to that considered in [39] for ionospheric inhomogeneities.

The equations (3), (4) were applied in [41, 44] to the evaluation of global electric field in the ionosphere and magnetosphere after the nuclear explosion "Starfish" of July 9, 1962. This electric field appeared immediately in the vast and distant area after the nuclear explosion in the ionosphere and was observed during the formation of artificial electron belt 1-2 hours after the explosion. The disturbances in the density of electrons in F-layer also appeared immediately after the nuclear explosion. They were observed during 1-2 hours and in the distant area, where, according to the calculations, sufficient electric field was produced in the ionosphere by the spreading of energetic electrons. The electron density disturbances were predicted and isolated in the area in accordance with electric field calculations [45–46].

Equations received in [1] and briefly considered here can be used not only for an electric field estimation but also for modeling of FAC The time, during which strong electric field and FAC are generated and exist, depends on the mechanism of large-scale injection into the ring current and the duration of an asymmetry in the ring current. This time is of the order of 1–2 revolution of ions of average energy $\varepsilon = \varepsilon_0$ (usually $\varepsilon_0 \approx 100$ or 200 keV for all energy spectra) around the Earth for single injection. It also depends on the duration of injection period and the number and energy density of injected particles.

4. MODELING OF FIELD-ALIGNED CURRENTS

For modeling of FAC the distribution function (8) obtained in linear approximation when parameter $\lambda \rightarrow 0$ equation (7) provides a simple solution of the problem. Then the right part of the equation (3) does not depend on the electric field, produced during the spreading of the cloud of injected energetic particles, and is determined by (4) and (8). In this case the distribution function f_{ε} of energetic ions has the form

$$f_{\varepsilon}(\varphi, t, \varepsilon, L, J_{\perp}) = f_{\varepsilon}(\varphi + \omega t, L, \varepsilon, J_{\perp}).$$
⁽¹⁰⁾

Simple solution (10) of bounce-averaged kinetic equation can include convection electric field with only one component along the radii or the *L*-coordinate in the equatorial plane. Convection field usually is of the order of (0.5 - 0.2) mV/m at the *L* of values 3–8. Such field is unimportant for particles with large energies $\varepsilon \ge 100 \text{ keV}$ [e. g., 38, 51]. High energy particles move transversal to magnetic field lines with significantly larger velocity than low energetic particles (9). That is why they play the main role in the spreading of the initial number and energy density of energetic particles. The effect of low energetic particles

of 10 keV $\leq \varepsilon <$ 100 keV is small and unimportant for rather short time period of the FAC and electric field appearance with sufficient values.

Let us assume that at the initial moment of time t = 0 distribution function for ions has the form:

$$f_{\varepsilon}(\varphi, t = 0, \varepsilon, L, J_{\perp}) = C f_1(L, \varepsilon, J_{\perp}) F(\varphi),$$

$$F(\varphi) = \exp\left\{-(200/b)\sin^2(\varphi/2)\right\}.$$
(11)

The width of injection pulse $F(\varphi)$ over angle φ , according to (11), depends on parameter *b*. Maximum of $F(\varphi)$ when t = 0 is at $\varphi = 0$ (night side). The value of φ in (11) is counted from $\varphi = 0$ (midnight) to $\varphi = \pm \pi$ (noon). Function $F(\varphi)$ is convenient for numerical simulations of FAC.

We suppose that $f_1(L, \varepsilon) = f_2(L) f_3(\varepsilon)$ and the dependence on the adiabatic invariant J_{\perp} is not significant. It means that we accepted this dependence to be in the form of δ -function: $f(J_{\perp}) = \delta(J_{\perp} - J_0)$. Accepted form of the function $f_1(\varepsilon, L)$ as a product of two functions is suitable by the using of experimental data.

The normalization factor C can be determined as it was done in [43]:

$$C = N_0 L_m / \varepsilon_0 A_{10} f_2(L_m) , \quad A_{10} = L A_1 , \qquad (12)$$

where N_0 is of the order of complete number of particles injected in the ring current bulk in the interval of $2 \le L \le 8$. Function $\overline{N_{\varepsilon}}$ with (11), (12) is equal to

$$\overline{N_{\varepsilon}}(t,\varepsilon,L,\varphi) = N_0 \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \frac{L_m f_2(L)}{L f_2(L_m)} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{f_3(\varepsilon) F(\varphi,\varepsilon,L,t)}{\varepsilon_m} d\varepsilon \,.$$
(13)

The value of ε_0 is:

$$\varepsilon_0 = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f_3(\varepsilon) d\varepsilon$$

According to (12), (13) the equation for field-aligned ion current after single injection (6) can be obtained in the form

$$j_{p,i} = -(4\pi KeN_0/T_m) \frac{f_2(L)}{f_2(L_m)} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f_3(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 \varepsilon_m} F_1(\varphi, \varepsilon, L, \tau) d\varepsilon, \qquad (14)$$

where

$$F_1 = (50/b)\sin(\varphi + a)F, \quad a = 2\pi L\varepsilon\tau/L_m\varepsilon_m.$$
(15)

In (12)–(15) $\tau = t/T_m$, T_m is the period of rotation of ions around the Earth (9) with the energy $\varepsilon = \varepsilon_m$, on the $L = L_m$ around the Earth, and $\beta = (M_0 c^2/\varepsilon)^2 \ll 1$. For $\varepsilon_m = 100$ keV, $L_m = 3$, period $T_m \approx 2$ hours.

By this means equations (3), (14) can be used for modeling of field-aligned currents and electric field produced by energetic particles injected during storms and substorms into the ring current. First results of modeling of FAC (14) were obtained in [52]. They shown that FAC develops in the form of spirals. Last results of the modeling of FAC will be published in the next paper.

A c k n o w l e d g m e n t s. We express our great thanks to Jules Aarons, Yury Galperin, Alex Gurevich, Zbignew Klos, Juan Roederer, and V. M. Vasyliunas for their interest in this research and for helpful discussions. Our special thanks are to Mario Grossi, who made the start of this research possible at the Harvard-Smithsonian Observatory and provided advise and help to one of us throughout the entire study. We also thanks Nataly Belianski for her help in evaluating this paper.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Gurevich A. V. and Tsedilina E. E. //Geomagn. Aeron., 1969. V. 9. P. 372.
- 2. Gurevich A. V. and Tsedilina E. E. //Geomagn. Aeron., 1970. V. 9. P. 519.
- 3. Gurevich A. V. and Tsedilina E. E. //Geomagn. Aeron., 1970. V. 10. P. 660.
- 4. Gonzales W. D. and Mozer F. S. //J. Geophys. Res., 1974. V. 79. P. 4186.
- 5. Gurevich A. V., Krylov A. L., and Tsedilina E. E. //Space Sci. Rev., 1976. V. 19. P. 59.
- 6. Heppner J. P. and Maynard N. C. //J. Geophys. Res., 1977. V. 92. P. 4467.
- Fejer B. J., Gonzales C. A., Farley D. T., Kelly M. C., and Woodman R. F. //J. Geophys. Res., 1979. V.84. P. 5797.
- 8. Kamide Y. and Matsushita S. //J. Atmos. Terr. Phys., 1981. V. 43. P. 411.
- 9. Spiro R. W., Harel M., Wolf R. A., and Reiff P. H. //J. Geophys. Res., 1981. V. 86. № A4. P. 2261.
- 10. Southwood. //J. Geophys. Res., 1977. V. 82. № 35. P. 5512.
- 11. Sakharov Y. Y., Nikitin M. A., and Smirnov O. A. //Geomagn. and Aeron., 1989. V. 29. P. 344.
- 12. Siscoe G. and Maynard N. //J. Geophys. Res., 1991. V. 96. № A12. P. 21,071.
- 13. Nikitin M. A., Smirnov O. A., and Tsedilina E. E. //Geomagn. Aeron., 1991. V. 31. P. 201.
- 14. Denisenco V. V. and Zamay S. S. //Planet Space. Sci., 1992. V. 40. P. 942.
- 15. Del Pozo C. F. and Blanc M. //J. Geophys. Res., 1994. V. 99. P. 4053.
- 16. Kelley M. C. The Earth's ionosphere, Plasma Physics and Electrodynamics. INC., S-D-TOR.: Academic Press, 1989. 487 p.
- 17. Yeh H.-C., Foster J. S., Rich F. J., and Swider W. //J. Geophys. Res., 1991. V. 96. № A4. P. 5707.
- 18. Tsedilina E. E. //Geomagn. Aeron., 1971. V. 11. P. 464 [in Russian].
- 19. Aarons J. and Rodger. //Radio Sci., 1991. V. 26. P. 1115.
- 20. Haerendal G. and Eccles J. V. //J. Geophys. Res., 1992. V. 97. № A2. P. 1181.
- 21. Lanzerotti L. J. //Space Sci. Rev., 1983. V. 34. P. 347.
- 22. Zmuda A. J., Martin J. H., and Heuring F. T. //J. Geophys. Res., 1966. V. 71. P. 5033.
- 23. Cummings W. D. and Dessler A. J. //J. Geophys. Res., 1967. V. 72. P. 1007.
- 24. Akasofu S.-I., Ahn B.-H., and Kisabeth J. //J. Geophys. Res., 1980. V. 85. P. 6883.
- 25. Willams D. J. //Rev. Geophys., 1987. V. 25. P. 570.
- 26. Vasyliunas V. M. In: Particles and Fields in the magnetosphere /Ed. by B. McCornac. Hingham, Mass.: D. Reidel, 1970. P. 60.
- 27. Iijima T. and Potemra T. A. //J. Geophys. Res., 1978. V. 83. P. 599.
- 28. Fujii R., Fukunishi H., Kukubun S., Sugiura M., Tohyama F., Hayakawa H., Tsuruda K., and Okada T. //J. Geophys. Res., 1992. V. 97. P. 10,703.
- 29. Roeloff E. C. //Adv. Space Res., 1989. V.9. P. 12,195.
- 30. Green J. L., Gurnett D. A., Saflekes N. A., and Potemra T. A. //J. Geophys. Res., 1979. V. 84. P. 5216.
- 31. Elandson R. E., Pottelette R., Potemra T. A., Zanetti L. J., Bahnsen A., Lindin R., and Hamelin M. //Geophys. Res. Letters, 1987. V. 14. P. 431.
- 32. Gurnett D. A. and Inan U. S. //Rev. Geophys., 1988. V. 26. P. 285.
- 33. Benson R. F. and Osherovich. //J. Geophys. Res., 1992. V. 97. № A12. P. 19,413.
- 34. Gorbachev O. A., Khazanov G. V., Gamagunov K. V., and Krivorutsky E. N. //Planet. Space Sci., 1992. V. 40. P. 859.
- 35. Jordanova V.K., Kisler L. M., Kozyra J. U., Khasanov G. V., and Nagy A. F. //Geophys. Res., 1996. V. 101. № A1. P. 111.
- 36. Friedel R. H., Korth A., and Reeves G. D. In: Proceedings of Second International Conference on Substorms, 1994, Fairbanks, Alaska, USA. P. 571.

- 37. Daglis A. and Axford W. I. //J. Geophys. Res., 1996. V. 101. № A3. P. 5047.
- 38. Friedel R. H. W., Korth A., and Kremser G. //J. Geophys. Res., 1996. V. 101. № A6. P. 13,137.
- 39. Gurevich A. V. and Tsedilina E. E. //Space Sci. Rev., 1967. V. 7. P. 407.
- 40. Smith P. H. and Bewtra N. K. //Space Sci. Rev., 1978. V. 22. P. 301.
- Bespalov P. A., Grafe A., Demekhov A.G., and Trakhtengerts V. Yu. //Geomagn. Aeron., 1990. V. 30. P. 628.
- 42. Senatorov V. N. //Geomagn. Aeron., 1991. V. 31. P. 278.
- 43. Tsedilina E. E. //Geomagn. Aeron., 1971. V. 11. P. 318.
- 44. Timofeyev G. A., Dorman V. I., and Kopylova T. M. //Geomagn. Aeron., 1974. V. 14. P. 581.
- 45. Tsedilina E. E. and Shashun'kina V. M. //Geomagn. Aeron., 1990. V. 30. P. 681.
- 46. Tsedilina E. E. and Shashun'kina V. M. //Geomagn. Aeron., 1990. V. 30. P. 692.
- 47. Tsedilina E. E. //Geomagn. Aeron. [in Russian], 1974. V. 14. P. 592.
- 48. Spiro R. W., Reiff P. H., and Maher L. J. //J. Geophys. Res., 1982. V. 87. P. 8215.
- 49. Senior O. and Blank M. //J. Geophys. Res., 1984. V. 89. P. 261.
- 50. Wolf R. A. //J. Geophys. Res., 1970. V. 75. № 25. P. 4677.
- Roederer J. G. Dynamics of geomagnetically trapped radiation. Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970. – 241 p. Dinamika radiatsii, zachvachennoj geomagnitnim polem [in Russian]. /Ed. by V. P. Shabanski. — Moscow: Mir, 1972. – 271 p.
- 52. Tsedilina E. E. and Belianski N. //Adv. Space Res., 1996. V. 17. P. (10)29.

Space Research Center Polish Academy of Science, Warsaw, Poland Поступила в редакцию 13 июня 1997 г.

УДК 550.388.2

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ИОНИЗАЦИИ СЛОЯ Е_s С УЧЁТОМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

С. Н. Моисеев

Рассмотрены граничные условия, налагающие запрет на появление значений электронной концентрации слоя E_s ниже фонового и выше предельно допустимого уровней. Для каждого граничного условия получены на основе распределения Коши одномерные вероятностные законы распределения максимальной электронной концентрации слоя E_s , которые верифицированы по экспериментальным данным.

введение

Неутихающий интерес, который вызывает к себе ионосферный слой E_s , в значительной степени связан с относительно частым появлением аномально больших выбросов электронной концентрации (ЭК) слоя. Приемлемого вероятностного описания аномальных выбросов до недавнего времени не существовало. В работе [1] было получено, что распределение максимальных значений ЭК среднеширотного слоя E_s близко к распределению Коши. Однако распределение Коши допускает отрицательные значения ЭК и у него не существует моментов. Чтобы сделать описание более физичным, необходимо задать граничные условия, запрещающие появление значений ЭК ниже фонового и выше предельно допустимого уровней. Существует большое разнообразие граничных условий. Цель данной работы — рассмотреть наиболее естественные и физичные для ЭК слоя E_s граничные условия, получить плотности вероятностей (ПВ) и функции распределения (ФР) максимума ЭК, соответствующие им, и выделить из этих распределений максимально согласующиеся с экспериментальными данными.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [1] детально рассмотрен механизм образования повышенной ЭК слоя E_s под действием вертикального градиента скорости ветра в магнитном поле Земли (теория ветрового сдвига [2]). С использованием основных положений этой теории было получено дифференциальное уравнение на максимальную по высоте z ЭК слоя $E_s N(t) = \max_z N(z, t) = N(z_m, t)$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = a_2 - a_1 N(t) - \alpha_r N^2(t) + N(t)\xi(t), \quad N(t) \ge N_0, \tag{1}$$

где $a_1 = -D \frac{d^2 N_1(z_m)}{dz^2}$, $a_2 = J + a_1 N_0$, $\xi(t) = \frac{A}{R} \frac{d}{dz} U_y(z_m, t)$, D — коэффициент амбиполярной диффузии, A — отношение горизонтальной составляющей к полной индукции магнитного поля Земли, R отношение частоты столкновения ионов к их гирочастоте, J — фактор ионообразования, α_r — коэффициент рекомбинации, $N_1(z)$ — функция, описывающая вертикальный профиль ЭК, $U_y(z,t)$ — зональная составляющая скорости ветра, N_0 — фоновая ЭК, совпадающая с ЭК регулярного слоя Е на высоте z_m . Порождающий процесс $\xi(t)$ в (1), следуя [1], можно представить в виде $\xi(t) = X_1(t)/X_2(t)$, где функция $X_1(t)$ пропорциональна флуктуациям зональной составляющей скорости ветра, а $X_2(t)$ —

эффективной полуширине ветровой системы, формирующей слой E_s . В предельном случае полного отсутствия флуктуаций процесса $X_2(t)$ порождающий процесс $\xi(t)$ можно считать гауссовским [3]. При этом одномерная интегральная ФР максимальной ЭК N(t) слоя E_s будет близка к логарифмически нормальной [3]

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\ln x - m)/\sigma} \exp(-y^2/2) dy.$$
(2)

Другой предельный случай соответствует сильным флуктуациям ширины ветровой системы $X_2(t)$, а стало быть и толщины слоя E_s (ветровой сдвиг со сжатием ветровой системы). Для этого случая в [1] было получено из (1) линеаризованное уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = b_2 - b_1 N(t) + \xi_0(t), \tag{3}$$

где $b_2 = 2a_2 - \mu a_1, \xi_0(t) = \mu \xi(t), \mu$ — медиана процесса N(t),

$$N(t) \ge N_0. \tag{4}$$

В [1] показано, что значения порождающего процесса $\xi_0(t)$ распределены по закону Коши. В силу линейности уравнения (3) значения процесса N(t) без ограничения (4) также будут распределены по закону Коши [1] с ПВ

$$W_0(x) = b \left[\pi \left(b^2 + (x-a)^2 \right) \right]^{-1}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$
(5)

иΦР

$$F_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right), \quad x \in (-\infty, \infty).$$
(6)

Чтобы учесть ограничение (4), а также естественное физическое ограничение на предельно допустимые значения ЭК $N(t) \leq N_m$, необходимо в точках $N(t) = N_0$ и $N(t) = N_m$ задать граничные условия. Различные граничные условия будут по-разному видоизменять базовый закон распределения (5)–(6). Рассмотрим несколько граничных условий, наиболее полно согласующихся с существующими представлениями о поведении максимальной ЭК слоя E_s , и получим модифицированные законы распределения, соответствующие им.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

При анализе влияния граничных условий на ПВ и Φ Р удобно рассматривать реализации процесса N(t) как траектории неких частиц, а ПВ в точке x — как концентрацию таких частиц в области x + dx. На рис. 1 кривой I изображена траектория частицы в отсутствие каких бы то ни было ограничительных условий. Такую частицу назовём свободной. Концентрация свободных частиц описывается ПВ (5).

а) Отражающий экран. При наличие в точке N_0 граничного условия в виде отражающего экрана частица в области $[N_0, +\infty)$ ведёт себя как свободная, а в случае достижения границы N_0 в момент времени t_1 отражается от неё, и дальнейшая её траектория (кривая 2 на рис. 1) является зеркальным отражением траектории свободной частицы, блуждающей в области $(-\infty, N_0)$. Задание граничного условия в виде отражающего экрана эквивалентно следующему преобразованию максимальной ЭК: $N(t) = N_0 + |N_r(t) - N_0|$, где $N_r(t)$ имеет распределение (5)–(6). Отсюда получаем ПВ N(t)

$$W_2(x) = W_0(x) + W_0(2N_0 - x), \quad x \ge N_0, \tag{7}$$



1



иΦР

440

$$F_2(x) = F_0(x) - F_0(2N_0 - x), \quad x \ge N_0.$$
(8)

Физически наличие отражающего экрана в точке N₀ означает, что при уменьшении максимума ЭК до фоновых значений, вследствие изменения знака вертикального градиента зональной составляющей скорости ветра, слой начинает формироваться заново той же самой ветровой системой несколько выше или ниже прежнего максимума, т. к. именно в эти области будут выдавливаться электроны.

б) Поглощающий экран. При достижении в момент времени t_1 поглощающего экрана, установленного в точке N_0 , частица поглощается им и исключается из дальнейшего рассмотрения. По этой причине нарушается условие нормировки ПВ. Если переходная ПВ $W_0(x|N_0)$ симметрична относительно N_0 , то ненормированную ПВ N(t) можно получить из (7) изменением знака у последнего слагаемого (метод отражения с переменой знака [4]): $W_p(x) = W_0(x) - W_0(2N_0 - x), x \ge N_0$. Нормируя ПВ $W_p(x)$, получаем ПВ максимума ЭК слоя E_s в следующем виде:

$$W_3(x) = \frac{W_0(x) - W_0(2N_0 - x)}{1 - 2F_0(N_0)}, \quad x \ge N_0.$$
(9)

ФР, соответствующая (9), имеет вид

$$F_3(x) = \frac{F_0(x) + F_0(2N_0 - x) - 2F_0(N_0)}{1 - 2F_0(N_0)}, \quad x \ge N_0.$$
(10)

Нормирование плотности $W_p(x)$ эквивалентно вводу в рассмотрение, сразу после поглощения в момент времени t_1 , новой частицы, траектория которой обозначена кривой 3 на рис. 1. Физически наличие поглощающего экрана в точке N_0 означает, что при достижении максимальной ЭК слоя E_s фоновых значений он прекращает своё существование и, начиная с этого момента, рассматривается другая реализация слоя E_s , формируемая другой ветровой системой и на других высотах.

в) Упругий жёсткий экран. Граничное условие типа упругого жёсткого экрана означает линейную комбинацию отражающих и поглощающих граничных условий. В случае, если половина частиц отражается, а половина поглощается, ненормированная ПВ N(t) будет иметь следующий вид: $W_y(x) =$

 $W_2(x) + W_p(x) = W_0(x), x \ge N_0$. После нормировки получим ПВ

$$W_4(x) = \frac{W_0(x)}{1 - F_0(N_0)}, \quad x \ge N_0, \tag{11}$$

иΦР

$$F_4(x) = \frac{F_0(x) - F_0(N_0)}{1 - F_0(N_0)}, \quad x \ge N_0.$$
(12)

Частица в этом случае будет двигаться по одной из траекторий 4 на рис. 1. Распределение (11)–(12) называется усечённым распределением Коши. Его можно получить с помощью другого механизма, а именно — простым отбрасыванием отсчётов процесса, попавших в область $x \in (-\infty, N_0)$, с дальнейшей перенормировкой ПВ $W_0(x), x \in [N_0, +\infty)$. Таким образом, усечённая ПВ является ПВ оставшихся после усечения отсчётов [5].

г) Липкий экран. При наличии в точке N_0 липкого экрана частица, достигшая его, прилипает к нему на время $t_2 - t_1$ (кривая 5 на рис. 1), в течение которого она, будучи свободной, блуждала бы в области $(-\infty, N_0)$. В области (N_0, ∞) концентрация частиц совпадает с концентрацией свободных частиц, а на границе N_0 — с суммарной концентрацией свободных частиц в области $(-\infty, N_0]$. Поэтому ПВ и ФР можно получить из ПВ $W_0(x)$ (5) и ФР $F_0(x)$ (6) обрезанием их в точке N_0

$$W_5(x) = F_0(N_0)\delta(x - N_0) + W_0(X), \quad x \ge N_0, \tag{13}$$

$$F_5(x) = F_0(x), \quad x \ge N_0,$$
 (14)

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Закон распределения (13)–(14) называется обрезанным распределением Коши. С математической точки зрения среди законов (5)–(14) он наиболее прост и удобен в использовании. Так, например, смысл параметров базового распределения (5)–(6) не меняется при переходе к распределению (13)–(14): *а* — медиана, *b* — интерквартильная полуширота. Физическая интерпретация граничного условия в виде липкого экрана также проста: при уменьшении максимальной ЭК слоя E_s до фоновых значений за максимум ЭК принимается фоновый уровень N_0 .

Наряду с естественным ограничением значений процесса N(t) снизу, рассмотрим столь же естественное ограничение его реальных значений сверху

$$N(t) \le N_m \,, \tag{15}$$

где N_m — предельно допустимая величина максимума ЭК слоя E_s , которая ещё физически возможна в данных ионосферных условиях. Учесть влияния ограничения (15) на вид закона распределения ЭК можно также с помощью задания граничных условий в точке N_m . Не все из рассмотренных выше граничных условий будут физически равноценны вблизи границы N_m . Так, расположение в точке N_m поглощающего экрана с соответствующей нормировкой ПВ предполагает более, чем сомнительную, возможность мгновенного исчезновения слоя E_s после достижения его ЭК предельного значения N_m . Липкий экран в точке N_m допускает устойчивое существование предельных значений ЭК $N(t) = N_m$ в течение конечного интервала времени, что противоречит интуитивным представлениям о сильной неустойчивости значений ЭК в этой области. Наиболее естественными механизмами, реализующими ограничение (15), являются отражение и усечение в точке N_m . Из них к наиболее простым выражениям для ПВ и ФР приводит механизм усечения: если $F(x), x < \infty - \Phi P N(t)$ до усечения, то после отбрасывания значений $N(t) > N_m \Phi P$ преобразуется к виду

$$F_s(x) = F(x)big/F(N_m), \quad x \le N_m.$$
(16)

Например, усечённую с двух сторон в точках N_0 и N_m ФР максимума ЭК слоя E_s легко получить из (12) по формуле (16)

$$F_6(x) = \frac{F_0(x) - F_0(N_0)}{F_0(N_m) - F_0(N_0)}, \quad N_0 \le x \le N_m.$$
(17)

 ΦP максимума ЭК, обрезанную слева в точке N_0 и усечённую справа в точке N_m , получим из (14) по правилу (16)

$$F_7(x) = F_0(x)/F_0(N_m), \quad N_0 \le x \le N_m.$$
 (18)

ВЕРИФИКАЦИЯ

Точность описания полученными ΦP значений максимальной ЭК слоя E_s была проверена по экспериментальным данным ионосферной станции г. Москвы за июнь—июль 1976—1977 годов. На ионосферных станциях не измеряют регулярно ЭК слоя E_s . Поэтому выборка максимальной ЭК была получена пересчётом из выборки частоты экранирования $f_b(t)$ слоя E_s по следующему правилу [6]: $N(t) = f_b^2(t)/80, 8$, где $f_b(t)$ имеет размерность [кГц], а N(t)— [см⁻³]. Пропуски в рядах частоты экранирования заполнялись методом подстановки с подбором [7]. Далее, поскольку N(t) — периодически нестационарный процесс [8], все данные выравнивались по уровню медианы в 12 часов дня

$$\tilde{N}(t) = N(t) - \mathrm{me}(t) + \mathrm{me}(12),$$
(19)

где me(t) — периодическая с периодом сутки функция, описывающая медиану процесса N(t). По выборке $\tilde{N}(t)$ объёмом 11712 отсчётов была рассчитана эмпирическая вероятность $P(x) = P[\tilde{N}(t) > x] = 1 - P[\tilde{N}(t) < x]$, которая нанесена в логарифмическом масштабе на рис. 2 кружками. Там же кривой I нанесена вероятность $P(x) = 1 - F_1(x)$, рассчитанная с помощью логарифмически нормальной $\Phi P(2)$; кривой 2 нанесена вероятность $P(x) = 1 - F_2(x)$, рассчитанная для отражающего экрана с помощью (8); кривой 3 — вероятность $P(x) = 1 - F_3(x)$, рассчитанная через усечённое распределение Коши (12); кривой 4 — вероятность $P(x) = 1 - F_5(x)$, рассчитанная через обрезанное распределение Коши (14); штриховой кривой 6 — вероятность $P(x) = 1 - F_6(x)$, рассчитанная через усечённое с двух сторон распределение Коши (17); штриховой кривой 7 — вероятность $P(x) = 1 - F_7(x)$, рассчитанная через обрезанное в точке N_0 и усечённое в точке N_m распределение Коши (18).

Из рис. 2 хорошо видно, что вероятность аномально больших выбросов ЭК слоя E_s даже качественно не описывается логарифмически нормальным законом распределения, не говоря уже о количественном соответствии. Наиболее точно эмпирическую вероятность P(x) аппроксимируют усечённое с двух сторон (17) и обрезанное слева, усечённое справа (18) распределения Коши. Сравнения кривых 4 c 6 u 5 c 7 показывает, что учёт казалось бы несущественного ограничения на предельно допустимые значения ЭК слоя E_s (15) качественно меняет поведение длинного тяжёлого правого хвоста распределения. Причём поведение эмпирических точек вблизи N_m (для данной выборки $N_m \approx 2,5 \cdot 10^6$ эл/см³) на рис. 2 хорошо согласуется с механизмом усечения значений N(t) на границе N_m . Наиболее простое обрезанное слева распределение Коши (13)–(14) (кривая 5) с высокой точностью описывает эмпирическую вероятность вплоть до значений ЭК $N(t) = 1,3 \cdot 10^6$ эл/см³. Такие значения в летние месяцы превышают максимум ЭК для всей ионосферы, и поэтому в большинстве теоретических и практических задач распределение (13)–(14) можно принять в качестве теоретического для вероятностного описания максимума ионизации среднеширотного слоя E_s .

С. Н. Моисеев



ЛИТЕРАТУРА

- 1. Моисеев С. Н. //Геомагн. и аэрон., 1997. Т. 37. № 3. С. 107.
- 2. Гершман Б. Н., Игнатьев Ю. А., Каменецкая Г. Х. Механизмы образования ионосферного спорадического слоя Е на разных широтах. — М.: Наука, 1976. 107 с.
- 3. Лукин А. Н., Моисеев С. Н. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1991. Т. 34. № 8. С. 872.
- 4. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
- 5. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 900 с.
- 6. Грудинская Г. П. Распространение радиоволн. М.: Высшая школа, 1967. 244 с.
- 7. Моисеев С. Н. //Геомагн. и аэрон., 1997. Т. 37. № 4. С. 63.
- 8. Лукин А. Н., Моисеев С. Н. //Геомагн. и аэрон., 1993. Т. 33. № 2. С. 77.

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию 17 октября 1997 г.

PROBABILITY DISTRIBUTION OF E_s -LAYER MAXIMUM ELECTRON DENSITY WITH AN ACCOUNT OF BOUNDARY CONDITIONS

S. N. Moiseev

The boundary conditions are considered which forbid the occurrence of E_s electron density values below the background level and above limiting admissible level. The one-dimensional probability laws of E_s layer maximum electron density distribution are obtained for each Boundary condition using the Cauchy distribution. The laws of distribution have been verified by experimental data.

УДК 621.371.24

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЛАБЛЕНИЯ МИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН В СУХИХ СНЕГОПАДАХ

А.М.Ошарин

Проведено численное моделирование ослабления волн миллиметрового диапазона в сухих снегопадах с учётом реальных форм снежинок. Показано, что для снегопадов умеренной интенсивности значения усреднённых по ориентациям снежинок поперечников ослабления хорошо аппроксимируются степенной функцией в зависимости от эквивалентного диаметра хлопьев. Для распределений частиц по размерам типа гаммараспределения и его разновидностей это обстоятельство позволяет получить аналитическое выражение для погонного коэффициента ослабления плоской электромагнитной волны снегопадом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вычисление характеристик распространения волн миллиметрового диапазона в снегопадах сопряжено со значительными трудностями по причине очень сложной формы и структуры снежных кристаллов и их агрегатов. В коротковолновой части миллиметрового диапазона ситуация усложняется ещё и тем обстоятельством, что характерные размеры кристаллов льда, объединённых в хлопья, а также характерные размеры деталей внутренней структуры снежинок становятся сравнимы с длиной волны падающего излучения. В подобных ситуациях при расчёте рассеивающих характеристик хлопьев следует с осторожностью пользоваться традиционным подходом, основанным на понятии эффективной частицы по причине присущих ему ограничений. Как известно, в рамках указанного подхода априори предполагается, что рассеивающие характеристики исходных частиц сложной формы, полученные в результате усреднения по всевозможным ориентациям этих частиц в пространстве, должны быть близки к характеристикам рассеяния некоторой "эффективной"частицы сферической формы с соответствующим образом подобранной диэлектрической проницаемостью и эффективным радиусом. В случае сухого снега, например, использование этого подхода сводится к тому, что состав снежинки рассматривается как смесь льда и воздуха в соответствующей пропорции, определяемой средней плотностью снежинки, а её диэлектрическая проницаемость вычисляется по формулам теории эффективной среды для этой смеси. Однако, как известно, одним из главных условий применимости теории эффективной среды является требование малости содержащихся в ней рассеивающих включений по отношению к длине волны падающего излучения, что позволяет использовать квазистатическое приближение при выводе соответствующих формул. На длинах волн, принадлежащих коротковолновой части миллиметрового диапазона, где, как было отмечено выше, характерные размеры кристаллов становятся сопоставимы с длиной волны, это условие нарушается.

В последнее время при решении подобного рода задач большую популярность приобрели численные методы, основанные на предложенном в [1] и развитом впоследствии [2, 3] методе Парселла— Пеннипакера, позволяющие вычислять рассеяние и поглощение электромагнитных волн частицами произвольной формы и структуры. Метод Парселла—Пеннипакера или метод взаимодействующих диполей есть не что иное, как алгоритм численного решения интегрального уравнения рассеяния, описывающего взаимодействие плоской электромагнитной волны с произвольной частицей. Суть его состоит в замене исходной частицы набором из N диполей, взаимодействующих посредством перерассеяния поля падающей волны. Каждый такой диполь представляет собой элементарную ячейку из материала частицы, которая поляризуется внешним полем и полем рассеяния всех прочих ячеек. Располагая диполи в узлах кубической решётки, "встроенной"внутрь моделируемой частицы, мы аппроксимируем её форму и сводим исходную задачу рассеяния внешней волны на частице к задаче рассеяния излучения конечным набором диполей, положения которых известны. Поляризуемость элементарной ячейки в методе взаимодействующих диполей находится по формуле Клаузиуса—Моссотти [1]

$$\alpha = \frac{3d^3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2},\tag{1}$$

где d — размер элементарной кубической ячейки, равный также расстоянию между узлами кубической решётки, используемой при моделировании формы частицы, а ε — комплексная диэлектрическая проницаемость вещества частицы.

В настоящей работе на основе изложенного метода в продолжение теоретических исследований [4– 7] проводилось численное моделирование ослабления линейно—поляризованных волн миллиметрового диапазона в сухих снегопадах с учётом реальных форм снежинок. Вычисления проводились в окнах прозрачности миллиметрового диапазона на частотах 30, 96 и 225 ГГц при температуре воздуха $t = -5^{\circ}$ С.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Предполагалось, что снегопад состоит из снежных хлопьев, образованных путём сцепления и слипания кристаллов дендритоподобной формы друг с другом. Рассеивающие свойства одиночных дендритов рассматривались в [4]. Компьютерное конструирование хлопьев снега проводилось с помощью алгоритма, описанного в [7]. На рис. 1 представлена двумерная проекция базового кристалла, состоящего из N = 133 дипольных ячеек, и приведены примеры плоских проекций агрегатов, образованных из M = 9 и M = 16 кристаллов льда. Размеры дипольной ячейки базового кристалла d изменялись в интервале 0,05-0,125 мм, толщина кристалла принималась равной размеру дипольной ячейки, а его гексагональный диаметр варьировал при этом в интервале 1,25-3,125 мм в соответствии с характерными параметрами плоских дендритов, встречающихся в природе [8, 9]. В данной работе в качестве поляризуемости дипольной ячейки использовалось обобщение (1), предложенное в [7], а значения диэлектрической проницаемости льда заимствовались из [10] и составили при $t = -5^{\circ}$ С величину $\varepsilon = (3,15; 0,0026)$ на частоте 30 ГГц, $\varepsilon = (3,15; 0,0083)$ на частоте 96 ГГц и $\varepsilon = (3,15; 0,0194)$ на частоте 225 ГГц. Общее число дипольных ячеек, образующих агрегаты, как правило, оказывалось меньше произведения $M \times N$, поскольку алгоритм моделирования хлопьев на начальном этапе допускал многократные наложения некоторых из ячеек друг на друга, причём из нескольких ячеек, попавших в одну и ту же точку, на заключительном этапе сохранялась только одна, а остальные отбрасывались. Характерный размер получающихся в ходе моделирования хлопьев зависел от количества базовых кристаллов, объединившихся в агрегат, и их гексагонального диаметра. Из-за сложной формы хлопьев трудно охарактеризовать этот размер одним числом. В данной статье за характерные размеры агрегатов принимались размеры наименьшего параллелепипеда, целиком содержащего в себе модельную снежинку при той или иной ориентации её в пространстве. Ориентация самого параллелепипеда при этом фиксировалась так, чтобы его грани всегда оставались параллельными плоскостям xy, xz и yz лабораторной системы координат. Числа, полученные таким путём, и характеризующие размеры модельных снежинок, изображённых на рис. 1, имеют следующие значения: для агрегата из 9 кристаллов — $L_x = 3,4$ мм, $L_y = 4,0$ мм, $L_z = 3,4$ мм; для агрегата из 16 кристаллов — $L_x = 4,5$ мм, $L_y = 5,3$ мм, $L_z = 4,2$ мм. Используя эти данные, и зная общее число дипольных ячеек в конкретной реализации снежинки, можно оценить её плотность. Найденное таким образом значение плотности составило 0,022 г/см³ в первом и 0,018 г/см³ во втором случаях. Среднее по всем использованным в работе реализациям агрегатов значение плотности оказалось равным 0,034 г/см³. Такого порядка цифры характерны для частиц сухого снегопада [8, 9].



Рис. 1.

Поскольку распределения хлопьев снега по размерам обычно принято выражать в виде функции так называемых эквивалентных диаметров, представляющих собой диаметры капель воды, образующихся после полного таяния снежинки, мы каждой из реализаций модельной снежинки ставили в соответствие эквивалентную сферическую частицу. Максимальный характерный размер моделируемых хлопьев соответствовал диаметру эквивалентной сферической капли D = 2,2 мм, что отвечает типичным данным для сухих снегопадов по классификации [8]. Реальный снегопад состоит как из снежных хлопьев, так и из отдельных кристаллов льда, причём отдельные кристаллы, в отличие от хлопьев, как правило, имеют преимущественную ориентацию в пространстве. Дендриты, например, большую часть времени падают так, что их плоские грани располагаются горизонтально [8, 9]. В данной работе предполагалось, что преимущественной ориентации частиц снегопада не существует. При этом характеристики рассеяния плоской волны каждым из агрегатов усреднялись по 27 ориентациям этого агрегата в пространстве. Результаты, относящиеся к более сложному случаю наличия фракции ориентированных частиц, предполагается изложить в последующих публикациях.

На рис. 2, 3 и 4 изображены кривые изменения полученных указанным путём значений средних поперечников ослабления модельных хлопьев снега в зависимости от диаметра эквивалентной капли. Поскольку данные для вертикальной и горизонтальной поляризаций практически совпали, на рисунках представлены результаты только для одной из поляризаций. Максимальный разброс значений сечений ослабления снежинок по ориентациям, усреднённый по всем реализациям, составил величину ~ 28%, а среднеквадратичное отклонение от среднего — величину ~ 15% вне зависимости от частоты.

Оказалось, что на каждой из перечисленных частот полученные данные очень хорошо аппроксимируются степенной зависимостью

$$C_{\rm ext} = aD^b, \tag{2}$$

где D — диаметр эквивалентной капли, а a и b — коэффициенты аппроксимации. Конкретные значения этих коэффициентов для каждой из трёх вышеперечисленных частот приведены в таблице. Предполагается, что D измеряется в мм, $C_{\rm ext}$ — в см².



Учёт дополнительных реализаций модельных хлопьев при вычислении значений среднего поперечника ослабления C_{ext} несколько изменяет величину коэффициентов a и b в указанной зависимости, оставляя неизменной саму её форму.

Обозначив n(D)dD — число снежинок в единице объёма снегопада с диаметром эквивалентной капли в интервале D, D + dD, коэффициент ослабления K_{ext} плоской электромагнитной волны в снегопаде можно записать в следующем виде:

$$K_{\text{ext}} = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} n(D) C_{\text{ext}}(D) dD,$$
(3)

где $C_{\text{ext}}(D)$ — усреднённое по всем ориентациям в пространстве значение сечения ослабления снежных хлопьев, D_{\min} — наименьший, а D_{\max} — наибольший диаметры эквивалентной капли в снегопаде, величина которых зависит от вида распределения снежинок по размерам и от интенсивности снегопада. На основе анализа экспериментальных данных, полученных при наблюдении семи отдельных снегопадов, в качестве функции, описывающей распределения частиц снегопадов по размерам, в [11] было предложено использовать следующую зависимость:

$$n(D)dD = \frac{ND^{\alpha}e^{-D/\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}dD,$$
(4)



где N — число снежинок в единице объёма воздуха, Γ — гамма-функция, α и β — параметры распределения. Как следует из [11], значения указанных параметров зависят от интенсивности снегопада, причём различные снегопады при одной и той же интенсивности характеризуются разными наборами параметров N, α и β . Значения этих параметров, относящиеся к каждому из изученных снегопадов, в зависимости от его интенсивности, указаны в цитированной работе. На рис. 5 приведена доля полного объёма воды, приходящаяся на капли диаметром D в интервале (D, D + dD) при dD = 0,1 мм для типичного случая выпадения снега, наблюдавшегося в [11] при температуре t = -6,8°C, вычисленная с использованием распределения (4). Сплошная кривая относится к минимальной зарегистрированной интенсивности снегопада I = 0,33 мм/час, штриховая — к его максимальной интенсивности I = 2,3 мм/час.

Видно, что чем больше интенсивность снегопада, тем крупнее снежинки, причём все снежинки в обоих случаях порождают капли, не превосходящие 3 мм в диаметре. Аналогичная зависимость была построена нами для всех случаев выпадения снега, изученных в [11], и во всех случаях диаметр эквивалентных капель не превосходил 3 мм. Полагая $D_{\min} = 0$, $D_{\max} = 3$ мм, и экстраполируя зависимость (2), полученную для эквивалентных диаметров D < 2,2 мм, на интервал от 2,2 до 3 мм, находим, что



вычисление $K_{\rm ext}$ сводится к вычислению неполной гамма-функции $\gamma(x; t_0) \equiv \int_0^{t_0} t^{x-1} e^{-t} dt$:

$$K_{\text{ext}} = \frac{Na\beta^b}{\Gamma(\alpha+1)}\gamma(b+\alpha+1; D_{\text{max}}/\beta).$$
(5)

На рис. 6 изображено поведение полученного на основе формулы (5) погонного ослабления линейнополяризованных волн в снегопаде в зависимости от его интенсивности на частотах 30, 96 и 225 ГГц для пяти реализаций снегопадов из [11]. Кривые на рис. 6 представляют собой степенные аппроксимации полученных по формуле (5) значений. Для f = 30 ГГц $K_{\text{ext}} = 8,8 \cdot 10^{-3} I^{1,03}$, для f = 96 ГГц $K_{\text{ext}} = 1,9 \cdot 10^{-1} I^{1,02}$ и для f = 225 ГГц $K_{\text{ext}} = 1,7 I^{0,97}$, где I измеряется в мм/час, K_{ext} — в дБ/км. Отметим, что все зависимости оказываются близкими к линейной.

Сопоставим теперь вычисленные нами значения K_{ext} с измерениями ослабления на частотах 96 и 225 ГГц из [12]. С использованием линейной аппроксимации данных по ослаблению для восьми снегопадов в [12] были получены следующие цифры средних величин коэффициента ослабления K_{ext} в пересчёте на единицу водности снегопада: 0,9 (дБ/км)/(г/м³) на 96 ГГц и 8,7 (дБ/км)/(г/м³) на 225 ГГц. При этом среднеквадратичная ошибка аппроксимации составляла $\pm 23\%$ на каждой из частот. Таким образом, ослабление на частоте 225 ГГц, независимо от интенсивности снегопада, в среднем оказывалось больше ослабления на частоте 96 ГГц в 9,7 раза. В нашем случае, как это следует из приведённых

выше аппроксимационных формул, отношение $K_{\text{ext}}(225 \ \Gamma \Pi)/K_{\text{ext}}(96 \ \Gamma \Pi)$ оказывается слабо зависящим от интенсивности ($\propto I^{-0,05}$) и составляет величину 9,3 для I = 0,5 мм/час, величину 9 для I = 1 мм/час и 8,6 для I = 2,5 мм/час. Учитывая возможную разницу в типах снегопадов, наблюдаемых в [11] и в [12], такого рода сравнение, разумеется, нельзя считать вполне корректным, и тем не менее мы приводим здесь его результаты в качестве иллюстрации отсутствия явных противоречий у принятой нами модели.

Кроме коэффициента ослабления в настоящей работе вычислялась также степень деполяризации прошедшего излучения. Оказалось, что последняя составляет десятые доли процента на всех трёх частотах, причём на фиксированной частоте степень деполяризации уменьшается примерно на порядок по мере роста характерного размера агрегата.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее интересным результатом численного моделирования оказалась возможность степенной аппроксимации усреднённых по ориентациям поперечников ослабления снежных хлопьев степенной функцией, позволяющая для распределений вида (4), а также распределений, являющихся частным случаем принятого, свести вычисление погонного коэффициента ослабления к неполной гамма-функции.

Отметим также, что результаты, представленные здесь, относятся к сухим снегопадам умеренной интенсивности (I < 2,5 мм/час), поскольку априори нельзя утверждать, что полученные степенные аппроксимации для средних поперечников ослабления останутся справедливы и при больших значениях эквивалентного диаметра хлопьев. Выяснение этого обстоятельства, а также исследование более сложного, но важного, с точки зрения практических приложений, случая влажного и мокрого снегопада сопряжены со значительными затратами машинного времени и являются предметом дальнейших исследований.

Автор выражает благодарность А. П. Наумову за внимательное прочтение рукописи и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Purcell E., Pennypacker C. //Astrophys. J., 1977. V. 186. № 2(1). P. 705.
- 2. O'Brien S. G., Goedecke G. H. //Appl. Opt., 1988. V.27. № 12. P.2431.
- 3. Draine B. T. //Astrophys. J., 1988. V. 333. № 2(1). P. 848.
- 4. O'Brien S. G., Goedecke G. H. //Appl. Opt., 1988. V. 27. № 12. P. 2439.
- 5. O'Brien S. G., Goedecke G. H. //Appl. Opt., 1988. V.27. № 12. P. 2445.
- 6. Chylek P., Zhan J., Pinnich R. G. //Int. J. Infrared and Millimeter Waves, 1993. V. 14. № 11. P. 2295.
- 7. Osharin A. M. //Digest of IGARSS'94, 1994. V. 1. P. 82.
- 8. Огучи Т. //ТИИЭР, 1983. Т. 71. № 9. С. 6.
- 9. Литвинов И. В. //Структура атмосферных осадков. Л., 1974.
- 10. Hufford G. A. //URSI Nat. Radio Sci. Meet., 1989. P. 14.
- 11. Литвинов И. В. //Изв. АН СССР, сер. геофизическая, 1959. № 10. С. 1473.
- 12. Nemarich J., Wellman R. J., Lacombe J. //IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, 1988. V. 23. P. 287.

Научно-исследовательский радиофизический институт, г. Н. Новгород, Россия Поступила в редакцию 8 сентября 1997 г.

А.М.Ошарин

MODELING OF ELECTROMAGNETIC MILLIMETER WAVE EXTINCTION BY DRY SNOWFALLS

A. M. Osharin

Computer modeling of the millimeter wave extinction by dry snowfalls, taking into account the complicated shapes of the flakes, is carried out. It is shown that for snowfalls of moderate intensity the everaged over flake orientations extinction cross-section values are well approximated by the exponential function depending on the equivalent snow particle diameters. For gamma-type particle distributions this alows one to explicitly obtain the expression for the plane wave extiction coefficient in snowfalls.

УДК 538.566(075)

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА ИМПУЛЬСНЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ И МАГНИТНЫМИ ТОКАМИ

В. П. Докучаев

Рассмотрена задача о возбуждении электромагнитных полей электрическими и магнитными импульсными токами, находящимися в прямоугольном волноводе. Получены пространственно—временные функции Грина для волновода с идеально проводящими стенками. Основное внимание уделено анализу энергетического спектра излучения и влиянию на него конечной длительности импульса тока и конечных размеров проводника с током. Показано, что влияние указанных характеристик на спектр мало на низких частотах и растёт с ростом частоты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Излучение монохроматических электромагнитных волн в волноводах различной формы и с различными краевыми условиями на стенках волноводов всесторонне исследовано во многих работах и полное изложение указанной проблемы можно найти, например, в работах [1-4]. Излучение монохроматических и импульсных токов в анизотропной плазме было исследовано, например, в работе [5]. В последнее время появился интерес к проблеме возбуждения акустических и электромагнитных полей импульсными источниками, действующими внутри волноводов [6-7]. Интерес к этой проблеме в значительной степени обусловлен использованием в некоторых системах связи несинусоидальных импульсных сигналов [7]. Заметим, что излучение импульсных электрических токов в анизотропных однородных средах рассмотрено в работе [8]. Здесь получено решение задачи о возбуждении электромагнитных полей в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками мгновенно действующими точечными электрическими и магнитными токами. Иными словами, получены пространственновременные функции Грина для прямоугольного волновода. При этом использована аналогия дисперсионных свойств волновода с дисперсией электромагнитных волн в холодной изотропной плазме. Эта аналогия особенно отчётливо проявляется в том, что волновые поля в волноводе и плазме описываются одним и тем же уравнением Клейна-Гордона, решение которого, в свою очередь, подробно исследовано в квантовой механике [9].

В теории излучения волн любой физической природы большой интерес представляют энергетические характеристики излучения — распределение энергии по спектру излучаемых частот, диаграмма направленности и полная излучаемая энергия или мощность в случае монохроматических источников.* Ниже будет исследовано влияние конечной длительности импульсных линейных токов и их протяжённости на спектр излучаемых частот и полную энергию излучения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть прямоугольный волновод представляет собой металлическую трубу прямоугольного поперечного сечения с идеально проводящими стенками. На рис. 1 схематически изображено сечение этого волновода, *a* и *b* — ширина стенок. Ось *z* выбрана вдоль оси волновода.

^{*}В цилиндрических волноводах с любым поперечным сечением (прямоугольным, круглым, эллиптическим) направление распространения излучения происходит вдоль оси волновода и нет смысла говорить о диаграмме направленности, т. к. она, по-существу, задана.



В сечении *z* = *z*₀ расположены продольные, относительно указанной оси, электрические и магнитные токи с плотностью

$$\vec{j}_e = D\vec{e}_z\delta(t)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0),\tag{1}$$

$$\vec{j}_m = M\vec{e}_z\delta(t)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0).$$
(2)

Здесь $\vec{e_z}$ — единичный вектор оси $z; x_0, y_0, z_0$ определяют положение элементарных токов внутри волновода и ясно, что $x_0 \le a, y_0 \le b; \delta$ — символ функций Дирака, индексы e и m относятся соответственно к электрическим и магнитным токам. Размерность постоянных величин D и M — соответственно электрический и магнитный момент. Если воспользоваться законами сохранения электрических и магнитных зарядов, то их плотности имеют вид

$$\rho_e = DH(t)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta'(z - z_0), \tag{3}$$

$$\rho_m = MH(t)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta'(z - z_0).$$
(4)

Штрих означает производную δ -функции, H(t) — ступенчатая функция Хевисайда:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < t \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \le t < +\infty. \end{cases}$$
(5)

Формулы (3)–(5) свидетельствуют о том, что в момент времени t = 0 в волноводе электрические токи (1)–(2) порождают диполи, ориентированные по оси z.

При анализе энергетических характеристик импульсного возбуждения волновода нам потребуется учесть конечную длительность импульсного тока и его протяжённость. С этой целью мы рассмотрим также задачу о возбуждении полей линейными токами с плотностью

$$\vec{j}_{e,m} = \dot{q}_{e,m}(t)\vec{e}_z\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)H(L-|z|),$$
(6)

$$\bar{\rho}_{e,m} = q_{e,m}(t)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)[\delta(z - L) - \delta(z + L)],$$
(7)

где величина заряда q(z) — достаточно произвольная функция времени, $\dot{q}(t)$ — её производная, 2L — длина плеча диполя. В дальнейшем мы воспользуемся в качестве q(t) биэкспоненциальной функцией вида

$$q(t) = q_0 \begin{cases} \exp(t/\tau_1) & \text{при} \quad -\infty < t \le 0, \\ \exp(-t/\tau_2) & \text{при} \quad 0 \le t < +\infty, \end{cases}$$
(8)



где τ_1 — время "включения"(или образования диполя, τ_2 — время "выключения" источника. На рис. 2 представлена функция q(t) для случая $\tau_1 = 1$ и $\tau_2 = 5$.

В теории возбуждения электромагнитных волн внутри прямоугольного волновода монохроматическими токами хорошо известно, что продольные электрические токи возбуждают только одно семейство нормальных волн — E-волны, а продольные магнитные токи генерируют второе семейство нормальных волн — H-волны [1–2]. В первом случае удобно воспользоваться для волновода с идеально проводящими стенками вектор—потенциалом \vec{A} для магнитного поля. В нашем случае единственная отличная от нуля z-компонента этого потенциала ($\vec{A} = A\vec{e}_z$) описывается уравнением

$$\Delta A - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \mu j_e(\vec{R}, t), \tag{9}$$

а электромагнитные поля определяются соотношениями

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A},$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \vec{B} / \mu_0 \mu.$$
(10)

Здесь ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные системы СИ, ε и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей волновод, $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ — скорость света в вакууме, \vec{B} и \vec{D} — векторы магнитной и электрической индукции, \vec{E} и \vec{H} — напряжённости электрического и магнитного полей. Граничные условия равенства нулю тангенциальных компонент поля \vec{E} на стенках волновода сводятся к условиям Дирихле для компоненты потенциала

$$A(\vec{R},t) = 0$$
 при $x = 0, a; y = 0, b.$ (11)

Таким образом, для уравнения (9) с источниками в правой части (1) или (6) и при учёте краевых условий (11) мы сформулировали краевую задачу для *E*-волн.

В другом интересном случае, когда заданы линейные продольные магнитные токи с плотностью $\vec{j}_m = j_m \vec{e}_z$, удобно ввести вектор-потенциал $\vec{F} = F \vec{e}_z$ для поля электрической индукции. При этом функция F будет удовлетворять уравнению

$$\Delta F - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\varepsilon_0 \varepsilon j_m(\vec{R}, t), \qquad (12)$$

а электромагнитные поля находятся из соотношений

$$\vec{D} = -\operatorname{rot} \vec{F}, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} + \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F},$$

$$\vec{E} = \vec{D} / \varepsilon_0 \varepsilon, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$
(13)

Граничные условия в этом случае сводятся для *F* к условиям Неймана на стенках волновода:

$$\partial F/\partial x = 0$$
 при $x = 0, a; \quad \partial F/\partial y = 0$ при $y = 0, b.$ (14)

Это вторая краевая задача для полей *H*-волн в прямоугольном волноводе.

3. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

Решение уравнения (9) с элементарным электрическим током в правой части (1) и граничными условиями (11) можно получить, комбинируя разложение источника (1) по известным собственным функциям волновода с преобразованиями Фурье искомого поля по координате z и времени t. Иными словами, учтём разложения δ -функций в ряды

$$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \frac{1}{ab} \sum_{m = -\infty}^{+\infty} \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \sin\frac{m\pi x_0}{a} \sin\frac{n\pi y_0}{b} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}.$$
 (15)

Потенциал А будем искать в аналогичной форме

$$A = \frac{1}{ab} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} A_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$
 (16)

В результате подстановки (15)–(16) в уравнение (9) получим следующее уравнение для функций $A_{mn}(z,t)$:

$$\frac{\partial^2 A_{mn}}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \left(\frac{\partial^2 A_{mn}}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 A_{mn} \right) = -\mu_0 \mu D \delta(t) \delta(z - z_0). \tag{17}$$

Здесь использовано обычное обозначение для критических частот прямоугольного волновода [1-2]

$$\omega_{mn} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$
(18)

Заметим, что уравнение (17) является линейным уравнением Клейна—Гордона (см., например, [9]). Интегральное решение этого уравнения получим с помощью двукратного преобразования Фурье по координате z и времени t. В результате найдём, что

$$A_{mn}(z,t) = \frac{D}{4\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{i[\omega t + \alpha(z - z_0)]\}}{\omega^2 - \omega_{mn}^2 - c_1^2 \alpha^2} d\omega d\alpha ,$$
(19)

где введено обозначение $c_1 = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ для фазовой скорости волн в однородном пространстве с постоянными величинами ε и μ . Интеграл по ∞ в соотношении (19) находим с помощью теории вычетов

$$A_{mn}(z,t) = \frac{iD}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon c_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{i[\omega t - \sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}|z - z_0|/c_1]\}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} d\omega.$$
(20)

Оставшийся интеграл в (20) подробно исследован и вычислен в ряде работ по теории уравнений Клейна— Гордона [5, 9, 10]. Таким образом, из (20) окончательно получим

$$A_{mn} = \frac{D}{2\varepsilon_0 \varepsilon c_1} H\left(t - \frac{|z - z_0|}{c_1}\right) J_0\left[\omega_{mn} \sqrt{t^2 - \left(\frac{z - z_0}{c_1}\right)^2}\right],\tag{21}$$

где *H* — по-прежнему функция Хевисайда (5), *J*₀ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Подставляя (21) в (16), находим полное решение задачи о потенциале мгновенно действующего точечного источника — продольного по отношению к оси волновода электрического разрядного тока в прямоугольном волноводе:

$$A = \frac{W_1 D}{2ab} H \left(t - \frac{|z - z_0|}{c_1} \right) \sum_{m = -\infty}^{+\infty} \sum_{n = -\infty}^{+\infty} J_0 \left[\omega_{mn} \sqrt{t^2 - \left(\frac{z - z_0}{c_1}\right)^2} \right] \times \\ \times \sin \frac{m \pi x_0}{a} \sin \frac{n \pi y_0}{b} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}, \qquad (22)$$

где использовано обозначение для характеристического импеданса однородной среды, заполняющей волновод:

$$W_1 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = W_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = 120\pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad [O_M].$$
(23)

Как отмечено выше, потенциал (22) описывает электромагнитные поля семейства E-волн в прямоугольном волноводе.

Аналогичным способом решена вторая граничная задача о возбуждении H-волн элементарным продольным магнитным током (2) с краевыми условиями (14) для потенциала F полей этих волн. Таким образом, решение уравнения (12) с источником (2) имеет вид

$$F = \frac{M}{2abW_1} H\left(t - \frac{|z - z_0|}{c_1}\right) \sum_{m = -\infty}^{+\infty} \sum_{n = -\infty}^{+\infty} J_0\left[\omega_{mn}\sqrt{t^2 - \left(\frac{z - z_0}{c_1}\right)^2}\right] \times \\ \times \cos\frac{m\pi x_0}{a} \cos\frac{n\pi y_0}{b} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}.$$

$$(24)$$

Соотношения (22) и (24) дают строгое решение задач о возбуждении прямоугольного волновода с идеально проводящими стенками продольными электрическими и магнитными токами. Электромагнитные поля находятся из соотношений (10) и (13).

Здесь полезно подчеркнуть глубокую аналогию между распространением E- и H-волн в волноводе с распространением электромагнитных волн в холодной изотропной плазме. Действительно, уравнение Клейна—Гордона (17) при $\varepsilon = \mu = 1$, с заменой ω_{mn} на плазменную частоту электронов ω_{pe} , описывает распространение высокочастотных электромагнитных волн в плазме [11–12].

Том XLI №4

Из соотношений (22)–(24) видно, что мгновенное возникновение продольных элементарных диполей D и M (3)–(4) порождает в волноводе распространение пакетов соответственно E- и H-волн. Передний фронт каждого пакета движется со скоростью c_1 . После прохождения фронта непосредственно за ним возбуждаются электромагнитные колебания на критических частотах, затухающие со временем в каждой точке волновода при больших t по закону

$$J_0(\omega_{mn}t) \propto \frac{\cos(\omega_{mn}t)}{\sqrt{t}} \,. \tag{25}$$

Наконец, заметим, что соотношения (22) и (24), после замены $t \rightarrow t-t_0$, определяют пространственновременные функции Грина для соответствующих краевых задач. Они могут быть использованы для получения интегральных решений для достаточно произвольных распределений в пространстве продольных электрических и магнитных токов с конечной длительностью протекания. Таким образом, потенциалы полей для мгновенных точечных источников дают представление о характере электромагнитных полей в волноводе. Однако полная энергия излучения E- и H-волн для таких источников, как будет показано ниже, расходится. Поэтому энергетические характеристики мы рассмотрим в случае токов конечной длительности τ и распределённых вдоль оси z с конечной длиной L (6)–(7).

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ

В теории излучения волн любой физической природы, как правило, основной интерес представляют энергетические характеристики излучения: распределение энергии по частотному спектру, её распределение в пространстве(диаграмма направленности) и полная излучаемая энергия или мощность, в случае монохроматического источника.

Существуют два метода расчёта энергетических характеристик электромагнитного излучения: метод Пойнтинга, в котором вычисляется поток энергии через замкнутую поверхность, окружающую источник, и метод наведённых электро- или магнитодвижущих сил [1, 2, 4]. Второй метод особенно широко применяется в теории излучения движущихся зарядов и имеет ещё одно название — метод сил реакции излучения [13]. В этом методе полная энергия излучения определяется выражением

$$\mathcal{E} = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\vec{j}_e \vec{E}^*) + (\vec{j}_m \vec{H}^*)] d^3 R dt, \qquad (26)$$

где Re — символ реальной части, (*) означает комплексно-сопряжённые величины. Первое слагаемое обусловлено наведённой электродвижущей силой, второе соответствует магнитодвижущей силе [13, 14], $d^3R = = dxdydz$.

В случае мгновенных элементарных источников (1)–(2) электромагнитные поля \vec{E} и \vec{H} , которые легко получить из (10), (13) с помощью формул (22) и (24), будут содержать сингулярные компоненты в виде δ -функций и, как следствие этого, интегралы в (26) будут расходиться, т. е. полная излучаемая энергия \mathcal{E} будет бесконечной.

С тем чтобы устранить эту особенность, при расчётах энергии мы найдём потенциалы полей \vec{A} и \vec{F} , а затем соответствующие им поля \vec{E} и \vec{H} . Опуская промежуточные вычисления, для A_{mn} в формуле (16) будем иметь вместо (20) следующее выражение:

$$A_{mn} = \frac{1}{2\varepsilon_0 \varepsilon c_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2} L/c_1)}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}/c_1} \cdot \frac{\omega Q(\omega)}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} \times$$

В.П.Докучаев

$$\times \exp i\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}|z|}{c_1}\right) d\omega.$$

Здесь введено обозначение $Q(\omega)$ для спектра функции q(t) в (6)

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) \exp(-i\omega t) dt.$$
(28)

Предельный переход к точечному мгновенному источнику осуществляется таким образом, что при $L \rightarrow 0, q(t) = q_0 H(t)$ и из (27)–(28) получаем (20) при $D = q_0 L$. В случае биэкспоненциальной функции (8) из (28) находим, что

$$Q(\omega) = \frac{q_0(\tau_1 + \tau_2)}{2\pi(1 - i\omega\tau_1)(1 + i\omega\tau_2)}.$$
(29)

В случае магнитных токов конечной длины вдоль оси z и с биэкспоненциальным распределением $q_m(t)$ для F_{mn} получается интеграл, аналогичный (27) с точностью до постоянного множителя. Легко убедиться, что интеграл по частоте в (27) при $Q(\omega)$ (29) не выражается через известные функции, и поэтому удобно сразу ограничиться исследованием энергетических характеристик излучения. Они определяются более простыми соотношениями, так как в результате усреднения по времени в (25) исчезает информация о фазе излучаемых волн, а реактивные ближние поля источников не связаны с энергией излучения.

Обобщая соотношения (22) и (24) на случай источников (6)–(8), далее используя формулы (10), (13) для нахождения E_z и H_z , окончательно из (26) получим для полной энергии излучения E-волн

$$\mathcal{E}_E = \frac{4\pi W_1 D^2}{ab} \sum_{m,n=1}^{\infty} S_{mn} \sin^2 \frac{m\pi x_0}{a} \sin^2 \frac{n\pi y_0}{b} \,. \tag{30}$$

Аналогично найдём энергию Н-волн

$$\mathcal{E}_H = \frac{4\pi M^2}{abW_1} \sum_{m,n=0}^{\infty} \gamma_m \gamma_n S_{mn} \cos^2 \frac{m\pi x_0}{a} \cos^2 \frac{n\pi y_0}{b}, \qquad (31)$$

где $D = q_e L$, $M = q_m L$ и введены коэффициенты Неймана $\gamma_0 = 1$, $\gamma_m = 2$ при $m = 1, 2, 3, ..., S_{mn}$ определяется выражением

$$S_{mn} = \left(\frac{\omega_{mn}}{q_0}\right)^2 \int_{\omega_{mn}}^{\infty} \left[\frac{\sin(\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}L/c_1)}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}L/c_1}\right]^2 \frac{\omega|Q(\omega)|^2}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} d\omega.$$
(32)

Из соотношения (29) следует, что функция $\mathcal{E}_E = \mathcal{E}_E(x_0, y_0)$ имеет максимум при $x_0 = a/2$, $y_0 = b/2$, т. е. когда продольный электрический ток расположен на оси волновода.

В случае продольных магнитных токов максимум функции $\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_H(x_0, y_0)$ достигается, если токи расположены в углах прямоугольного волновода — $x_0 = 0$, a и $y_0 = 0$, b. При этом из соотношения (31) находим

$$\max \mathcal{E}_H = \frac{\pi M^2}{abW_1} \sum_{m,n=0}^{\infty} \gamma_m \gamma_n S_{mn} \,. \tag{33}$$

В случае биэкспоненциального распределения зарядов (8) функция в формулах (30)-(33) имеет вид

$$S_{mn} = \frac{\omega_{mn}^{2}(\tau_{1} + \tau_{2})^{2}}{4\pi^{2}} \int_{\omega_{mn}}^{\infty} \left[\frac{\sin(\sqrt{\omega^{2} - \omega_{mn}^{2}}L/c_{1})}{\sqrt{\omega^{2} - \omega_{mn}^{2}}L/c_{1}} \right]^{2} \times \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\omega^{2} - \omega_{mn}^{2}}(1 + \omega^{2}\tau_{1}^{2})(1 + \omega^{2}\tau_{2}^{2})}.$$
(34)

Переход в (34) и, следовательно, в (30)–(33) к элементарному источнику с мгновенной длительностью (1)–(2) осуществляется асимптотически путём предельных переходов

$$L \to 0, \quad \tau_1 \to \infty, \quad \tau_2 = 0 \quad \text{или} \quad \tau_1 = 0, \quad \tau_2 \to \infty.$$
 (35)

В этом случае

$$S_{mn} = \frac{\omega_{mn}^2}{4\pi^2} \int_{\omega_{mn}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} = \frac{\omega_{mn}}{8\pi}.$$
 (36)

Анализ двойных сумм в (33) показывает, что в этом случае они расходятся и $\mathcal{E}_H \to \infty$. Только учёт конечной длительности импульса и конечной протяжённости токов вдоль оси *z* устраняет эту расходимость рядов в (30), (31), (33).

Спектральная плотность энергии $e_H(\omega)$ для случая оптимального возбуждения H-волн определяется из соотношения

$$\mathcal{E}_H = \operatorname{Re} \int_0^\infty e_H(\omega) d\omega \,. \tag{37}$$

Расчёты спектральной плотности были сделаны для случая максимальной энергии излучения H-волн (33). В соответствии с формулами (33), (34), (37) при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ и $L \to 0$ находим, что

$$e_H(\omega) = \frac{\omega \tau^2 M^2}{2\pi a b W_1 (1+\omega^2 \tau^2)} \operatorname{Re} \sum_{m,n=0}^{\infty} \gamma_m \gamma_n \frac{\omega_{mn}^2}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}}.$$
(38)

Удобно представить это соотношение в безразмерном виде. С этой целью введём безразмерные величины

$$e = \frac{e_H}{E_0}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_{10}}, \quad e_0 = \frac{\omega_{10}^2 \tau^2 M^2}{2\pi a b W_1}.$$
 (39)

Здесь ω_{10} — критическая частота основной волны H_{10} прямоугольного волновода при условии a > b [2]. Расчёты были выполнены для случая a = 2b, когда из (38) с учётом (39) следует, что

$$e = \frac{\Omega}{[1 + (\omega_{10}\tau\Omega)^2]^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{\gamma_m \gamma_n (m^2 + 4n^2)}{\sqrt{\Omega^2 - (m^2 + 4n^2)}}.$$
(40)

Интересно отметиь, что для магнитного тока малой длительности, т. е. при условии

$$\omega_{10}\tau \ll 1,\tag{41}$$

правая часть в соотношении (40) перестаёт зависеть от параметров источника τ и L. Это свидетельствует об универсальном характере зависимости спектральной плотности энергии от частоты для линейного тока малых размеров ($\omega_{10}L \ll 1$) и малой длительности. В другом предельном случае $\omega_{10}\tau \gg$ 1, после перенормировки спектральной плотности $e_1 = (\omega_{10}\tau)^2 e$, вновь получаем некоторую универсальную функцию $e_1 = e_1(\Omega)$, не зависящую от τ и L. Заметим, что эти выводы остаются в силе и для



спектральной плотности энергии излучения H-волн при произвольном положении магнитного тока в волноводе. Ясно, что при этом появится зависимость универсальных функций e и e_1 от геометрических координат источника.

На рис. З представлена зависимость $e(\Omega)$, рассчитанная по формуле (40) при условии (41). Видно, что излучение отсутствует на частотах меньше основной критической частоты ω_{10} . Спектр излучения содержит резонансные особенности на всех критических частотах волновода. В области высоких частот, когда $\omega_{10}\tau\Omega \gg 1$ (см. рис. 4), в соответствии с (40), сильно меняется высокочастотная часть спектра из-за влияния конечной длительности импульса τ . Более детальный анализ спектра с учётом конечной длины линейного тока L, проведённый на основе соотношения (34), показал, что длина Lтакже уменьшает спектральную плотность излучения в диапазоне высоких частот.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь получены пространственно—временные функции Грина для электромагнитных полей, возбуждаемых внутри прямоугольного волновода импульсными электрическими и магнитными токами. С помощью этих функций можно находить решения различных конкретных задач по проблеме возбуждения указанного волновода разрядными электрическими токами.

В качестве примера рассмотрены энергетические характеристики импульсных токов с конечной длительностью действия и с конечными линейными размерами вдоль оси волновода. Характерные времена нарастания и релаксации токов и размеры источников волн существенно влияют, в основном, на высокочастотный участок энергетического спектра излучения. Это обстоятельство может быть использовано для дистанционной диагностики характерных параметров токов электрического пробоя в волноводах. Экспериментальные исследования электрического пробоя в волноводах дадут полезную информацию для теории передачи информации с помощью дискретных импульсных сигналов [8].

Благодарю А. А. Белобородову за оформление рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988.

В.П.Докучаев



- 2. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989.
- 3. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966.
- 4. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983.
- 5. Денисов Н.Г., Докучаев В.П., Тамойкин В.В. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1973. Т. 16. № 3. С. 125.
- 6. Докучаев В. П. //Акуст. ж., 1997. Т. 41. № 5. С. 25.
- Докучаев В. П. Энергетические характеристики излучения электромагнитных волн электрическими и магнитными токами в круглом волноводе. Межотрасл. сб. /Под ред. Д. С. Лукина. — М.: МФТИ, 1996. С. 68.
- 8. Хармут Х. Несинусоидальные волны в радиолокации и связи. М.: Радио и связь, 1985.
- 9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1975.
- 10. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958.
- 11. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
- 12. Кролл Н., Трайвелтис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
- 13. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1982.
- 14. Марков Г. Т., Сазонов Д. М. Антенны. М.: Энергия, 1975.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия Поступила в редакцию 12 августа 1997 г.

EXCITATION OF RECTANGULAR WAVEGUIDE BY PULSE ELECTRIC AND MAGNETIC CURRENTS

V.P.Dokuchaev

The problem has been considered on excitation of electromagnetic fields by electric and magnetic pulse currents being in a rectangular waveguide. Space-time Green's functions for a waveguide with ideally conducting walls have been obtained. The main attention has been paid to the analysis of the energy radiation spectrum and the influence on it by a finite time current pulse and a finite size conductor with current. It has been shown, that the impact of these characteristics on the spectrum is small at low frequencies and grows with frequency.

УДК 533.951

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ И ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АЛЬФВЕНОВСКИХ И МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ, ПРОНИЗЫВАЕМОМ ПОТОКОМ ИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗА С ПОПЕРЕЧНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

А. Е. Белянцев, В. П. Дворяковский, С. М. Файнштейн, Е. А. Чернова

В статье проведено исследование параметрической и высокочастотной неустойчивости волн Альфвена и магнитного звука в плоском волноводе, пронизываемом потоком плазмы. Выяснены энергии мод, условия синхронизма, показана возможность эффективной ап-конверсии мод Альфвена и магнитного звука вверх по спектру.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] впервые исследована распадная неустойчивость магнитозвуковых и альфвеновских мод в плоском волноводе, заполненном холодной магнитоактивной плазмой, причём постоянное магнитое поле перпендикулярно стенкам волновода. Там же показано, что параметрическая неустойчивость мод возможна только при определённых условиях на номера мод, что связано с тем обстоятельством, что нелинейный комбинационный ток двух мод ортогонален третьей моде; это мы назвали поляризационным запретом. Кроме того, в ограниченной системе, какой является волновод, появляется дополнительная пространственная дисперсия, что ведёт к новым возможностям для синхронного взаимодействия триплетов мод. В данной работе обращается внимание на возможность ВЧ-нестабильности в указанной системе, поскольку она неравновесна — плазма движется поперёк магнитного поля, поэтому появляются моды с отрицательной энергией, которые обуславливают "распад"волны низкой частоты и преобразование энергии вверх по спектру. Эта задача весьма актуальна для практических приложений как лабораторной, твёрдотельной [2], так и космической плазмы [3], где наблюдаются вспышки НЧ-излучения при выбросах плазмы, например, в атмосфере Солнца, звёзд и т.д.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД МОД РЕЗОНАНСНЫХ ТРИПЛЕТОВ

В монографии [4] подробно изучено стационарное движение плазмы поперёк магнитного поля в плоском волноводе и показано, что движение потока плазмы в поперечном направлении можно считать квазиплоским. В этом приближении запишем исходную систему безразмерных МГД уравнений в координатной форме $(OX \parallel \vec{V}_0 \perp \vec{H}_0, \vec{H}_0 \parallel OZ, \vec{H}_0 -$ постоянное магнитное поле, $\vec{V}_0 -$ равновесная скорость плазмы, $\frac{\partial}{\partial u} = 0 -$ плоский волновод)* [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{x_{\delta}}}{\partial t_{\delta}} + M \frac{\partial v_{x_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} + \frac{\partial H_{z_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} &= \mu F_{1}; \quad \frac{\partial H_{x_{\delta}}}{\partial t_{\delta}} - M \frac{\partial H_{z_{\delta}}}{\partial z_{\delta}} - \frac{\partial v_{x_{\delta}}}{\partial z_{\delta}} &= \mu F_{2}, \\ \frac{\partial H_{z_{\delta}}}{\partial t_{\delta}} + M \frac{\partial H_{z_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} + \frac{\partial v_{x_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} &= \mu F_{3}, \quad \frac{\partial \rho_{\delta}}{\partial t_{\delta}} + M \frac{\partial \rho_{\delta}}{\partial x_{\delta}} + \frac{\partial v_{x_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} &= \mu F_{4}, \\ \frac{\partial v_{y_{\delta}}}{\partial t_{\delta}} + M \frac{\partial v_{y_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} - \frac{\partial H_{y_{\delta}}}{\partial z_{\delta}} &= \mu F_{5}, \quad \frac{\partial H_{y_{\delta}}}{\partial t_{\delta}} + M \frac{\partial H_{y_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} - \frac{\partial v_{y_{\delta}}}{\partial z_{\delta}} &= \mu F_{6}, \\ F_{1} &= -v_{x_{\delta}} \frac{\partial v_{x_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} + H_{y_{\delta}} \frac{\partial H_{y_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} + H_{z_{\delta}} \left(\frac{\partial H_{x_{\delta}}}{\partial z_{\delta}} - \frac{\partial H_{z_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} \right) - \\ &- \rho_{\delta} \left(\frac{\partial H_{x_{\delta}}}{\partial z_{\delta}} - \frac{\partial H_{z_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} \right), \\ F_{2} &= \frac{\partial}{\partial z_{\delta}} (v_{x_{\delta}} H_{z_{\delta}}), \quad F_{3} &= -\frac{\partial}{\partial x_{\delta}} (v_{x_{\delta}} H_{z_{\delta}}), \quad F_{4} &= -\frac{\partial}{\partial x_{\delta}} (\rho_{\delta} v_{x_{\delta}}), \\ F_{5} &= -v_{x_{\delta}} \frac{\partial v_{y_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} + H_{x_{\delta}} \frac{\partial H_{y_{\delta}}}{\partial x_{\delta}} + H_{z_{\delta}} \frac{\partial H_{y_{\delta}}}{\partial z_{\delta}} - \rho_{\delta} \frac{\partial H_{y_{\delta}}}{\partial z_{\delta}}, \\ F_{6} &= \frac{\partial}{\partial z_{\delta}} (v_{y_{\delta}} H_{z_{\delta}}) - \frac{\partial}{\partial x_{\delta}} (v_{x_{\delta}} H_{y_{\delta}} - v_{y_{\delta}} H_{x_{\delta}}), \end{aligned}$$

где $M = \frac{V_0}{C_A}, C_A = H_0(4\pi\rho_0)^{-1}, x_{\delta}, z_{\delta} = \frac{x, z}{d}, d$ — толщина волновода, $v_{x_{\delta},y_{\delta}} = \frac{v_{x,y}}{C_A}, H_{x_{\delta},y_{\delta},z_{\delta}} = \frac{H_{x,y,z}}{H_0}, \rho_{\delta} = \rho\rho_0^{-1}, \rho_0$ — равновесная плотность, $v_{x,y,z}, \rho, H_{x,y,z}$ — волновые возмущения скорости, плотности, магнитного поля, соответственно, $t_{\delta} = t\frac{C_A}{d}$. Систему (1) необходимо дополнить граничны-

 $v_{x,y}(0) = 1.$ (2)

Параметр $\mu \ll 1$ введён для обозначения малости $F_i.$ Пр
и $\mu = 0$ из (1) получим дисперсионные уравнения

$$\gamma_s^2 - k_s^2 = \pi^2 n_s^2, \tag{3}$$

$$\gamma_s^2 = \pi^2 n_s^2,\tag{4}$$

А.Е.Белянцев и др.

470

ми условиями

^{*}Индекс δ в дальнейшем опускаем. Считаем, что *c*_A ≫ *c*_s (*c*_s — скорость звука), поэтому тепловым движением в плазме можно пренебречь, т. к. магнитное давление много больше газокинетического.
$(\gamma_s = \omega_s - Mk_s, n = 1, 2...)$ Уравнение (3) описывает быстрый магнитный звук с поляризационным вектором

$$\vec{U}_s = \{v_x, H_x, H_z, \rho, v_y, H_y\} = \left\{\sin \pi n_s z, -\frac{i\pi n_s}{\gamma_s}\cos \pi n_s z, k_s \gamma_s^{-1}\sin \pi n_s z, k_s \gamma_s^{-1}\sin \pi n_s z, \sin \pi n_s z, \frac{\pi n_s}{\gamma_s}\cos \pi n_s z\right\},$$

а уравнение (4) — волноводную моду (альвеновские колебания) с вектором $\vec{U}_s = \{v_y, H_y\}$. Из анализа (3) и (4) нетрудно определить, что для волновых триплетов могут быть выполнены следующие условия синхронизма (см. рис. 1):

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \,, \quad k_1 + k_2 = k_3 \,. \tag{5}$$

При $C_s \to 0$ условия синхронизма для процессов с участием медленной магнитозвуковой моды не выполняются, поэтому инкремент параметрической неустойчивости для неё равен нулю. Соответствующие результаты счёта на ЭВМ соотношений (5) представлены в табл. 1, 2. Определим энергии мод магнитного звука $W = \frac{H_x^2}{8\pi} + \frac{H_y^2}{8\pi} + \frac{H_z^2}{8\pi} + \frac{\rho v_x^2}{2} + \frac{\rho v_y^2}{2}$ с помощью поляризационного вектора моды. Средняя энергия волны магнитного звука по сечению волновода отрицательна при условии

$$\frac{\pi^2 n_s^2}{\gamma^2} > \frac{\omega_s^2}{\gamma_s^2} + M^2 \quad (M > 1)$$

или в размерных переменных

$$\pi^2 n_s^2 > 1 + \left[1 + C_A^2 v_{\phi}^{-1} \right] \tag{6}$$

 $(v_{\phi} = \omega k^{-1})$. При M = 0 энергия мод положительна, поэтому ВЧ неустойчивость не реализуется, как это отмечено в [1]. При $\mu \ll 1$ решение (1) ищем в виде асимптотического ряда

$$U_{i} = \sum_{s=1}^{3} \Psi_{s}(z) a_{i}(\mu x, \mu t) \exp\{i\omega_{s}t - ik_{s}x\} + \mu Q_{s}(\mu x, \mu t, x, t) + \kappa.c.,$$
(7)

где a_i — комплексная амплитуда, соответствуящая v_x ; Q_i — малые нелинейные добавки. Отметим, что медленная пучковая мода имеет отрицательную энергию, её частота ω_1 , поэтому реализуется ВЧ неустойчивость [6, 7].

Следуя [1] и решая нелинейную краевую задачу, получим укороченные уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд волн

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial t} + v_{\text{rp}_{1,2}} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial x} = \pm i\sigma_{1,2}a_3a_2^*, \quad \frac{\partial a_3}{\partial t} + v_{\text{rp}_3} \frac{\partial a_3}{\partial x} = i\sigma_3a_1a_2, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} v_{\rm rp_s} &= \left\{ \left[(k_s \omega_s + M \pi^2 n_s^2) \gamma_s^{-1} + M \gamma_s + k_s \right] \left[(k_s^2 + \pi^2 n_s^2) \gamma_s^{-1} + \gamma_s \right]^{-1} \right\}, \\ \sigma_{1,2} &= \frac{8j^2}{m(m^2 - 4j^2)} \left(\frac{k_{2,1}}{\gamma_{2,1}} + \frac{k_3}{\gamma_3} \right) \left[(k_{1,2} + \pi^2 j^2) + k_{1,2} \gamma_{1,2} \left(1 + \frac{\pi^2 m^2}{2\gamma_2 \gamma_3} \right) \right]^{-1}, \\ \sigma_3 &= 8j^2 m^{-1} (m^2 - 4j^2)^{-1} \left(k_1 \gamma_1^{-1} + k_2 \gamma_2^{-1} \right) \left(k_3^2 + \pi^2 m^2 \right) + \\ &+ k_3 \gamma_3 \left(1 + \frac{\pi^2 (m^2 - 2j^2)}{2\gamma_1 \gamma_2} \right) \left\{ (k_3^2 + \pi^2 m^2)^{-1} \gamma_2^{-1} + \gamma_3 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

А.Е.Белянцев и др.



Рис. 1.

ВЧ неустойчивость реализуется при $n_1 = m$, $n_2 = n_3 = j$; если $n_1 = n_3 = j$, $n_2 = m$, то взаимодействие возможно лишь для нечётных m.

Пространственный инкремент ВЧ неустойчивости в заданном поле волны a_1 ($|a_1| \gg |a_2|$, $|a_3|$) имеет вид $\Gamma = |a_1|(\sigma_2\sigma_3)^{-1/2}$. Значения σ_s приведены в табл. 1 при двух значениях числа Маха: M = 2, 5. В табл. 2 приведены σ_s для распадной нестабильности. Отметим, что преобразование по частоте вверх по спектру может быть ~ 10 . В заключении отметим, что полученные результаты могут быть полезны также для создания генераторов (усилителей) мощного НЧ излучения и инерционного УТС.

Таблица 1

М	S	n_s	ω_s	k_s	σ_s	n_s	k_s	ω_s	σ_s
	1	3	-3.5	3.05	3.19	1	1	5.3	0.92
2	2	1	5.5	4.67	2.89	3	6.5	1.6	-5.89
	3	1	2	7.72	0.3	1	7.5	6.9	-4.92
	1	3	-1.5	2.0	1.2	1	2.5	16.5	0.01
5	2	1	4.5	17	-1.7	3	2.5	2.7	-2.28
	3	1	3	19	-0.2	1	5	19.2	-2.21

Таблица 2

А.Е.Белянцев и др.

Μ	S	n_s	ω_3	k_s	σ_s	k_s	ω_s	σ_s
	1	1	-1	1.2	-i 0.98	-1.5	0.5	-i 0.93
2	2	1	8	24.5	-i 5.26	6	18.8	-i 3.6
	3	3	7	25.7	-i 6.19	4.5	19.3	-i 4.16
	1	1	-0.5	0.7	-i 1.14	0.5	5.6	-i 1.62
5	2	2	8	48.6	-i 5.75	9	54.5	-i 7.44
	3	3	7.5	49.6	-i 6.9	9.5	60.1	-i 9.12

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 95-02-05255.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Дворяковский В. П., Файнштейн С. М. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1981. Т. 24. № 5. С. 533.
- 2. Стил М., Дюраль Б. Взаимодействие волн в плазме твёрдого тела. М.: Атомиздат, 1973.
- Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. — М.: Наука, 1984.
- 4. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
- 5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
- 6. Рабинович М. И., Файнштейн С. М. //ЖЭТФ, 1972. Т. 68. С. 1672.
- 7. Тамойкин В. В., Файнштейн С. М. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1988. Т. 31. С. 1036.

Государственный технический университет, г. Н. Новгород, Россия Поступила в редакцию 27 июля 1997 г.

PARAMETRIC AND HIGH-FREQUENCY INSTABILITY OF ALFVEN AND MAGNETOSOUND WAVES IN PLANE WAVE-GUIDE PENETRATED BY AN IONIZED BEAM WITH TRANSVERSAL MAGNETIC FIELD

A. E. Belyantsev, V. P. Dvoryakovsky, S. M. Fainshtein, E. A. Chernova

The parametric and high-frequency instability of Alfven and magnetosound waves in the plasma beam penetrated plane wave guide system is analysed. The synchronism conditions and mode energies are found. It is shown that the effective up-convertion of Alfven waves is possible.

УДК 537.874

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПОЛУПЛОСКОСТИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

А.В.Тюхтин

Исследуется дифракция плоских электромагнитных волн на проводящей полуплоскости, которая расположена в параллельном ей потоке холодной плазмы. Скорость движения плазмы и направление распространения падающей волны нормальны к ребру полуплоскости. С помощью метода Винера—Хопфа—Фока получено общее решение задачи. Проанализировано поведение поля на большом расстоянии от ребра полуплоскости и в его окрестности.

введение

Одним из факторов, оказывающих принципиальное воздействие на рассеяние электромагнитных волн, является движение среды, которая окружает рассеивающий объект. Оно приводит к специфической анизотропии в системе отсчёта, связанной с объектом. Этот эффект зачастую радикально влияет на решение дифракционных задач, особенно в том случае, когда скорость движения среды выше скорости распространения волн относительно неё [1, 2]. Весьма интересная ситуация возникает также тогда, когда среда обладает частотной дисперсией в системе своего покоя. При этом в системе отсчёта, относительно которой она движется, имеется так называемая конвективная пространственная дисперсия [3]. Одна из задач подобного рода исследована в статье [4], где предполагалось, что рассеивающая полуплоскость является проницаемой для частиц окружающей среды, а последняя представляет собой холодную плазму, движущуюся ортогонально полуплоскости. В настоящей работе мы рассмотрим такой случай, когда холодная плазма движется вдоль полуплоскости. Следует отметить, что попытка решения подобной задачи была предпринята в статье [5]. Однако автор не учёл эффект конвективной пространственной дисперсии, а она, как будет видно из дальнейшего, существенным образом влияет на рассеянное поле.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть идеально проводящая полуплоскость (z = 0, x > 0) расположена в однородном потоке холодной бесстолкновительной плазмы или в чисто электронном потоке, причём скорость движения среды $\vec{u} = u_x \vec{e}_x$ параллельна полуплоскости и нормальна её ребру (рис. 1). Возмущениями ионной компоненты плазмы будем пренебрегать. Зависимость от времени примем в виде $\exp(-i\omega t)$.

Электромагнитное поле в движущейся среде подчиняется уравнениям Максвелла–Минковского [3, 6, 7]. В системе своего покоя плазма обладает диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - \omega_p^2 / \tilde{\omega}^2$, где ω_p — плазменная частота, $\tilde{\omega}$ — циклическая частота в данной системе отсчёта (магнитную проницаемость считаем равной 1). Используя релятивистское преобразование частоты, имеем

$$\varepsilon = 1 - \omega_p^2 (1 - \beta^2) (\omega - \vec{k}\vec{u})^{-2}, \qquad (1)$$

где ω и \vec{k} — соответственно, частота и волновой вектор в "лабораторной" системе отсчёта, связанной с полуплоскостью, $\vec{\beta} = \vec{u}/c$ (c — скорость света в вакууме). Зависимость ε от \vec{k} означает наличие конвективной пространственной дисперсии. В такой среде могут распространяться плоские волны двух





типов [3]. С одной стороны, могут существовать волны "электромагнитного типа" (е-волны), которые обладают волновым числом $k_0 = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}/c$, не зависящим от \vec{u} (будем считать, что $\omega > \omega_p$, вследствие чего плоские е-волны являются незатухающими). С другой стороны, могут распространяться волны пространственного заряда (s-волны), для которых имеет место дисперсионное уравнение $\varepsilon(\omega, \vec{k}) = 0$. Из него следует, что при любых значениях k_y , k_z существуют две волны пространственного заряда, быстрая (s1) и медленная (s2), для которых $k_x = k_{1,2x} = u_x^{-1} \left(\omega \mp \omega_p \sqrt{1 - \beta^2}\right)$. Заметим, что групповые скорости обеих s-волн одинаковы и равны \vec{u} .

Пусть на полуплоскость из области z > 0 нормально к ребру падает плоская волна е-типа, обладающая ТМ—поляризацией (её компоненты будем помечать индексом "i"). Для такой волны из уравнений Максвелла-Минковского вытекают следующие соотношения:

$$B_{y}^{i} = B_{0y}^{i} \exp\left[ik_{0}r\cos(\theta + \theta_{e})\right] = B_{0y}^{i} \exp\left[ik_{0}\left(\kappa_{i}x - \sqrt{1 - \kappa_{i}^{2}}z\right)\right],$$

$$E_{\parallel}^{i} = -\frac{\beta_{x}\omega_{p}^{\prime 2}\sin\theta_{e}}{\sqrt{\varepsilon_{0}}\left(\sqrt{\varepsilon_{0}} - \beta_{x}\cos\theta_{e}\right)}B_{y}^{i}, \qquad E_{\perp}^{i} = -\frac{B_{y}^{i}}{\sqrt{\varepsilon_{0}}},$$

$$D_{\perp}^{i} = -\frac{\left(1 - \beta_{x}\sqrt{\varepsilon_{0}}\cos\theta_{e}\right)^{2} - \omega_{p}^{\prime 2}\left(1 - \beta^{2}\right)}{\left(1 - \beta_{x}\sqrt{\varepsilon_{0}}\cos\theta_{e}\right)\left(\sqrt{\varepsilon_{0}} - \beta_{x}\cos\theta_{e}\right)}B_{y}^{i}, \qquad H_{y}^{i} = -\frac{D_{\perp}^{i}}{\sqrt{\varepsilon_{0}}},$$

$$E_{y}^{i} = D_{y}^{i} = D_{\parallel}^{i} = B_{\parallel}^{i} = B_{\perp}^{i} = H_{\parallel}^{i} = H_{\perp}^{i} = 0,$$

$$(2)$$

где r, θ — полярные координаты на плоскости x, z ($|\theta| \leq \pi$); θ_e — угол падения, принимающий значения от 0 до π (рис. 1); $\kappa_i = \cos \theta_e$, $\varepsilon_0 = 1 - \omega_p'^2$, $\omega_p' = \omega_p/\omega$, $\beta_x = u_x/c$. Здесь индексом || обозначены компоненты, параллельные волновому вектору $\vec{k}^i = k_0 (\cos \theta_e \vec{e}_x - \sin \theta_e \vec{e}_z)$, а индексом \perp — компоненты, ортогональные ему и лежащие в плоскости x, z. Как видим, ТМ—волна является чисто поперечной относительно векторов \vec{B}^i , \vec{H}^i , \vec{D}^i , но вектор \vec{E}^i имеет продольную составляющую. Выпишем

также соотношения между электрическим полем и магнитной индукцией в системе координат x, y, z:

$$E_x^i = -\sin\theta_e \frac{1 - \beta_x \sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta_e}{\sqrt{\varepsilon_0} - \beta_x \cos\theta_e} B_y^i,$$

$$E_z^i = -\frac{\sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta_e - \beta_x \cos^2\theta_e - \omega_p'^2 \beta_x \sin^2\theta_e}{\sqrt{\varepsilon_0} (\sqrt{\varepsilon_0} - \beta_x \cos\theta_e)} B_y^i.$$
(3)

Полное поле (\vec{E}^{Σ}) состоит из падающего (\vec{E}^i) и рассеянного (\vec{E}) полей. На полуплоскости z = 0, x > 0 должно выполняться требование

$$E_x = -E_x^i, (4)$$

а при $r \to \infty$ должно быть удовлетворено условие излучения Мандельштама. Согласно последнему, при $|z| \to \infty$ рассеянное поле представляет собой волну, групповая скорость которой направлена от полуплоскости. Из условия излучения вытекает также, что та часть поля, которая обусловлена токами и зарядами, индуцируемыми в окрестности ребра полуплоскости, должна иметь положительную проекцию групповой скорости на радиус—вектор \vec{r} при $r \to \infty$ (это обстоятельство будет существенно в последующем). Кроме того, потребуем выполнения обычного условия энергетической пассивности ребра (поток энергии через цилиндрическую поверхность, окружающую ребро, должен стремиться к нулю при занулении радиуса поверхности).

Отметим, что в случае безграничного экрана, когда условие (4) ставится на всей плоскости z = 0, решение задачи подобно иеющему место в неподвижной среде. Действительно, нетрудно показать, что для любой из волн пространственного заряда компонента волнового вектора $k_x = k_{1,2x}$ больше, чем соответствующая компонента в падающей волне ($k_x = k_0 \cos \theta_e$). Поэтому s-волны не возбуждаются и отражённое от плоскости z = 0 поле может содержать лишь е-волну, амлитуда которой однозначно определяется условием (4). Для неё

$$B_y = RB_{0y}^i \exp\left[ik_0 r \cos(\theta - \theta_e)\right],\tag{5}$$

а остальные компоненты выражаются через B_y по формулам, аналогичным (2), (3), если в них заменить θ_e на $-\theta_e$. Нетрудно видеть, что коэффициент отражения R = 1, как и в неподвижной среде.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Рассеянное поле, по существу, является полем излучения токов и зарядов, индуцируемых на полуплоскости. Представляется целесообразным записать его компоненты в виде интегралов, содержащих Фурье—образ поверхностной плотности тока, текущего по экрану. Для этого можно воспользоваться непосредственно уравнениями Максвелла—Минковского, однако удобнее использовать потенциалы \vec{A} , ϕ , которые связаны с компонентами поля соотношениями

$$\vec{E} = i\omega \vec{A}/c - \nabla \phi, \qquad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$
 (6)

Для Фурье-образов этих потенциалов $\{\vec{A}_k, \phi_k\} = (2\pi)^{-3} \iiint \{\vec{A}, \phi\} \times \exp(-i\vec{k}\vec{r}) dx dy dz$ имеют место следующие уравнения [6]:

$$L(\vec{k}) \left\{ \begin{matrix} \vec{A}_k \\ \phi_k \end{matrix} \right\} = \frac{4\pi\mu}{c} \left\{ \begin{matrix} \vec{j}_k + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu \left(1 - \beta^2\right)} \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \vec{j}_k - c\rho_k \right) \\ c\rho_k + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu \left(1 - \beta^2\right)} \left(\vec{\beta} \vec{j}_k - c\rho_k \right) \end{matrix} \right\},\tag{7}$$

где

$$L(\vec{k}) = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{1 - \beta^2} \left(\vec{\beta}\vec{k} - \frac{\omega}{c}\right)^2,\tag{8}$$

а \vec{j}_k и ρ_k — соответственно, Фурье-образы объёмных плотностей тока \vec{j} и заряда ρ (последние связаны уравнением неразрывности div $\vec{j} = i\omega\rho$). Уравнения (7) справедливы в любой движущейся среде, которая в системе своего покоя характеризуется скалярными проницаемостями ε и μ .

Из (7) легко получить выражения для потенциалов в виде трёхмерных интегралов Фурье:

$$\vec{A} = \vec{A}_{\rm I} + \vec{A}_{\rm II}, \qquad \phi = \phi_{\rm I} + \phi_{\rm II},$$

$$\vec{A}_{\rm I} = 4\pi c^{-1} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mu \left[L(\vec{k}) \right]^{-1} \vec{j}_k \exp\left(i\vec{k}\vec{r}\right) dk_x dk_y dk_z, \ \phi_{\rm I} = c \left(i\omega\right)^{-1} \operatorname{div} \vec{A}_{\rm I},$$

(9)

$$\vec{A}_{\rm II} = \vec{\beta} \phi_{\rm II} , \ \phi_{\rm II} = -\frac{4\pi}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon (1 - \beta^2)} \frac{(\vec{k} - \omega c^{-1} \vec{\beta}) \vec{j}_k}{L(\vec{k})} \exp\left(i\vec{k}\vec{r}\right) dk_x dk_y dk_z .$$

Здесь учтено, что $\rho_k = \vec{k} \vec{j}_k / \omega$. Как видим, потенциалы естественным образом разбиваются на две части, причём для части I справедливо соотношение, идентичное условию калибровки в вакууме.

В последующем нам важно будет знать расположение некоторых нулей и особенностей относительно вещественной оси на плоскости переменной интегрирования. Расчёты показывают, что модель среды (1) не позволяет это сделать. Поэтому на начальном этапе мы учтём слабую диссипацию, вызываемую столкновениями электронов с частотой $\nu \ll \omega_p$, а в последующем, чтобы не загромождать формулы, устремим ν к нулю. Для такой среды

$$\varepsilon = 1 - \omega_p^2 (1 - \beta^2) (\omega - k_x u_x)^{-1} (\omega - k_x u_x + i\nu)^{-1}, \quad \mu = 1.$$
(10)

Тогда величины, входящие в (9), будут равны

$$L(\vec{k}) = k^{2} - k_{0}^{2} - \frac{\omega_{p}^{2}}{c^{2}} \frac{i\nu}{\omega - k_{x}u_{x} + i\nu} = k_{z}^{2} - k_{ez}^{2}(k_{x}, k_{y}),$$

$$\frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon(1 - \beta^{2})} = -\frac{\omega_{p}^{2}}{(\omega - k_{x}u_{x})(\omega - k_{x}u_{x} + i\nu) - \omega_{p}^{2}(1 - \beta^{2})} = -\frac{\omega_{p}^{2}}{u^{2}(k_{x} - k_{1x})(k_{x} - k_{2x})},$$
(11)

где

$$k_{0} = \sqrt{\omega^{2} - \omega_{p}^{2}/c},$$

$$k_{ez}(k_{x}, k_{y}) = \sqrt{k_{0}^{2} + \frac{\omega_{p}^{2}}{c^{2}} \frac{i\nu}{\omega - k_{x}u_{x} + i\nu} - k_{x}^{2} - k_{y}^{2}},$$

$$k_{1,2x} = u_{x}^{-1} \left[\omega \mp \sqrt{\omega_{p}^{2} (1 - \beta^{2}) - \nu^{2}/4} + i\nu/2 \right]$$
(12)

(предполагается, что $\text{Im } k_{ez} > 0$).

А.В.Тюхтин

Нас интересует поле источника вида $\vec{j} = I(x)\delta(z)\vec{e}_x$, Фурье—образ которого равен $\vec{j}_k = (2\pi)^{-1}I_0\delta(k_y)\vec{e}_x$, где $I_0 = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} I(x)\exp(-ik_xx)dx$. После подстановки этого выражения в (9) и интегрирования по k_y и k_z , получаем

$$\vec{A}_{\rm I} = \frac{2\pi i}{c} \vec{e}_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_0(\kappa)}{\kappa_{ez}} \exp\left[ik_0 \left(\kappa x + \kappa_{ez}|z|\right)\right] d\kappa ,$$

$$\phi_{\rm II} = \frac{2\pi i}{c} \frac{\omega_p^{\prime 2}}{\beta^2 \sqrt{\varepsilon_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\kappa - \beta_x/\sqrt{\varepsilon_0}\right) I_0(\kappa) \exp\left[ik_0 \left(\kappa x + \kappa_{ez}|z|\right)\right]}{\left(\kappa - \kappa_{1x}\right) \left(\kappa - \kappa_{2x}\right) \kappa_{ez}} d\kappa ,$$
(13)

где для удобства введены следующие безразмерные величины:

$$\omega_p' = \omega_p / \omega, \qquad \kappa = k_x / k_0,$$

$$\kappa_{ez} = k_{ez} (k_x, 0) / k_0 \xrightarrow{\nu \to +0} \sqrt{1 + i0 - \kappa^2},$$

$$\kappa_{1,2x} = k_{1,2x} / k_0 \xrightarrow{\nu \to +0} (\beta_x \sqrt{\varepsilon_0})^{-1} \left(1 \mp \omega_p' \sqrt{1 - \beta^2} + i0 \right).$$
(14)

Плотность поверхностного тока выражается через $I_0(\kappa)$ по формуле $I(x) = k_0 \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\kappa) \exp(ik_0 x \kappa) d\kappa$.

Используя выражения (13), после ряда громоздких выкладок для ненулевых компонент электрического поля и магнитной индукции получаем

$$\begin{cases} E_x \\ E_z \\ B_y \end{cases} = -\frac{2\pi k_0^2}{\omega} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \begin{cases} g_x(\kappa) \\ g_z(\kappa) \\ g_b(\kappa) \end{cases} \frac{\Phi_0(\kappa) \exp\left[ik_0\left(\kappa x + \kappa_{ez}|z|\right)\right]}{(\kappa - \kappa_{1x})\left(\kappa - \kappa_{2x}\right)} d\kappa ,$$
(15)

где

$$g_{x}(\kappa) = \left[\kappa - (1+i0) \left(\beta_{x}\sqrt{\varepsilon_{0}}\right)^{-1}\right] \kappa_{ez},$$

$$g_{z}(\kappa) = -\operatorname{sign}(z) \left[\kappa^{2} - (1+i0) \left(\beta_{x}\sqrt{\varepsilon_{0}}\right)^{-1} \kappa + \omega_{p}^{\prime 2} \varepsilon_{0}^{-1}\right],$$

$$g_{b}(\kappa) = \operatorname{sign}(z) \left[\kappa \varepsilon_{0}^{-1/2} - (1+i0) \beta_{x}^{-1}\right];$$

$$\Phi_{0}(\kappa) = \left[\kappa - \left(\beta_{x}\sqrt{\varepsilon_{0}}\right)^{-1}\right] I_{0}(\kappa).$$
(17)

В данных формулах мы устремили $\nu \to +0$. Благодаря изначальному учёту диссипации мы установили расположение нулей функции $g_x(\kappa)$ относительно контура интегрирования, что существенно для дальнейшего (заметим, кстати, что множитель перед $I_0(\kappa)$ в формуле (17) имеет нуль, который не смещается с вещественной оси при введении затухания, однако это обстоятельство не вызовет далее каких-либо трудностей).

Функция $\Phi_0(\kappa)$ определяется из условий, задаваемых на плоскости z = 0. При x > 0, согласно (4), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\kappa - (1+i0)\left(\beta_x\sqrt{\varepsilon_0}\right)^{-1}\right]\sqrt{1+i0-\kappa^2}}{(\kappa - \kappa_{1x})\left(\kappa - \kappa_{2x}\right)} \Phi_0(\kappa)\exp(ik_0\kappa x)\,d\kappa = \\ = \frac{\omega E_{0x}^i}{2\pi k_0^2}\exp(ik_0\kappa_i x)\,, \tag{18}$$

где $\kappa_i = \cos \theta_e$, а E_{0x}^i — величина E_x^i при x = z = 0, которая выражается через B_{0y}^i , согласно формулам (3). При z = 0, x < 0 требуется выполнение условия I(x) = 0. Домножая выражение (17) на $\exp(ik_0\kappa x)$ и интегрируя по κ , получаем

$$\frac{dI}{dx} - \frac{ik_0}{\beta_x \sqrt{\varepsilon_0}} I = ik_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\kappa) e^{ik_0 \kappa x} d\kappa \,. \tag{19}$$

Поэтому при x < 0 функция $\Phi_0(\kappa)$ должна удовлетворять уравнению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\kappa) e^{ik_0\kappa x} \, d\kappa = 0 \,. \tag{20}$$

Итак, для определения величин \vec{E} и \vec{B} нужно решить парные интегральные уравнения (18), (20) относительно $\Phi_0(\kappa)$. Заметим, что после определения функции $\Phi_0(\kappa)$ текущий по экрану ток можно найти как решение уравнения (19) при условии $I(x)|_{x<0} = 0$. Оно имеет вид

$$I(x) = k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_0(\kappa) \exp(ik_0 \kappa x)}{\kappa - (\beta_x \sqrt{\varepsilon_0})^{-1} - i0} \, d\kappa \,.$$
⁽²¹⁾

Решение парных интегральных уравнений (18), (20) не представляет математических сложностей ввиду очевидной факторизации множителя перед $\Phi_0(\kappa)$ в (18)[8]. Из (20) следует, что функция $\Phi_0(\kappa)$ должна быть регулярной в области Im $\kappa \leq 0$, а на бесконечности она должна вести себя как $o(\kappa)$. Уравнение (18) будет удовлетворено, если

$$\frac{\left[\kappa - (1+i0)\left(\beta_x\sqrt{\varepsilon_0}\right)^{-1}\right]\sqrt{1+i0-\kappa^2}}{(\kappa - \kappa_{1x})\left(\kappa - \kappa_{2x}\right)}\Phi_0(\kappa) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\frac{\omega E_{0x}^i}{2\pi k_0^2}\frac{U(\kappa)}{U(\kappa_i)}\frac{1}{\kappa - \kappa_i - i0},$$
(22)

где $U(\kappa)$ — функция, регулярная в области Im $\kappa \ge 0$ и ведущая себя как $o(\kappa)$ при $|\kappa| \to \infty$. Дальнейший ход решения задачи зависит от того, в какую сторону движется плазма — от ребра полуплоскости $(\beta_x > 0)$ или к нему $(\beta_x < 0)$.

А.В.Тюхтин

3. РЕЖИМ "НАТЕКАНИЯ" ПЛАЗМЫ НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ

В случае $\beta_x = \beta > 0$ соотношение (22) естественно записать в виде

$$\frac{\left[\kappa - (1+i0)\left(\beta\sqrt{\varepsilon_0}\right)^{-1}\right]\sqrt{1+i0-\kappa}}{\left(\kappa - \kappa_{1x}\right)\left(\kappa - \kappa_{2x}\right)}\left(\kappa - \kappa_i - i0\right)\Phi_0(\kappa) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\frac{\omega E_{0x}^i}{2\pi k_0^2}\frac{U(\kappa)}{U(\kappa_i)}\frac{1}{\sqrt{1+i0+\kappa}} \equiv V(\kappa).$$
(23)

Левая часть этого равенства регулярна при Im $\kappa \leq 0$, а правая — при Im $\kappa \geq 0$. Обе части ведут себя как $o(\sqrt{\kappa})$ на бесконечности. Очевидно, что функция $V(\kappa)$ является константой, которую легко вычислить, подставляя $\kappa = \kappa_i$ в правую часть. В результате получаем

$$\Phi_0(\kappa) = \frac{\omega E_{0x}^i}{4\pi^2 i k_0^2 \sqrt{1 + \kappa_i}} \frac{(\kappa - \kappa_{1x}) (\kappa - \kappa_{2x})}{\left[\kappa - (1 + i0) \left(\beta \sqrt{\varepsilon_0}\right)^{-1}\right] \sqrt{1 + i0 - \kappa} (\kappa - \kappa_i - i0)} \,. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (15), получаем выражения для рассеянного поля

$$\begin{cases}
 E_x \\
 E_z \\
 B_y
\end{cases} = -\frac{E_{0x}^i}{2\pi i \sqrt{1+\kappa_i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{cases}
 \sqrt{1+i0+\kappa} \\
 -\operatorname{sign}(z) \frac{\beta\sqrt{\varepsilon_0}\kappa^2 - \kappa + \omega_p'^2\beta/\sqrt{\varepsilon_0}}{(\beta\sqrt{\varepsilon_0}\kappa - 1 - i0)\sqrt{1+i0-\kappa}} \\
 \operatorname{sign}(z) \frac{\beta\kappa - \sqrt{\varepsilon_0}}{(\beta\sqrt{\varepsilon_0}\kappa - 1 - i0)\sqrt{1+i0-\kappa}}
\end{cases} \times \frac{\exp\left[ik_0\left(\kappa x + \kappa_{ez}|z|\right)\right]}{\kappa - \kappa_i - i0} d\kappa.$$
(25)

Исследуем полученное решение. В дальней от ребра зоне интегралы (25) можно приближённо вычислить методом перевала. Предварительно целесообразно сделать традиционную замену $\kappa = \cos \alpha$, устраняющую точку ветвления в подынтегральном выражении. При расчёте следует учесть, что трансформация исходного контура в контур наибыстрейшего спуска может сопровождаться пресечением двух полюсов подынтегрального выражения. Опуская промежуточные выкладки, приведём конечные результаты данного расчёта.

В области

$$\sqrt{k_0 r} \left| |\theta| - \theta_e \right| \gg 1 \tag{26}$$

рассеянное поле состоит из трёх частей

$$\left\{\vec{E}, \vec{B}\right\} = \left\{\vec{E}^g, \vec{B}^g\right\} + \left\{\vec{E}^d, \vec{B}^d\right\} + \left\{\vec{E}^p, \vec{B}^p\right\},\tag{27}$$

где $\{\vec{E}^{g}, \vec{B}^{g}\}$ — вклад полюса $\kappa = \kappa_{i} + i0$, который отличен от нуля при $|\theta| < \theta_{e}$ и представляет собой геометрооптическое решение задачи; $\{\vec{E}^{d}, \vec{B}^{d}\}$ — вклад седловой точки, который является дифракционной поправкой к геометрооптическому полю; $\{\vec{E}^{p}, \vec{B}^{p}\}$ — вклад полюса $\kappa = (1 + i0)/(\beta\sqrt{\varepsilon_{0}})$, который представляет собой некоторую поверхностную волну.

Для первой части рассеянного поля имеем

$$\begin{cases}
 E_x^g \\
 E_z^g \\
 B_y^g
 \right\} = -E_{0x}^i \begin{cases}
 1 \\
 -\operatorname{sign}(z) \frac{\cos \theta_e - \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos^2 \theta_e - \omega_p'^2 \beta / \sqrt{\varepsilon_0}}{(1 - \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta_e) \sin \theta_e} \\
 \sin(z) \frac{\sqrt{\varepsilon_0} - \beta \cos \theta_e}{(1 - \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta_e) \sin \theta_e}
 \right\} \times \exp\left[ik_0 r \cos(|\theta| - \theta_e)\right] 1(\theta_e - |\theta|),$$
(28)

где учтено, что $\kappa_i = \cos \theta_e$, а через 1(ξ) обозначена единичная функция Хевисайда (1(ξ) = 1 при $\xi > 0$, 1(ξ) = 0 при $\xi < 0$). Этот результат согласуется со сказанным во "Введении" относительно безграничного экрана, поскольку в области 0 < $\theta < \theta_e$ поле (28) представляет собой отражённую волну, коэффициент отражения которой (по компоненте B_y) равен 1. В области – $\theta_e < \theta < 0$ поле (28) "гасит" падающую волну, так что суммарное геометрооптическое поле равно нулю.

Дифракционная поправка представляет собой цилиндрическую волну, которая обладает следующими компонентами:

$$\begin{cases}
 E_x^d \\
 E_z^d \\
 B_y^d
 \right\} \approx E_{0x}^i \frac{\exp\left(ik_0r + i\pi/4\right)}{\cos\left(\theta_e/2\right)\sqrt{2\pi k_0 r}} \frac{\cos\left(\theta/2\right)}{\cos\theta - \cos\theta_e} \times \\
 \\
 \times \left\{ \begin{array}{c} \sin\left|\theta\right| \\
 - \operatorname{sign}(z) \frac{\cos\theta - \beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos^2\theta - \omega_p'^2\beta/\sqrt{\varepsilon_0}}{1 - \beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta} \\
 \sin\left(z\right) \frac{\sqrt{\varepsilon_0} - \beta\cos\theta}{1 - \beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta} \end{array} \right\}.$$
(29)

Отсюда легко найти продольную (E_r^d) и поперечную (E_{θ}^d) компоненты электрического поля данной волны

$$E_r^d = \frac{\beta \omega_p^{\prime 2} \sin \theta}{\sqrt{\varepsilon_0} \left(\sqrt{\varepsilon_0} - \beta \cos \theta\right)} B_y^d, \quad E_\theta^d = -\frac{B_y^d}{\sqrt{\varepsilon_0}}.$$
(30)

Как видим, соотношения между компонентами такие же, как и для плоской волны (2), что вполне естественно.

Выписанные результаты для g- и d-частей рассеянного поля справедливы вдали от геометрооптических границ $\theta = \pm \theta_e$, когда полюсы далеки от седловой точки. Используя известные формулы метода перевала [9], нетрудно также получить асимптотику, равномерно справедливую во всей дальней зоне $k_0 r \gg 1$. Не выписывая соответствующие (весьма громоздкие) формулы, мы приведём результаты некоторых численных расчётов. На рис. 2–4 показаны диаграммы для модулей величин

$$B_y^{\Sigma e} = B_y^i + B_y^g + B_y^d, \qquad \vec{E}^{\Sigma e} = \vec{E}^i + \vec{E}^g + \vec{E}^d, \tag{31}$$

А.В.Тюхтин

В $B_y^{\Sigma e}$, $\vec{E}^{\Sigma e}$ включены g- и d-части рассеянного поля, а также падающее поле (отсутствуют только составляющие B_y^p , \vec{E}^p , имеющие другую длину волны). Радиус-векторы, описывающие изображённые кривые, равны $|B_y^{\Sigma e}|$ на рис. 2a, 3a, 4a и $|\vec{E}^{\Sigma e}|$ — на рис. 2б, 3б, 4б. При этом для всех рис. 2–4 расстояние от ребра одно и то же. Отметим, что эти кривые, строго говоря, нельзя называть диаграммами направленности, поскольку их вид меняется с изменением r. Было принято, что $\omega'_p = 0.8$, $k_0r = 20$, а падающее поле характеризуется значением $B_y^i = 1$ при x = z = 0. Рис. 2a,6 относятся к случаю нормального падения волны ($\theta_e = 90^\circ$), рис. 3a,6 — к случаю $\theta_e = 45^\circ$ и рис. 4a,6 — к случаю $\theta_e = 135^\circ$. На каждом из рисунков разные кривые соответствуют разным скоростям движения среды. Случай неподвижной среды показан мелким пунктиром, случай $\beta = 0.5$ — крупным пунктиром, а случай $\beta = 0.9$ — сплошной линией.

Как видим, все кривые представляют собой чередование резких максимумов и минимумов в области $0 < \theta < \theta_e$, что свидетельствует об интерференции падающей и геометрооптически отражённой волн. За пределами этой области большинство кривых носит более спокойный характер. На рис. 2а, 4а все три кривые близки друг к другу, т. е. при $\theta_e \ge 90^\circ$ движение среды мало влияет на магнитную индукцию. Это объясняется тем, что при заданном значении B_y^i величина B_y^g не зависит от β (как видно из формул (3), (28)), а дифракционная поправка (29) невелика. Зависимость электрического поля от величины β более выражена (кривые на рис. 26, 46 значительно расходятся). Однако это связано не с ролью дифракционной поправки, а с характером соотношений между магнитной индукцией и электрическим полем для падающей и отражённой волн.

Наиболее интересны результаты, представленные на рис. За,б, где диаграммы для случая $\beta = 0,9$ очень сильно отличаются от случаев, когда $\beta \leq 0,5$. Это объясняется следующим. Подставляя в (28), (29) значение E_{0x}^i из (3), видим, что в геометрооптическую часть электрического поля $E_{x,z}^g$ и во все компоненты дифракционной поправки войдёт множитель $(\sqrt{\varepsilon_0} - \beta_x \cos \theta_e)^{-1}$. При $\beta_x = 0,9, \theta_e = 45^\circ$ данная величина существенно больше 1, что и приводит к резкому возрастанию электрического поля и к усилению "изрезанности"диаграммы для магнитной индукции. Последнее обусловлено исключительно увеличением дифракционной поправки B_y^d , поскольку B_y^g не зависит от β при фиксированном значении B_y^i . Особенно интересно то, что при условии

$$\left|\sqrt{\varepsilon_0} - \beta_x \cos \theta_e\right| \ll 1 \tag{32}$$

значение магнитной индукции в области геометрооптической тени $-\theta_e < \theta < 0$ оказывается аномально высоким (расчёты показывают, что даже при $k_0r = 100$ оно ещё сопоставимо с падающим полем). Как будет ясно из дальнейшего, этот эффект имеет место и в режиме "стекания" плазмы с полуплоскости.

Остаётся исследовать ещё одну составляющую рассеянного поля — вклад полюса $\kappa = (1 + i0)/(\beta \sqrt{\varepsilon_0})$. Она имеет вид

$$E_x^p = 0,$$

$$\begin{cases}
 E_z^p \\
 B_y^p
 \end{cases} = E_{0x}^i \frac{i \,\omega_p^{\prime 2} \operatorname{sign}(z) \, 1(\cos \theta - \beta \sqrt{\varepsilon_0})}{\sqrt{2\sqrt{\varepsilon_0} \left(1 - \beta \sqrt{\varepsilon_0}\right)} \cos(\theta_e/2) \, \left(1 - \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta_e\right)} \times \qquad (33)$$

$$\times \begin{cases}
 -\beta^{3/2} \\
 \sqrt{\beta}
 \end{cases} \exp\left[\omega u^{-1} \left(ix - \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon_0} \, |z|\right)\right].$$

Таким образом, это поперечная поверхностная волна, распространяющаяся вдоль полуплоскости со скоростью, равной скорости движения среды. Поэтому даже при $x \to +\infty$ вблизи полуплоскости сум-





Рис.2.





Рис. 3.





Рис.4.

А.В.Тюхтин

марное поле не идентично полю, имеющему место в случае безграничного экрана. Иными словами, влияние края полуплоскости существенно вблизи всей полуоси z = 0, x > 0. Это обстоятельство не является неожиданным, если вспомнить, что поле любого точечного источника в рассматриваемой среде не везде обращается в нуль при стремлении расстояния к бесконечности: в окрестности полуоси, определяемой направлением потока среды, существует так называемый "плазменный след", состоящий из двух волн пространственного заряда. Однако имеются существенные отличия обычного плазменного следа от полученной поверхностной волны. Для того, чтобы их продемонстрировать, выпишем выражения для плазменного следа горизонтального линейного гармонического диполя с пространственной плотностью дипольного момента $\vec{p} = P \,\delta(x) \,\delta(z) \vec{e}_x$, где P — линейная плотность дипольного момента. Плазменный след от данного источника в безграничной движущейся плазме состоит из быстрой (s1) и медленной (s2) волн, обладающих следующими компонентами:

$$\begin{cases}
 E_x^{s1,2} \\
 E_z^{s1,2} \\
 B_y^{s1,2}
\end{cases} = \pm \pi P \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p'}{\beta^2} \begin{cases}
 i \sqrt{1-\beta^2} |\sqrt{1-\beta^2} \mp \omega_p'| \\
 -\operatorname{sign}(z) \left(\sqrt{1-\beta^2} \mp \omega_p'\right) \\
 \operatorname{sign}(z) \beta \left(\sqrt{1-\beta^2} \mp \omega_p'\right)
\end{cases} \times \\
 \times \exp\left[k_0 \left(i\kappa_{1,2x}x - \sqrt{\kappa_{1,2x}^2 - 1} |z|\right)\right] 1 \left(\kappa_{1,2x} \cos \theta - 1\right),$$
(34)

где величины $\kappa_{1,2x}$ определены формулами (14). Как видим, по сравнению с волной (33), волны плазменного следа обладают иными волновыми числами ($k_x = k_{1,2x} = k_0 \kappa_{1,2x}$), они не являются поперечными, а их амплитуды характеризуются иными зависимостями от ω'_p и β . Окрестность оси x, в которой существует плазменный след, тем меньше, чем меньше β . Та же закономерность справедлива и для волны (33). Однако, если в (34) с уменьшением β все компоненты при $z = \pm 0$ растут, то в (33) падают. При $\beta \rightarrow 0$ волна (33) исчезает и решение задачи становится идентичным тому, которое имеет место в неподвижной среде.

Подчеркнём, что полученный эффект влияния края на бесконечности справедлив лишь при пренебрежении поглощением в среде. Если использовать модель слабопоглощающей среды (10), то можно

показать, что в (33) войдёт дополнительный множитель $\exp\left(-\frac{\nu}{u}\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\varepsilon_0}x\right)$, обеспечивающий зату-

хание поверхностной волны с ростом x.

Итак, мы исследовали поведение поля в дальней зоне. Что же касается поведения поля в окрестности ребра, то оно носит традиционный характер. Опираясь на представление (25), можно показать, что главные члены в разложении полного поля по малому параметру k_0r такие же, как и в неподвижной среде:

$$\begin{cases} E_x^{\Sigma} \\ E_z^{\Sigma} \end{cases} \approx \frac{E_{0x}^i \exp(i\pi/4)}{\sqrt{2\pi k_0 r} \cos(\theta_e/2)} \begin{cases} \sin(|\theta|/2) \\ -\operatorname{sign}(z)\cos(\theta/2) \end{cases} , \quad B_y^{\Sigma} \approx B_y^i .$$
 (35)

Поправки к выписанным выражениям имеют порядок $O(\sqrt{k_0 r})$.

4. РЕЖИМ "СТЕКАНИЯ" ПЛАЗМЫ С ПОЛУПЛОСКОСТИ

В случае $\beta_x = -\beta < 0$ соотношение (22) запишем в виде

$$\sqrt{1+i0-\kappa} \ (\kappa-\kappa_i-i0) \ \Phi_0(\kappa) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{\omega E_{0x}^i}{2\pi k_0^2} \frac{U(\kappa)}{U(\kappa_i)} \frac{(\kappa - \kappa_{1x}) (\kappa - \kappa_{2x})}{\left[\kappa - (1 + i0) (\beta_x \sqrt{\varepsilon_0})^{-1}\right] \sqrt{1 + i0 + \kappa}} \equiv W(\kappa).$$
(36)

Нетрудно видеть, что левая часть этого соотношения регулярна при Im $\kappa \leq 0$, а правая — при Im $\kappa \geq 0$, причём обе части ведут себя как $o(\kappa^{3/2})$ на бесконечности. Следовательно, $W(\kappa)$ является линейной функцией: $W(\kappa) = P(\kappa + Q)$. Одно соотношение между константами P и Q получается, если положить $\kappa = \kappa_i$ в правую часть уравнения (36). В результате имеем

$$\Phi_0(\kappa) = P \frac{\kappa + Q}{\sqrt{1 + i0 - \kappa} (\kappa - \kappa_i - i0)},$$
(37)

где

$$P = \frac{\omega E_{0x}^i}{4\pi^2 i k_0^2} \frac{(\kappa_{1x} - \kappa_i) (\kappa_{2x} - \kappa_i)}{\left[\kappa_i - (\beta_x \sqrt{\varepsilon_0})^{-1}\right] \sqrt{1 + \kappa_i} (\kappa_i + Q)}.$$
(38)

Итак, в режиме "стекания" плазмы с полуплоскости решение оказалось неоднозначным ввиду наличия неопределённой константы Q в (37). Эту неопределённость не удаётся ликвидировать с помощью условия на ребре (нетрудно показать, что независимо от величины Q поток энергии через окружающую ребро цилиндрическую поверхность бесконечно малого радиуса равен нулю). Покажем, однако, что последовательное применение принципа излучения Мандельштама позволяет это сделать.

Рассмотрим индуцируемый на экране ток I(x) при $x \to +\infty$. Подставляя (37) в (21), мы видим, что вклад в интеграл вносят два полюса и одна седловая точка, причём роль последней на бесконечности несущественна. Таким образом, имеем

$$I(x) \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{2\pi i P}{\kappa_i - (\beta_x \sqrt{\varepsilon_0})^{-1}} \left\{ \frac{(\kappa_i + Q) \exp(ik_0 \kappa_i x)}{\sqrt{1 - \kappa_i}} - \frac{\left[(\beta_x \sqrt{\varepsilon_0})^{-1} + Q \right] \exp(i\omega u_x^{-1} x)}{\sqrt{1 - (\beta_x \sqrt{\varepsilon_0})^{-1}}} \right\}.$$
(39)

Второе слагаемое здесь представляет собой волну тока, имеющую волновое число, не равное $k_0 \kappa_i$. Соответственно, в компонентах H и D рассеянного поля возникает поверхностная волна (т. к. $\omega/u > k_0$). Её груповая (равно как и фазовая) скорость равна $u_x < 0$, т. е. данная волна распространяется к ребру полуплоскости. Заметим, однако, что в случае безграничного экрана подобная волна не возбуждается. Следовательно, она может быть связана только с влиянием ребра полуплоскости, иными словами, она должна была бы возбуждаться токами и зарядами, индуцируемыми в окрестности ребра. Но, в таком случае, на бесконечности её групповая скорость должна быть направлена от ребра. Следовательно, существование подобной волны противоречит принципу излучения. Отсюда ясно, что второе слагае-мое в (39) должно зануляться, т. е. $Q = -(\beta_x \sqrt{\varepsilon_0})^{-1}$. При этом амплитуда первого слагаемого в (39) автоматически становится равной амплитуде волны тока на безграничном экране, и влияние ребра полуплоскости при $x \to +\infty$ отсутствует (в отличие от случая $u_x > 0$). Этот результат выглядит особенно прозрачным, если сопоставить рассматриваемую задачу дифракции с задачей об излучении пространственно ограниченного источника в движущейся холодной бесстолкновительной плазме. Такой источник на бесконечном расстоянии не порождает конечного поля нигде, кроме узкой окрестности вдоль полуоси, определяемой вектором $\vec{\beta}$ (там имеются волны пространственного заряда). Соответственно, влияние индуцируемых вблизи ребра токов и зарядов не может сказываться при $r \to \infty$ нигде, кроме полуоси x < 0, поскольку $\beta_x < 0$.

Окончательно, в случае $\beta_x < 0$ имеем

$$\Phi_{0}(\kappa) = \frac{\omega E_{0x}^{i}}{4\pi^{2}ik_{0}^{2}} \frac{(\kappa_{1x} - \kappa_{i})(\kappa_{2x} - \kappa_{i})}{\left[\kappa_{i} - (\beta_{x}\sqrt{\varepsilon_{0}})^{-1}\right]^{2}\sqrt{1 + \kappa_{i}}} \times \frac{\kappa - (\beta_{x}\sqrt{\varepsilon_{0}})^{-1}}{\sqrt{1 + i0 - \kappa}(\kappa - \kappa_{i} - i0)}.$$
(40)

Подставляя (40) в (15), получаем

$$\begin{cases} E_x \\ E_z \\ B_y \end{cases} = -\frac{E_{0x}^i}{2\pi i} \frac{(\kappa_{1x} - \kappa_i) (\kappa_{2x} - \kappa_i)}{(1 - \beta_x \sqrt{\varepsilon_0} \kappa_i)^2 \sqrt{1 + \kappa_i}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{cases} (\beta_x \sqrt{\varepsilon_0} \kappa - 1) \sqrt{1 + i0 + \kappa} \\ -\operatorname{sign}(z) \frac{\beta_x \sqrt{\varepsilon_0} \kappa^2 - \kappa + \omega_p'^2 \beta_x / \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{1 + i0 - \kappa}} \\ \operatorname{sign}(z) \frac{\beta_x \kappa - \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{1 + i0 - \kappa}} \end{cases} \times \\ \frac{(\beta_x \sqrt{\varepsilon_0} \kappa - 1) \exp\left[ik_0 (\kappa x + \kappa_{ez}|z|)\right]}{(\kappa - \kappa_i - i0) (\kappa - \kappa_{1x}) (\kappa - \kappa_{2x})} d\kappa.$$

$$(41)$$

Проанализируем полученное решение. В дальней зоне и вдали от геометрооптических границ, т. е. при выполнении условия (26), применение метода перевала приводит к следующему результату:

$$\left\{\vec{E}, \vec{B}\right\} = \left\{\vec{E}^{g}, \vec{B}^{g}\right\} + \left\{\vec{E}^{d}, \vec{B}^{d}\right\} + \left\{\vec{E}^{s1}, \vec{B}^{s1}\right\} + \left\{\vec{E}^{s2}, \vec{B}^{s2}\right\} \,. \tag{42}$$

Здесь первое (геометрооптическое) слагаемое определяется формулами (28), в которых β нужно заменить на $-\beta$. Для второго слагаемого, представляющего собой вклад седловой точки, имеем

$$\begin{cases}
 E_x^d \\
 E_z^d \\
 B_y^d
 \right\} \approx E_{0x}^i \frac{(\kappa_1 + \cos\theta_e) (\kappa_2 + \cos\theta_e)}{(1 + \beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_e)^2 \cos(\theta_e/2)} \frac{\exp(ik_0r + i\pi/4)}{\sqrt{2\pi k_0 r}} \times \\
 \times \frac{\cos(\theta/2) (\beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_e)^2 \cos(\theta_e/2)}{(\cos\theta - \cos\theta_e)(\cos\theta + 1)} \times \\
 \times \frac{\cos(\theta/2) (\beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta + 1)}{(\cos\theta - \cos\theta_e)(\cos\theta + \kappa_1)(\cos\theta + \kappa_2)} \times \\
 \times \left\{ \begin{array}{l} (\beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta + 1)\sin|\theta| \\
 - \operatorname{sign}(z) (\cos\theta + \beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos^2\theta + \omega_p'^2\beta/\sqrt{\varepsilon_0}) \\
 \sin(z) (\beta\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_0}) \end{array} \right\}.$$
(43)

Здесь учтено, что $\kappa_i = \cos \theta_e$, а $\kappa_{1,2} = |\kappa_{1,2x}|$. Два последних слагаемых в (42) представляют собой волны пространственного заряда, которые излучаются источниками, индуцируемыми на полуплоско-

сти

1998

$$\begin{cases}
 E_x^{s1,2} \\
 E_z^{s1,2} \\
 B_y^{s1,2}
 \right\} = \mp E_{0x}^i \begin{cases}
 i \sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{sign}\left(\sqrt{1 - \beta^2} \mp \omega_p'\right) \\
 sign(z) \\
 \beta \operatorname{sign}(z)
 \right\} \times \\
 \beta \operatorname{sign}(z) \\
 \times \frac{\omega_p' \left(\sqrt{1 - \beta^2} \mp \omega_p'\right) \left(1 \pm \omega_p' \sqrt{1 - \beta^2} + \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta_e\right)}{2\sqrt{2\varepsilon_0}\beta \cos(\theta_e/2) \sqrt{1 + \kappa_{1,2}} \left(1 + \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta_e\right)^2} \times \\
 \times 1 \left(-\cos \theta - \kappa_{1,2}^{-1}\right) \exp \left[k_0 \left(i\kappa_{1,2}|x| - \sqrt{\kappa_{1,2}^2 - 1}|z|\right)\right].$$
 (44)

Заметим, что $\vec{H}^{s1,2} = \vec{D}^{s1,2} = 0$, как обычно для волн пространственного заряда. Сравнивая (44) с плазменным следом горизонтального диполя (34), видим, что соотношения между компонентами волн в обоих случаях одни и те же. Существенная разница заключается, однако, в иной зависимости от β и от ω'_p . Ради наглядности выпишем приближённые формулы, которые вытекают из (44) в нерелятивист-ском случае:

$$\left(\begin{array}{c}E_{x}^{s1,2}\\E_{z}^{s1,2}\\B_{y}^{s1,2}\end{array}\right)\approx \mp E_{0x}^{i}\frac{\omega_{p}^{\prime}\varepsilon_{0}^{1/4}}{2\sqrt{2}\cos(\theta_{e}/2)}\sqrt{\frac{1\pm\omega_{p}^{\prime}}{1\mp\omega_{p}^{\prime}}}\left\{\begin{array}{c}i/\sqrt{\beta}\\\mathrm{sign}(z)/\sqrt{\beta}\\\mathrm{sign}(z)\sqrt{\beta}\end{array}\right\}\times \\ \times 1\left(-\cos\theta-\kappa_{1,2}^{-1}\right)\exp\left[k_{0}\kappa_{1,2}(i|x|-|z|)\right],$$
(45)

где $\kappa_{1,2} \approx (1 \mp \omega'_p)/(\beta \sqrt{\varepsilon_0})$. Как видим, амплитуды данных волн слабее зависят от β , чем в случае точечного диполя.

Приведём результаты некоторых численных расчётов, касающихся е-части полного поля, определяемой формулами (31). Они проводились на базе асимптотик, равномерно справедливых во всей дальней зоне $k_0r \gg 1$. На рис. 5а, 6а, 7а показаны диаграммы для величины $|B_y^{\Sigma e}|$, а на рис. 56, 66, 76 — диаграммы для величины $|\vec{E}^{\Sigma e}|$. Как и в пункте 2, принято, что $\omega'_p = 0.8, k_0r = 20$, а для падающего поля $B_y^i = 1$ при x = z = 0. Рис. 5а,6 относятся к случаю нормального падения волны $(\theta_e = 90^\circ)$, рис. 6а,6 — к случаю $\theta_e = 45^\circ$ и рис. 7а,6 — к случаю $\theta_e = 135^\circ$. Случай неподвижной среды показан мелким пунктиром, случай $\beta_x = -0.5$ — крупным пунктиром, а случай $\beta_x = -0.9$ — сплошной линией.

Как и в режиме"натекания", при условии (32) полное электрическое поле много больше магнитной индукции, а в последней большую роль играет дифракционная поправка. При $\theta_e = 90^\circ$ и при $\theta_e = 45^\circ$ это условие не может быть выполнено, и магнитная индукция мало отличается от случая неподвижной среды (рис. 5а, 6а). При $\theta_e = 135^\circ$ указанное условие выполняется, если $\beta = 0.9$, вследствие чего сплошные кривые на рис. 7а,6 резко отличаются от пунктирных. Подчеркнём, что, как следует из (32), данный эффект может иметь место только при условии $\beta > \sqrt{\varepsilon_0}$ и в том случае, когда направление распространения падающей волны составляет острый угол со скоростью движения среды. Поэтому в режиме "натекания" он имеет место при $\theta_e = 45^\circ$, а в режиме "стекания" — при $\theta_e = 135^\circ$.

Остановимся вкратце на вопросе о поведении поля в окрестности ребра в режиме "стекания". На базе строгого решения (41) можно получить следующий результат, приближённо верный при выпол-



Рис.7.

А.В.Тюхтин

нении условия $k_0 \kappa_{1,2} r \ll 1$:

$$\begin{cases} E_x^{\Sigma} \\ E_z^{\Sigma} \end{cases} \approx \frac{E_{0x}^i \exp(i\pi/4)}{\sqrt{2\pi k_0 r} \cos(\theta_e/2)} \left[1 - \frac{\omega_p'^2 (1 - \beta^2)}{(1 + \beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_e)^2} \right] \begin{cases} \sin(|\theta|/2) \\ -\operatorname{sign}(z)\cos(\theta/2) \end{cases}, \\ B_y^{\Sigma} \approx B_y^i - \frac{E_{0x}^i \operatorname{sign} z}{2\sqrt{2}\cos(\theta_e/2)} \left[1 - \frac{\omega_p'^2 (1 - \beta^2)}{(1 + \beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_e)^2} \right] \times \\ \times \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_0} - \beta\kappa_1}{\sqrt{1 + \kappa_1} \left(1 - \omega_p'\sqrt{1 - \beta^2} + \beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_e \right)} + \frac{\sqrt{\varepsilon_0} - \beta\kappa_2}{\sqrt{1 + \kappa_2} \left(1 + \omega_p'\sqrt{1 - \beta^2} + \beta\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta_e \right)} \right]. \end{cases}$$
(46)

Поправочные слагаемые к этим формулам имеют порядок
$$O(\sqrt{k_0r})$$
. Как видим, поведение поля в окрестности ребра качественно такое же, как и в вакууме, т. е. электрическое поле при $r \to 0$ стремится к бесконечности как $1/\sqrt{k_0r}$, а магнитная индукция — к некоторой конечной величине. Однако имеются существенные количественные отличия: коэффициент в формуле для $E_{x,z}^{\Sigma}$ зависит от β , а полная магнитная индукция на ребре не равна B_y^i . В частности, при $\beta \ll 1$ имеем

$$B_y^{\Sigma} \approx B_y^i - \frac{E_{0x}^i \operatorname{sign} z}{2\sqrt{2} \cos(\theta_e/2)} \sqrt{\beta \sqrt{\varepsilon_0}} \left(\sqrt{1 + \omega_p'} - \sqrt{1 - \omega_p'} \right).$$
(47)

Таким образом, при небольших скоростях движения среды B_y^{Σ} на ребре отличается от B_y^i на величину, пропорциональную $\sqrt{\beta}$. Подчеркнём, что выявленные особенности в поведении поля у ребра имеют место только в режиме "стекания" плазмы с полуплоскости, а в режиме "натекания", как было показано выше, движение среды не влияет на главные члены в разложении компонент поля по k_0r .

В заключение подчеркнём, что всё сказанное выше относится к случаю падения волны, имеющей TM-поляризацию. Случай TE-поляризации не затрагивался, поскольку, как показывает анализ, движение среды при этом практически не сказывается на решении задачи. В частности, парные интегральные уравнения для TE-поляризации имеют такой же вид, как и при $\vec{u} = 0$, волны пространственного заряда и поверхностные волны не генерируются, а всё отличие от случая неподвижной среды сводится к изменению соотношений между компонентами напряжённостей и индукций.

Автор выражает благодарность В. Н. Красильникову за плодотворные дискуссии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Госкомитета России по высшему образованию (грант 95–0–8.0–13).

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Красильников В. Н., Тюхтин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1987. Т. 30. № 9. С. 1106.
- 2. Тюхтин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1992. Т. 35. № 8. С. 678.
- 3. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. В кн.: Эйнштейновский сборник, 1974. М.: Наука, 1976. С. 179.
- 4. Тюхтин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1997. Т. 40. № 4. С. 399.
- 5. Tann H. S. //International Journal of Electronics, 1976. V. 40. № 2. P. 137.

А.В.Тюхтин

- 6. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. В кн.: Эйнштейновский сборник, 1978–1979. М.: Наука, 1983. С. 173.
- 7. Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1983.
- 8. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
- 9. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978.

Санкт—Петербургский государственный университет, Россия Поступила в редакцию 1997 г.

DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY A HALF-PLANE IN A MOVING COLD PLASMA

A. V. Tyukhtin

Diffraction of plane electromagnetic waves by a conductive half-plane situated in a stream of a cold plasma is investigated. The velocity of the plasma motion is suggested to be parallel to the half-plane and normal to the edge. The incident wave is propagated normally to the edge. The general solution of the problem has been obtained by Wiener-Hopf-Fok technique. The behaviour of the field far from the half-plane edge and in the vicinity of the edge has been analyzed.

УДК 537.874

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ТЕЛЕ В КИРАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКЕ

А. Г. Дмитренко, С. В. Корогодов

Предложен численный метод решения задач электромагнитного рассеяния в резонансной области частот на трёхмерном идеально проводящем теле произвольной формы, покрытом однородной киральной оболочкой. Дано краткое описание реализованного на его основе пакета программ для расчёта характеристик рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Приведены некоторые результаты численных расчётов, направленных на изучение влияния "киральности" на рассеивающие свойства поглощающих оболочек.

введение

В последние годы ряд исследователей (см., например, [1]-[3]) уделяют большое внимание изучению электромагнитных процессов в СВЧ диапазоне в так называемых киральных средах. Обычно такая среда является макроскопически однородной, образованной из микрообъектов одной и той же зеркальной разновидности, которые равномерно распределены и хаотически ориентированы в изотропной (диэлектрической, магнитодиэлектрической) вмещающей среде. Киральные включения чаще всего являются отрезками металлических или керамических спиралей [4]. Отличие киральной среды от обычной изотропной магнитодиэлектрической с точки зрения электродинамики выражается в иной форме материальных уравнений: векторы электрической и магнитной индукции линейно связаны как с электрическим, так и с магнитным полями. Волновые процессы в таких средах характеризуются распространением двух волн круговой поляризации с противоположным направлением вращения, движущихся с различными фазовыми скоростями [5]. Специфика протекания электромагнитных процессов в киральных средах приводит к появлению у киральных объектов ряда свойств, отличных от свойств обычных изотропных сред. Например, ярким проявлением "киральности" является наличие кросс-поляризованной составляющей в рассеянном от кирального объекта поле в тех случаях, когда поле, рассеянное от обычного магнитодиэлектрического объекта, такой составляющей не имеет. Использование подобных эффектов может явиться основой для разработки как методов измерения параметра киральности материала, так и методов определения формы кирального объекта. В ряде работ, например, в [6], высказывается предположение, что наличие киральности приводит к интенсификации механизмов поглощения электромагнитной энергии внутри тела. Это явление могло бы иметь большое значение для повышения эффективности действия поглощающих оболочек, которые используются для уменьшения поперечников рассеяния металлических тел. Таким образом, вопросы исследования процессов дифракции на телах, полностью или частично состоящих из киральных материалов, являются актуальными. Несмотря на то, что в последние годы достигнуты определённые успехи в области синтезирования искусственных киральных материалов на СВЧ [3], создание экспериментальных киральных образцов и последующее измерение характеристик рассеянного поля представляют собой непростую задачу. Наиболее предпочтительным и наименее дорогостоящим представляется теоретическое исследование процессов дифракции на киральных объектах. Исторически закономерным является использование для этих целей математического аппарата, основанного на интегральных представлениях для полей, как это сделано, например, в [7] в двумерном случае. В более общих случаях трёхмерных рассеивателей, особенно если они не обладают симметрией вращения, аналогичный подход представляется

А. Г. Дмитренко, С. В. Корогодов





достаточно громоздким. В последние годы для численного решения задач рассеяния активно применяется метод дискретных источников, основные идеи которого изложены в [8]. В частности, одним из авторов данной статьи предложены варианты метода дискретных источников для решения задач электромагнитного рассеяния на трёхмерных идеально проводящих [9] и однородных киральных [10] телах, ограниченных гладкой поверхностью произвольной формы.

В данной работе эти варианты обобщены на случай структуры, представляющей собой идеально проводящее тело, покрытое однородной киральной оболочкой. Дана математическая формулировка метода, краткое описание возможностей реализованной на его основе программы для расчёта компонент рассеянного поля. Приводятся некоторые результаты численных расчётов, направленных на исследование влияния "киральности" на бистатические поперечники рассеяния некоторых трёхмерных идеально проводящих тел, покрытых оболочками, обладающими электрическим или магнитным поглощением.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЁ РЕШЕНИЯ

Геометрия задачи показана на рис. 1. Будем рассматривать стационарную (зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$) задачу дифракции электромагнитного поля $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$ на идеально проводящем теле D, покрытом однородным киральным слоем D_i . Слой характеризуется материальными параметрами ε_i , μ_i , имеющими смысл диэлектрической и магнитной проницаемостей, а также параметром киральности β [5], который предполагается здесь положительным; изменение знака у β соответствует замене материала тела его зеркальным аналогом, при $\beta = 0$ слой D_i представляет собой обычный магнитодиэлектрический слой. Слой D_i ограничен с одной стороны поверхностью S_c , которая является поверхностью идеально проводящего тела D, с другой стороны — поверхностью S_d , которая отделяет его от области D_e , представляющей собой однородную безграничную среду с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_e и μ_e . Будем предполагать, что поверхности D и являющей-ся одновременно началом декартовой системы координат. Требуется найти рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в D_e , внутри слоя D_i существует поле $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$. Эти поля должны

А. Г. Дмитренко, С. В. Корогодов

удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \vec{E}_e = i\omega\mu_e \vec{H}_e, \qquad \nabla \times \vec{H}_e = -i\omega\varepsilon_e \vec{E}_e \quad \text{B} \quad D_e, \qquad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E}_i = i\omega\mu_i(\vec{H}_i + \beta\nabla \times \vec{H}_i), \quad \nabla \times \vec{H}_i = -i\omega\varepsilon_i(\vec{E}_i + \beta\nabla \times \vec{E}_i) \quad \text{B} \quad D_i,$$
(2)

граничным условиям

$$\vec{n}_c \times \vec{E}_i = 0$$
 ha S_c , (3)

$$\vec{n}_d \times (\vec{E}_i - \vec{E}_e) = \vec{n}_d \times \vec{E}_0, \quad \vec{n}_d \times (\vec{H}_i - \vec{H}_e) = \vec{n}_d \times \vec{H}_0 \quad \text{Ha} \quad S_d$$
(4)

и условиям излучения

$$\{\sqrt{\varepsilon_e}\,\vec{E}_e;\sqrt{\mu_e}\,\vec{H}_e\}\times\vec{R}/R+\{\sqrt{\mu_e}\,\vec{H}_e;-\sqrt{\varepsilon_e}\,\vec{E}_e\}=O(R^{-1})\,,\quad R\to\infty,\tag{5}$$

где \vec{n}_c и \vec{n}_d — единичные векторы нормалей к поверхностям S_c и S_d , соответственно, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ — векторное произведение. Предполагается, что поверхности S_c и S_d — поверхности Ляпунова, Im $\varepsilon_i, \mu_i \ge 0$. Отметим также, что запись уравнения (2) учитывает, что материальные уравнения киральной среды выбраны в виде [5]

$$\vec{D}_i = \varepsilon_i (\vec{E}_i + \beta \nabla \times \vec{E}_i), \qquad \vec{B}_i = \mu_i (\vec{H}_i + \beta \nabla \times \vec{H}_i).$$

Суть предлагаемого метода заключается в следующем. Введём (см. рис. 1) три вспомогательные поверхности: $S_e = K_e S_c, S_i^{(1)} = K_i^{(1)} S_c$ и $S_i^{(2)} = K_i^{(2)} S_c$, которые подобны в смысле гомотетии поверхности S_c идеально проводящего ядра (и, следовательно, также поверхности S_d слоя). Поверхность S_e с коэффициентом подобия K_e размещена внутри области $D \cup D_i$, поверхность $S_i^{(1)}$ с коэффициентом подобия $K_i^{(2)} > 1$ охватывает киральный слой и размещена во внешней области D_e . Представим неизвестное рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в D_e как сумму полей вспомогательных элементарных электрических диполей, размещена к S_e и излучающих в однородную среду с параметрами ε_e, μ_e :

$$\vec{E}_{e}(M) = \frac{1}{\varepsilon_{e}} \sum_{n=1}^{N_{e}} \left(k_{e}^{2} \overline{I} + \nabla \nabla \right) \Psi^{e}(M, M_{n,e}) \cdot \vec{p}_{\tau}^{n,e},$$

$$\vec{H}_{e}(M) = (-i\omega) \sum_{n=1}^{N_{e}} \left(\nabla \times \overline{I} \right) \Psi^{e}(M, M_{n,e}) \cdot \vec{p}_{\tau}^{n,e}, \quad M \in D_{e},$$
(6)

где $k_e = \omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$, \overline{I} — единичная диада, $\Psi^e(M, M_{n,e}) = \frac{\exp(ik_e R_M^{n,e})}{4\pi R_M^{n,e}}$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца для области D_e , $R_M^{n,e}$ — расстояние от точки $M_{n,e}$ на S_e до точки M в D_e , $\overline{p}_{\tau}^{n,e}$ ($n = 1, 2, \ldots, N_e$) — неизвестные векторные дипольные моменты, каждый из которых состоит из двух независимых компонент $p_{\tau_1}^{n,e}$ и $p_{\tau_2}^{n,e}$ вдоль направлений $\overline{e}_{\tau_1}^{n,e}$ и $\overline{e}_{\tau_2}^{n,e}$, выбранных в плоскости, касательной к S_e в точке $M_{n,e}$. Поле $\{\overline{E}_i, \overline{H}_i\}$ в D_i представим как сумму полей аналогичных диполей, размещённых на вспомогательных поверхностях $S_i^{(1)}$ и $S_i^{(2)}$ в точках $\{M_{n,i,1}\}_{n=1}^{N_1}$ и $\{M_{n,i,2}\}_{n=1}^{N_2}$ и излучающих в однородную киральную среду с параметрами $\varepsilon_i, \mu_i, \beta$ (N_1 и N_2 — число диполей на $S_i^{(1)}$ и $S_i^{(2)}$, соответственно). Используя диадную функцию Грина [5] для бесконечной однородной киральной среды с

А. Г. Дмитренко, С. В. Корогодов

параметрами $\varepsilon_i, \mu_i, \beta$, получаем представления

$$\vec{E}_{i}(M) = \frac{\omega^{2} \mu_{i}}{k_{i}} \left(\frac{\gamma}{k_{i}}\right)^{2} \left\{ \sum_{n=1}^{N_{1}} \left[\gamma_{1} \overset{=n,i,1}{G_{1}} (M, M_{n,i,1}) + \gamma_{2} \overset{=n,i,1}{G_{2}} (M, M_{n,i,1}) \right] \vec{p}_{\tau}^{n,i,1} + \sum_{n=1}^{N_{2}} \left[\gamma_{1} \overset{=n,i,2}{G_{1}} (M, M_{n,i,2}) + \gamma_{2} \overset{=n,i,2}{G_{2}} (M, M_{n,i,2}) \right] \vec{p}_{\tau}^{n,i,2} \right\},$$

$$(7)$$

$$\vec{H}_{i}(M) = -i\omega \left(\frac{\gamma}{k_{i}}\right)^{2} \left\{ \sum_{n=1}^{N_{1}} \left[\gamma_{1} \vec{G}_{1}^{n,i,1}(M, M_{n,i,1}) - \gamma_{2} \vec{G}_{2}^{n,i,1}(M, M_{n,i,1}) \right] \vec{p}_{\tau}^{n,i,1} + \sum_{n=1}^{N_{2}} \left[\gamma_{1} \vec{G}_{1}^{n,i,2}(M, M_{n,i,2}) - \gamma_{2} \vec{G}_{2}^{n,i,2}(M, M_{n,i,2}) \right] \vec{p}_{\tau}^{n,i,2} \right\}, \quad M \in D_{i},$$

где $k_i = \omega \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}, \gamma^2 = k_i^2 / (1 - k_i^2 \beta^2); \gamma_1 = k_i / (1 - k_i \beta), \gamma_2 = k_i / (1 + k_i \beta)$ — волновые числа правои левополяризованных волн, $\vec{p}_{\tau}^{n,i,1}$ $(n = 1, 2, ..., N_1)$ и $\vec{p}_{\tau}^{n,i,2}$ $(n = 1, 2, ..., N_2)$ — неизвестные дипольные моменты, состоящие из независимых компонент $p_{\tau 1}^{n,i,1}, p_{\tau 2}^{n,i,1}$ и $p_{\tau 1}^{n,i,2}, p_{\tau 2}^{n,i,2}$ вдоль направлений $\vec{e}_{\tau 1}^{n,i,1}, \vec{e}_{\tau 2}^{n,i,1}$ и $\vec{e}_{\tau 1}^{n,i,1}, \vec{e}_{\tau 2}^{n,i,2}$ и $\vec{e}_{\tau 1}^{n,i,2}, \vec{e}_{\tau 2}^{n,i,2}$, выбранных в плоскостях, касательных к $S_i^{(1)}$ и $S_i^{(2)}$ в точках $M_{n,i,1}$ и $M_{n,i,2}$, соответственно, $\vec{G}_{1,2}$ и $\vec{G}_{1,2}^{n,2}$ — элементы диадных функций Грина, определяемые выражениями

$$\overline{\overline{G}}_{1}^{n,i,1}(M, M_{n,i,1}) = \frac{k_{i}}{2\gamma^{2}} \left[\gamma_{1}\overline{\overline{I}} + \frac{1}{\gamma_{1}}\nabla\nabla + \nabla \times \overline{\overline{I}} \right] \Psi_{1}^{i}(M, M_{n,i,1}),$$

$$\overline{\overline{G}}_{2}^{n,i,1}(M, M_{n,i,1}) = \frac{k_{i}}{2\gamma^{2}} \left[\gamma_{2}\overline{\overline{I}} + \frac{1}{\gamma_{2}}\nabla\nabla + \nabla \times \overline{\overline{I}} \right] \Psi_{2}^{i}(M, M_{n,i,1}),$$
(8)

$$\overline{\overline{G}}_{1}^{n,i,2}(M, M_{n,i,2}) = \frac{k_{i}}{2\gamma^{2}} \left[\gamma_{1}\overline{\overline{I}} + \frac{1}{\gamma_{1}}\nabla\nabla + \nabla \times \overline{\overline{I}} \right] \Psi_{1}^{i}(M, M_{n,i,2}),$$

$$\overline{\overline{G}}_{2}^{n,i,2}(M, M_{n,i,2}) = \frac{k_{i}}{2\gamma^{2}} \left[\gamma_{2}\overline{\overline{I}} + \frac{1}{\gamma_{2}}\nabla\nabla + \nabla \times \overline{\overline{I}} \right] \Psi_{2}^{i}(M, M_{n,i,2}).$$

В выражениях (8) $\Psi_{1,2}^{i}(M, M_{n,i,1}) = \frac{\exp(i\gamma_{1,2}R_{M}^{n,i,1})}{4\pi R_{M}^{n,i,1}}, \quad \Psi_{1,2}^{i}(M, M_{n,i,2}) = = \frac{\exp(i\gamma_{1,2}R_{M}^{n,i,2})}{4\pi R_{M}^{n,i,2}} -$ ска-

лярные функции Грина, $R_M^{n,i,1}$ и $R_M^{n,i,2}$ — расстояния от точек $M_{n,i,1}$ на $S_i^{(1)}$ и $M_{n,i,2}$ на $S_i^{(2)}$ до точки M в D_i . Поля (6) и (7) удовлетворяют уравнениям (1) и (2), соответственно, более того, поле (6) удовлетворяет условиям излучения (5). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (3)–(4), необходимо соответствующим образом выбрать векторные постоянные $\vec{p}_{\tau}^{n,e}$, $\vec{p}_{\tau}^{n,i,1}$ и $\vec{p}_{\tau}^{n,i,2}$. Используем для этого метод коллокаций. Пусть M_d^j ($j = 1, 2, \ldots, L_1$) и M_c^j ($j = 1, 2, \ldots, L_2$) — точки коллокации на S_d и S_c , соответственно. Тогда для определения неизвестных комплексных постоянных $p_{\tau 1}^{n,e}$, $p_{\tau 2}^{n,e}$ ($n = 1, 2, \ldots, N_e$), $p_{\tau 1}^{n,i,1}$, $p_{\tau 2}^{n,i,1}$ ($n = 1, 2, \ldots, N_1$), $p_{\tau 1}^{n,i,2}$, $p_{\tau 2}^{n,i,2}$ ($n = 1, 2, \ldots, N_2$) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений с комплексной матрицей размерности ($4L_1 + 2L_2$) × ($2N_e + 2N_1 + 2N_2$):

$$\vec{n}_{d}^{\,j} \times (\vec{E}_{i,d}^{\,j} - \vec{E}_{e,d}^{\,j}) = \vec{n}_{d}^{\,j} \times \vec{E}_{0,d}^{\,j} \,,$$

А. Г. Дмитренко, С. В. Корогодов

$$\vec{n}_{d}^{j} \times (\vec{H}_{i,d}^{j} - \vec{H}_{e,d}^{j}) = \vec{n}_{d}^{j} \times \vec{H}_{0,d}^{j}, \quad j = 1, 2, \dots, L_{1},$$

$$\vec{n}_{c}^{j} \times \vec{E}_{i,c}^{j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, L_{2}.$$
(9)

Нижние индексы "d"и "c"здесь означают, что значения соответствующих компонент поля берутся на поверхностях S_d кирального слоя и S_c проводника, соответственно. Решение системы (9) определяется путём минимизации функционала

$$\Phi = \sum_{j=1}^{L_1} \left\{ \left| \vec{n}_d^j \times (\vec{E}_{i,d}^j - \vec{E}_{e,d}^j) - \vec{n}_d^j \times \vec{E}_{0,d}^j \right|^2 + \left. \left. + \left(\mu_e / \varepsilon_e \right) \left| \vec{n}_d^j \times (\vec{H}_{i,d}^j - \vec{H}_{e,d}^j) - \vec{n}_d^j \times \vec{H}_{0,d}^j \right|^2 \right\} + \sum_{j=1}^{L_2} \left| \vec{n}_c^j \times \vec{E}_{i,c}^j \right|^2,$$

$$(10)$$

имеющего смысл квадрата нормы вектора невязки системы (9). Задача минимизации функционала (10) решается методом сопряжённых градиентов. Контроль точности решения осуществляется путём вычисления относительного значения функционала (10) на сетке точек коллокации и точек, промежуточных к ним, выбираемых как на поверхности S_d , так и на поверхности S_c :

$$Q = (\Phi'/\Phi_0)^{1/2}, \quad \Phi_0 = \sum_{m=1}^{L_3} \left\{ \left| \vec{n}_d^m \times \vec{E}_{0,d}^m \right|^2 + (\mu_e/\varepsilon_e) \left| \vec{n}_d^m \times \vec{H}_{0,d}^m \right|^2 \right\},\tag{11}$$

где Φ' — значение функционала (10) на указанной выше совокупности точек, а Φ_0 — значение соответствующей нормы падающего поля на совокупности $m = 1, 2, ..., L_3$ точек коллокации и промежуточных точек на S_d .

Таким образом, построено решение граничной задачи (1)–(5), где $\vec{p}_{\tau}^{n,e}$ ($n = 1, 2, ..., N_e$), $\vec{p}_{\tau}^{n,i,1}$ ($n = 1, 2, ..., N_1$), $\vec{p}_{\tau}^{n,i,2}$ ($n = 1, 2, ..., N_2$) определяются из (9)–(10). В свете общей идеологии метода дискретных источников [8], для того, чтобы это решение было действительно приближённым решением рассматриваемой граничной задачи, достаточно удовлетворить граничным условиям на поверхностях S_c и S_d в норме пространства L_2^{τ} (пространство векторных функций, касательных к соответствующим поверхностям, компоненты которых принадлежат пространству L_2). Легко видеть, что схема (9)–(10) является реализацией такого приближения. Чтобы это приближение можно было осуществить с желаемой точностью, система функций, положенная в основу представлений (6)–(7), должна быть полной. Не приводя здесь этого доказательства, отметим, что оно может быть выполнено на основе схемы до-казательства полноты, приведённой в [8].

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе изложенного выше метода создана программа для расчёта компонент рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Входными величинами являются геометрия структуры, волновые размеры идеально проводящего тела и оболочки, относительные диэлектрическая $\varepsilon_i/\varepsilon_e$ и магнитная μ_i/μ_e проницаемости оболочки, параметр киральности β , возбуждающее поле $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$, число вспомогательных источников N_e , N_1 , N_2 , точек коллокации L_1 и L_2 , а также значения параметров K_e , $K_i^{(1)}$ и $K_i^{(2)}$, характеризующих положения вспомогательных поверхностей. Минимизация функционала (10) осуществляется методом сопряжённых градиентов; итерационный процесс останавливается при условии, если относительное изменение функционала в пределах двух последовательных

А. Г. Дмитренко, С. В. Корогодов

итераций меньше 10^{-5} . Данная программа позволяет решать широкий класс конкретных дифракционных задач и на основании этих решений исследовать различные аспекты процессов дифракции на рассматриваемых структурах. Ниже приводятся некоторые результаты численных исследований, направленных на выяснение влияния "киральности" на энергетические характеристики рассеянного поля структур с оболочками, обладающими преимущественно либо электрическим, либо магнитным поглощением. Рассматриваются структуры в виде трёхосных эллипсоидов, возбуждаемые линейно поляризованной плоской волной, распространяющейся вдоль оси Oz; вектор \vec{E}_0 направлен вдоль оси Ox, полуоси эллипсоидов ka, kb, kc направлены вдоль осей Ox, Oy, Oz, соответственно. В качестве исследуемых характеристик были выбраны бистатические поперечники рассеяния в E-плоскости для основной и кроссполяризованной составляющих рассеянного поля, определяемые выражениями

$$\sigma_{\theta\theta} = \lim_{R \to \infty} 4\pi R^2 \left(|E_{e,\theta}|^2 / |E_0|^2 \right), \quad \sigma_{\varphi\theta} = \lim_{R \to \infty} 4\pi R^2 \left(|E_{e,\varphi}|^2 / |E_0|^2 \right), \tag{12}$$

в которых $E_{e,\theta}$ и $E_{e,\varphi}$ — соответствующие компоненты поля (6) в сферической системе координат. Проведенные расчёты показали, что для структур, к которым относятся приведённые ниже результаты, значения бистатических поперечников рассеяния для кроссполяризованных составляющих не превышают -12 дБ, поэтому соответствующие диаграммы для них не приводятся.

Рис. 2, 3 относятся к сферическим структурам, отличающимся только значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей оболочек.



Рис.2. Для обеих структур радиус $k_e a$ идеально проводящего ядра равен 1,5, радиус оболочки $k_e a_d$ равен 1,8. Рис. 2 соответствует структуре, оболочка которой характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_i/\varepsilon_e = 3,0 + i1,5$ и относительной магнитной проницаемостью $\mu_i/\mu_e = 1,0$, т. е. обладает электрическим поглощением. Рис. 3 соответствует структуре с оболочкой, обладающей магнитным поглощением и характеризуемой параметрами $\varepsilon_i/\varepsilon_e = 2,5$ и $\mu_i/\mu_e = 1,5 + i0,75$.

Рис. 4, 5 относятся к структурам в форме сплюснутого в направлении распространения возбуждающей волны трёхосного эллипсоида, также отличающимся только значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей оболочек. Полуоси идеально проводящего ядра этих структур имеют размеры: $k_ea = 2,0$, $k_eb = 1,2$, $k_ec = 0,8$. Оболочка также имеет эллипсоидальную форму и характеризуется значениями полуосей k_ea_d , k_eb_d , $k_ec_d = 1,2(k_ea, k_eb, k_ec)$. Рис. 4 относится к структуре, диэлектриче-

А. Г. Дмитренко, С. В. Корогодов



ская $\varepsilon_i/\varepsilon_e$ и магнитная μ_i/μ_e проницаемости оболочки которой равны 3,0+*i*1,5 и 1,0, соответственно, т. е. выбраны такими же, как для оболочки структуры, к которой относится рис. 2.



Рис. 5 соответствует структуре с оболочкой, характеризуемой параметрами $\varepsilon_i/\varepsilon_e = 2,5$, $\mu_i/\mu_e = 1,5 + i0,75$, т. е. такими же параметрами, как и параметры оболочки структуры, к которой относится рис. 3. Параметры метода во всех рассмотренных случаях выбраны одними и теми же. Число диполей на вспомогательных поверхностях S_e , $S_i^{(1)}$ и $S_i^{(2)}$ выбрано одинаковым $N_e = N_1 = N_2 = 40$ и распределены они следующим образом: в каждом из полусечений $\varphi = \text{const}$, общее число которых равно 8, выбрано 5 точек размещения диполей равномерно по углу θ (θ и φ — общепринятые сферические

А. Г. Дмитренко, С. В. Корогодов



угловые координаты). Количество точек коллокации на поверхностях S_c идеально проводящего тела и S_d оболочки также выбрано одинаковым: $L_1 = L_2 = 80$; число полусечений $\varphi = \text{const}$, в которых размещены точки колокации, выбрано в два раза большим, чем при размещении диполей; размещение точек коллокации по углу θ сохранено таким же, как для диполей. Предварительно проведённый численный эксперимент показал, что оптимальные (в смысле обеспечения минимального значения нормы невязки граничных условий) положения вспомогательных поверхностей при выбранных количествах диполей и точек коллокации определяются значениями параметров $K_e, K_i^{(1)}, K_i^{(2)}$ из интервалов $0,3 \leq K_e \leq 0,6; 0,3 \leq K_i^{(1)} \leq 0,5; 3,0 \leq K_i^{(2)} \leq 5,0$. В рассматриваемом случае выбрано $K_e = 0,5$, $K_i^{(1)} = 0,4, K_i^{(2)} = 5,0$. "Киральность" структур характеризуется вещественным параметром β . Кривые 1 на рис. 2-5 относятся к случаю $\beta = 0$ (обычный магнитодиэлектрический слой), кривые $2 - \kappa$ случаю $\beta = 0,01\lambda$, кривые $3 - \kappa$ случаю $\beta = 0,02\lambda$, кривые $4 - \kappa$ случаю $\beta = 0,03\lambda$. При выбранных параметрах метода значение невязки (11) не превышало 8% для сферических структур (рис. 2, 3) и 16% для эллиптических структур (рис. 4, 5).

Анализ результатов, представленных на рис. 2–5, позволяет сделать следующие выводы. В целом, если иметь в виду всевозможные направления рассеяния, прослеживается тенденция к снижению уровня рассеянного поля по мере увеличения "киральности"слоя. Однако влияние "киральности"не сводится только к уменьшению уровня рассеяния; наличие "киральности" приводит также к перераспределению энергии рассеянного поля в пространстве, вследствие чего в некоторых направления рассеяния уровень рассеянного поля может существенно возрасти. Такое явление, в частности, имеет место для сферических структур, к которым относятся рис. 2 и 3. Как показывают приведённые на этих рисунках графики, с увеличение поперечника обратного рассеяния ($\theta = 180^{\circ}$) по сравнению с обычной магнитодиэлектрической оболочкой. Таким образом, если иметь в виду поперечник обратного рассеяния, то для приведённого примера с точки зрения снижения радиолокационной заметности наличие "киральности" даже вредно. Наибольший эффект в смысле снижения уровня рассеянного поля в объокового рассеяния имеет место для сферической оболочкой в точки зрения снижения радиолокационной заметности наличие "киральности", в рассеяния, то для приведённого примера с точки зрения снижения радиолокационной заметности наличие "киральности" даже вредно. Наибольший эффект в смысле снижения уровня рассеянного поля во всех рассмотренных случаях имеет место в направлениях, близких к направлению бокового рассеяния ($\theta \approx 90^{\circ}$); в меньшей степени он имеет место в направлении распространения возбуждающей

А. Г. Дмитренко, С. В. Корогодов

волны ($\theta \approx 0^{\circ}$). Таким образом, наличие у оболочки киральных свойств в общем случае приводит к перераспределению энергии рассеянного поля в пространстве, и решение вопроса о целесообразности использования киральных материалов в тех или иных случаях требует предварительного анализа.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Третьяков С. А. //Радиотехника и электроника, 1994. Т. 39. № 10. С. 1457.
- 2. In: Proc. of the 15th URSI Int. Symp. on Electrom. Theory. St. Petersburg, Russia, May 23-26, 1995.
- 3. In: Proc. of the Int. Conf. and Workshop on Electrom. of Complex Media (Bianisotropics'97). June 5–7, 1997. /Ed. by Werner S. Weiglhofer. Glasgow, Great Britain: University of Glasgow, 1997.
- 4. Jaggard D. L., Engheta V. //Electron. Letters, 1989. V. 25. № 3. P. 173.
- 5. Lakhtakia A., Varadan V.V., and Varadan V.K. //J. of the Optical Soc. of Amer., 1988. V.5 A. № 2. P. 175.
- 6. Lakhtakia A., Varadan V. K., and Varadan V. V. //Appl. Optics, 1985. V. 24. № 23. P. 4146.
- 7. Федоренко А.И. //Радиотехника и электроника, 1995. Т. 40. № 3. С. 381.
- 8. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 182 с.
- 9. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. //Радиотехника и электроника, 1990. Т. 35. № 2. С. 438.
- 10. Дмитренко А. Г., Мукомолов А. И. //Изв. ВУЗов. Физика, 1996. Т. 39. № 8. С. 89.

Сибирский физико-технический институт при Томском госуниверситете, г. Томск, Россия Поступила в редакцию 30 июля 1997 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING BY PERFECTLY CONDUCTING BODY WITH A CHIRAL COATING

A. G. Dmitrenko, S. V. Korogodov

The numerical method is suggested for solution of electromagnetic scattering problems of 3D perfectly conducting arbitrary shaped body with a chiral coating in resonance frequency range. A short description of the created application package for computation of scattering field characteristics and solution accuracy control is given. Some numerical results directed to the research of the "chirality" influence on scattering properties of absorbing coatings are shown.

УДК 621.372.832

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭКРАНИРОВАННОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ДВУХЩЕЛЕВОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

А.С. Арефьев, В.А. Неганов, Е.И. Нефёдов

На основе метода почти полного обращения интегрального оператора построена модель экранированной несимметричной двухщелевой линии передачи. В случае симметричного расположения щелей краевая задача для данной структуры сведена к двум независимым системам интегральных уравнений, отвечающим различным типам собственных волн. Приведены результаты численного расчёта дисперсионных характеристик, а также распределений тангенциальных составляющих напряжённости электрического поля на щелях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существенный прогресс в минимизации габаритов и веса СВЧ модулей радиотехнической аппаратуры и вычислительной техники может быть достигнут за счёт использования многослойных или объёмных интегральных схем (ОИС) СВЧ [1]. Одним из наиболее распространённых базовых элементов для ОИС СВЧ является несимметричная двухщелевая линия (НДЩЛ). На её основе выполняется большое количество функциональных элементов с многоуровневым размещением проводников, чем и определяется практическая и методологическая актуальность её теоретического исследования.

Вопросам алгоритмизации расчётов НДЩЛ посвящено большое количество публикаций (см., например, [1–3]. Наиболее обстоятельно физические свойства НДЩЛ были исследованы в [2]. Однако во всех известных нам работах алгоритмы расчёта такой структуры базируются на применении прямых проекционных методов к системе из четырёх интегральных уравнений первого рода, ядра которых содержат логарифмические особенности и сингулярности типа Коши. Отличие в подходах сводится к использованию того или иного базиса: полиномов Чебышева, различных классов кусочно определённых функций и т.д. В результате применения прямых проекционных методов постоянные распространения собственных волн НДЩЛ определяются из условия совместности системы большого числа алгебраических уравнений (до ста уравнений). Более того, при таком подходе возникают ощутимые трудности, связанные со сложностью обоснования окончательных результатов, медленной сходимостью (а в ряде случаев отсутствием сходимости) и появлением неустойчивости алгоритмов [4].

В связи с этим резко возрастает роль численно—аналитических методов решения краевой задачи о собственных волнах НДЩЛ, опирающихся на учёт специфики исследуемой структуры и возможность существенного аналитического преобразования первоначально полученных интегральных уравнений первого рода. Одним из таких методов является метод почти полного обращения интегрального оператора (МПО), нашедший широкое применение при анализе волноведущих структур с токопроводящими полосками, расположенными в одной плоскости [5, 6]. Настоящая работа посвящена обобщению МПО на случай, когда токопроводящие полоски расположены в разных плоскостях.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ НДЩЛ

НДЩЛ представляет собой три диэлектрических слоя, границы раздела которых частично металлизированы (рис. 1), при этом полоски

А.С.Арефьев, В.А.Неганов, Е.И.Нефёдов



считаются бесконечно тонкими и идеально проводящими, потери в металлическом экране (внешний контур на рис. 1) не учитываются. Вдоль оси z структура предполагается регулярной. Мы будем рассматривать собственные волны, распространяющиеся в направлении оси z (зависимость от координаты z и времени t имеет вид $\exp i(\omega t - hz)$, где h — неизвестная постоянная распространения, ω — циклическая частота).

Будем считать, что диэлектрические слои 1 и 3 (рис. 1) обладают идентичными физическими и геометрическими параметрами:

$$\varepsilon^{(3)} = \varepsilon^{(1)}, \quad \mu^{(3)} = \mu^{(1)}, \quad y_3 - y_2 = y_1.$$
 (1)

Кроме того, расположим щели симметрично относительно плоскости x = a/2, накладывая на их координаты следующие условия:

$$x_{21} = a - x_{12}, \quad x_{22} = a - x_{11}.$$
 (2)

Можно показать, что в линии, удовлетворяющей условиям (1), (2) возможно раздельное существование волн двух типов. Дадим им определение, исходя из распределения касательных составляющих напряжённости электрического поля \vec{E} на щелях.

Собственную волну НДЩЛ назовём TS-волной (LS-волной), если выполняются равенства

$$E_x(a - x, y_2) = \pm E_x(x, y_1), \quad E_z(a - x, y_2) = \mp E_z(x, y_1).$$
(3)

Верхние знаки в (3) соответствуют TS-волнам, нижние — LS-волнам.

Краевая задача для собственных волн НДЩЛ может быть сведена к следующей системе интегральных соотношений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{L}_n(x) \hat{R}_n \vec{p}_n = 0 \qquad (x_{11} < x < x_{12}),$$
(4)

А.С.Арефьев, В.А.Неганов, Е.И.Нефёдов

где

$$\hat{L}_{n} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi nx}{a} & 0\\ 0 & \cos \frac{\pi nx}{a} \end{pmatrix},$$
$$\vec{p}_{n} = \begin{pmatrix} \int_{x_{11}}^{x_{12}} E_{z} \left(x', y_{1}\right) \sin \frac{\pi nx'}{a} dx'\\ \int_{x_{11}}^{x_{12}} E_{x} \left(x', y_{1}\right) \cos \frac{\pi nx'}{a} dx'\\ \int_{x_{11}}^{x_{12}} E_{x} \left(x', y_{1}\right) \cos \frac{\pi nx'}{a} dx' \end{pmatrix},$$
$$\hat{R}_{n} = \begin{pmatrix} Y_{n11} & Y_{n12}\\ Y_{n21} & Y_{n22} \end{pmatrix} \pm (-1)^{n} \begin{pmatrix} Y_{n13} & Y_{n14}\\ Y_{n23} & Y_{n24} \end{pmatrix}$$

Верхний знак в определении тензора \hat{R}_n соответствует TS-волнам, нижний — LS-волнам. Наконец, элементы Y_{nij} определяются следующим образом:

$$\begin{split} Y_{n11} &= \frac{2}{a} \frac{i}{k} \left\{ \frac{1}{\mu^{(1)} \alpha_n^{(1)}} \left[k^2 \varepsilon^{(1)} \mu^{(1)} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right] \operatorname{ctg} \left(\alpha_n^{(1)} y_1 \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{\mu^{(2)} \alpha_n^{(2)}} \left[k^2 \varepsilon^{(2)} \mu^{(2)} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right] \operatorname{ctg} \left(\alpha_n^{(2)} \left(y_2 - y_1 \right) \right) \right\}, \\ Y_{n12} &= \frac{2}{a} \frac{h}{k} \frac{\pi n}{a} \left[\frac{1}{\mu^{(1)} \alpha_n^{(1)}} \operatorname{ctg} \left(\alpha_n^{(1)} y_1 \right) + \frac{1}{\mu^{(2)} \alpha_n^{(2)}} \operatorname{ctg} \left(\alpha_n^{(2)} \left(y_2 - y_1 \right) \right) \right], \\ Y_{n13} &= -\frac{2}{a} \frac{i}{k} \frac{1}{\mu^{(2)} \alpha_n^{(2)}} \left[k^2 \varepsilon^{(2)} \mu^{(2)} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right] \frac{1}{\sin \left(\alpha_n^{(2)} \left(y_2 - y_1 \right) \right)}, \\ Y_{n14} &= -\frac{2}{a} \frac{h}{k} \frac{\pi n}{a} \frac{1}{\mu^{(2)} \alpha_n^{(2)}} \frac{1}{\sin \left(\alpha_n^{(2)} \left(y_2 - y_1 \right) \right)}, \end{split}$$

 $Y_{n21} = Y_{n12},$

$$Y_{n22} = \frac{-2}{a\left(1+\delta_{0n}\right)} \frac{i}{k} \left[\frac{\left(\alpha_0^{(1)}\right)^2}{\mu^{(1)}\alpha_n^{(1)}} \operatorname{ctg}\left(\alpha_n^{(1)}y_1\right) + \frac{\left(\alpha_0^{(2)}\right)^2}{\mu^{(2)}\alpha_n^{(2)}} \operatorname{ctg}\left(\alpha_n^{(2)}\left(y_2-y_1\right)\right) \right],$$

 $Y_{n23} = Y_{n14},$

$$Y_{n24} = \frac{2}{a\left(1+\delta_{0n}\right)} \frac{i}{k} \frac{\left(\alpha_0^{(2)}\right)^2}{\mu^{(2)}\alpha_n^{(2)}} \frac{1}{\sin\left(\alpha_n^{(2)}\left(y_2-y_1\right)\right)},$$

где $\alpha_n^{(j)} = \sqrt{k^2 \varepsilon^{(j)} \mu^{(j)} - h^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}$ $(j = 1, 2, 3; n = 0, 1, \ldots), k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, δ_{mn} — символ Кронекера.

А.С.Арефьев, В.А.Неганов, Е.И.Нефёдов

3. ОБРАЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Интегрирование по частям и перестановка порядка суммирования и интегрирования в (4) даёт возможность перейти к системе интегральных уравнений первого рода

$$\int_{x_{11}}^{x_{12}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\pi n} R_{n11} \cos\left(\frac{\pi n x'}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) E'_{z}\left(x'\right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} R_{n12} \cos\left(\frac{\pi n x'}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) E_{x}\left(x'\right) \right] dx' = 0,$$

$$\int_{x_{11}}^{x_{12}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\pi n} R_{n21} \cos\left(\frac{\pi n x'}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) E'_{z}\left(x'\right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} R_{n22} \cos\left(\frac{\pi n x'}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) E_{x}\left(x'\right) \right] dx' = 0$$

$$\left. \left(x_{11} < x < x_{12} \right), \right\}$$

$$(5)$$

где введены следующие обозначения:

$$E'_{z}(x) = \frac{d}{dx}E_{z}(x, y_{1}), \quad E_{x}(x) = E_{x}(x, y_{1}).$$

Опираясь на асимптотическое поведение элементов тензора \hat{R}_n , при $n \to \infty$

$$R_{n11} \sim nt_1$$
, $R_{n12} = R_{n21} \sim t_2$, $R_{n22} \sim \frac{t_3}{n}$,

где

510

$$t_{1} = \frac{2\pi i}{ka^{2}} \left(\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \right), \quad t_{2} = -\frac{2h}{ka} \left(\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \right),$$
$$t_{3} = \frac{2i}{\pi k} \left[\frac{\left(\alpha_{0}^{(1)} \right)^{2}}{\mu^{(1)}} + \frac{\left(\alpha_{0}^{(2)} \right)^{2}}{\mu^{(2)}} \right],$$

выделим особенности в ядрах интегральных уравнений (5):

$$\int_{x_{11}}^{x_{12}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{n} R_{n11} - t_1 \right) \cos\left(\frac{\pi n x'}{a} \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{a} \right) E'_z \left(x' \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_{n12} - t_2 \right) \cos\left(\frac{\pi n x'}{a} \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{a} \right) E_x \left(x' \right) \right\} dx' = \\ \left. = -\frac{1}{2} \int_{x_{11}}^{x_{12}} \frac{\sin\left(\pi x/a \right)}{\cos\left(\pi x'/a \right) - \cos\left(\pi x/a \right)} \left[\frac{a}{\pi} t_1 E'_z \left(x' \right) + t_2 E_x \left(x' \right) \right] dx',$$
(6)

А.С.Арефьев, В.А.Неганов, Е.И.Нефёдов

m . . .

$$\int_{x_{11}}^{x_{12}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\pi n} \left(R_{n21} - t_2 \right) \cos\left(\frac{\pi n x'}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) E'_z\left(x'\right) + \left[R_{022} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_{n22} - \frac{t_3}{n} \right) \cos\left(\frac{\pi n x'}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \right] E_x\left(x'\right) \right\} dx' = \\ = \frac{1}{2} \int_{x_{11}}^{x_{12}} \ln \left| 2 \left(\cos\frac{\pi x'}{a} - \cos\frac{\pi x}{a} \right) \right| \left[\frac{a}{\pi} t_2 E'_z\left(x'\right) + t_3 E_x\left(x'\right) \right] dx' \\ \left(x_{11} < x < x_{12} \right) .$$

Здесь были использованы следующие представления:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi nx'}{a} \sin \frac{\pi nx}{a} = \frac{1}{2} \frac{\sin (\pi x/a)}{\cos (\pi x'/a) - \cos (\pi x/a)},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{\pi nx'}{a} \cos \frac{\pi nx}{a} = -\frac{1}{2} \ln \left| 2 \left(\cos \frac{\pi x'}{a} - \cos \frac{\pi x}{a} \right) \right|.$$

Существенно, что бесконечные суммы в левых частях равенств (6) сходятся к ограниченным на квадрате $[x_{11} < x < x_{12}] \times [x_{11} < x' < x_{12}]$ функциям.

Базисные тригонометрические системы в (6) не ортогональны на интервале определения интегральных уравнений. Поэтому удобно применить ортогонализующую подстановку [5, 6]:

$$\cos\frac{\pi x}{a} = c + su$$
, $\cos\frac{\pi x'}{a} = c + sv$,

где

$$\left\{\begin{array}{c}c\\s\end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi x_{11}}{a} \pm \cos\frac{\pi x_{12}}{a}\right).$$

В результате получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{v - u} \left[t_1 e'_z(v) + t_2 e_x(v) \right] dv = \\
= -\frac{2s}{\pi} \int_{-1}^{1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} R_{n11} - t_1 \right) T_n(c + sv) U_{n-1}(c + su) e'_z(v) + \right. \\
\left. + \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_{n12} - t_2 \right) T_n(c + sv) U_{n-1}(c + su) e_x(v) \right\} dv, \\
\left. \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln |v - u| \left[t_2 e'_z(v) + t_3 e_x(v) \right] dv =$$
(7)

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left\{ \left[-t_2 \ln 2s + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(R_{n21} - t_2 \right) \times \right] \right\}$$

А.С.Арефьев, В.А.Неганов, Е.И.Нефёдов

$$\times T_n(c+sv)T_n(c+su) \bigg] e'_z(v) + \bigg[2R_{022} - t_3 \ln 2s + 2\sum_{n=1}^{\infty} \bigg(R_{n22} - \frac{t_3}{n} \bigg) T_n(c+sv)T_n(c+su) \bigg] e_x(v) \bigg\} dv$$

(-1 < u < 1),

где

$$e'_z(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (c + sv)^2}} \frac{a}{\pi} E'_z \left(\frac{a}{\pi} \arccos(c + sv)\right),$$
$$e_x(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (c + sv)^2}} E_x \left(\frac{a}{\pi} \arccos(c + sv)\right),$$

 $T_n,\ U_n$ — многочлены Чебышева первого и второго рода.

Решения интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(v)}{v - u} dv = f(u) \qquad (-1 < u < 1),$$
$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|v - u|\psi(v)dv = g(u) \quad (-1 < u < 1)$$

могут быть представлены следующим образом [5, 6]:

$$\begin{split} \varphi(u) &= \frac{a_0}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-u^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-v^2}}{v-u} f(v) dv \,, \\ \psi(u) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-u^2}} \left[\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-v^2}}{v-u} g'(v) dv - \frac{1}{\ln 2} \int_{-1}^{1} \frac{g(v)}{\sqrt{1-v^2}} dv \right] \,, \end{split}$$

где *a*₀ — произвольная постоянная. Воспользовавшись этими соотношениями, произведём обращение интегральных операторов в (7). В результате приходим к системе интегральных уравнений второго рода

$$t_{1}e'_{z}(u) + t_{2}e_{x}(u) = \frac{a_{0}}{\sqrt{1 - u^{2}}} + \frac{2s}{\pi^{2}\sqrt{1 - u^{2}}} \times \\ \times \int_{-1}^{1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}R_{n11} - t_{1} \right) T_{n}(c + sv)\Omega_{n}(u)e'_{z}(v) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_{n12} - t_{2} \right) T_{n}(c + sv)\Omega_{n}(u)e_{x}(v) \right\} dv,$$
(8)

$$t_2 e'_z(u) + t_3 e_x(u) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1 - u^2}} \int_{-1}^{1} \left\{ \left[\pi t_2 \frac{\ln(2s)}{\ln 2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(R_{n21} - t_2 \right) \times \right] \right\}$$

А.С.Арефьев, В.А.Неганов, Е.И.Нефёдов

$$\times \left(sn\Omega_n(u) - \frac{1}{\ln 2}\Lambda_n\right) T_n(c+sv) \left[e'_z(v) + \left[-\frac{\pi}{\ln 2} \left(2R_{022} - t_3\ln\left(2s\right)\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(R_{n22} - \frac{t_3}{n}\right) \times \left(sn\Omega_n(u) - \frac{1}{\ln 2}\Lambda_n\right) T_n(c+sv) \right] e_x(v) \right\} dv$$

$$(9)$$

$$(-1 < u < 1).$$

где

$$\Omega_n(u) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-v^2}}{v-u} U_{n-1}(c+sv) dv$$
$$\Lambda_n = \int_{-1}^{1} T_n(c+sv) \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}.$$

4. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ НА ЩЕЛЯХ

Усечение рядов в ядрах (учёт только первых N слагаемых) сводит (8), (9) к системе вырожденных интегральных уравнений. В расчётах использовались представления неизвестных функций в виде линейных комбинаций многочленов Чебышева

$$e'_{z}(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^{2}}} \sum_{n=1}^{N} e'_{zn} T_{n}(u), \qquad (10)$$

$$e_x(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \sum_{n=0}^{N} e_{xn} T_n(u).$$
(11)

Отметим, что при подстановке (10), (11), ввиду наличия неопределённого параметра a_0 равенство (8) даст N алгебраических уравнений, (9) — (N + 1) уравнение. Отсутствие в (10) слагаемого с $T_0(u)$ следует из граничных условий на рёбрах металлических полосок.

На рис. 2, 3 приведены зависимости нормированных постоянных распространения от параметра $w = x_{11} - x_{22}$, характеризующего степень перекрытия металлических полосок в случае $x_{12} = a$, $x_{21} = 0$. Рис. 2 соответствует TS-волнам, рис. 3 — LS-волнам. Характерно наличие экранных волн, дисперсионные характеристики которых воспроизводят спектр прямоугольного волновода с трёхслойным заполнением. На рис. 4, 5 даны распределения поля на 1-й щели для двух низших собственных волн при нескольких значениях параметра w. На рис. 6 изображена зависимость постоянных распространения низших TS-волны (кривая 1) и LS-волны (кривая 2) от ширины щелей d при фиксированном расстоянии между центрами щелей, равном a/4. Параметры линии были выбраны следующим образом: $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(3)} = 1$, $\varepsilon^{(2)} = 10$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu^{(3)} = 1$, $ka = 2\pi$, $\frac{y_1}{a} = \frac{y_3 - y_2}{a} = 0,9916$, $\frac{y_2 - y_1}{a} = 0,0168$. Дисперсионные характеристики (рис. 2, 3, 6) построены с учётом N=5 слагаемых в представлениях поля (10), (11). Следует отметить, что приведённые графические построения хорошо согласуются с соответствующими результатами из [2].

А.С.Арефьев, В.А.Неганов, Е.И.Нефёдов


ЛИТЕРАТУРА

- 1. Гвоздев В.И., Нефедов Е.И. Объёмные интегральные схемы СВЧ. М.: Наука, 1985.
- 2. Кузаев Г. А. Несимметричная щелевая линия и устройства на её основе: Автореферат на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. М., 1986.
- Линии передачи сложных сечений / Под ред. В. С. Михалевского. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983.
- 4. Ву Чень-пан. //Вычислительные методы в электродинамике /Под ред. Э. П. Бурштейна. М.: Мир, 1977. С. 310.
- 5. Неганов В. А. Электродинамическая теория полосково-щелевых структур СВЧ. Самара, Издво Саратовского ун-та, Самарский филиал, 1991.
- 6. Неганов В. А., Нефедов Е. И., Яровой Г. П. Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневысоких частот. — М.: Наука, 1996.

Поволжский институт информатики, радиотехники и связи, г.Самара, Институт радиотехники и электроники РАН, г.Москва; Россия Поступила в редакцию 8 августа 1997 г.

А.С.Арефьев, В.А.Неганов, Е.И.Нефёдов



А.С.Арефьев, В.А.Неганов, Е.И.Нефёдов



А.С.Арефьев, В.А.Неганов, Е.И.Нефёдов

516

THE ELECTRODYNAMIC THEORY OF SHIELDED ASYMMETRIC TWO-SLOT LINE

A. S. Aref'ev, V. A. Neganov, E. I. Nefedov

The model of a shielded asymmetric two-slot line is constructed on the basis of the method of almosttotal inversion of a integral operator. In case of symmetrical slots the boundary-value problem for this structure is reduced to the two independent systems of integral equations, which correspond to the different mode types. The results of numerical computation of dispersing characteristics and distributions of tangential components of the electric field strength on the slots are given.

1998

УДК 539.219.3

УВЕЛИЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ НЕСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШУМАМИ СИСТЕМЫ

А.Н.Малахов

Новым методом рассмотрено влияние шумов нелинейной динамической системы на время распада нестабильного состояния системы, описываемой произвольным потенциальным профилем $\Phi(x)$, стремящимся к плюс бесконечности при $x \to -\infty$ и к минус бесконечности при $x \to \infty$ при отсутствии поглощающей границы. Полученный результат справедлив для произвольной интенсивности шума. Показано, что зависимость времени жизни нестабильного состояния от интенсивности шума носит резонансный характер, если потенциальный профиль описывается полиномом степени выше первой. Рассмотрены конкретные примеры.

введение

Воздействие шума, существующего в нелинейной динамической системе, на скорость распада нестабильных состояний этой системы рассматривалось в литературе неоднократно (см., напр., [1-11]). Эта ситуация возникает для потенциальных профилей $\Phi(x)$ динамической системы, не имеющих локальных минимумов, когда начальное состояние системы является неравновесным и неустойчивым даже в отсутствие шумов. В работе [3] было обнаружено явление увеличения времени жизни неравновесного состояния τ из-за действия шума и выявлен небольшой максимум τ при определённом значении интенсивности шума. В то же время в работах [1, 2, 4, 6-11] увеличения времени жизни нестабильного состояния из-за действия шумов не было обнаружено. В работе [5] было указано на ошибки, имеющиеся в [3], и также не было обнаружено увеличение времени жизни. Таким образом, вопрос оставался открытым.

В диссертации Агудова Н. В. [12] подробно проанализирована возникшая ситуация и показано, что существуют условия, при которых внешний шум может значительно увеличить время жизни неравновесных состояний, что, в частности, показано в работе [13], на примере системы с динамическим хаосом, находящейся в режиме перемежаемости.

В работах [2–9, 12, 13] потенциальный профиль $\Phi(x)$, описывающий динамическую систему, заканчивается справа поглощающей границей, что означает наличие в этой точке бесконечно глубокой потенциальной ямы (рис. 1, прерывистая прямая вниз), из которой изображающие точки уже не могут вернуться (под действием случайных толчков) назад. Это условие было связано с возможностью использования математического аппарата так называемого среднего времени первого достижения (mean first passage time-MFPT), позволяющего анализировать время жизни нестабильного состояния для любого потенциального профиля, расположенного слева от поглощающей границы [14].

Однако далеко не во всех случаях наличие поглощающей границы является адекватным с точки зрения рассматриваемой физической ситуации. Гораздо более физически обоснованными представляются случаи, когда потенциальный профиль не имеет поглощающей границы и когда изображающие точки могут возвращаться обратно в исследуемый интервал $[L_1, L_2]$, в котором находится начальное состояние системы [1, 10, 11]. Вместе с тем, в этих случаях до сих пор не удавалось точно определить время распада нестабильного состояния.



Рис. 1.

В данной работе новым методом получено общее точное выражение для времени жизни неравновесного состояния нелинейной динамической системы, справедливое для произвольного потенциального профиля на всей оси фазовой переменной и произвольной интенсивности воздействующего шума. Вместе с тем, при расположении в какой-либо точке потенциального профиля поглощающей границы, это выражение переходит в известный результат Понтрягина, Андронова, Витта [14]. Заметим, что применение этого метода позволило, например, обнаружить обязанную шумам задержку переключения джозефсоновского элемента для случая наклонного периодического потенциального профиля [15].

В конце работы рассмотрены два примера зависимости времени жизни неравновесного состояния от интенсивности шума для кусочно—линейного потенциального профиля и для кусочно—параболического.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОД РЕШЕНИЯ. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА

Пусть состояние динамической системы, подверженной действию флуктуаций представлено координатой (фазовой переменной) x(t), подчиняющейся уравнению Ланжевена

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{d\Phi(x)}{hdx} + \xi(t),\tag{1}$$

где $\Phi(x)$ — заданный потенциальный профиль, характеризующий динамическую систему, $\xi(t)$ — гауссовы стационарные дельта-коррелированные флуктуации с нулевым средним и с функцией корреляции $\langle \xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = D\delta(\tau)$, где интенсивность шума D = 2kT/h. Здесь h — эквивалентная вязкость системы, а T — эквивалентная температура шума, k — постоянная Больцмана.

Пусть потенциальный профиль $\Phi(x)$ достаточно быстро стремится к $+\infty$ при $x \to -\infty$ и к $-\infty$ при $x \to +\infty$, а начальное состояние системы равно $x(t=0) = x_0$. Введём в рассмотрение заданный интервал решения $[L_1, L_2]$ внутри которого находится начальное состояние системы (рис. 1). Поставим задачу определения времени жизни состояния системы внутри этого интервала.

Очевидно, что если шумы в системе отсутствуют (kT = 0), искомое время жизни равно, как это следует из (1),

$$\tau_0 = \int\limits_{x_0}^{L_2} \frac{hdx}{-\Phi'(x)}$$

А.Н.Малахов

и полностью определяется скоростью детерминированного движения изображающей точки от $x = x_0$ до $x = L_2$ вниз по потенциальному профилю. Существование случайной компоненты в (1) приводит к случайным движениям изображающих точек x(t), которые могут двигаться как вверх по потенциальному профилю, так и вниз, оказывая своё влияние на время нахождения состояния системы внутри интервала решения. Спрашивается, как существующие в системе флуктуации изменят это время жизни?

Хорошо известно, что уравнению (1) для марковской случайной переменной x(t) соответствует уравнение Фоккера—Планка для плотности вероятности W(x, t):

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} W(x,t) \right] + \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right\},\tag{2}$$

где G(x,t) — поток вероятности и $\varphi(x) = \Phi(x)/kT$ — безразмерный потенциальный профиль. Начальные и граничные условия имеют вид: $W(x,0) = \delta(x-x_0), \ G(-\infty,t) = W(+\infty,t) = 0.$

Вероятность нахождения состояния системы в интервале $[L_1, L_2]$ при $L_1 < x_0 < L_2$

$$P(t) = \int_{L_1}^{L_2} W(x, t) dx$$
 (3)

изменяется, как очевидно, от P(0) = 1 до $P(\infty) = 0$, поскольку с течением времени все изображающие точки (находящиеся вначале внутри интервала решения) покинут его. Определим время жизни состояния динамической системы в интервале $[L_1, L_2]$ как [16]

$$\tau = \int_{0}^{\infty} P(t) dt.$$

Легко видеть, что если ввести преобразование Лапласа плотности вероятности

$$Y(x,s) = \int_{0}^{\infty} W(x,t)e^{-st}dt,$$

то искомое время жизни может быть представлено как предел

$$\tau = \lim_{s \to 0} \int_{L_1}^{L_2} Y(x, s) dx.$$
 (4)

Для функции Y(x, s) из исходного уравнения(2) нетрудно найти следующее дифференциальное уравнение второго порядка в обыкновенных производных:

$$\frac{d^2Y(x,s)}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Y(x,s) \right] - s\frac{2}{D} Y(x,s) = -\frac{2}{D} \delta(x-x_0).$$
(5)

Поскольку для нахождения времени жизни необходимо знать преобразование Лапласа плотности вероятности только при малых s, разложим sY(x,s) по s в степенной ряд

$$sY(x,s) = Z_0(x) + sZ_1(x) + s^2 Z_2(x) + \dots$$
(6)

Заметим, что на основании предельных теорем преобразования Лапласа (см., например, [17])

$$Z_0(x) = \lim_{s \to 0} sY(x, s) = W(x, \infty).$$

Поскольку стационарная плотность вероятности для рассматриваемого потенциального профиля тождественно равна нулю, постольку $Z_0(x) \equiv 0$. Следовательно, из (4) и (6) следует, что искомое время жизни равно

$$\tau = \int_{L_1}^{L_2} Z_1(x) dx.$$
 (7)

Подставляя (6) в (5), для $Z_1(x)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dZ_1(x)}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}Z_1(x)\right) = -\frac{2}{D}\delta(x-x_0).$$

Решая это простое уравнение с учётом граничных условий равенства нулю плотности вероятности (т.е. $Z_1(x) = 0$) при $x = \infty$ и равенства нулю потока вероятности (т.е. $\frac{dZ_1(x)}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}Z_1(x) = 0$) при $x = -\infty$, можно отыскать $Z_1(x)$. Проводя интегрирование в соответствии с (7), после громоздких, но несложных преобразований мы найдём искомое время жизни состояния динамической системы с шумами в интервале $[L_1, L_2]$ при начальном состоянии системы в точке $x = x_0$:

$$\tau = \frac{h}{kT} \left\{ \int_{x_0}^{L_2} e^{\varphi(v)} dv \int_{L_1}^v e^{-\varphi(u)} du + \int_{L_2}^\infty e^{\varphi(v)} dv \int_{L_1}^{L_2} e^{-\varphi(u)} du \right\}.$$
(8)

Это выражение справедливо для *произвольного* потенциального профиля $\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{kT}$, уходящего в плюс и минус бесконечности при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$ соответственно, и для *произвольной* интенсивности флуктуаций *D*.

Если положить $L_1 = -\infty$, а в точке $x = L_2$ поместить поглощающую границу (прерывистая вертикальная линия на рис. 1, т.е. если $\varphi(x) = -\infty$ для $x \ge L_2$), то время жизни (8) переходит, как это и должно быть, в так называемое среднее время первого достижения (MFPT)[14]

$$\tau = \frac{h}{kT} \int_{x_0}^{L_2} e^{\varphi(v)} dv \int_{-\infty}^{v} e^{-\varphi(u)} du.$$

Поскольку потенциальный профиль $\Phi(x)$ не содержит локальных минимумов для $x \in (-\infty, +\infty)$ (рис. 1), то он описывает нестабильные состояния динамической системы, имеющие место для любых x. В дальнейшем изложении мы будем рассматривать нестабильные состояния вблизи начала координат, полагая $\Phi(0) = 0$, поскольку время жизни (8) не изменяется при замене $\Phi(x)$ на $\Phi(x)$ + const.

ОБЩАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ НЕСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ОТ ШУМА ПРИ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ ИНТЕНСИВНОСТЯХ ШУМА

Рассмотрим потенциальный профиль $\Phi(x)$, состоящий из двух, в общем случае, различных кривых в области положительных и отрицательных x: $\Phi(x) = \Phi^+(x)$ при $x \ge 0$ и $\Phi(x) = \Phi^-(x)$ для $x \le 0$. Пусть также $L_1 = -\lambda < 0$, $L_2 = L$, $x_0 \ge 0$. Введём возрастающие функции определённые для $x \ge 0$:

 $F_1(x) = -\Phi^+(x), \ F_2(x) = \Phi^-(-x)$ с положительными первыми производными $F_1'(x) > 0, \ F_2'(x) > 0$ для $x \ge 0.$

В отсутствие флуктуаций, "динамическое"время жизни, как уже отмечалось выше, равно

$$\tau_0 = \int_{x_0}^{L} \frac{hdx}{F_1'(x)}.$$
(9)

Рассмотрим теперь влияние флуктуаций на время жизни (8).

Начнём анализ с малых флуктуаций, соответствующих малым kT. Поставим задачу: найти разложение времени жизни (8) по степеням $q \equiv kT$ для произвольного потенциального профиля.

Чтобы реализовать эту программу, сначала необходимо найти асимптотические разложения характерных интегралов, входящих в общую формулу (8). Представим характерный неопределённый интеграл в виде

$$\int^{u} e^{F(v)/q} dv = e^{F(u)/q} K(u,q),$$
(10)

где F(v) > 0, $F'(0) \neq 0$, малый параметр q имеет любой знак и K(u,q) — неизвестная функция, которую требуется отыскать для малых q. Дифференцируя (10) по u, легко найти, что

$$K'_{u}(u,q) = 1 - \frac{K(u,q)}{qz(u)},$$
(11)

где обозначено z(u) = 1/F'(u). Используя уравнение (11) как итерационное уравнение и предположив, что при сколь угодно малых q правая часть уравнения (11) также сколь угодно мала, мы получим в качестве первого приближения K(u,q) = qz(u). Подставив это значение в левую часть (11), легко найти второе приближение

$$K(u,q) = qz - q^2 z z'$$

и т.д. При этом очевидно, что производные любых приближений действительно стремятся к нулю при $q \to 0$, оправдывая исходное предположение.

В результате мы находим разложение искомой функции K(u, q) в степенной ряд по q

$$K(u,q) = qz \left[1 - qz' + q^2(zz')' - q^3(z(zz')')' + q^4(z(z(zz')')')' + \dots \right].$$
(12)

Тем самым, для $A,B \geq 0$ и для малых q

$$\int_{A}^{B} e^{F(v)/q} dv = e^{F(B)/q} K(B,q) - e^{F(A)/q} K(A,q).$$
(13)

Полученные выражения справедливы, если z(u) = 1/F'(u) со всеми своими производными не обращается в бесконечность. Для этого достаточно, чтобы производная F'(u) не обращалась в нуль в интервале интегрирования.

Аналогичным способом нетрудно показать, что ($F(v) > 0, L \ge 0$) для малых q > 0

$$\int_{L}^{\infty} e^{-F(v)/q} dv = -e^{-F(L)/q} K(L, -q),$$
(14)

где

$$K(L,-q) = -qz_L \left[1 + qz'_L + q^2(z_L z'_L)' + q^3(z_L(z_L z'_L)')' + \dots \right],$$
(15)

здесь $z_L = z(L) = 1/F'(L), z'_L = \left[\frac{d}{du}z(u)\right]_{u=L}$ и т.д. Подставляя в (8) полученные выражения (13) и (14), можно найти, что для малых q и $x_0 > 0$

$$\int_{x_0}^{L} e^{\varphi(v)} dv \int_{-\lambda}^{v} e^{-\varphi(u)} du = \int_{x_0}^{L} K_1(v, q) dv,$$

$$\int_{L}^{\infty} e^{\varphi(v)} dv \int_{-\lambda}^{L} e^{-\varphi(u)} du = -K_1(L, -q) K_1(L, q).$$

Здесь $K_1(u,q)$ отличается от функции K(u,q), определённой выражением (12), тем, что теперь z(u) = $1/F_1'(u)$. Таким образом, для $x_0 > 0$

$$\tau = \frac{h}{q} \int_{x_0}^{L} K_1(v,q) dv - \frac{h}{q} K_1(L,-q) K_1(L,q).$$
(16)

Раскрывая, согласно (12) и (15), функции К₁, выполняя частичное интегрирование, найдём в терминах z(u) следующее разложение времени жизни нестабильного состояния динамической системы с шумами по степеням q = kT для $x_0 > 0$:

$$\tau = h \int_{x_0}^{L} z(u) du + \frac{1}{2} hq \left[A_1(x_0) + A_1(L) \right] + hq^2 \int_{x_0}^{L} z(zz')' du + \frac{1}{2} hq^3 \left[A_3(x_0) + A_3(L) \right] + hq^4 \int_{x_0}^{L} z(z(z(zz')'))')' du + \frac{1}{2} hq^5 \left[A_5(x_0) + A_5(L) \right] + \dots,$$
(17)

где

$$A_{1}(u) = z^{2}, \quad A_{3}(u) = z^{2} \left[-(z')^{2} + 2(zz')' \right],$$

$$A_{5}(u) = z^{2} \left[2(z(z(zz')'))' - 2z'(z(zz')')' + ((zz')')^{2} \right],$$

$$z = z(u) = 1/F_{1}'(u).$$
(18)

Как легко видеть, первое слагаемое, как и должно быть, совпадает с "динамическим"временем жизни (9). Второе слагаемое, пропорциональное q = kT, всегда положительно, что означает рост времени жизни τ с ростом kT из точки $\tau = \tau_0$ (при kT = 0). Таким образом, если первая производная потенциального профиля $\Phi'(u)$ отрицательна и не равна нулю, действующие в динамической системе шумы при малых шумах всегда увеличивают время жизни нестабильного состояния. Заметим также, что в разложение (17) входит только функция $F_1(x)$, описывающая потенциал для положительных

x, а функция $F_2(x)$, представляющая потенциал для x < 0, как и левая граница интервала решения $x = -\lambda$, никоим образом не влияет на время жизни при малых шумах. Это можно объяснить тем, что при малых шумах начальное дельтообразное вероятностное распределение $W(x,0) = \delta(x - x_0)$ с течением времени сползает вниз по потенциальному профилю быстрее, чем расплывается под действием шумов, так что изображающие точки в своём случайном движении практически не попадают в область x < 0. Вместе с этим, изображающие точки всё же остаются в интервале $[x_0, L]$, если даже центр тяжести распределения покинул этот интервал. Именно это и приводит к увеличению времени жизни нестабильного состояния.

Если начальное дельтообразное распределение находится в начале координат, т.е. если $x_0 = 0$, то, действуя аналогично, нетрудно найти следующее разложение времени жизни нестабильного состояния по степеням q = kT:

$$\tau = h \int_{0}^{L} z(u) du + \frac{1}{2} hq \left[A_{1}(L) - A_{1}(0) + 2B_{1}(0) \right] + + hq^{2} \left[\int_{0}^{L} z(zz')' du + B_{2}(0) \right] + \frac{1}{2} hq^{3} \left[A_{3}(L) - A_{3}(0) + 2B_{3}(0) \right] + + hq^{4} \left[\int_{0}^{L} z(z(z(zz')')')' du + B_{4}(0) \right] + \dots$$
(19)

Здесь функции $A_k(u)$ определяются формулами (18), а функции $B_k(u)$ равны

$$B_{1}(u) = z_{1}z_{2}, \quad B_{2}(u) = z_{1}z_{2} [z'_{1} + z'_{2}],$$

$$B_{3}(u) = z_{1}z_{2} [(zz')'_{1} + (zz')'_{2} + z'_{1}z'_{2}],$$

$$B_{4}(u) = z_{1}z_{2} [(z(zz')')'_{1} + (z(zz')')'_{2} + z'_{1}(zz')'_{2} + z'_{2}(zz')'_{1}],$$

$$z_{1} = 1/F'_{1}(u), \quad z_{2} = 1/F'_{2}(u).$$
(20)

Таким образом, при начальном состоянии, находящемся в начале координат, на время жизни нестабильного состояния, как и должно быть, влияет потенциальный профиль в области отрицательных x. Второе слагаемое в (19) будет по-прежнему положительно, т.е. будет наблюдаться рост времени жизни с ростом малых шумов, если $F'_2(0) < 2F'_1(0)$, например, если первая производная $\Phi'(x)$ не испытывает скачка при переходе через начало координат.

Обратимся теперь к случаю больших шумов, когда kT достаточно велико и найдём разложение времени жизни (8) по обратным степеням q. Легко видеть, что для больших q

$$\int_{-\lambda}^{v} e^{-\Phi(u)/q} du = \int_{0}^{v} e^{F_{1}(u)/q} du + \int_{0}^{\lambda} e^{-F_{2}(u)/q} du =$$
$$v + \lambda + \frac{1}{q} \left[\int_{0}^{v} F_{1}(u) du - \int_{0}^{\lambda} F_{2}(u) du \right].$$

А. Н. Малахов

Следовательно,

$$\frac{h}{q} \int_{x_0}^{L} e^{\Phi(v)/q} dv \int_{-\lambda}^{v} e^{-\Phi(u)/q} du = \frac{h}{q} \left[\lambda (L - x_0) + \frac{L^2 - x_0^2}{2} \right] + O\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Если предположить, что $F_1(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_s x^s$, где $b_k > 0$, то нетрудно показать, что для больших q

$$\int_{0}^{\infty} e^{-F_1(v)/q} dv = \frac{(1/s)\Gamma(1/s)}{\sqrt[s]{b_s}} \sqrt[s]{q}, \qquad (21)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Таким образом получаем

$$\frac{h}{q} \int_{L}^{\infty} e^{-F_1(v)/q} dv \int_{-\lambda}^{L} e^{-\Phi(u)/q} du =$$
$$= \frac{h \frac{1}{s} \Gamma(\frac{1}{s}) \sqrt[s]{q}}{\sqrt[s]{b_s q}} \left[L + \lambda + \frac{1}{q} \int_{0}^{L} F_1(u) du - \frac{1}{q} \int_{0}^{\lambda} F_2(u) du \right] - \frac{h}{q} L(l+\lambda).$$

Объединяя всё вместе, находим следующее асимптотическое представление времени жизни при $q \to \infty$:

$$\tau = \frac{h\frac{1}{s}\Gamma(\frac{1}{s})(L+\lambda)}{\sqrt[s]{b_s}q^{1-\frac{1}{s}}} - \frac{h}{2q}(L^2 + 2\lambda x_0 + x_0^2) + \frac{h\frac{1}{s}\Gamma(\frac{1}{s})}{\sqrt[s]{b_s}q^{2-\frac{1}{s}}} \left[\int_0^L F_1(u)du - \int_0^\lambda F_2(u)du\right] + O\left(\frac{1}{q^2}\right).$$
(22)

Первое слагаемое совпадает с ростом интенсивности шума наиболее медленно, последнее — наиболее быстро. Вместе с этим, сильное влияние на результат оказывает s — значение высшей степени полинома $F_1(x)$. Если s = 1, то при росте интенсивности шума время жизни нестабильного состояния не спадает, а асимптотически стремится к $\tau = \frac{h(L+\lambda)}{b_1}$. Если s = 2, то $\tau \sim \frac{1}{\sqrt{q}}$, если s = 3, то $\tau \sim \frac{1}{\sqrt[3]{q^2}}$, и т.д. При $s \gg 1$ первые два слагаемые спадают как $\frac{1}{q}$, а третье — как $\frac{1}{q^2}$.

Таким образом, при $s \ge 2$ время жизни нестабильного состояния спадает с ростом интенсивности воздействующего шума и в зависимости от $\tau = \tau(q)$ должен наблюдаться максимум (рис. 2). Другими словами, зависимость $\tau = \tau(q)$ носит резонансный характер и существует такое значение интенсивности шума q = kT, при котором распад нестабильного состояния динамической системы замедляется максимально.



ПРИМЕРЫ

1. Начнём с простейшего примера кусочно—линейного профиля, для которого время жизни неравновесного состояния может быть сосчитано точно (рис. 3). Пусть $\Phi(x) = -bx$ для $x \ge 0$ и $\Phi(x) = -cx$ для $x \le 0$. Тем самым $F_1(x) = bx$, $F_2(x) = cx$. Пусть также $L_1 = -\lambda < 0$, $L_2 = L$, $x_0 > 0$.



Рис. 3.

Согласно (8), время жизни нестабильного состояния в интервале $[-\lambda, L]$ равно:

$$\tau = \frac{h(L - x_0)}{b} + q \frac{h}{b^2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{b}{c} \left(1 - e^{-c\lambda/q} \right) \right] e^{-bx_0/q} \right\}.$$
(23)

Первое слагаемое представляет собой динамическое время жизни неравновесного состояния τ_0 . При малой интенсивности шума из (23) следует

$$\tau = \tau_0 + q \frac{h}{b^2},$$

что полностью совпадает с (17), имея ввиду, что $z = 1/b, \ z' = 0.$ При большой интенсивности шума, когда $q \to \infty$, из (23) находим

$$\begin{split} \tau &= \frac{h(L+\lambda)}{b} - \frac{h}{2q} \left(x_0^2 + 2\lambda x_0 + \frac{c}{b}\lambda^2 \right), \\ A. \, H. \, Maлaxos \end{split}$$

что, в свою очередь, полностью совпадает при $q \to +\infty$ с асимптотическим представлением (22), где $s = 1, \ b_1 = b.$

Качественный ход зависимости времени жизни от интенсивности шума изображён на рис. 4. Таким образом, в данном примере шум при любой интенсивности будет задерживать выход нестабильного состояния динамической системы из интервала $[-\lambda, L]$. Это связано с тем, что изображающие точки при таком "некрутом" потенциальном профиле будут далеко забрасываться налево вверх по профилю и выход из указанного и _________ ием больше λ .



2. Вторым примером рассмотрим нечётный параболический потенциальный профиль

$$\Phi(x) = -bx\left(1 + \rho \frac{|x|}{2}\right) \tag{24}$$

в симметричном интервале решения $L_1 = -L$, $L_2 = L$. В этом случае $F_1(x) = F_2(x) = b(x + \rho x^2/2)$, $F'_1(x) = b(1 + \rho x)$. Динамическое время жизни согласно (9) будет равно

$$\tau_0 = \frac{\tau_{00}}{\alpha} \ln \frac{1+\alpha}{1+\alpha \alpha},\tag{25}$$

где $\tau_{00} = hL/b$ — время спуска изображающей точки в отсутствие шума от точки x = 0 до x = L по прямой $\Phi(x) = -bx$, $\alpha = \rho L$ — безразмерная крутизна параболы, $\alpha = x_0/L > 0$ — относительная координата начального состояния системы.

При малой интенсивности шума, согласно первым двум членам разложения (17), время жизни нестабильного состояния динамической системы, описываемой параболическим потенциальным профилем (24), будет равно

$$\tau = \tau_0 + \frac{hq}{2b^2} \left[\frac{1}{(1+\rho x_0)^2} + \frac{1}{(1+\rho L)^2} \right].$$

Отсюда нетрудно получить

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{\alpha Q}{2 \ln \frac{1+\alpha}{1+\alpha \mathscr{R}}} \left[\frac{1}{(1+\alpha \mathscr{R})^2} + \frac{1}{(1+\alpha)^2} \right],$$
(26)

где Q = q/bL есть безразмерная интенсивность шума.

При достаточно большой интенсивности шума асимптотическое значение времени жизни (22) определяется первыми двумя слагаемыми (третье слагаемое равно нулю) и его безразмерное значение равно

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{\ln\frac{1+\alpha}{1+\alpha\mathfrak{E}}} \left[\sqrt{\frac{2\pi\alpha}{Q}} - \frac{\alpha(1+\mathfrak{E})^2}{2Q} \right].$$
(27)

Точная зависимость τ/τ_0 от безразмерной интенсивности шума Q, вычисленная согласно (8), где $L_1 = -L, L_2 = L, \alpha = 2$. представлена на рис. 5



для двух значений координаты начального состояния: $x_0 = \frac{1}{2}L$ ($\alpha = 0, 5$) и $x_0 = \frac{2}{3}L$ ($\alpha = 2/3$).

Как видно из рисунка, во-первых, действительно наблюдается резонансный характер зависимости времени жизни нестабильного состояния нелинейной системы от интенсивности шума, во-вторых, замедление распада нестабильного состояния ($\tau/\tau_0 > 1$) имеет место для достаточно широкого диапазона интенсивности шума, верхняя граница которого зависит от положения начального состояния системы, в-третьих, при малых шумах τ/τ_0 , как и должно быть, линейно растёт с ростом Q (см.(19) и (26)), и в-четвёртых, при больших шумах имеет место спадание τ/τ_0 с ростом Q, согласно (27), что и отражено на рисунке поведением асимптоты (верхняя кривая) для значения $\mathfrak{a} = 2/3$. Заметим, что распад нестабильного состояния в рассмотренном случае параболического профиля максимально замедляется при Q = 3 ($\mathfrak{a} = 1/2$) и при Q = 4 ($\mathfrak{a} = 2/3$).

Таким образом, шумы, присутствующие в нелинейной динамической системе, в определённом интервале их интенсивности действительно замедляют распад её нестабильного состояния.

Автор благодарен Н. В. Агудову за конструктивное обсуждение полученных результатов и многостороннюю помощь в работе над рукописью.

Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 96-02-16772-а и № 96-15-96718).

ЛИТЕРАТУРА

- Risken H. The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1989. — 472 p.
- 2. Colet P., et al. //Phys. Rev. A, 1989. V. 39. P. 149.
- 3. Hirsch J. E., Huberman B. A., Scalapino D. T. //Phys. Rev. A, 1982. V. 25. P. 519.
- 4. Crutchfield J. P., Farmer J. D., Huberman B. A. //Phys. Rep., 1982. V. 92. P. 45.

А.Н.Малахов

- 5. Ланда П. С., Стратонович Р. Л. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1987. Т. 30. С. 65.
- 6. Haake F., Haus J. W., Glauber R. //Phys. Rev. A, 1981. V. 23. P. 3255.
- 7. Colet P., de Pasquale F., San Miguel M. //Phys. Rev. A, 1991. V.43. P. 5296.
- 8. Arecchi F. T., Politi A., Ulivi L. //Il Nuovo Cimento B, 1982. V. 71. P. 119.
- 9. Половинкин А. В. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1995. Т. 38. С. 153.
- 10. Suzuki M. //Prog. Theor. Phys., 1976. V. 56. PP. 77, 477; V. 57. P. 380.
- 11. Suzuki M. //Phys. Lett. A, 1978. V.67A. P.339.
- 12. Агудов Н. В. Временные и спектральные характеристики индуцированных шумом переходных процессов в нелинейных системах. Диссертация на соиск. уч. степени кандидата физ.-мат. наук. Нижегородский госуниверситет. 1997.
- 13. Agudov N. V., Malakhov A. N. //Int. J. Bifurcation and Chaos, 1995. V. 5. P. 531.
- 14. Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А. //ЖЭТФ, 1933. Т. З. Вып. З. С. 165.
- 15. Malakhov A. N., Pankratov A. L. //Physica C, 1996. V. 269. P. 46.
- 16. Агудов Н. В., Малахов А. Н. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1993. Т. 36. С. 148.
- 17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия Поступила в редакцию 24 июня 1997 г.

ENHANCEMENT OF LIFETIME OF NONSTABLE STATE OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM BY SYSTEM'S NOISES

A.N.Malakhov

By a new approach it is demonstrated, that there is an enhancement of lifetime of a nonstable state of a nonlinear dynamic system under the action of fluctuations. The result obtained is true for arbitrary noise intensity and arbitrary potential profile which tends to plus infinity at $x \to -\infty$ and to minus infinity at $x \to +\infty$. The resonance law of this enhancement depending on noise intensity is observed. Some examples are analysed.

УДК 537.862:530.182

ДИНАМИКА ЦИФРОВОЙ РЕКУРСИВНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НАСЫЩЕНИЯ

Ю.А.Брюханов

Исследованы нелинейные процессы установления свободных колебаний для двух областей параметров системы. Определены этапы движения, получены формулы для вычисления их длительности.

Рекурсивная система второго порядка является одним из базовых элементов для построения фильтрующих систем [1]. При определённых значениях параметров она может использоваться и для генерации периодических колебаний. Рассмотрим систему, сумматор которой имеет характеристику с насыщением. Считаем, что эффекты квантования отсутствуют.

Свободные колебания такой системы описываются разностным уравнением

$$x(n+2) = f(ax(n+1) + bx(n)),$$

где

$$f(\varphi) = \begin{cases} \varphi, & |\varphi| < 1, \\ \operatorname{sign}(\varphi), & |\varphi| \ge 1, \end{cases}$$

а и b параметры цепи. Это уравнение сводится к эквивалентному ему отображению

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) \\ f(bx(n) + ay(n)) \end{pmatrix}$$

на плоскости (x, y). Пары последовательных итераций (x(n), y(n)) отображения определяют точки траектории движения системы на фазовой плоскости (x, y).

Авторами работы [2] впервые экспериментально установлено, а в работах [3–6] теоретически доказано, что для параметров системы в секторе *cde* (рис. 1) при ненулевых начальных условиях стационарный режим характеризуется аттрактором с периодом T = 1 и траекторией движения $\rightarrow (1, 1) \rightarrow$ $(1, 1) \rightarrow$ или $\rightarrow (-1, -1) \rightarrow (-1, -1) \rightarrow$. В свою очередь сектору *gdh* соответствует стационарный режим с аттрактором T = 2 и траекторией движения $\rightarrow (-1, 1) \rightarrow (1, -1) \rightarrow$. Для практического использования генерации периодических колебаний необходимо иметь сведения о переходных режимах.

Целью настоящей работы является исследование характера и получение выражений для расчёта длительности переходных процессов при выборе параметров системы в вышеуказанных областях.

Учитывая вид нелинейности, фазовую плоскость разобьём на три области, характеризующиеся уравнениями движения:

область D_{-1}

$$x(n+2) = -1$$

область D_0

$$x(n+2) = ax(n+1) + bx(n),$$
(1)

область D_1

$$x(n+2) = 1.$$
 (2)



Рис. 1.

Решение уравнения (1) выражается зависимостью [7]

$$x(n) = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n, (3)$$

где

$$C_1 = \frac{x(0)q_2 - x(1)}{q_2 - q_1}, \qquad C_2 = \frac{x(1) - x(0)q_1}{q_2 - q_1}, \tag{4}$$

x(0), x(1) — начальные условия, q_1, q_2 — корни характеристического уравнения

$$q_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

В секторе cde имеем: $q_1 > 1$, $q_2 \in (-1;0)$ в секторе cdqa, $q_2 \in (0;1)$ в секторе aqe. В секторе gdh имеем: $q_2 < -1$, $q_1 \in (0;1)$ в секторе gdrs, $q_1 \in (-1;0)$ в секторе srh.

На фазовой плоскости граница между областями D_{-1} и D_0 представляет собой прямую MN, описываемую уравнением

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{1}{a},$$

а граница между D_0 и D_1 — прямую PGс уравнением

$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{1}{a}.$$

Движения в системе в значительной мере зависят от соотношения между коэффициентами *a* и *b*. Это и определяет разбиение секторов параметров.

1. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора kiqa (здесь b < a). Разбиение фазовой плоскости на области D_{-1} . D_0 и D_1 показано на рис. 2a.



Если система стартует из окрестности точки A (область D_1) или C (область D_{-1}), то не более чем через 2 шага изображающая точка переходит в точку A или D соответственно. Так при старте со стороны DA, исключая точку A, или её продолжения траектория движения имеет вид $(x(0), 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow B$ других случаях для окрестности точки A имеем $(x(0), y(0)) \rightarrow (y(0), 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow .$

Пусть система стартует из области *D*₀. При этом движение описывается уравнением (1) с решением (3). Соотношение между корнями характеристического уравнения таково, что главным решением является функция

$$x^{(1)}(n) = C_1 q_1^n \,, \tag{5}$$

т.е. при достаточно больших n движение системы описывается этой функцией. Направление движения (к области D_1 или D_{-1}) зависит от знака C_1 . Из (4) имеем, что при старте из области выше прямой

$$y^{(2)} = q_2 x (6)$$

изображающая точка стремится к D_1 , а ниже — к D_{-1} . Функции (5) на фазовой плоскости соответствует прямая

$$y^{(1)} = q_1 x \,. \tag{7}$$

Огибающая траектории движения имеет вид совокупности гипербол, асимптотами которых являются прямые (6), (7) (они также показаны на рис. 2а). Число итераций N от старта до попадания изображающей точки в область D_1 находится из условия

$$y(N) \ge -\frac{b}{a}x(N) + \frac{1}{a},$$

это означает

$$C_1\left(q_1 + \frac{b}{a}\right)q_1^N + C_2\left(q_2 + \frac{b}{a}\right)q_2^N \ge \frac{1}{a}.$$
 (8)

Ю.А.Брюханов



Например, при x(0) = 0.7, y(0) = -0.1, a = 0.9, b = 0.2 имеем N = 45. Выражение для определения N при старте из области ниже прямой (6) и попадании изображающей точки в область D_{-1} отличается от (8) только знаком правой части. После попадания изображающей точки в область D_1 или D_{-1} переходный процесс заканчивается не более чем через две итерации.

2. При выборе параметров системы внутри сектора *aqe* из-за смены знака *b* изменяется знак наклона прямых *MN* и *PG*. Однако закономерности движения и расчётные формулы такие, как в п. 1.

3. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора lprs. Разбиение фазовой плоскости на области D_{-1} , D_0 , D_1 показано на рис. 26.

Если система стартует из окрестности точки B или D, то стационарный режим T = 2 устанавливается не более чем через две итерации.

Пусть система стартует из области D_0 . Соотношение между корнями характеристического уравнения таково, что главным решением уравнения (1) является знакопеременная функция

$$x^{(2)}(n) = C_2 q_2^n$$
.

На рис. 26 показаны графики асимптот (6), (7). При достаточно больших n изображающая точка находится поочерёдно во 2 и 4 квадрантах. Число итераций N от старта до попадания изображающей точки в область D_1 или D_{-1} находится из условия

$$\left|C_1\left(q_1 + \frac{b}{a}\right)q_1^N + C_2\left(q_2 + \frac{b}{a}\right)q_2^N\right| \ge -\frac{1}{a}.$$
(9)

Например, при x(0) = 0.7, y(0) = 0.15, a = -0.9, b = 0.2 имеем N = 49. После попадания в эти области переходный процесс заканчивается не более чем через две итерации.

4. При выборе параметров системы внутри сектора *srh* из-за смены знака *b* изменяется знак наклона прямых *MN* и *PG* по сравнению с п. 3. Однако закономерности движения и расчётные формулы такие же.

5. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора *cdik*. Разбиение фазовой плоскости на области показано на рис. За. Прямая *MN* пересекается с квадратом *ABCD* (этот квадрат привлекает особое внимание из-за вида нелинейности характеристики сумматора) в точках

$$x_{\rm rp1} = \frac{a-1}{b}, \qquad y_{\rm rp1} = \frac{b-1}{a}.$$
 (10)

Здесь и ниже координаты точек x_{rp2} , y_{rp2} пересечения прямой PG с квадратом отличаются от соответствующих координат в (10) только знаками. Принципиальное отличие от переходных процессов, описанных в п. 1, обусловлено тем, что угол наклона прямых MN и PG здесь меньше 135°.

Пусть система стартует из окрестности точки A (область D_1 , сектор FEG, где $AE_1 = x_{rp2}A$). При этом последовательность отображений может иметь вид

сектор
$$FEG \to Dx_{rp2} \to E_1y_{rp2} \to Dx_{rp2} \to \dots$$

Изменение абсциссы изображающей точки, когда последняя находится на стороне *DA*, описывается линейным разностным уравнением

$$x_1(m+1) = bx_1(m) + a, (11)$$

где m = (n - 1)/2, с начальным условием $x_1(0) = y(0)$, которое можно рассматривать как линейное одномерное отображение. Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1(m) = zb^m - y_{\rm rp1}^{-1}, \tag{12}$$

где $z = x_1(0) + 1/y_{rp1}$. Линейный процесс (11) прекращается, если $x_1(m) \ge x_{rp2}$. Соответствующее число итераций m_0 можно определить как ближайшее сверху целое значение величины

$$m = \ln \left[(x_{\rm rp2} + y_{\rm rp1}^{-1})/z \right] / \ln b$$
.

Это правило используется и ниже. Например, при y(0) = 0, a = 0,1, b = 1 имеем $m_0 = 9$, соответственно $n_0 = 19$. В качестве иллюстрации на рис. 4 изображены диаграмма Кёнигса—Ламерея и лестница Ламерея [8] для y(0) = 0, a = 0,25, b = 1. Здесь $y_1(m) = x_1(m+1)$. При $N_1 = m_0 + 1$ изображающая точка находится в точке A и в системе наступает движение с периодом T = 1.

Аналогичным образом развиваются процессы и в случае старта из окрестности точки С (область D_{-1}). При этом сектор MLK играет такую же роль, как сектор FEG, а $CL_1 = x_{rp1}C$. Изменение абсциссы изображающей точки, когда последняя находится на стороне BC, описывается уравнением

$$x_1(m+1) = bx_1(m) - a \tag{13}$$

с тем же начальным условием, что и в уравнении (12). Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1(m) = z_1 b^m + y_{\rm rp1}^{-1}, \qquad (14)$$

где $z_1 = x(0) - 1/y_{rp1}$. Процесс (13) прекращается, если $x_1(m) \le x_{rp1}$. Значение m_0 находится из соотношения

$$m = \ln \left[(x_{rp1} - y_{rp1}^{-1})/z_1 \right] / \ln b.$$

538 Ю. А. Брюханов





Рис. 3.

Ю.А.Брюханов



Рис. 4.

Если система стартует из области D₀, то движение изображающей точки в этой области подчиняется закономерностям, описанным в п. 1. Число итераций N от старта до попадания изображающей точки в область D₁ или D₋₁ находится из условия (8). После попадания справедливы зависимости (12) или (14), соответственно. Полное число итераций переходного режима равно $N + N_1$.

6. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора gdpl. Разбиение фазовой плоскости на области представлено на рис. 36, где $E_1B = Dx_{rp1}$, $L_1D = Bx_{rp2}$. Точки пересечения прямой MN с квадратом *ABCD* имеют координаты $x_{rp1} = -(a+1)/b$ и y_{rp1} , определяемую из (10).

Пусть система стартует из окрестности точки В (область D₁ сектор GEF). При этом последовательность отображений может иметь вид

сектор
$$GEF \to x_{rp1}A \to y_{rp2}E_1 \to x_{rp1}A \to \dots$$

Абсцисса изображающей точки, когда последняя находится на стороне DA, удовлетворяет (11), (12). Этот процесс прекращается, когда $x_1(m) \le x_{{\rm rp1}}$. Величина m здесь равна

$$m = \ln \left[(x_{rp1} + y_{rp1}^{-1})/z \right] / \ln b$$
.

На следующем после $n_0 = 2m_0 + 1$ шаге изображающая точка переходит в точку В и в системе устанавливается движение с периодом T = 2.

Аналогично развиваются процессы и в случае старта из окрестности точки D (область D_{-1}). При этом сектор KLM играет такую же роль, как и сектор GEF. Движение системы, когда изображающая точка находится на стороне ВС, характеризуется соотношениями (13), (14). Длительность этого процесса характеризуется величиной

$$m = \ln \left[(x_{
m rp2} - y_{
m rp1}^{-1})/z_1
ight] / \ln b$$
 .
Ю. А. Брюханов

Если система стартует из области D_0 , то движения её в этой области подчиняются закономерностям, описанным в п. 3. Число итераций N от старта до перехода изображающей точки в область D_1 или D_{-1} находится из условия (9). Далее справедливы закономерности, установленные выше в настоящем пункте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследованы процессы установления свободных колебаний с периодами T = 1 и T = 2. Метод фазовой плоскости позволил изучить динамику и этапы движения системы при произвольных начальных условиях. Некоторые этапы движения удобно представлены и исследованы методом одномерных отображений. Полученные выражения позволяют рассчитывать длительность переходного режима, что играет важную роль при использовании цифровой системы для генерации периодических колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17388).

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
- 2. Galias Z., Ogorzalek M. J. //IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1990. V. 37. № 8. P. 1068.
- 3. Ogorzalek M. J. //Int. J. of Bifurcation and Chaos., 1992. V. 2. № 1. P. 11.
- 4. Брюханов Ю. А., Глызин С. Д., Рахманова Н. К. Динамические свойства разностной модели цифрового фильтра с кусочно-линейной характеристикой типа насыщения: Препринт № 91. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1993.
- 5. Брюханов Ю. А., Глызин С. Д., Рахманова Н. К. Динамика цифрового фильтра с кусочно—линейной характеристикой типа насыщения. Аналитическое исследование: Препринт № 17. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1994.
- 6. Брюханов Ю. А., Глызин С. Д. //Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика, 1995. Т. 3. № 4. С. 53.
- 7. Брюханов Ю. А. //Радиотехника, 1996. № 5. С. 46.
- 8. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.

Ярославский государственый университет, г. Ярославль, Россия Поступила в редакцию 14 мая 1997 г.

DYNAMICS OF A DIGITAL RECURSIVE SYSTEM OF THE SECOND ORDER WITH SATURATION NONLINEARITY

Yu. A. Bryukhanov

Nonlinear processes of the oscillation setting for two regions of system parameters have been investigated. The stages of movement have been determined, the formulas to calculate their duration have been obtained.



ВИКТОР ИВАНОВИЧ ГАПОНОВ. 23 ЯНВАРЯ — 95 ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Виктор Иванович Гапонов родился 23 января 1903 года в Варшаве. В 1919 году Виктор Иванович окончил школу второй ступени и начал свою долгую трудовую жизнь с сотрудника канцелярии Российского исторического музея. Работая, он одновременно учился на физико—математическом факультете Московского государственного университета, который окончил в 1924 году.

С 1926 по 1929 годы В.И. Гапонов учился в аспирантуре под руководством профессора В.А. Введенского в Научно-исследовательском институте физики при МГУ.

После окончания аспирантуры В. И. Гапонов вел научную и педагогическую работу в ряде ведущих вузов Москвы.

В 1932 году в составе группы молодых учёных, возглавляемой академиком А. А. Андроновым, семья В. И. Гапонова переехала в Горький. С приездом этой группы началось развитие современной радиофизики в г. Горьком. В. И. Гапонов сочетал научную работу в Горьковском физико—техническом институте (ГИФТИ) с преподавательской работой на физико—математическом факультете Горьковского государственного университета. Много сил, энергии и энтузиазма Виктор Иванович затратил на организацию учебных и специальных лабораторий на физико—математическом и на радифизическом факультетах.

В 1938 году В. И. Гапонову присвоена учёная степень кандидата наук, а в 1963 году он был утверждён в звании профессора.

В 1940—41 годах В.И. Гапонов возглавлял ГИФТИ. В годы Великой Отечественной войны деятельность его была направлена на организацию научно—производственной базы для помощи фронту. После окончания войны В.И. Гапонов вместе с М. Т. Греховой, А. А. Андроновым, Г. С. Гореликом, А. Г. Майером и другими своими коллегами участвовал в создании первого в нашей стране радиофизического факультета при ГГУ. С 1953 года он возглавлял кафедру электроники.

В 1960 году Виктор Иванович опубликовал двухтомный учебник "Электроника", получивший признание в нашей стране и за рубежом, как одно из лучших руководств по электронике, и до сих пор пользующийся популярностью у студентов и преподавателей.

Особая роль принадлежит В.И. Гапонову в выпуске журнала "Известия ВУЗов. Радиофизика". С момента организации журнала в 1958 году до 1979 года он был заместителем главного редактора. Журнал получил мировую известность и признание.

За заслуги в труде В. И. Гапонов был награждён орденом Ленина и медалью "За доблестный труд в Великой Отечественной войне".

В. И. Гапонов сочетал в себе самые высокие моральные и деловые качества: человечность, преданность делу, необычайно широкую эрудицию и культуру, организованность, скромность. Он владел английским, немецким, французским языками в пределах свободного чтения специальной, политической и художественной литературы, был редкостным книголюбом. Его многоязычная библиотека насчитывала несколько тысяч книг.

В феврале 1990 г. В. И. Гапонов скончался, оставив о себе светлую память.

ВСЕВОЛОД СЕРГЕЕВИЧ ТРОИЦКИЙ. 25 МАРТА — 85 ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Всеволод Сергеевич Троицкий родился 25 марта 1913 года в селе Михайловском Тульской губернии. В 1925 году семья переехала в Нижний Новгород, где прошла вся дальнейшая жизнь В.С.Троицкого. В 1932 г. он окончил техникум связи, работал в Центральной военно-индустриальной радиолаборатории. В 1941 году с отличием окончил физико-математический факультет ГГУ. В годы войны В. С. Троицкий работал на радиозаводе им. В. И. Ленина. После окончания аспирантуры ГГУ и защиты кандидатской диссертации (руководитель Г. С. Горелик) начинается интенсивная научная деятельность В. С. Троицкого сначала в ГГУ, затем в Горь-



ковском научно-исследовательском физико-техническом институте (ГИФТИ), а затем с 1956 г. в НИРФИ, где он с самого его основания руководил большим коллективом сотрудников.

В 1962 г. В. С. Троицкому присуждена учёная степень доктора физико-математических наук, а в 1964 г. — учёное звание профессора. В 1970 г. В. С. Троицкий избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1991 г. — действительным членом Международной Славянской Академии.

Работы В. С. Троицкого были одними из первых, положивших начало развитию экспериментальной радиоастрономии в нашей стране. Были разработаны теория и методы измерения слабого радиоизлучения, имеющего сплошной спектр, в конце 40-х годов были созданы впервые в стране радиометры и радиотелескопы и начаты исследования радиоизлучения Солнца. В начале 50-х годов под руководством В. С. Троицкого стали проводиться впервые в стране исследования радиоизлучения Луны и дискретных источников. Разработанные В. С. Троицкому принадлежат большие заслуги в развитии методов радиометрии, в решении проблем повышения чувствительности и точности измерения малых мощностей шумовых и монохроматических сигналов.

В работах В. С. Троицкого получила дальнейшее развитие теория направленности молекулярных пучков, используемых в мазерах, и проведены её экспериментальные исследования. На основе этих работ был создан первый в мире квантовый генератор—мазер на миллиметровых волнах на формальдегиде.

В. С. Троицкий совместно со своими учениками предложил и разработал ряд новых методов физических исследований различных сред по их собственному радиоизлучению.

Особенно значительные достижения принадлежат В.С. Троицкому в области радиоастрономии. По результатам прецизионных измерений спектра радиоизлучения Луны были определены физикомеханические и структурные характеристики вещества верхнего покрова Луны вплоть до глубин в несколько метров. Работы В.С. Троицкого совместно с В.Д. Кротиковым по обнаружению потока тепла из недр Луны отмечены дипломом на открытие. За исследования физических свойств лунного грунта В.С. Троицкий был награждён в 1974 г. премией им. А.С. Попова.

Общее признание получили многолетние измерения спектров мощных дискретных источников, проведённые по методу "искусственной Луны". Была создана наиболее точная в мире шкала абсолютных потоков этих источников, используемая для фундаментальных и прикладных исследований.

В. С. Троицким с сотрудниками был разработан первый в стране радиоинтерферометр со сверхдлинной базой. В результате впервые в метровом и дециметровом диапазонах волн были выполнены измерения угловых размеров ряда дискретных источников с высоким разрешением.

В. С. Троицкий стал инициатором создания радиотермометров — приборов, позволяющих проводить раннюю диагностику различных паталогий и заболеваний, связанных с повышением температуры внутренних органов.

Большое внимание В. С. Троицкий уделял поисковым фундаментальным исследованиям — он развил нестандартные подходы к проблемам космологии, выдвинул принципиально новые предположения о принципах развития Вселенной. Им предложена гипотеза о возможности изменения скорости света и других фундаментальных констант в процессе эволюции Вселенной.

В. С. Троицкий вёл большую педагогическую научно—организационную работу. Под его руководством защищены 25 кандидатских диссертаций, несколько его учеников стали докторами наук, известными в нашей стране и за рубежом.

В. С. Троицкий был членом ряда научных советов АН СССР. Он создал и возглавил группу поиска Внесолнечных планет.

В. С. Троицкий награждён орденом Трудового Красного Знамени и двумя медалями.

В. С. Троицкий умер в 1996 году в возрасте 83 лет. До последних дней он продолжал интенсивно трудиться. Две его последние научные работы опубликованы посмертно.

Добрая память о замечательном учёном и прекрасном человеке долго будет жить в сердцах всех, кто с ним общался.

МИХАИЛ МИХАЙЛОВИЧ КОБРИН. 14 АПРЕЛЯ — 80 ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

М. М. Кобрин родился 14 апреля 1918 года в Ленинграде, через год семья переехала в г. Горький (ныне Н. Новгород), с которым и была связана вся его дальнейшая жизнь.

По окончании в 1941 г. Горьковского индустриального института он работал инженером—исследователем на заводе им. Фрунзе в лаборатории А. П. Скибарко, где во время войны занимался решением важных производственных и научных задач, связанных с обороной страны. После войны — аспирантура на радиофизическом факультете ГГУ, защита в 1947 г. кандидатской диссертации (руководитель М. Т. Грехова), работа старшим научным сотрудником, заведующим лабораторией ГИФТИ.



В 1956 году во вновь созданном при его самом активном участии Научно-исследовательском радиофизическом институте (НИРФИ) на базе этой лаборатории был создан отдел, который М. М. Кобрин возглавлял до конца своей жизни.

В 1962 г. М. М. Кобрин защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук, а в 1964 г. ему было присвоено звание профессора.

Первые научные работы М. М. Кобрина были связаны с нуждами фронта. Он занимался изучением распространения коротких радиоволн в ионосфере и вдоль поверхности Земли.

Постепенно круг научных интересов Михаила Михайловича смещался в область радиоастрономии. Под руководством М. М. Кобрина впервые в СССР осуществлена радиолокация Луны на $\lambda = 10$ см (1954 г.) и впервые в Европе на $\lambda = 3$ см (1957 г.). Результаты радиолокации Луны учитывались при проектировании космических аппаратов.

М. М. Кобрин был одним из организаторов создания в СССР Радиослужбы Солнца. В 1962—1966 гг. он являлся деканом радиофизического факультета и в 1967—1968 гг. — проректором Горьковского государственного университета.

Деятельность М. М. Кобрина в области солнечной радиоастрономии положила начало двум новым направлениям: исследованию флуктуаций радиоизлучения Солнца и спектрографическим исследованиям микроволнового солнечного радиоизлучения с высоким частотным разрешением. И то, и другое направление в настоящее время вошли в число основных радиофизических методов изучения Солнца.

М. М. Кобрин внёс большой вклад в развитие радиоастрономии в СССР. Он являлся членом бюро Научного совета по радиоастрономии АН СССР, организовал и до последних дней возглавлял объединённую секцию "Радиоизлучение Солнца" Научных советов АН СССР по радиоастрономии и физике солнечно-земных связей.

Михаил Михайлович являлся куратором развития радиоастрономических исследований в Республике Куба.

М. М. Кобрин активно участвовал в генеральных ассамблеях (YRSI и MAC) в Англии, Голландии, Японии, Италии. Он осуществлял координацию ряда международных проектов в рамках КАПГ.

Обаятельный, широко эрудированный человек, М. М. Кобрин знал несколько иностранных языков, обладал высокой культурой общения, умел убеждать и всегда приходил на помощь людям в трудную минуту. Полный новых планов и предложений в декабре 1983 года М. М. Кобрин внезапно ушёл из жизни. Остались дела, часть из которых продолжена учениками и соратниками. Осталась и светлая память о человеке, внёсшем большой вклад в развитие образования и науки, повлиявшем на судьбы многих соприкасавшихся с ним людей.