МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XLI N 12 | Нижний Новгород | 1998

Содержание

УДК 621.391; 531.01

ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ КАК ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС*

А. С. Дмитриев

Явление хаотической синхронизации изучается с информационных позиций. Синхронизация “приемника"хаоса “источником"хаоса рассматривается как способность восстановления на выходе приемника копии хаотического сигнала, передаваемой источником. Основная идея статьи — показать, что при такой трактовке условием реализуемости хаотической синхронизации является не уровень физического воздействия одной системы на другую, а возможность передачи необходимого количества информации о хаотическом процессе и, следовательно, пропускная способность “канала связи"между источником и приемником.

ВВЕДЕНИЕ

Явление хаотической синхронизации двух систем с однонаправленной связью (рис. 1), на первый взгляд, предполагает непосредственное воздействие физического процесса x_n в одной системе — источнике хаоса (ИХ) — на физический процесс в другой системе — приемнике хаоса (ПХ) — при наличии в общем случае шума w_n в канале. На рис. 1 $z_n = x_n + w_n$, $\hat{x}_n$ — физический процесс на выходе приемника. Однако могут быть и другие ситуации, а именно: физический сигнал ведущей системы преобразуется в сигнал другого типа, который, в свою очередь, преобразуется в физический сигнал того типа, который должен воздействовать на ведомую систему. Такая ситуация имеет место, например, в том случае, когда мы хотим синхронизовать две электронные низкочатотные системы через радиоканал. В этом случае схема синхронизации, показанная на рис. 1, является не отражением физической ситуации, а только некоторой ее моделью.

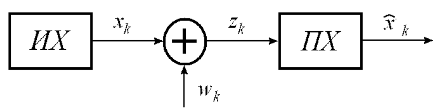


Рис. 1.

Положение, при котором две системы синхронизуются не непосредственно через генерируемые или физические сигналы, а с использованием ряда преобразований сигналов, является достаточно типичным и в системах с синхронизацией регулярных процессов. Например, это системы глобального позиционирования, системы точного времени и т. д. И в этих случаях структуры схемы синхронизации, подобные приведенной на рис. 1, являются упрощенными и не учитывают преобразования физического сигнала.

Более реальная схема выглядит так, как показано на рис. 2. Здесь, наряду с ведущей и ведомой системами, имеется преобразователь физического сигнала из одной формы в другую (Пр), обратный ему преобразователь (Пр$^{-1}$) и канал, который передает сигнал в новой форме y_n от преобразователя к обратному преобразователю. Физическая природа сигнала на выходе ведущей системы может быть никак не связана с физической природой сигнала в канале (после преобразователя). Например, в роли ведущей и ведомых систем могут выступать механические системы, а сигнал в канале при этом — оптический. Сигналы на выходе ведущей системы и на выходе преобразователя не связаны также по мощности. Однако на входе ведомой системы мы снова должны иметь физический сигнал u_n, характерный для синхронизуемых систем. Он воспроизводится в точке приема на основе сигнала, поступающего из канала. Это означает, что непосредственное физическое воздействие одной системы на другую мы заменяем его имитацией, воспроизводя нужный сигнал на входе ведомой системы, т. е. реально происходит замена физического воздействия систем на передачу информации о том, каково это воздействие. Или, если угодно, замена физического взаимодействия информационным. Другими словами,

*Работа была представлена на летней школе—семинаре “Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

если сигнал, поступающий из канала, содержит всю информацию, необходимую для воспроизведения сигнала на выходе ведущей системы, то этого достаточно для синхронизации (конечно, если при этом выполняются условия непосредственной синхронизации по схеме на рис. 1).

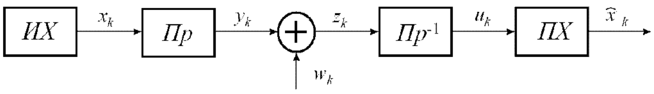


Рис. 2.

1. ИНФОРМАЦИОННОЕ СОДЕРЖАНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Прежде, чем перейти к анализу информационного воздействия ведущей системы на ведомую, рассмотрим как рождается и как исчезает информация в динамической системе, представляющей собой отображения единичного отрезка в себя

$$x_{n+1} = f(x_n)\,. \tag{1}$$

В (1) $f(\cdot)$ — нелинейная функция.

Начальное значение x_0 всегда известно, только с некоторой конечной точностью ε и содержит $h = -\log_2(\varepsilon)$ бит информации. Приращение информации в точке x отображения $y = f(x)$ определяется наклоном кривой в этой точке

$$\Delta h = \log_2 \left|\frac{dy}{dx}\right|\,. \tag{2}$$

Оно положительно, если $\left|\frac{dy}{dx}\right| > 1$, и отрицательно, если $\left|\frac{dy}{dx}\right| < 1$. Например, в случае отображения сдвига Бернулли

$$x_{n+1} = (2x_n)\mathrm{mod}1 \tag{3}$$

наклон касательной совпадает с наклоном отрезков, образующих отображение, и $df/dx = 2$ везде, кроме точки разрыва $x = 1/2$. Таким образом, каждый малый интервал увеличивается вдвое в размере при однократном итерировании. Если в начальный момент времени неопределенность в положении начальной точки была ε, то после первой итерации она станет равной 2ε. Изменение в информации о положении точки при этом составит

$$\Delta h = [\log_2(2\varepsilon) - \log_2(\varepsilon)] = \log_2 2 = 1 \text{ Бит}$$

и не будет зависеть от интервала неопределенности ε. То есть после каждой итерации один новый бит доступен для измерения, соответственно изменяется и знание о значении переменной.

Увеличение неопределенности в значении проитерированной переменной означает увеличение информации, которое не связано ни с влиянием каких-либо внешних факторов, ни с неопределенностью в начальных условиях. Следовательно, эта дополнительная информация порождается самим отображением.

После $n \approx -\log(\varepsilon)$ итераций отображения начальная неопределенность ε приводит к неопределенности в пределах всего отрезка [0,1] и данные о начальном условии полностью теряются.

Среднее значение производимой за итерацию информации $\overline{\lambda}$ выражается через взвешенный с плотностью вероятности $P(x)$ интеграл от (2)

$$\overline{\lambda} \equiv (\Delta H)_{\text{среднее}} = \int\limits_0^1 P(x) \log_2 \left| \frac{dy}{dx} \right| dx. \tag{4}$$

Однако $\overline{\lambda}$ можно определить, даже если $P(x)$ неизвестно. Для этого следует итерировать отображение, начиная с некоторых начальных условий, и вычислить усредненное значение логарифма наклона

$$\overline{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log_2 \left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} . \tag{5}$$

В (5) предполагается, что для эргодического отображения сумма получается взвешенной с плотностью вероятности $\mathrm{P}(x)$ за счет самого процесса итерирования.

Выражение (5) совпадает с выражением для ляпуновского показателя λ одномерного отображения, с той лишь разницей, что в формуле для ляпуновского показателя используется натуральный логарифм, а не логарифм по основанию 2. Поэтому ляпуновский показатель можно трактовать как скорость производства информации, выраженную в единицах для кода с основанием e. Для перевода ее в биты/итерацию достаточно умножить λ на $\log_2 e$:

$$\overline{\lambda} = \lambda \log_2 e \, . \tag{6}$$

2. ОГРАНИЧЕНИЯ, НАКЛАДЫВАЕМЫЕ ТЕОРИЕЙ ИНФОРМАЦИИ, НА СИНХРОНИЗАЦИЮ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Итак, динамическая система, генерирующая хаос, представляет собой специфический источник информационных сообщений. Если воздействовать сигналом одной хаотической системы на другую с идентичными параметрами, то может возникнуть синхронизация второй системы по отношению к первой. С точки зрения передачи информации ведомую систему можно рассматривать как приемник — получатель информации, который в случае синхронизации полностью воспринял передаваемую информацию и непрерывно подстраивает свою динамику в соответствие с принимаемой информацией.

Специфика хаотического источника сообщений заключается в том, что скорость генерации информации в нем конечна и при этом сигнал принимает непрерывное множество значений.

Какова же в этих условиях пропускная способность канала связи между ведущей и ведомой системами, и как она соотносится с возможностью сколь угодно точной синхронизации ведущей и ведомой систем?

В соответствии с теоремой Шеннона [1], для передачи в единицу времени объема информации $\overline{\lambda}$ минимальная пропускная способность канала C должна удовлетворять соотношению $C \geq \overline{\lambda}$.

Рассмотрим “систему передачи информации", состоящую из ведущей и ведомой хаотических систем при однонаправленной связи между ними

$$x_{n+1} = f(x_n)\, , \tag{7а}$$

$$y_{n+1} = f\left(x_n + \alpha(x_n - y_n)\right) . \tag{7б}$$

Необходимые условия синхронизации ведущей и ведомой систем (6) могут быть выражены аналитически [2–4]:

$$\lambda_\perp = \ln|1-\alpha| + \lambda < 0, \tag{8}$$

где $\lambda_\perp$ — ляпуновский показатель в направлении, трансверсальном плоскости аттрактора синхронизации. Только тогда, когда значение $\lambda_\perp$ становится меньше нуля, возникает синхронизация. Итак, что же получается? Через канал связи на вход приемника без искажения передается хаотический сигнал передатчика. Однако синхронизация наступает только в том случае, когда амплитуда этого сигнала достигает некоторой критической величины по отношению к собственному сигналу, генерируемому ведомой системой, с которым складывается принимаемый сигнал. Это означает, что переменная y_n ведомой системы играет роль шума в канале связи и синхронизация возникает только тогда, когда пропускная способность "канала с шумом" C станет больше, чем $\overline{\lambda}$.

Следствие 1. Каналу без шума соответствует случай системы с разомкнутой обратной связью, т. е. случай $\alpha = 1$.

Формула (7) связывает значение λ, которое можно трактовать как минимальную необходимую пропускную способность канала связи, выраженную в натуральных единицах, и силу взаимодействия между системами α. С другой стороны,

$$\lambda = -\ln|1-\alpha| = \ln(1 + S/N), \tag{9}$$

где S — средняя мощность сигнала, N — средняя мощность шума. Тогда

$$\left|(1-\alpha)^{-1}\right| = 1 + \frac{S}{N} = \frac{N+S}{N}\,. \tag{10}$$

Пусть для определенности $0 < \alpha < 1$. В момент, непосредственно предшествующий потере устойчивости синхронизации при критическом значении коэффициента связи $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$, в приемник поступает сигнал $\alpha_{\text{кр}} x(n)$ и складывается в нем со взвешенным значением переменной y_n: $(1-\alpha_{\text{кр}})y_n$, играющей роль шума. Поскольку $x_n = y_n$, то

$$N + S = \left\langle \left((1-\alpha_{\text{кр}})y_n + \alpha_{\text{кр}} x_n\right)^2 \right\rangle = \left\langle y_n^2 \right\rangle\,. \tag{11}$$

В то же время мощность "шума" должна быть пропорциональна мощности компоненты y_n

$$N = \chi \left\langle y_n^2 \right\rangle\,. \tag{12}$$

Следовательно,

$$(1-\alpha_{\text{кр}}) = \frac{\chi \left\langle y_n^2 \right\rangle}{\left\langle y_n^2 \right\rangle} = \chi\,. \tag{13}$$

Таким образом компонента сигнала приемника y_n с весовым множителем $\sqrt{1-\alpha_{\text{кр}}}$ формально выполняет роль внешнего шума. Когда $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$, пропускная способность канала достаточна для синхронизации. Решение (13) справедливо и для $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$. При $\alpha_{\text{кр}} \to 1$ $\chi \to 0$ и отношение сигнал/шум растет до бесконечности, т. е. имеет место "канал без шума".

Следствие 2. Случай без внешнего шума и обратной связи в приемнике соответствует каналу связи с $C = \infty$. *Синхронизация возможна при сколь угодно высокой скорости генерации информации хаотической системой.*

Проведенный выше анализ показывает, что для высокоточной синхронизации ведущей и ведомой систем в отсутствие шумов достаточно иметь "канал" с пропускной способностью

$$C > \overline{\lambda}\,. \tag{14}$$

Соотношение (13), вообще говоря, ничего не говорит о том, каким образом этот канал может быть организован. Смысл соотношения в том, что при отсутствии между ведущей и ведомой системами достаточно интенсивного потока информации синхронизация невозможна. Таким образом, вопрос хаотической синхронизации, независимо от физической природы синхронизуемых систем, сводится к постоянной передаче специальной информации с некоторой скоростью, превышающей скорость производства энтропии (информации) в ведущей хаотической системе.

Для высокоточной синхронизации ведущей и ведомой систем при наличии шумов, так же как и в случае отсутствия шумов, достаточно иметь "канал связи"с пропускной способностью, превышающей C. Этот факт более удивительный, чем условие высокоточной синхронизации в отсутствие шума, поскольку свидетельствует о возможности полной компенсации внешних возмущений при синхронизации.

Основу для количественного анализа дает теорема о пропускной способности канала с шумом [1], согласно которой пропускная способность канала с полосой частот W равна

$$C = W \log_2 \frac{S+N}{N}\,. \tag{15}$$

Это означает, что с помощью специального кодирования можно передавать двоичные знаки со скоростью $W \log_2 \dfrac{S+N}{N}$ бит в секунду, при сколь угодно малой частоте ошибок.

В соответствие с соотношением (15), по величине производимой ведущей хаотической системой информации $\overline{\lambda}$ и полосе частот канала определяется максимально допустимый уровень шумов, при котором еще возможна синхронизация. "Платой"за возможность синхронизации при наличии шума является специальная организация информации, передаваемой через канал, а также некоторое запаздывание процессов в ведомой системе по отношению к процессам в ведущей системе. Отметим также, что при практической реализации высокоточной синхронизации при наличии шумов требуется некоторая избыточность в пропускной способности канала по отношению к величине, задаваемой соотношением (15). В противном случае величина запаздывания может стремиться к бесконечности.

3. СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Некоторые подходы по организации эффективного "канала связи"для синхронизации хаотических систем могут быть получены с использованием символической динамики [5–9], основная идея которой заключается в делении множества возможных состояний исходной системы на конечное число ячеек и нахождении маршрута, определяющего к какой ячейке относится состояние системы при каждом такте часов. Каждая ячейка ассоциируется с некоторым "символом"и, таким образом, эволюция системы описывается бесконечной последовательностью символов. Этот процесс порождает "символическую"динамическую систему, которая отражает свойства исходной динамической системы и помогает понять ее поведение.

В более точных терминах символическая система описывается следующим образом.

Любой набор из m непересекающихся областей $\beta = \{B_i\}_{i=1}^{i=m}$, покрывающий единичный интервал (множество состояний G), на котором определено отображение (1), называется разбиением

$$\beta = \{B_i\}_{i=1}^{i=m} : B_i \cap B_j = \oslash \text{ для } i \neq j; \quad \bigcup_{i=1}^{i=m} B_i = G\,. \tag{16}$$

Введем символ $i = \xi(B_i)$, $i \in M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ для каждой области B_i разбиения β. Через $\Psi = \prod\limits_{i=1}^{\infty} M$ обозначим множество всех последовательностей неограниченной длины $X_1^\infty = X_1 X_2 \ldots X_j \ldots$ с $X_j \in M$. Таким образом мы получим отображение μ_β: $G \to \Psi$, определенное как

$$\mu_\beta(x_1) = X_1^\infty \Leftrightarrow f^{j-1}(x_1) \in B_{X_j} \;\text{ для }\; j \geq 1, \tag{17}$$

которое сопоставляет последовательность $X_1^\infty \in \Psi$ каждой точке $x_1 \in G$, где X_j — символ, генерируемый в момент времени j. Знак $\Leftrightarrow$ означает эквивалентность между последовательностью X_1^∞ и последовательностью отсчетов, полученных при итерировании отображения $f(x_1)$.

Согласно (17), динамика, задаваемая отображением f в фазовом пространстве, транслируется в множество символических последовательностей Ψ над алфавитом M, образуя при этом символическую динамическую систему — гомеоморфизм левого сдвига $\hat{\sigma} : \hat{\sigma}\,(X_1^\infty)_i = X_{i+1}$ (где X_i — i-й символ в X_1^∞). Совокупность $L \subseteq \Psi$ всех последовательностей, генерируемых системой, называется *языком*. Изучение символической динамической системы $(\Sigma_L, \hat{\sigma})$, где Σ_L — множество всех неограниченных последовательностей, совместимых с L, эквивалентно изучению отображения f, если разбиение f является образующим, т. е. если каждая неограниченно длинная символическая последовательность соответствует единственному начальному условию x_1 [9].

Движение динамической системы в непрерывном (микроскопическом) пространстве состояний детерминировано и описывается уравнением (1). Зная начальное состояние x_1 и отображение f, можно вычислить будущую эволюцию (1). Напротив, движение системы на разбиении (макроскопическое движение) является стохастическим, и траектории являются последовательностями символов. На основе знания предшествующей траектории уравнения (1) на разбиении можно предсказать его будущие макроскопические состояния только в вероятностных терминах. Различные состояния, которые принадлежат одной и той же области B_{X_j} в момент времени j, из-за хаотической природы динамической системы могут попасть в разные области в момент времени $j+1$. Разбиение пространства состояний превращает детерминированную систему в источник информации (сообщений), который может быть проанализирован в терминах теории информации. Для такого источника сообщений можно записать энтропию

$$H_n^\beta = -\sum_{X_1^n} P\,(X_1^n) \log_2 P\,(X_1^n)\,, \tag{18}$$

где $P(X_1^n)$ будет вероятностью появления фрагмента траектории $X_1^n = X_1 X_2 \ldots X_n$; H_n^β определяет среднюю неопределенность для предсказания слова длины n. Условная энтропия $(n+1)$ символа в макроскопической траектории, при условии, что известны n предыдущих символов, равна

$$h_n^\beta = H_{n+1}^\beta - H_n^\beta \ \text{ для } \ n = 1, 2, \ldots \ \text{ и } \ h_0^\beta = H_1^\beta. \tag{19}$$

Скорость создания энтропии источником (1) для данного разбиения β определяется выражением

$$h^\beta = \lim_{n\to\infty} h_n^\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_n^\beta\,. \tag{20}$$

Энтропия Колмогорова (К-энтропия) уравнения (1) представляет собой верхнюю грань скорости создания энтропии источника по всем возможным разбиениям [7, 10–11]:

$$h_{\text{K}} = \sup_\beta h^\beta, \tag{21}$$

и равна средней информации $\overline{\lambda}$, производимой источником за операцию. Если $h^\beta = h_{\text{K}}$, то β — образующее разбиение. Интересным свойством образующего разбиения является то, что если начальные условия не совпадают, то символические последовательности будут отличаться друг от друга: из $x^{'} \neq x^{''} \Rightarrow \mu_\beta(x^{'}) \neq \mu_\beta(x^{''})$.

Образующие разбиения могут быть сконструированы систематическим образом в гиперболических системах [6], для которых устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально в каждой точке [10]. Однако, неизвестно как идентифицировать образующее разбиение для “общей"негиперболической динамики, которая характеризуется тангенциальностью (касаниями) между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями или отсутствием экспоненциального отталкивания в определенных областях фазового пространства (соответствующих отрицательности всех ляпуновских экспонент, вычисленных на конечном участке траектории). В данной работе мы ограничиваемся примерами, в которых возможность построения образующего разбиения не вызывает сомнений.

Для заданного разбиения β можно определить его уточнение β^n на стадии n, как состоящее из следующих несвязанных областей:

$$B_{X_1^n} = \left\{ x \in S : x \in \bigcap_{j=1}^{n} f^{-j+1} B_{X_j} \right\}, \tag{22}$$

где $f^{-j+1}B_{X_j} = \left\{ x \in S : f^{j-1}(x) \in B_{X_j} \right\}$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Если β является образующим разбиением, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(\beta^n) = 0$ с $\mathrm{diam}(\beta^n)$, являющимся максимальным диаметром из всех областей, из которых состоит β^n. Для конкретного начального состояния x_1 первые n символов X_1^n определяют единственную область в уточненном разбиении β^n, которой x_1 принадлежит. Следующий символ X_{n+1} несет положительное количество информации h_n об x_1 и других точках из области, принадлежащей β^{n+1}, которая содержит x_1. Дополнительная информация выражена через тот факт, что $\mathrm{diam}(\beta^{n+1}) \leq \mathrm{diam}(\beta^n)$ для $n \geq 1$, и означает, что каждый новый символ X_{n+1} из последовательности $\mu_\beta(x_1)$ определяет x_1 со все большей и большей точностью.

Простейшими примерами являются отображение сдвига Бернулли (3) и “tentотображение

$$y = \begin{cases} 2x & \text{для} \quad x < 0{,}5\,, \\ 2 - 2x & \text{для} \quad x > 0{,}5 \end{cases} \tag{23}$$

с образующим разбиением $[0,\ 1/2) \to 0$, $[1/2,\ 0) \to 1$. Для них 1) физическая эргодическая вероятностная мера является константой на $[0,\ 1)$, 2) отображение сдвига Бернулли и “tentотображение на образующем разбиении являются источниками информации без памяти, т. е. $h_n = h_0$ для $n \geq 1$ и 3) $h_0 = 1$ (Бит/символ).

4. СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМА В КАНАЛЕ

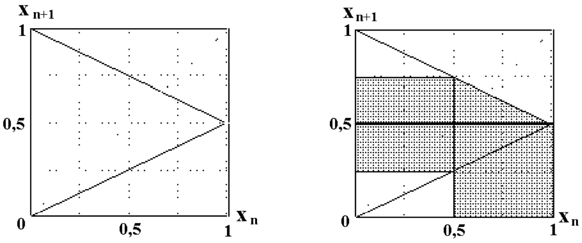
Исходя из представлений о синхронизации как информационном процессе, рассмотрим и сопоствим два метода синхронизации. В качестве источников хаоса будем использовать отображение сдвига Бернулли и “tentотображение.

В обоих методах для синхронизации ведущей и ведомой систем используется не сама хаотическая последовательность x_n, а соответствующая ей символическая последовательность $S(0), \ldots, S(n), \ldots, S(n+k), \ldots$ Идея организации процесса оптимизации заключается в следующем.

Введем отображение

$$x_n = f^{-1}(x_{n+1})\,, \tag{24}$$

обратное отображению (1). Например, для “tentотображения (23) это будет отображение, изображенное на рис. 3а. Пусть в приемник хаоса поступает не сама хаотическая последовательность, а соответствующая ей символическая последовательность $S(0), \ldots, S(n), \ldots, S(n+k), \ldots$ Член символической последовательности $S(n+k)$ определяет значение хаотического отсчета с точностью до принадлежности полуинтервалу $[0,\ 1/2)$ или отрезку $[1/2,\ 1]$ соответственно для $S(n+k) = 0$ и $S(n+k) = 1$. Применим к этому полуинтервалу или отрезку отображение (24). В результате получим два множества (рис. 3б), каждое размером $1/4$. Нужное множество то, которое соответствует элементу символической последовательности $S(n+k-1)$. Например, если $S(n+k-1) = 1$, то это множество, соответствующее верхней ветви отображения.



а) б)

Рис. 3.

Таким образом, мы получаем оценку x_{n+k-1}, но уже с точностью до принадлежности отрезку размером 1/4. Продолжая этот процесс в течение k итераций, получим оценку x_n с точностью 2^{-k+1}.

Таким образом, используя принимаемую символическую последовательность и отображение (24) в приемнике хаоса, можно получить на выходе приемника сколь угодно точную оценку последовательности хаотических отсчетов, генерируемых ИХ. Степень точности оценки будет определяться временем запаздывания между отсчетом x_n на выходе ИХ и его оценкой $\hat{x}_n$ на выходе ПХ.

Рассматриваемые ниже методы синхронизации при наличии шума отличаются схемой формирования символической последовательности.

Блок-схема первого метода приведена на рис. 4. Сигнал, генерируемый ИХ, проходит через канал связи, где к нему добавляется шум w_n. Суммарный сигнал $z_n = x_n + w_n$ поступает в квантователь по уровню два (К$_2$) и преобразуется там в 0, если $z_n < 1/2$, и в 1, если $z_n > 1/2$. Приемник хаоса (ПХ) по символической последовательности $S(1), \ldots, S(n)$ восстанавливает значение сигнала x_1.

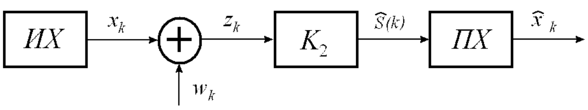


Рис. 4.

Блок-схема второго метода приведена на рис. 5. В этом методе сигнал x_k с выхода источника хаоса поступает на вход квантователя по уровню два (К$_2$), где преобразуется в элемент символической последовательности $S(n) = 0$, если $x_k < 1/2$, и $S(n) = 1$, если $x_n > 1/2$, которая в свою очередь преобразуется в физический сигнал $\hat{S}(n) = -1$, если $S(n) = 0$, и $\hat{S}(n) = 1$, если $S(n) = 1$. Физический сигнал поступает в канал, где смешивается с гауссовским шумом. Сумма двух сигналов поступает на вход квантователя по уровню два (К$_2$) приемника, который преобразует его в символическую последовательность $\{S'(n)\}$, состоящую из нулей и единиц. Полученная символическая последовательность поступает на вход ПХ, который по ней и отображению (24) должен обеспечить получение возможно более точной копии хаотического сигнала x_k, т. е. оценку $\hat{x}_n$.

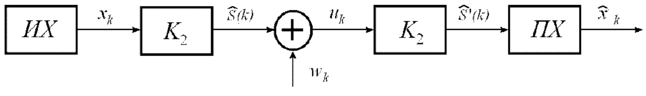


Рис. 5.

Априорно представляется, что второй метод менее чувствителен к ошибкам, чем первый. Действительно, в первом методе значение принимаемой величины равномерно распределено на интервале $(-1, 1)$ (при соответствующей нормировке). Поэтому значительная доля поступающих в канал отсчетов имеет значение, лишь немного отличающееся от нуля. Поэтому добавление даже малого шума к таким отсчетам будет часто “перебрасывать"их на противоположную от нуля сторону, и квантователь на входе ПХ будет неверно идентифицировать значение квантованного сигнала.

С другой стороны, в случае квантования сигнала по уровню два на выходе источника хаоса, в канал поступают хорошо разнесенные сигналы “-1"и "$+1$"и требуется более высокий уровень шумов в канале, чтобы перебросить сигнал от -1 к $+1$ или наоборот при принятии решения в квантователе приемника.

На рис. 6, 7 приведены результаты расчета вероятности одиночных ошибок для рассмотренных методов синхронизации (первый метод — кривая 1; второй метод — кривая 2) при использовании в качестве ИХ отображения сдвига Бернулли (рис. 6) и “tentотображения (рис. 7), которые подтверждают сделанные выводы.

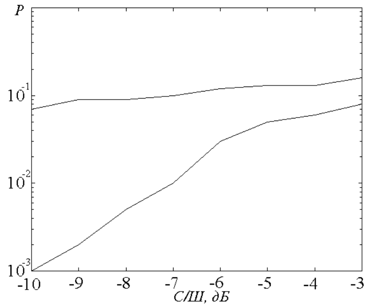


Рис. 6.

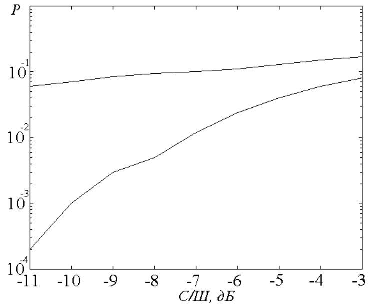


Рис. 7.

Таким образом, эффективные способы передачи через зашумленный канал информации, генерируемой системой, позволяют добиться синхронизации хаотических систем при уровне шума, близком к определяемому теоретическими ограничениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье показано существование фундаментальных ограничений на возможность синхронизации хаотических сигналов в присутствии шума, накладываемых теорией информации. Смысл этих ограничений заключается в том, что хаотические колебания являются сигналами, содержащими в себе информацию. Отсюда следует, что для их точного воспроизведения в приемнике требуется, чтобы не был потерян некоторый минимум необходимой для этого информации. Этот минимум определяется (во всяком случае, для таких источников хаоса, как одномерные отображения) степенью хаотичности сигнала, что эквивалентно средней информации, содержащейся в каждом отсчете, и уровнем шума.

Автор выражает признательность Л. В. Кузьмину, С. О. Старкову и М. Е. Широкову за обсуждение вопросов, затронутых в статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97–01–00800).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеннон К. — В кн.: Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИИЛ, 1963. С. 243.
2. Дмитриев А. С., Старков С. О., Широков М. Е. //Препринт № 9 (609). — М.: ИРЭ РАН, 1995.
3. Дмитриев А. С., Старков С. О., Широков М. Е. //Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика, 1996. Т. 4. № 4–5. С. 40.

4. Dmitriev A. S., Shirokov M. E., Starkov S. O. //IEEE Trans. Circuit Syst. I., 1997. V. 44. № 10. P. 918.
5. Боуэн Р. Методы символической динамики. — М.: Мир, 1979.
6. Алексеев В. А., Якобсон М. В. — В кн.: Методы символической динамики /Под ред. Р. Боуэна. — М.: Мир, 1979. С. 196.
7. Корнфельд И. П., Синай Я. Г. — В кн.: Современные проблемы математики: Т. 2. — М.: ВИНИТИ, 1985. С. 44.
8. Орнстейн Д. Эргодическая теория, случайность и динамические системы. — М.: Мир, 1978.
9. Биллингсней П. Эргодическая теория и информация. — М.: Мир, 1969.
10. Eckmann J.-P. and Ruelle D. //Review of Modern Physics, 1985. V. 57. № 3. Part 1. P. 617.
11. Guckenheimer J. and Holms P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields: Applied Mathematical Sciences: V. 42. 2nd ed. — New York: Springer, 1986.

Институт радиотехники и
электроники РАН, г. Москва,
Россия

Поступила в редакцию
1 октября 1998 г.

CHAOTIC SYNCHRONIZATION AS INFORMATION PROCESS

A. S. Dmitriev

Phenomenon of chaotic synchronization is investigated form the information point of view. Synchronization of a chaos receiver by a chaos source is considered as the copy reconstruction of the chaotic signal transmitted by the source. The main idea of the paper is to exhibit that the necessary condition of chaotic synchronization is transmission of definite volume information about chaotic process and hence “communication channel"capacity between the source and the receiver.

УДК 531.395:57

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ БИОКОДИРОВАНИЯ*

К. Г. Кирьянов

Предложена математическая модель динамики биологического кодирования на основе теории дискретных динамических систем, которая занимает промежуточное положение между возможным описанием процессов на языке квантовой механики и языке динамики концентраций. Найдена “фликкерная” форма критерия оптимального заселения кодонами классов эквивалентности словаря Универсального Биологического Кодирования (УБК). На их основе 1) объяснено существование многих близких к оптимальной таблиц кодирования (Квази-УБК) и 2) предложен способ синтеза словарей “кодон — аминокислотный остаток” при интерпретации аминокислот как переключаемых кодонами “автоструктур” фазового пространства динамических систем.

1. ПРОБЛЕМА ГЕНЕТИЧЕСКОГО КОДА

Знание механизма взаимного влияния вещества и поля породило различные принципы кодирования информации и способы работы кодеров и декодеров в телеграфии, радиосвязи и телевидении. Однако они, будучи интеллектуальными и рукотворными продуктами человека, используются для связи только в человеческом обществе. Природа же для передачи наследственной информации и “телеграмм внукам и правнукам” избрала иной непохожий способ кодирования и материальный носитель в виде клеточной дезоксирибонуклеиновой (ДНК) и рибонуклеиновой (РНК) кислот. Клеточный уровень биологической “беспроволочной связи” также существенно использует взаимодействие поля и вещества со сложной вариабельной стереохимической структурой сложных молекул [1–9].

Постановка проблемы генетического кода (**Гк**) и теоретическое рассмотрение некоторых возможных его вариантов принадлежат А. Даунсу (1952) и Г. Гамову (1953) [10–11]. Основные свойства **Гк** (триплетность, вырожденность) выявлены в генетических экспериментах Ф. Крика и С. Бреннера (1961). Расшифровка **Гк**, т. е. соответствия между триплетами–кодонами и аминокислотами осуществлена М. Н. Ниренбергом, С. Очоа, Х. Кораной и др. в 1961–65 гг.: 61 кодон из 64 кодирует определенные аминокислоты (**Ак**), 3 т. н. стоп-кодона (или “несмысловых” кодона) определяют остановку синтеза полипептидной цепи — полимера, построенного из **Ак** остатков. Для нуклеотидов (**н.**) — букв генетических текстов — используются сокращенные обозначения: A — аденин, C — цитозин, G — гуанин, U(T) — урацил в РНК (тимин в ДНК). Кодон AUG (а у низших организмов еще и некоторые другие кодоны) определяют начало синтеза. Кодоны UAA, UAG, UGA (у низших — некоторые другие наборы кодонов) определяют конец синтеза. В последнее время, в связи с новым “витком” интереса к прикладным задачам генетики (в медицине, экологии и т. д.), возродился практический и теоретический интерес к анализу генетических текстов: чтению, более детальному картированию, т. е. выявлению “мелких” функциональных участков генетических текстов, диагностике правильности секвенированных биопоследовательностей, включая и находящихся в банках данных. Ясно, что для этого необходимо более детальное понимание механизма не только “статики” (уровня словарей), но и динамики биокодирования, т. к. сам единичный “акт выбора” осуществляется в синтезирующей клетке рибосомой “+” аминоацил-тРНК синтетазой “+”. . . путем весьма сложных, как его видят биологи (рис. 1a), и, по-видимому, не до конца изученных физико–химических процессов со сложной динамикой [7, 8].

*Работа была представлена на летней школе–семинаре “Дни нелинейной динамики”, Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

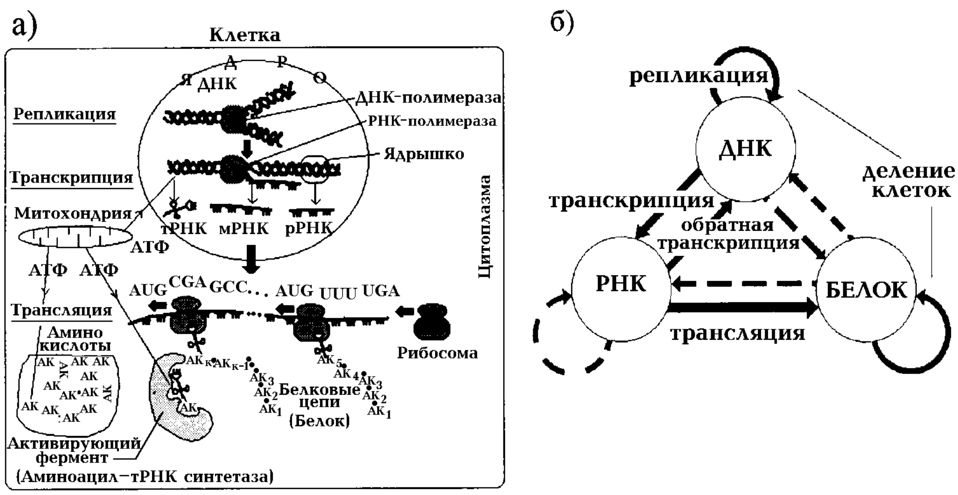


Рис. 1. Потоки генетической информации в клетке (а) и их укрупненная схема (б).

В настоящей работе сделана попытка создания математической модели (ММ) динамики акта выбора по кодону определенной **Ак** на языке понятий теории динамических систем, свойственным школе теории нелинейных колебаний академика А. А. Андронова и его учеников (см., например, [12–14]). Предлагаемая модель занимает промежуточное положение между описанием процессов передачи генетической информации на языке квантовой механики и на языке концентраций.

2. ВАЖНЕЙШИЕ ПОТОКИ ГЕНЕТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

На рис. 1 представлен укрупненный граф переходов (перекодировки) генетической информации, происходящих в клетке при хранении, преобразовании и передаче информации между ее носителями.

Вершины графа соответствуют общеизвестным носителям генетической информации — молекулам ДНК, РНК (мРНК, тРНК, рРНК) и полипептидным цепям (БЕЛКАМ). Стрелками показаны направления потоков информации между этими носителями, связанных с синтезом самих носителей. Пунктирные связи соответствуют “пока необнаруженным” [1–9] потокам информации. Эти связи интерпретируем как ферментацию (взаимные влияния) носителей на потоки информации, отмеченные непунктирными стрелками. В настоящей работе рассматривается только один (!) важнейший переход в этой глобальной векторной диаграмме процессов — процесс трансляции, выбора очередного **Ак**-остатка — звена новой белковой цепи по кодону **k** — триплету из трех соседних нуклеотидов в наследственной последовательности мРНК, в соответствии с таблицей “универсального биологического кодирования (УБК)”. В таблице УБК (табл. 1) даны обозначения аминокислот в старом и новом (международных) стандартах.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЛОВАРЯ УБК

В настоящей работе применяется использованная нами ранее [15] математическая модель результата (рис. 2) такого преобразования — таблица точечного отображения $\mathrm{T}_{\text{ст}}$ множества $\mathrm{K} = \{k_i\}$, $i \in [1, 2, \ldots, M=$ кодонов в дискретное множество $\mathrm{A} = \{\mathrm{Ак}_s\}$, $s \in [1, 2, \ldots, N]$ аминокислотных остатков, $N = 20$ или 21, включая “пробел” = окончание белковой цепи, белкового текста.

Имеются простые соотношения параметров отображения $T_{ст}$:

$$\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i) = M = |K| = 4^3 = 64 \text{ или } |K| = 61 \text{ (без 3-х стоп-кодонов)}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{M}(\beta_j) = N = |A| = 20 \text{ или } 21, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{M}(j \times \beta_j) = M, \quad (3)$$

где α_i, $i \in [1, \ldots, N]$ — число кодонов в i-й строке таблицы УБК, b_j, $j \in [1, ..., M]$ — j-е число вырожденности (синонимичности); $b_j = = \sum_i \delta(j - \alpha_i)$, т.е. β_j — это число строк таблицы, для которых $\alpha_i = j$.

Далее вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M)$ с компонентами $\beta_j = \Phi(j)$ будем называть спектром чисел вырожденности (синонимичности, заселенности) гистограммы ряда α_i. Для УБК, представленного в табл. 1, спектр чисел вырожденности $\beta = (2, 9, 2, 5, 0, 3, 0, 0, \ldots)$ и $\beta = (2, 9, 1, 5, 0, 3, 0, 0, \ldots)$ для $N = 21$ и 20 показан на рис. 2б.

Отметим также, что данная ММ может усложняться для выяснения более тонких вопросов, например, типа неоднозначности словарей "антикодон↔**Ак**" при учете пятого "нестандартного" **н.** — инозина в антикодоновой петле тРНК, строящихся на основе правил Ф. Крика (wobble-hypothesis о "неоднозначности" в кодоне третьего **н.**). Для этого требуется использовать более сложный граф связей, чем представленный на рис. 2а [16]. Однако развиваемая ММ динамики акта кодирования "**k** → " (см. разд. 7) позволяет для наших целей, по-видимому, избежать модельного рассмотрения промежуточного ""антикодонового" и других этапов в сложном многоступенчатом процессе трансляции: "**k** → (антикодон в тРНК, нагруженной соответствующей **Ак** с помощью фермента аминоацил—тРНК—синтетазы)→ **Ак**".

4. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ТАБЛИЦЫ УБК

Ранее было показано [15, 16], что среди мыслимых правил кодирования таблица УБК близка к оптимальной по критерию максимума условной энтропии четных чисел вырожденности β_j (табл. 2), при условии сохранения структуры биокомпонентов. Значения функций $H_{чет}$, $H_{неч}$ и $H_{сум}$ условных энтропий получены на основе диофантовых уравнений (2) и (3) путем выделения в них новых переменных $q_j = (\beta_j)/N$ и $p_j = (j \times \beta_j)/M$, имеющих смысл вероятностей и удовлетворяющих условиям нормировки $\sum_{j=1}^{S} p_j = 1$, $\sum_{j=1}^{S} q_j = 1$.

Например,

$$H_{сум}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_S\}\Big|_{\sum_{j=1}^{S}(p_j)=1,\, \sum_{j=1}^{S}(q_j)=1} = -\sum_{j=1}^{S}(p_i \cdot \log_2 p_i) = H_{чет} + H_{неч}, \quad (4)$$

где

$$H_{чет}\{\beta_2, \beta_4, \beta_6, \ldots // \ldots\} = -(p_2 \cdot \log_2 p_2 + p_4 \cdot \log_2 p_4 + p_6 \cdot \log_2 p_6 + \ldots), \quad (5)$$

$$H_{неч}\{\beta_1, \beta_3, \beta_5, \ldots // \ldots\} = -(p_1 \cdot \log_2 p_1 + p_3 \cdot \log_2 p_3 + p_5 \cdot \log_2 p_5 + \ldots). \quad (6)$$

При этом предполагается, что максимальное число синонимичных кодонов в строках таблицы (мощность классов эквивалентных кодонов) $\max(\alpha_i) = S$. Словарь УБК с числами вырожденности

Таблица 1

Стандартная таблица—словарь
Универсального Биологического Кодирования (УБК)

i	Классы эквивалентности кодонов						α_i	Кодируемые **Ак**
1	UUU	UUC					2	Phe F
2	UUA	UUG	CUU	CUC	CUA	CUG	6	Leu L
3	UCU	UCC	UCA	UCG	AGU	AGC	6	Ser S
4	UAU	UAC					2	Tyr Y
5	UGU	UGC					2	Cys C
6	UGG						1	Trp W
7	CCU	CCC	CCA	CCG			4	Pro P
8	CAU	CAC					2	His H
9	CAA	CAG					2	Gln Q
10	CGU	CGC	CGA	CGG	AGA	AGG	6	Arg R
11	AUU	AUC	AUA				3	Ile I
12	AUG						1	Met M
13	ACU	ACC	ACA	ACG			4	Thr T
14	AAU	AAC					2	Asn N
15	AAA	AAG					2	Lys K
16	GUU	GUC	GUA	GUG			4	Val V
17	GCU	GCC	GCA	GCG			4	Ala A
18	GAU	GAC					2	Asp D
19	GAA	GAG					2	Glu E
20	GGU	GGC	GGA	GGG			4	Gly G
21	UAA	UAG	UGA				3	Stop

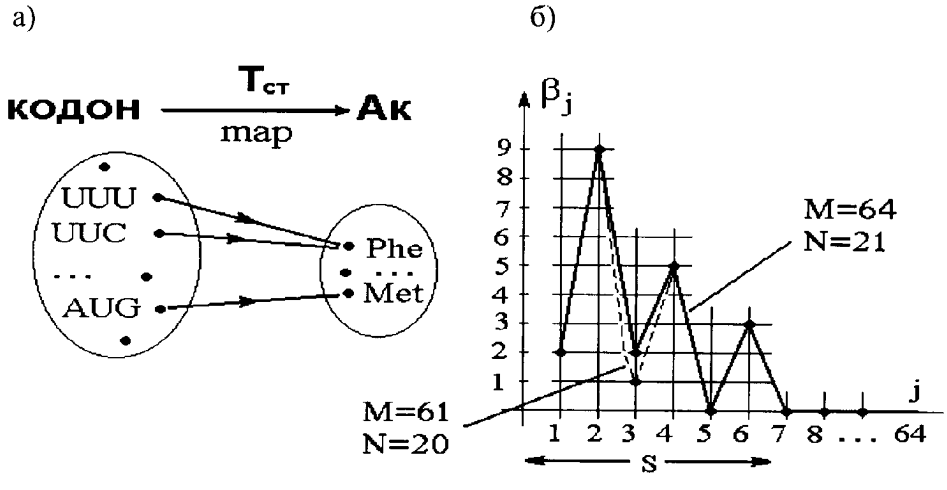


Рис. 2. Статическая модель УБК в форме точечного отображения $T_{ст}$. а) точечное отображение $T_{ст}$; б) спектр чисел вырожденности, заселенности строк таблицы УБК.

Т а б л и ц а 2

Таблица наборов β_j чисел вырожденности,
упорядоченных по убыванию "четной" энтропии $H_{\text{чет}}$
(при $N = 21$, $M = 64$, $S = 7$).
Показаны первые 10 и последние 4 из 3589 возможных наборов

№	β_j							$H_{\text{чет}}$	$H_{\text{неч}}$	$H_{\text{сум}}$
1	2	10	6	0	3	0	0	1.570	0.156	1.726
2	1	11	1	5	0	3	0	1.569	0.301	1.869
3	0	13	0	5	0	3	0	1.567	0.000	1.567
4	2	11	0	4	0	4	0	1.560	0.156	1.716
5	4	8	0	5	0	4	0	1.555	0.250	1.805
6	2	9	2	5	0	3	0	1.554	0.476	2.030
7	3	9	0	5	1	3	0	1.554	0.494	2.048
8	0	12	2	4	0	3	0	1.545	0.320	1.865
9	3	8	1	6	0	3	0	1.545	0.414	1.959
10	1	12	0	4	1	3	0	1.545	0.381	1.926
...										
3586	8	1	5	0	5	0	3	0.156	1.875	2.031
3587	7	1	5	0	8	0	2	0.156	1.264	1.420
3588	12	1	1	0	1	0	6	0.156	1.346	1.502
3589	4	1	11	0	5	0	0	0.156	1.272	1.429

$\beta = = (2,9,2,5,0,3,0,0,\ldots)$ занял шестое, а набор $\beta = (0,13,0,5,0,3,0,0,\ldots)$ митохондрий дрожжей [8] — третье место в табл. 2 среди 3589 дозволенных комбинаций. Последние публикации отмечают все большее число небольших отклонений от УБК (см., например, [1, 8, 18]), а сам УБК называют Квази-УБК (К-УБК) [18]. Поэтому представляется интересным, что известные нам и близкие к оптимальным в смысле максимума $H_{\text{чет}}$ (или родственных ему критериев) наборы чисел вырожденности отличаются друг от друга перестановкой двух—трех групп кодонов, что требует отдельного биофизического анализа. В работе [15] сделана попытка формальной интерпретации "крупных" (изменением M, N и S) и "мелких" (изменением β_j) эволюционных трансформаций **Гк** в органическом мире с помощью статической ММ (2) и (3). Но самым важным обстоятельством для нас является возможность использования этого критерия оптимальности УБК для целей селекции, выбора параметров динамической модели акта трансляции по числам вырожденности. При этом имеется принципиальная возможность прослеживания эволюционных трансформаций модели по возрастанию энтропии четных чисел вырожденности.

5. "ФЛИККЕРНАЯ" ФОРМА ОПТИМАЛЬНОСТИ К-УБК

Огибающая спектра рис. 2б соответствует оптимальным четным числам вырожденности и находится из уравнения

$$\max H_{\text{чет}}\{\beta_2, \beta_4, \beta_6, \ldots // \ldots\} = H_{\text{чет}}\{\beta_2^{\text{опт}}, \beta_4^{\text{опт}}, \beta_6^{\text{опт}}, \ldots // \ldots\}\,, \tag{7}$$

откуда $p_2^{\text{опт}}{\cong}p_4\text{опт}{\cong}p_6^{\text{опт}}{\cong}p_{\text{чет}}$ (точные равенства невозможны из-за ограничений на дискретность) или $2\beta_2^{\text{опт}}{\cong}4\beta_4^{\text{опт}}{\cong}6\beta_6^{\text{опт}}{\cong}\text{const} = p_{\text{чет}}\cdot M_{\text{чет}} = = j\cdot\beta_j^{\text{опт}}$ при четных $j = 2,\ 4,\ 6$ и т. д. Отметим, что оптимальная зависимость [мощность множества строк словаря с j кодонами]

$$\equiv \beta_j{\cong}p_{\text{чет}}\cdot M_{\text{чет}}/j \tag{8}$$

от циклового индекса j характеризует, по-видимому, как и везде в задачах заполнения “урн”, “решеток” и других ячеек, фликкерные пространственные дискретные перестройки заселенности кодонами строк таблицы УБК и другие факторы, приводящие к их скачкообразному изменению. Ясно, что $M_{\text{чет}} < M$. Уравнение (8) будет “точным” в среднеквадратичном смысле, если ввести действительный параметр аппроксимации $\epsilon_{\text{чет}}$:

$$\beta_j = p_{\text{чет}}\cdot M_{\text{чет}}/j^{(1+\epsilon_{\text{чет}})},\quad j = 2,\ 4,\ 6,\ldots \tag{8a}$$

Эксперимент показывает, что таблицы биокодирования 1–6 табл. 2 с максимальной $H_{\text{чет}}$ для p_j имеют следующую реализацию примерно “одинаковых” целых чисел $p_{\text{чет}}\cdot M_{\text{чет}}{\equiv}j\cdot\beta_j$ ($j = 2,\ 4,\ 6$): (20,24,18), (22,20,18), (26,20,18), (22,20,18), (16,20,24), (18,20,18), (18,20,18) и т. д. — с неочевидными “на взгляд” изменениями энтропии $H_{\text{чет}}$ словарей. Эти факты, по-видимому, объясняют недавно обнаруженные небольшие отклонения многих таких словарей (Квази-УБК [18]) от УБК.

Отметим, что закон типа (8) справедлив и для значений групп нечетных, соседних или всех аргументов β_j функций энтропии чисел p_j при их максимуме, но с различными значениями параметров $p\cdot M$ и ϵ, которые определяют границы $j_{\min}$, $j_{\max}$ и $(\beta_j)_{\max}$. Закон равномерного по j распределения целых “случайных” чисел β_j (“белый шум”), так же как и границы его “сшивки” с “фликкерным шумом”, получаем из максимума энтропии чисел q_j в уравнении (2). Другие формы критериев оптимальности словарей–отображений, запрещающих и разрешающих “экзотические” формы их заполнения (при одновременной оптимизации чисел β_j в уравнениях (2) и (3), минимаксных, включающих и дополнительные ограничения типа $S < M$ и др.), заслуживают отдельного обсуждения.

6. ДИНАМИКА БИОКОДИРОВАНИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДДС

1). Акт выбора по кодону **k** соответствующей **Ак** (согласно словаря) осуществляется путем сложных не до конца изученных многоэтапных физико–химических процессов: “**k** → (антикодон в тРНК, нагруженный соответствующей **Ак** с помощью фермента аминоацил–тРНК–синтетазы) → .

2). Характеризуем динамику этих процессов математической моделью (ММ) дискретной q-уровневой динамической системы (ДДС)

$$x(t+1) = F\Big(x(t);p\Big) \tag{9}$$

выбранного класса **F** с начальным условием $x(0){=}x_0$, где $t{\in}\{0,1,2,...\}$ — дискретное время, q — число уровней квантования всех других скалярных аргументов в F, $x(t) = \Big(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\Big)^{\mathrm{T}}$ — состояние ДДС, $p = (k,v)^{\mathrm{T}}$ — вектор–параметр ДДС, $k = (k_1,k_2,\ldots,k_{n_k})^{\mathrm{T}}$ — “управляющий” параметр ДДС (= “кодон”), фиксируемый на время ожидания кодоном (в 1-й рибосомной “ячейке”) прихода антикодона тРНК, нагруженной соответствующей Ак в аминоацил–тРНК–синтетазе, $v = (v_1,v_2,\ldots,v_{n_v})^{\mathrm{T}}$ — “варьируемый” параметр.

3). Определим для наших целей “автоструктуру” ($\Omega(k,v) = = \omega_1(k,v)\vee\omega_2(k,v)\vee\omega_3(k,v)\vee\ldots\vee\omega_c(k,v)$ соответствующую вектору k, как ориентированный *конечный* граф Γ дискретного фазового пространства Ω ДДС с метками узлов “$x(t)$” и стрелками “→” от $x(t)$ к $x(t+1)$, состоящий из $c \geq 1$ не связанных с остальными подграфов ω_l ($l = 1,2,\ldots,c$).

Таблица 3

Структура синтезированного словаря динамики УБК

№	Классы эквивалентности кодонов	Фазовое пространство (ФП)	α_i	Число циклов c_i	Число состояний в предельном цикле f_{ij} и общее число состояний в j-том подграфе s_{ij}
1	$k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{1j}, \ldots, k_{1\alpha_1}$	$\Omega_1(v)$	α_1	$c_1(v)$	$(f_{1j}(v), s_{1j}(v))_{j=1,\ldots,c_1(v)}$
2	$k_{21}, k_{22}, \ldots, k_{2j}, \ldots, k_{2\alpha_2}$	$\Omega_2(v)$	α_2	$c_2(v)$	$(f_{2j}(v), s_{2j}(v))_{j=1,\ldots,c_2(v)}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
i	$k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{ij}, \ldots, k_{i\alpha_i}$	$\Omega_i(v)$	α_i	$c_i(v)$	$(f_{ij}(v), s_{ij}(v))_{j=1,\ldots,c_i(v)}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
N	$k_{N1}, k_{N2}, \ldots, k_{Nj}, \ldots, k_{N\alpha_N}$	$\Omega_N(v)$	α_N	$c_N(v)$	$(f_{Nj}(v), s_{Nj}(v))_{j=1,\ldots,c_N(v)}$

4). Отождествим “аминокислоту” с “автоструктурой” фазового пространства ДДС, т. к. аминокислота определяется *сценарием поведения* большого количества “действующих лиц”, участвующих в проведении интимного акта трансляции под управлением кодона. В модели возможно $M = q^{n_k}$ разных автоструктур, сценариев в фазовом пространстве ДДС (по числу различных кодонов).

5). Определим точечное отображение $T(v)$ “вектор k $\to$ граф фазового пространства ДДС)”:

$$\mathbf{k} \to \Omega(k, v) \tag{10}$$

или, более подробно, $k \to \Omega = \{\omega_l(k, v)\}_{l=1,2,\ldots,c}$. Сняв метки “$x$” с узлов графа, пронумеровав и поместив кодоны k_{ij} (i — номер строки, j — номер кодона в i-ой строке) в строки с изоморфной без меток узлов структурой фазового пространства $\Omega_i(v) = \Omega(k_{ij}, v)$, получим искомый “словарь динамики” УБК (!) (табл. 3) с N строками (по числу автоструктур) и $M = q^{nk}$ кодонами, связанными соотношениями (1)–(3), числами синонимичности $\alpha_i(v)$, вырожденности $\beta_j(v)$ и, при необходимости, другими представляющими интерес параметрами графов (числами циклов = подграфов $c_i(v)$, числом состояний в j-ом предельном цикле $f_{ij}(v)$ и общим числом состояний в j-ом подграфе $s_{ij}(v)$).

6). Варьируя значения v, отбираем оптимальные и близкие к ним ДДС и соответствующие словари динамики биокодирования. Отбор производим по критериям разделов 4, 5 и др. для систем, находящихся в состоянии равновесия или совершающих, может быть, эволюционный дрейф (!).

7). Для проверки изложенного подхода в качестве ДДС выбрана нелинейная ММ в классе $\mathbf{F}_{\mathrm{A}}$ абстрактных автоматов 3-го порядка с операциями в кольце $GR(q{=}4)$:

$$x(t+1) = \mathbf{D} + \mathbf{A}\, x(t) + \mathbf{S}\, r(t) \tag{11}$$

или, в явной форме,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^2(t) \\ x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t)x_3(t) \\ x_2^2(t) \\ x_2(t)x_3(t) \\ x_3^2(t) \end{pmatrix},$$

где

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^{\mathrm{T}} \quad — \tag{12}$$

состояние ДДС,

$$r(t) = \left(x_1^2(t), x_1(t)x_2(t), x_1(t)x_3(t), x_2^2(t), x_2(t)x_3(t), x_3^2(t)\right)^{\mathrm{T}} \quad — \tag{13}$$

вспомогательный вектор квадратичных членов.

8). Эта простая нелинейная ДДС полезна в теории синхронизации ДДС и ее приложениях в системах связи [20] и других областях знаний для объяснения сложных процессов динамики. Следует отметить, что линейная ММ 2-го порядка типа (11)

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{14}$$

даже при $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{S} = 0$ в разных алгебраических структурах (АС) может иметь различное не только количественное, но и качественное поведение. В поле действительных чисел уравнение (14) — это уравнение движения колебательного контура или груза на пружине с известными сценариями в фазовом пространстве и описывает, например, затухающие процессы в колебательном контуре. В структуре Галуа $GF(q)$ при простом числе q уравнение (14) описывает процессы генерации дискретной q-символьной псевдослучайной последовательности бесконечной длины.

9). Алгебраические структуры в (11) при моделировании при малом q задаем таблицами операций сложения и умножения Кэли (ТК) [21], выполняющими роль внутренних правил комплементарности в ММ. Таблицы, соответствующие "арифметике" по "mod4", имеют вид

$$(+,\, q{=}4)\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline + & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad (\times,\, q{=}4)\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \times & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}. \tag{15}$$

10). Число различных (по виду матриц) уравнений (12) с $q = 4$ и ненулевыми системными матрицами $\mathbf{D}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{S}$ составляет $q^{(30)} = 2^{60}$ (!). Полный перебор коэффициентов уравнений (11) затруднен даже в одной АС. ММ (11) без квадратичного члена имеет в нашем случае $q^{(3+9)} = 2^{24} = = 16\,777\,216$ вариантов ДДС только для одной АС.

11). Сокращения перебора коэффициентов уравнений при выборе ММ ДДС можно, в принципе, достигнуть, используя

- технику "больших и малых" параметров, но, в отличие от аналоговых уравнений динамики в терминах концентраций, с учетом таблиц Кэли;
- эквивалентные канонические и минимальные формы матриц в произвольном поле, в которых "много" нулевых элементов. Эти формы для произвольного поля известны преимущественно для линейных ММ;

- дискретные аналоги градиентного поиска параметров, если удается ввести понятия "дискретной целевой функции", "производной", "близости" и т. п.

12). Однако самым предпочтительным является метод учета содержательной априорной биофизической информации о "смысле параметров ММ", сводящейся при переборах параметров ММ к учету *связей* и *ограничений* на них. Поэтому нами при выборе варьируемых параметров v, как и при выборе самого вида ММ динамики биокодирования (11), существенно использовалась дополнительная биофизическая информация.

13). На основе упомянутой в разд. 3 wobble hypothesis Ф. Крика выбрана матрица из 2-х диагональных блоков размерностей (2.2) и (1.1) по числам 2 и 1 "стабильных" и "нестабильных" нуклеотидов в кодоне. Матрица (2.2) выбрана в "первой естественной форме". Как правило, при формировании словарей в качестве 3-х компонент кодона $k_{ij} = (k_1, k_2, k_3)_{ij}$ выбирались компоненты (далее отмечены метками $*$) первых строк канонических подматриц в . Словари можно варьировать изменением компонент v недиагональных блоков в , характеризующих "линейные" связи двух первых и третьего нуклеотидов в кодоне, так же как и компонент, соответствующих "квадратичным" связям в матрице $\mathbf{S}$.

7. ДИНАМИКА БИОКОДИРОВАНИЯ. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При проведении эксперимента мы ограничились переборами и селекцией вариантов ДДС, занимающими не более шести часов на современном персональном компьютере. Предварительные оценки и результаты эксперимента показали, что

- выбор в качестве кодона параметров ДДС не по правилам п. 6—13 приводил к спектрам чисел β_j, непохожим на спектр УБК (табл. 1);
- в классе $\mathbf{F}_\mathrm{A}$ ДДС (11) с АС "mod4" при $\mathbf{D} \neq 0$, $\mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{S} = 0$ отсутствуют ДДС, имеющие числа β_j, соответствующие таблице УБК (табл. 1);
- в том же классе $\mathbf{F}_\mathrm{A}$ существует достаточно много ДДС со словарями К-УБК, содержащими ровно 20 **Ак** и один пробел;
- Пример такого словаря с $\beta = (2, 9, 2, 6, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, соответствующего по числам вырожденности словарю митохондрий дрожжей [8], с матрицами $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ и $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ представлен в табл. 4, соответствующей в несколько иной форме табл. 3;
- другая, казалось бы, более естественная интерпретация кодонов как начальных состояний в ФП ДДС, а **Ак** — как несвязных графов ФП, пока не привела к положительным результатам при моделировании.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты работы:

- "фликкерная" форма критерия оптимальности словаря "Универсального Биологического Кодирования (УБК)", связанная с заселением его классов эквивалентности кодонами;
- объяснение факта существования многих таблиц кодирования (Квази-УБК), близких к оптимальной и "мало" отличающихся от словаря УБК;

Таблица 4

Структура графов фазового пространства при различных параметрах ДДС
и синтезированный словарь динамики УБК

i	α_i/c	Параметры ДДС (кодоны k_{ij})/Структура графа ФП (f_{ij},s_{ij})
1	8	000 002 020 022 200 202 220 222
	1	1, 64
2	4	003 023 203 223
	3	1,12 1,44 2,8
3	4	120 122 300 302
	3	1,16 1,16 2,32
4	4	001 021 201 221
	4	1,4 1,4 1,12 1,44
5	6	110 112 130 132 310 312
	4	1,4 3,12 6,24 6,24
6	4	100 102 320 322
	4	1,16 1,16 1,16 1,16
7	2	330 332
	6	1,4 3,12 3,12 3,12 3,12 3,12
8	3	113 133 313
	8	1,1 1,1 2,2 3,3 3,3 6,6 6,24 6,24
9	3	111 131 311
	10	1,1 1,1 1,1 1,1 3,3 3,3 3,3 3,3 6,24 6,24
10	1	333
	10	1,1 1,1 2,2 3,3 3,3 3,12 3,12 3,12 3,12 6,6
11	2	123 303
	10	1,4 1,4 1,8 1,8 2,4 2,4 2,4 2,4 2,8 2,16
12	1	331
	12	1,1 1,1 1,1 1,1 3,3 3,3 3,3 3,3 3,12 3,12 3,12 3,12
13	2	121 301
	12	1,2 1,2 1,2 1,2 1,4 1,4 1,8 1,8 2,4 2,4 2,8 2,16
14	4	030 032 210 212
	12	1,4 1,4 2,8 4,4 4,4 4,4 4,4 4,4 4,4 4,4 4,4 4,16
15	4	101 103 321 323
	14	1,2 1,2 1,2 1,2 1,4 1,4 1,4 1,4 1,8 1,8 1,8 1,8 2,4 2,4
16	2	230 232
	14	1,4 1,4 1,4 1,4 2,8 2,8 4,4 4,4 4,4 4,4 4,4 4,4 4,4 4,4
17	2	033 213
	16	1,1 1,1 1,1 1,1 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 4,4 4,4 4,4 4,4 4,16 4,16
18	2	031 211
	18	1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 2,2 2,2 2,2 2,2 4,4 4,4 4,4 4,4 4,16 4,16
19	2	010 012
	22	1,4 1,4 1,4 1,4 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,8 2,8
20	2	231 233
	24	1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 4,16 4,16
21	2	011 013
	26	1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,2 2,8 2,8 2,8 2,8

- интерпретация стереохимии аминокислот как “автоструктур”, фазового пространства дискретных динамических систем, управляемых сменой кодона;
- использование критериев оптимальности статических словарей УБК при синтезе словарей динамики биокодирования, позволивших синтезировать дискретные динамические системы, управляемые 64-мя кодонами с 21-й структурой фазового пространства, интерпретируемой как 20 основных аминокислот и один “пробел” в белковом тексте, свидетельствующий об окончании его синтеза;
- теория динамики биологического кодирования в терминах динамических систем, которая занимает промежуточное положение между возможными описаниями процессов биокодирования на языке квантовой механики и языке динамики концентраций.

На основе предложенной модели целесообразно:

- совершенствование критериев оптимальности словарей биокодирования и математической модели динамики акта трансляции с учетом новой биофизической информации и моделирования ДДС в различных алгебраических структурах;
- создание математической модели выбора правильной фазы кодона при трансляции генетического текста;
- определение правил биофизического “наполнения” кодонами синтезируемых словарей путем согласования кодировок компонент кодонов и состояний ДДС;
- создание математической модели динамики многих последовательных актов трансляции, приводящей к последовательной структуризации белка.

Автор благодарит организаторов школы-семинара по нелинейной динамике, сотрудников ННГУ и исследовательской лаборатории при проблемном совете “Физико—математические основы наукоемких технологий” АТН РФ В. Д. Шалфеева, А. Н. Малахова, В. Н. Багрова, А. П. Веселова, Н. А. Добротину, О. Л. Лебедева, В. А. Таланова, И. В. Семенчукова за полезные обсуждения работы, помощь и поддержку исследований в области биокодирования.

Работа выполнена при поддержке КЦФЕ (грант 97—40—1.8—12) и РФФИ (грант 96—02—16559).

ЛИТЕРАТУРА

1. Льюин Б. Гены /Пер. с англ. — М.: Мир, 1987.
2. Ичас. Биологический код. — М.: Мир, 1971.
3. Шапвиль Ф., Энни А.-Л. Биосинтез белка. — М.: Мир, 1977.
4. Зенгбуш Л. Молекулярная и клеточная биология: В 3 т. — М.: Мир, 1982.
5. Биологический энциклопедический словарь. — М.: Наука, 1983.
6. Франк-Каменецкий М. Д. Самая главная молекула. — М.: Наука ,1983.
7. Киселев Л., Фаворова О. О., Лаврик О. И. Биосинтез белков от аминокислот до аминоацил-тРНК. — М.: Наука, 1984.
8. Волькенштейн М. В. Биофизика. — М.: Наука, 1988.
9. Итоги науки и техники. Сер. Геном человека. Т. 2. Структурное исследование генома человека. /Под ред. акад. А. А. Баева, акад. А. Д. Мирзабекова, к.б.н. Н. Н. Беляевой. — М., 1994.
10. Гамов Г. Комбинаторные принципы в генетике. // Прикладная комбинаторная математика: Сб. статей под ред. Э. Беккенбаха. — М.: Мир, 1968.

11. Математические проблемы в биологии: Сб. статей под ред. Р. Беллмана. — М.: Мир, 1966.
12. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
13. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. — М.: Наука, 1978.
14. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей. — В кн.: Нелинейные волны. Структуры и бифуркации /Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича. — М.: Наука, 1987.
15. Кирьянов К. Г., Лебедев О. Л. //Вестник ВВО АТН РФ, Сер. Высокие технологии в радиоэлектронике, 1996. № 1(2). С. 117.
16. Кирьянов К. Г., Таланов В. А. Современные проблемы радиофизики. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1996. С. 56;
    Кирьянов К. Г., Таланов В. А. — В кн.: Биологический код и гипотеза неоднозначного соответствия: Тез. докладов. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1997. С. 57.
17. Kiryanov K. G. Dynamics encoding. — In: Intern. Conf. On Contemporary problems in theory of dynamical systems: Abstracts. Nyzhny Novgorod, Russia. 1–6 July 1996. C. 25.
18. Инге-Вечтомов С. Г. //Соросовский образовательный журнал, 1996. № 12. С. 2.
19. Malakhov A. N., Yakimov A. V. — In: Detection and Proc. the Institute of Mathematics & INS Applications Conference Series. New Series. № 43. Clarendon Press. Oxford, 1993. P. 341.
20. Кирьянов К. Г. //Вестник ВВО АТН РФ, Сер. Высокие технологии в радиоэлектронике, 1995. № 1. С. 95.
21. Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 1 октября 1998 г.

MATHEMATICAL MODEL OF BIOLOGICAL ENCODING DYNAMICS

K. G. Kiryanov

The mathematical model of biological encoding on the base of discrete dynamic system theory, which occupies an intermediate position between the possible process description in terms of quantum mechanics and terms of concentrations, was offered. Found flicker form a criterion of optimum an occupying by codons the equivalence classes of dictionary of Universal Biological encoding (UBE). On their base 1) is explained existance many close to optimum tables of encoding (quasi-UBE) and 2) is offered way of syntheses of dictionary "codon - aminoacid", when ami-noacid interpreting as structures of phase dynamic system space, "switched" by codons.

УДК 621.391

ОБ ЭФФЕКТАХ ЗАХВАТА И УДЕРЖАНИЯ ПРИ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИ МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ*

В. Д. Шалфеев, В. В. Матросов

Изучается процесс синхронизации хаотически модулированных колебаний двух однонаправленно-связанных генераторов хаоса, построенных на базе типовой системы фазовой автоподстройки частоты.

Известно [1], что типовая система фазовой автоподстройки частоты (ФАП), обычно выполняющая задачу подстройки частоты генератора в кольце ФАП под частоту опорного сигнала, может быть переведена в режим генерации хаотических колебаний. Наиболее известным способом такого перевода является использование в цепи ФАП фильтра второго (или более высокого) порядка. Рассмотрим ФАП с самым простым фильтром второго порядка типа **0/2** с передаточной функцией $K(p) = (\mathrm{a}_2 p^2 + \mathrm{a}_1 p + 1)^{-1}$. Уравнение такой системы ФАП имеет вид [1]

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \quad \mu\frac{dz}{d\tau} = \gamma - \sin\varphi - y - \varepsilon z. \tag{1}$$

Здесь φ — текущая разность фаз подстраиваемого и опорного генераторов, $\gamma = \Omega_{\text{н}}/\Omega_{\text{у}}$ — относительная начальная частотная расстройка подстраиваемого и опорного генераторов, $\Omega_{\text{у}}$ — полоса удержания системы ФАП, $\mu = a_2\Omega_{\text{у}}^2$, $\varepsilon = a_1\Omega_{\text{у}}$, $\tau = \Omega_{\text{у}} t$ — безразмерные параметры и время.

Данные компьютерного моделирования системы (1) показывают, что, наряду с регулярными синхронными и несинхронными режимами, здесь существуют различные хаотические режимы, из которых далее остановимся только на режиме квазисинхронных хаотических колебаний генератора в кольце ФАП.

На рис. 1 дана (φ, y)—проекция хаотического аттрактора, соответствующего хаотическому квазисинхронному режиму в системе ФАП. В этом случае колебания на выходе генератора кольца ФАП имеют угловую модуляцию, при которой частота хаотически меняется около некоторого среднего значения, стабилизированного по опорной частоте. Будем называть такие колебания хаотически модулированными колебаниями (ХМК). На рис. 2 на плоскости параметров μ, γ для фиксированного $\varepsilon = 1$ выделены области D_1, D_2, соответствующие режиму ХМК. Очевидно, что для параметров, принадлежащих D_1, D_2, систему (1) можно рассматривать как генератор хаоса, выходные колебания которого являются хаотически модулированными колебаниями со средней частотой, стабилизированной по опорному сигналу. Заметим, что система может генерировать и другие типы хаотических колебаний (например, в области D_3 на рис. 2 наблюдаются хаотические биения частоты), которые ниже не рассматриваются.

Рассмотрим далее задачу синхронизации ХМК двух однонаправленно—связанных генераторов хаоса на базе ФАП — задающего (ФАП1) и синхронизируемого (ФАП2). Зададим параметры ФАП1 и ФАП2 для определенности принадлежащими области D_1 (рис. 2), близкими по величинам, но не равными. Под синхронизацией двух хаотически модулированных колебаний будем понимать "полную синхронизацию" [2], при которой выходные сигналы двух генераторов хаоса полностью совпадают, оставаясь хаотическими. Для достижения синхронизации введем однонаправленную связь между ФАП1 и ФАП2 через дополнительный дискриминатор $\mathbf{Д}_{12}$, на выходе которого образуется сигнал

*Работа была представлена на летней школе—семинаре "Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

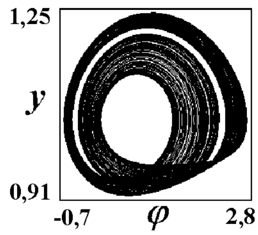


Рис. 1.

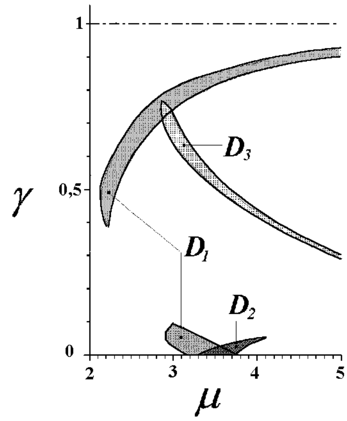


Рис. 2.

$\delta_\varphi \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, в случае, если дискриминатор $\mathbf{Д}_{12}$ является фазовым дискриминатором, или сигнал $\delta_y \Phi(y_2 - y_1)$, в случае, если дискриминатор $\mathbf{Д}_{12}$ является частотным дискриминатором с нелинейной характеристикой Φ. Введение такого типа связей (рис. 3) вполне оправдано, т. к. целью управления генератором в ФАП2 за счет этих связей является достижение подстройки хаотических колебаний генератора в ФАП2 под хаотические колебания генератора в ФАП1.

Математическая модель однонаправленно—связанных систем ФАП1 и ФАП2 имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1\,, \quad \frac{dy_1}{d\tau} = z_1\,, \quad \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} = \gamma_1 - \sin\varphi_1 - y_1 - \varepsilon_1 z_1\,, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2\,, \quad \frac{dy_2}{d\tau} = z_2\,, \quad \mu_2 \frac{dz}{d\tau} = \gamma_2 - \sin\varphi_2 - y_2 - \varepsilon_2 z_2 - \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad -\delta_\varphi \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \delta_y \Phi(y_2 - y_1)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Phi(y) = 2ay/(1 + a^2y^2)$.

Результаты моделирования системы (2), представленные в [2], показали, что при достаточно близких значениях параметров систем ФАП1 и ФАП2 существует принципиальная возможность подстройки (т. е. синхронизации) хаотических колебаний в ФАП2 под хаотические колебания в ФАП1 с помощью схемы, представленной на рис. 3. Покажем далее, что такая синхронизация осуществляется в достаточно широкой области изменения параметров (области синхронизации).

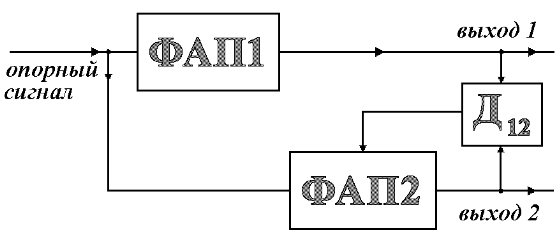
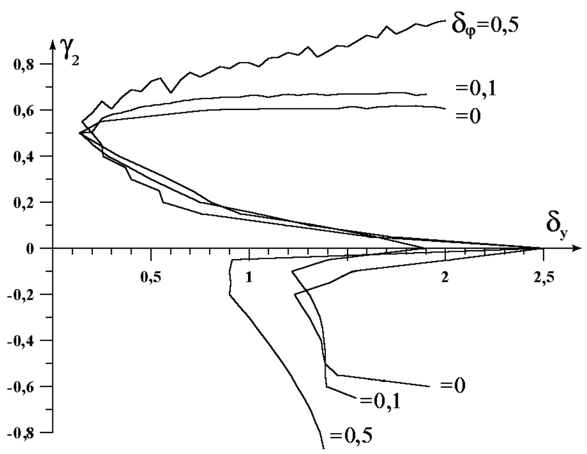


Рис. 3.

Зададим значения параметров ФАП1 в области генерации ХМК, т. е. в области D_1 (рис. 2): $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 2{,}2$, $\gamma_1 = 0{,}5$, начальные условия φ_1, y_1, z_1 поместим на хаотический аттрактор, проекция которого приведена на рис. 1. Далее будем искать такие значения параметров γ_2, ε_2, μ_2 системы ФАП2 и связей δ_φ, δ_y, a, когда ХМК, генерируемые в ФАП1 и ФАП2, отличаются друг от друга на малую величину ε_c с точностью до константы. Определим начальные условия ФАП2 следующим образом:

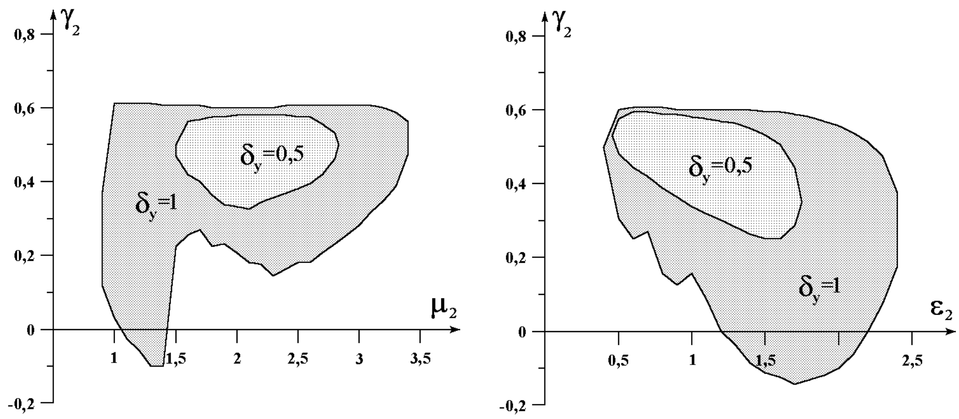
$\varphi_2 \in [-\pi, \pi]$, $y_2 = \gamma_2$, $z_2 = 0$. Конкретные значения φ_2 вычисляются либо как случайные величины, полученные с помощью датчика случайных чисел, либо как координаты равноотстоящих друг от друга точек на интервале $-\pi < \varphi < \pi$. После начала счета и ожидания некоторого процесса установления, характеризуемого временем $\tau_{\text{у}}$, вычисляются отклонения координат $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$ в течение времени наблюдения τ_{c}. Далее проводится анализ отклонений: если для некоторой точки в пространстве параметров за время τ_{c} для всех начальных условий z_2, y_2, φ_2 (N_φ точек на отрезке $[-\pi, \pi]$) отклонения $\Delta\varphi$, Δy, Δz не выходят за пределы заданной точности ε_{c}, то фиксируется, что данная точка принадлежит области синхронизации. При этом, в силу хаотического характера вычисляемых траекторий, допускаются кратковременные выходы наблюдаемых координат за пределы заданной точности ε_{c}, но так, чтобы суммарное время пребывания вне заданной точности составляло менее 10% от τ_{c}. Построенные в соответствии с данным алгоритмом сечения следующие области синхронизации: (δ_y, γ_2) для $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 2{,}2$, $\delta_\varphi = 0,\ 0{,}1,\ 0{,}5$; (μ_2, γ_2) для $\varepsilon_2 = 1$, $\delta_\varphi = 0$, $\delta_{\text{у}} = 0{,}5,\ 1$; $(\varepsilon_2, \gamma_2)$ для $\mu_2 = 2{,}2$, $\delta_\varphi = 0$, $\delta_{\text{у}} = 0{,}5,\ 1$, при $N_\varphi = 30$, $\varepsilon_{\text{c}} = 0{,}025$, $\tau_{\text{у}} = 1000$, $\tau_{\text{c}} = 1000$ — представлены на рис. 4а, б, в, соответственно. Из рис. 4 видно, что синхронизация действительно осуществляется в достаточно широкой области параметров, причем значения параметров ФАП2 не обязательно принадлежат области D_1. Отметим, что область синхронизации на рис. 4а, по-видимому, должна быть ограниченной при достаточно больших δ_y, однако эта часть границы здесь не просчитана.



а)

Известно, что для процесса синхронизации регулярных колебаний характерна гистерезисность, т. е. вхождение (захват) в синхронизм и удержание (потеря) режима синхронизации происходят при различных значениях начальной расстройки частоты генератора относительно опорного генератора. Интересно рассмотреть наличие подобной гистерезисности для процесса синхронизации хаотических колебаний.

Для приведенных выше областей синхронизации (рис. 4) были проведены эксперименты по вычислению границ области синхронизации при медленном увеличении параметра γ_2 (процесс удержания) и медленном уменьшении параметра γ_2 (процесс захвата). Было установлено, что здесь удержание режима синхронизации и захват в режим синхронизации происходят при одном и том же значении γ_2, т. е. гистерезис отсутствует ($\gamma_{2\text{зах.}} = \gamma_{2\text{удер.}}$). Это объясняется тем, что при выбранных значениях параметров в области D_1 (рис. 2) хаотический аттрактор является единственным аттрактором системы (1). Однако, при выборе других значений параметров из той же области D_1 может реализоваться гистерезисность, т. е. $\gamma_{2\text{зах.}} \neq \gamma_{2\text{удер.}}$. На рис. 5 представлен такой пример для значений параметров ФАП1 $\gamma_1 = 0{,}7$, $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 2{,}6$, параметров ФАП2 — $\varepsilon_2 = 1{,}4$, $\mu_2 = 2{,}5$, параметров цепи управления — $\delta_y = 0{,}5$, $\delta_\varphi = 0$, $a = 20$. Параметр γ_2 изменяется в сторону увеличения от $\gamma_2 = 0{,}7$ до $\gamma_2 = 0{,}8$, а затем



б) в)

Рис. 4.

в сторону уменьшения от $\gamma_2 = 0{,}8$ до $\gamma_2 = 0{,}7$.

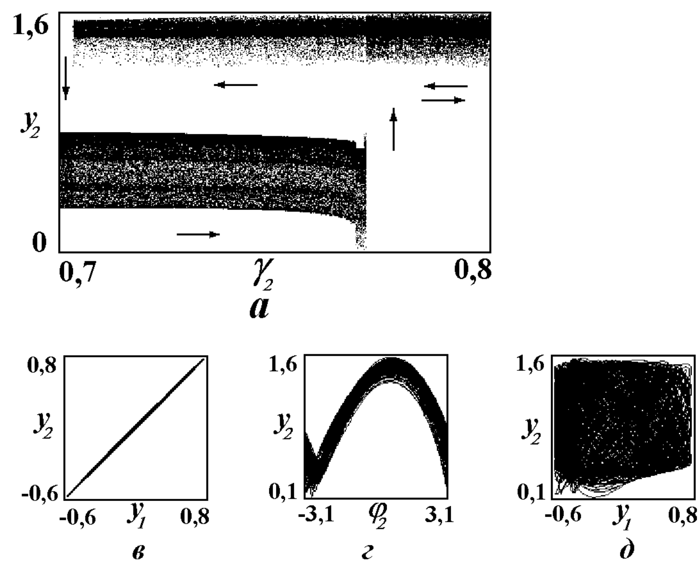


Рис. 5.

На рис. 5а приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма $\{\gamma_2,\, y_2\}$ отображения Пуанкаре, констатирующая, что при изменении γ_2 от 0,7 до 0,8 сначала на выходе ФАП2 имеются хаотические колебания (рис. 5б), синхронизированные с колебаниями ФАП1 (рис. 5в), затем при $\gamma_{2\text{удер.}} = 0{,}77$ (граница области удержания) происходит потеря синхронизации и далее при уменьшении γ_2 (верхняя часть рис. 5а) хаотические колебания ФАП2 (рис. 5г) оказываются не синхронизированными с колебаниями ФАП1 (рис. 5д). Последующий захват в режим синхронизации хаотических колебаний происходит при $\gamma_{2\text{зах.}} = 0{,}703$.

Таким образом, на основании проведенного исследования можно заключить, что на базе кольца ФАП возможно осуществить не только генерацию хаотически модулированных колебаний в достаточно широкой области изменения параметров, но и их синхронизацию. Процессы синхронизации ХМК характеризуются наличием гистерезисности, т. е. наличием в пространстве параметров областей удержания и захвата с несовпадающими границами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–02–16559) и Программы "Ведущие научные школы" (проект 96–15–96593).

ЛИТЕРАТУРА

1. Матросов В. В. // Письма в ЖТФ, 1996. Т. 22. Вып. 23. С. 4.
2. Шалфеев В. Д., Осипов Г. В., Козлов А. К., Волковский А. Р. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники, 1997. № 10. С. 27.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, НИИ прикладной математики и кибернетики, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 13 июля 1998 г.

PULL–IN AND PULL–OUT EFFECTS OF SYNCHRONIZATION OF CHAOTICALLY MODULATED OSCILLATIONS

V. D. Shalfeev, V. V. Matrosov

We study the effects of synchronization of chaotically modulated oscillations of coupled generators each having a local loop of phase control.

УДК 517.9

СИНХРОНИЗИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ – ДЮФФИНГА*

Д. Г. Захаров, Я. И. Мольков, М. М. Сущик

Проведено сравнение результатов анализа периодических решений, полученных в рамках полных и укороченных уравнений, для системы двух одинаковых генераторов Ван-дер-Поля – Дюффинга с нелинейной связью.

1. Рассматриваемая система связанных генераторов Ван-дер-Поля – Дюффинга принадлежит классу моделей НКВ [1], которые используются при математическом моделировании эффектов, наблюдающихся в психофизиологических опытах [1] и в экспериментах по инициированию локомоторных движений нерезонансной вибрацией мышц [2, 3]. Специфика системы определяется типом нелинейной связи между взаимодействующими генераторами, позволяющей моделировать наблюдаемую бистабильность режимов синхронизации с требуемыми сдвигами фаз φ_1, φ_2. При моделировании бистабильных режимов с почти антисимметричными сдвигами фаз $\varphi_1 = +\psi$, $\varphi_2 = -\psi$ иногда можно упростить анализ, ограничившись вырожденным случаем, считая генераторы и связи одинаковыми:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1 - \epsilon\gamma(x_1 - x_2)[(x_1 - x_2)^2 - \alpha]\,, \\
\dot{y}_1 &= \epsilon[y_1(1 - \lambda x_1^2) - \beta x_1^3] - x_1\,, \\
\dot{x}_2 &= y_2 - \epsilon\gamma(x_2 - x_1)[(x_2 - x_1)^2 - \alpha]\,, \\
\dot{y}_2 &= \epsilon[y_2(1 - \lambda x_2^2) - \beta x_2^3] - x_2\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

Дальнейшее упрощение при малой нелинейности $\epsilon \ll 1$ может быть достигнуто переходом к укороченным уравнениям. В этом случае решение системы (1) представимо в виде

$$\begin{aligned}
&x_k = z_k e^{it} + z_k^* e^{-it}, \quad y_k = i\left(z_k e^{it} - z_k^* e^{-it}\right), \quad k = 1,\, 2, \\
&z_1 = \frac{a}{\sqrt{\lambda}} e^{i\phi_1}, \quad z_2 = \frac{b}{\sqrt{\lambda}} e^{i\phi_2}, \quad \phi = \phi_2 - \phi_1\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Медленные амплитуды a, b и разность фаз ϕ определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= a(1 - a^2) - \Gamma(a - b\cos\phi)(a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi - A), \\
\dot{b} &= b(1 - b^2) - \Gamma(b - a\cos\phi)(b^2 + a^2 - 2ba\cos\phi - A) \\
\dot{\phi} &= B(b^2 - a^2) - \Gamma\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\sin\phi\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi - A\right),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $T = \dfrac{\epsilon}{2}t$, $B = \dfrac{3\beta}{\lambda}$, $\Gamma = \dfrac{3\gamma}{\lambda}$, $A = \alpha\dfrac{\lambda}{3}$.

Следует, однако, иметь в виду, что для вырожденных систем спонтанное разрушение симметричных решений исходных и укороченных уравнений даже при слабой нелинейности может происходить по-разному, и тогда решения будут иметь качественные отличия. Ниже эти отличия рассмотрены для области параметров, при которых сохраняется устойчивая синхронизация. Особенности режимов вне этой области параметров будут описаны в отдельной работе [4].

*Работа была представлена на летней школе–семинаре "Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

2. Состояния равновесия $O(\phi_0) = (a^{(0)}, b^{(0)}, \phi_0)$ соответствуют периодическим (т. е. синхронизированным) решениям (2). Решения с одинаковыми амплитудами $a = b$ могут быть получены в явном виде (рис. 1):

$$O(0) = (1,1,0),\ O(-\psi) = (1,1,-\psi),\ O(\psi) = (1,1,\psi),\ O(\pi) = (a^{\ (\pi)}, a^{(\pi)}, \pi),$$

где $\psi \equiv \arccos(1 - A/2),\ a^{(\pi)} \equiv \sqrt{\dfrac{1+2A\Gamma}{1+8\Gamma}}$.

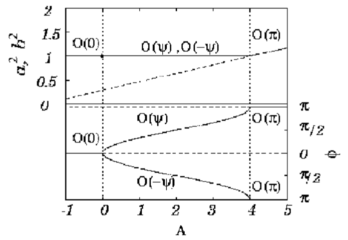


Рис. 1. Зависимости амплитуд и разности фаз синхронизованных решений от A при $\epsilon << 1$. Здесь и далее сплошные линии соответствуют устойчивым решениям, пунктирные — неустойчивым.

При $A < 0$ в фазовом пространстве системы имеется два состояния равновесия: устойчивое синфазное $O(0)$ и седловое противофазное $O(\pi)$. При $A = +0$ $O(0)$ теряет устойчивость, из него через бифуркацию трехкратного равновесия рождается пара устойчивых состояний равновесия $O(-\psi),\ O(\psi)$. С ростом A модуль разности фаз ψ монотонно изменяется от 0 до π. При $A = 4$ эти решения исчезают, претерпев бифуркацию трехкратного равновесия с седловым состоянием равновесия $O(\pi)$, которое при этом приобретает устойчивость.

Для поиска решений с $a \neq b$ произведем замену переменных: $a = \xi + \eta,\ b = \xi - \eta$. После подстановки такой замены система (3) может быть сведена к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
&1 - \xi^2 - 3\eta^2 - 3\xi^2\Gamma - \eta^2\Gamma + A\Gamma - (A - 4\xi^2)\Gamma\theta + (\eta^2 - \xi^2)\Gamma(1 - 2\theta^2) = 0,\\
&1 - 3\xi^2 - \eta^2 - \xi^2\Gamma - 3\eta^2\Gamma + A\Gamma + (A - 4\eta^2)\Gamma\theta - (\eta^2 - \xi^2)\Gamma(1 - 2\theta^2) = 0,\\
&(-1 + c)(1 - 2\theta\Gamma + A\Gamma)^2 + \theta B^2[-4\theta(-1 + A)^2\Gamma^2 + (1 - 2\theta\Gamma + A\Gamma)^2] = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\theta = \cos\phi$.

Анализ решений системы (4) показывает, что состояния равновесия с $a \neq b$ являются седловыми и ответвляются через бифуркации трехкратного равновесия от состояний равновесия $O(\pi)$ при $A = A_\pi \equiv \dfrac{1}{3}\left(4 - \dfrac{1}{\Gamma}\right)$ и $O(0)$ при $A = A_0 \equiv \dfrac{1}{\Gamma}$. Отметим, что эти бифуркационные значения параметров не зависят от параметра B. Порядок, в котором происходит появление или исчезновение решений с увеличением параметра A от нуля, зависит от $\Gamma = \dfrac{3\gamma}{\lambda}$ — отношения параметра величины связи γ к параметру активной нелинейности λ. Здесь можно выделить два случая: $\Gamma < 1$ и $\Gamma > 1$.

При $\Gamma < 1$ всегда $A_\pi < A_0$. При малых нелинейных поправках к частоте $B \approx 0$ (рис. 2а) сначала, при $A = A_\pi$, происходит рождение пары (в силу симметрии задачи) состояний равновесия $O(\theta) = (R_1^{(\theta)}, R_2^{(\theta)}, \theta), O(-\theta) = (R_2^{(\theta)}, R_1^{(\theta)}, -\theta)$ из неустойчивого решения $O(\pi)$ с разностью фаз, близкой к π. Состояния равновесия $O(\theta),\ O(-\theta)$ являются седлами с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. При $A = 1$ независимо от остальных параметров амплитуда колебаний одного из генераторов становится нулевой, что приводит к неопределенности разности фаз. При переходе через $A = 1$ значение разности фаз скачком меняется на π. При $A = A_0$ состояния равновесия $O(\theta),\ O(-\theta)$ сливаются с седловым состоянием равновесия $O(0)$. С ростом B сначала при $B^2 > (1-\Gamma)/(1+5\Gamma)$ в точке $A = A_\pi$ от $O(\pi)$, а после при $B^2 > (1-\Gamma)/(1+\Gamma)$ в точке $A = A_0$ от $O(0)$ через бифуркации трехкратного равновесия ответвляются пары седловых состояний равновесия с одномерным неустойчивым и двумерным устойчивым многообразиями, которые исчезают в результате

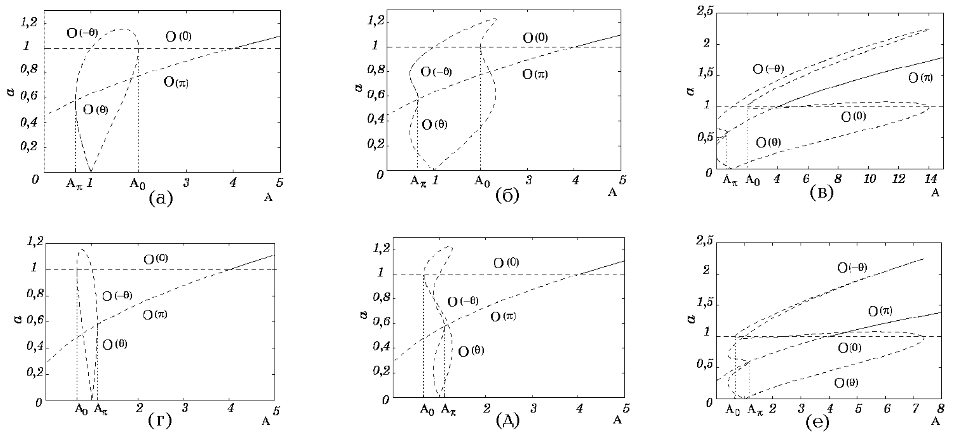


Рис. 2. Однопараметрические бифуркационные диаграммы системы (3) при $\Gamma = 0{,}5$. По горизонтальной оси отложен параметр A, по вертикальной — амплитуда первого генератора (амплитуда второго генератора из соображений симметрии определяется как $b(O(\phi)) = a(O(-\phi))$, $b(O(-\phi)) = a(O(\phi))$). а) $\Gamma = 0{,}5$, $B = 0$; б) $\Gamma = 0{,}5$, $B = 1$; в) $\Gamma = 0{,}5$, $B = 3$; г) $\Gamma = 1{,}5$, $B = 0$; д) $\Gamma = 1{,}5$, $B = 1$; е) $\Gamma = 1{,}5$, $B = 3$.

бифуркации типа седло—седло с состоянием равновесия $O(\theta)$ или $O(-\theta)$ (рис. 2б). Дальнейшее увеличение B приводит к расширению области существования таких решений (рис. 2в).

В другом случае ($\Gamma > 1$) всегда $A_0 < A_\pi$. В случае малых B сначала при $A = A_0$ происходит рождение состояний равновесия $O(\theta)$, $O(-\theta)$ с разностью фаз, близкой к нулю (рис. 2г), а затем при $A = 1$ происходит вырождение этих решений со скачкообразным изменением разности фаз. В дальнейшем они исчезают при $A = A_\pi$. В отличие от случая $\Gamma < 1$ у этих решений двумерное многообразие устойчиво, а одномерное — неустойчиво. С ростом B наклон кривых, отвечающих $O(\theta)$, $O(-\theta)$, в точках $A = 1$ по модулю растет и при $B^2 = (1-\Gamma)/(1+\Gamma)$ обращается в бесконечность, после чего меняет знак, что приводит к возникновению бифуркаций типа седло—седло, аналогичных описанным выше (рис. 2д). Как и в предыдущем случае, дальнейшее увеличение B приводит к расширению области существования $O(\theta)$, $O(-\theta)$ (рис. 2е).

3. В случае конечных нелинейностей система уравнений (1) численно исследовалась при $\lambda = 1$, $\gamma = 0.5$; таким образом, $\gamma = 3\Gamma$, $\alpha = 3A$, $\beta = 3B$.

Хотя различия в поведении синхронизованных решений исходной системы и системы укороченных уравнений возникают плавно при $\epsilon = +0$, тем не менее они становятся существенны при сравнительно малых ϵ. Так, при $\epsilon = 0{,}03$, в отличие от приближения асимптотически малой нелинейности, где устойчивые состояния равновесия $O(-\psi)$, $O(\psi)$ во всей области своего существования имели одинаковые и постоянные значения амплитуд, здесь $P(-\psi)$, $P(\psi)$ имеют неодинаковые, близкие и зависящие от параметра α амплитуды X_1, X_2 (рис. 4а). Еще одним отличием является сдвиг в сторону меньших A точки, соответствующей бифуркации тройного равновесия при $A = A_2$, в результате которой $P(\psi)$, $P(-\psi)$ исчезают, сливаясь с неустойчивым противофазным решением $P(\pi)$. Кроме того, начиная с некоторого значения параметра $\epsilon = \epsilon_{\rm cr}$, меняется качественный вид динамики исходной системы (рис. 6а). При $A = A_2$ из противофазного решения $P(\pi)$ рождается пара седловых предельных циклов $P'(-\theta)$, $P'(\theta)$. Далее, при $A = A_3$ они сливаются с периодическими решениями $P(-\psi)$, $P(\psi)$, что приводит к исчезновению $P(-\psi)$, $P(\psi)$ через седлоузловую бифуркацию.

С ростом B изменения в поведении периодических решений системы (1), аналогичные описанным выше при $B = 0$, происходят при меньших значениях ϵ. Такие изменения, как зависимость от текущего

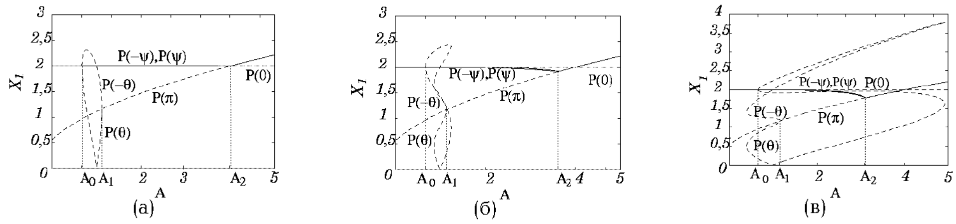


Рис. 3. Однопараметрические бифуркационные диаграммы системы (1) при $\lambda = 1$, $\Gamma = 1{,}5$, $\epsilon = 0{,}01$. а) $B = 0$, б) $B = 1$, в) $B = 3$. По горизонтальной оси отложен параметр A, по вертикальной — максимальное значение переменной X_1 (максимальное значение X_2 определяется из соображений симметрии, как $X_2(P(\phi)) = X_1(P(-\phi))$, $X_2(P(-\phi)) = X_1(P(\phi))$).

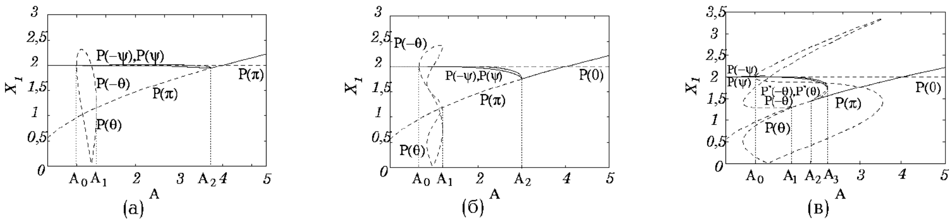


Рис. 4. То же, что на рис. 3 при $\epsilon = 0{,}03$.

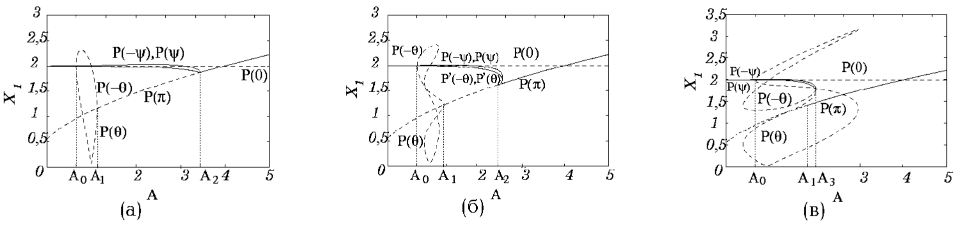


Рис. 5. То же, что на рис. 3 при $\epsilon = 0{,}05$.

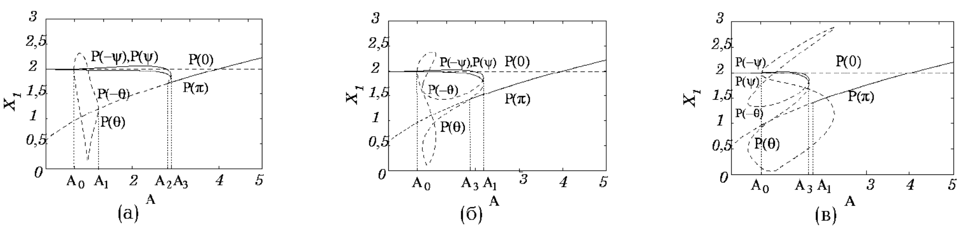


Рис. 6. То же, что на рис. 3 при $\epsilon = 0{,}1$.

параметра A амплитуд генераторов периодических решений $P(-\psi)$, $P(\psi)$ и сокращение области существования этих решений, наблюдаются при $B = 1$ и $B = 3$ при $\epsilon = 0{,}01$ (рис. 3б,в). Качественное изменение характера исчезновения периодических решений $P(-\psi)$, $P(\psi)$ демонстрировано на рис. 5б при $\epsilon = 0{,}05$, $B = 1$ и на рис. 4в при $\epsilon = 0{,}3$, $B = 3$. С продолжением роста ϵ происходит сближение точек, соответствующих бифуркациям тройного равновесия периодических решений $P(-\theta)$, $P(\theta)$ и $P'(-\theta)$, $P'(\theta)$ при $A = A_2$ и $A = A_1$, соответственно. При некотором значении параметра ϵ эти точки сливаются. Далее, при увеличении ϵ происходит попарное замыкание ветвей периодических решений $P(-\theta)$, $P(\theta)$ и $P'(-\theta)$, $P'(\theta)$ друг на друга. Замкнувшиеся ветви отходят от ветви противофазного решения $P(\pi)$, оставляя на ней след в виде бифуркации рождения инвариантного тора в точке $A = A_1$ (рис. 6б, 5в). Дальнейший рост ϵ приводит к увеличению значения A_1, при котором периодическое решение $P(\pi)$ приобретает устойчивость через бифуркацию рождения инвариантного тора (рис. 6в).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 97–02–17526) и программы “Ведущие научные школы"(грант № 96–15–96593).

ЛИТЕРАТУРА

1. Haken H., Kelso J. A. S., Bunz H. // Biol. Cybern., 1985. V. 51. P. 347.
2. Гурфинкель В. С., Левик Ю. С., Казенников О. В., Селионов В. А. Активация шагательного автоматизма вибрационной стимуляцией мышечных рецепторов у человека //Вестник ННГУ — синхронизация и хаос III, 1998 (в печати).
3. Мольков Я. И., Сущик М. М., Кузнецов А. С., Козлов А. К., Захаров Д. Г. Динамическая модель локомоторных движений человека, вызванных вибрационным воздействием на мышцы. // Вестник ННГУ — синхронизация и хаос III, 1998 (в печати).
4. Козлов А. К., Сущик М. М., Мольков Я. И., Кузнецов А. С. Разрушение симметрии, бистабильность и хаос в системе двух идентичных генераторов Ван-дер-Поля – Дюффинга // Вестник ННГУ — синхронизация и хаос III, 1998 (в печати).

Институт прикладной физики РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
1 октября 1998 г.

SYNCHRONIZED OSCILLATIONS IN THE SYSTEM OF TWO COUPLED VAN-DER-POL – DUFFING OSCILLATORS

D. G. Zakharov, Ya. I. Molkov, M. M. Sushchik

The periodic solutions of two coupled Van-der-Pol – Duffing oscillators with a cubic coupling function studied by numerical and asymptotic methods, are derived and compared.

УДК 532.59

ДЕФЕКТЫ И ДРЕЙФ СТРУКТУР ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ КАПИЛЛЯРНОЙ РЯБИ*

С. В. Кияшко

Экспериментально исследуется возникновение дефектов на капиллярных волнах, параметрически возбуждаемых в тонком слое жидкости с различной топографией дна. Показано, что возникновение дефектов происходит при возбуждении ограниченных областей волнового поля, соответствующих областям с большей глубиной. Дрейф дефектов и структур связан с потоком массы вблизи дна, генерируемым быстро спадающими поверхностными волнами.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании процессов образования устойчивых структур и перехода к хаосу одним из наиболее удобных объектов является капиллярная рябь, параметрически возбуждаемая на поверхности жидкости. Эксперименты по параметрическому возбуждению капиллярной ряби удобны тем, что в этом случае можно менять контрольные параметры: надкритичность, диссипацию и длину возбуждаемых волн, пространственный размер системы — и легко визуализировать поля поверхностных волн. Первые эксперименты по параметрическому возбуждению капиллярных волн начались еще с работ Фарадея [1]. Схема эксперимента следующая. На горизонтальную плоскость, колеблющуюся в вертикальном направлении с частотой f_0, помещается слой жидкости. Боковые стенки, ограничивающие растекание жидкости, имеют произвольную форму. При превышении амплитуды внешней силы некоторой критической величины a_n на поверхности жидкости возбуждаются стоячие капиллярные волны с частотой $0{,}5f_0$. Причем, в достаточно протяженных системах ($L \gg \lambda$) структура капиллярной ряби не зависит от геометрии боковых границ. Пространственные картины стоячих волн можно наблюдать в отраженном свете и фиксировать на фото- или видеокамеру с дальнейшей обработкой на PC компьютере.

В зависимости от параметров глубины h, длины волны λ, вязкости ν и надкритичности ϵ ($\epsilon = a/a_n - 1$, a — амплитуда ускорения, a_n — пороговая амплитуда генерации) на поверхности жидкости возможно установление различных пространственных структур стоячих волн.

Параметрическое возбуждение капиллярной ряби на поверхности жидкости однородной глубины обычно приводит к установлению однородных в пространстве структур. В жидкости малой вязкости наблюдается квадратная или шестигранная решетка, состоящая соответственно из двух или трех пар взаимно ортогональных стоячих волн [2]. В жидкости, глубина которой меньше длины волны, с увеличением амплитуды внешнего поля в капиллярной ряби возникают дислокации. Само возникновение дислокаций связывается с сильным нелинейным затуханием, обусловленным существованием в капиллярной ряби пограничного слоя, толщина которого, вообще говоря, одного порядка с амплитудой волн и глубиной жидкости [3]. Структура дислокаций изучалась в работе [4]. Было установлено, что каждая дислокация — это связанное состояние из двух топологических зарядов одного знака.

*Работа была представлена на летней школе–семинаре "Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

Как показали наблюдения, в большей части области параметров дислокация типа “climb"(т. е. движущаяся вдоль волновых фронтов) всегда идет в сторону с большими k. Очевидно, при этом происходит уменьшение размеров области с большим k по сравнению с областью с меньшим k. Это означает, что в процессе нелинейной конкуренции мод происходит вытеснение моды с большим k модой с меньшим. “Glide motion"(т. е. скольжение дислокации поперек фронтов капиллярных волн) может происходить равновероятно в обе стороны. Образом пространственно—временного хаоса при возбуждении ряби в жидкости малой глубины может служить ансамбль взаимодействующих дислокаций — одна дислокация может рассеиваться на другой, дислокации могут аннигилировать или образовывать квазиустойчивые линейные цепочки [4].

С этой точки зрения дислокации в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби аналогичны дефектам, широко изучаемым в термоконвекции [5] и электрогидродинамической конвекции в жидких кристаллах [6]. В жидкости большой вязкости могут существовать различные (роликовые) структуры, в том числе и недавно обнаруженные спиральные волны [7, 8].

В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментального исследования возникновения дефектов и дрейф пространственных структур в слое жидкости плавно неоднородной глубины.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Эксперимент проводился для жидкостей в широком диапазоне вязкостей $\nu = 0{,}05{-}1{,}0$ см^2·с$^{-1}$ и в контейнерах различной формы: круглой — диаметром 16 см — и квадратной — 11 см. В качестве жидкости использовалось силиконовое масло различной вязкости с плотностью $\rho \sim 0{,}97$ г·см$^{-3}$ и коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma \sim 20$ дин·см$^{-1}$, а глубина жидкости менялась от 0,5 до 3 мм. Неоднородности дна имели вид клина, впадины и выпуклости. Средняя глубина слоя жидкости при этом была меньше или порядка длины капиллярных волн.

Приведем, в первую очередь, результаты эксперимента с жидкостью малой вязкости при неоднородности типа клина.

Так как порог параметрической генерации зависит от глубины жидкости, то теперь в разных областях жидкого слоя надкритичность будет различна. При неоднородности типа клина это позволяет одновременно наблюдать существование различных структур, характерных для различных надкритичностей. Если средняя надкритичность мала, то сначала возникают параметрические колебания в областях с большей глубиной, т. е. там, где надкритичность больше нуля, а затем колебания продвигаются в область меньшей глубины. При этом наблюдался дрейфовый поток жидкости, по-видимому, связанный с нелинейным затуханием волн на границе колебаний, что приводило к выравниванию средней глубины в пространстве. Это вызывало стационарный дрейф структур типа доменных стенок и дефектов в сторону увеличения глубины. На рис. 1а,б приведены фотографии пространственной структуры поля капиллярной ряби в последовательные моменты времени с интервалом 20 с в круглом контейнере, а на рис. 1в,г — в квадратном контейнере (угол наклона дна $\sim 2^\circ$).

На рис. 1а-г видно, что структура поля представляет собой два домена с квадратной решеткой капиллярных стоячих волн, разделенных доменной стенкой, состоящей из дефектов. Кроме того, на рис. 1в,г видны одиночные свободные дефекты. Из сравнения фотографий структур в последовательные моменты времени можно заметить, что структуры, содержащие доменные стенки и дефекты, дрейфуют как целое справа налево, в сторону увеличения глубины жидкости. Скорость дрейфа структур возрастала с увеличением амплитуды внешнего поля и при уменьшении средней глубины жидкости. На рис. 2 представлены измеренные экспериментально графики зависимости скорости дрейфа структур от амплитуды ускорения кюветы с жидкостью для различных средних глубин ($\langle h\rangle = 1{,}5 \div 3$ мм) с углом наклона ($\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}03$). Видно, что при средних надкритичностях ($\epsilon \sim 0{,}1 \div 0{,}5$) зависимость скорости дрейфа структур от амплитуды ускорения близка к линейной. С помощью взвешенных частиц

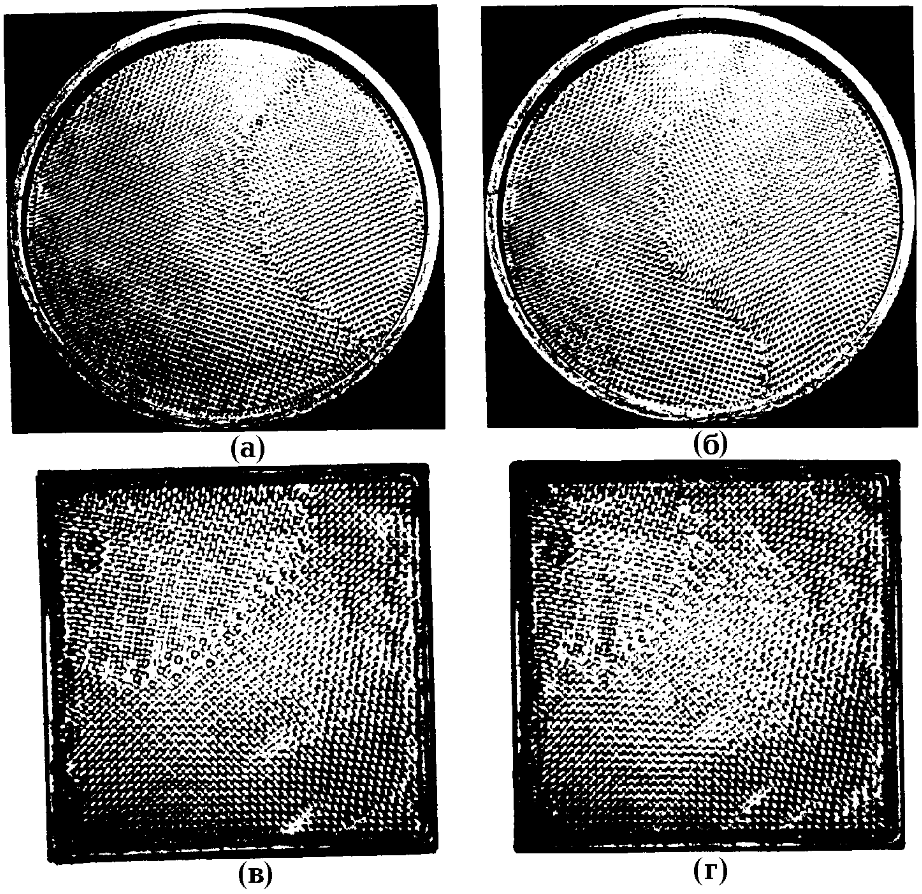


Рис. 1. Пространственная структура поля капиллярной ряби.

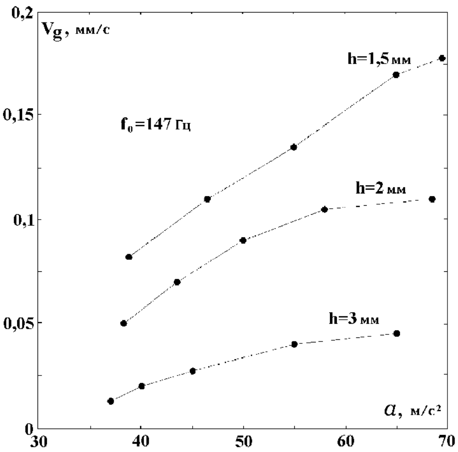


Рис. 2. Зависимость скорости дрейфа структур (v_g) от амплитуды ускорения кюветы для различных глубин.

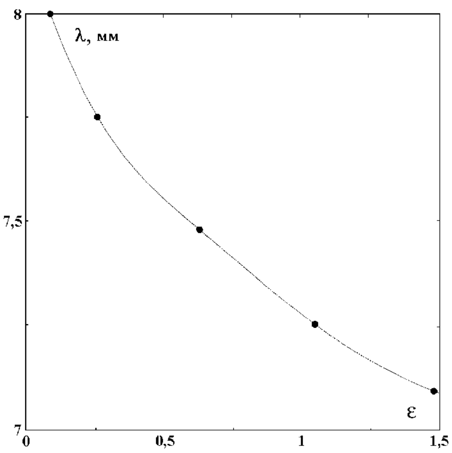


Рис. 3. Зависимость длины волны (λ) капиллярной ряби от надкритичности.

выяснено, что вблизи дна существует обратный дрейфовый поток жидкости, направленный в сторону уменьшения глубины. После включения внешнего поля дрейф структур устанавливался в течение конечного времени порядка нескольких секунд. При этом происходило частичное выравнивание жидкости по глубине за счет перетекания жидкости от глубоких мест в более мелкие. Об этом свидетельствовал и тот факт, что длина волны в глубоком месте кюветы уменьшалась при увеличении амплитуды внешней силы.

На рис. 3 представлена такая зависимость длины волны капиллярной ряби от надкритичности для круглой кюветы с ямкой в центре. Особо отметим поведение одиночных дефектов. Они обладают собственным движением и в однородной по глубине жидкости, а скорость их движения сравнима со скоростью дрейфа структур. В результате сложения этих двух движений наблюдались ситуации, когда дефект относительно кюветы почти останавливался, если направление его собственного движения было противоположно направлению дрейфа структур.

При увеличении средней надкритичности самопроизвольно возникали волны модуляции, дефекты и домены, причем основными источниками их в первую очередь являлись области с большими надкритичностями. В жидкости большой вязкости также существовали различные типы стационарных структур в зависимости от глубины слоя в пространстве. В частности, в кювете с вогнутым дном возникала структура, у которой в середине кюветы налюдался хаос дефектов, а на периферии существует устойчивая спиральная структура.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы экспериментально исследовали возникновение дефектов пространственных структур при параметрическом возбуждении на поверхности слоя жидкости плавно неоднородной глубины. Выяснено, что при увеличении амплитуды внешней силы источниками дефектов становятся, в первую очередь, области с большей глубиной, т. к. надкритичность там выше. При неоднородности типа клина в жидкости малой вязкости наблюдался стационарный дрейф структур типа доменных стенок и дефектов, связанный с дрейфовым потоком жидкости, возникающим из-за нелинейного затухания волн на границе колебаний. В жидкости большей вязкости в кювете с вогнутым дном возникала структура, у которой в середине кюветы наблюдался хаос дефектов, а на периферии существует устойчивая спиральная структура.

Авторы признательны М. И. Рабиновичу и А. Б. Езерскому за постоянный интерес к работе и плодотворные дискуссии.

Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96–05–64551) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № 96–15–96593).

ЛИТЕРАТУРА

1. Faraday M. //Philos. Trans. R. Soc., 1831. V. 121. P. 299.
2. Левин Б. В., Трубенков Б. А. //Письма в ЖЭТФ, 1986. Т. 44. № 7. С. 311.
3. Ezersky A. B., Kiyashko S. V., Matusov P. A., Rabinovich M. I. //Europhys. Lett., 1994. V. 26. № 3. P. 183.
4. Ezersky A. B., Ermoshin D. A., Kiyashko S. V. Dynamics of defects in parametrically excited capillary ripples. //Phys. Rev. E, 1995. V. 51. № 4.
5. Whitehead J. A. //Phys. Fluids, 1983. V. 26. № 10. P. 2899.
6. Rasenat S., Steinberg V., Rehberg I. //Phys. Rev. A, 1990. V. 42. № 10. P. 5998.

7. Кияшко С. В. — В кн.: Нелинейные волны. Синхронизация и структуры. Ч. 1. — Н. Новгород, 1995. С. 103.
8. Kiyashko S. V., Korzinov L. N., Rabinovich M. I., Tsimring L. S. //Phys. Rev. E, 1996. V. 54. № 5. P. 5037.

Институт прикладной физики РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
1 октября 1998 г.

DEFECTS AND DRIFT OF STRUCTURES IN PARAMETRICALLY EXCITED CAPILLARY RIPPLES

S. V. Kiyashko

The onset of defects is investigated experimentally in a system of capillary waves parametrically excited in a thin layer of fluid in a cavites with different bottom topography. The experiment has verified that the onset of defects occurs through the excitation the local region of the wave field corresponding to the areas with higher depths. The drift of defects and structures is associated with the flow of mass near the bottom which is generated by rapidly decaying surface waves.

УДК 539.219.3:621.382

МЕТОД ЛОКАЛЬНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ВОЗМУЩЁННЫХ ШУМОМ МАЛОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ*

А. В. Половинкин

Предложен метод локальной статистической эквивалентности, позволяющий в некоторых случаях, при условии малой интенсивности шумового воздействия, свести анализ статистических характеристик индуцированных шумом переходов в динамических системах к решению аналогичной задачи в более простых для такого анализа системах. Для системы связанных бистабильных элементов получены (и сравниваются с результатами численного моделирования) аналитические выражения оценки средних времен происходящих при изменении параметра переходов, являющихся аналогами нестационарных фазовых переходов I и II рода.

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА

Предположим, что переменные $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, характеризующие состояние динамической системы, подверженной изотропному шумовому воздействию, удовлетворяют уравнениям Ланжевена

$$\dot{x_i} = a_i(p_1, \ldots, p_m, \vec{x}) + \sqrt{b}\xi_i(t)\,, \quad b \ll 1, \tag{1}$$

где $a_i(p_1, \ldots, p_m, \vec{x})$ — детерминированные составляющие обобщенной силы, влияющей на состояние системы (коэффициенты сноса), b — интенсивность шумового воздействия, $\xi_i(t)$ — компоненты белого гауссового шума с корреляционной функцией $\langle\xi_i(t)\xi_j(t+\tau)\rangle = \delta_{ij}\delta(\tau)$, δ_{ij} — символ Кронекера, $p_0 = b, p_1, \ldots, p_m$ — параметры.

Поставим задачу исследовать статистические характеристики переходов между окрестностями состояний равновесия невозмущенной динамической системы, в которых при малых значениях b изображающая точка системы может пребывать относительно долгое время.

Известно (см., например, [1–3]), что при $b \to 0$ наибольший вклад в плотность вероятности переходов в системах типа (1) вносят траектории, проходящие вблизи некоторых экстремальных траекторий $\vec{x}(t) = = \vec{x}_e(t)$, вдоль которых функционал $S(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \int_0^t \frac{1}{2b} \sum_{i=1}^{n} [\dot{x}_i - a_i(\vec{x})]^2\, dt'$ достигает своего минимального значения. Нетрудно показать, что скорость движения по таким траекториям подчиняется закону сохранения “энергии":

$$\sum_{i=1}^{n} (\dot{x}_{e_i})^2 - a^2(\vec{x}_e) = C = \mathrm{const} > 0. \tag{2}$$

Для происходящих на большом интервале времени переходов между небольшими окрестностями состояний равновесия (в каждом из которых $\vec{a}(\vec{x}) = 0$) константа C в правой части последнего равенства должна быть малым параметром (что обеспечивает малую, в среднем, скорость перехода). То есть при таких переходах скорость движения по экстремальным траекториям должна удовлетворять одному из двух условий:

*Работа была представлена на летней школе—семинаре “Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

1. $\dot{\vec{x}}_e \simeq \vec{a}(\vec{x}_e)$ (в терминологии [3] — это anti-instanton trajectory). В данном случае экстремальная траектория близка к траектории динамической системы. В дальнейшем, для краткости, мы будем говорить, что переход происходит вдоль траектории динамической системы.

2. $\dot{\vec{x}}_e \simeq -\vec{a}(\vec{x}_e)$ (в терминологии [3] — instanton trajectory). В дальнейшем в этом случае будем говорить, что происходит переход, антипараллельный траекториям динамической системы. В обоих случаях при расчетах статистических характеристик переходов между состояниями равновесия системы (1) определяющую роль играют свойства системы вблизи динамических траекторий, соединяющих данные состояния равновесия (вблизи неустойчивых сепаратрис седла). Это позволяет заменить реальную систему на локально (для данной области значений параметров и данного конретного перехода) статистически эквивалентную ей, но более простую для исследования статистических характеристик данного перехода. При этом вблизи самих состояний равновесия мы можем либо линеаризовать систему (при значениях параметров, далеких от бифуркационных), либо (вблизи точек бифуркации) представить векторное поле динамической системы с использованием метода нормальных форм.

2. СРЕДНИЕ ВРЕМЕНА ПЕРЕХОДОВ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (АНАЛОГ ПЕРЕХОДОВ II РОДА)

Для иллюстрации возможностей сформулированного выше метода локальной статистической эквивалентности рассмотрим класический пример системы двух связанных бистабильных элементов, для описания которой в системе стохастических уравнений Ланжевена (1) надо положить

$$n = 2, \quad a_i(\vec{x}) = x_i - x_i^3 + d(x_j - x_i), \quad i, j = 1, 2, \quad j \neq i. \tag{3}$$

Предположим, в начальный момент времени параметр d меняет свое значение от $d = d_1 = 0$ до $d = d_2 > 1/2$ (аналогичная задача, где на парциальные бистабильные подсистемы накладывается “сильная"связь, возникает, например, при исследовании явления динамического копирования [4]). Данное изменение параметра соответствует происходящему изменению фазового портрета системы связанных бистабильных элементов в результате двух последовательных бифуркаций коразмерности 2: от изображенного на рис. 1а до портрета, изображенного на рис. 1б. При этом, если система первоначально (при $d = 0$) находится в состояниях равновесия O_4 или O_5, соответствующих противоположной “ориентации"парциальных бистабильных подсистем, то при $d > 1/2$ под влиянием синергетического воздействия динамических свойств системы и флуктуаций изображающая точка системы переходит вначале в окрестность седла O_1, а затем — в окрестность одного из двух устойчивых состояний равновесия: O_2 или O_3.

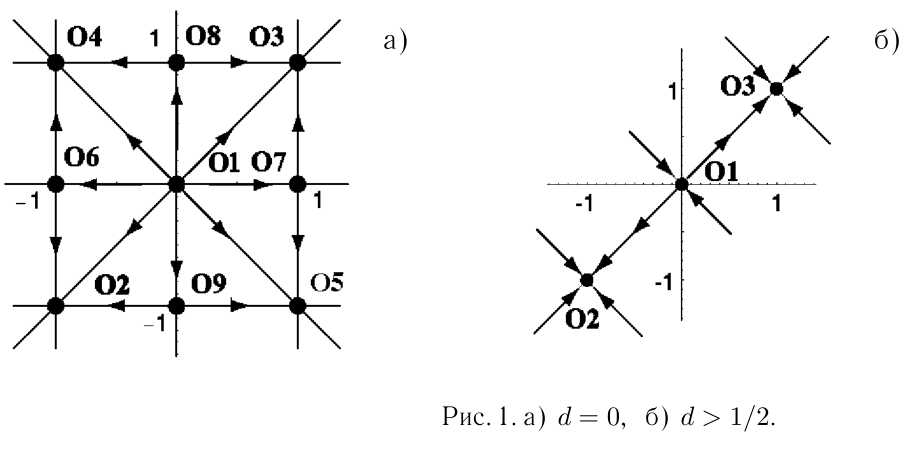


Рис. 1. а) $d = 0$, б) $d > 1/2$.

Определим, во-первых, среднее время такого перехода $\langle T\rangle$ и, во-вторых, среднее время жизни $\langle\tau\rangle$ при $d = d_2 > 1/2$ метастабильных состояний O_2 и O_3 (т. е. среднее время переходов $O_2 \rightleftarrows O_3$).

Начнем с решения первой задачи. Представим $\langle T\rangle$ в виде

$$\langle T\rangle = \langle T_1\rangle + \langle T_2\rangle, \tag{4}$$

где $\langle T_1\rangle$ — среднее время перехода в ρ — окрестность седлового состояния равновесия O_1 (значение ρ выберем удовлетворяющим условию $b \ll \rho \ll 1$), и $\langle T_2\rangle$ — среднее время перехода из окрестности седлового состояния равновесия в окрестость одного из двух устойчивых узлов: O_2 либо O_3.

Оценим $\langle T_1\rangle$ и $\langle T_2\rangle$. Очевидно, $\langle T_1\rangle \sim \ln(1/\rho)$ не зависит от интенсивности шума b. Для определения $\langle T_2\rangle$ перейдем к координатам

$$x_+ = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}, \quad x_- = (x_2 - x_1)/\sqrt{2} \tag{5}$$

и отметим, что смещение от седла O_1 к устойчивому узлу O_2 (либо O_3) есть движение в окрестности одной из двух неустойчивых сепаратрис седла, т. е. в окрестности оси $0x_+$. Используя (1) и (3), запишем уравнение для переменной x_+:

$$\dot{x}_+ = x_+(1 - 1{,}5x_-^2) - 0{,}5x_+^3 + \sqrt{b}\eta_1(t)\,, \tag{6}$$

где $\eta_1 = (\xi_1 + \xi_2)/\sqrt{2}$, $\eta_2 = (\xi_2 - \xi_1)/\sqrt{2}$. Легко видеть, что при этом $\langle\eta_1(t)\eta_2(t+\tau)\rangle = \delta_{ij}\delta(\tau)$ (вследствие ортонормированности преобразования $x_1, x_2 \to x_+, x_-$). Учтем, что в силу выбора ρ при $x_+ \sim 1$ выполняется условие $|x_+x_-^2| < \rho \ll 1$, поэтому временные статистические характеристики движения в окрестности неустойчивой сепаратрисы седла могут быть найдены из локально статистически эквивалентной одномерной задачи исследования перехода из окрестности неустойчивого ($x_+ = 0$) в окрестность устойчивого состояния равновесия ($x_+ = \sqrt{2}$) в случае, когда уравнение движения задается в виде

$$\dot{x}_+ = a(x_+) + \sqrt{b}\eta_1(t) = x_+ - 0{,}5x_+^3 + \sqrt{b}\eta_1(t)\,. \tag{7}$$

Отметим, что данный тип переходов $\Big($сопровождающихся нарушением симметрии при выходе из окрестности неустойчивого состояния равновесия — области максимума обобщенного потенциала $U(x_+) = -\int a(x_+)dx_+\Big)$ часто рассматривается как аналог нестационарных переходов II рода [5—7]. Среднее время такого перехода может быть найдено по формуле, полученной в [8]:

$$\langle T_2\rangle = \frac{1}{2\beta}\,[C + \ln 2] + \int\limits_{x_{\max}+\sqrt{b/(2\beta)}}^{x_{\min}-\sqrt{b/(2\alpha)}} \frac{dv}{a(v)} + \frac{1}{2\alpha}\,[C + \ln 2]\,, \tag{8}$$

где $C = 0{,}577$ — константа Эйлера, $x_{\max}$ — координата области максимума, $x_{\min}$ — координата области минимума потенциала $U(x)$, $\beta = |U''_{xx}(x_{\max})|$, $\alpha = |U''_{xx}(x_{\min})|$. С использованием (8) и (7) величина $\langle T_2\rangle$ легко вычисляется:

$$\langle T_2\rangle = \frac{3}{2}\,C + 2\ln 2 - \frac{3}{4}\ln b. \tag{9}$$

Поскольку $\langle T_2\rangle$ логарифмически возрастает с уменьшением b, а $\langle T_1\rangle$ не зависит от интенсивности шумового воздействия, то с учетом (4) при достаточно малых значениях b среднее время $\langle T\rangle$ перехода $O_{4,5} \to O_{2,3}$ после изменения параметра d от $d = 0$ до $d > 1/2$ также может быть выражено формулой (9).

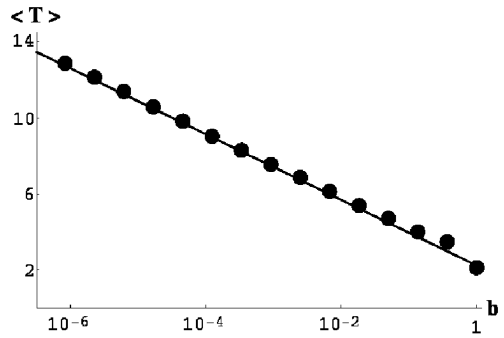


Рис. 2.

Из сравнения полученной зависимости (9) с данными численного эксперимента (см. рис. 2, где приведен результат усреднения по 10^3 реализациям для $d_2 = 1$) видно, что (9) хорошо согласуется с численными результатами при $b < 10^{-1}$.

3. СРЕДНИЕ ВРЕМЕНА ПЕРЕХОДОВ, АНТИПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЯМ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (АНАЛОГ ПЕРЕХОДОВ I РОДА)

Перейдем к решению второй задачи — определению среднего времени жизни $\langle\tau\rangle$ метастабильных состояний O_2 и O_3 при $d = d_2 > 1/2$ (являющейся аналогом задачи о нестационарных переходах I рода). Используя приведенное в [9] выражение для темпа выхода из окрестности метастабильного состояния равновесия $\vec{x}^{(A)}$ через окрестность седловой точки $\vec{x}^{(S)}$:

$$k = \frac{1}{\langle\tau\rangle} = \sqrt{\left(\lambda_1^{(A)}\lambda_2^{(A)}\,\lambda_{\rm unst}^{(S)}\right)\Big/\left(2\pi\lambda_{\rm st}^{(S)}\right)}\,, \tag{10}$$

где $\lambda_{\rm unst}^{(S)}$, $\lambda_{\rm st}^{(S)}$ и $\lambda_i^{(A)} = \lambda_{i\,\rm st}^{(A)}$ — значения собственных чисел, соответствующие неустойчивым (unstable) и устойчивым (stable) движениям линеаризованной (при $b = 0$) системы (1) вблизи седлового и метастабильного состояний равновесия, — приходим к парадоксальному результату: $\langle\tau\rangle = 1/k$ стремится к нулю при $d \to 1/2$. Причина этого результата в том, что при бифуркационном значении $d = 1/2$ в точке $O_1(x_1^{(A)} = x_2^{(A)} = 0)$ величина $\lambda_{\rm st}^{(S)}$ обращается в нуль, следовательно, формула (10) становится неприменима.

Для оценки границ применимости выражения (10), а также определения корректного при $d \simeq 1/2$ приближенного аналитического выражения для τ выразим темп выхода k через соответствующую (1) плотность вероятности переходов $W(\vec{x}_1,\tau;\vec{x}_2,t)$ из точки $\vec{x}_1$ в точку $\vec{x}_2$ за время $t-\tau$, удовлетворяющую уравнению Фоккера—Планка [11]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_i}[a_i(\vec{x})W] + \frac{b}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} \tag{11}$$

с начальным условием $W(\vec{x}_1,0;\vec{x}_2,0) = \delta(\vec{x}_2-\vec{x}_1)$. Вводя локальные координаты $y_\perp$, $\vec{y}_\parallel$ отклонения от седла соответственно в области устойчивого многообразия седла ($\vec{y}_\parallel$) и в перпендикулярном этому многообразию направлении ($y_\perp$) и учитывая выражение для плотности потока вероятности $\vec{G} =$

$\dfrac{b}{2}\vec{\nabla}W + \vec{a}(\vec{y})W$, где $\vec{y} = (y_\perp, y_{\parallel 1}, \ldots, y_{\parallel n-1})$, $\vec{\nabla}W$ — градиент W, представим темп выхода в виде

$$k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\perp(0, \vec{y}_\parallel) d\vec{y}_\parallel = \frac{b}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial W(\vec{x}^{(A)}, 0; \vec{x}^{(S)} + \vec{y}, t)}{\partial y_\perp}\right|_{y_\perp = 0} d\vec{y}_\parallel\,, \qquad (12)$$

где $G_\perp(y_\perp, \vec{y}_\parallel)$ — проекция потока вероятности на направление $y_\perp$, а интегрирование ведется по всем переменным $y_{\parallel i}$

С использованием соотношения взаимности для решений уравнения Фоккера—Планка [10]

$$W(\vec{x}_1, \tau; \vec{x}_2, t) = \exp\left\{-\frac{2}{b}\left[U(\vec{x}_2) - U(\vec{x}_1)\right]\right\} W(\vec{x}_2, \tau; \vec{x}_1, t), \qquad (13)$$

которое в рассматриваемом нами случае является одной из возможных форм записи уравнения детального баланса [11], в случае, когда движения системы вдоль $y_\perp$ и $\vec{y}_\parallel$ вблизи седловой точки $\vec{x}^{(S)}$ являются независимыми, и в этой точке направления оси $0y_\perp$ и неустойчивой сепаратрисы седла совпадают, выражение (12) может быть преобразовано к виду

$$k = \frac{b}{2} W(\vec{x}_A)^{(\mathrm{c})}_{\mathrm{st}} I_\parallel I_\perp^{-1} \exp\left\{-\frac{2}{b}\left[U(\vec{x}^{(S)}) - U(\vec{x}^{(A)})\right]\right\}, \qquad (14)$$

где $W(\vec{x}_A)^{\mathrm{c}}_{\mathrm{st}}$ — значение стационарной плотности вероятности в точке $\vec{x} = \vec{x}^{(A)}$, вычисленное при условии, что изображающая точка системы не выходит из области притяжения $\vec{x}^{(A)}$,

$$\begin{aligned} I_\parallel &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2}{b}\left[U(0, \vec{y}_\parallel) - U(0,0)\right]\right\} d\vec{y}_\parallel\,, \\ I_\perp &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{2}{b}\left[U(y_\perp, 0) - U(0,0)\right]\right\} dy_\perp\,. \end{aligned} \qquad (15)$$

Ограничиваясь вблизи O_1 в уравнениях для $y_\perp$ и $y_\parallel$ (совпадающих с введенными ранее переменными x_+, x_- (см. (5))) первыми неисчезающими при $d \to 1/2$ слагаемыми, найдем, что при $b \to 0$, $d \geq 1/2$ в окрестности O_1 поведение системы связанных бистабильных элементов описывается локально статистически эквивалентной системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_\perp &= y_\perp + \sqrt{b}\eta_1(t)\,, \\ \dot{y}_\parallel &= (1-2d)y_\parallel - y_\parallel^3/2 + \sqrt{b}\eta_2(t)\,. \end{aligned} \qquad (16)$$

Согласно (16), в используемом приближении перемещения изображающей точки системы вдоль $y_\perp$ и $y_\parallel$ вблизи $\vec{x}^{(S)}$ являются независимыми, поэтому для вычисления среднего времени жизни метастабильного состояния O_2 (O_3) применимо выражение (15) (сплошная кривая на рис. 3). Как видно из рис. 3, выражение (14), в отличие от (10), изображенного на рисунке пунктиром, качественно верно воспроизводит зависимость $\langle\tau(d)\rangle$, полученную путем численного моделирования системы (3) для $b = 0{,}15$ как при $d > 1/2$, так и при $d \sim 1/2$.

В случае $(2d-1)/b \gg 1$ при вычислении $I_\parallel$ можно воспользоваться методом перевала (т. е. при разложении в ряд в подынтегральном выражении (14) функции $U(0, \vec{y}_\parallel) - U(0,0) = (2d-1)y_\parallel^2/2 -$

$y_{\|}^4/8$ оставить только квадратичные слагаемые), при этом зависимость (14) переходит в (10), и оба выражения могут быть использованы для оценки значений $\langle\tau(d)\rangle$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96–02–18041).

ЛИТЕРАТУРА

1. Stratonovich R. L. — In: Noise in Nonlinear Dynamical Systems /Eds. by F. Moss and P. V. E. McClintock. — Cambridge University Press, 1989. V. 1. P. 16.
2. Talkner P. // Z. Phys. B, 1987. V. 68. P. 201.
3. Maier R. S. and Stein D. L. //Phys. Rev. E, 1993. V. 48. P. 931.
4. Некоркин В. И., Казанцев В. Б., Веларде М. Г. //Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 1997. Т. 5. С. 56.
5. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.
6. Хакен Г. Лазерная светодинамика. — М.: Мир, 1988.
7. Suzuki M. //Phys. Lett., 1978. V. 67A. P. 339.
8. Половинкин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 1–2. С. 153.
9. Hanggi P., Talkner P., Borkovec M. // Rev. Mod. Phys. 1990. V. 62. № 2. P. 251.
10. Половинкин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1991. Т. 34. № 8. С. 153.
11. Risken H. The Fokker-Planck Equation. — Berlin: Springer–Verlag, 1986.

Нижегородский государственный университет, Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 19 октября 1998 г.

A METHOD OF LOCAL STATISTICAL EQUIVALENCE AND INDUCED TRANSITIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS, PERTURBED BY WEAK NOISE

A. V. Polovinkin

A method of local statistical equivalence is proposed, allowing in some cases under condition of small noise intensity to reduce the analysis of the statistical characteristics of noise-induced transitions in dynamical systems to the solution of a similar task in more simple for such analysis systems. For a system of connected bistable elements we have obtained (and compared to the results of numerical modeling) the analytical expressions to estimate the average times of transitions being analogues of non-stationary phase transitions of I and II order.

ДИНАМИКА ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ В РАМКАХ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА*

Е. М. Громов, Л. В. Пискунова, В. В. Тютин

В работе приводятся результаты численного исследования эволюции волновых пакетов и взаимодействия солитонов огибающей в рамках нелинейного уравнения Шредингера третьего порядка. Показано, что произвольный волновой пакет эволюционирует к нескольким солитонам и линейной квазипериодической волне. Взаимодействие солитонов сопровождается излучением из области взаимодействия части волнового поля в виде линейной квазипериодической волны, усилением солитона с бóльшей амплитудой и ослаблением с меньшей.

ВВЕДЕНИЕ

Распространение интенсивных высокочастотных волн в диспергирующей среде $\Phi = \psi(x,t)\exp(i\omega_0 t - ik_0 x)$ с малыми пространственными и временными масштабами неоднородности огибающей $\psi(x,t)$ может быть описано в третьем приближении теории дисперсии нелинейных волн [1]. В этом приближении огибающая $\psi(x,t)$ в системе отсчета, движущейся с линейной групповой скоростью $V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}}$, описывается нелинейным уравнением Шредингера третьего порядка (НУШ-3)

$$2i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \beta|\psi|^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \mu\psi\frac{\partial|\psi|^2}{\partial\xi}\right) + q\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + 2\alpha|\psi|^2\psi + i\gamma\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} = 0, \tag{1}$$

где $\xi = x - V_{\mathrm{g}}^{\mathrm{L}} t$, q — параметр линейной дисперсии второго порядка, α — параметр кубичной нелинейности и γ — параметр линейной дисперсии третьего порядка. Последние два члена в скобках в (1) (с параметрами β и μ) отвечают зависимости локальной групповой скорости волны от ее интенсивности $|\psi|^2$ (нелинейная дисперсия).

Стационарные волны в рамках НУШ-3 исследовались как численно [2], так и аналитически [3—13]. В работе [2] рассматривалось солитонное решение с пространственной модуляцией волнового числа при $q = 0$ и $\beta = \mu = 0$. Анализ уравнения (1) методом обратной задачи рассеяния [3] с нахождением точных N-солитонных решений был проведен в трех случаях: 1) при $\alpha = q = 0$ и действительной функции ψ уравнение (1) сводится к модифицированному уравнению Кортевега — де Вриза [4, 5]; 2) при $\mu = 0$ и $q\beta - 3\gamma\alpha = 0$ (условия Хироты) уравнение (1) анализировалось Хиротой в [5]; 3) при $q = 1$, $\alpha = 1$, $2\beta = 6\gamma$ и $2\mu = 3\gamma$ уравнение (1) анализировалось Сасой и Сатсумой в [6]. Два случая возмущенного НУШ анализировались в [7, 8]: при $\gamma = 0$ и $\beta = \mu$ — в [7], а при $\mu = \gamma = 0$ — в [8].

Другой аналитический метод исследования НУШ-3, основанный на сведении этого уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, был применен в [9—13]. Так, найдены солитоны с пространственной модуляцией волнового числа ($\gamma = 0$) при $\beta = \mu$ в [9] и при произвольных коэффициентах β и μ в [10]. Солитонные решения с немодулированным волновым числом найдены в следующих трех случаях: 1) при $q = 0$ — в [11], 2) на линейном профиле потенциала и при выполнении условий Хироты [12], 3) при произвольных коэффициентах уравнения — в [10]. В последнем случае солитонное решение имеет вид

$$\psi(\xi,t) = \frac{A_0}{\mathrm{ch}\left((\xi - Vt)\,A_0\sqrt{\Theta/3\gamma}\right)}\exp\left[i\Omega t + iK(\xi - Vt)\right], \tag{2}$$

*Работа была представлена на летней школе—семинаре “Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

$$K = \frac{q\Theta - 3\alpha\gamma}{6\mu\gamma},\ V = Kq - \frac{3}{2}\gamma K^2 + \frac{\Theta}{6}A_0^2,\ \Omega = \frac{\Theta}{3}A_0^2\left(q - 3K\gamma\right) + \frac{K^2}{2}\left(K\gamma - q\right),$$

где $\Theta = \beta + 2\mu$ — результирующий параметр нелинейной дисперсии. Решение (2) существует в среде с $\gamma\Theta > 0$. Стационарные волны с модулированным волновым числом, пропорциональным амплитуде волны $K \sim A$, были найдены в [13].

Динамика нестационарных волновых пакетов в рамках НУШ-3 анализировалась в [10] методом моментов и были получены соотношения для скорости и ускорения центра “масс"пакета. Однако эволюция огибающей нестационарных волновых пакетов и взаимодействие солитонов (2) в рамках НУШ-3 до настоящего времени не рассматривались.

В данной работе численно анализируется эволюция волновых пакетов и взаимодействие двух солитонов в рамках НУШ-3 (1).

1. ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Уравнение (1) решалось численно при начальных условиях в виде локализованного “sech—like"импульса с параболическим распределением фазы в пространстве

$$\psi\left(\xi, t{=}0\right) = \frac{A_0}{\mathrm{ch}\left(\xi/\Delta\right)}\exp\left(i\rho\xi^2\right) \qquad (3)$$

при различных величинах параметров начального импульса A_0, Δ, ρ и различных параметрах уравнения (1) α, β, μ, q, γ. На рис. 1 приведены распределения модуля волнового поля $|\psi|$ в различные моменты времени для пакета с исходной амплитудой $A_0 = 1$, шириной $\Delta = 1$ и $\rho = 1/\pi$ в рамках (1) при $\alpha = \beta = \mu = q = \gamma = 1$.

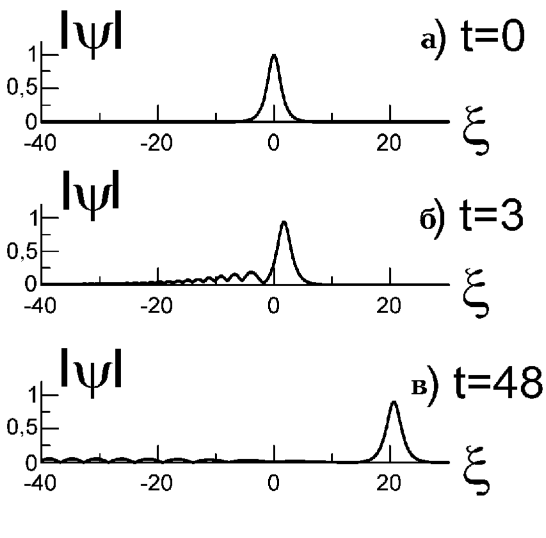


Рис. 1. Распределения модуля волнового поля $|\psi|$ в различные моменты времени в рамках (1) при единичных положительных параметрах уравнения для начального импульса (3) с параметрами $A_0 = 1, \Delta = 1$ и $\rho = 1/\pi$.

Видно, что исходный пакет (рис. 1а) трансформируется в одиночный локализованный импульс и квазипериодическую волну малой амплитуды (рис. 1в). Параметры одиночного импульса полностью соответствуют параметрам солитона (2) с амплитудой $A_0 \simeq 1{,}9$: величина скорости импульса $V \simeq 1{,}8$ соответствует скорости солитона (2) с нулевым сдвигом добавочного волнового числа $K = 0$.

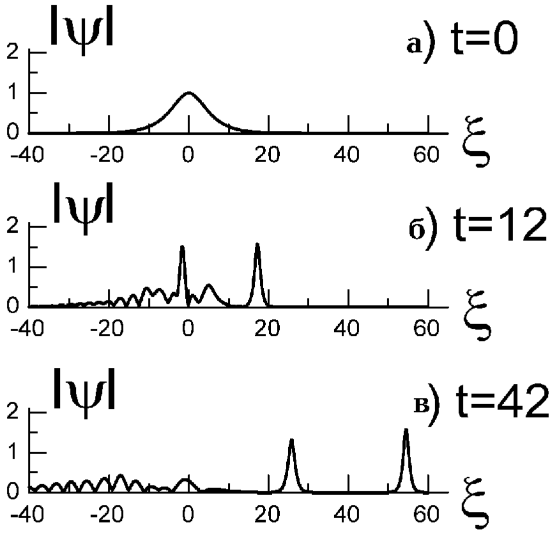


Рис. 2. То же, что на рис. 1, но при $\Delta = 4$.

Изменение параметров исходного пакета (3) в рамках (1) при $\gamma\Theta > 0$ изменяет лишь число и параметры солитонов, к которым эволюционирует исходный импульс. Это подтверждает устойчивость солитонов (2) к произвольным возмущениям. Исходный импульс с параметрами $A_0\Delta \leq 2$ эволюционирует к одному солитону и квазипериодической линейной волне, а при начальных параметрах $A_0\Delta \geq 2$ — к нескольким солитонам и квазипериодической волне. На рис. 2 приведены распределения модуля волнового поля $|\psi|$ в различные моменты времени для исходного импульса (3) с амплитудой $A_0 = 1$, шириной $\Delta = 4$ и $\rho = 1/\pi$ в рамках (1) с единичными положительными параметрами. В этом случае на больших временах из начального импульса образуются два солитона (рис. 2в) с амплитудами $A_{0_1} \simeq 1{,}55$ и $A_{0_2} \simeq 1{,}3$; они движутся соответственно со скоростями $V_1 \simeq 1{,}2$ и $V_2 \simeq 0{,}85$. Каждый из них описывается соотношением (2).

В рамках (1) с параметрами, удовлетворяющими неравенству $\gamma\Theta < 0$, солитонное решение (2) не существует и любой волновой пакет в этом случае эволюционирует к линейной волне с малой амплитудой и большой протяженностью.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ

Рассмотрим взаимодействие солитонов огибающей в рамках НУШ-3. Для этого представим распределение волнового поля в начальный момент времени $\psi\,(\xi, t{=}0)$ в виде разнесенных на значительное расстояние двух солитонов (2):

$$\psi\,(\xi, t{=}0) = \frac{A_1 e^{iK\xi}}{\mathrm{ch}\left[(\xi - \xi_1)\, A_1 \sqrt{\Theta/3\gamma}\right]} + \frac{A_2 e^{iK\xi}}{\mathrm{ch}\left[(\xi - \xi_2)\, A_2 \sqrt{\Theta/3\gamma}\right]}\,. \tag{4}$$

Здесь $A_{1,2}$ — соответственно амплитуды первого и второго солитонов, расстояние между солитонами $|\xi_2 - \xi_1|$ много больше ширины наиболее широкого солитона $1 \Big/ \left(A_2 \sqrt{\Theta/3\gamma}\right)$. Эволюция начального распределения (4) в рамках уравнения (1) исследовалась численно при $q = \gamma = \alpha = \beta = \mu = 1$ и при различных величинах амплитуд солитонов (4) в начальный момент времени.

На рис. 3, 4 приведены распределения модуля волнового поля $|\psi\,(\xi, t)|$ в различные моменты времени при одной начальной амплитуде левого солитона $A_1 = 1{,}5$ и различных значениях амплитуды правого солитона. Рис. 3 соответствует $A_2 = 1{,}3$, рис. 4 — $A_2 = 1$.

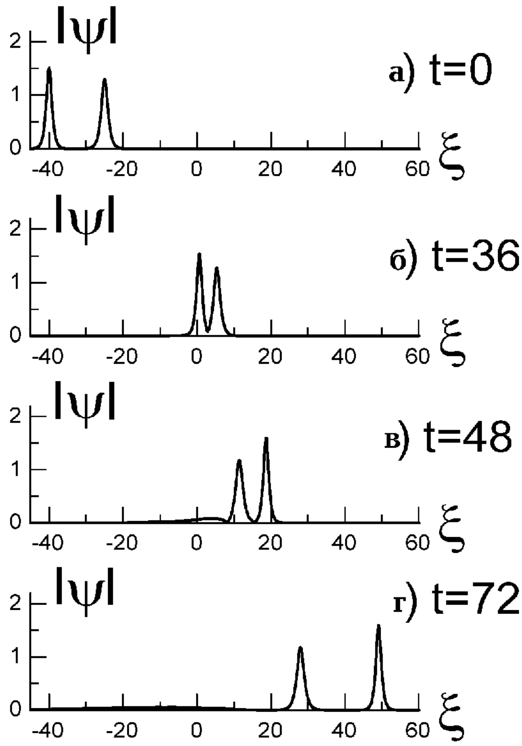


Рис. 3. Распределения модуля волнового поля $|\psi|$ в различные моменты времени при единичных положительных параметрах уравнения и при начальном распределении (4) с амплитудами $A_1 = 1{,}5$, $A_2 = 1{,}3$.

При малом отличии начальных амплитуд (и соответственно начальных скоростей) солитонов, отвечающих значению амплитуды правого солитона $A_2 = 1{,}3$ (рис. 3), поля взаимодействующих солитонов перекрываются незначительно (рис. 3б,в). В результате взаимодействия правый солитон усиливается, а левый — затухает. На больших временах после взаимодействия амплитуда правого солитона составляет 1,59 , а левого — 1,17. Из рис. 3г видно, что взаимодействие солитонов сопровождается излучением части волнового поля из области взаимодействия. Отсюда следует, что взаимодействие солитонов в рамках НУШ-3 носит неупругий характер и параметры солитонов после взаимодействия отличаются от первоначальных. Это отличает взаимодействие коротких солитонов огибающей в рамках НУШ-3 от взаимодействия солитонов в рамках хорошо известного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ).

Уменьшение начальной амплитуды правого солитона до 1,0 (рис. 4) существенно меняет характер взаимодействия солитонов. В этом случае поля взаимодействующих солитонов перекрываются полностью (рис. 4в), в результате чего меньший солитон разрушается, а бóльший солитон усиливается до значений амплитуды 1,9.

Таким образом, взаимодействие солитонов с нулевой начальной разностью фаз в рамках НУШ-3 сопровождается излучением части волнового поля из области взаимодействия солитонов и усилением бóльшего солитона. Солитон с меньшей амплитудой ослабевает, если отношение начальных значений амплитуд A_1/A_2 меньше критической величины $\Delta_c \simeq 1{,}36$, и разрушается при превышении этого значения.

Авторы выражают благодарность В. И. Таланову за полезные дискуссии и критические замечания.

Работа проводилась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты

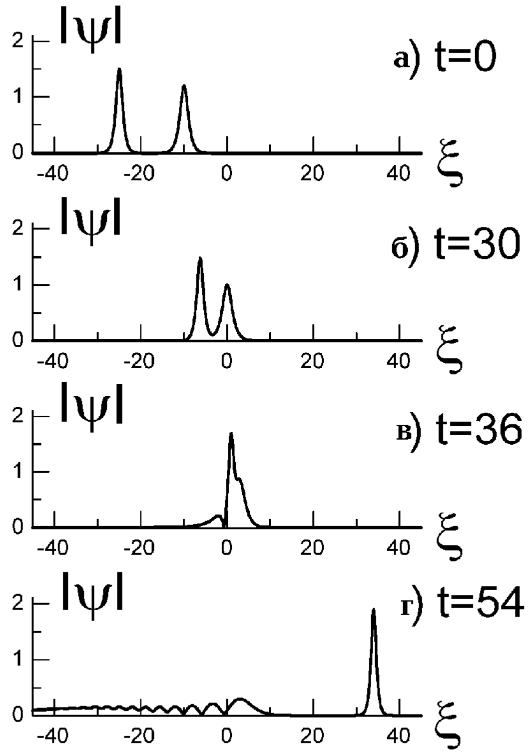


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но с амплитудами $A_1 = 1{,}5$, $A_2 = 1$.

№ 96–02–19609 и № 96–15–96592), Минобразования РФ (грант по исследованиям в области математики 1998 г.) и INTAS (грант № 96–2370).

ЛИТЕРАТУРА

1. Agraval G. P. Nonlinear Fiber Optics. — Academic, Orlando, Fla, 1989;
   Hasegava A. Optical Solitons in Fibers. — Berlin: Springer-Verlag, 1989.
2. Wai P. K. A., Menyuk C. R., Chen H. H., and Lee Y. C. //Opt. Lett., 1987. V. 12. P. 628.
3. Захаров В. Е., Шабат А. Б. //ЖЭТФ, 1972. Т. 34. С. 62.
4. Wadati M. //J. Phys. Soc. Jap., 1972. V. 32. P. 1681.
5. Hirota R. //J. Math. Phys., 1972. V. 33. P. 805.
6. Sasa N. and Satsuma J. //J. Phys. Soc. Jap., 1991. V. 60. P. 409.
7. Kaup D. J. and Newell A. C. //J. Math. Phys., 1978. V. 19. P. 798.
8. Chen H. H., Lee Y. C., and Liu C. S. //Physica Scripta, 1979. V. 20. P. 490.
9. Anderson D. and Lisak M. //Phys. Rev. A., 1983. V. 27. P. 1393.
10. Громов Е.М., Таланов В.И. //ЖЭТФ, 1996. Т. 110. С. 137;
    //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1996. Т. 39. С. 735.
11. Frantzeskakis D. J., Hizanidis K., and Polymilis C. //J. Opt. Soc. Am. B., 1995. V. 9. P. 687.
12. Gromov E. M. //Phys. Lett. A., 1997. V. 227. P. 67.
13. Gromov E. M., Tyutin V. V. //Wave Motion, 1998. V. 28. № 1. P. 13.

Институт прикладной физики РАН,
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
1 сентября 1998 г.

DYNAMICS OF WAVE PACKETS AND SOLITON INTERACTION IN THE FRAME OF THIRD – ORDER NONLINEAR SCHRÓDINGER EQUATION

E. M. Gromov, L. V. Piskunova, V. V. Tyutin

The dynamics of wave packets and envelope soliton interaction in the frame of third – order nonlinear Schródinger equation is considered using numerical methods. It is shown that any initial pulse tends to a few solitons plus a linear quasy-periodic wave. It is shown that interaction of the solitons is accompanied by radiation of a linear quasi-periodic wave from interaction region the greater soliton being increased and the smaller one being decreased.

УДК 621.373.1

АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В АНСАМБЛЕ СВЯЗАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ*

А. С. Кузнецов, В. Д. Шалфеев

Исследуется зависимость коллективной динамики ансамбля взаимосвязанных активных элементов от количества связей между ними. В качестве элементов, образующих ансамбль, рассматриваются нелинейные осцилляторы Чуа. Функция связи принята нелинейной. Рассмотрена зависимость эффектов регуляризации и подавления колебаний при переходе от глобальных связей в ансамбле к локальным.

ВВЕДЕНИЕ

Коллективной динамике ансамблей, образованных связанными между собой активными элементами, посвящено большое число публикаций, на фоне которых заметно выделяются работы, касающиеся процессов структурообразования [1]. Несомненно, что эти процессы тесно связаны с процессами синхронизации, подавления и возбуждения различных режимов. В частности, для больших ансамблей элементов с хаотической динамикой, например, некоторых ансамблей с синаптическими связями [2], характерно подавление хаотического поведения за счет эффектов синхронизации. В [3] была сделана попытка рассмотрения этого эффекта на модели ансамбля глобально связанных между собой хаотических осцилляторов Чуа [4]. Было установлено, что при введении глобальных связей между хаотическими элементами с ростом параметра связи наступает регуляризация динамики, характеризующаяся образованием пары кластеров, причем элементы внутри каждого кластера совершают синфазные колебания. При дальнейшем увеличении параметра связи происходит перераспределение элементов таким образом, что в пределе выживает один из кластеров, т. е. устанавливается однородный режим во всем ансамбле, а именно, состояние равновесия.

Целью настоящей работы является изучение процессов регуляризации с уменьшением числа связей, при переходе от глобальных связей к локальным.

*Работа была представлена на летней школе–семинаре "Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

1. ЦЕПОЧКА СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрим такую модель связанных осцилляторов, в которой изменением параметра возможно перейти от цепочки локально связанных элементов к ансамблю с глобальными связями. В качестве такой модели рассмотрим цепочку одинаковых осцилляторов Чуа, в которой каждый элемент связан с S правых и S левых соседних элементов:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \alpha\left[y_i - f(x_i)\right] + \frac{d}{2S}\sum_{k=1}^{S}\left(F(x_{i-k}) + F(x_{i+k})\right), \\ \frac{dy_i}{dt} &= x_i - y_i + z_i\,, \\ \frac{dz_i}{dt} &= -\beta y_i\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь i — номер элемента, $i = \overline{1,N}$, N — число элементов в системе, d — параметр связи между элементами. Выберем $N = 55$, а функцию связи возьмем следующего вида:

$$F(x) = \frac{2\gamma x}{1 + \gamma^2 x^2}\,, \tag{2}$$

где $\gamma = 3$. Нелинейность парциального элемента аппроксимируется гладкой функцией $f(x) = x + c_1 x^3 - \dfrac{2c_0 x}{1 + c_0^2 x^2}$.

Выберем параметры изолированного парциального элемента в области существования странного аттрактора, а именно, спирального аттрактора $\alpha = 6{,}4$, $\beta = 10$, $\gamma = 0$, $c_0 = 0{,}7$, $c_1 = 0{,}05$. Для того, чтобы предельным случаем системы (1) при $S = \dfrac{N-1}{2}$ являлась система с глобальными связями, необходимо потребовать периодичность граничных условий $x_{i-k} = x_{i-k+N}\ \forall\ i-k < 1$; $x_{i+k} = x_{i+k-N}\ \forall\ i+k > N$. Другой предельный случай системы (1) — цепочка локально связанных осцилляторов Чуа — реализуется при $S = 1$.

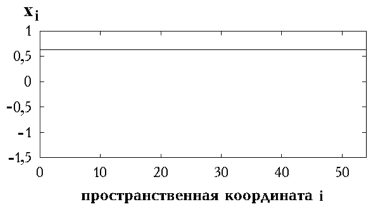
2. ОДНОРОДНЫЕ РЕЖИМЫ

Исследования системы (1) с глобальными связями [3] показали, что динамика ансамбля из элементов с хаотической динамикой в несвязанном состоянии при введении глобальных связей регуляризируется, при этом в такой системе реализуются два однородных режима: колебательный (активный) и состояние равновесия (пассивный). Область существования первого — $0{,}521 \le d \le 0{,}85$, а второго — $d \ge 0{,}56$. Нижние границы областей сушествования по параметру связи d мы назвали порогами синхронизации для данных режимов. В этих режимах соответствующие координаты парциальных элементов системы одинаковы:

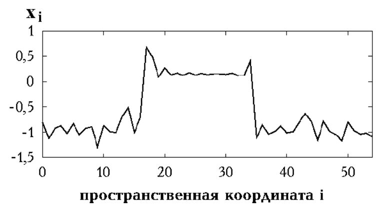
$$x_j = x(t), \quad y_j = y(t), \quad z_j = z(t); \quad j = \overline{1,N}. \tag{3}$$

Из системы (1) в случае однородного режима (3) получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha\left(y - f(x)\right) + dF(x), \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y. \end{aligned} \tag{4}$$



а)



б)

Рис. 1. Разрушение однородного активного режима при уменьшении числа связей S в системе при $d = 0{,}7$: а) $S \geq 2$, б) $S = 1$.

Область применимости данной маломерной модели (4) ограничена снизу по параметру связи порогом синхронизации, который составляет $d = 0{,}521$ для активного режима и $d = 0{,}56$ для пассивного.

Обратимся далее к изучению зависимости эффектов регуляризации в цепочке от числа связей. Рассмотрим сначала изменение однородного активного режима при уменьшении числа связей S в системе от глобальных к локальным. В результате компьютерного эксперимента, при фиксированном параметре связи $d = 0{,}7$ и изменении числа связей от $S = \dfrac{N-1}{2} = 27$ (случай глобальных связей) до $S = 1$ было получено, что при уменьшении S вплоть до $S = 2$ данный режим не разрушается, более того, его характеристики (среднее по времени и др.) не изменяются. Это вполне естественно, т. к. для системы (1), находящейся в однородном режиме (3) независимо от числа связей S, справедлива маломерная модель (4). Однако, следует ожидать, что с изменением S может меняться нижняя граница его области существования, т. е. порог синхронизации. При переходе от $S = 2$ к $S = 1$ однородный колебательный режим разрушается и в результате устанавливается асинхронный хаотический режим колебаний парциальных элементов (рис. 1). Причиной такого разрушения является переход через бифуркационное значение числа связей S, аналогичный переходу по параметру связи d через порог синхронизации. Обобщим понятие порога синхронизации на случай изменения числа связей как значение числа связей, при переходе через которое, при его уменьшении, рассматриваемый режим разрушается. Таким образом, при $d = 0{,}7$ порог синхронизации по числу связей для однородного активного режима составляет $S = 2$. При уменьшении параметра связи значение порога синхронизации по числу связей увеличивается.

Поскольку в системе существует целый ряд различных режимов с различными областями существования, следует ожидать, что она проявляет гистерезисные свойства. Действительно, увеличение числа связей от $S = 1$ при $d = 0{,}7$ вообще не приводит систему из асинхронного хаотического режима обратно в однородный активный режим, т. е. в результате такого перехода устанавливается один из неоднородных синхронных режимов.

Для исследования зависимости порога синхронизации по параметру связи от числа связей проведена серия экспериментов, в которых изменялся параметр связи d при различных фиксированных S. Эксперименты показали, что при уменьшении числа связей до $S = 2$ порог синхронизации слабо смещался вверх по параметру связи. Так при $S = \dfrac{N-1}{2}$ пороговое значение $d = 0{,}521$, а при $S = 2$ — пороговое значение $d \simeq 0{,}65$. В отличие от однородного пассивного режима область существования активного ограничена не только снизу, но и сверху по параметру связи. Причиной этого ограничения является, как следует из маломерной модели (4), исчезновение соответствующего данному режиму предельного цикла через седло — узловую бифуркацию предельных циклов. Таким образом, область существования данного режима при $S = \dfrac{N-1}{2}$ составляет $0{,}521 \le d \le 0{,}85$, а при $S = 2$ —

$$0{,}65 \le d \le 0{,}85. \tag{5}$$

Далее было установлено, что при переходе от $S = 2$ к $S = 1$ при любых параметрах связи из интервала (5) однородный активный режим разрушается (рис. 1). Причиной этого является переход через порог синхронизации по числу связей. Таким образом порог синхронизации по числу связей для однородного активного режима остается независимым от параметра связи в интервале (5), его значение $S = 2$. Другими словами, происходит резкое увеличение значения порога синхронизации по параметру связи.

Аналогичные эксперименты, проведенные для пассивного однородного режима — состояния равновесия, существующего при $S = \dfrac{N-1}{2}$, — показали, что с уменьшением числа связей S, при фиксированном параметре связи $d = 0{,}6$, такой режим разрушается при переходе от $S = 6$ к $S = 5$. То же разрушение при $d = 0{,}8$ происходит при переходе от $S = 2$ к $S = 1$. Как и в предыдущем случае, здесь имеет место гистерезис, т. к. увеличение числа связей от $S = 1$ при данных значениях параметра связи не приводит к восстановлению в системе однородного пассивного режима, здесь при разрушении асинхронного режима хаотических колебаний парциальных элементов устанавливается один из неоднородных синхронных. Кривая порога синхронизации для пассивного однородного режима на плоскости параметров d и S представлена на рис. 2. Таким образом, в этом случае тоже происходит резкое увеличение значения порога синхронизации по параметру связи в области, где число связей мало.

Обратимся теперь к изучению зависимости процессов регуляризации от величины параметра связи. Очевидно, что в системе (1), первоначально находившейся в одном из однородных режимов, уменьшением параметра связи d (так же как ранее уменьшением числа связей S) можно осуществить переход к асинхронному хаотическому режиму. Поскольку изменение S происходит дискретно, а изменение параметра связи d происходит непрерывно, то можно ожидать, что переход по параметру d будет содержать более богатую картину смены режимов, чем рассмотренный выше переход по числу связей S. Действительно, в ходе компьютерного эксперимента получено, что уменьшение параметра связи d может сопровождаться исчезновением однородного режима и возникновением различных синхронных неоднородных режимов с последующим переходом к асинхронным хаотическим колебаниям. Обратное изменение параметра d вызывает сначала возникновение синхронных неоднородных режимов и далее подавление колебаний, т. е. переход на однородный пассивный режим, причем эти переходы носят гистерезисный характер. Так, например, с уменьшением параметра связи, при прохождении порога синхронизации для однородного пассивного режима, последний разрушается (при $S = 1$, $d = 0{,}95$). В результате возникает один из синхронных неоднородных режимов. При дальнейшем уменьшении параметра связи этот установившийся режим также претерпевает разрушение. В конечном итоге устанавливается режим асинхронных хаотических колебаний парциальных элементов системы.

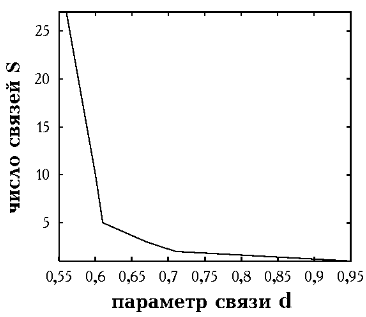
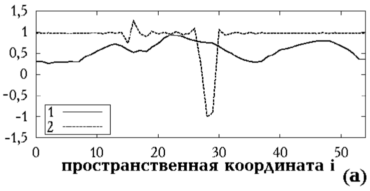
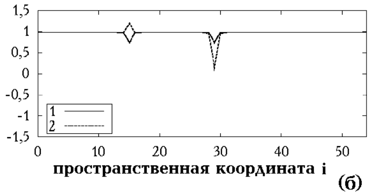


Рис. 2. Порог синхронизации (нижняя граница области существования) для однородного пассивного режима.

При движении по параметру связи d в сторону увеличения происходят аналогичные смены режимов, но они происходят уже при других значениях параметра связи (рис. 3). Разрушение асинхронного хаотического режима в случае локальных связей $S = 1$ имеет место при $d = 0{,}97$, а в случае глобальных — $d = 0{,}507$. В результате устанавливается один из синхронных неоднородных режимов, в





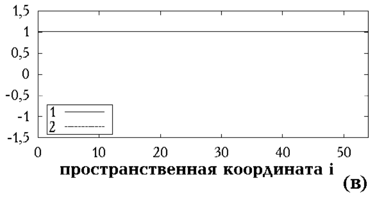


Рис. 3. Режимы, реализующиеся в системе (1) при увеличении параметра связи d от малых его значений при $S = 1$. 1 — Средние по времени значения координат x элементов системы, 2 — их мгновенные значения. а) — асинхронный режим при $d = 0{,}96$; б) — пара кластеров при $d = 0{,}97$; в) — однородный пассивный режим при $d = 1{,}27$.

зависимости от начальных условий. При дальнейшем увеличении параметра связи происходит последовательное разрушение этих режимов, вызывающее переходы между ними. В процессе таких переходов количество активных элементов в системе сокращается, в результате устанавливается однородное состояние равновесия. На рис. 3 приведен один из примеров такого перехода. Здесь при разрушении асинхронного хаотического режима ($S = 1$, $d = 0{,}97$) устанавливается режим, в котором все парциальные элементы цепочки, кроме двух, пассивны (рис. 3б). В этом случае однородный пассивный режим устанавливается при $d = 1{,}27$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные компьютерные эксперименты показали, что в исследуемой системе реализуется ситуация, в которой увеличением числа связей и параметра связи можно перейти из асинхронного режима хаотических колебаний элементов системы к синхронным как хаотическим, так и регулярным режимам и далее к состоянию равновесия. При уменьшении этих параметров реализуется обратный переход, но соответствующие бифуркационные точки в этих случаях не совпадают — проявляется гистерезисный характер явления.

Показано, что величина порога синхронизации по параметру связи резко увеличивается в области, где число связей мало. Значение параметра связи, при котором происходит разрушение асинхронного хаотического режима тоже растет с уменьшением числа связей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96—02—16559) и Программы поддержки ведущих научных школ (проект 96—15—96593).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович М. И., Езерский А. Б. Динамическая теория формообразования. — М.: Янус-К, 1998.
2. Рабинович М. И. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1996. Т. 39. № 6. С. 757.
3. Кузнецов А. С., Шалфеев В. Д. О структурообразовании и регуляризации в системе глобально связанных осцилляторов //Вестник Нижегородского университета, Нелинейная динамика — синхронизация и хаос: Вып. 2. — Н. Новгород, 1997. С. 84.
4. Chua's Circuit: a Paradigm for Chaos. World Scientific Series on Nonlinear Science. Series B. V. 1. /Ed. by R. N. Madan. — Singapore: World Scientific, 1993.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
1 октября 1998 г.

THE ANALYSIS OF REGULARIZATION PROCESSES IN AN ENSEMBLE OF COUPLED OSCILLATORS

A. S. Kuznetsov, V. D. Shalfeev

We investigate how collective dynamics of an ensemble of active elements depends on the number of connections between them. We take Chua's circuits as elements of our ensemble and couple them by nonlinear coupling. Regularization and collapse of oscillations are studied as we go from global to local coupling.

УДК 621.385.6

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЛАМПЫ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ ДВУХ МОД*

Н. С. Гинзбург, Н. И. Зайцев, Е. И. Иляков, И. С. Кулагин, Ю. В. Новожилова, Р. М. Розенталь, А. С. Сергеев

Исследована нелинейная динамика ламп обратной волны в режиме взаимодействия электронного потока с двумя поперечными модами. В области небольших превышений параметров над пороговыми значениями может наблюдаться стационарная генерация на одной из мод при подавлении другой моды, что находится в хорошем соответствии с экспериментальными наблюдениями конкуренции двух мод в релятивистской ЛОВ. Показано, что в широкой области параметров, где для каждой из мод в отдельности выполнены условия стохастической автомодуляции, нелинейная конкуренция может приводить к установлению одномодового стохастического режима генерации.

В данной работе рассматривается нелинейная динамика лампы обратной волны (ЛОВ) в условиях взаимодействия двух синхронных электронному пучку поперечных мод. В первой части работы исследуется достаточно традиционная задача о реализации одномодовых и двухмодовых режимов генерации в ЛОВ при относительно небольших превышениях параметров над пороговыми значениями. В этой части теоретическое рассмотрение сопоставляется с данными эксперимента, в котором наблюдалась конкуренция мод и последовательная смена стационарного режима генерации одной моды стационарным режимом генерации другой моды при изменении коэффициентов связи с каждой модой. Во второй части работы конкуренция мод исследована в условиях, когда для обеих мод в отдельности могут реализоваться режимы периодической или стохастической автомодуляции. Актуальность указанной задачи обусловлена, в частности, проводимыми в настоящий момент экспериментами по наблюдению стохастических режимов в мощных релятивистских ЛОВ. Значительные превышения над порогом, необходимые для реализации подобных режимов, делают практически неизбежным решение вопроса селекции мод по поперечному индексу. В этой связи найденная в работе область параметров, где нелинейная конкуренция приводит к установлению одномодового стохастического режима генерации, дает возможность достичь заметного прогресса в этом направлении создания источников мощного шумоподобного излучения.

Рассмотрим модель ЛОВ с электродинамической системой в виде отрезка гофрированного волновода круглого сечения, пронизываемой трубчатым электронным пучком. Предположим, что синхронными электронному пучку являются замедленные гармоники двух мод, для которых выполнено условие синхронизма

$$\omega_{1,2} = h_{1,2} V_0 \,, \tag{1}$$

где $\omega_{1,2}$, $h_{1,2}$ — частоты и волновые числа замедленных гармоник, V_0 — начальная скорость электронов. В сильном ведущем магнитном поле электроны взаимодействуют только с продольным электрическим полем, которое в области пучка может быть представлено в виде

$$E(z,t) = \mathrm{Re}\left[E_1 \exp(i\Theta_1) + E_2 \exp(i\Theta_2)\right] \,, \tag{2}$$

*Работа была представлена на летней школе—семинаре “Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

где $\Theta_{1,2} = \omega_{1,2}t - h_{1,2}z$ — фазы волн. В приближении нефиксированной структуры поля процесс конкуренции мод в ЛОВ может быть описан с помощью следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tau} - \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_0^{2\pi} \exp(-i\Theta_1)\, d\Theta_{1_0} d\Theta_{2_0}, \tag{3}$$

$$p_1\frac{\partial F_1}{\partial \tau} - \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} = -\frac{\sqrt{\nu p_2}}{2\pi^2}\iint\limits_0^{2\pi} \exp(-i\Theta_2)\, d\Theta_{1_0} d\Theta_{2_0}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \zeta^2} = -\operatorname{Re}\left[F_1 \exp(i\Theta_1) + p_2 F_2 \exp(i\Theta_2)\right], \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \zeta^2} = -\nu \operatorname{Re}\left[F_1 \exp(i\Theta_1) + p_2 F_2 \exp(i\Theta_2)\right], \tag{6}$$

с начальными и граничными условиями

$$F_{1,2}\Big|_{\tau=0} = F_{1_0,2_0}(\zeta), \quad \Theta_{1,2}\Big|_{\tau=0} = \Theta_{1_0,2_0} \in [0,\, 2\pi], \quad F_{1,2}\Big|_{\zeta=L} = 0.$$

Здесь использованы следующие нормированные переменные: $\zeta = = \dfrac{C_1\omega_1 z}{2c\gamma_0\sqrt{\gamma_0^2-1}}$ — продольная координата, L — безразмерная длина пространства взаимодействия в той же нормировке, $\tau = \dfrac{C_1\omega_1 t}{(1+V_0/V_1)2\gamma_0^2}$ — время, $F_{1,2} = \dfrac{4\gamma_0^2 eE_{1,2}}{C_{1,2}^2\omega_{1,2} mc\sqrt{\gamma_0^2-1}}$ — амплитуды полей, $V_{1,2}$ — групповые скорости волн, $C_{1,2} = \left(\dfrac{4\gamma_0^5 eJ|Z_{1,2}|}{(\gamma_0^2-1)mc^2}\right)^{1/3}$ — параметры Пирса, $Z_{1,2}$ — сопротивление связи с замедленной гармоникой каждой моды [4], $\nu = \omega_2/\omega_1$ — отношение частот точного синхронизма, γ_0 — начальный релятивистский фактор электронов, $p_1 = \dfrac{1/V_0 + 1/V_2}{1/V_0 + 1/V_1}$, $p_2 = \dfrac{C_2^2\omega_2}{C_1^2\omega_1}$. В дальнейшем полагаем моду с индексом “1"высокочастотной, с индексом “2-— низкочастотной.

Система уравнений (3)–(6) имеет четыре параметра, три из которых — p_1, p_2, ν — определяются различием частот и коэффициентов связи с модами, четвертый параметр L — это безразмерная длина системы. В отсутствие второй генерируемой моды ($p_2 = 0$) система уравнений (3)–(6) переходит в уравнения работ [1, 2], описывающие нелинейную динамику ЛОВ с одной поперечной модой. В этом случае поведение системы определяется единственным параметром — безразмерной длиной, с ростом которой система стартует (при $L = 2$), затем стационарная генерация сменяется периодической ($L = 3$) и далее (при $L \sim 5{,}5$) стохастической автомодуляцией. Результаты численного моделирования уравнений (3)–(6) представлены на рис. 1, где показано примерное разбиение плоскости параметров p_2 и L на области, соответствующие различным режимам генерации, при фиксированных значениях $p_1 = 0{,}525$ и $\nu = 0{,}8$. Заметим, что стартовое значение $L = 2$ и граница перехода к периодической автомодуляции $L = 3$ для ВЧ моды совпадают с полученными ранее для ЛОВ с одной поперечной модой [3, 4]. Для НЧ моды бифуркационные значения L несколько отличаются, что обусловлено спецификой нормировки в уравнениях (3)–(6).

Следует отметить, что рис. 1 является достаточно приближенной иллюстрацией всего многообразия режимов генерации, так что при детальном рассмотрении можно получить еще более мелкую структуру разбиения области параметров. Так, например, при изменении параметров в полосе генерации двух мод (при $3{,}6 < L < 6{,}4$) области стационарной генерации перемежаются вкраплениями

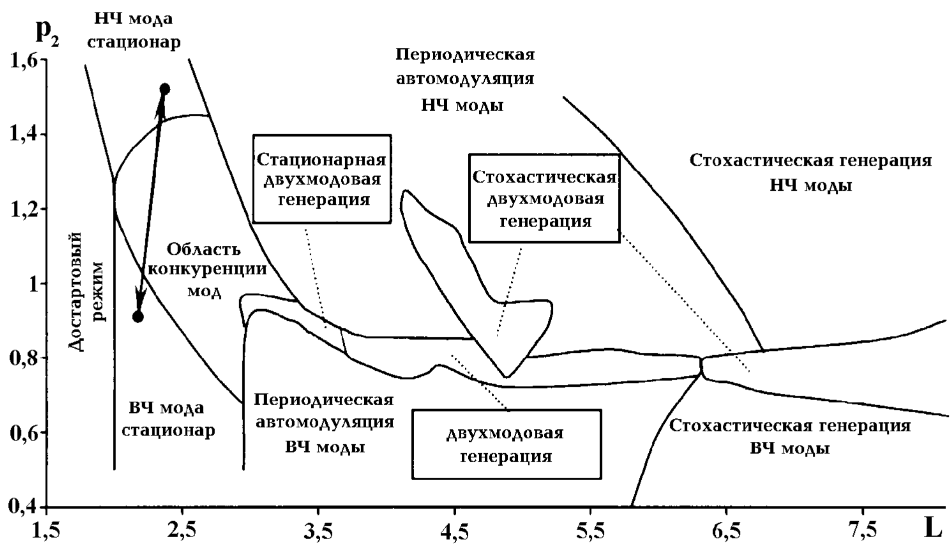


Рис. 1. Разбиение плоскости параметров p_2, L на области различных режимов генерации при $p_1 = 0{,}525$, $\nu = 0{,}8$. Стрелкой показано прохождение разных режимов генерации в эксперименте.

режима периодической автомодуляции. Как видно из рисунка, для относительно небольших превышений длины L над пороговыми значениями имеет место стационарная генерация ВЧ или НЧ моды в условиях подавления другой моды. При этом существуют области параметров p_2 и L, где выживание той или иной моды не зависит от начальных условий, а также область конкуренции мод, в которой характер генерации определяется начальными условиями. Кроме того, в узкой полосе значений p_2 и L наблюдается одновременно стационарная генерация на обеих модах.

Конкуренция мод в ЛОВ со сравнительно небольшой (оптимальной по КПД) длиной пространства взаимодействия наблюдалась экспериментально на сильноточном микросекундном ускорителе "САТУРН"(ИПФ РАН). В качестве электродинамической системы ЛОВ использовался отрезок гофрированного осесимметричного волновода. В эксперименте ускоряющее напряжение менялось от 190 до 220 кэВ, при этом ток пучка менялся от 160 А до 210 А. Тип генерируемой моды определялся с помощью фильтрации выходного излучения. Было зарегистрировано излучение на двух модах замедляющей системы E_{01} (низкочастотная мода) и E_{11} (высокочастотная мода), находящихся в синхронизме с электронами. Согласно расчетам [4], в рассматриваемой области напряжений стартовые токи и импедансы связи мод близки между собой, причем при напряжении меньше 190 кВ импеданс связи выше для ВЧ моды, а при напряжении больше 190 кВ более высоким импедансом обладает НЧ мода. С ростом напряжения наблюдалось сначала возбуждение ВЧ моды, затем происходил быстрый срыв генерации этой моды и возбуждалась НЧ мода. При уменьшении напряжения имела место обратная ситуация: срыв НЧ колебаний и возбуждение ВЧ колебаний. На рис. 2 показаны временные зависимости амплитуды каждой моды. Излучение регистрировалось в течение всего импульса ускоряющего напряжения, что позволило определить область напряжений, соответствующую генерации той или иной моды. Наблюдался гистерезис в срыве и возбуждении колебаний: напряжение срыва ВЧ колебаний было выше напряжения, при котором вновь возбуждалась ВЧ мода. Такая неоднозначная зависимость режима генерации от параметров системы соответствует ситуации, когда выживание той или иной моды определяется начальными условиями.

Выбранные при численном моделировании значения p_1 и ν соответствуют экспериментальным данным. В эксперименте параметры изменялись от $p_2 = 0{,}9$, $L = 2{,}3$ при ускоряющем напряжении $U = 190$ кВ до $p_2 = 1{,}5$, $L = 2{,}4$ при напряжении $U = 220$ кВ. При этом, согласно численным

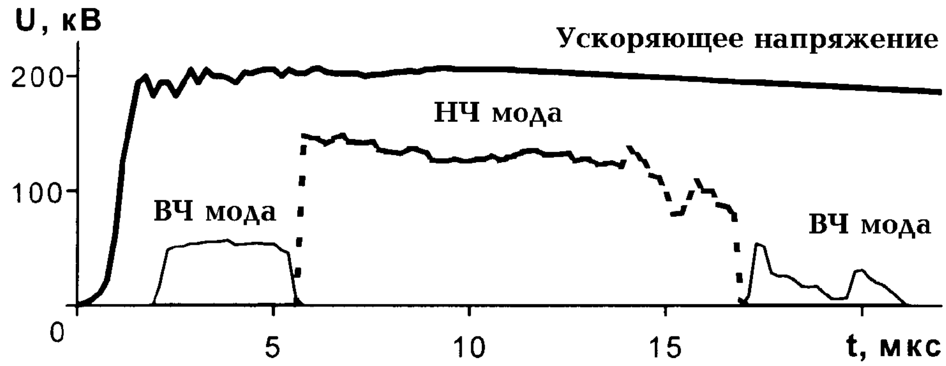


Рис. 2. Осциллограммы ускоряющего напряжения и амплитуд мод.

расчетам (рис. 1), последовательно проходятся области генерации ВЧ моды, область конкуренции, где выживание той или иной моды определяется начальными условиями, и область генерации НЧ моды. Сравнение результатов моделирования и экспериментальных данных показало, что предложенная теоретическая модель в области относительно небольших длин пространства взаимодействия позволяет достаточно хорошо интерпретировать результаты эксперимента.

Для значительного превышения параметров над их стартовыми значениями моделирование уравнений (3)–(6) позволило проанализировать возможность получения периодических и стохастических автомодуляционных режимов на одной из поперечных мод в условиях подавления другой моды. Как видно из рис. 1, при больших значениях L может наблюдаться периодическая или стохастическая автомодуляция амплитуд каждой из мод в отдельности, а также автомодуляция (периодическая или стохастическая) обеих мод одновременно. На рис. 3 показаны временные зависимости и спектры амплитуд в режиме стохастической генерации ВЧ моды, когда НЧ мода подавляется (рис. 3а), а также в режиме двухмодовой стохастической генерации (рис. 3б,в).

Следует отметить, что режимы, аналогичные показанному на рис. 3а, существуют в достаточно широкой области параметров. В таких режимах, несмотря на то, что порог стохастической генерации превышен для каждой моды, происходит стохастическая генерация только на одной из мод при подавлении другой. Таким образом, моделирование продемонстрировало существование достаточно широкой области параметров, в которой происходит стохастическая генерация только на одной из поперечных мод в условиях подавления другой. Этот факт представляет несомненный практический интерес в связи с недавними экспериментальными исследованиями нестационарных процессов в ЛОВ, подтвердившими возможность наблюдения периодической и стохастической автомодуляции с уровнем мощности порядка ста киловатт в сантиметровом диапазоне [3]. В этом эксперименте проблема селекции мод по поперечному индексу решалась выбором в качестве рабочей низшей моды H_{11}. При этом параметры электродинамической системы были выбраны таким образом, чтобы остальные моды, и прежде всего соседняя мода E_{01}, были несинхронны с электронным пучком. Однако коэффициенты связи для моды E_{01} выше, чем для низшей моды. Поэтому в условиях подавления низшей моды выбор более высокой моды E_{01} в качестве рабочей представляется перспективным для снижения тока и длины, соответствующих порогу стохастической автомодуляции.

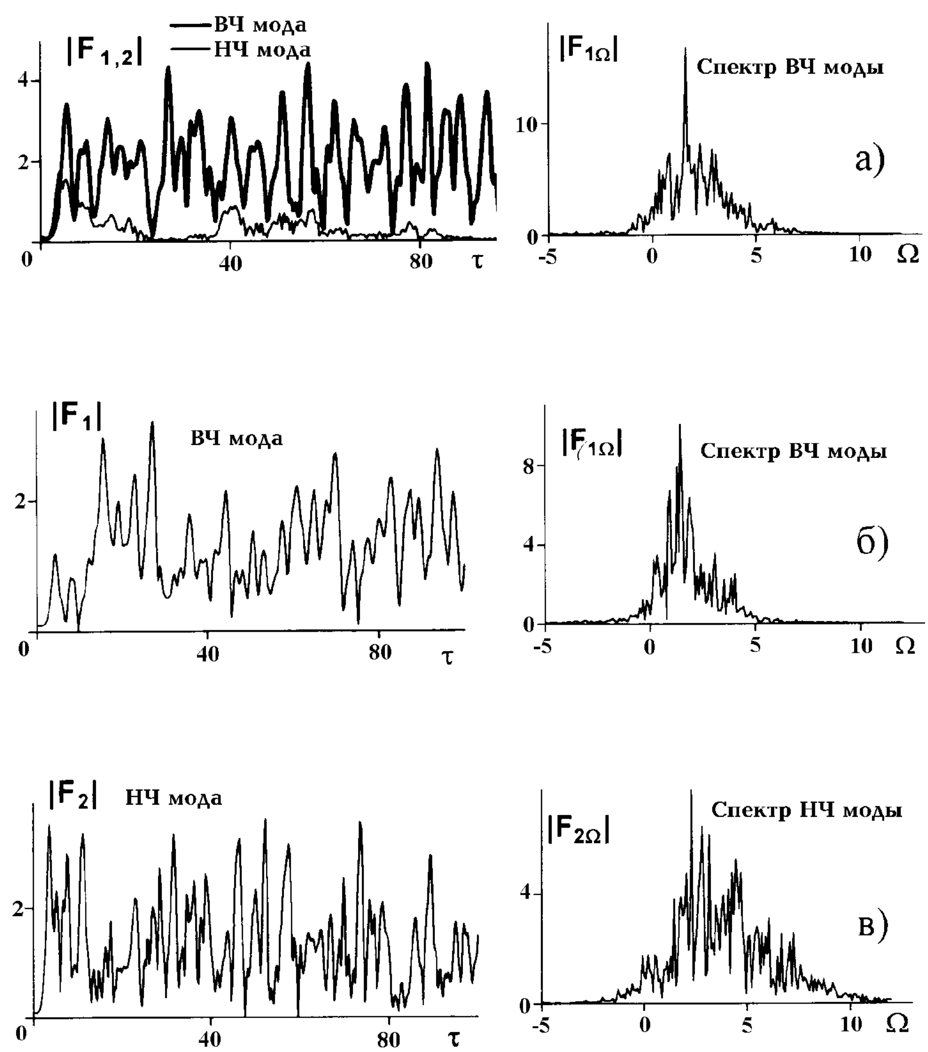


Рис. 3. Результаты моделирования временной зависимости амплитуд мод и их спектров. а) $p_2 = 0{,}6$, $L = 6{,}8$; б), в) $p_2 = 0{,}8$, $L = 7{,}8$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97–02–1761.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. //Изв. вузов. Радиофизика, 1978. Т. 21. С. 1037.
2. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П. — В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981. С. 101.
3. Гинзбург Н. С., Зайцев Н. И., Иляков Е. И. и др. // Письма в ЖТФ, 1998. Т. 24. вып. 22.
4. Ковалев Н. Ф. //Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1978. № 3. С. 102.

Институт прикладной физики РАН,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
5 октября 1998 г.

TWO MODE COMPETITION PATTERNS IN BACKWARD WAVE OSCILLATORS

N. S. Ginzburg, N. I. Zaitsev, E. I. Ilyakov, I. S. Kulagin, Yu. V. Novozhilova, R. M. Rozental', A. S. Sergeev

Nonlinear dynamics of backward wave oscillator is investigated in the regime of electron beam interaction with two transverse modes. In the case of rather small exceeding over threshold the stationary single-mode generation regime is realised. This fact is in a good agreement with the experimental observations of two modes competition in the relativistic BWO. It is shown that in the wide parameters region where for each mode separately is in conditions of stochastic selfmodulation, the nonlinear mode competition can result to the establishment of single-mode stochastic oscillation regime.

УДК 621.373.1

БИФУРКАЦИИ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАННОГО ПОТЕНЦИАЛА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ НЕЙРОНОВ С ПОМОЩЬЮ ОТОБРАЖЕНИЙ*

И. В. Белых

В работе представлены результаты качественного анализа обобщенной системы трех дифференциальных уравнений — модели нейрона. Приведены основные нетривиальные бифуркационные множества, ведущие к появлению сложных движений — берстов. Предложено двумерное отображение, моделирующее потоки, порождаемые этой системой, рассматриваемое как простейшая модель нейрона. Проведено исследование хаотической динамики диффузионно связанных нейронов с помощью связанных отображений.

1. ОБОБЩЁННАЯ МОДЕЛЬ НЕЙРОНА

Феноменологические модели динамики мембранного потенциала биологической клетки часто могут быть представлены в следующей общей форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y,z), \\ \dot{y} = Q(x,y), \\ \dot{z} = \mu\,(R(x,y) - z)\,, \end{cases} \tag{1}$$

где μ есть малый положительный параметр и гладкие функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y)$ и $R(x,y)$ зависят от конкретного типа моделей (модели Ходжкина—Хаксли, Хиндмарш—Розе, Чей и др. [1—8]).

В этих моделях x может быть рассмотрен как мембранный потенциал нейрона, а y и z описывают динамику изменения быстрых и медленных ионных токов через мембрану клетки, соответственно.

Не имея прямого биологического отношения к реальным клеткам и нейронам, данные феноменологические модели хорошо описывают главные особенности поведения и изменения мембранных потенциалов живых клеток.

Малость параметра μ позволяет использовать для изучения динамики данных моделей общую физическую концепцию адиабатического подхода, при котором возможно разделить движения системы на быстрые и медленные. Быстрые колебания описываются редуцированной двумерной системой при $\mu = 0$, а изменения z определяют медленную динамику. Однако, такой подход дает весьма грубое представление о реальных сценариях возникновения различных колебаний (осцилляций, берстов и т. д.) мембранного потенциала.

В данной работе на основе строго математического анализа приводятся все основные сложные бифуркационные перестройки системы уравнений (1), представляющие собой реальные сценарии генерации берстов, хорошо согласующиеся с численными результатами исследования конкретных моделей [5, 7, 8].

*Работа была представлена на летней школе—семинаре “Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня — 2 июля 1998 г.

2. ОСНОВНЫЕ БИФУРКАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА, ВЕДУЩИЕ К ВОЗНИКНОВЕНИЮ БЕРСТОВ

Анализ системы (1), проведенный в [4], позволяет представить следующие основные сценарии рождения аттракторов с быстрыми и медленными движениями (берстов) в общей модели нейрона (1):

Сценарий 1. Предполагается, что система (1) имеет единственное состояние равновесия E. До бифуркации точка E устойчива и притягивает все фазовое пространство системы. В момент бифуркации она становится седло—узлом (с двумя нулевыми собственными значениями), имеющим гомоклиническую траекторию. После этой “полулокальной"бифуркации E становится седлом и из петли рождается устойчивый предельный цикл с быстрыми и медленными движениями вдоль него (рис. 1а). Областью притяжения этого единичного берста является все фазовое пространство, исключая седло E и его одномерное устойчивое многообразие.

Следует отметить, что данная бифуркация коразмерности 2 отличается от известной бифуркации седло—узла, имеющего гомоклиническую орбиту, при которой устойчивый цикл рождается одновременно с исчезновением двух состояний равновесия.

Действительно, в общем случае, когда полная система (1) имеет два состояния равновесия, при таком бифуркационном переходе можно наблюдать все особенности бифуркации Богданова—Такенса [9], включая бифуркацию Андронова—Хопфа и локальной гомоклинической орбиты состояния равновесия. Такой переход к берстам, имеющим в своем фазовом пространстве еще один изолированный предельный цикл малой амплитуды, полученный для модели Чей [5], может быть объяснен этим механизмом.

Сценарий 2. Пусть в фазовом пространстве трехмерной системы (1) существует устойчивое состояние равновесия типа фокус E и седловой цикл C^{sd}, лежащий на его двумерном (фокусном) подмногообразии. Областью притяжения состояния равновесия E является все фазовое пространство, исключая сам цикл C^{sd} и его цилиндрическое устойчивое многообразие. При изменении бифуркационного параметра происходит обратная бифуркация Андронова—Хопфа, при которой гетероклиническая траектория, связывающая цикл с состоянием равновесия, становится гомоклинической к состоянию равновесия E. В окрестности данной бифуркации и происходит бифуркационная перестройка, приводящая к рождению и бифуркациям берстов. Общая схема для такого сценария представлена на рис. 1б.

Следует отметить, что такой сценарий был предложен в [6], а детали и структура такого бифуркационного множества была изучена Л. А. Беляковым и Л. П. Шильниковым [9].

Сценарий 3. Пусть система (1) имеет седловое состояние равновесия E и устойчивый цикл с быстрыми движениями C^{s}, который притягивает все траектории (1), кроме лежащих на устойчивом многообразии седла E.

Генерация сложных берстов в этом случае связана с бифуркациями этого цикла C^{s}.

Установлено, что в общем случае — это бифуркация седло—узлового периодического движения, имеющего гомоклиническую структуру, как показано на рис. 1в. Вначале седловой цикл C^{sd} рождается из гомоклинической орбиты седла E, а затем устойчивый C^{s} и седловой C^{sd} циклы сливаются, образуя гомоклиническую траекторию седло—узлового цикла.

После бифуркации может рождаться сложный многообходный берст, который притягивает все фазовое пространство системы, исключая устойчивое многообразие E и его область притяжения. Это означает, что двумерное неустойчивое многообразие седла E целиком возвращается в малую окрестность седла E. Ниже этот факт используется для описания бифуркационного множества и аттрактора с помощью двумерного модельного отображения.

Сценарий 4. Пусть два предельных цикла (устойчивый и седловой) существуют в системе (1). Устойчивый цикл определяет регулярные осцилляции, которые являются стационарными состояниями системы (1).

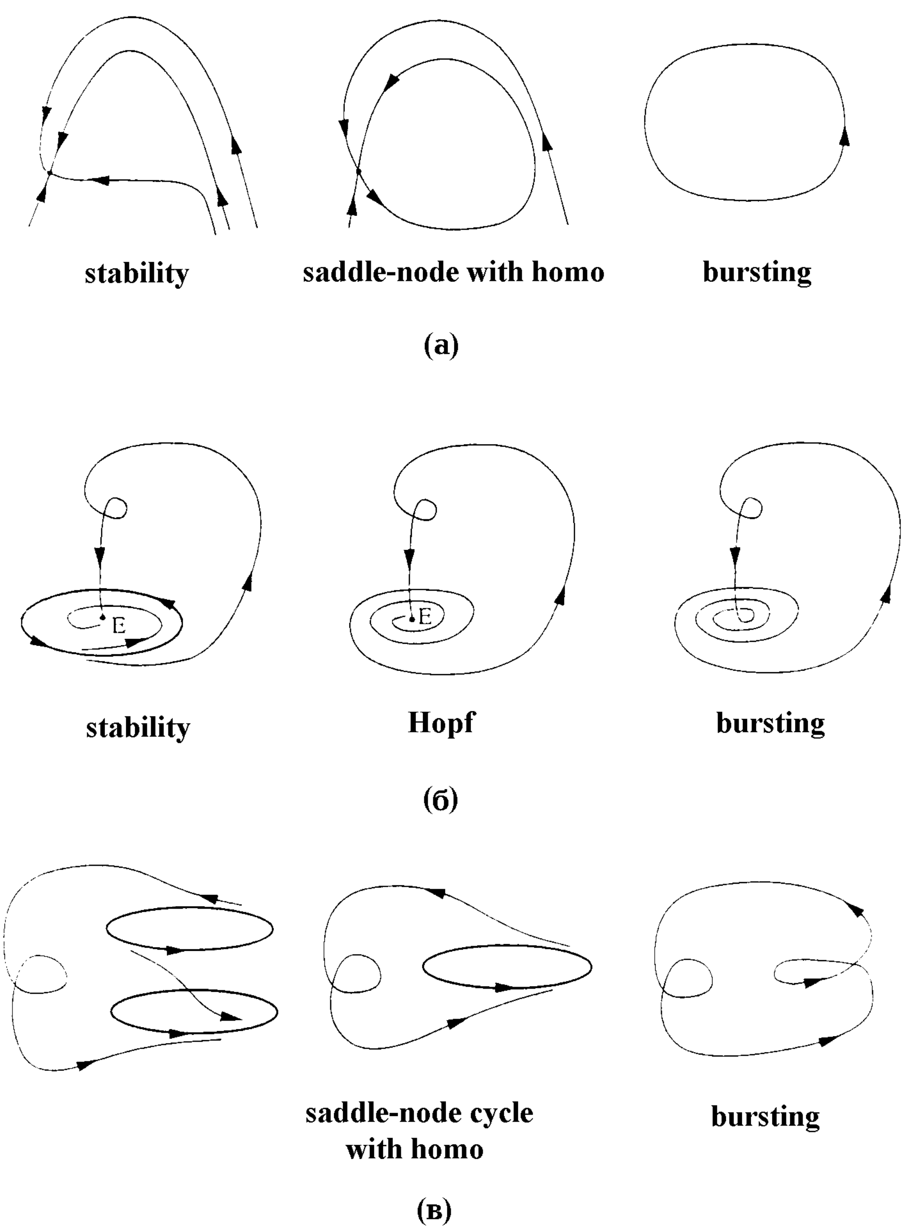


Рис. 1. Качественные картины траекторий, соответствующие возникновению берстов. а) Сценарий 1. б) Сценарий 2. в) Сценарии 3—4: бифуркация седло—узлового цикла, имеющего гомоклиническую траекторию как в окрестности седла (случай 3), так и вне ее (случай 4).

В момент бифуркации циклы сливаются и исчезают после седло—узловой бифуркации цикла, генерируя берстовые колебания.

Легко проверить, что в этом случае имеет место бифуркация седло—узлового периодического движения, имеющего гомоклиническую траекторию, лежащую в трансверсальном пересечении устойчивого и неустойчивого многообразия этого цикла.

На первый взгляд, эта бифуркация выглядит подобно бифуркации в сценарии 3 (см. рис. 1в). Однако, в этом случае седло-узловой цикл находится вдали от седла E и сложное предельное множество, которое генерирует хаотические берсты, существенно отличается от предельного множества сценария 3.

Следует отметить, что данный сценарий находится в хорошем соответствии с численными результатами, полученными для модели Чей [5].

Кроме того, структура упомянутых бифуркационных множеств чрезвычайно сложна и данные бифуркации являются лишь базисом для бесконечного множества бифуркаций, ведущих к генерации берстов и берстовые колебания могут возникать еще до соответствующих гомоклинических бифуркаций.

3. МОДЕЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Возникновение сложных берстов связано с бифуркациями, происходящими в окрестности седла в рамках основного сценария 3. Для того, чтобы изучить структуру бифуркационного множества и основные бифуркации в этом случае, ведущие к генерации берстов и хаосу, мы прибегаем к помощи упрощенного двумерного модельного отображения, построенного по потоку системы в окрестности седла.

Строится следующее симметричное модельное отображение [4]:

$$\begin{cases} \overline{y} = (-\alpha + a_{11}|y|^{\lambda})\,\mathrm{sgn}\, y + a_{12}z, \\ \overline{z} = (\gamma + a_{21}|y|^{\lambda})\,\mathrm{sgn}\, y + a_{22}z. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь y, z — это координаты на секущих Пуанкаре, построенных по потоку системы (1) в окрестности седла E.

Для рассматриваемого случая поток системы (1) асимметричен, поэтому для простоты мы вводим асимметрию в (2) изменением только одного параметра α для $y < 0$:

$$\begin{cases} \overline{y} = -\alpha + a_{11}y^{\lambda} - \delta z, & y \geq 0, \\ \overline{y} = \beta - a_{11}|y|^{\lambda} - \delta z, & y < 0, \\ \overline{z} = (\gamma + a_{11}|y|^{\lambda})\,\mathrm{sgn}\, y + a_{22}z. \end{cases} \tag{3}$$

Данное отображение обладает достаточно широкой областью хаотической динамики. На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма отображения (3). Следует подчеркнуть, что сложный многообходный берст здесь возникает до бифуркации седло—узла, имеющего гомоклиническую орбиту.

Такой переход от простой неподвижной точки периода 1 к взрывным образом возникающим сложным многообходным движениям, соответствующим генерации берстов, иллюстрируется на рис. 2.

4. СВЯЗАННЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Диффузионно связанные системы (1) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i = P(x_i, y_i, z_i) + \varepsilon(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \\ \dot{y}_i = Q(x_i, y_i), \\ \dot{z}_i = \mu\,(R(x_i, y_i) - z_i)\,, \qquad i = \overline{1, N} \end{cases} \tag{4}$$

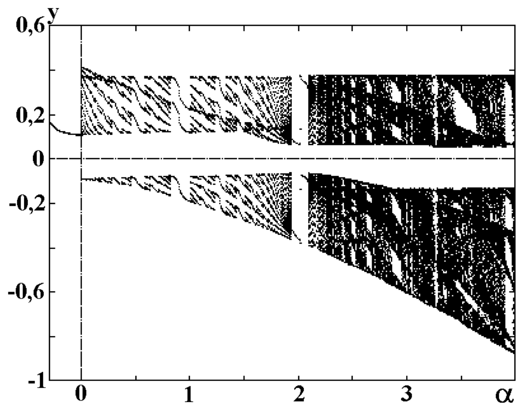


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма (y, α) для отображения (3). Остальные параметры $\{a_{11};\ \delta;\ \beta;\ \gamma;\ a_{22};\ \lambda\} = \{1;\ 0{,}1;\ 1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 1{,}5\}$.

с граничными условиями $x_0 = x_1,\ x_{N+1} = x_N$.

Данная система уравнений является феноменологической моделью цепочки электрически связанных нейронов.

Поскольку основные черты динамики одной трехмерной системы (1) хорошо моделируются отображением (2), предлагается для описания связанной системы дифференциальных уравнений (4) использовать связанные двумерные отображения вида

$$\begin{cases} \overline{x_i} = (1-\varepsilon) f(x_i) + \dfrac{\varepsilon}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})], \\ \overline{z_i} = f(z_i), \qquad i = \overline{1, N} \end{cases} \tag{5}$$

с граничными условиями $x_0 = x_1,\ x_{N+1} = x_N$. Функции $f(x_i),\ f(z_i)$ являются правыми частями отображения (2) (здесь мы переобозначили, для удобства, переменную y через x).

Заметим, что моделирование системы (4) диффузионно связанными отображениями некорректно по той причине, что диффузионная связь в системе (4) приводит к непосредственному взаимодействию потоков парциальных систем в фазовом пространстве связанной системы, а это означает, что моделирующие отображения необходимо связывать непосредственно (по потоку), как это сделано в (5). При этом диффузионно связанные отображения не приводят к моделированию взаимодействия потоков подсистем (1) и, стало быть, не могут служить моделью системы (4).

Для чего нужен такой подход моделирования связанных систем дифференциальных уравнений с помощью двумерных или даже одномерных отображений? В случае нескольких связанных систем, действительно, можно обойтись и системами дифференциальных уравнений. Но если таких систем $10^9 - 10^{12}$ (число нейронов в мозге), то с помощью такого моделирования возможно существенное упрощение вычислительной задачи.

Отметим, что используемый в (5) тип связи не является новым (см. отображение Канеко [10]).

Динамическое поведение связанной системы (5) изучено в зависимости от параметра связи ε.

Траектории связанного отображения (5), соответствующие частичной синхронизации парциальных подсистем (2), лежат на интегральном многообразии $G = \{x_k = x_{k+1},\ k = \overline{1, N}\}$, а соответствующие глобальной синхронизации — на подмногообразии $G_0 = G\Big|_{z_k = z_{k+1}}$.

Получен эффект частичной взаимной синхронизации систем при достаточно большой связи ($\varepsilon \approx 0{,}42$ для простейшего случая цепочки из двух элементов) для различных начальных условий. При такой связи интегральное многообразие G становится устойчивым и притягивает все траектории системы (5). Глобальная синхронизация при этом происходит при начальных условиях из малой окрестности G_0.

Динамика всей цепочки на многообразиях G и G_0 определяется поведением одного парциального модельного отображения (2).

Отображение (2) в области хаотичности дает хаотическую синхронизацию идентичных парциальных подсистем (2).

Получена последовательность фазовых портретов системы (5) в диапазоне от нулевой связи ($\varepsilon = 0$) до достаточно большой взаимной связи, при которой наступает частичная синхронизация. Очевидно, что для нулевой связи $\varepsilon = 0$ на плоскости $(x_1,\ x_2)$ для различных начальных условий имеет место “черный квадрат"в случае, когда парциальный элемент (2) находится в хаотическом режиме. С увеличением ε происходит бесконечное число бифуркаций, приводящих к глобально устойчивому интегральному многообразию G (диагональ на плоскости $(x_1,\ x_2)$).

Получена область параметра ε, для точек которой установившийся процесс системы представлен траекторией, симметричной относительно многообразия G. Эта траектория представляет собой противофазные синхронные колебания подсистем (2). Заметим, что любые (периодические или хаотические) траектории отображения (5), симметричные относительно диагонали G, являются противофазными колебаниями подсистем (2).

Для различных значений управляющего параметра α, определяющего индивидуальную динамику (2), возможны случаи как регулярной, так и хаотической противофазной синхронизации. Рис. 3 иллюстрирует противофазные хаотические траектории на плоскости $(x_1,\ x_2)$ для системы (5) $\varepsilon = 0{,}18$. На рис. 4 представлен тот же режим, но непосредственно на границе перехода к частичной хаотической синхронизации.

Описанные здесь явления противофазной синхронизации для связанных модельных отображений (5) находятся в хорошем соответствии с результатами, полученными для электрически связанных Хиндмарш—Розе нейронов [7, 8], поскольку здесь наблюдаются те же самые эффекты в зависимости от подобных параметров.

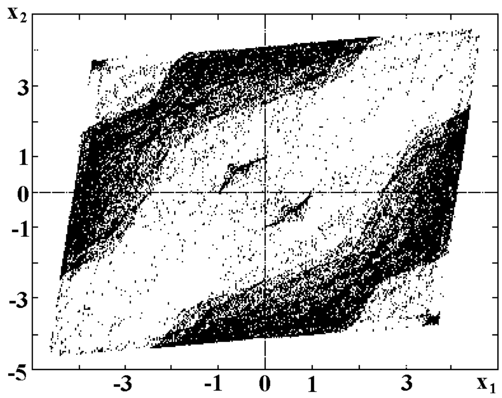


Рис. 3. Противофазная синхронизация двух парциальных подсистем (2). Параметры системы равны $\{\varepsilon;\ \alpha;\ a_{11};\ a_{12};\ \gamma;\ a_{21};\ a_{22};\ \lambda\} = \{0{,}18;\ 4{,}5;\ 0{,}4;\ -0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 2\}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 96—01—01428 и № 96—02—18041).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hodgkin A. L. and Huxley A. F. //J. Physiol., 1952. V. 117. P. 500.
2. Hindmarsh J. L. and Rose R. M. //Proc. Roy. Soc. London Ser. B, 1984. V. 221. P. 87.
3. Chay T. R. //Physica D, 1985. V. 16. P. 233.
4. Belykh V., Belykh I., Colding-Joergensen M., and Mosekilde E. Homoclinic bifurcations of cell models with bursting oscillations. //Physica D, 1997 (submitted).

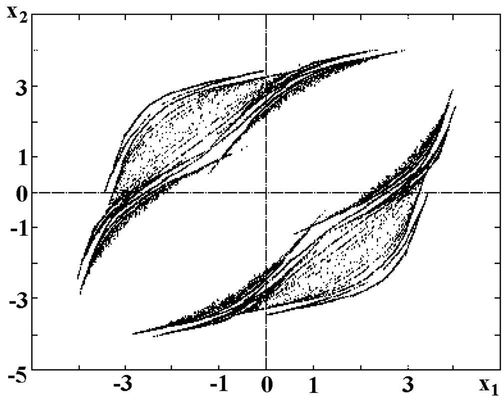


Рис. 4. Симметричные траектории двух парциальных подсистем (2) на плоскости (x_1, x_2) непосредственно перед наступлением синхронизации. Параметр связи $\varepsilon = 0{,}41$.

5. Fan Y. S. and Chay T. R. //Biol. Cybern., 1994. V. 71. P. 417.
6. Белых В. Н., Чертков Ю. С. Краевые задачи. — 1980. С. 180.
7. Абарбанель Г. Д. И., Рабинович М. И., Сельверстон А. И., Баженов М. В., Хуерта Р., Сущик М. М., Рубчинский Л. Л. //УФН, 1996. Т. 166. С. 3.
8. Мольков Я. И., Рабинович М. И., Сущик М. М. //Вестник ННГУ, 1996. Т. 1. С. 15.
9. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — ВИНИТИ, 1986. Т. 5. – 284 с.
10. Kaneko K. //Physica D, 1992. V. 55. P. 368.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
1 октября 1998 г.

BIFURCATIONS IN THE CELL MODELS AND MAP MODELLING OF ELECTRICALLY COUPLED NEURONS

I. V. Belykh

The qualitative results of a neuron model, the generalized system of three differential equations, are presented. Several scenarios of the appearance of bursting oscillations are described. We suggest a way to model diffusionally coupled generic neuron systems by coupled maps. The phenomena of chaotic synchronization, “antiphase"solutions in this coupled system with referring to a neuron chain are investigated.

УДК 517.9

ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУР В РЕШЁТКАХ НЕЛОКАЛЬНО СВЯЗАННЫХ БИСТАБИЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*

К. В. Невидин

Представлены результаты исследования динамической системы, состоящей из бистабильных элементов, связанных между собой нелокальной связью. Исследовалась динамика пространственных структур в решетке с плавно увеличивающимся коэффициентом связи. Исследовался процесс образования пространственных структур в случае с сильной нелокальной связью между элементами.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается решеточная динамическая система, состоящая из N^2 бистабильных элементов, соединенных между собой в решетку. В последние несколько лет такие системы активно исследуются в разных областях науки. Такие системы появляются либо как дискретные аналоги нелинейных распределенных сред, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных [1], либо как модели, описывающие поведение связанных между собой нелинейных элементов типа джозефсоновских контактов [2], элементов Чуа [3], генераторов Ван дер Поля и других. Такие системы также встречаются в задачах, связанных с изучением явления образования пространственных структур в сетях связанных нейросистем [4].

1. МОДЕЛЬ

Исследуется процесс образования пространственных структур в следующей динамической системе:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{j,k} &= f(x_{jk}) + d_1(x_{j-1,k} + x_{j+1,k} + x_{j,k-1} + x_{j,k+1} - 4x_{jk}) + \\ &\quad + d_2(x_{j-2,k} + x_{j+2,k} + x_{j,k-2} + x_{j,k+2} - 4x_{jk}) \end{aligned} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x_{0,k} = x_{1,k}\,, \quad x_{N+1,k} = x_{N,k}\,, \\ x_{j,0} = x_{j,1}\,, \quad x_{j,N+1} = x_{j,N}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

где $j,k = \overline{1,N}$, $f(x)$— нелинейность, отвечающая за поведение отдельного элемента в решетке, пара (j,k) задает положение элемента в пространстве, d_1, d_2 — параметры отвечающие за локальную и нелокальную связь в системе, N — число элементов в решетке. Предполагается, что нелинейность в (1) имеет вид полинома третьего порядка $f(x) = x(x-1)(p-x)$, где p — параметр, так что отдельный элемент решетки обладает свойством бистабильности. Легко показать, что система (1) является градиентной и в фазовом пространстве системы существуют лишь состояния равновесия, положение

*Работа была представлена на летней школе—семинаре "Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

которых задается потенциальной функцией. Исследование систем типа (1) [5, 6] показывает, что при малых коэффициентах связи существует такая область параметров системы D_{fs}, в которой в системе реализуется полный набор устойчивых состояний равновесия, которые можно рассматривать в пространстве (Z^2, R) как пространственные структуры. В области D_{fs} они могут варьироваться от простейших однородных до сложных, хаотических. В случае с нелокальной связью также легко построить такую область:

$$d < \min\left\{\frac{-f(x_1)}{4(x_4 - x_1)}, \frac{f(x_3)}{4x_3}\right\}, \tag{3}$$

где x_1 — координата минимума, а x_3 — координата максимума функции f, x_4 — координата правого устойчивого состояния равновесия, $d = d_1 + d_2$.

2. ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУР В ВИДЕ МОЗАИК

Положим, что число элементов в решетке N кратно четырем. Тогда вводя четыре новые переменные x, y, u, v, исходную систему (1) можно переписать в эквивалентном виде

$$\begin{cases} \dot{x}_{j,k} = f(x_{jk}) + d_1(y_{j-1,k} + y_{j+1,k} + u_{j,k-1} + u_{j,k+1} - 4x_{jk}) + \\ +d_2(x_{j-2,k} + x_{j+2,k} + x_{j,k-2} + x_{j,k+2} - 4x_{jk}),\ j,k = 2(n+1); \\ \\ \dot{y}_{j,k} = f(y_{jk}) + d_1(x_{j-1,k} + x_{j+1,k} + v_{j,k-1} + v_{j,k+1} - 4y_{jk}) + \\ +d_2(y_{j-2,k} + y_{j+2,k} + y_{j,k-2} + y_{j,k+2} - 4y_{jk}),\ j = 2(n+1),\ k = 2n; \\ \\ \dot{u}_{j,k} = f(u_{jk}) + d_1(v_{j-1,k} + v_{j+1,k} + x_{j,k-1} + x_{j,k+1} - 4u_{jk}) + \\ +d_2(u_{j-2,k} + u_{j+2,k} + u_{j,k-2} + u_{j,k+2} - 4u_{jk}),\ j = 2n,\ k = 2(n+1); \\ \\ \dot{v}_{j,k} = f(v_{jk}) + d_1(u_{j-1,k} + u_{j+1,k} + y_{j,k-1} + y_{j,k+1} - 4v_{jk}) + \\ +d_2(v_{j-2,k} + v_{j+2,k} + v_{j,k-2} + v_{j,k+2} - 4v_{jk}),\ j,k = 2n, \end{cases} \tag{4}$$

$n = 1, 2, \ldots, N/2$, с соответствующими граничными условиями.

Предположим теперь, что коэффициент связи d_1 пренебрежимо мал по сравнению с коэффициентом d_2. В данном случае, полагая $d_1 = 0$, получаем, что исходная решетка (1) разваливается на четыре несвязанные решетки (4), которые, в свою очередь, представляют собою решетки с локальными связями между элементами. Таким образом, каждая из решеток в уравнении (4) совпадает по виду с изначальной решеткой (1), но уже без нелокальных связей между элементами и вчетверо меньшего размера. На рис. 1 представлена финальная пространственная структура, образовавшаяся из случайного начального распределения. Интенсивность черного соответствует большим значениям амплитуды элементов.

Из рисунка видно, что в финальном распределении в решетке присутствуют мозаичные структуры различного образца: в виде решетки, в виде полосок, в виде шахматной доски и другие.

Окончательное пространственное распределение представляет собой статическое распределение в системе с параметрами $p = 0{,}525$, $d_1 = 0{,}005$, $d_2 = 0{,}0225$.

3. ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУР

Изучение динамики пространственных структур в решетке проводится следующим образом. Выбирается случайное в пространстве начальное распределение. Затем из него получается устойчивое

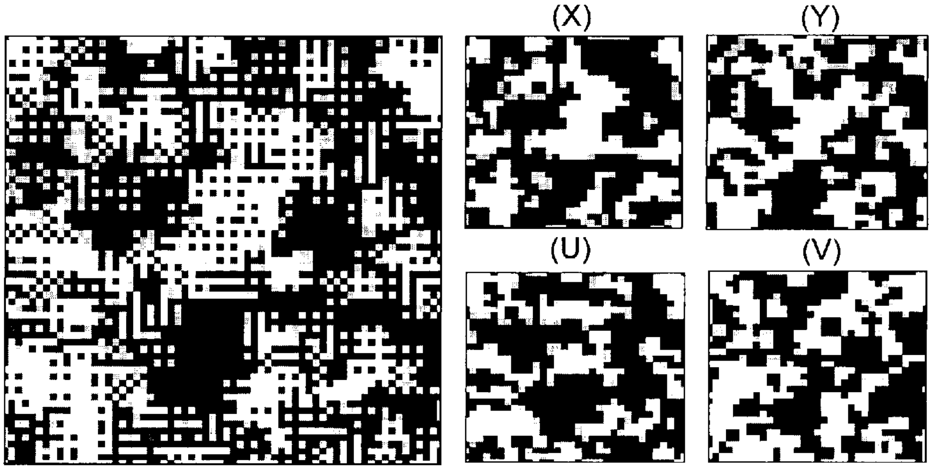


Рис. 1.

распределение, с параметрами системы из области D_{fs}. Далее проводится плавное *“квазистатическое”* увеличение коэффициента связи между элементами. Проводится наблюдение за следующими величинами: 1) количество элементов, у которых все соседние элементы находятся в противоположном состоянии (в процентах от общего числа элементов); 2) количество элементов, у которых три соседних элемента находятся в противоположном состоянии; 3) количество элементов, у которых два соседних элемента находятся в противоположном состоянии, а два в том же состоянии; 4) количество элементов, у которых три соседних элемента находятся в том же состоянии, что и рассматриваемый элемент; 5) количество элементов, у которых все соседние элементы находятся в том же состоянии, что и рассматриваемый элемент. Процесс увеличения коэффициента связи продолжается до тех пор, пока в решетке не установится однородное пространственное распределение. В численных экспериментах наблюдается скачкообразное изменение профиля пространственной структуры в достаточно большой области параметров системы. Результаты численного исследования системы представлены на следующих иллюстрациях. Здесь рис. 2а представляет результаты наблюдений за выше приведенными величинами в системе с $p = 0{,}75$. На рис. 2б представлены графики изменения величин типа 1) и 2). Всюду на рисунках видна ступенчатость изменения профиля пространственной структуры в решетке.

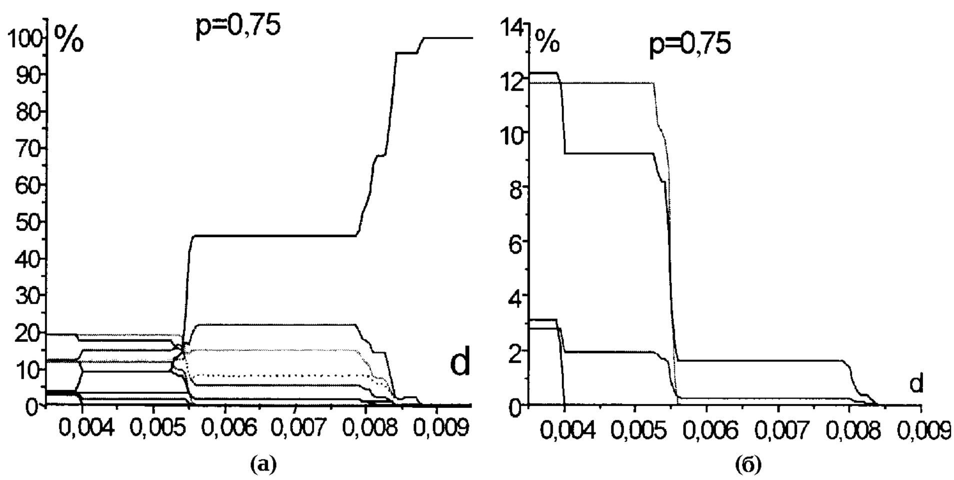


Рис. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдена область параметров системы, в которой в системе реализуется полный набор устойчивых состояний равновесия. Исследовался процесс образования пространственных структур в случае с сильной нелокальной связью между элементами. Обнаружено, что в данном случае образуются пространственные структуры, состоящие из мозаик. Найдено объяснение этого явления.

Исследовалась динамика пространственных структур в решетке с плавно увеличивающимся коэффициентом связи между элементами. Обнаружено, что качественные изменения профиля пространственной структуры происходят скачкообразно.

Автор выражает искреннюю благодарность В. Н. Белых за помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 96–01–01428.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арансон И. С. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Развитие хаоса в ансамблях динамических структур. //ЖЭТФ, 1985. Т. 89. С. 95.
2. Nichols S. and Wiesenfeld K. //Phys. Rev. E, 1994. V. 50. P. 205.
3. Nekorkin V. I., Chua L. O. //Int. J. Bifurcation and Chaos, 1993. V. 3. № 5. P. 1281.
4. Murray J. D. Mathematical Biology. — New York: Springer Verlag, 1991.
5. Nekorkin V. I., Chua L. O. //Int. J. Bifurcation and Chaos, 1993. V. 3. № 5. P. 1281.
6. Nekorkin V. I., Makarov V. A., Kazantsev V. B., Velarde M. G. //Physica D., 1997. V. 100. P. 330.

Волжская государственная
академия водного транспорта,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
15 октября 1998 г.

DYNAMICS OF SPATIAL STUCTURES OF ARRAYS OF NONLOCALLY COUPLED BISTABLE UNITS

K. V. Nevidin

The investigation results are given of a dynamical system of nonlocally coupled bistable units. The dynamics of spatial structures in a lattice with a smoothly increasing coupling coefficient has been studied. The process of spatial structure formation has been investigated in the case of a shong nonlocal coupling between units.

УДК 517.9

ДИНАМИКА БЕГУЩИХ ИМПУЛЬСОВ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В СИСТЕМЕ ФИТЦ–ХЬЮ–НАГУМО ПРИ МОДУЛЯЦИИ ПАРАМЕТРОВ*

А. Г. Максимов, А. В. Сомов

Для модели Фитц–Хью–Нагумо с модуляцией параметров исследована динамика решений типа бегущий импульс. Численно получены границы глубины модуляции параметров системы, при которых эти решения еще существуют. Получен эффект компенсации влияния модуляции параметров системы на устойчивость такого типа решений.

Система Фитц–Хью–Нагумо (ФХН) описывает нелинейную двухкомпонентную среду с диффузией. Она является одной из “базовых"моделей в теории активных сред и описывает процессы в системах различной физической природы, в частности, широко используется для исследования динамики нейроподобных сред [1–3]. Хотя система ФХН известна достаточно давно, лишь сравнительно недавно было установлено существование решений, которым соответствуют автоволны в виде, так называемых, двугорбых или связанных импульсов [2], а также в виде многогорбых импульсов сложной (хаотической) формы [3].

Система ФХН имеет вид

$$\begin{cases} u_t = f(u) + u_{xx} - v, \\ v_t = b(u - \gamma v), \end{cases} \tag{1}$$

где γ, b — параметры, $f(u)$ — кубический полином: $f(u) = -u(u-n)(u-1)$, $0 \le n \le 0{,}5$. При условии

$$\gamma < \gamma_0 \equiv 4/(1-n)^2 \tag{2}$$

она имеет единственное устойчивое пространственно однородное состояние O_1: $\{u = v = 0\}$. “Бегущему импульсу-(БИ) отвечают решения, удовлетворяющие условиям

$$u(\xi) \to 0, \quad v(\xi) \to 0, \quad \xi \to \pm\infty, \tag{3}$$

где бегущая координата $\xi = x + ct$, с — скорость искомого импульса. Соответствующая системе ФХН система уравнений с бегущей координатой имеет вид

$$\begin{cases} u_\xi = y, \\ y_\xi = cy + v - f(u), \\ cv_\xi = b(u - \gamma v). \end{cases} \tag{4}$$

Будем рассматривать систему в полных производных (4) в трехмерном фазовом пространстве G и в пространстве параметров d: $\{c \ge 0,\ b \ge 0,\ 0 \le \gamma \le \gamma_0,\ 0 \le n \le 0{,}5\}$ В d система (4)

*Работа была представлена на летней школе–семинаре “Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

имеет одно состояние равновесия седлового типа O_1 $(u = y = v = 0)$. В фазовом пространстве этой системы решения, удовлетворяющие условиям (3), задают, так называемые, гомоклинические траектории, поэтому задачу о существовании решений типа БИ в системе ФХН можно рассматривать как бифуркационную для системы (4).

Результаты численного исследования системы (4) на предмет поиска для нее элементов бифуркационного множества коразмерности один, отвечающее гомоклиническим траекториям в G и, следовательно, решениям типа "бегущий импульс"в (1), приведены, например, в [4, 5]. Результаты численного исследования устойчивости решений типа БИ приведены в [5].

В данной работе исследуется влияние неоднородности и неавтономности среды на динамику решений типа "бегущий импульс"сложной формы в системе (1).

В качестве начальных условий для численного моделирования системы уравнений в конечных разностях брался профиль, близкий к профилю устойчивого БИ для данных значений параметров, отвечающих различным точкам на бифуркационном множестве. В качестве граничных условий использовались соответствующие координаты пространственно однородного состояния системы ФХН. Принимая во внимание, что пространственно однородное состояние равновесия является устойчивым, можно считать, что пока импульс расположен достаточно далеко от границы среды, решение не "чувствует"ее влияния. Поэтому эволюцией ограниченного по пространству возмущения можно аппроксимировать динамику безграничной среды, пока импульс не "подошел"близко к границе. Необходимость моделирования достаточно протяженной среды, связанная с тем, что характерное время наблюдения довольно велико и импульс за это время "проходит"большое расстояние, преодолена переходом в движущуюся систему координат, в которой импульс "перемещается"в некотором сопровождающем его "окне".

Рассматривались неоднородные среды, которые были получены из однородных путем модулирования того или иного параметра среды либо гармонически, либо меандром. В качестве периода модуляции параметра среды по пространству выбиралось значение $\lambda \cong (1 \div 7) l_x$, где l_x — характерный размер волнового решения, во времени $T \cong (0{,}01 \div 100)\tau$, где τ — характерное время выхода с некоторого начального распределения на профиль устойчивого n-горбого импульса при моделировании в однородной среде.

На рис. 1 показана зависимость критического значения глубины модуляции от периода модуляции для двугорбых импульсов, распространяющихся в среде, у которой параметр n промодулирован гармонически по пространству. С увеличением периода модуляции или характерного размера волнового решения l_x критическое значение глубины модуляции (до которого импульс еще остается устойчивым) уменьшается.

На рис. 2 показаны зависимости критического значения глубины модуляции от периода модуляции для двугорбого импульса, распространяющегося в среде, у которой параметры n, b, γ промодулированы по пространству ($n = n_0\,(1 + A_n \cos(kx))$, $b = b_0\,(1 + A_b \cos(kx))$, $\gamma = \gamma_0\,(1 + A_\gamma \cos(kx))$, $k = 2\pi/\lambda$); на устойчивость многогорбых импульсов наибольшее влияние оказывает модулирование параметра n системы и в меньшей степени — b и γ.

На рис. 3 показана зависимость критического значения глубины модуляции от периода модуляции для двугорбого импульса, распространяющегося в среде, у которой параметр n промодулирован гармонически и меандром. Из этого рисунка видно, что на устойчивость многогорбых импульсов большее влияние оказывает периодическое изменение параметра "скачком", чем гармоническое изменение.

Аналогичные результаты были получены и тогда, когда параметры среды модулировались во времени.

На рис. 4 приведены результаты исследований, когда двугорбый импульс распространялся в среде, у которой параметр n изменялся гармонически по пространству, а параметр b — гармонически во времени. Периоды модуляций параметров (временной и пространственный) были подобраны таким образом (с учетом средней скорости распространения БИ), чтобы влияния, оказываемые этими измене-

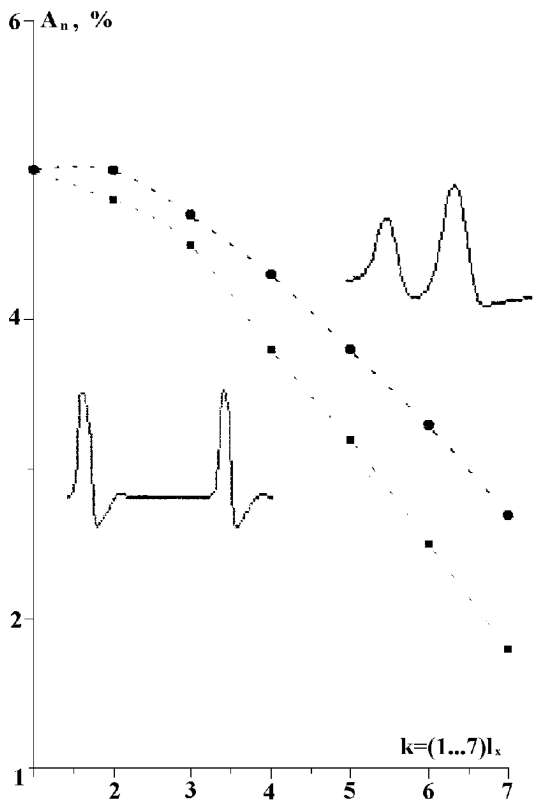


Рис. 1.

ниями, были противоположны (т. е. чтобы импульс, находясь в данной точке среды, за счет изменения параметра n мог “ускоряться"и в то же время за счет изменения параметра b во времени он мог “тормозиться"и наоборот). Горизонтальной линии соответствует критическое значение параметра модуляции для параметра n (он модулировался гармонически по пространству), начиная с которого двугорбый импульс становиться неустойчивым для данного значения периода модуляции. Вертикальной линии на этом рисунке соответствует критическое значение параметра модуляции для параметра b (он гармонически модулировался во времени), начиная с которого тот же двугорбый импульс становится неустойчивым для соответствующего периода модуляции. Прерывистой линией с квадратными метками показана линия, на которой, благодаря взаимной компенсации влияний изменений параметров n (по пространству) и b (во времени), двугорбый импульс остается устойчивым, хотя значения параметров модуляции как для параметра n, так и для b превышают критические. Прерывистой линией с круглыми метками ограничена область, в которой БИ устойчив при одновременной модуляции параметров n и b.

В результате проведенных численных исследований удалось показать, что многогорбые импульсы сложной формы, начиная с некоторого (критического) значения параметра модуляции, становятся неустойчивыми и в такой среде может распространяться только одногорбый импульс, который остается устойчивым. Заметим, что средние скорости распространения устойчивых импульсов в неоднородной среде отличаются от скоростей распространения этих же импульсов в однородной среде на величину $\leq 0{,}05\%$.

ВЫВОДЫ

На устойчивость многогорбых импульсов большее влияние оказывает модулирование параметра n

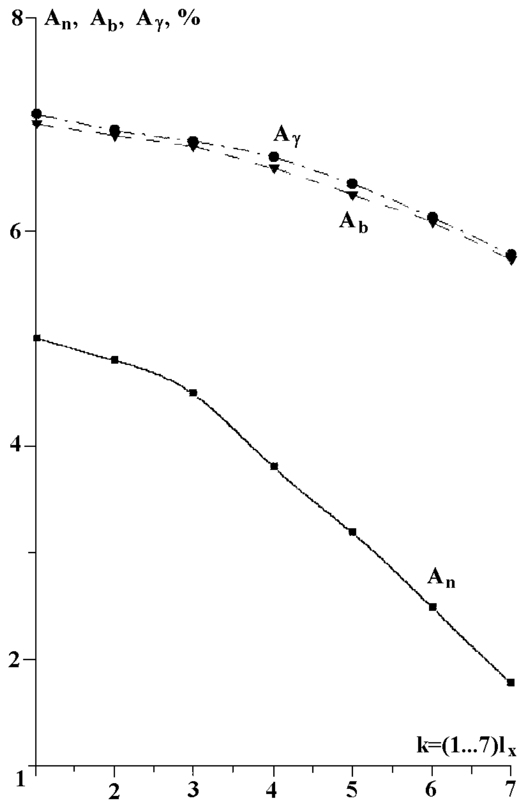


Рис. 2.

системы и в меньшей степени b и γ.

С увеличением l_x (характерного размера волнового решения), $2\pi/k$ и T (периодов модулирования параметров по пространству и во времени) критическое значение параметра модуляции уменьшается.

При гармоническом модулировании параметра системы критическое значение параметра модуляции больше, чем при модулировании меандром.

В пространстве значений параметров модуляции найдены области, в которых, благодаря эффекту взаимной "компенсации"влияний изменений параметров, БИ сложной формы остаются устойчивыми, хотя значения параметров модуляции превышают критические и, наоборот, при взаимном "дополнении"влияний изменений параметров БИ сложной формы становится неустойчивым, хотя значения параметров модуляции не превышают критические.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 96–02–18041.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. — М.: Сов. радио, 1997. С. 385.
2. Кузнецов Ю. А. Импульсы сложной формы в моделях нервной проводимости. — Пущино: Математика и моделирование, 1982. С. 36.
3. Некоркин В. И. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1988. Т. 31. № 1. С. 41.

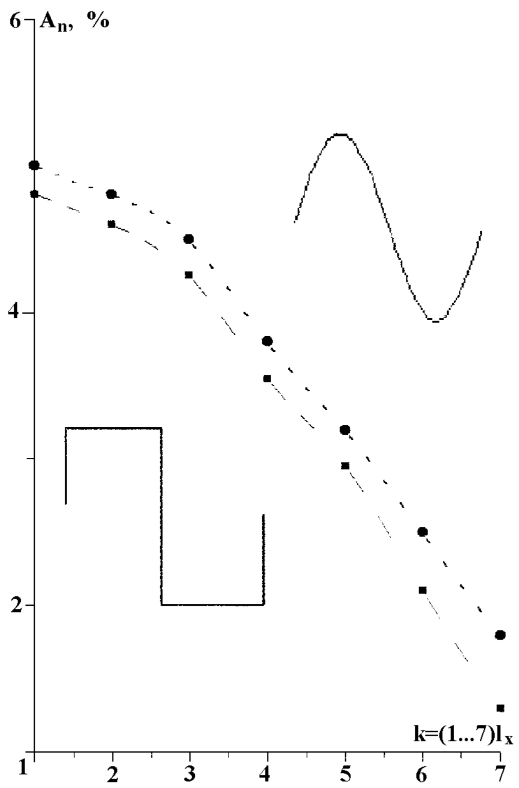


Рис. 3.

4. Максимов А. Г. Фронты и солитонные пакеты в мультистабильных распределенных системах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: / ННГУ, Н. Новгород, 1993. С. 182.
5. Сомов А. В. “Бегущие импульсы"в двухкомпонентной неравновесной среде с диффузией: Автореф. дис. ... магистра физики: / ННГУ, Н. Новгород, 1998. С. 72.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
1 октября 1998 г.

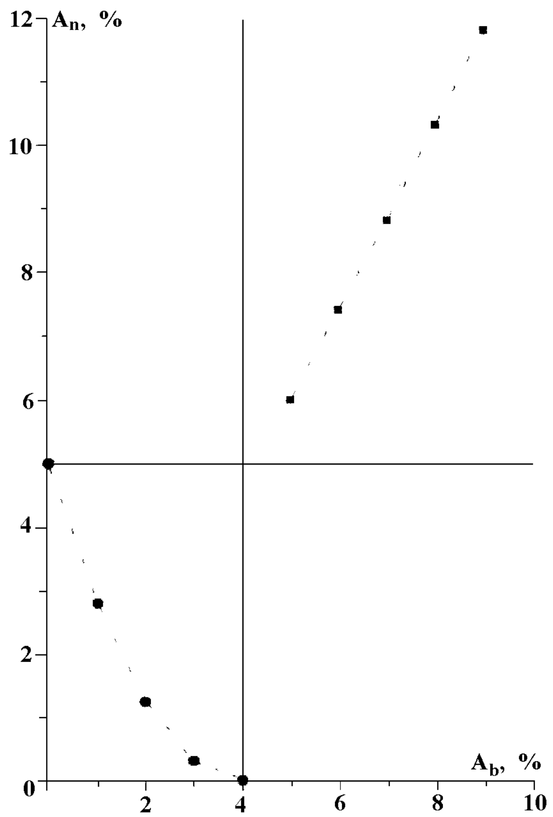


Рис. 4.

DYNAMICS OF THE TRAVELING PULSE SOLUTIONS OF THE COMPLICATED PROFILE IN FITZ–HUGH–NAGUMO SYSTEM WITH MODULATION OF THE PARAMETERS

A. G. Maksimov, A. V. Somov

The dynamics of the traveling wave solutions is investigated for FitzHugh–Nagumo model with modulation of the parameters. By numerical simulation the boundaries of the modulation depth, of system parameters, where these solutions still exist, are obtained. The region where compensation effect takes place is found.

УДК 621.391.244

ДИНАМИКА ИМПУЛЬСОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ДВУХ СВЯЗАННЫХ НЕРВНЫХ ВОЛОКНАХ*

В. Б. Казанцев, Д. В. Артюхин, В. И. Некоркин

В работе изучаются эффекты взаимодействия бегущих импульсов в системе из двух связанных нервных волокон. Каждое из волокон моделируется дискретной цепочкой взаимосвязанных возбудимых элементов Фитц–Хью–Нагумо. Взаимодействие между волокнами может быть как распределенным, однородным, так и локализованным в определенных точках пространства. В случае однородного взаимодействия показана возможность межволоконной синхронизации импульсов. Для локализованных взаимодействий изучена динамика точечного и двухточечного контактов, позволяющих эффективно управлять распространением возбуждения по связанным волокнам.

ВВЕДЕНИЕ

Нервное волокно во многом подобно электрическому кабелю и состоит из проводимого сердечника — внутриклеточной протоплазмы, окруженной оболочкой — мембраной волокна [1–4]. При определенных условиях по нервному волокну может распространяться импульс возбуждения. В основе формирования и распространения нервного импульса лежит изменение локальной проводимости мембраны волокна. Мембрана выступает в качестве активного устройства, которое за счет химических процессов создает неравновесные распределения ионов натрия и калия по разные стороны мембраны.

Одной из особенностей нервной системы высших животных является образование пучков взаимосвязанных нервных волокон [3, 5], что позволяет передавать с помощью нервных импульсов значительно больший поток информации за единицу времени, чем с помощью одиночного волокна. Например, седалищный нерв кролика состоит приблизительно из 400 так называемых миелинизированных волокон. Каждое такое волокно представляет собой тонкое волокно, покрытое изолирующей оболочкой (миелином), и лишь на малых участках (так называемых перехватах Ранвье) мембрана функционирует нормальным образом. Связь между волокнами в пучке осуществляется за счет синаптического контакта (в простейшем случае электрического) между ответвлениями (терминалами) соседних волокон. Ясно, что для пучков нервных волокон важнейшей задачей является исследование межволоконных взаимодействий.

Отметим, что физиологический факт взаимодействия импульсов в близлежащих нервных волокнах был установлен в 1940 году Катцом и Шмиттом [3]. Различным аспектам исследования динамики межволоконных взаимодействий импульсов возбуждения посвящены работы [6–10].

В настоящей работе основное внимание уделяется изучению влияния структуры межволоконных связей на динамику импульсов возбуждения. Существование у волокон перехватов Ранвье — узлов, разнесенных в пространстве, говорит о существенной неоднородности среды. Одним из наиболее простых способов моделирования такой среды представляется использование дискретной цепочки взаимодействующих возбудимых элементов. Кроме того, такая модель позволяет легко вводить межволоконное взаимодействие, которое физиологически носит именно дискретный характер.

Мы рассмотрим систему из двух связанных дискретных цепочек возбудимых элементов Фитц–Хью–Нагумо и опишем различные эффекты взаимопроникновения импульсов возбуждения между

*Работа была представлена на летней школе–семинаре “Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

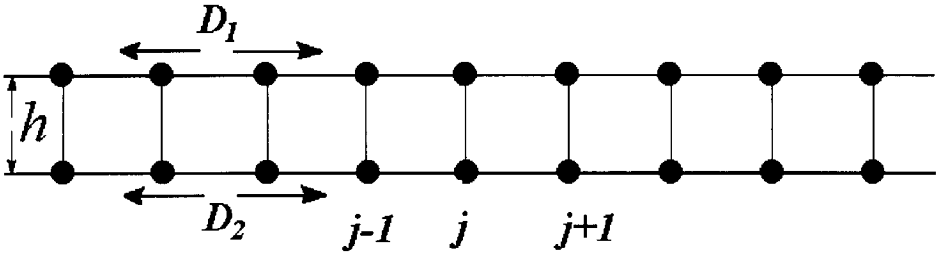


Рис. 1. Схема организации взаимодействующих волокон как двух “электрически"связанных цепочек возбудимых элементов.

ними. Кроме того, мы покажем, что дискретный характер как самих волокон, так и взаимодействия между ними может привести к новым, нетривиальным эффектам циркуляции возбуждения между волокнами.

1. МОДЕЛЬ

Рассмотрим две цепочки электрически связанных возбудимых элементов Фитц–Хью–Нагумо и введем взаимодействие между ними через “электрический” контакт каждой пары соответствующих элементов, как показано на рис. 1. Динамика такой системы описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_j^{(1)} = f(x_j^{(1)}) - y_j^{(1)} + D_1 \Delta x_j^{(1)} + h_j (x_j^{(2)} - x_j^{(1)}), \\ \dot{y}_j^{(1)} = b(x_j^{(1)} - \gamma y_j^{(1)}), \\ \dot{x}_j^{(2)} = f(x_j^{(2)}) - y_j^{(2)} + D_2 \Delta x_j^{(2)} + h_j (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}), \\ \dot{y}_j^{(2)} = b(x_j^{(2)} - \gamma y_j^{(2)}), \end{cases} \tag{1}$$

$$j = 1, 2, \ldots, N\,,$$

где $(\cdot)^{(1)}$ и $(\cdot)^{(2)}$ отвечают переменным первого и второго волокна, соответственно; $\Delta x_j = x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}$; D_1, D_2 — коэффициенты связи между элементами внутри каждого из волокон; h_j — вектор межволоконного взаимодействия; $f(x) = x(x-a)(1-x)$, $0 < a < 1$. Для каждого из волокон будем использовать нулевые граничные условия $x_0^{(i)} = x_{N+1}^{(i)} = 0$, $i = 1, 2$.

1.1. Импульсы в отдельном волокне

Рассмотрим сначала изолированное, отдельное волокно. Его динамика определяется системой (1) при $h_j = 0$. Выберем параметры таким образом, чтобы в такой системе могли распространяться импульсы возбуждения. Для этого зафиксируем параметры b, γ ($b = 0{,}004$, $\gamma = 3$) и будем полагать коэффициенты связи D_i достаточно большими ($D_i > D^{(0)}$, $D^{(0)}$) — некоторое критическое значение). Параметр a выберем в качестве контрольного параметра, изменяющего порог возбуждения волокна. В этом случае система (1) ведет себя подобно распределенному уравнению Фитц–Хью–Нагумо (длинноволновая аппроксимация), которое, как известно, имеет решения в виде бегущих импульсов релаксационного типа, распространяющихся на “фоне” устойчивого (локально) нулевого пространственно однородного состояния [1, 3, 5, 11].

1.2. Связанные волокна

Пусть теперь $h_j \neq 0$ и между волокнами существует "электрический" контакт во всех или в нескольких дискретных узлах. Аналогично [12] можно показать, что в случае, когда межволоконное взаимодействие является достаточно сильным, т. е. при выполнении условия

$$h_j > h^{(0)} \equiv \frac{1 - a + a^2}{6}, \quad \forall j = 1, \ldots, N \tag{2}$$

все движения в системе (1) становятся полностью взаимно синхронизованными между волокнами. Какое именно движение установится в системе в результате этой синхронизации, определяется начальными условиями и параметрами системы.

2. ОДНОРОДНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Приведем результаты численного моделирования системы (1), иллюстрирующие эффекты межволоконной синхронизации в случае, когда взаимодействие между волокнами является однородным, т. е. $h_j \equiv h$. Пусть в одном из волокон распространяется импульс возбуждения, а второе волокно находится в невозбужденном однородном состоянии. При включении сильного взаимодействия между ними, $h > h^{(0)}$, происходит взаимная синхронизация волокон, определяющая два основных сценария эволюции системы:

1) Возбуждение проникает во второе волокно, образуется импульс, бегущий синхронизованно с исходным импульсом в первом волокне (рис. 2а).

2) Взаимодействие подавляет импульс возбуждения, как показано на рис. 2б.

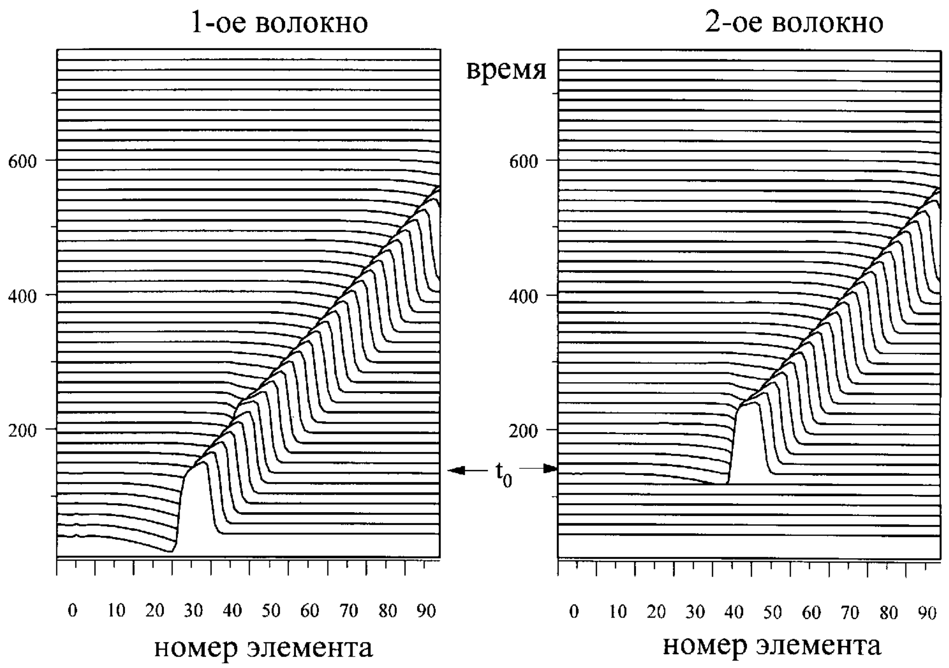


Рис. 2а. Синхронизация волокон при достаточно сильной однородной связи $h_j = h = 10{,}03$. Параметры: $b = 0{,}004$, $\gamma = 3$, $D_1 = D_2 = 0{,}1$. Синхронизация импульсов возбуждения, $a = 0{,}1$.

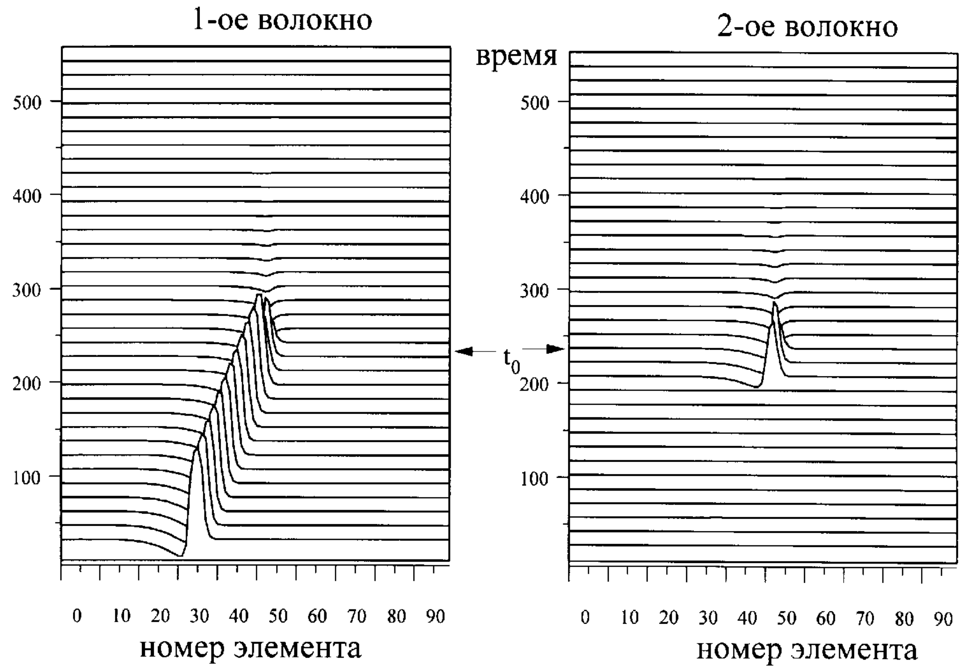


Рис. 2б. Синхронизация волокон при достаточно сильной однородной связи $h_j = h = 10{,}03$. Параметры: $b = 0{,}004$, $\gamma = 3$, $D_1 = D_2 = 0{,}1$. Подавление исходного импульса при повышении порога возбуждения, $a = 0{,}2$.

Эти два сценария можно трактовать как конкуренцию двух возможных состояний волокна — устойчивого пространственно однородного состояния и устойчивого бегущего импульса возбуждения. Какое из этих состояний будет доминировать в результате взаимодействия, определяется параметром a, задающим порог возбуждения. Так, на рис. 2а $a = 0{,}1$ и порог возбуждения достаточно низкий, что приводит к возникновению импульса при включении взаимодействия. Увеличение порога до $a = 0{,}2$ приводит к подавлению исходного импульса возбуждения. Таким образом, управляя порогом возбуждения системы, можно добиться как передачи возбуждения в соседнее волокно, так и его подавления. Отметим, что в этом случае коэффициент взаимодействия между волокнами выбирался достаточно большим, обеспечивая их полную взаимную синхронизацию.

Оказывается, что в реальных биологических волокнах "электрический" контакт между волокнами в пучке может быть и относительно слабым, т. е. синхронизация движений вовсе не является обязательным условием эволюции системы. Действительно, наличие синхронизации является достаточно жестким условием, понижающим число степеней свободы системы, т. к. все движения теперь происходят на многообразии синхронизации и коллективная динамика системы описывается уравнениями для одного волокна. При уменьшении h возможны нетривиальные эффекты циклического взаимопроникновения возбуждения между волокнами. Рис. 3 иллюстрирует образование квазистационарного источника бегущих импульсов. Возбуждение как бы циркулирует между двумя волокнами. Отметим, что такой эффект может быть интерпретирован как возможный механизм образования разного рода аритмий в связанных нервных и мышечных волокнах [7, 8].

3. "ЛОКАЛЬНЫЕ" КОНТАКТЫ МЕЖДУ ВОЛОКНАМИ

Пусть теперь взаимодействие между волокнами не является однородным, а осуществляется лишь в нескольких локальных точках пространства. В этом случае вектор h_j имеет лишь несколько ненулевых компонент. Отметим, что с физиологической точки зрения такое разрежение связей является

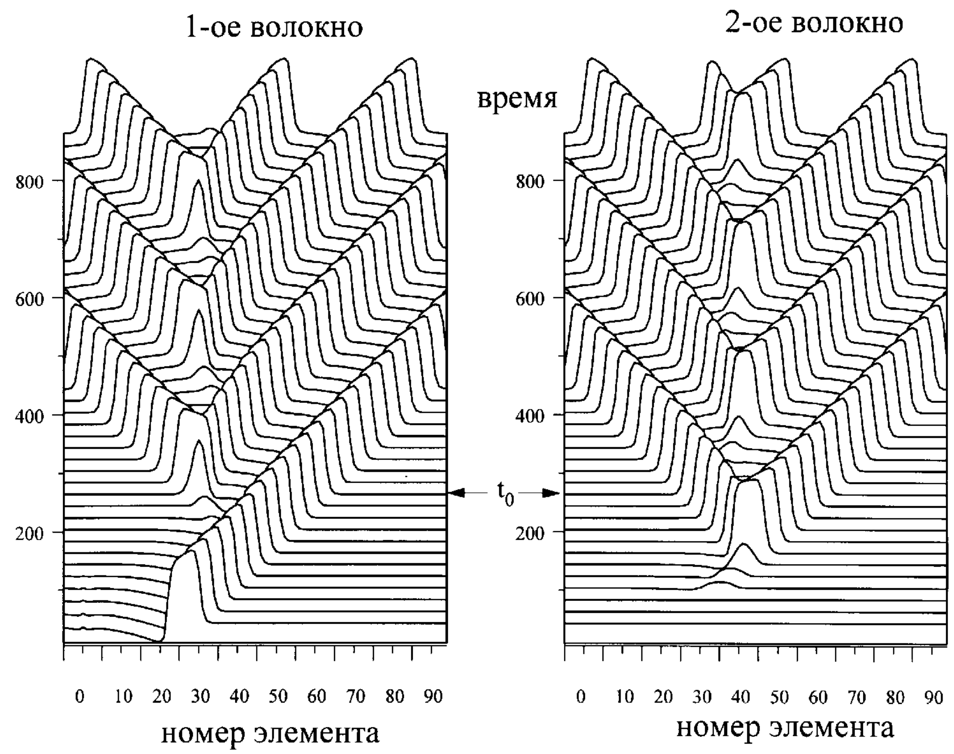


Рис. 3. Циркуляция возбуждения между волокнами, $h < h^{(0)}$. Параметры: $a = 0{,}2$, $b = 0{,}004$, $\gamma = 3$, $D = 0{,}1$, $h = 0{,}02$.

достаточно обоснованным, поскольку взаимодействие между волокнами происходит, в основном, в ответвлениях (терминалах аксонов) и, следовательно, носит локализованный характер.

3.1. Точечный контакт

Рассмотрим сначала случай, когда между волокнами имеется только один "электрический" контакт. Пусть в первой цепочке распространяется импульс возбуждения, а вторая находится в невозбужденном состоянии. При достижении импульсом контакта происходит взаимодействие между волокнами, результат которого при фиксированном пороге возбуждения (параметр a) существенно зависит от величины коэффициента взаимодействия h. В частности, импульс возбуждения может быть подавлен (рис. 4а) в месте контакта, который в этом случае действует как "барьер". Другими словами, за счет введения такого точечного контакта имеет место явление *"провала"* распространения бегущих волн в системе. При уменьшении величины h импульс может успешно преодолеть место контакта (рис. 4б), возбуждая при этом соседнее волокно, в котором образуются два импульса, бегущих в противоположные стороны. Один из этих импульсов, бегущий вперед, оказывается практически синхронизованным с порождающим импульсом в первом волокне. Возможна также ситуация, когда исходный импульс преодолевает контакт (рис. 4в) по первому волокну, не вызывая при этом возбуждения второго. Рис. 5 иллюстрирует различные режимы функционирования точечного контакта в плоскости параметров (D, h).

Таким образом, точечный контакт между волокнами может рассматриваться как эффективный механизм управления и контроля бегущих импульсов в связанных волокнах, действуя в зависимости от параметров либо как "барьер", либо как "канал", обеспечивающий передачу возбуждения от волокна к волокну.

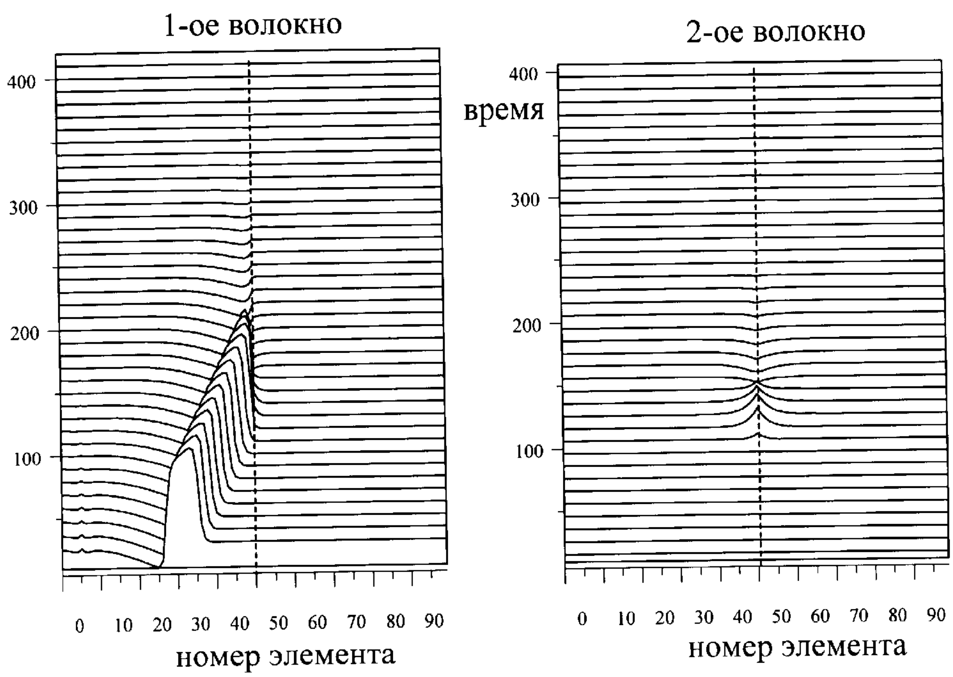


Рис. 4а. Взаимодействие волокон в случае точечного контакта. Подавление импульса, $a = 0{,}17$, $b = 0{,}004$, $\gamma = 3$, $h_{50} = 0{,}8$, $D_1 = D_2 = 0{,}2$.

3.2. Двухточечный контакт

Пусть теперь в системе имеются два таких контакта, каждый из которых оперирует в режиме пропускания с образованием дополнительной пары импульсов в соседнем волокне (рис. 4б и область *2* на рис. 5). В этом случае, наложив начальный импульс возбуждения между этими двумя контактами, получаем систему, генерирующую стационарные последовательности синхронизованных импульсов, бегущих в обе стороны от контактов (рис. 6). Другими словами, система в этом случае представляет собой распределенный генератор синхронных импульсов. Отметим, что временной интервал между импульсами является строго определенным и может быть легко изменен посредством разнесения или сближения точечных контактов в пространстве.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучалась динамика бегущих импульсов в двух взаимодействующих волокнах возбудимых элементов ФитцХью—Нагумо. В случае, когда взаимодействие является однородным и достаточно сильным, происходит полная взаимная синхронизация движений между волокнами. Эта синхронизация может привести либо к подавлению импульса возбуждения, либо к появлению синхронизованного импульса во втором волокне. При уменьшении коэффициента связи возможна циркуляция возбуждения между волокнами. Отметим, что подобные эффекты могут наблюдаться и при переходе к соответствующей континуальной модели взаимодействующих волокон [7, 8].

В случае, когда контакт между волокнами осуществляется локально, т. е. имеет принципиально дискретный характер, взаимодействие волокон приводит к ряду новых, интересных эффектов в динамике системы. Так, например, точечный контакт в пучке позволяет управлять бегущими импульсами, либо останавливая данный импульс, либо пропуская его. В системе из двух таких контактов можно получить управляемую циркуляцию возбуждения и образование распределенного источника синхронизованных импульсов с заданными свойствами.

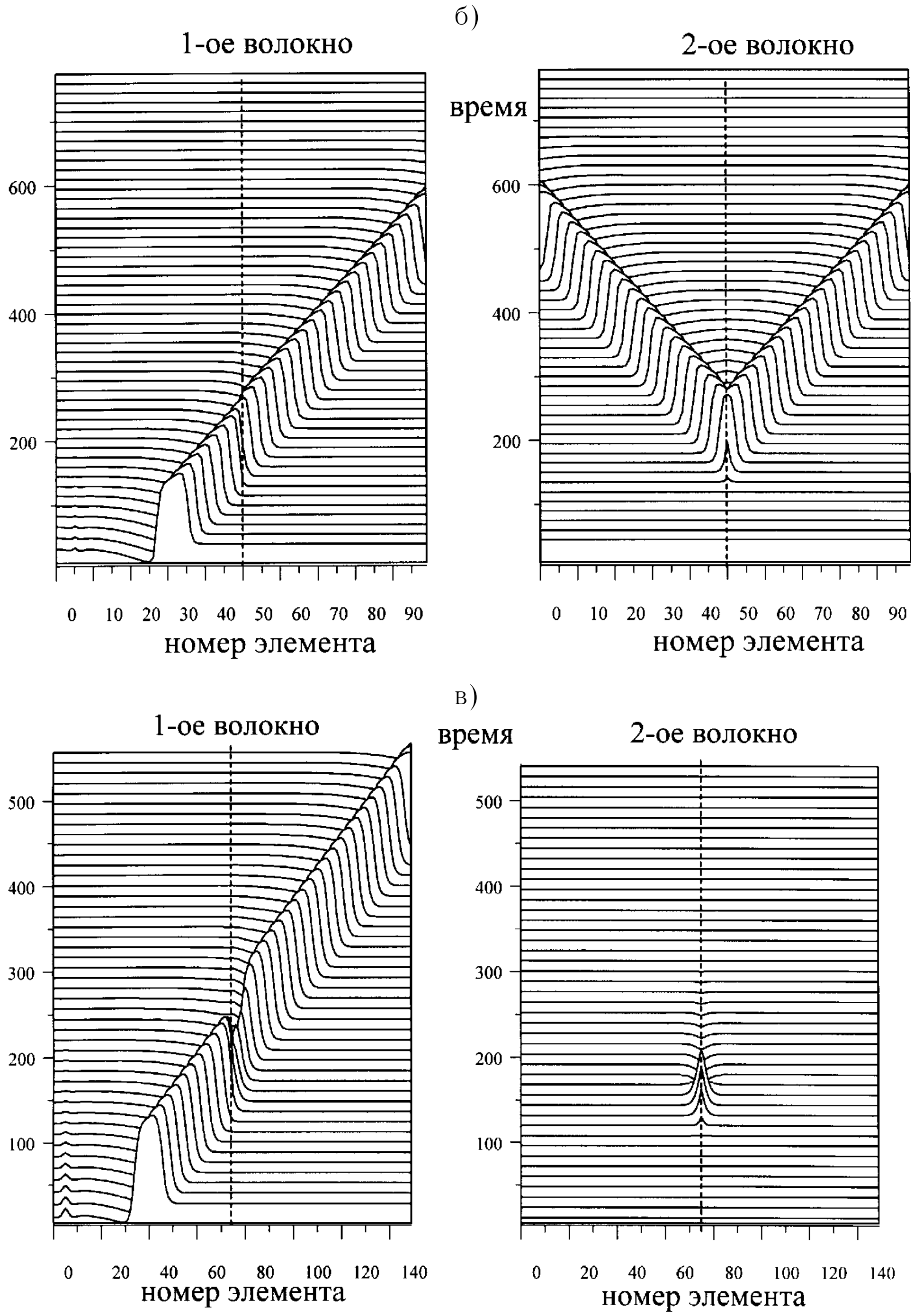


Рис. 4б,в. Взаимодействие волокон в случае точечного контакта. б) Возбуждение соседнего волокна, $a = 0{,}17$, $b = 0{,}004$, $\gamma = 3$, $h_{50} = 0{,}8$, $D_1 = D_2 = 0{,}8$. в) Прохождение импульса без возбуждения волокна, $a = 0{,}17$, $b = 0{,}004$, $\gamma = 3$, $h_{50} = 0{,}7$, $D_1 = D_2 = 0{,}44$.

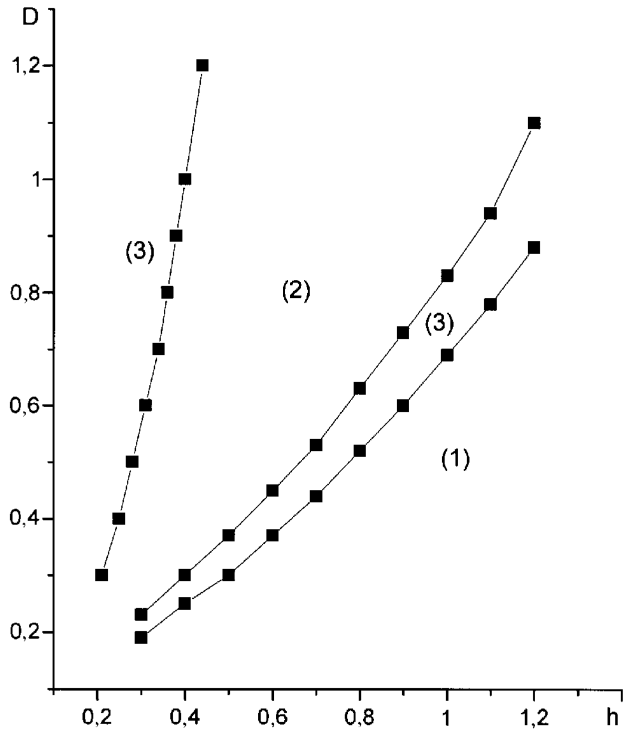


Рис. 5. Диаграмма динамических режимов точечного контакта в плоскости $\{D, h\}$ для $a = 0{,}17$. Области (1) — подавление исходного импульса, (2) — возбуждение соседнего волокна, (3) — прохождение импульса без возбуждения соседнего волокна.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 97–02–16550), программой "Соросовские аспиранты" (грант а98–387).

ЛИТЕРАТУРА

1. Tunckwell H. C. Introduction to the theoretical neurobiology: Cambridge Studies in Mathematical Biology. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
2. Hubel D. H. Eye, brain and vision. — N.Y.: W. H. Freeman and Company, 1995.
3. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах. — М.: Сов. радио, 1977.
4. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. — М.: Наука, 1987. С. 240.
5. Ноджкин А. Нервный импульс. — М.: Мир, 1965. С. 126.
6. Eilbeck J. C., Luzader S. D., Scott A. C. //Bulletin of Mathematical Biology, 1981. V. 43. № 3. P. 389.
7. Panfilov A. V. and Vasiev B. N. //Chaos. Solutions and Fractals, 1991. V. 1. № 2. P. 119.
8. Brindley J., Holden A. V., and Palmer A. A numerical model for reentry in weakly coupled parallel excitable fibers. — In: Nonlinear Wave Processes in Excitable Media. — New York: Plenum Press.
9. Ķulka A., Bode M., Purwins H. G. //Phys. Lett. A., 1995. V. 203. P. 33.
10. Perez Marino I., M. de Castro, Perez–Munuzuri M., Gomez–Gesteira M., Chua L. O., Perez–Villar V. //IEEE Trays. Circuits and Systems, 1995. V. 42. P. 665.
11. Некоркин В. И. //Изв. вузов. Радиофизика, 1988. Т. 31. № 1. С. 41.

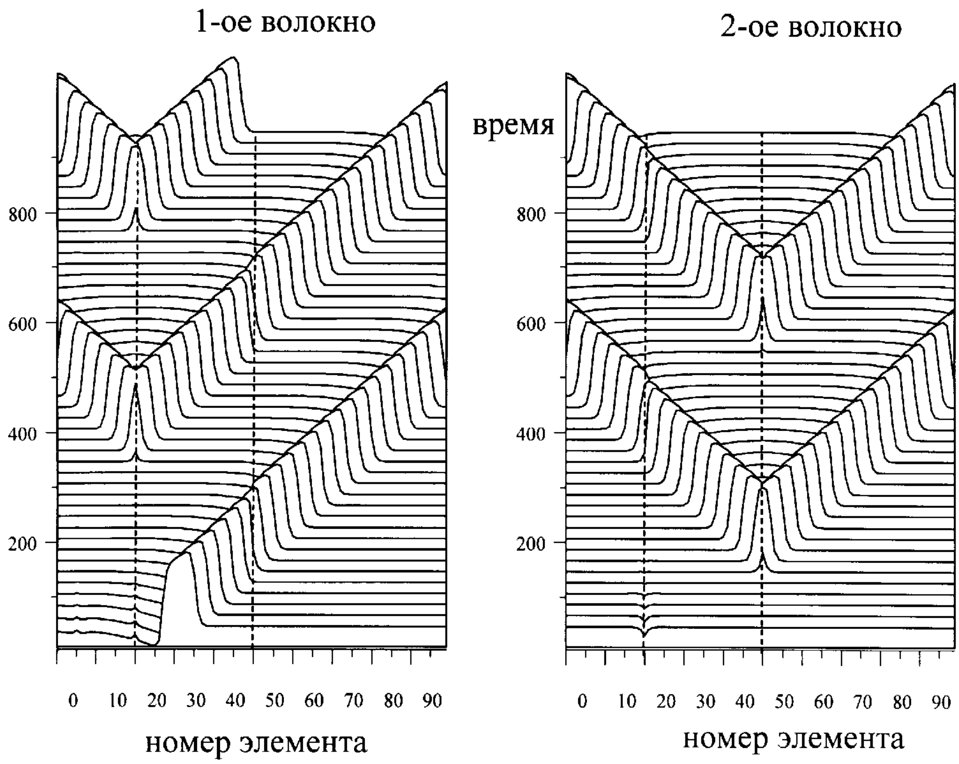


Рис. 6. Образование источника синхронизованных импульсов при двухточечном контакте между волокнами. Параметры: $a = 0{,}2$, $b = 0{,}003$, $\gamma = 3$, $D_1 = D_2 = 0{,}1$, $h_{20} = h_{50} = 10{,}03$.

12. Nekorkin V. I., Kazantsev V. B., Velarde M. G. //Phys. Lett. A., 1997. V. 236. P. 505.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 1 октября 1998 г.

DYNAMICS OF PULSE EXCITATIONS IN TWO COUPLED NERVE FIBERS

V. B. Kazantsev, D. V. Artyuhin, V. I. Nekorkin

Effects of interaction of travelling pulses in a system of two coupled nerve fibers are studied. Each fiber is mimicked by a discrete chain of coupled excitable units of FitzHue-Nagumo type. The inter-fiber interaction may be both spatially extended, homogeneous and spatially discrete, localized in some points in space. In the case of homogeneous interaction the possibility of inter-fiber synchronization is shown. When the interaction occurs in the discrete points the dynamics of single and double pin contacts is studied. Such contacts allow excitation pulse driving in the coupled nerve fibers.

УДК 519.673 : 621.396.66

СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ*

В. В. Матросов, В. П. Пономаренко

Исследуются динамические режимы и бифуркационные переходы в модели двух связанных автогенераторов с фазовым управлением при изменении начальной частотной расстройки.

Автогенераторные системы с фазовым и частотным управлением в последнее время широко обсуждаются в литературе в связи с возможностью создания на их основе эффективных источников сложных детерминированных и шумоподобных колебаний с регулируемыми характеристиками. Большой интерес проявляется к моделям связанных структур таких систем и к углубленному исследованию демонстрируемых ими асинхронных движений. В данной работе изучаются асинхронные режимы в системе двух связанных генераторов с фазовой автоподстройкой частоты (ФАПЧ), взаимодействующих через перекрестные обратные связи и однонаправленную связь по цепям управления [1, 2, 3]. В качестве парциальных выбраны системы с одной степенью свободы, демонстрирующие только регулярные режимы поведения.

Математическая модель взаимодействующих систем ФАПЧ при сделанном предположении о парциальных системах представляется нелинейной динамической системой в четырехмерном цилиндрическом фазовом пространстве U [4, 5]

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{d\tau} &= u - m\Phi_1(\varphi,\psi),\\
\varepsilon_1\frac{du}{d\tau} &= \gamma - u - (1-m)\Phi_1(\varphi,\psi) \equiv P(\varphi,u,\psi),\\
\frac{d\psi}{d\tau} &= v - n(b\Phi_2(\varphi,\psi)+\alpha\Phi_1(\varphi,\psi)),\\
\varepsilon_2\frac{dv}{d\tau} &= \beta - v - (1-n)(b\Phi_2(\varphi,\psi)+\alpha\Phi_1(\varphi,\psi)) \equiv Q(\varphi,\psi,v).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В уравнениях (1) τ — безразмерное время, φ и ψ — фазовые ошибки, u и v — вспомогательные переменные, γ и β — относительные начальные расстройки частот входного сигнала и управляемых генераторов парциальных систем, $b = k_2/k_1$, k_1 и k_2 — коэффициенты усиления цепей управления, α — параметр связи через сигналы рассогласований, ε_1, ε_2, m, n — параметры инерционности. Поведение автономных парциальных систем ФАПЧ описывается соответственно двумя первыми уравнениями системы (1), в которых надо положить $\Phi_1(\varphi,\psi) = \sin\varphi$, и двумя последними уравнениями, в которых надо положить $\Phi_2(\varphi,\psi) = \sin\psi$. В парциальных фазовых пространствах $V_1 = \{\varphi(\mathrm{mod}2\pi), u\}$ и $V_2 = \{\psi(\mathrm{mod}2\pi), v\}$ аттракторами являются состояние равновесия, соответствующее режиму стационарной генерации управляемых генераторов на частоте входного сигнала, и вращательный (2π-периодический по угловой координате) предельный цикл, отвечающий асинхронному периодическому режиму биений второго рода [6].

*Работа была представлена на летней школе—семинаре “Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

Движения, развивающиеся в системе (1), зависят от восьми параметров. Предметом данной работы явилось исследование динамических режимов, реализующихся в системе при изменении начальной расстройки β. Предпринятое исследование проведено с помощью качественно—численных методов и компьютерного моделирования на основе построения временных реализаций колебательных процессов, фазовых портретов аттракторов и однопараметрических бифуркационных диаграмм точечного отображения плоскости $\varphi = \varphi^{(0)}$ в плоскость $\varphi = \varphi^{(0)} + 2\pi$, которое порождается траекториями системы.

Рассмотрим результаты численного исследования системы (1), полученные при значениях параметров $\alpha = 0{,}025$, $b = 0{,}05$, $m = n = 0$, $\gamma = 0{,}9$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 10$ и изменении параметра β от 0 до 2,0. Предельные циклы будем характеризовать индексом вращения (k, l), где k и l — число оборотов, совершаемых за один период цикла соответственно переменными φ и ψ. В качестве исходного состояния системы при $\beta = 0$ выбран режим однооборотного φ—цикла с индексом вращения $(1, 0)$. На рис. 1, 2 приведены однопараметрические бифуркационные диаграммы $\{\bar{\beta}, v\}$, на которых параметр β изменяется от 0 до 0,35 (рис. 1а) и от 1,35 до 2,0 (рис. 2), а на рис. 3, 4 даны (φ, ψ)—проекции фазовых портретов, (u, v)—проекции сечений Пуанкаре аттракторов системы (1) и временные реализации $v(\tau)$, соответствующие $\{\bar{\beta}, v\}$—диаграммам на рис. 1, 2.

Бифуркационная диаграмма на рис. 1a характеризует движения, которые образуются в процессе преобразования колебательно—вращательного φ—цикла (рис. 3а) во вращательный предельный (φ, ψ)—цикл с индексом вращения (1,1) (рис. 3б). На рис. 1б дан фрагмент этой диаграммы в интервале изменения параметра β от 0,0218 до 0,0221. Из этого фрагмента видно, что вначале исходный предельный φ—цикл испытывает серию бифуркаций удвоения периода (при $\beta = 0{,}021812,\ 0{,}021987,\ 0{,}022017, \ldots$), в результате которых в фазовом пространстве U возникает хаотический аттрактор (рис. 3в). При значениях $\beta = 0{,}02207$ этот аттрактор разрушается, фазовые траектории из его окрестности устремляются к устойчивому состоянию равновесия A_1, где остаются при увеличении β до значения $\beta = 0{,}275$. При $\beta > 0{,}275$ состояние равновесия исчезает и система (1) переходит на вращательный цикл с индексом вращения (23,1). Далее с увеличением β наблюдается чередование периодических и апериодических движений.

На диаграмме, изображенной на рис. 1а, можно выделить 12 интервалов значений параметра β (см. табл. 1), при прохождении которых реализуется последовательность (φ, ψ)—циклов с индексами вращения $(k_i, 1)$, где $k_i = k_0 - 2i$, $k_0 = 25$, $i = \overline{1, 12}$. Примеры циклов из установленных интервалов приведены на рис. 3г, д, б для $i = 9, 11, 12$, соответственно. Границами интервалов существования (φ, ψ)—циклов служат значения β, отвечающие седло—узловым бифуркациям соответствующих вращательных циклов. Возникающие апериодические движения характеризуются на проекциях сечения Пуанкаре замкнутой инвариантной кривой со складками (рис. 3е), число складок равно числу оборотов, совершаемых за один период по переменной φ на (φ, ψ)—цикле, при исчезновении которого образуется соответствующая инвариантная кривая. С ростом β уменьшается число складок на инвариантных кривых и наблюдается увеличение областей по параметру β, соответствующих периодическим и апериодическим движениям.

На рис. 1в приведен фрагмент $\{\bar{\beta}, v\}$—диаграммы в интервале изменения β от 0,255 до 0,291. Видно, что в интервале апериодических движений (рис. 4а, б), расположенном между интервалами, соответствующими (φ, ψ)—циклам с индексами вращения (3,1) (рис. 3д) и (1,1) (рис. 3б), реализуется (φ, ψ)—цикл $L_{2,1}$ с индексом вращения $(2, 1)$. На рис. 2в этому циклу соответствуют две линии под номером **1**. С увеличением β цикл $L_{2,1}$ испытывает бифуркации удвоения периода при $\beta = 0{,}263961,\ 0{,}275508,\ 0{,}276382$, в результате которых образуются устойчивые (φ, ψ)—циклы $L^{2}_{2,1}$, $L^{4}_{2,1}$, $L^{8}_{2,1}$ с индексами вращения (4,2), (8,4), (16,8). Затем формируется хаотический ленточный аттрактор $P_{2,1}$ (рис. 4в). Аттрактор $P_{2,1}$ при увеличении β вновь преобразуется в устойчивые предельные (φ, ψ)—циклы с индексами вращения: (16,8) при $\beta = 0{,}2848$; (8,4) при $\beta = 0{,}285$; (4,2) при $\beta = 0{,}2856$; (2,1)

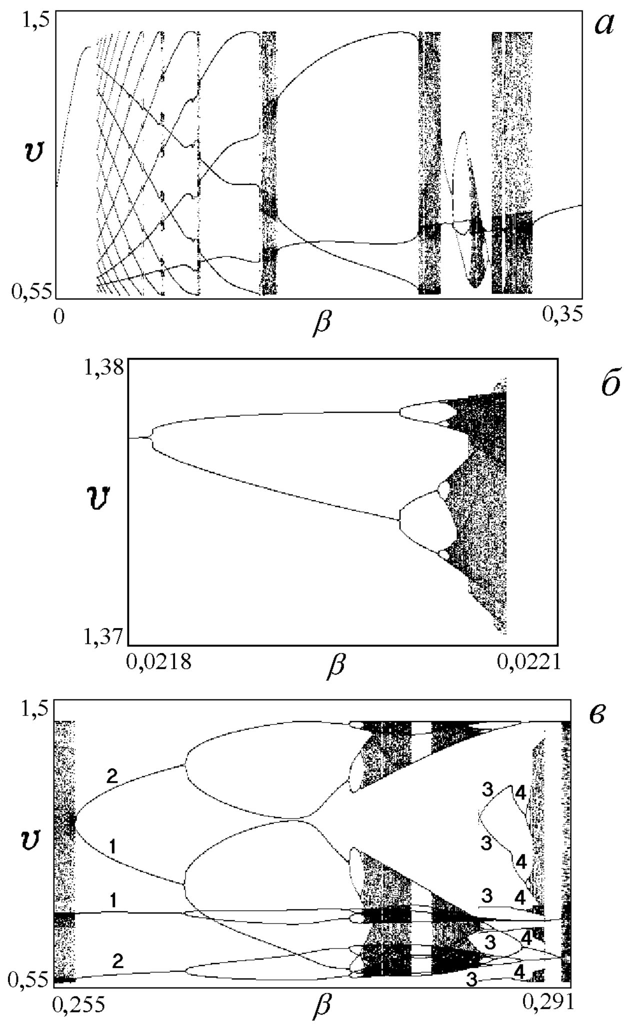

a
1,5
v
0,55
0
β
0,35
б
1,38
v
1,37
0,0218
β
0,0221
в
1,5
v
0,55
0,255
β
0,291
1
2
3
4

Рис. 1.

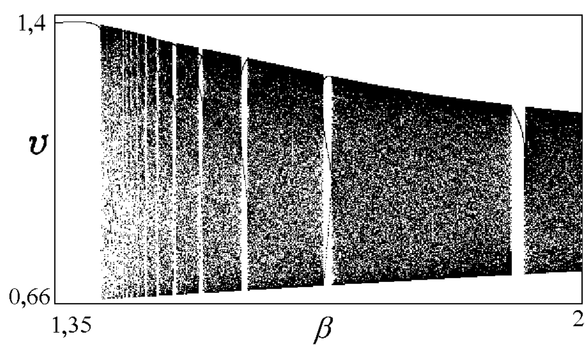

1,4
v
0,66
1,35
β
2

Рис. 2.

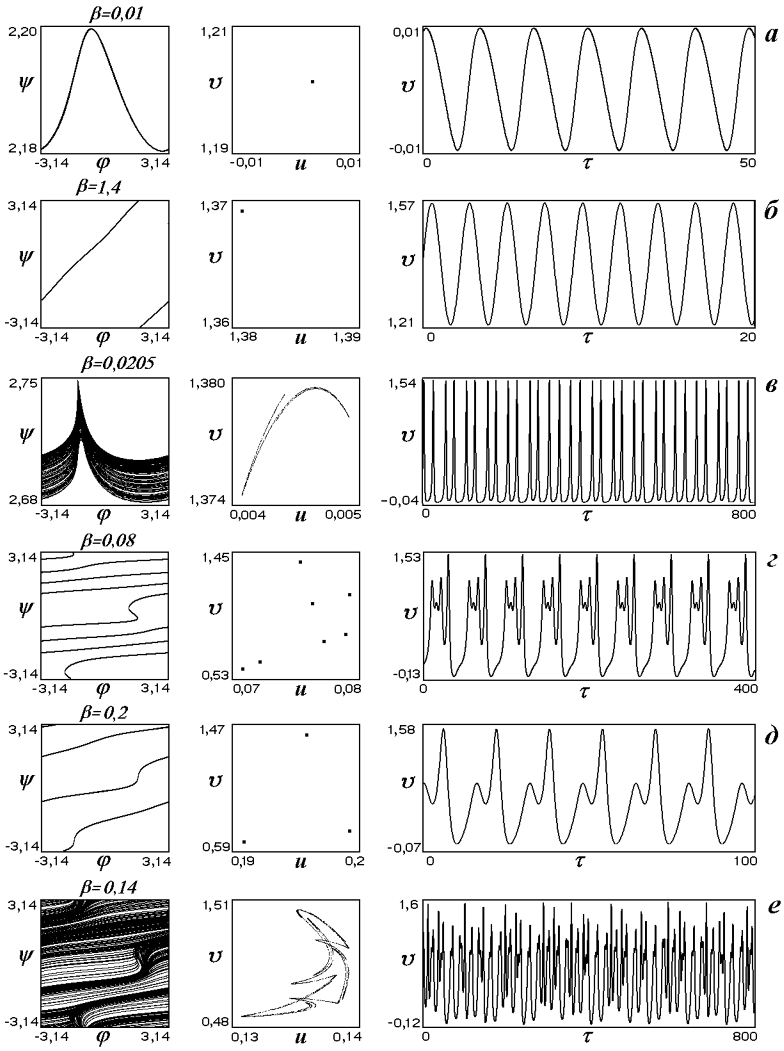


Рис. 3.

при $\beta = 0{,}2876$. Цикл с индексом вращения (2,1) исчезает при $\beta = 0{,}29044$, в результате система (1) переходит на апериодическое движение, представленное на рис. 4б. Поскольку цикл $L_{2,1}$ не инвариантен относительно замены $Z : (\varphi, \psi) \to (\varphi - \pi, \psi - \pi)$, то на интервале $\beta \in [0{,}25651,\ 0{,}29044]$ существует также (φ, ψ)–цикл $L'_{2,1}$ с индексом вращения (2,1), испытывающий с увеличением β те же бифуркации, что и цикл $L_{2,1}$. На рис. 1в циклу $L'_{2,1}$ отвечают линии **2** (на рис. 1*а* линии **2** отсутствуют).

Наряду с циклами $L_{2,1}$ и $L'_{2,1}$ и аттракторами, возникающими в результате преобразования этих циклов, на рассматриваемом интервале изменения параметра β возможно существование в фазовом пространстве U и других притягивающих множеств. Так, установлено, что при значении $\beta = 0{,}284615$ в фазовом пространстве системы (1) в результате сгущения траекторий рождается устойчивый, инвариантный относительно замены переменных Z, (φ, ψ)–цикл $\tilde{L}_{3,5}$ с индексом вращения (3,5) (рис. 4г). На рис. 1в этому циклу соответствуют пять линий под номером **3**. При $\beta = 0{,}28689$ цикл $\tilde{L}_{3,5}$ проходит через седло–узловую бифуркацию (один из мультипликаторов цикла обращается в +1), в результате которой появляются три (φ, ψ)–цикла с индексами вращения (3,5): инвариантный относительно замены Z седловой цикл $\tilde{\Gamma}_{3,5}$ и два устойчивых цикла $L_{3,5}$ и $L'_{3,5}$. По мере увеличения β циклы $L_{3,5}$ и $L'_{3,5}$ проходят через бифуркации удвоения периода, при этом рождаются циклы удвоенного периода

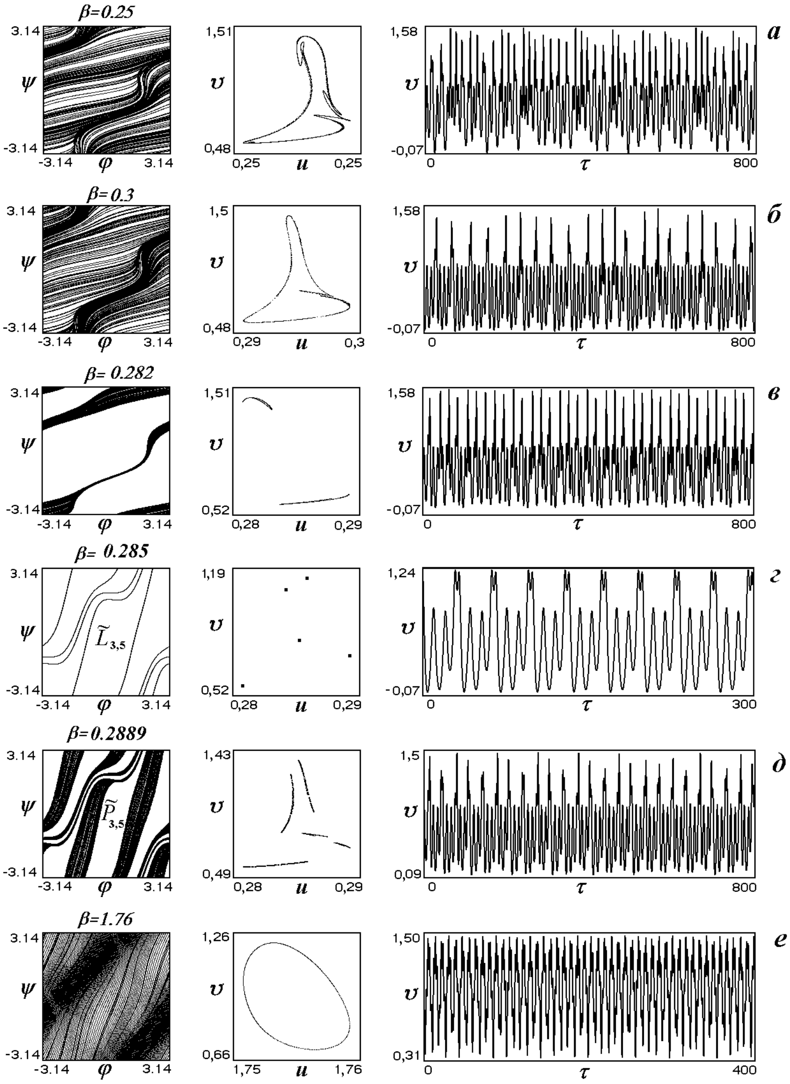


Рис. 4.

Т а б л и ц а 1

i	β	(k,l)	i	β	(k,l)
1	0,0275−0,0286	(23,1)	7	0,0491−0,05685	(11,1)
2	0,0287−0,0309	(21,1)	8	0,0584−0,06952	(9,1)
3	0,0310−0,0340	(19,1)	9	0,0719−0,0896	(7,1)
4	0,0341−0,0375	(17,1)	10	0,0958−0,1368	(5,1)
5	0,0376−0,0422	(15,1)	11	0,1474−0,241	(3,1)
6	0,0425−0,0483	(13,1)	12	0,3174−1,4073	(1,1)

$L^2_{3,5}$ и $L'^2_{3,5}$ с индексами вращения (6,10) (при $\beta = 0{,}28789$), учетверенного периода $L^4_{3,5}$ и $L'^4_{3,5}$ с индексами вращения (12,20) (при $\beta = 0{,}28812$) и т. д. Затем образовавшиеся многооборотные циклы превращаются соответственно в ленточные хаотические аттракторы $P_{3,5}$ и $P'_{3,5}$, которые при дальнейшем увеличении β объединяются и порождают хаотический аттрактор $\tilde{P}_{3,5}$ (рис. 4д). При значениях $\beta = 0{,}28913$ аттрактор $\tilde{P}_{3,5}$ разрушается и система (1) переходит на один из циклов: $L_{2,1}$ или $L'_{2,1}$. На приведенной на рис. 1в $\{\bar{\beta}, v\}$–диаграмме линии **4** отражают эволюцию цикла $L_{3,5}$, на рис. 1а линии **3** и **4** отсутствуют.

Бифуркационная диаграмма $\{\beta, v\}$ на рис. 2 отражает рождение и эволюцию устойчивого φ, ψ–тора при исчезновении (φ, ψ)–цикла с индексом вращения (1,1) (рис. 3б). Рис. 4е иллюстрирует квазипериодические колебания, соответствующие этому тору; видно, что (u, v)–проекция сечения Пуанкаре (φ, ψ)–тора есть гладкая замкнутая инвариантная кривая. С ростом β наблюдается чередование квазипериодических и периодических движений, при этом имеет место увеличение k и уменьшение l.

Полученные результаты показывают, что коллективное поведение взаимодействующих систем ФАПЧ характеризуется значительно большим набором возможных динамических режимов и их бифуркаций. Благодаря связям в системе могут существовать сложные режимы периодических колебаний и хаотические колебания, невозможные в парциальных системах. Установленные эффекты и явления динамики модели (1), обусловленные влиянием начальной частотной расстройки β, имеют принципиальное значение для понимания особенностей поведения исследуемой системы в процессе ввода в синхронный режим, а также при срыве синхронного режима в результате возмущения фазовых переменных и параметров системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–02–16559) и Федеральной целевой программы “Интеграция” (проект К0392).

ЛИТЕРАТУРА

1. Yuen J. H. // IEEE Trans. on Commun., 1972. V. Com.-20. Dec. № 6. P. 1142.
2. Ohlson J. E. // IEEE Trans. on Commun., 1975. V. Com.-23. Sep. № 9. P. 859.
3. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении: Пер. с англ./ Под ред. Ю. Н. Бакаева, М. В. Капранова. — М.: Сов. радио, 1978.
4. Пономаренко В. П., Матросов В. В. // Радиотехника и электроника, 1993. Т. 38. № 4. С. 721.
5. Пономаренко В. П., Матросов В. В. // Радиотехника и электроника, 1993. Т. 38. № 4. С. 711.
6. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. — М.: Связь, 1972.

Научно–исследовательский институт прикладной математики и кибернетики, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 13 июля 1998 г.

COMPLEX OSCILLATIONS OF COUPLED AUTOGENERATORS WITH PHASE CONTROL

V. V. Matrosov, V. P. Ponomarenko

The dynamical regimes and bifurcations in a two–loop autooscillatory system with phase control are investigated. The bifurcation diagrams present the scenario of evolution of self–excited oscillations as a function of initial frequency detuning.

УДК 517.9

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕПОЧКИ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ С ВЗАИМНЫМИ СВЯЗЯМИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ КЛАССИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ*

И. Н. Редько

В работе рассматривается постановка задачи и представлены результаты оценки области глобальной устойчивости состояния равновесия цепочки систем фазовой синхронизации с взаимными связями методами теории классификации объектов.

Математической моделью цепочки систем фазовой синхронизации с взаимными связями является система дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{d\varphi_n}{dt} + \sin\varphi_n = \gamma - \delta\sin\varphi_{n-1} - \chi\sin\varphi_{n+1}\,, \qquad n = \overline{1,\,N}. \tag{1}$$

Состояние равновесия системы соответствует установлению во всех элементах цепочки режима синхронизма. Рассмотрим задачу выделения в ограниченной области параметров $A(0 \le \delta \le 2{,}5,\ 0 \le \chi \le 2{,}5,\ 0 \le \gamma \le 2)$ области глобальной устойчивости состояния равновесия методами теории классификации объектов. Подобная задача рассматривалась в [4, 5] для выделения в пространстве параметров как области глобальной устойчивости состояния равновесия, так и областей параметров, соответствующих неизменной структуре фазового пространства нелинейных динамических систем второго, третьего порядков. В данной работе возможности предлагаемого подхода используются для оценки области глобальной устойчивости состояния равновесия динамической системы с высокой размерностью фазового пространства.

В терминах теории классификации задачу выделения области глобальной устойчивости можно интерпретировать как задачу разделения заданной области параметров на два класса: класс 1 — область параметров, при которых состояние равновесия глобально устойчиво, и класс 2 — область параметров, соответствующая другим структурам фазового пространства. Для получения оценки необходимо сформировать обучающее множество — множество точек параметров, для которых известно, какому классу они принадлежат. Оценкой границы области глобальной устойчивости является разделяющая поверхность

$$W(a) = w_1 f_1(\delta) + w_2 f_2(\chi) + w_3 f_3(\gamma) + w_4\,,$$

где $f_1(\delta)$, $f_2(\chi)$, $f_3(\gamma)$ — функции первого или второго порядков. Разделяющую поверхность можно получить известными вычислительными процедурами [2], предъявляя векторы обучающего множества и корректируя коэффициенты w_i.

Так как вид разделяющей поверхности неизвестен, будем выбирать точки параметров для обучающей выборки в узлах сетки с равномерным шагом, последовательно удваивая количество узлов по каждому параметру. Для каждой точки параметров проведем исследование структуры фазового пространства по следующему принципу. Так как каждая координата является периодической, то в фазовом

*Работа была представлена на летней школе—семинаре "Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня – 2 июля 1998 г.

пространстве рассмотрим область $D(0 \leq \varphi_n \leq 2\pi)$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Поскольку в фазовом пространстве невозможно существование самопересекающихся траекторий, то поверхности, отделяющие области притяжения различных устойчивых многообразий, обязательно пересекают какое-либо ребро многогранника D. Поскольку вид границ областей притяжения неизвестен, будем выбирать начальные точки с постоянным шагом на ребрах многогранника и путем численного интегрирования определять тип предельного множества выбранной траектории. Если предельным множеством всех рассмотренных траекторий является состояние равновесия, то рассмотренная точка параметров относится к классу 1; если предельным множеством хотя бы одной траектории не является состояние равновесия, то такая точка параметров относится к классу 2.

Качество оценки структуры области параметров A будем характеризовать вероятностью ошибки, по крайней мере, на одном из этапов обучения, классификации или выбора точек в пространстве параметров:

$$P_{\text{ош}} = 1 - (1 - P_{\text{обуч}})^{\nu}(1 - P_{\text{сет}})^{*}(1 - P_{\text{прав}}).$$

Здесь ν — количество точек в обучающем множестве.

Доказано [5], что с увеличением длины обучающего множества величина $P_{\text{ош}}$ достигает минимального значения при $\nu = \nu_{\min}$. Разделяющую поверхность, полученную на обучающем множестве, состоящем из $\nu_{\min}$ точек, примем за оценку структуры заданной области параметров системы (1).

В результате применения предлагаемого способа для оценки структуры области параметров A системы (1) для $N = 10$ установлено, что минимум $P_{\text{ош}} = 0{,}15$ достигается на множестве из 124 точек обучающего множества. Оценка структуры области A получена в виде трехмерной кусочно—линейной решающей функции. Выделены области параметров трех типов: область 1 — область глобальной устойчивости состояния равновесия, область 2 — значения параметров, при которых не выполняются условия существования состояния равновесия, область 3 — значения параметров, при которых в фазовом пространстве кроме состояния равновесия существуют устойчивые многообразия других типов.

На рис. 1 приведены проекции указанных областей на плоскости $\gamma = 0{,}01, \gamma = 0{,}2, \gamma = 0{,}5$. Графики иллюстрируют изменения области глобальной устойчивости и области существования состояния равновесия системы при изменении начальной расстройки в осцилляторах.

Полученная кусочно—линейная решающая функция позволяет оценить область глобальной устойчивости в проекции на любую плоскость параметров из заданной области исследования $A(0 \leq \delta \leq 2{,}5,\ 0 \leq \chi \leq$ $0 \leq \gamma \leq 2)$, получить представление о тенденции изменения области глобальной устойчивости. Результаты проведенной работы могут служить основой для более детального исследования структуры рассматриваемой области параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афраймович В. С., Некоркин В. И., Осипов Г. В., Шалфеев В. Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. — Горький, 1989.
2. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. — М.: Наука, 1978.
3. Вапник В. Н., Червоненкис А. И. Теория распознавания образов. — М.: Наука, 1974.
4. Редько И. Н. Оценка области глобальной устойчивости уарвнения маятникового типа методами теории классификации объектов. — В кн.: 4 Конференция "Нелинейные колебания в механических системах". — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1996.
5. Редько И. Н., Шалфеев В. Д. Примерение методов теории классификации объектов для оценок областей существования установившихся движений //Вестник ННГУ, Сер. Радиофизика (Нелинейная динамика — синхронизация и хаос), 1998.

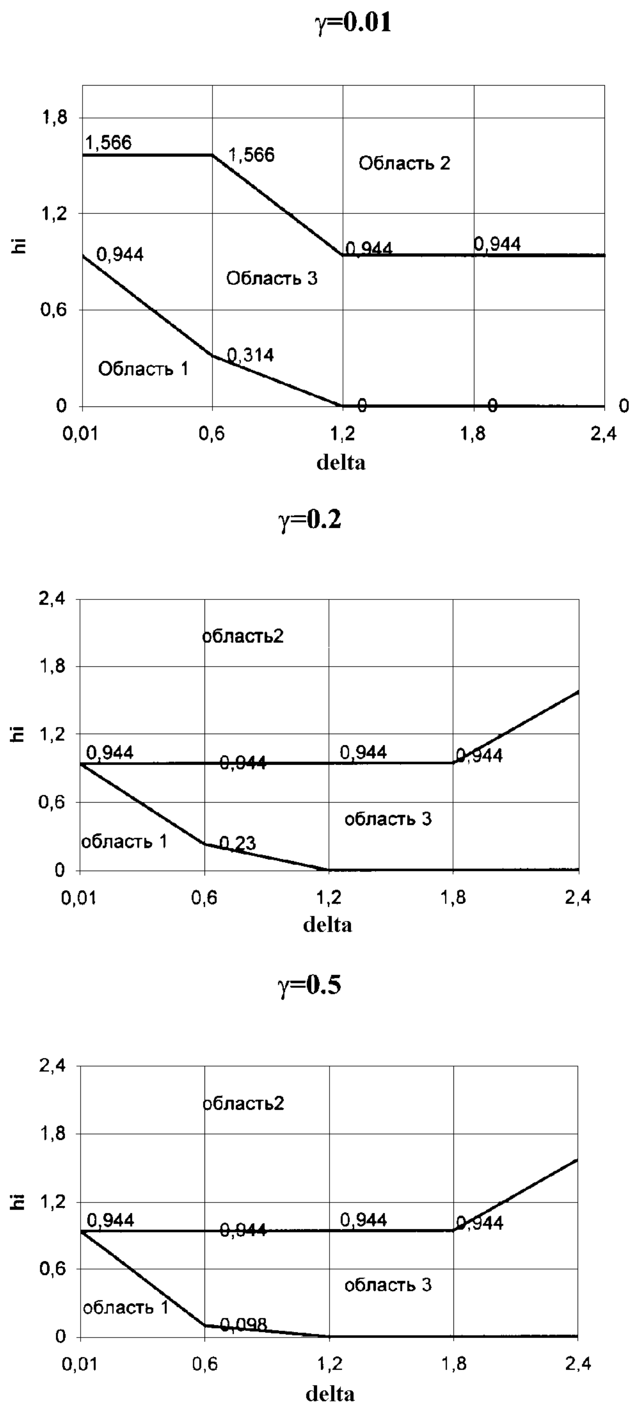

γ=0.01
1,566
1,566
Область 2
0,944
0,944
0,944
Область 3
0,314
Область 1
0
0
0
hi
delta
γ=0.2
область2
0,944
0,944
0,944
0,944
область 3
область 1
0,23
hi
delta
γ=0.5
область2
0,944
0,944
0,944
0,944
область 3
область 1
0,098
hi
delta

Рис. 1.

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
1 октября 1998 г.

ESTIMATION OF EQUILIBRIUM STATE GLOBAL STABILITY DOMAIN IN PHASE SINCHRONIZATION SYSTEM CHAIN WITH CORRELATIONS BY IMAGE RECOGNITION THEORY METHODS

I. N. Red'ko

The problem statement and the estimation results are given on the problem of equilibrium state global stability domain in phase synchronization systems chain with correlations using the methods of the image recognition theory.

УДК 621.373.1

МОДЕЛЬ НЕЙРОНА С ОСЦИЛЛЯТОРНОЙ АКТИВНОСТЬЮ НИЖЕ ПОРОГА ВОЗБУЖДЕНИЯ*

В. Б. Казанцев, В. И. Некоркин, М. Г. Велардэ

В работе предлагается динамическая модель нейрона, обладающего спонтанными периодическими колебаниями ниже порога возбуждения. Такие нейроны, в частности, играют важнейшую роль в проблеме координации движений головным мозгом, задавая универсальный ритм мышечных сокращений. Модель строится на основе известных модельных динамических систем и описывается системой дифференциальных уравнений четвертого порядка. Получено хорошее качественное соответствие динамики модели с экспериментальными данными реальных нейронов.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из проблем, интенсивно изучаемых нейрофизиологами в последние годы, является исследование механизмов координации движений, осуществляемых нервной системой у животных и человека. Как оказывается, любое движение происходит не непрерывно, а в некотором смысле (кинематическом) последовательно, т. е. имеет характерный временной масштаб, определяемый частотой $\sim$ 10 Гц. Этот временной масштаб, согласно утверждению физиологов, означает, что нервная система осуществляет контроль за сокращением мышц не чаще, чем через временной интервал $\sim$ 100 мс. Это определяет в координации движений своего рода универсальный ритм, не меняющийся от особи к особи и от вида к виду [1, 2, 3].

Последние исследования [4], проведенные нейрофизиологами, показывают, что в проблеме координации движений нервной системой важнейшую роль играют, т. н. *нижние оливы* (inferior olive) — группы нейронов, расположенные в стволе головного мозга (brain stem) (см. рис. 1). Эти нейроны создают тот самый универсальный ритм (10 Гц), на основе которого происходит любое мышечное сокращение. Характерной особенностью таких нейронов является наличие спонтанных, близких к гармоническим колебаний (с частотой $\sim$ 10 Гц), происходящих ниже порога возбуждения нейрона [2, 3]. Эти колебания, имеющие по отношению к шумам достаточно большую амплитуду, однако не вызывающие потенциал действия (action potential) и возбуждения нейрона, называют *подпороговыми*. Возбуждение же нейронов оливы может происходить за счет внешнего воздействия на данный нейрон или за счет случайных флуктуаций и также обладает своими специфическими особенностями.

Понимание и изучение механизмов функционирования сложных нейронных систем, таких, например, как нижние оливы, с помощью методов нелинейной динамики требуют, прежде всего, построения адекватной модели единицы ансамбля — отдельного нейрона. Такая модель должна удовлетворять, по крайней мере, двум основным требованиям. Во-первых, она должна отражать результаты реального нейрофизиологического эксперимента, т. е. воспроизводить, хотя бы качественно, основные динамические режимы реального нейрона. Во-вторых, она должна быть относительно простой, чтобы иметь возможность изучения динамики ансамбля нейронов.

В этой работе мы предлагаем модель для нейрона оливы — нейрона с осцилляторной активностью ниже порога возбуждения. В первой части работы представлен краткий обзор некоторых известных

*Работа была представлена на летней школе—семинаре “Дни нелинейной динамики", Н. Новгород, 30 июня — 2 июля 1998 г.

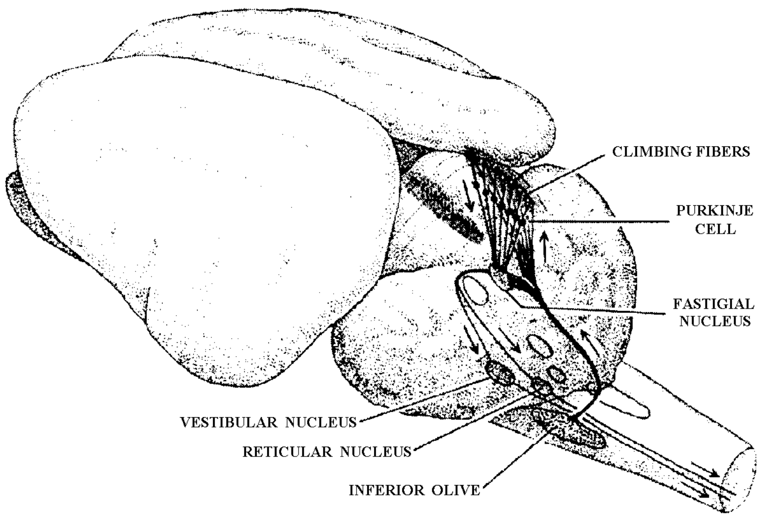


Рис. 1. Мозжечок. Расположение нижних олив (inferior olive) в стволе головного мозга. Иллюстрация взята из работы [4].

и широко применяемых моделей нейронов. Во второй части мы изложим основную идею и общий вид нашей модели, опираясь на известные модельные системы. Третья часть содержит результаты моделирования в сравнении с экспериментальными данными по динамике нейронов оливы. В заключении представлено краткое обсуждение полученных результатов.

1. МОДЕЛИ НЕЙРОНОВ

В природе существует множество различных типов нейронов, отличающихся друг от друга как по своему физиологическому строению, так и по функциональным особенностям. Как следствие этого, существует большое количество различных моделей, отражающих характерные режимы поведения нейрона того или иного типа (см., например, обзор [5]).

Одной из наиболее универсальных черт реальных нейронов является их способность генерировать импульс возбуждения (потенциал действия). Классической моделью нейрона, описывающей, в частности, возникновение потенциала действия, является модель Ходжкина—Хаксли [6, 7], основанная на результатах реальных нейрофизиологических экспериментов с гигантским аксоном кальмара. В ней подробно рассмотрена динамика ионных токов через клеточную мембрану. Однако, в силу большого числа динамических переменных и параметров, исследование ее с помощью аппарата нелинейной динамики, а также использование в качестве единицы нейронного ансамбля представляется затруднительным. Более простой моделью (две динамические переменные), отражающей (качественно) основные особенности динамики потенциала клеточной мембраны, является модель Фитц—Хью—Нагумо (ФХН) [8, 9], ставшая также классической для описания распространения импульса возбуждения по нервному волокну. С динамической точки зрения, ФХН представляет собой систему релаксационного типа.

Как показывают эксперименты, для нейронов различных областей нервной системы достаточно типичным свойством является колебательная активность специфической формы. Эти колебания имеют ярко выраженные быстрый и медленный временные масштабы (spike-burst behavior) и могут быть хаотическими. Одной из популярных моделей нейронов такого типа является модель Хиндмарша—

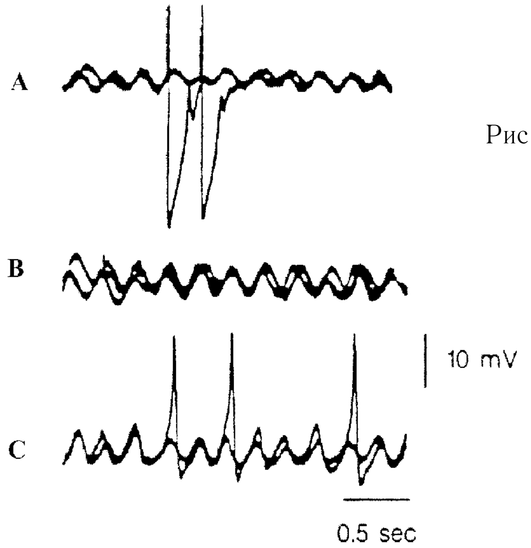


Рис. 2. Подпороговые осцилляции нейронов нижних олив, полученные в экспериментах vitro. A, B, C — временные реализации при различных типах искусственной стимуляции клеточной мембраны. Рисунок взят из статьи [2].

Розе [10], имеющая три независимые переменные. Из них одни описывают (качественно) динамику медленных ионных токов, другие — быстрых.

При изучении коллективного поведения больших нейронных ансамблей, в частности, процессов синхронизации и самоорганизации, в качестве единицы ансамбля часто используются простые фазовые осцилляторы (см., например, обзор [11]).

2. МОДЕЛЬ НЕЙРОНА С ПОДПОРОГОВЫМИ ОСЦИЛЛЯЦИЯМИ

На рис. 2 представлены типичные временные реализации, полученные при экспериментальном исследовании нейронов нижних олив [2, 3]. При изменении некоторого контрольного параметра (например, тока инжекции, деполяризующего клеточную мембрану) наблюдается возникновение квазигармонических колебаний определенной амплитуды (рис. 2, B). Эта амплитуда увеличивается с увеличением тока инжекции и, когда она достигает некоторого порогового значения (порога возбуждения), на "высоком" полупериоде возникает короткий мощный импульс возбуждения (потенциал действия) (рис. 2, C). Отметим, что этот импульс не сбивает ни частоту, ни фазу подпороговых колебаний.

Таким образом, динамическая система, моделирующая динамику нейрона оливы (рис. 2), должна обладать двумя основными характерными чертами:

1) способностью генерировать квазигармонические колебания определенной частоты и амплитуды,
2) иметь порог возбуждения, при превышении которого должен возникать мощный импульс релаксационного типа.

Выделим две наиболее простые динамические системы, обладающие этими свойствами по отдельности.

1) Классическим примером системы с квазигармоническими колебаниями является генератор Ван дер Поля с мягким режимом возбуждения. Его динамика описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y\,, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \mu(\gamma - x^2)\,y - \omega^2 x\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mu \ll 1$ — малый параметр, ω — частота колебаний. При $\gamma = 0$ в системе (1) происходит бифуркация Андронова—Хопфа, и при $\gamma > 0$ на фазовой плоскости рождается устойчивый предельный цикл. Рис. 3а иллюстрирует динамику системы (1) на фазовой плоскости и изменение амплитуды колебаний (качественно) при увеличении параметра γ.

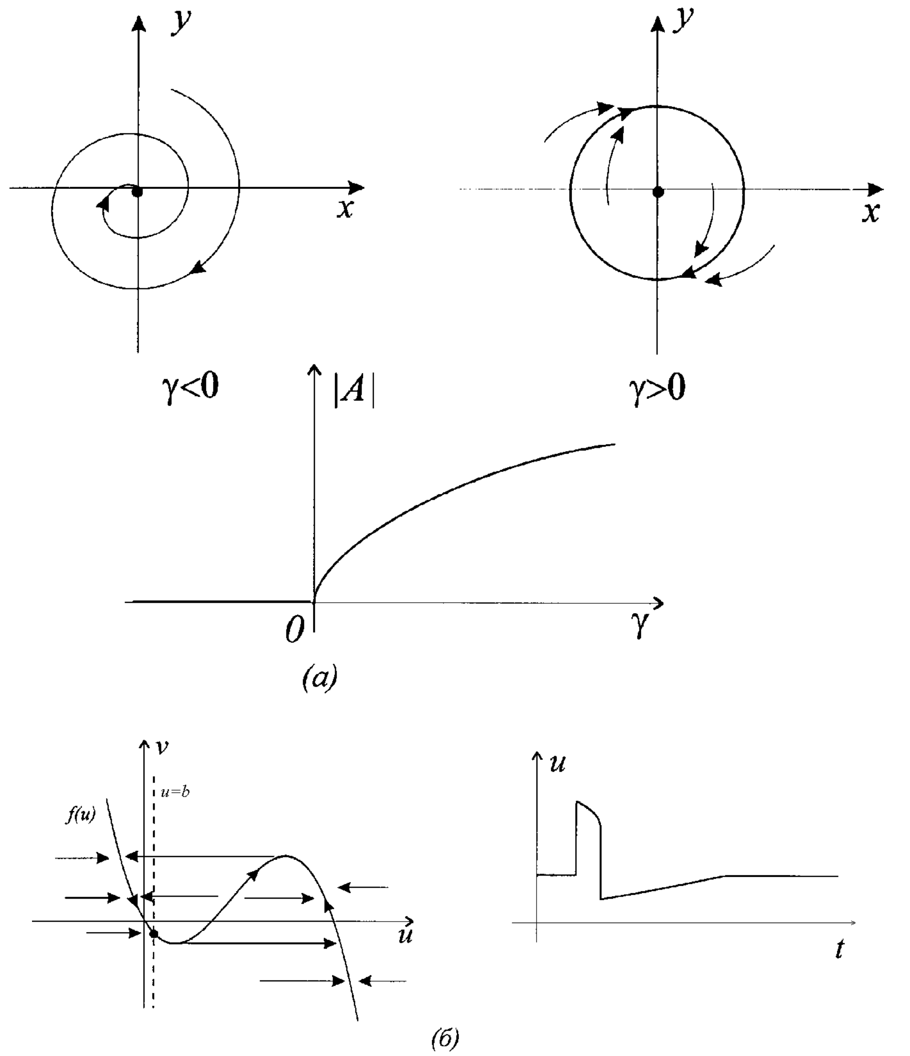


Рис. 3. (а) Фазовые портреты и бифуркационная диаграмма генератора Ван дер Поля (1). Здесь $|A|$ — амплитуда колебаний. При $\gamma > 0$ в системе мягко рождается устойчивый предельный цикл. (б) Фазовый портрет и характерная временная реализация импульса возбуждения в модели Фитц—Хью—Нагумо (2).

2) В качестве системы, способной генерировать импульсы релаксационного типа, выберем модельные уравнения Фитц—Хью—Нагумо

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = f(u) - v\,, \\[2ex] \dfrac{dv}{d\tau} = \varepsilon(u - b)\,, \end{cases} \tag{2}$$

где $f(u)$ — нелинейная функция вида кубической параболы (см. рис. 3б), $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр,

b — параметр, изменяющий порог возбудимости. Динамику системы (2) иллюстрирует фазовая плоскость (рис. 3б). При превышении порога возбуждения (например, за счет внешнего воздействия или случайных флуктуаций) возникает релаксационный импульс, после чего система возвращается в исходное устойчивое состояние равновесия. Отметим, что переменная u качественно описывает динамику мембранного потенциала нейрона, медленная переменная v отвечает за "восстановление" устойчивого равновесного состояния (потенциала покоя нейрона).

Построим теперь систему, которая обладала бы свойствами 1) и 2) одновременно, т. е. способную генерировать импульсы возбуждения на фоне устойчивого гармонического ритма. Это можно сделать, объединив системы ФХН (2) и ВдП (1) в единую динамическую систему четвертого порядка:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \dfrac{du}{d\tau} = f(u) - v - y\,, \\[2ex] \dfrac{dv}{d\tau} = \varepsilon_2(u + I)\,, \\[2ex] \dfrac{dx}{d\tau} = y\,, \\[2ex] \dfrac{dy}{d\tau} = [\Phi(u, I) - x^2]y - \Omega(u, I)x\,. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь переменные ФХН части (u, v) "отвечают" за генерацию импульсов, а ВдП переменные (x, y) — за создание ритма. Параметр I является контрольным параметром и играет роль (качественно) тока инжекции для реального нейрона. Он управляет порогом возбуждения системы и, одновременно, амплитудой и частотой подпороговых колебаний. Функции $\Phi(u, I)$ и $\Omega(u, I)$ учитывают изменение ритма — амплитуды и частоты колебаний — в зависимости от "состояния мембраны" — мембранного потенциала u и тока инжекции I. Конкретный вид этих функций мы обсудим ниже. Введение второго малого параметра ε_2 позволяет согласовать между собой в модели (3) характерные временные масштабы релаксационного импульса системы (2) и гармонических колебаний системы (1).

3. ДИНАМИКА МОДЕЛИ НЕЙРОНА (3)

3.1. Характерные динамические режимы

Рассмотрим динамику модели (3) для конкретных видов нелинейных функций и значений параметров. Для удобства исследования аппроксимируем нелинейность $f(u)$ кусочно–линейной функцией вида

$$f(u) = \begin{cases} -m_1 u\,, & u < a, \\[2ex] m_2 u - a(m_1 + m_2)\,, & a < u < 1, \\[2ex] -m_3 u - a(m_1 + m_2) + m_3 + m_2\,, & u > 1. \end{cases} \tag{4}$$

Выберем функции Φ и Ω в виде

$$\Phi(u, I) = \gamma_0(1 - 5I + 5u)\,, \quad \Omega(u, I) = \omega_0^2.$$

Зафиксируем значения параметров $\{m_1 = 1,\ m_2 = 0{,}1\,,\ m_3 = 1{,}6\,,\ a = 0{,}01\,,\ \gamma_0 = 0{,}025\,,\ \omega_0^2 = 0{,}2\}$.

Рис. 4 иллюстрирует основные динамические режимы системы (3) при изменении контрольного параметра I. Для конкретных значений I представлены временная реализация, $u(t)$, изменения мембранного потенциала "нейрона" и соответствующая ей фазовая траектория модели (3) в плоскости (x, u).

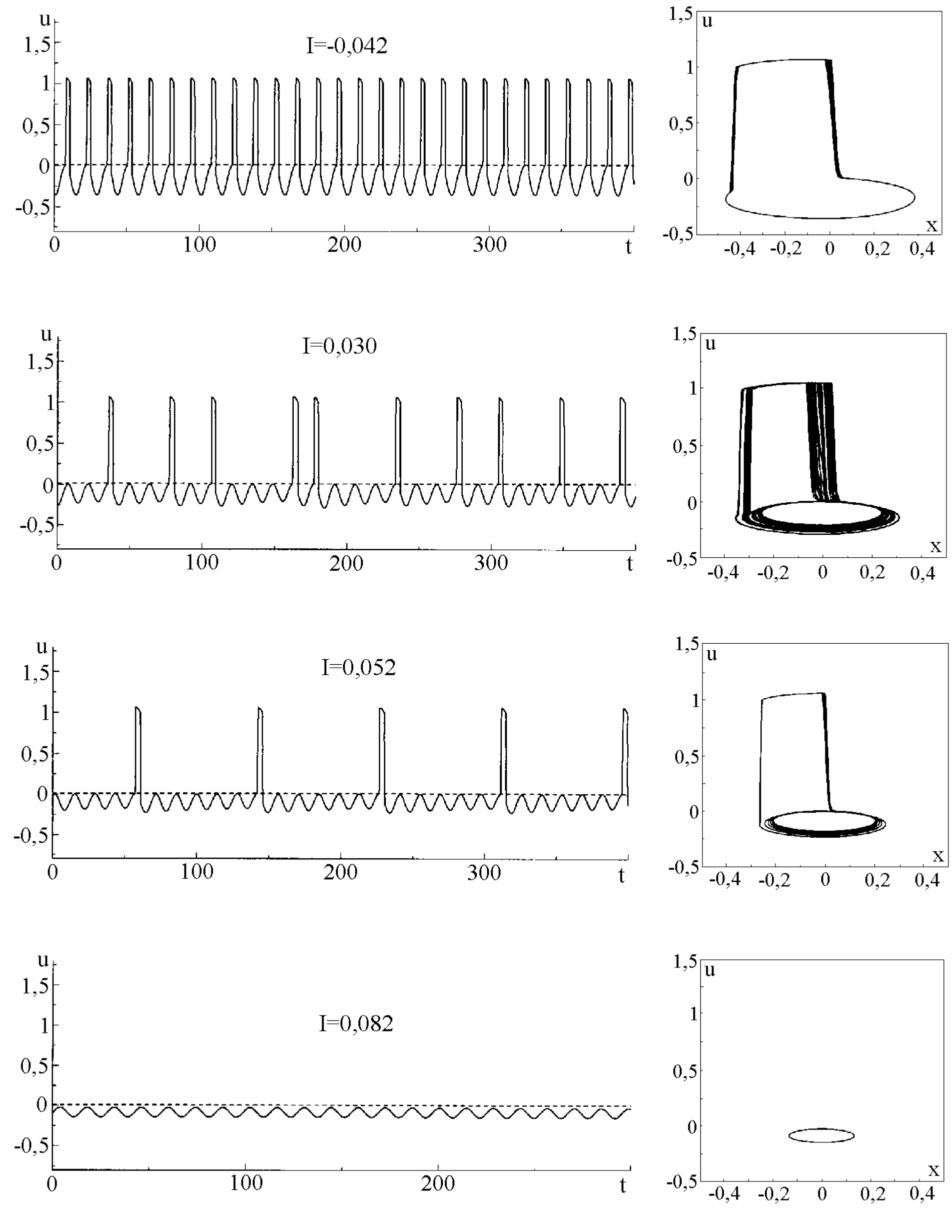


Рис. 4. Временные реализации переменной u и соответствующие им фазовые траектории в плоскости (x, u) системы (3) при различных значениях контрольного параметра I.

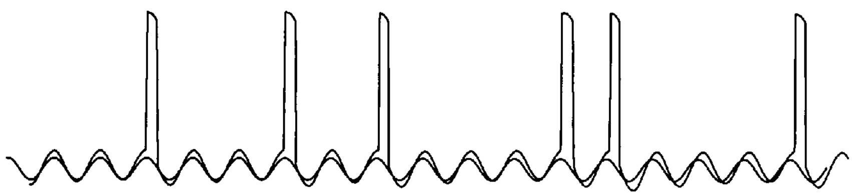


Рис. 5. Подпороговые осцилляции. Взаимное наложение временных реализаций модели (3) до и после появления спаек.

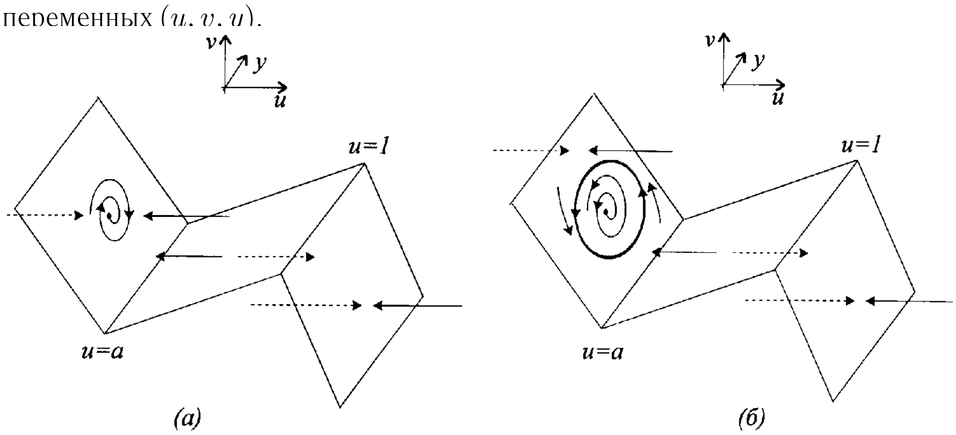
При $I > 0{,}2$ система находится в устойчивом состоянии равновесия, что соответствует состоянию покоя нейрона. Уменьшение I приводит к мягкому рождению квазигармонических колебаний, отвечающих подпороговым осцилляциям нейрона ($I = 0{,}82$ на рис. 4). При $I = 0{,}052$ эти осцилляции на своем "высоком" полупериоде могут достигать порога и образовывать импульс возбуждения. При дальнейшем уменьшении, $I = 0{,}03$, частота появления импульсов возрастает, и, наконец, при $I = -0{,}042$ достигает своего максимального значения. Это соответствует режиму, когда импульсы (спайки) происходят на каждом высоком полупериоде подпороговых колебаний.

Отметим, что динамика модели (3) демонстрирует хорошее качественное соответствие с поведением реального нейрона нижних олив (рис. 2, C). Для сравнения, на рис. 5 представлены наложенные друг на друга временные реализации подпороговых осцилляций модели и режима с образованием импульсов возбуждения.

3.2. Фазовое пространство

Рассмотрим кратко характерные особенности разбиения на траектории фазового пространства четырехмерной системы (3). Она имеет одно состояние равновесия с координатами $\{u_0 = -I,\ v_0 = f(-I),\ x_0 = 0,\ y_0 = 0\}$, которое является устойчивым фокусом при $\gamma(u_0, I) < 0$ и теряет свою устойчивость через бифуркацию Андронова–Хопфа при $\gamma(u_0, I) > 0$. Тип состояния равновесия в этом случае изменяется на седло–фокус с корнями характеристического уравнения $\{\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_{3,4} = h \pm i\omega\ (h > 0)\}$.

Так как $\varepsilon_1 \ll 1$, система (3) является системой с малым параметром содержит при старшей производной. Следовательно, движения в фазовом пространстве системы могут быть разделены на быстрые и медленные [12]. Многообразие медленных движений системы (3) близко к поверхности, задаваемой уравнением $v + y = f(u)$. Рис. 6 иллюстрирует (качественно) вид этого многообразия в пространстве переменных (u, v, y).



При этом, по отношению к быстрым движениям (u — быстрая переменная) "крайние" части этой поверхности, $u < a$ и $u > 1$, являются устойчивыми, а средняя часть — неустойчивой. На многообразии медленных движений траектории системы (3) описываются системой, близкой к следующей системе третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot v = \varepsilon_2(f^{-1}(v+y) + I), \\ \dot x = y, \\ \dot y = \left[\Phi\left(f^{-1}(v+y), I\right) - x^2\right] y - \Omega\left(f^{-1}(v+y), I\right) x, \end{cases} \tag{5}$$

где через $f^{-1}(\cdot)$ обозначена функция, обратная к $f(u)$. В случае (4) функция f^{-1} является линейной на каждом из трех участков поверхности медленных движений. Рассмотрим более подробно участок

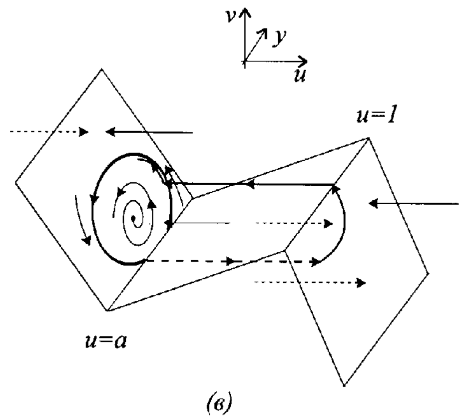


Рис. 6. Качественное представление фазового пространства системы (3) в пространстве переменных (u, v, y). Многообразие медленных движений при кусочно–линейной аппроксимации функции $f(u)$. (а) Состояние равновесия устойчиво — нейрон в состоянии покоя. (б) Устойчивый предельный цикл на многообразии — спонтанные подпороговые осцилляции нейрона. (в) Образование импульса возбуждения, спайки при достижении предельным циклом границы устойчивой части многообразия.

этой поверхности при $u < a$, содержащий состояние равновесия. Заметим, что уравнения (5) также имеют малый параметр $\varepsilon_2 \ll 1$. Движения по переменной v являются медленными и в нулевом приближении $\varepsilon_2 = 0$ можно положить $v = \mathrm{const}$. Тогда мы приходим к двумерной системе типа (1), где в результате бифуркации Андронова–Хопфа на плоскости (в данном случае на многообразии) рождается устойчивый предельный цикл. Когда амплитуда этого предельного цикла достигает границы $u = a$, траектория попадает в область быстрых движений по переменной u и, спустя некоторое время, вновь возвращается на устойчивую часть $u < a$ поверхности медленных движений. Это соответствует образованию импульса возбуждения (спайки). Качественно процесс возникновения спайки иллюстрирует последовательность картинок на рис. 6, отвечающая соответственно последовательности временных реализаций на рис. 4.

3.3. О возможности хаотической динамики модели (3)

Заметим, что процесс образования спаек, представленный на рис. 6, допускает возможность нерегулярной, хаотической динамики в модели (3). Такой “переброс” траекторий с одной устойчивой части многообразия медленных движений на другую достаточно типичен для образования хаотический аттракторов релаксационного типа по сценарию перемежаемости (см., например, [13, 14]). В таких системах этот переброс обеспечивает нерегулярное *рассогласование* колебаний (“ламинарной” фазы), выражающееся в нерегулярном изменении амплитуды и фазы после скачка (“турбулентной” фазы). Однако, для описания нейронов с подпороговыми осцилляциями системы такого сорта не приемлемы. Для этих нейронов образование спайки или импульса возбуждения не должно приводить к существенному нарушению ритма, т. е. амплитуды и фазы подпороговых колебаний. Рассогласование здесь выражается в нерегулярном смещении колебаний относительно порога возбуждения после возникновения спайки. Это возможно в системе (3), т. к. на многообразии динамика является трехмерной (5). Степень этого рассогласования в сильной мере зависит от функций Φ и Ω. Так, например, при $\Phi = \gamma_0$ и $\Omega = \omega_0^2$ переменные (x, y) оказываются вообще независимыми от “мембранного потенциала” u и колебания носят регулярный характер. При нетривиальном выборе этих функций возможно получить нерегулярные колебания, выражающиеся как нерегулярная последовательность спаек на фоне устойчивого квазигармонического ритма. На рис. 4 представлена временная реализация таких нерегулярных колебаний для значения $I = 0{,}03$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена модель для описания динамики нейрона с осцилляторной активностью ниже порога возбуждения. Эта модель реализуется в виде системы дифференциальных уравнений четвертого порядка и имеет ясное динамическое толкование. Она представляет собой совокупность двух взаимодействующих подсистем, отвечающих за разные функции. Одна из подсистем, генератор Ван дер Поля, отвечает за создание квазигармонических колебаний нейрона ниже порога возбуждения, другая, система Фитц–Хью–Нагумо, описывает возникновения импульсов возбуждения (спаек). В совокупности модель реализует колебания, имеющие хорошее качественное соответствие с экспериментальными данными исследования реальных нейронов нижних олив (inferior olive).

В заключение отметим, что наличие осцилляторной активности ниже порога возбуждения является достаточно типичным свойством и многих других типов нейронов центральной нервной системы [15]. Рис. 7 иллюстрирует осциллограммы нейронов ECIIsc (entorhinal cortex stellate cells), полученные при различных значениях внешнего тока инжекции. Здесь четко видны близкие к периодическим подпороговые осцилляции, увеличение амплитуды которых приводит к возникновению спаек.

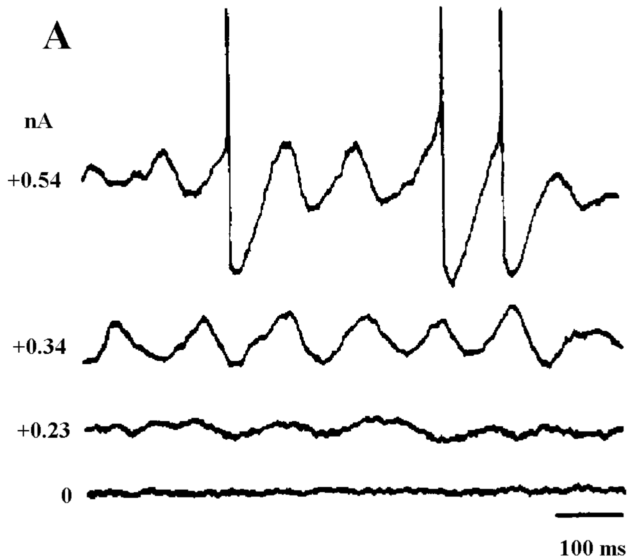


Рис. 7. Появление подпороговых осцилляций в нейронах ECIIsc (entorhinal cortex stellate cells). Осциллограммы мембранного потенциала для различных величин тока инжекции (слева). Рисунок взят из статьи [15].

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 97–02–16550), программой “Соросовские аспиранты"(грант а98–387) и BCH грантом (Испания).

ЛИТЕРАТУРА

1. Welsh J. P., Llinas R. — In: Some organizing principles for the control of movement based on olivocerebellar physiology: Progress in Brain Research: V. 114. /Eds. by C. I. de Zeeuw, P. Strata, and Voodg. 1997.
2. Llinas R. and Yarom Y. //J. Physiol., 1986. V. 376. P. 163.
3. Yarom Y. — In: Experimental Brain Research: Series 17. — Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 209.
4. Llinas R. The cortex of the cerebellum //Scientific American, 1975. V. 232. № 1.
5. Абарбанель Г. Д., Рабинович И., Сельверстон А., Баженов М. Б., Хуэрта Р., Сущик М. М., Рубчинский Л. Л. Синхронизация в нейронных ансамблях //УФН, 1996. Т. 166. № 4.
6. Hodgkin A. L., Huxley A. F. //J. Physiol (London), 1952. V. 117. P. 500.
7. Ходжкин А. Нервный импульс. — М.: Мир, 1965. – 126 с.
8. Fitz Hugh R. //Biophys. J., 1961. V. 1. P. 445.
9. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. — In: Proc. IRESO, 1962. P. 2061.
10. Hindmarsh J. L., Rose R. M. — In: Proc. R. Soc. Lond. B, 1984. V. 221. P. 87.

11. Борисюк Г. М., Борисюк Р. М., Казанович Я. Б., Лузянина Т. Б., Турова Т. С., Цымбалюк Г. С. //Математическое моделирование, 1992. Т. 4. № 12. С. 3.
12. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматизд, 1959. – 916 с.
13. Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И. //Радиотехника и электроника, 1980. Т. 25. С. 336.
14. Nekorkin V. I., Kazantsev V. B., and Chua L. O. //Int. J. Bifurcation and Chaos, 1996. V. 6. № 7. P. 1295.
15. Llinas R. Oscillations in CNS neurons: A possible role for cortical interneurons in the generation of 40-Hz oscillations. — In: Induced Rhythms in the Brain. /Eds. by E. Basar and T. Bullock, 1991.

Нижегородский государственный
университет, г. Н. Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
1 октября 1998 г.

MODEL OF NEURONS HAVING OSCILLATIONS BELOW THE EXCITATION THRESHOLD

V. B. Kazantsev, V. I. Nekorkin, M. G. Velarde

A dynamical model of neurons possesing spontaneous, quasiperiodic oscillations below the excitation threshold is proposed. In particular, such neurons play a significant role in the motor coordination problem making a unique rhythm of muscle contraction. The model is constructed on the basis of well-known dynamical systems and its dynamics is described by a fourth-order differential equation system. The model shows to be in a good qualitative agreement with experimental data of real neurons.

ИНФОРМАЦИЯ

Содержание т. 41 журнала "Известия высших учебных заведений. "Радиофизика" за 1998 год

Выпуск 1

Выпуск 2

Выпуск 3

Выпуск 4

Выпуск 5

Выпуск 6

Выпуск 7

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Выпуск 8

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Выпуск 9

Выпуск 10

Выпуск 11

Выпуск 12

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ
т. 41 журнала “Известия высших учебных заведений. “Радиофизика” за 1998 год

(цифры соответствуют номеру страницы)

И

К

Л

М

Н