

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XLI N 10

Нижний Новгород

1998

С о д е р ж а н и е

- Khodachenko M. L., Gubchenko V. M., Rucker H. O.**  
On the electromagnetic fields generated by a slowly moving  
conducting body in a magnetized plasma. Possible application  
for Io-Jovian system, spacecrafts and plasma probes ..... 1209
- Васьков В. В., Рябова Н. А.** Влияние стрикционных воз-  
мущений плотности на возбуждение плазменных колебаний  
в тепловых неоднородностях плазмы..... 1226
- Караштин А. Н., Шлюгаев Ю. В., Березин И. В., Ком-  
раков Г. П.** Сезонное поведение среднеширотных корот-  
коволновых мезосферных радиоэхо ..... 1248
- Долин Л. С.** Теория оптической когерентной томографии..... 1258
- Музычук О. В.** Вероятностные характеристики броунов-  
ского движения в стохастическом потенциальном профиле  
определённого вида..... 1290
- Грибова Е. З., Саичев А. И.** Построение вероятностного  
распределения скоростей регистрируемой детектором бро-  
уновской частицы ..... 1301
- Островский М. А., Рябинин С. А.** Обнаружение слабых  
сигналов на фоне рассеянных в неоднородной среде актив-  
ных помеховых полей. II. Общий случай ..... 1314
- Свеженцев А. Е.** Моделирование волн в связанных цилин-  
дрических полосковых линиях передачи ..... 1326
- Бровенко А. В., Мележик П. Н., Поединчук А. Е.** Спек-  
тральные характеристики открытого резонатора с метал-  
лодиэлектрическим цилиндрическим включением ..... 1336
- Глявин М. Ю., Запевалов В. Е.** Влияние отражений на  
устойчивость автоколебаний в гиротронах ..... 1348

**ON THE ELECTROMAGNETIC FIELDS GENERATED  
BY A SLOWLY MOVING CONDUCTING BODY IN A MAGNETIZED PLASMA.  
POSSIBLE APPLICATION FOR IO–JOVIAN SYSTEM, SPACECRAFTS AND PLASMA  
PROBES \***

*M. L. Khodachenko, V. M. Gubchenko, H. O. Rucker*

To explain self-consistently some energetic processes, radiation features, and electromagnetic environment near the Io satellite, moving in the Jovian magnetospheric plasma, as well as a spacecraft body, or a plasma probe, we considered by means of plasma kinetic theory the process of electromagnetic interaction between moving conducting body and surrounding hot magnetized plasma described by tensor  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ . We study the fields structure in terms of low-frequency non-propagating inductive electromagnetic mode which is usually ignored. We perform the investigation of plasma dielectric properties for the frequency ranges  $k_{\parallel}v_i \ll \omega \ll k_{\parallel}v_e$ ,  $\omega \ll \Omega_{i,e}$  and  $\omega \ll k_{\parallel}v_i \ll k_{\parallel}v_e$ ,  $\omega \ll \Omega_{i,e}$  showing the importance of spatial dispersion, connected with particle thermal motion for inductive electromagnetic fields behavior. These fields are localized in the vicinity of the moving conducting body and decay in space due to collisionless energy dissipation, forming some kind of a local magnetosphere. Along with the influence the energy losses of the moving conducting body, inductive fields could be responsible for the appearance near the body of electromagnetic structures where charged particles will be effectively accelerated. The general analysis being developed here is applicable also for the cases of any artificial spacecraft body, or tethered satellite system slowly ( $V_0 \ll V_A$ ,  $V_e$ ) moving in the magnetized plasma of ionosphere and in a low earth orbit.

#### INTRODUCTION

This paper is concerned with some aspects of interaction between a moving conducting body and a magnetized plasma. This is a topic with many applications. Among them there are for example problems arising around Io-Jovian magnetospheric interaction as well as some questions dealt with a spacecraft, tethered satellite systems, or plasma probes moving in the ionosphere and in low earth orbit.

This article is the first in a series of three ones where the said problem is planned to be considered in details from various points of view. In particular, here we concentrate on some specific moments arising during consideration of a slowly moving ( $V_0 < V_A$ ,  $V_i \ll V_0 \ll V_e$ ) conducting body in a magnetized plasma. Some general preliminary analysis of the structure of electromagnetic fields generated by such a body in plasma, as well as general strategy of detailed numerical solution of the said problem are presented in this article. The next two articles will be dealt with the consideration of electromagnetic interaction with a magnetized plasma of given slowly moving elementary external currents (thin current sheets, and thin line current), and detailed numerical analysis of the problem in a general case.

Analysis of the problem of interaction between a moving conducting body and magnetized plasma can be divided on three main stages:

1. Analysis of dielectric properties of medium and eigen-modes in a corresponding frequency range of interest;
2. Solution of the problem with given external current sources;
3. Solution of a self-consistent problem. It is known that the task of obtaining of a self-consistent solution describing a structure of electromagnetic fields and plasma in the vicinity of a body is formulated in a form of an integral equation.

This paper concerns mainly a work on the first stage. Besides, we carried out an analysis for a general case of a self-consistent problem (stage 3) and obtained the integral equation for a self-consistent field.

---

\*Материалы статьи были доложены на III Международной школе "Физика космической плазмы".

In fact the problem of interaction between a conducting body and a magnetized plasma in relative motion is rather old, and has already been considered by many authors from different points of view, using various approaches [1–4].

The basic feature of the situation which we meet here is the presence of a magnetic field which not only causes spatial anisotropy of plasma dielectric properties, but also is responsible for the electric field  $\frac{1}{c}[\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}]$  occurrence in the reference frame, connected with a conducting body, moving with velocity  $\mathbf{V}_0$ . This electric field in its turn produces a current in or on the body, which generates significant perturbations in the surrounding plasma. The structure of these perturbations was usually studied using cold plasma MHD model [1, 2, 4] in various cases of hypersonic and hyperalfvenic,  $V_0/V_s \gg V_0/V_A \gg 1$  [2], as well as hyper- and subalfvenic,  $V_0/V_A \sim 1$  [4] motions of the conducting body which were determined by the reasons of practical application of this very problem. Here  $V_A = \sqrt{\frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}}$  and  $V_s = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}$  are characteristic Alfven and sound velocities, respectively.

Already in the first work [1] there was shown that a large conducting object moving in a magnetized plasma radiates Alfven waves, which form so called "Alfven wings". The existence of such Alfven wings was for example confirmed by in situ observations of magnetic field and plasma perturbations generated by the satellite Io, moving in the Jovian magnetosphere. Besides, in the case of hypersonic motion of the body, it is possible, using some special technique [4], to distinguish the magnetoacoustic modes from the Alfven modes.

Concerning our particular interest to this rather general problem of interaction between a moving conducting body and a magnetized plasma, it has grown from the tasks of explanation of some features of the Jovian decametric radio emission which are usually associated with the effects arising due to the strong electromagnetic interaction between the moving Io satellite and the Jovian magnetosphere. These effects could result in heating and acceleration of charged particles, which in their turn influence the Jovian radio emission.

Usually for the explanation of fast particles generation, the current system of Alfven wings connected with Io is considered. In such models particles are assumed to be accelerated due to the presence of a considerable decrease of a potential along each of the force lines, caused by a break of current circuit in the Io magnetic tube, or by the effects appearing in the front region of the Alfven shock wave [5]. At the same time it is necessary to note that the real structure of electromagnetic field and current system, excited by Io moving in the surrounding Jovian magnetospheric plasma is more complicated than just a conglomerate of Alfven and magnetoacoustic wings. This concerns especially the regions near the satellite. Plasma parameters of the Io torus in the vicinity of the satellite ( $T \sim 10^4 \div 10^5$  K,  $n \sim 2 \cdot 10^3$  cm<sup>-3</sup>,  $B \sim 2 \cdot 10^{-2}$  G) give us a reason to speak that on the scales up to a few tens of Io radii,  $(60 \div 80) \cdot R_{Io}$ , the effects of plasma particles collisions are not important, and plasma MHD approximation is inapplicable for the analysis of electromagnetic fields and currents structure in these near the satellite regions. We realize of course that parameters of plasma within the Io torus vary (especially in the transverse direction), but we leave the effects of this variation out of the scope of the idealized model considered here. Besides, these variations of plasma parameters take place first of all in the direction across the torus, whereas, the fields which we are interested in have (as it will be shown by further consideration), a stretched structure along the line of the satellite motion, where plasma parameters variation is not so significant. The effects of plasma spatial dispersion, connected with particle thermal motion, together with the anisotropy of plasma dielectric properties, caused by the background Jovian magnetic field, lead to modification of the wing-like field structure near the moving Io, producing some specific steady-state electromagnetic environment, comoving the satellite, which will appear in fact as a major object of our investigation in the present paper. In other words, we study here the solutions which do not depend on time when viewed within the frame of

reference, attached to the moving satellite.

Considering the rather general case of motion of a conducting body in a magnetized plasma we shall have, however, in mind first of all its Io-Jovian application. This means, in particular, that we'll consider the case of relatively slow motion of the body with respect to Alfvén  $V_A$  and thermal electron  $V_e$  velocities, whereas thermal ion velocity  $V_i$  will remain to be less than the velocity of the conductor ( $V_i \ll V_0 \ll V_e$ ). In this very situation it is natural to expect the formation of certain bow and tail steady-state electromagnetic structures localized near the conductor and co-moving with it. These structures are formed mainly by the non-propagating decaying in space quasistationary inductive electromagnetic fields [6–9] and could be considered as some kind of a local magnetosphere of a moving conductor. Except of the general theoretical interest, these bow and tail inductive electromagnetic structures are important as a factor, influencing energy losses of the moving conducting body [6–8], as well as an alternative source of fast particles which could be effectively accelerated by the electric field in the vicinity of the body, or generated in probably existing magnetic reconnection regions with X-type configurations of the field.

In order to describe adequately a fine structure of fields in the vicinity of a conducting body, moving in a magnetized plasma, with the effects of plasma spatial dispersion taken into account, plasma kinetic approach is applied in this paper for the treatment of the named problem in stead of the traditional MHD. In the case of magnetized plasma due to the modes mutual connection the situation is more complicated than in the isotropic case and is represented by the anisotropy of a dielectric tensor  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$ . Besides, due to the particles being magnetized an additional modes of plasma appear, whereas modes of isotropic plasma, including ones responsible for a vortex tail formation, are modified significantly. Conducting features of such a hot magnetized plasma require their detailed analysis.

## 1. SOME GENERAL REMARKS

Before making a calculation of electromagnetic field excited by a given conductor moving in a given magnetized plasma, it is useful to study some general plasma properties in terms of dielectric permittivities in a frequency range being the most important for this very case. Such an analysis allows to study some general structural and behavioral features of the fields of interest.

It is well known that plasma properties strongly depend on the presence of external electromagnetic fields, causing the anisotropy of medium, and on the frequency band. Even in the simple case of isotropic plasma when the dielectric permittivity tensor is a diagonal one,

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_t & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_l \end{pmatrix} \quad (1)$$

and vortical (transverse) ( $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \perp \mathbf{k}$ ) and potential (longitudinal) ( $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \parallel \mathbf{k}$ ) fields are excited independently,

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_t(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (2)$$

$$\varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (3)$$

there exist many eigen-modes in plasma with respect to which, depending on the frequency, it sometimes behaves as a dielectric ( $\text{Re}(\varepsilon_{ij}) \gg \text{Im}(\varepsilon_{ij})$ ) and sometimes as a conducting ( $\text{Re}(\varepsilon_{ij}) \ll \text{Im}(\varepsilon_{ij})$ ) medium.

The anisotropy of magnetized plasma causes more complicated structure of the dielectric permittivity tensor with all its components being already non-zero:

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

In this case there take place mutual dependence and connection between potential and vortical fields. Besides, plasma properties now depend not only on a frequency, but also on a direction of wave propagation.

We'll perform our analysis using well-known traditional Fourier transform technique with the direct and inverse Fourier transforms determined as follows:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dt \int d^3r e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d^3k e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, \omega). \quad (6)$$

We use here some common variable  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  in order to denote the disturbances of the fields in our problem.

There are two frames of reference which are natural for our problem: The rest frame of the ambient plasma, which we call  $K$ , and the rest frame of the moving conductor,  $K'$ . For non-relativistic motion the respective space-time coordinates in these frames of reference,  $(\mathbf{r}, t)$  and  $(\mathbf{r}', t')$ , are related as follows

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t, \quad t' = t, \quad (7)$$

where  $\mathbf{V}_0$  is the velocity of the body.

Rewriting the expression (6) for the inverse Fourier transform in the frame of reference attached to the moving body, we obtain:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}', t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d^3k e^{-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_0)t + i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, \omega). \quad (8)$$

Since we are interested in fields which do not depend on time when viewed from the comoving frame of reference, then the following equality there should hold:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}'). \quad (9)$$

Looking at equation (8), one can see that there exists just one way to remove time dependence from this equation. It is to consider the Fourier image of the field to have the following form:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_0) \tilde{\mathbf{F}}'(\mathbf{k}). \quad (10)$$

In this case the integration over  $\omega$  is trivial and we obtain from (8)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{\mathbf{F}}'(\mathbf{k}). \quad (11)$$

Thus  $\tilde{\mathbf{F}}'(\mathbf{k})$  has a sense of Fourier image of a field  $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$  which is steady-state in the reference frame attached to the moving body.

Besides, the fact that the images of the fields of our interest are proportional to  $\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_0)$  means that the integration over  $\omega$  in our further analysis always can trivially be done. It will appear in fact as a simple replacement of the  $\omega$  onto the  $\mathbf{k}\mathbf{V}_0$ . This also shows that the direction of the wave vector  $\mathbf{k}$  determines the

frequency range of the corresponding field, comoving the body. And in order to make any general predictions concerning the structure and behavior of electromagnetic fields generated by a moving conducting body in a magnetized plasma and comoving it, one should study the properties of the plasma on the frequencies

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{V}_0. \quad (12)$$

It is important to note here that when one considers the interaction between a moving conducting body and a magnetized plasma there appears one more characteristic direction of the problem except of the direction of external magnetic field  $\mathbf{B}_0$ . It is the direction of the velocity  $\mathbf{V}_0$  of the body. And due to the relation (12) plasma properties appear to be in a strong dependence also on the direction of wave propagation  $\mathbf{k}$  with respect to  $\mathbf{V}_0$ . By this, in some cases plasma behaves as a dielectric and in some cases as a conducting medium.

## 2. PLASMA DIELECTRIC PROPERTIES ANALYSIS. WHAT WE CAN STUDY FROM IT

The specific Io-related application of the general problem of a conducting body moving in a magnetized plasma causes the fact that we consider here the case of slow motion of the body with respect to Alfvén  $V_A$  and thermal electron  $V_e$  velocities, whereas thermal ion velocity  $V_i$  remains to be less than the velocity of the conductor ( $V_i \ll V_0 \ll V_e$ ). Besides modelling the Io motion in the Jovian magnetospheric plasma, we need to consider the case when the velocity of the conducting body  $\mathbf{V}_0$  is perpendicular to the background magnetic field  $\mathbf{B}_0$ . This means that  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{V}_0 = \mathbf{k}_\perp \mathbf{V}_0$  will change in dependence of value of  $\mathbf{k}_\perp$ .

Therefore, two basic cases there can be distinguished in dependence on the wave vector  $\mathbf{k}$  direction, and relation between its components longitudinal to the velocity of the body  $k_{\perp\parallel} = \frac{\mathbf{k}_\perp \mathbf{V}_0}{|\mathbf{V}_0|}$ , and to the external magnetic field  $k_{\parallel}$ . The first one corresponds to the situation when the wave vector  $\mathbf{k}$  is located closely to the plane, perpendicular to the external magnetic field  $\mathbf{B}_0$ , or, in other words, when the following relation holds true:

$$\frac{|k_{\perp\parallel}|}{|k_{\parallel}|} \gg \frac{V_e}{V_0}. \quad (13)$$

In terms of frequencies this relation means the following:

$$|k_{\parallel}| V_i \ll |k_{\parallel}| V_e \ll \omega, \quad \omega \ll \Omega_{i,e}, \quad (14)$$

i. e. the effects of particle thermal motion appear to be unimportant in this very case, and cold plasma approximation can be used, but only for this type of waves.

The second case is that of the low-frequency (in comparison with  $|k_{\parallel}| V_\alpha$ , where  $\alpha = e, i$ ) fields, or inductive electromagnetic fields. It could be divided on two subcases, which have in general a lot of common features, and for which the effects of plasma spatial dispersion, caused by particles thermal motion are very important.

Here it is necessary to note that magnetized plasma properties are well studied in the limiting cases. Among them there are first of all the cases of cold magnetized plasma. Besides, people were traditionally interested mainly in sufficiently high frequency fields of radiation, in the regions far from the radiating source. This caused the situation when the properties of generation of the low-frequency electromagnetic fields in the regions near the radiating source, for which the effects of plasma particles thermal motion become to be important, till now remain to be unclear. These fields were also out of the scope of interest of experimentalists, too, since for their creation and experimental study large volumes of hot rarefied collisionless plasma are necessary (technically difficult task). In fact the low frequency inductive electromagnetic

fields appear as a specific natural cosmic phenomenon, requiring its special analysis. In spite of their non radiative character (nonpropagating, decaying in space fields) these fields influence (indirectly) the radiation features and energetics of space bodies.

The first kind of inductive electromagnetic fields, excited by a slowly moving conductor in magnetized plasma includes the fields with the wave vectors  $\mathbf{k}$  lying closely to the plane, perpendicular to the velocity vector  $\mathbf{V}_0$ , i. e., when the following inequality is satisfied:

$$\frac{|k_{\perp}|}{|k_{\parallel}|} \ll \frac{V_i}{V_0}. \quad (15)$$

In frequencies language this relation looks like

$$\omega \ll |k_{\parallel}| V_i \ll |k_{\parallel}| V_e, \quad \omega \ll \Omega_{i,e}. \quad (16)$$

These are the low-frequency fields decaying in space due to the processes of collisionless energy dissipation. As can be seen from (15) these fields have sufficiently large characteristic spatial scale in direction along the body motion, and are rather short-length along the magnetic field.

But of the most interest for us is the second case when

$$\frac{V_i}{V_0} \ll \frac{|k_{\perp}|}{|k_{\parallel}|} \ll \frac{V_e}{V_0}. \quad (17)$$

It covers the majority of the  $k$ -space, and corresponds to the inductive electromagnetic fields with the spatial scales being of the most interest for the Io–Jovian application. In terms of frequencies this case is represented by the following relation:

$$|k_{\parallel}| V_i \ll \omega \ll |k_{\parallel}| V_e, \quad \omega \ll \Omega_{i,e}. \quad (18)$$

Considering plasma properties in this low frequency band, and being interesting as well with just the fields having the wave-lengths greater than particle Larmor radius ( $k_{\perp}^2 V_{\alpha}^2 \ll \Omega_{\alpha}^2$ ), we find that the tensor of dielectric permittivity of magnetized plasma has the following form:

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

where

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\omega_i^2}{\Omega_i^2} = \frac{c^2}{V_A^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xx} + i\sqrt{2\pi} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} \frac{k_{\perp}^2 V_e}{|k_{\parallel}| \omega}, \\ \varepsilon_{zz} &= 1 - \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} + \frac{\omega_e^2}{k_{\parallel}^2 V_e^2} \left( 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_{\parallel}| V_e} \right), \\ \varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = i \frac{\omega_e^2}{\omega \Omega_e} \frac{k_{\perp}}{|k_{\parallel}|} \left( 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_{\parallel}| V_e} \right), \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

here  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = e, i$  are the plasma frequencies.

Note that the tensor of dielectric permittivity in this very case differs from one having a diagonal structure in the case of isotropic plasma. Magnetized plasma anisotropy causes the appearance of nondiagonal components of the tensor, and the effects of spatial dispersion due to particles thermal motion lead to the existence of the imaginary terms, which make the dielectric tensor to be an unhermitian one. This in particular means that there takes place a collisionless dissipation of the energy of electromagnetic fields due to their interaction with the resonant thermal particles.

Dispersion equation of plasma modes in this case is as follows

$$\begin{aligned} \det(\hat{\Lambda}) &= \det \left( k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \right) = \\ &= \lambda_{xx} (\lambda_{yy} \lambda_{zz} + \lambda_{yz}^2) - (k_\perp k_\parallel)^2 \lambda_{yy} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

where

$$\begin{aligned} \lambda_{xx} &= k_\parallel^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xx}, \quad \lambda_{yy} = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yy}, \\ \lambda_{zz} &= k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz}, \quad \lambda_{yz} = -\lambda_{zy} = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yz}. \end{aligned}$$

Note, that equation (21) together with the expressions for  $\lambda_{ij}$  were written for the case when the wave vector  $\mathbf{k}$  is assumed to be  $\mathbf{k} = k_\perp \cdot \mathbf{x}_0 + k_\parallel \cdot \mathbf{z}_0$ , i. e.  $k_y = 0$ . Such a choice of the  $x$ -,  $y$ -axes doesn't influence the generality of the description of a magnetized plasma features and its eigen-modes. However we would like to emphasize here that in the case of the problem of interaction between a moving conductor and a magnetized plasma, when we have one more characteristic direction, the direction of the conductor's velocity  $\mathbf{V}_0$ , the above free choice of  $x$ -,  $y$ -axes becomes to be impossible. This means that we should introduce  $k_y$  into our consideration, such that  $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  and take into account  $k_y \neq 0$  in the expressions for  $\lambda_{ij}$ . At the same time the above equation (21) and expressions for  $\lambda_{ij}$  remain to be correct in the case of 2D problems when we are dealt with motion in the magnetized plasma of the conducting body which is infinite along the  $y$ -axis (infinite conducting cylinder, or conducting plane).

Regarding to plasma modes which are excited by the external source (moving conducting body) within this low-frequency (18) band, three basic cases could be distinguished:

1. For the modes propagating along the background magnetic field ( $k_\perp = 0$ ) the dispersion equation (21) after the expressions for  $\lambda_{ij}$  and  $\varepsilon_{ij}$  taking into account transforms into more simple one

$$\det(\hat{\Lambda}) = \lambda_{xx}^2 \lambda_{zz} = 0. \quad (22)$$

From this equation it follows that slowly moving conducting body will generate linearly polarized Alfvén wave, propagating along the background magnetic field:

$$\omega^2 = k_\parallel^2 V_A^2 \quad (23)$$

and ion low frequency plasma wave, decaying due to interaction with a resonant thermal electrons,

$$\frac{\omega_i^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_e^2}{k_\parallel^2 V_e^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_\parallel| V_e} \right) = 0. \quad (24)$$

2. Besides, there exist also fast (+) and slow (-) magnetoacoustic waves whose spectra in the case of the low pressure plasma:  $\beta = V_s^2/V_A^2 \ll 1$  (Jovian case) look like:

$$\omega_+^2 = k^2 V_A^2, \quad \delta_+ = -\sqrt{\frac{\pi m_e}{8 m_i}} \frac{V_s}{V_A} \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta|} \omega_+, \quad (25)$$

$$\omega_-^2 = k^2 V_s^2 \cos^2 \theta, \quad \delta_- = -\sqrt{\frac{\pi m_e}{8 m_i}} \omega_-. \quad (26)$$

Here  $\delta_{\pm}$  are the decrements ( $\omega_{\pm}^* = \omega_{\pm} + i\delta_{\pm}$ ) characterizing wave decay in time;  $V_s = \sqrt{k_B T_e / M_i}$  is ion sound velocity, and  $\theta$  is the angle between magnetic field and direction of wave propagation. Note, that fast magnetoacoustic wave appears in fact as a continuation of fast MHD wave into the region of small phase velocities ( $\omega / |k_{\parallel}| \ll V_e$ ). In this very case fast magnetoacoustic wave is purely transverse ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ ), whereas slow magnetoacoustic wave in the low pressure plasma degenerates into purely longitudinal (potential) one ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ ).

3. In order to study the features of behavior of the low frequency fields, propagating in the arbitrary direction with respect to the background magnetic field ( $k_{\parallel} \neq 0$ ,  $k_{\perp} \neq 0$ ) we pay our attention to the fact that the component  $\varepsilon_{yy}$  of the plasma dielectric permittivity tensor can be represented as

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} + i \operatorname{Im}(\varepsilon_{yy}). \quad (27)$$

This allows us to represent  $\lambda_{yy}$  as

$$\lambda_{yy} = \lambda_{xx} + k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} i \operatorname{Im}(\varepsilon_{yy}). \quad (28)$$

Taking these relations into account the dispersion equation (21) can be rewritten in the following form:

$$\lambda_{xx} \left[ \left( k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} i \operatorname{Im}(\varepsilon_{yy}) + \lambda_{xx} \right) \lambda_{zz} + \lambda_{yz}^2 \right] - (k_{\perp} k_{\parallel})^2 \left( k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} i \operatorname{Im}(\varepsilon_{yy}) + \lambda_{xx} \right) = 0. \quad (29)$$

From this equation one can see that there exists a solution characterized by the set of equations:

$$\begin{cases} k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} i \operatorname{Im}(\varepsilon_{yy}) = 0, \\ \lambda_{xx} \lambda_{zz} + \lambda_{yz}^2 - (k_{\perp} k_{\parallel})^2 = 0. \end{cases} \quad (30)$$

The first equation of the set in the case  $k_{\perp} \neq 0$  gives the relation between  $k_{\parallel}$  and  $\omega$ :

$$|k_{\parallel}| = i \frac{\omega}{c^2} \sqrt{2\pi} \frac{\omega_e^2 V_e}{\Omega_e^2}, \quad (31)$$

whereas the second equation together with (31) taken into account gives the relation between  $k_{\perp}$  and  $\omega$ , which for the Jovian magnetospheric field and plasma parameters in the vicinity of the Io ( $T \sim 10^4 \div 10^5$  K,  $n \sim 2 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3}$ ,  $B \sim 2 \cdot 10^{-2}$  G), providing

$$\frac{V_A}{V_i} \gg 1, \quad \frac{V_A}{V_e} \gtrsim 1,$$

$$\frac{\omega_i}{\Omega_i} \gg 1, \quad \frac{\omega_e}{\Omega_e} \gtrsim 10$$

looks like

$$k_{\perp}^2 \approx \omega^2 \frac{2\pi\omega_e^2 V_e^2}{c^4 \Omega_e^2} \frac{\left( \omega^2 - \frac{c^6 \Omega_e^6}{4\pi\omega_e^4 V_e^6} \right)}{\left( \omega^2 + \frac{V_A^2 c^2 \Omega_e^4}{4V_e^4 \omega^2} \right)}. \quad (32)$$

The fact that for this very mode the longitudinal component  $k_{\parallel}$  of the wave vector  $\mathbf{k}$  with respect to the background magnetic field is imaginary (see (31)) means that the fields, propagating not exactly parallel to  $\mathbf{B}_0$ , decay along the background magnetic field and form some kind of stretched tail-like structure along the line of motion of the body.

### 3. GENERAL STRATEGY OF THE SOLUTION

In this section we consider a general strategy of the solution of our problem. In some points it looks to be similar to one used in [3]. At the same time, the approach considered here is sufficiently general and can be applied to any linearized plasma model which employs the dielectric permittivity tensor.

As it was already stated above, we consider the problem of a solid conducting body moving with a constant velocity  $\mathbf{V}_0$ , in a magnetized plasma. The ambient plasma parameters provide the following relations between velocity of the body and characteristic plasma velocities:  $V_i \ll V_0 \ll V_e \lesssim V_A$ . The unperturbed plasma is assumed to be infinite, stationary and spatially homogeneous with a uniform background magnetic field  $\mathbf{B}_0$ .

Mathematically, the problem consists of finding the solution to a set of nonlinear differential equations, and this solution should be time stationary in the frame of reference, attached to the body.

Since the solid conductor and the surrounding plasma have different properties, it seems naturally to divide space into two distinct regions. Separate sets of equations could be solved for each region. And in this case the solutions obtained for these two regions should be matched together in order for them to satisfy some definite boundary conditions on the surface of the body. The question of the proper boundary conditions to impose is a rather difficult one, since the surface properties of the body, including the effects of particle absorption, reflection and production should be taken into account. However, since we are concerned mainly with macroscopic electrodynamic effects we shall consider here the simplified model of more complicated process of plasma-conductor interaction, which, at the same time, includes the desired effects, and which retains at least an approximate validity in the above mentioned frequency bands. Thus it is much more convenient for us, following the approach used in [3], to regard the entire system of plasma plus moving conductor as a single inhomogeneous medium, described by a single set of equations. In this way, the boundary conditions on the surface of the body are replaced by an integral equation for an unknown source current.

There exist the following relations between the fields, currents and charge densities in the reference frame attached to the moving conductor  $K'$  and the laboratory reference frame  $K$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}], \quad (33)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho_q \mathbf{V}_0, \quad (34)$$

$$\rho'_q = \rho_q - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{j}, \quad (35)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}. \quad (36)$$

The Maxwell equations in the reference frame  $K$  are as follows

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_q, \quad (37)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (38)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (39)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (40)$$

Introducing  $\mathbf{j}_c$ , the current density in the conductor, and  $\mathbf{j}_p$ , the current density in the plasma, we can express the total current density as

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_c(\mathbf{r}, t) \cdot H(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_p(\mathbf{r}, t) \cdot [1 - H(\mathbf{r}, t)], \quad (41)$$

where

$$H(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 1 & \text{for } \mathbf{r} \text{ inside the conductor,} \\ 0 & \text{for } \mathbf{r} \text{ outside the conductor.} \end{cases}$$

Substituting the expression (41) for the current into the last Maxwell equation (40) we can rewrite it in terms of the source,  $\mathbf{j}_s$ , and plasma,  $\mathbf{j}_p$ , currents respectively:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_p + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (42)$$

where

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{j}_c(\mathbf{r}, t) - \mathbf{j}_p(\mathbf{r}, t)] \cdot H(\mathbf{r}, t). \quad (43)$$

Therefore, we see that the source term includes not only the current flowing in the conducting body, but also a term due to a "phantom plasma" in the volume of the conducting body.

Using Ohm's law for the current density in the moving frame of reference  $K'$

$$\mathbf{j}'_c(\mathbf{r}') = \sigma \mathbf{E}'(\mathbf{r}') \quad (44)$$

after expressing  $\mathbf{j}'_c$  and  $\mathbf{E}'$  via corresponding fields and currents in reference frame  $K$  (see (33), (34)) we obtain

$$\mathbf{j}_c(\mathbf{r}, t) = \sigma \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}] \right] + \rho_q(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}_0. \quad (45)$$

Thus the source current (43) can be rewritten as

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}, t) = \left[ \sigma \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0] \right) - \mathbf{j}_p(\mathbf{r}, t) + \rho_q(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}_0 \right] \cdot H(\mathbf{r}, t). \quad (46)$$

Here we made linearization by replacing  $\mathbf{B}$  by  $\mathbf{B}_0$ .

Applying Fourier transform to the Maxwell equations we can express all physical variables of the problem (charge density, currents, fields) via Fourier image of the electric field:

$$-\frac{ic^2}{4\pi\omega}\hat{\Lambda}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)=\tilde{\mathbf{j}}_s(\mathbf{k},\omega), \quad (47)$$

$$\tilde{\rho}_q(\mathbf{k},\omega)=\frac{i}{4\pi}\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega), \quad (48)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k},\omega)=\frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)], \quad (49)$$

$$\tilde{\mathbf{j}}_p(\mathbf{k},\omega)=-\frac{i\omega}{4\pi}(\hat{\varepsilon}-\hat{I})\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega), \quad (50)$$

where  $\hat{I}$  is unit tensor. Dielectric permittivity tensor  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{k},\omega)$ , and tensor  $\hat{\Lambda}(\mathbf{k},\omega)=k^2\hat{I}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}-\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}(\mathbf{k},\omega)$  had already been introduced above.

Since all of space is considered as a single medium there are no surfaces across which the solutions, valid in different regions, must be matched together. This means that in our formulation of the problem the boundary (plasma-conductor) conditions are already built in. In this very case the task of applying boundary conditions is replaced by the problem of solving the integral equations. These integral equations are obtained from the inverse Fourier transform applied to the image of the source current  $\tilde{\mathbf{j}}_s(\mathbf{k},\omega)$ . After taking (46) into account we obtain two groups of integral equations:

$$\int\frac{d\omega}{2\pi}\int d^3ke^{-i\omega t+i\mathbf{k}\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{j}}_s(\mathbf{k},\omega)=0 \quad (51)$$

for all  $\mathbf{r}$  outside the conductor, and

$$\begin{aligned} &\int\frac{d\omega}{2\pi}\int d^3ke^{-i\omega t+i\mathbf{k}\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{j}}_s(\mathbf{k},\omega)= \\ &= \left[ \sigma \left( \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}[\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0] \right) - \mathbf{j}_p(\mathbf{r},t) + \rho_q(\mathbf{r},t)\mathbf{V}_0 \right] \end{aligned} \quad (52)$$

for all  $\mathbf{r}$  inside the conductor.

These are the integral equations for the Fourier image  $\tilde{\mathbf{j}}_s(\mathbf{k},\omega)$  of unknown source current which in fact include the effects of the boundary between the conductor and surrounding plasma.

In principle it is possible, using some physical reasoning, to try to estimate the source current and thus obtain an approximation for the fields structure. This was the way realized in [3] for the case of cold magnetized plasma, without spatial dispersion effects taking into account.

However, our aim here is to study a self-consistent structure of the low frequency (see above) electromagnetic fields excited in the vicinity of a moving conductor. In order to do this we express (using (47)-(50)) all physical quantities in the integral equations (51),(52) via  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)$ . After that combining by means of function  $H(\mathbf{r},t)$  these two groups of equations into one we obtain the integral equation for the Fourier image of electric field generated by a moving conducting body in a magnetized plasma:

$$\int\frac{d\omega}{2\pi}\int d^3ke^{-i\omega t+i\mathbf{k}\mathbf{r}}\hat{A}(\mathbf{k},\omega,\mathbf{r},t)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},\omega)=\frac{1}{c}[\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0] \cdot H(\mathbf{r},t), \quad (53)$$

where

$$\hat{A}(\mathbf{k},\omega,\mathbf{r},t)=-\frac{ic^2}{4\pi\omega}\left\{\hat{W}(\mathbf{k},\omega)\cdot H(\mathbf{r},t)+\hat{\Lambda}(\mathbf{k},\omega)\cdot[1-H(\mathbf{r},t)]\right\}. \quad (54)$$

Here

$$\hat{W}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\sigma} \left\{ \left( -i \frac{4\pi\omega\sigma}{c^2} + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \cdot \hat{I} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + \frac{\omega}{c^2} \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{k} \right\}. \quad (55)$$

This is a rather general equation which can be applied for the case of any linear plasma model and for any frequency band.

Since we are interested here in the fields which are stationary in the comoving conductor frame of reference, i. e. the fields for which  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_0)\tilde{\mathbf{E}}'(\mathbf{k})$ , then the integral equation (53) can be rewritten in the rest frame of the body, and the integration over  $\omega$  can be performed. Finally we shall have

$$\int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \hat{A}(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) \tilde{\mathbf{E}}'(\mathbf{k}) = \frac{1}{c} [\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0] \cdot H'(\mathbf{r}'), \quad (56)$$

where

$$H'(\mathbf{r}') = \begin{cases} 1 & \text{for } \mathbf{r}' \text{ inside the conductor,} \\ 0 & \text{for } \mathbf{r}' \text{ outside the conductor} \end{cases}$$

and  $\tilde{\omega}$  denotes simply the expression  $(\mathbf{k}\mathbf{V}_0, \mathbf{r}')$ .

The equation (56) can be solved numerically, and after that the structure of electric and magnetic fields excited by a slowly moving conductor in a magnetized plasma in the rest frame of the body, can be determined:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{\mathbf{E}}'(\mathbf{k}), \quad (57)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \frac{c}{\mathbf{k}\mathbf{V}_0} [\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}'(\mathbf{k})]. \quad (58)$$

### CONCLUSION

The numerical analysis, however, is out of scope of subject of this paper. Here we limit ourself first of all on the discussion of some features of the application of the general problem of interaction between a moving conducting body and a magnetized plasma for the tasks of Io-Jovian magnetospheric interaction in order to develop the methods of interpretation of some Jovian observational data, in particular, of some features of the Jovian decametric radio emission. The tasks of description of process of Io-Jovian magnetospheric interaction oblige us to consider the model with a slowly moving conducting body, with the effects of plasma particles thermal motion taken into account ( $V_i \ll V_0 \ll V_e$ ). In this very case the low-frequency inductive electromagnetic fields will be effectively generated in the vicinity of the conductor. To emphasize the importance of these low-frequency inductive electromagnetic fields, which form some kind of a local magnetosphere around the moving conductor, and influence its energetics and radiative features, was the main goal of the present paper. Two other our goals which we tried to follow were a) to perform a general analysis of plasma dielectric properties in the frequency bands corresponding to the co-moving electromagnetic fields, generated in vicinity of moving Io satellite in the Jovian magnetosphere, in order to predict some structural features of these fields, and b) to outline the general strategy of the solution of the named problem, which led us to the task of a numerical calculations. Theoretical analysis of magnetized plasma properties and it's eigen-modes in the frequency bands corresponding to the slowly moving conducting body (see (14),(16), and (18)) allows us to say that except of the well known alfvénic and magnetoacoustic wing structures excited by the conductor in the magnetized plasma there exist also some specific electromagnetic environment around the body, consisting of the low-frequency, decaying in space, inductive fields

((16), (18)) which form a kind of tail-like electromagnetic structure stretched along the line of motion of the body. This inductive fields electromagnetic structure appears to be important for the energetics of the moving conductor, as well as a factor influencing its radiative features.

As to the concrete analysis of a structure of fields generated in magnetized plasma by a moving conductor of given form, this problem appears to be very complicated even in the case of thin conducting plate. Difficulties of analytical treatment are caused mainly by the complexity of expressions for the dielectric tensor components, as well as the complexity of an integral equation describing a self-consistent electric field. Besides, when one considers one-dimensional problem (thin infinite conducting plane) it appears to be sufficient the analysis of fields with  $\mathbf{k}_{\parallel} = 0$  when the effects of inductive fields generation are not manifested. When one considers two-dimensional (limited thin conducting plate, infinite conducting cylinder), or three-dimensional problems all plasma modes are represented and the solution requires the application of a numerical technique.

*Acknowledgments.* This work has been supported by the Russian Foundation of Basic Researches (grants No.97-02-17062 and No.96-02-16045) and by the Commission for International Cooperation of the Austrian Academy of sciences.

#### REFERENCES

1. Drell S. D., Foley H. M., Ruderman M. A. //J. Geophys. Res., 1965. V. 70. P. 3131.
2. Gurevich A. V., Krylov A. L., Fedorov E. N. //Sov. Phys. JETP, 1978. V. 48(6). P. 1074.
3. Barnett A., Olbert S. //J. Geophys. Res., 1986. V. 91. P. 10,117.
4. McKenzie J. F. //J. Geophys. Res., 1991. V. 96. P. 9491.
5. Shaposhnikov V. E. and Zaitsev V. V. //Planet. Space Sci., 1993. V. 41. № 5. P. 341.
6. Gubchenko V. M. //Sov. J. Phys., 1989. V. 14. P. 10.
7. Khodachenko M. L., Gubchenko V. M. — In: Proc. of the Workshop on Plasma Astrophysics, Telavi, Georgia, USSR, 4–12 June 1990 (ESA SP-311. — Noordwijk: ESA Publication Division, 1990. P. 163).
8. Khodachenko M. L., Gubchenko V. M. — In: Proc. of 4th International Workshop on Radio Emission from Planetary Magnetospheres, Graz, Austria, September 9–11, 1996.
9. Rukhadze A. A., Alexandrov A. F., Bogdankevich L. S. Principles of Plasma Electrodynamics. — Moscow: Vysshaya Shkola, 1978.

Institute of Applied Physics, RAS,  
Nizhny Novgorod, Russia;  
Space Research Institute, Austrian  
Academy of Sciences, Graz, Austria

Поступила в редакцию  
8 декабря 1997 г.

УДК 550.388.2

## ВЛИЯНИЕ СТРИКЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОТНОСТИ НА ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТЕПЛОВЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ ПЛАЗМЫ\*

*В. В. Васьков, Н. А. Рябова*

Данная работа является непосредственным продолжением [1]. Путем вычисления введенных в [1] коэффициентов и нелинейного сдвига фазы в уравнении для интенсивности плазменных волн получено решение задачи о влиянии стрикционных возмущений плотности плазмы на возбуждение электромагнитной волной коротковолновых плазменных колебаний, захваченных в объеме вытянутых вдоль магнитного поля неоднородностей с пониженным значением электронной концентрации, проходящим через уровень верхнегибридного резонанса. Диссипативные процессы поглощения и высвечивания плазменных волн за пределы неоднородности считаются слабыми. Описано изменение возбуждения и отражения плазменных волн от уровня резонанса, вызванное деформацией профиля плотности плазмы. Определена полоса эффективной генерации собственных мод захваченных колебаний в зависимости от полного набега фазы волны в неоднородности. Рассчитан эффект проникновения поля мощной плазменной волны в область непрозрачности в результате стрикционного выдавливания плазмы. С учетом рассмотренных нелинейных эффектов произведена оценка нагрева искусственных ионосферных неоднородностей теплового происхождения в результате столкновительного поглощения плазменных колебаний, возбуждаемых в объеме неоднородностей под действием мощной радиоволны.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] получено уравнение, определяющее интенсивность электрического поля (или поток энергии) собственных мод плазменных колебаний, возбуждаемых мощной электромагнитной волной в объеме вытянутых вдоль магнитного поля мелкомасштабных неоднородностей с отрицательным возмущением концентрации электронов  $\delta N_0 < 0$ . Предполагается, что профиль концентрации внутри неоднородности пересекает уровень верхнегибридного резонанса, в окрестности которого происходит трансформация холодных колебаний, непосредственно возбуждаемых электромагнитной волной за счет поляризации неоднородности, в более коротковолновые плазменные колебания, распространяющиеся во внутренней части неоднородности. Полученное уравнение содержит коэффициенты и нелинейный сдвиг фазы плазменной волны при отражении от резонанса, описывающие влияние стрикционных возмущений плотности плазмы на эффективность возбуждения и захвата плазменных волн. Эти коэффициенты и фазовый сдвиг выражаются через действительные волновые функции нелинейного уравнения Эйри, которые описывают электрическое поле взаимодействующих волн в окрестности резонанса в отсутствие диссипации (слабые диссипативные процессы поглощения и высвечивания плазменных волн за пределы неоднородности учтены в рамках теории возмущений). Настоящая работа посвящена количественному описанию рассмотренных в [1] стрикционных эффектов.

В первом разделе кратко изложены основные выражения, использованные в расчетах. Во втором разделе приведены результаты расчета "нелинейных" коэффициентов и фазового сдвига в уравнении для интенсивности захваченных волн. Определено смещение точки отражения падающей на резонанс плазменной волны большой интенсивности под влиянием стрикционных возмущений плотности плазмы. В третьем разделе произведена оценка локального нагрева вытянутой неоднородности в результате

\*Материалы статьи были доложены на III Международной школе "Физика космической плазмы".

столкновительного поглощения возбуждаемых плазменных волн с учетом рассматриваемых нелинейных эффектов и обсуждается влияние этих эффектов на процесс генерации искусственных неоднородностей ионосферной плазмы под действием мощной радиоволны [2]. В четвертом разделе формулируются основные результаты работы.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Согласно [1] (ниже цитируется как 1), безразмерная интенсивность  $a_0^2$  плазменных волн, захваченных внутри вытянутой вдоль магнитного поля неоднородности  $\delta N_0$  (или поток энергии  $S_p^{(+)}$  захваченной волны), описывается уравнением (1.60)

$$S_p^{(+)} / S_c \equiv a_0^2 = \frac{S_{p \text{ lin}}^{(ex)}}{S_c} \frac{\kappa}{(\kappa_R + \kappa_p)^2 + (\gamma \delta \varphi_p)^2};$$

$$\delta \varphi_p = \varphi_p - 2\pi n, \quad \varphi_p = \Delta \varphi_{p \text{ lin}} + \eta a_0^2 + \varphi_R(a_0^2), \quad (1)$$

$$\kappa_R \equiv 1 - |R_p| = [1 - |R_{p \text{ lin}}|] \kappa.$$

Здесь и ниже используются обозначения работы [1]. В частности,  $\delta \varphi_p$  — малое отклонение полного изменения фазы волны  $\varphi_p$  от “резонансного” значения  $2\pi n$  (где  $n$  — номер моды захваченных колебаний);  $\Delta \varphi_{p \text{ lin}}$ ,  $\kappa_p$  — соответственно линейный набег фазы и коэффициент поглощения волны при распространении в неоднородности (1.18);  $\eta a_0^2$  — “нелинейная” добавка в набеге фазы с коэффициентом  $\eta$  (1.19);  $\varphi_R(a_0^2) = \arg R_p$  — фаза коэффициента отражения  $R_p$  падающей на резонанс плазменной волны;  $\kappa_R = (1 - |R_p|)$  — коэффициент высвечивания плазменных волн в холодные колебания при отражении от резонанса;  $S_c$  — характерный нормировочный поток энергии (1.33), использованный при определении параметра  $a_0^2$ . Индексом “lin” помечены переменные, вычисленные в линейном пределе слабых полей, т. е. в отсутствие стрикционных возмущений (величина  $S_{p \text{ lin}}^{(ex)} \simeq (\omega/8\mu)(E_t \Delta N/N_R)^2$  (1.31) описывает поток энергии возбуждаемых плазменных колебаний в указанном линейном случае). Диссипативные процессы поглощения и высвечивания плазменных волн считаются слабыми:  $\kappa_p, \kappa_R \ll 1$ .

Входящие в (1) коэффициенты  $\kappa$ ,  $\gamma$  и сдвиг фазы  $\varphi_R(a_0^2)$  учитывают влияние стрикционных возмущений профиля плотности плазмы в области резонанса на формирование захваченных мод. Они зависят от безразмерной интенсивности плазменной волны  $a_0^2$ , определяющей степень нелинейности задачи (случай  $a_0^2 < 1$  соответствует линейному пределу слабых полей). Согласно [1], эти величины выражаются через действительные волновые функции  $y_1(\xi)$  неоднородного нелинейного уравнения Эйри (1.48)

$$\frac{d^2 y_1}{d\xi^2} + (\xi + k_c^2 y_1^2) y_1 = 1, \quad (2)$$

убывающие при  $\xi \rightarrow -\infty$ :

$$y_1(\xi \rightarrow -\infty) = \frac{1}{\xi} - \frac{k_c^2 + 2}{\xi^4}, \quad (3)$$

которые описывают поведение электрического поля возбуждаемых волн в окрестности резонанса в отсутствие диссипации (здесь  $y_1$  — безразмерное электрическое поле,  $\xi$  — безразмерная координата,  $k_c^2$  — коэффициент нелинейности, определенные согласно (1.12)).

Параметры  $a_0$  и  $\varphi_R$  совпадают с амплитудой и фазой плазменной волны в асимптотике волновой функции  $y_1(\xi)$  в области  $\xi \gg 1$  (1.49):

$$y_1(\xi \gg 1) = \frac{1}{\xi} - \frac{2a_0}{\xi^{1/4} k_c} \cos\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{3}{2}a_0^2 \ln \xi + \varphi_R/2\right). \quad (4)$$

При этом зависимость от  $a_0^2$  сдвига фазы  $\varphi_R(a_0^2)$  и входящего в уравнение (2) коэффициента нелинейности  $k_c^2(a_0^2)$  находится из добавочного условия (1.59) (см. также определения (1.50), (1.46)):

$$L_1 \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\xi_0}^{+\xi_0 \rightarrow \infty} y_1(\xi) d\xi = -\operatorname{ctg} \left( \frac{\psi_R}{2} \right), \quad (5)$$

$$\psi_R = \frac{\pi}{2} + \varphi_{R\text{lin}} \in [0, 2\pi], \quad (6)$$

а коэффициенты  $\kappa$ ,  $\gamma$  определяются выражениями (1.61)

$$\kappa(a_0^2) = \frac{\pi k_c^2(a_0^2)}{4a_0^2} \left/ \sin^2 \frac{\psi_R}{2} \right., \quad \gamma(a_0^2) = \frac{\pi k_c^2(a_0^2)}{2a_0^2} \frac{\partial L_1(a_0^2, \varphi_R)}{\partial \varphi_R}. \quad (7)$$

Видно, что “нелинейные” коэффициенты  $\kappa$ ,  $\gamma$  и нелинейный сдвиг фазы  $\varphi_R(a_0^2)$  кроме интенсивности плазменной волны  $a_0^2$  зависят только от одного “входного” параметра, определяемого в линейной теории, — сдвига фазы  $\varphi_{R\text{lin}} = \psi_R - \pi/2$  или связанного с ним параметра  $L_1 = -\operatorname{ctg}(\psi_R/2)$ . В линейном пределе  $a_0^2 \ll 1$  имеем  $\kappa = \gamma = 1$ ,  $\varphi_R = \varphi_{R\text{lin}}$ , см. (1.64).

В случае

$$L_1^2 = \operatorname{ctg}^2 \frac{\psi_R}{2} \gg 1 \quad (8)$$

правая часть уравнения (2) может рассматриваться как малый параметр, влияние которого можно учесть в рамках теории возмущений. Интеграл  $L_1$  (5), как функция переменных  $(a_0^2, \varphi_R)$  или  $(a_0^2, k_c^2)$  выражается в этом случае через действительную волновую функцию  $y_0(\xi)$  однородного уравнения Эйри (1.67)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} y_0 + (\xi + y_0^2) y_0 = 0, \quad (9)$$

удовлетворяющую условию убывания при  $\xi \rightarrow -\infty$ :

$$y_0(\xi \rightarrow -\infty) \sim |\xi|^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}\right), \quad (10)$$

с асимптотикой (1.70)

$$y_0(\xi \gg 1) = \frac{2a_0}{\xi^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{3}{2}a_0^2 \ln \xi + \varphi_0(a_0^2)\right). \quad (11)$$

Соответствующие выражения приведены в (1.86), (1.87). При этом решение уравнения (5) для  $\varphi_R(a_0^2)$  и  $k_c^2(a_0^2)$  имеет вид (см. (1.88) и формулу (1.81), правая часть которой при  $L_1 > 0$  увеличена на  $2\pi$ )

$$\varphi_R(a_0^2) = 2\varphi_0(a_0^2) - \frac{\kappa_0(a_0^2)}{\gamma_0(a_0^2)} \frac{2}{L_1} + \pi(1 + L_1/|L_1|), \quad (12)$$

$$k_c^2(a_0^2) = L_0(a_0^2)/L_1^2, \quad (13)$$

где, как и ранее,  $L_1 = -\operatorname{ctg}(\psi_R/2)$  и введены обозначения (1.72), (1.79):

$$L_0(a_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(\xi) d\xi > 0, \quad (14)$$

$$\kappa_0(a_0^2) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{L_0}{a_0} \right)^2, \quad \gamma_0(a_0^2) = \left( \frac{L_0}{a_0} \right) / \left( \frac{dL_0}{da_0} \right). \quad (15)$$

Из (11), (12) следует, что в области применимости этих выражений коэффициенты  $\kappa$ ,  $\gamma$  (7) равны (см. (1.82)):

$$\kappa(a_0^2) = \kappa_0^2(a_0^2) / \cos^2\left(\frac{\psi_R}{2}\right), \quad \gamma(a_0^2) = \gamma_0(a_0^2). \quad (16)$$

В условиях (8) они совпадают с  $\kappa_0$ ,  $\gamma_0$ . В линейном пределе  $a_0^2 \ll 1$  имеем, согласно (1.83),  $2\varphi_0 = -\pi/2$ ,  $L_0 = 2a_0/\sqrt{\pi}$ , т. е. в слабых полях коэффициенты  $\kappa_0 = \gamma_0 = 1$ .

Отметим, что выражения (12)–(16) остаются справедливыми в случае  $|L_1|^{-1} < \kappa_p$ ,  $\kappa_R \ll 1$ , когда влияние правой части в неоднородном уравнении (2) оказывается меньше, чем влияние слабой диссипации, хотя условие применимости выражений (5)–(7) при этом нарушается.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА

В предыдущем разделе приведены формулы, выражающие коэффициенты  $\kappa(a_0^2)$ ,  $\gamma(a_0^2)$  и нелинейный сдвиг фазы  $\varphi_R(a_0^2)$  в уравнении (1) для интенсивности захваченных плазменных колебаний через действительные волновые функции  $y_i(\xi)$  (где  $i = 1$  или  $0$ ) неоднородного (2) и однородного (9) уравнений, удовлетворяющие условию убывания (3), (10) в области непрозрачности  $\xi < 0$ . С другой стороны, в области  $\xi \gg 1$  эти функции имеют осциллирующую асимптотику (4), (11). Характер поведения волновых функций  $y_i(\xi)$  меняется в точках  $\xi_{ci}$ , определяемых условиями

$$\xi_{c0} = -y_{0c}^2, \quad y_{0c} = y_0(\xi_{c0}), \quad (17)$$

$$\xi_{c1} = -k_c^2 y_{1c}^2, \quad y_{1c} = y_1(\xi_{c1}), \quad (18)$$

где в случае неоднозначности решений  $\xi_{ci}^{(n)}$  выбирается меньший из корней  $\xi_{ci}^{(1)}$ , см. рис. 1 (ниже везде, где это не отмечено специально, верхний индекс "1" у соответствующих переменных для краткости опущен). Расчет волновых функций  $y_i(\xi)$  в различных областях проводился с помощью различных численных методов. В интервале плавного изменения функций  $[\xi_{\min}, \xi_{ci}]$ , где  $\xi_{\min} \simeq \xi_{ci} - 10$ , использовался разностный метод, а в области осцилляторного поведения  $\xi > \xi_{ci}$  — метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

При отыскании семейства функций  $y_0(\xi)$  в качестве независимой переменной первоначально использовался размер  $y_{c0} > 0$ . Для различных значений этого параметра рассчитывались величины  $\xi_{c0}$ ,  $a_0^2$ ,  $\varphi_0$  и  $L_0 > 0$ , а затем находилась явная зависимость координаты  $\xi_{c0}$  (17), интеграла  $L_0$  (14), коэффициентов  $\kappa_0$ ,  $\gamma_0$  (15) и сдвига фазы  $2\varphi_0$  в асимптотике волновой функции (11) от интенсивности плазменной волны  $a_0^2$ . Эта зависимость представлена на рис. 2–6 кривыми для параметров, помеченных индексом "0". Как уже отмечалось, эти кривые описывают асимптотику соответствующих величин в пределе  $L_1^2 = \text{ctg}^2(\psi_R/2) \gg 1$ . Так, на рис. 2а показана зависимость

$$\tilde{k}_{c0}^2(a_0^2) = L_0^2(a_0^2) / (\max L_0^2), \quad \max L_0^2 \simeq 0,497, \quad (19)$$

которая является пределом для параметра  $\tilde{k}_c^2$ , определенного ниже в (22). Здесь учтено, что в соответствии с проведенными расчетами интеграл  $L_0(a_0^2)$  монотонно возрастает с ростом  $a_0^2$  и при  $a_0^2 > 2$  приближается к своему максимальному значению  $\max L_0 \simeq 0,705$ . В результате коэффициент  $\kappa_0$  (15) в области больших  $a_0^2$  убывает  $\sim 1/a_0^2$ :

$$\kappa_0(a_0^2 > 2) \simeq \frac{\pi \max L_0^2}{4 a_0^2}, \quad (20)$$

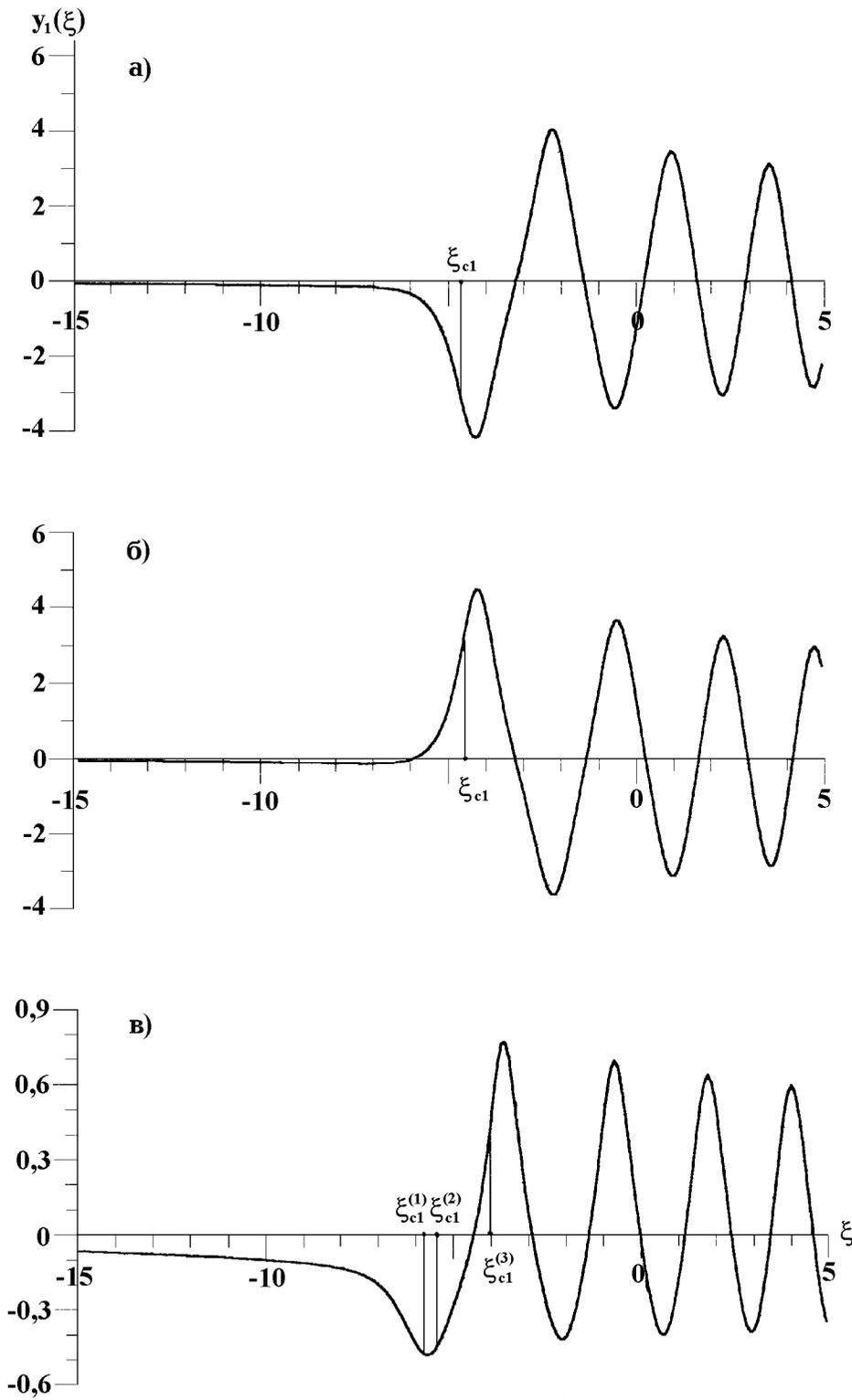


Рис. 1. Поведение волновой функции  $y_1(\xi)$  для различных значений интеграла  $L_1$  и безразмерной интенсивности  $a_0^2$ : а)  $L_1 = -1, a_0^2 = 2,8$ . б)  $L_1 = +1, a_0^2 = 2,8$ . в)  $L_1 = -0,134, a_0^2 = 4,31, a_{0j}^2 = 4,23$ .

а коэффициент  $\gamma(a_0^2)$  — резко возрастает:

$$\gamma_0(a_0^2 > 1,5) \simeq 80 a_0^2 - 103, \quad (21)$$

что соответствует асимптотике  $L_0(a_0^2) = 0,705[1 - 1/(160a_0^2)]$ . Заметим также, что сдвиг фазы  $2\varphi_0(a_0^2)$ , представленный на рис. 5, приведен в [3] в более широком диапазоне изменения  $a_0^2 \leq 14$  (здесь следует иметь в виду, что определения  $\varphi_0$  в данной работе и в [3] отличаются знаком).

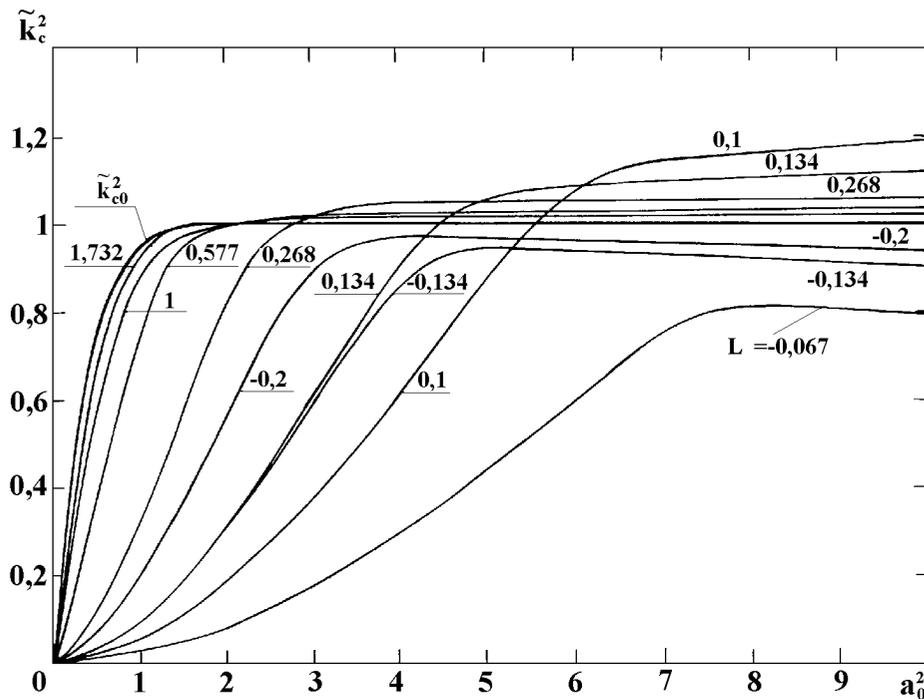


Рис. 2а. Поведение коэффициента  $k_c^2$  в зависимости от безразмерной интенсивности плазменной волны  $a_0^2$  для различных значений параметра  $L_1 = -\text{ctg}(\psi_R/2)$ . Значения  $L_1 = 1,732; 1,00; 0,577; 0,268$  соответствуют  $\psi_R/2 = 150^\circ, 135^\circ, 120^\circ, 105^\circ$ . Кривая  $k_c0^2$  соответствует пределам  $|L_1| \rightarrow \infty, \sin(\psi_R/2) \rightarrow 0$ .

Для получения общей картины влияния стрикционных эффектов следует обратиться к решению неоднородного уравнения (2). Волновые функции этого уравнения зависят от двух параметров, в качестве которых первоначально использовались коэффициент нелинейности  $k_c^2$  и  $y_{1c}$  (величина  $y_{1c}$  в общем случае может быть как меньше, так и больше нуля, см. рис. 1а,б). По описанной выше методике для различных значений  $k_c^2$  и  $y_{1c}$  рассчитывались параметры  $a_0$ ,  $\varphi_R$  и  $L_1$ , определенные в (4), (5), а затем совершался переход к другой паре независимых переменных  $a_0^2$  и  $L_1$  (параметр  $a_0^2$ , как уже отмечалось, характеризует интенсивность захваченной волны, а интеграл  $L_1$ , согласно (5), не зависит от  $a_0^2$  и определяется для данной неоднородности  $\delta N_0$  через величину “начальной” фазы отражения плазменной волны от резонанса  $\varphi_{R\text{lin}}$ ). Указанный переход иллюстрируется на рис. 2, 3.

Коэффициент  $k_c^2$ . Зависимость одного из основных параметров задачи — коэффициента нелинейности  $k_c^2$  — от  $a_0^2$  для различных значений параметра  $L_1 = -\text{ctg}(\psi_R/2)$  показана на рис. 2а,б. Согласно асимптотике (13) величина  $k_c^2$  существенно меняется в зависимости от  $L_1^2$ . Поэтому на рис. 2а приведены значения  $k_c^2$ , нормированные на максимальную величину этого коэффициента ( $\max L_0^2/L_1^2$

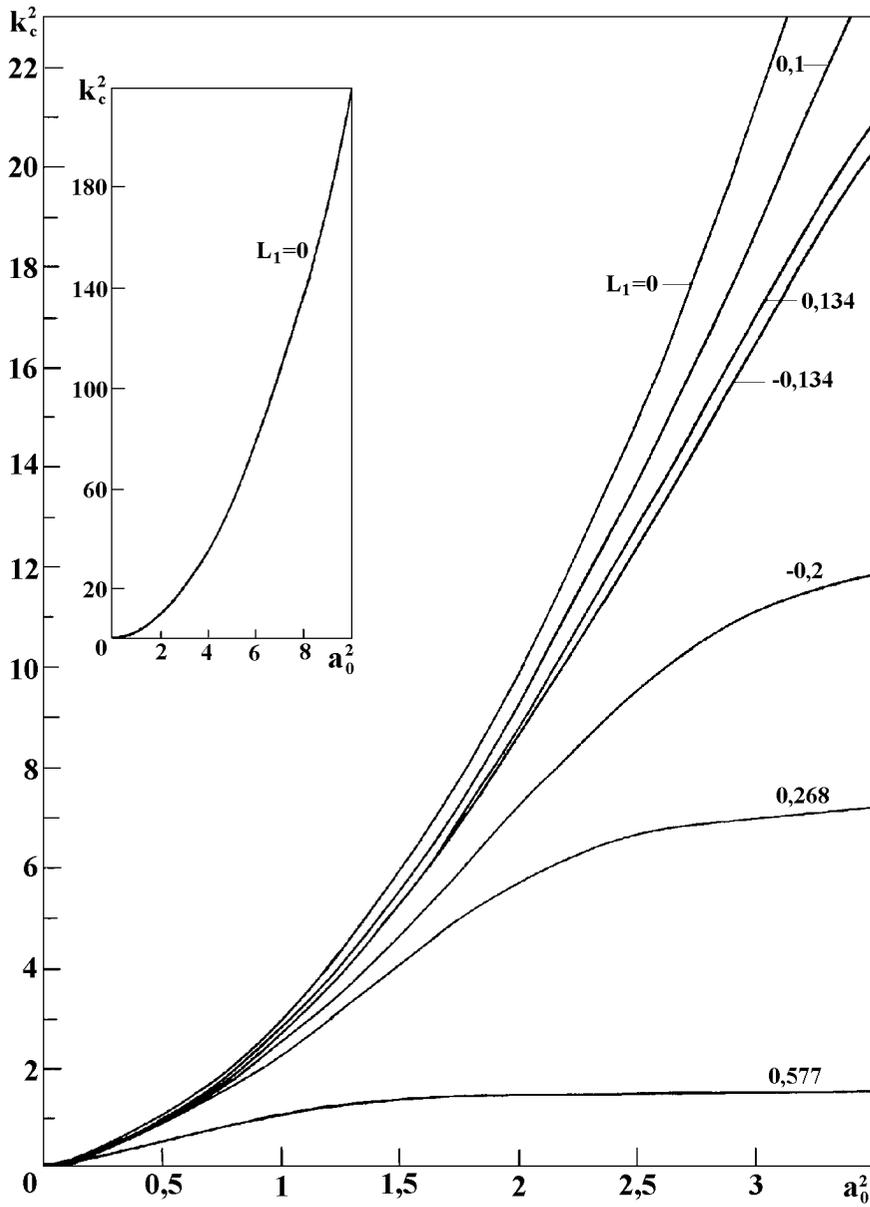


Рис. 26. Зависимость коэффициента  $k_c^2$  от  $a_0^2$  в случае малых  $|L_1|$ .

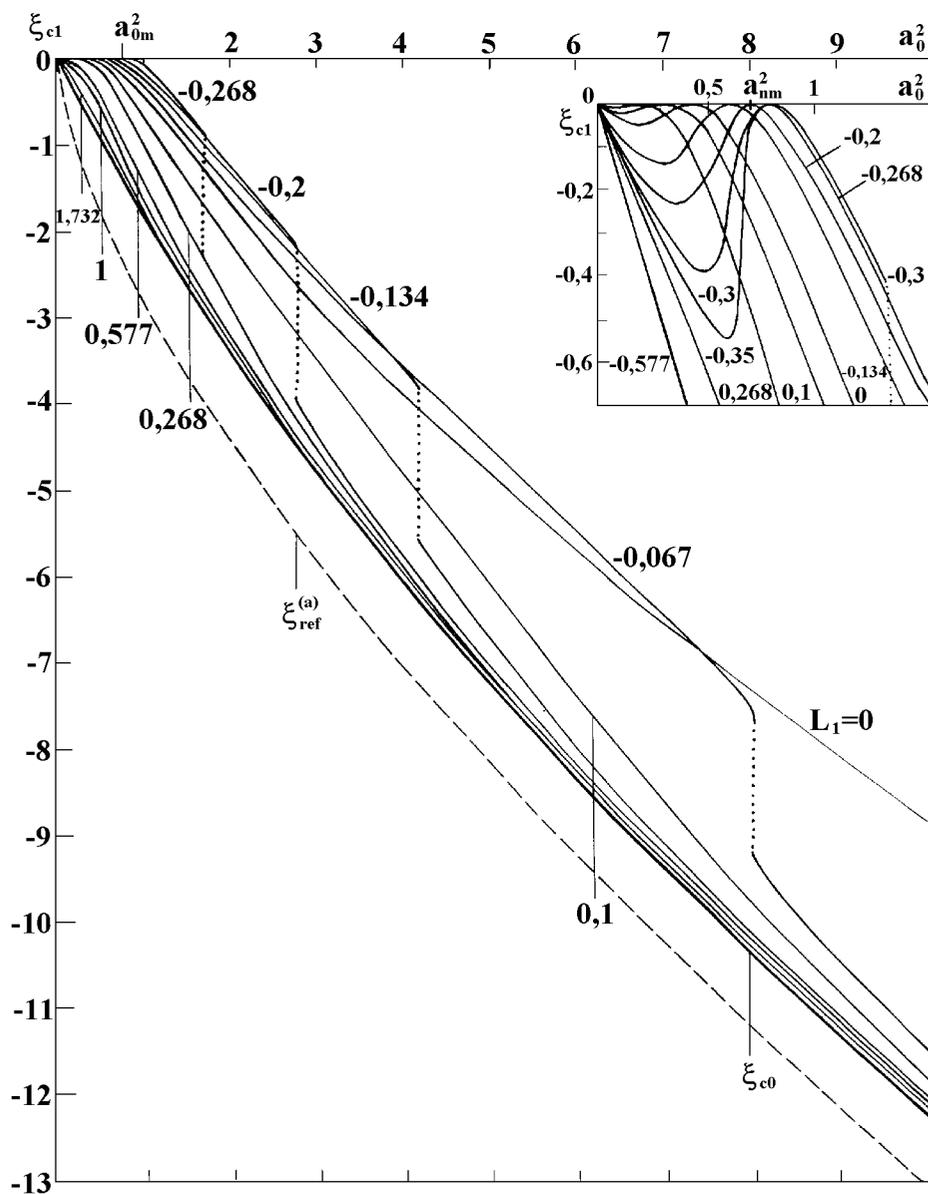


Рис. 3. Поведение параметра  $\xi_{c1}(a_0^2)$ , определяющего смещение точки отражения плазменной волны в области его монотонного изменения для различных значений  $L_1$ . Кривая  $\xi_{c0}(a_0^2)$  соответствует пределам  $|L_1| \rightarrow \infty$ ,  $\sin(\psi_R/2) \rightarrow 0$ . На вставке показана область немонотонного поведения  $\xi_{c1}(a_0^2)$  вблизи начала координат, возникающая в случае малых  $|L_1|$ .

в асимптотическом выражении (13):

$$\tilde{k}_c^2(a_0^2) = k_c^2(a_0^2) L_1^2 / (\max L_0^2). \quad (22)$$

Видно, что с увеличением  $|L_1|$  коэффициент  $\tilde{k}_c^2(a_0^2)$  быстро приближается к своему предельному значению (18), справедливому при  $|L_1| \rightarrow \infty$ ,  $\sin(\psi_R/2) \rightarrow 0$ . Величина  $k_c^2(a_0^2)$  в случае достаточно больших  $|L_1|$  ( $|L_1| \geq 0,268$ ) относительно мало меняется с изменением знака  $L_1$ . Поэтому для  $|L_1| \geq 0,268$  приведены только кривые, соответствующие  $L_1 > 0$ . Видно также, что в случае  $L_1 > 0$  коэффициент нелинейности  $k_c^2$  монотонно возрастает с ростом  $a_0^2$ , тогда как в случае  $L_1 < 0$  функция  $k_c^2(a_0^2)$  имеет слабо выраженный максимум при  $\tilde{k}_c^2 \sim 1$ .

Использованная в (21) нормировка неприменима в пределе  $L_1^2 \rightarrow 0$ . Поэтому на рис. 2б приведена зависимость  $k_c^2(a_0^2)$  в случае малых  $L_1^2 \ll 1$ . Видно, что с возрастанием  $|L_1|$  величина  $k_c^2(a_0^2)$  уменьшается и становится малой в пределе  $|L_1| \gg 1$  (см. рис. 2а).

Параметр  $\xi_{c1}$ . Величина  $y_{1c}$  при известном  $k_c^2$  тесно связана с координатой  $\xi_{c1}$  (18) для нижней границы области осцилляторного поведения  $y_1(\xi)$ , которая входит в определение точки отражения плазменной волны  $\xi_{ref}$ , см. ниже (23)–(25). Зависимость  $\xi_{c1}$  от  $a_0^2$  в области монотонного уменьшения  $\xi_{c1}(a_0^2) \leq 0$  для различных значений  $L_1$  представлена на рис. 3. На вставке к этому рисунку иллюстрируется немонотонность поведения  $\xi_{c1}(a_0^2)$ , возникающая вблизи начала координат (при  $|\xi_{c1}|, a_0^2 < 1$ ) в случае малых  $|L_1|$  (причины возникновения этой особенности обсуждаются ниже). Как и в случае с  $\tilde{k}_c^2$  величина  $\xi_{c1}(a_0^2)$  при  $|L_1| \geq 0,268$  сравнительно мало меняется с изменением знака  $L_1$ . Поэтому в случае  $|L_1| \geq 0,268$  на рис. 3 приведены только кривые для  $L_1 > 0$ . Поведение функции  $\xi_{c1}(a_0^2)$  при  $L_1 = -0,268$  в области  $a_0^2 < 2$ , где она имеет дополнительную особенность, представлено отдельно, см. также вставку в верхней части рис. 3.

На рис. 3 приведена также зависимость параметра  $\xi_{c0}(a_0^2)$  (16) для волновой функции  $y_0(\xi)$  однородного уравнения Эйри. Видно, что значения  $\xi_{c1}(a_0^2)$  быстро приближаются к асимптотической величине  $\xi_{c0}(a_0^2)$  (соответствующей пределу  $|L_1| \rightarrow \infty$ ) как с увеличением  $|L_1|$ , так и с ростом  $a_0^2$ . Существенная особенность в поведении  $\xi_{c1}(a_0^2)$  возникает в случае малых  $L_1 < 0$ . В этом случае величина  $\xi_{c1}(a_0^2)$ , определяемая как минимальный корень уравнения (18), испытывает скачок при некотором значении  $a_0^2 = a_{0j}^2(L_1)$ , см. кривые для  $L_1 = -0,067, -0,134, -0,200, -0,268$  на рис. 3. Скачок возникает в результате слияния и последующего исчезновения (с уменьшением  $a_0^2$ ) двух первых корней уравнения (18), существующих в области  $a_0^2 > a_{0j}^2$ , см. рис. 1в. В результате при  $a_0^2 = a_{0j}^2$  параметр  $\xi_{c1} = \xi_{c1}^{(1)}$  “перескакивает” из области первого минимума в область первого максимума функции  $y_1(\xi)$ , см. рис. 1в. Заметим, что точка слияния корней  $\xi_{c1}^{(1)} = \xi_{c1}^{(2)}$  при  $a_0^2 = a_{0j}^2$  расположена между первым минимумом и первым нулем волновой функции  $y_1(\xi)$  со стороны отрицательных  $\xi$ .

Другая особенность в поведении  $\xi_{c1}(a_0^2)$  в случае малых  $|L_1|$  связана с обращением в нуль  $y_{1c}$  и  $\xi_{c1}$  при некотором ненулевом значении  $a_0^2 = a_{0m}^2(L_1)$  (в то же время по определению (18)  $\xi_{c1} \rightarrow 0$  в линейном пределе  $a_0^2, k_c^2 \rightarrow 0$ ). Это приводит к немонотонному изменению  $\xi_{c1}$  от  $a_0^2$  в области  $0 < a_0^2 < a_{0m}^2$ , показанному на вставке в верхней части рис. 3 в более крупном масштабе по переменной  $\xi_{c1}$ . Заметим, что нули  $\xi_{c1}, y_{1c}$  всегда являются корнями уравнения (18). Однако только при малых  $|L_1|$  и  $a_0^2 < 1$  соответствующий корень является минимальным и совпадает с  $\xi_{c1}$ . Отметим также, что верхняя граница интервала  $L_1$ , содержащего указанную особенность, находится из условия  $y_1(\xi=0) = 0$  при  $k_c = 0$  и равна  $L_1 \simeq 0,577$ .

Приведенные на рис. 2, 3 значения  $k_c^2$  и  $\xi_{c1}$  определяют величину “входного” параметра  $y_{1c}$  с точностью до знака, который для приведенных кривых совпадает со знаком интеграла  $L_1$  в области достаточно больших  $a_0^2$  ( $y_{1c} > 0$  при  $L_1 = 0$ ). Следует иметь в виду при этом, что знак  $y_{1c}$  меняется как во время скачка  $\xi_{c1}(a_0^2)$  в точке  $a_0^2 = a_{0j}^2$ , так и при переходе  $\xi_{c1}$  через нуль в точке  $a_0^2 = a_{0m}^2$  (см. рис. 3).

Точка отражения  $\xi_{\text{ref}}$ . Параметр  $\xi_{c1}$  по смыслу своего определения характеризует глубину проникновения по безразмерной координате  $\xi = x/x_p$  в область непрозрачности  $x < 0$  падающей на резонанс плазменной волны с безразмерной интенсивностью  $a_0^2$  в условиях сильного отражения волны от резонанса (здесь  $x_p \simeq [3T_e/(m\omega^2\mu)]^{1/3}$  — характерный масштаб изменения плазменного поля (1.12),  $\mu$  — относительный градиент концентрации электронов в окрестности резонанса, а координата  $x$  отсчитывается ортогонально уровню резонанса). Поэтому можно считать, что этот параметр определяет координату  $x_{\text{ref}}$  точки отражения плазменной волны от резонанса с учетом стрикционных возмущений плотности плазмы:

$$x_{\text{ref}}/x_p \equiv \xi_{\text{ref}} = \xi_{c1}(a_0^2). \quad (23)$$

Согласно рис. 3, с увеличением интенсивности  $a_0^2$  плазменная волна пробивается вглубь плазмы. В то же время поведение  $\xi_{c1}(a_0^2)$  в случае малых  $|L_1|$  обладает рядом особенностей, вследствие чего определение (23) в этом случае нуждается в уточнении, см. ниже (25). Необходимость уточнения связана с тем, что волновая функция  $y_1(\xi)$  неоднородного уравнения (2) в области  $\xi < \xi_{c1}$  может быть немонотонной. Действительно, влияние правой части уравнения (2) приводит к отрицательной асимптотике  $y_1(\xi)$  в области больших  $\xi < 0$ , в результате чего первый экстремум  $y_1(\xi)$  со стороны отрицательных  $\xi$  всегда оказывается отрицательным и совпадает с первым минимумом этой функции:  $y_{1\text{min}} = y_1(\xi_{\text{min}}) < 0$ , где  $\xi_{\text{min}} = \xi_{\text{min}}^{(1)}$  — координата первого минимума. С увеличением интеграла  $L_1 \in [-\infty, +\infty]$  абсолютная величина  $|y_{1\text{min}}|$  убывает от  $|y_{1\text{min}}| \gg 1$  при  $L_1 \rightarrow -\infty$  до  $|y_{1\text{min}}| \rightarrow 0$  при  $L_1 \rightarrow +\infty$ , см. рис. 1а,б. При этом в случае отрицательных  $L_1 < -0,33$  координата точки отражения  $\xi_{\text{ref}} = \xi_{c1}$  (23) оказывается меньше  $\xi_{\text{min}}$ , т. е. функция  $y_1(\xi)$  монотонно убывает в области  $\xi < \xi_{\text{ref}}$ , см. рис. 1а. В противоположном случае положительных  $L_1 > 0,577$  первый минимум  $y_1(\xi)$  попадает в область  $\xi < \xi_{\text{ref}}$  (23), но оказывается пренебрежимо малым в сравнении с первым (главным) максимумом  $y_{1\text{max}}$  этой функции независимо от величины  $a_0^2$  (см. рис. 1б):

$$\varepsilon = |y_{1\text{min}}|/y_{1\text{max}} < 1. \quad (24)$$

Поэтому для  $L_1 > 0,577$  определение точки отражения (22) также можно считать оправданным. Однако в промежуточном случае малых  $L_1$ , принадлежащих интервалу  $-0,33 < L_1 < 0,577$ , эффект немонотонности функции  $y_1(\xi)$  в области  $\xi < \xi_{c1}$  становится существенным. Как уже отмечалось, он приводит к двум особенностям поведения  $\xi_{c1}(a_0^2)$ .

Первая особенность появляется в начале координат  $(\xi_{c1}, a_0^2)$  и заключается в немонотонном изменении  $\xi_{c1}(a_0^2)$  после обращения  $\xi_{c1}$  в нуль при некотором значении  $a_0^2 = a_{0m}^2(L_1) \neq 0$ , см. вставку на рис. 3. Согласно приведенному рисунку, эта особенность возникает в области малых  $|\xi_{c1}| < 1$ . Поэтому при определении точки отражения  $\xi_{\text{ref}}$  с достаточной степенью точности можно считать, что в области  $a_0^2 \leq a_{0m}^2$  величина  $\xi_{c1} = 0$ .

Вторая особенность заключается в скачкообразном переходе  $\xi_{c1}$ , при некотором значении  $a_0^2 = a_{0j}^2(L_1)$ , из области первого минимума волновой функции  $y_1(\xi)$  в область ее первого максимума со стороны отрицательных  $\xi$ , см. рис. 1в. Согласно рис. 3, такая особенность реализуется в случае  $-0,33 < L_1 < 0$ . При этом в случае  $\xi_{\text{min}} < \xi_{c1}$ , включающем в себя область  $a_0^2 < a_{0j}^2$ , в качестве координаты точки отражения плазменной волны можно использовать величину  $\xi_{\text{min}}$ , полагая

$$\xi_{\text{ref}} = \xi_{\text{min}} < \xi_{c1} \quad (25)$$

при условии, что параметр  $\varepsilon$  (24) не является малым. Этот параметр оказывается порядка единицы в области скачка функции  $y_{1c}(a_0^2)$  и убывает с уменьшением  $a_0^2 < a_{0j}^2$ . В противоположном (25) случае  $\xi_{c1} < \xi_{\text{min}}$ , либо при  $\varepsilon \ll 1$ , величина  $\xi_{\text{ref}}$  по-прежнему определяется выражением (23).

Описанная методика определения  $\xi_{\text{ref}} = \min(\xi_{\text{min}}, \xi_{c1})$  в случае  $-0,33 < L_1 < 0$  продемонстрирована на рис. 4 для двух значений  $L_1 = -0,067, -0,268$ , принадлежащих указанному интервалу.

Штрихом на этом рисунке показаны кривые  $\xi_{c1}(a_0^2)$  в области  $\xi_{\min} < \xi_{c1}$  и кривые  $\xi_{\min}(a_0^2)$  в области  $\xi_{c1} < \xi_{\min}$ . Видно, что кривые  $\xi_{\min}(a_0^2)$  являются естественным непрерывным продолжением  $\xi_{c1}(a_0^2)$  в "доскачковую" область  $a_0^2 < a_{0j}^2$ . Величина параметра  $\varepsilon$  (24) для указанных значений  $L_1$  уменьшается от  $\varepsilon(a_{0j}^2) = 0,61, 0,83$  вблизи скачка  $\xi_{c1}(a_0^2)$  до минимального значения  $\min \varepsilon \simeq 0,40$  при  $a_0^2 \simeq 1,60$ ,  $\xi_{\min} \simeq -2,80$  в случае  $L_1 = -0,067$  и  $\min \varepsilon \simeq 0,53$  при  $a_0^2 = 1,91$ ,  $\xi_{\min} \simeq -0,57$  в случае  $L_1 = -0,268$  (при дальнейшем уменьшении  $a_0^2$  и  $\xi_{\min}$  параметр  $\varepsilon$  немного возрастает).

Сопоставим теперь результаты проведенных расчетов с оценкой смещения точки отражения плазменной волны

$$\xi_{\text{ref}}^{(a)} = - \left( \frac{3\pi}{2} a_0^2 \right)^{2/3}, \quad (26)$$

полученной по методике [4] путем решения однородного уравнения (9) в адиабатическом приближении (т. е. в предположении медленного изменения невозмущенного профиля плотности плазмы). Отметим, что выражение остается справедливым и в случае решения неоднородного уравнения (2), при соблюдении условия  $|\xi_{\text{ref}}| \gg |\xi_k|$ . Здесь использован параметр  $\xi_k = -3(k_c^2/4)^{1/3}$ , введенный в [5] при анализе уравнения (2). В рассматриваемом приближении он определяет величину минимального смещения точки отражения плазменной волны, которое может быть получено в рамках адиабатического подхода при заданном коэффициенте  $k_c$ . Кривая  $\xi_{\text{ref}}^{(a)}(a_0^2)$  показана на рис. 3 штрихом. Видно, что точность адиабатического приближения возрастает с увеличением безразмерной интенсивности плазменной волны  $a_0^2$ .

Коэффициент  $\kappa$  в уравнении (1) описывает влияние стрикционного выдавливания плазмы в области резонанса на интенсивность возбуждения и высвечивания плазменных волн в результате взаимной трансформации холодных и плазменных колебаний в окрестности резонанса. Согласно (7), величина  $\kappa(a_0^2)$  пропорциональна  $k_c^2(a_0^2)/a_0^2$  и может быть представлена в виде

$$\kappa(a_0^2) = \frac{\pi}{4a_0^2} \tilde{k}_c^2(a_0^2) \frac{\max L_0^2}{\cos(\psi_R/2)}, \quad (27)$$

где использован параметр  $\tilde{k}_c^2$ , приведенный на рис. 2а. Поведение коэффициента  $\kappa(a_0^2)$  показано на рис. 5 для пяти значений  $|L_1| = 0, 0,268, 0,577, 1,00, 1,732$ . Вычисления проводились при положительных  $L_1 > 0$  (соответствующих  $\psi_R/2 = 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ ). Учтено, что изменение знака  $L_1$  в рассматриваемых случаях мало меняет коэффициент  $k_c^2$  (приведенные выше значения  $|L_1|$  при  $L_1 < 0$  соответствуют  $\psi_R/2 = 90^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ ). На этом же рисунке представлен коэффициент  $\kappa_0(a_0^2)$  (15), соответствующий пределам  $|L_1| \rightarrow \infty, \sin(\psi_R/2) \rightarrow 0$ . Видно, что в случае  $|L_1| = 1,732$  кривая  $\kappa(a_0^2)$  достаточно близка к асимптотическому значению  $\kappa_0(a_0^2)$ . Согласно рис. 5, общая тенденция изменения  $\kappa(a_0^2)$  заключается в уменьшении этого коэффициента в области больших  $a_0^2$ . Так, при  $a_0^2 > 2$  величина  $\kappa_0(a_0^2)$  (20) убывает  $\sim 1/a_0^2$ , а поведение  $\kappa(a_0^2)$  в случае  $|L_1| > 0,268$  хорошо описывается выражением  $\kappa(a_0^2) = \kappa_0(a_0^2)/\cos^2(\psi_R/2)$  (16) вследствие близости коэффициента  $\tilde{k}_c^2(a_0^2)$  к единице, см. рис. 2а.

Фаза  $\varphi_R$ . Изменение фазы  $\varphi_R(a_0^2)$  коэффициента отражения плазменной волны от резонанса находилось из уравнения (5) и рассчитывалось одновременно с коэффициентом  $k_c^2$  и параметром  $\xi_{c1}$ . Оно показано на рис. 6 для различных значений "начальной" фазы  $\varphi_{R\text{lin}}$ , вычисленной в линейном пределе  $a_0^2 \rightarrow 0$ . Видно, что кривые  $\varphi_R(a_0^2)$  расположены между двумя граничными значениями  $\varphi_{R0} = 2\varphi_0(a_0^2)$  и  $\varphi_{R0} = [2\varphi_0(a_0^2) + 2\pi]$ , которые соответствуют фазе  $\varphi_R(a_0^2)$  в пределе  $L_1 \rightarrow -\infty$  и  $L_1 \rightarrow +\infty$  (величина  $2\varphi_0$  равна сдвигу фазы между падающей на резонанс и отраженной плазменной волной в решении однородного уравнения Эйри (11)). Видно также, что с ростом безразмерной интенсивности  $a_0^2$  кривые  $\varphi_R(a_0^2)$  собираются в два пучка и в соответствии с асимптотикой (12) приближаются к указанным граничным значениям.

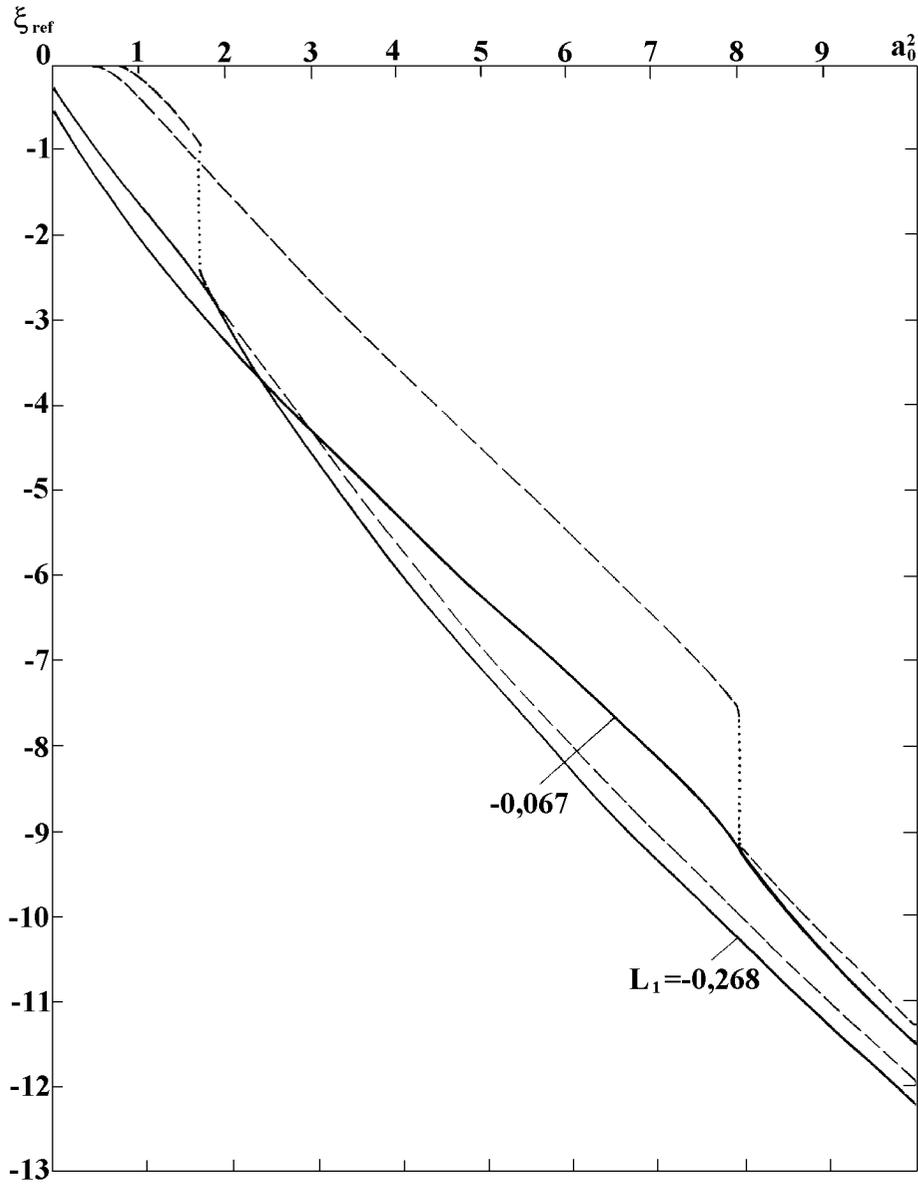


Рис. 4. Поведение координаты  $\xi_{\text{ref}}(a_0^2)$  точки отражения плазменной волны от резонанса для малых значений параметра  $L_1 < 0$ .

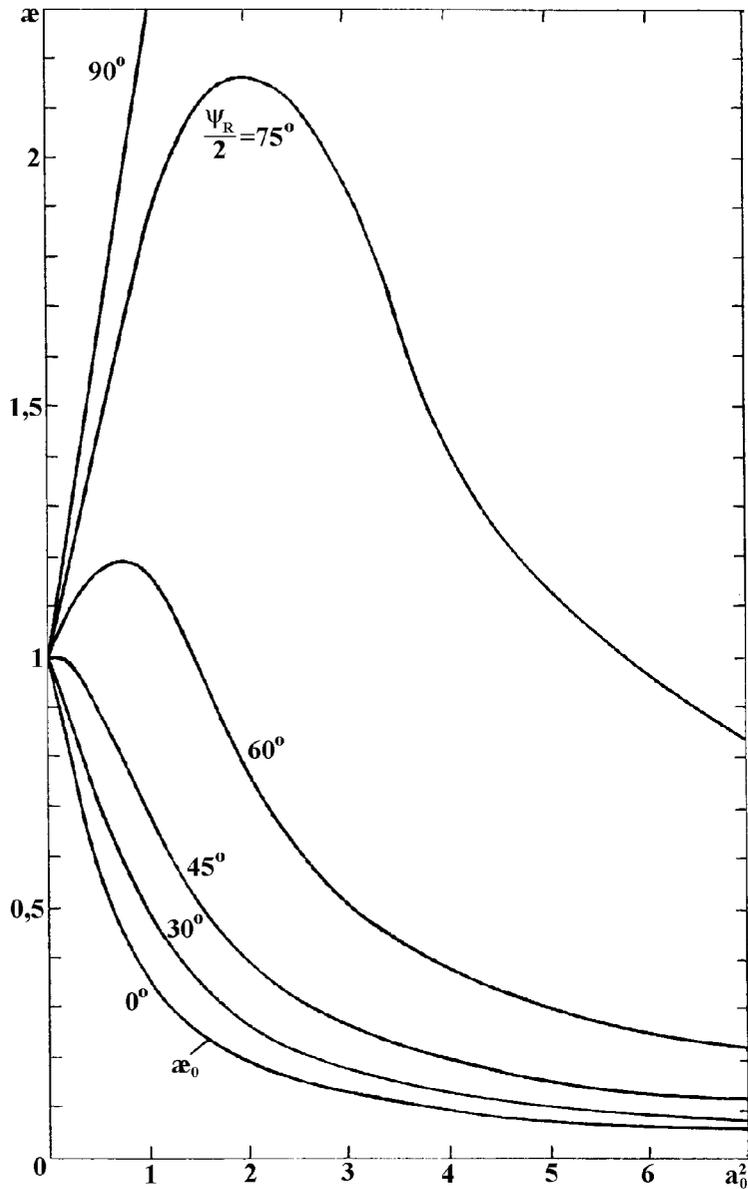


Рис. 5. Зависимость коэффициента  $\kappa$  от безразмерной интенсивности плазменной волны  $a_0^2$  для различных значений параметра  $|L_1| = |\text{ctg}(\psi_R/2)|$ . Возле кривых приведена соответствующая фаза  $\psi_R/2 \in [0, 90^\circ]$ .

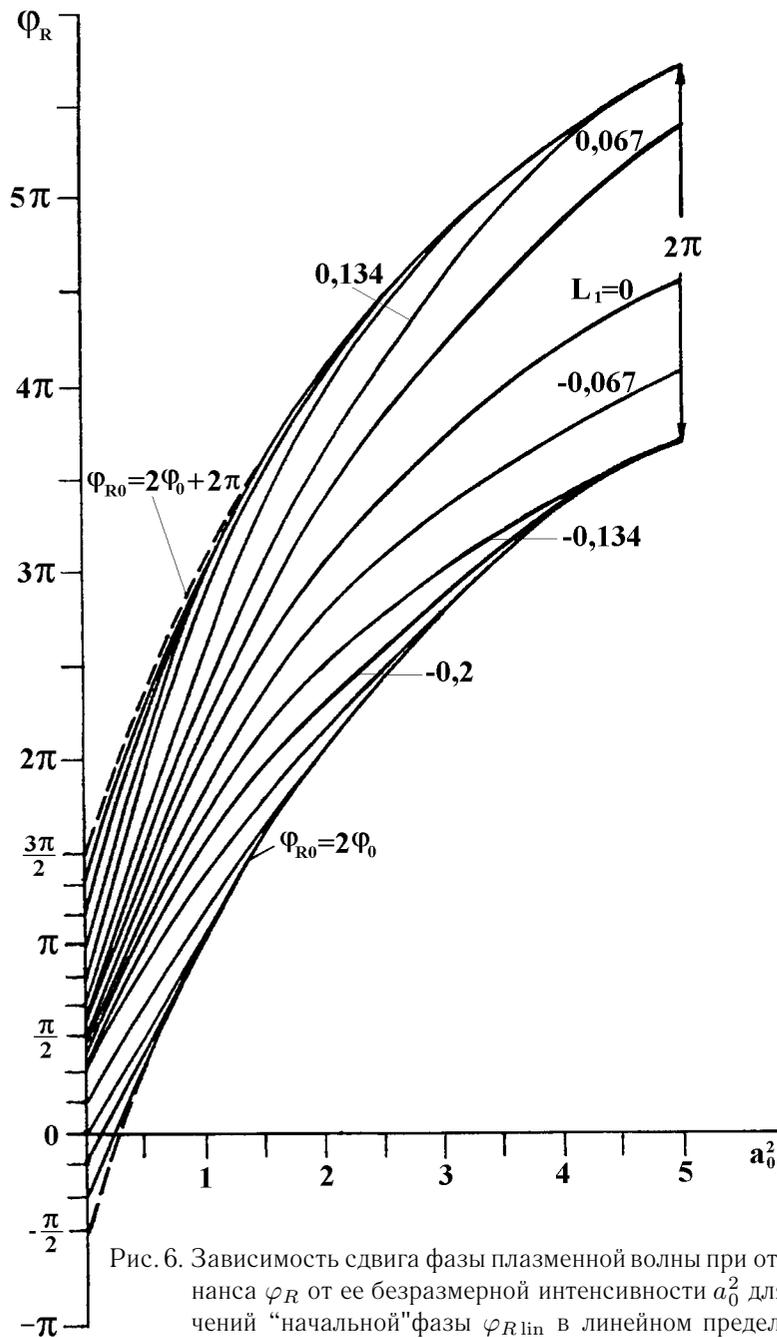


Рис. 6. Зависимость сдвига фазы плазменной волны при отражении от резонанса  $\varphi_R$  от ее безразмерной интенсивности  $a_0^2$  для различных значений "начальной" фазы  $\varphi_{Rlin}$  в линейном пределе  $a_0^2 = 0$ . Возле кривых приведена величина параметра  $L_1 = -\text{ctg}(\psi_R/2)$ , где  $\psi_R = \pi/2 + \varphi_{Rlin}$ . Пять верхних кривых относятся к положительным значениям  $L_1 = 3,732, 1,732, 1,00, 0,577, 0,268$ , соответствующим  $\varphi_R/2 = 165^\circ, 150^\circ, 135^\circ, 120^\circ, 105^\circ$ . Пять нижних кривых относятся к отрицательным значениям  $L_1 = -3,732, -1,732, -1,00, -0,577, -0,268$ , соответствующим  $\psi_R/2 = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ . Штрихом показаны фазовые сдвиги  $2\varphi_0(a_0^2)$  и  $(2\varphi_0 + 2\pi)$ , соответствующие пределу  $L_1 \rightarrow -\infty$  и  $L_1 \rightarrow +\infty$ .

Коэффициент  $\gamma$  в формуле (1) характеризует изменение ширины пространственного резонанса для собственных мод плазменных колебаний, захваченных внутри вытянутой вдоль магнитного поля неоднородности  $\delta N_0$  (ширина максимума в резонансной зависимости интенсивности  $a_0^2$  от фазовой расстройки  $\delta\varphi_p$  захваченной волны пропорциональна  $1/\gamma$ ). Величина коэффициента  $\gamma$  определяется выражением (7), которое в пределе  $\sin(\psi_R/2) \rightarrow 0$  совпадает с коэффициентом  $\gamma_0$  (15). Входящая в (7) производная  $(\partial L_1/\partial \varphi_R)$  находилась численным методом путем вычисления функции  $\varphi_R(a_0^2)$  для двух близких значений  $L_1$ .

Функция  $\gamma(a_0^2)$  представлена на рис. 7 для тех же значений  $L_1$  и  $\psi_R$ , что и коэффициент  $\kappa(a_0^2)$  на рис. 6. Видно, что функция  $\gamma(a_0^2)$  при  $\sin(\psi_R/2) \rightarrow 0$ ,  $L_1^2 \rightarrow \infty$  приближается к предельному значению  $\gamma_0(a_0^2)$ . Однако это приближение происходит значительно медленнее, чем в случае с  $\widetilde{k}_c^2$ ,  $\xi_{c1}$  и  $\kappa$  (см. рис. 2а, рис. 3 и рис. 5). Это означает, что асимптотические выражения (12), (20), (21), которые правильно описывают тенденцию изменения фазы  $\varphi_R(a_0^2)$  при больших  $a_0^2$ , оказываются недостаточно точными количественно при  $L_1^2, a_0^2 < 3$ .

### 3. НАГРЕВ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Нагрев мелкомасштабных неоднородностей полем захваченных плазменных волн может приводить к увеличению отрицательных возмущений электронной концентрации  $\delta N_0$  в исходных неоднородностях в результате развития тепловой резонансной неустойчивости мелкомасштабных возмущений плазмы [2]. Оценим интенсивность этого нагрева с учетом стрикционных возмущений профиля плотности плазмы. Влияние стрикционных возмущений учитывается коэффициентами  $\kappa(a_0^2)$ ,  $\gamma(a_0^2)$  в уравнении (1) для безразмерной интенсивности  $a_0^2$  захваченных волн и, кроме того, приводит к зависимости сдвига фазы  $\varphi_R(a_0^2)$  от  $a_0^2$  и к дополнительному набегу фазы  $\eta a_0^2$  при распространении плазменной волны внутри неоднородности.

Проведенные вычисления показывают, что зависимость коэффициентов  $\kappa(a_0^2)$ ,  $\gamma(a_0^2)$  от  $a_0^2$  в общем случае является немонотонной. Однако общей тенденцией их изменения является убывание  $\kappa$  и  $1/\gamma$  в области больших  $a_0^2 \gg 1$ . Уменьшение коэффициента  $\gamma$  в случае слабого поглощения

$$\kappa_p \ll \kappa_{R\text{lin}} \equiv 1 - |R_{p\text{lin}}| \quad (28)$$

приводит к увеличению интенсивности захваченной плазменной волны в пике пространственного резонанса  $\varphi_p = 2\pi n$ , а рост коэффициента  $\gamma$  — к уменьшению ширины этого резонанса по фазовой расстройке  $\delta\varphi_p$ . Последнее обстоятельство вызывает уменьшение столкновительной диссипации плазменных волн (т. е. нагрева неоднородности) при усреднении потока диссипатируемой энергии  $Q = 2\kappa_p S_p^{(+)}$  (1.33) по  $\delta\varphi_p$ , несмотря на усиление максимального “пикового” поля. В линейном пределе слабых полей  $a_0^2 \ll 1$  такое усреднение эквивалентно интегрированию источника  $Q(z)$  вдоль оси  $z$  вытянутой вдоль магнитного поля неоднородности (т. к. расстройка  $\delta\varphi_p$  зависит от концентрации электронов  $N_0(z)$  в невозмущенной плазме, которая, в свою очередь, плавно меняется при смещении вдоль оси неоднородности). В нелинейной теории полное изменение фазы волны  $\varphi_p$  (1) является функцией интенсивности  $a_0^2$ . Это облегчает выполнение условия пространственного резонанса и, как следствие, может привести к усилению нагрева неоднородности. Так, в условиях (28) убывание коэффициента  $\kappa(a_0^2) \sim 1/a_0^2$ , описанное в предыдущем разделе (см. (20), (26) и рис. 2а), приводит к увеличению интенсивности  $a_0^2$  при  $\delta\varphi_p = 0$  вплоть до больших значений  $a_0^2 \sim \kappa_{R\text{lin}}/\kappa_p \gg 1$  (при этом предполагается, что величина  $a_0^2$ , определяемая выражением (1) в линейном приближении  $\kappa = 1$ , оказывается больше единицы). Следует иметь в виду, однако, что в сильных полях становится существенным нелинейный процесс проникновения мощной плазменной волны в область непрозрачности за пределы неоднородности, который ограничивает интенсивность захваченных волн. Оценивая этот эффект в адиабатическом приближении (26), получаем искомое ограничение на интенсивность  $a_0^2$  и поток энергии  $S_p^{(+)}$

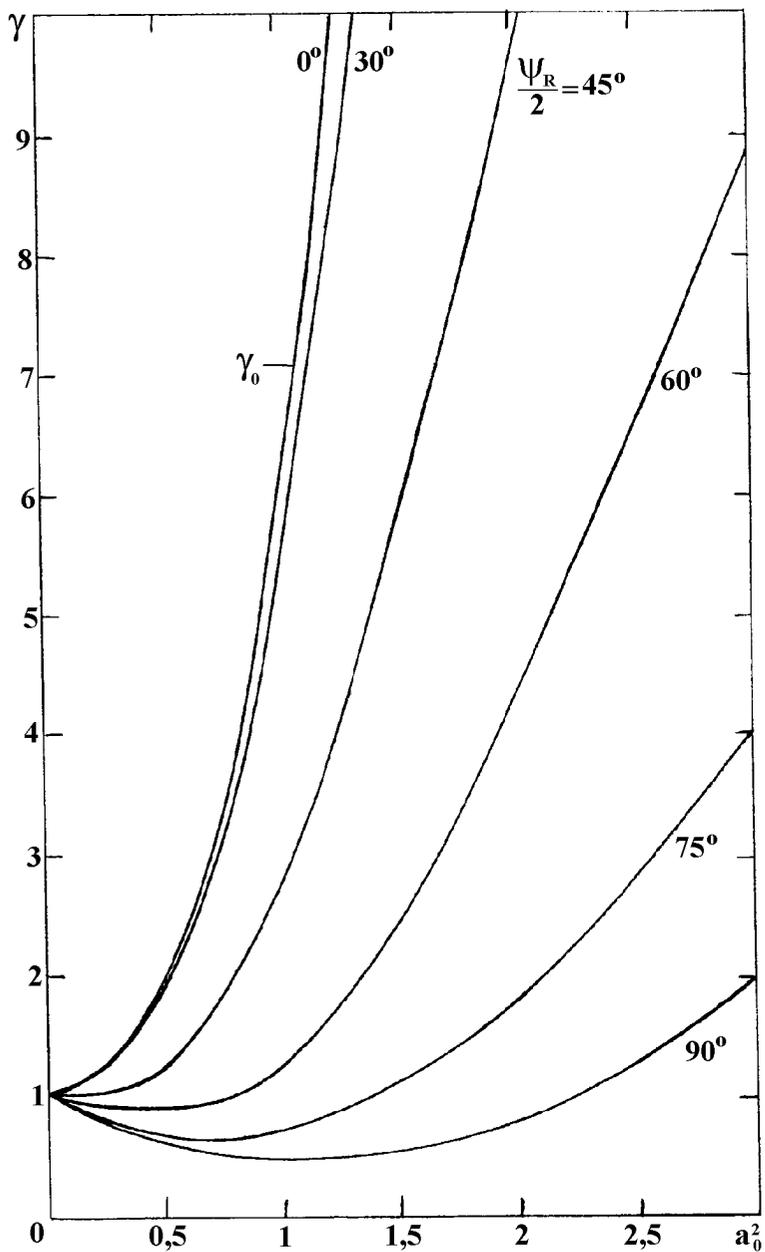


Рис. 7. Зависимость коэффициента  $\gamma$  от  $a_0^2$  для тех же значений параметра  $L_1$  и фазы  $\psi_R$ , что и на рис. 5.

плазменных волн, удерживаемых данной неоднородностью

$$a_0^2 < \frac{2}{3\pi} \left[ \frac{\Delta N}{N_R} / (\mu x_p) \right]^{3/2},$$

$$S_p^{(+)} < S_{pM} = \frac{4}{3\pi} \sqrt{\beta} c N_R (T_e + T_i) (\Delta N / N_R)^{3/2}. \quad (29)$$

Здесь  $\Delta N = (N_0(z) - N_R)$  — отклонение электронной концентрации за пределами неоднородности от резонансного значения  $N_R$ ,  $\beta \approx 3T_e/(mc^2)$  — малый коэффициент, учитывающий тепловые эффекты пространственной дисперсии в уравнении для плазменных волн, см. (1.3), (1.6).

Условия (29) позволяют оценить максимальную величину источника нагрева неоднородности  $Q_p$ . Действительно, поток диссипируемой энергии  $Q(z)$  отличается от  $S_p^{(+)}$  коэффициентом столкновительного поглощения  $2\kappa_p$  (1.18)

$$2\kappa_p \simeq \frac{2r_R \nu_e}{\sqrt{\beta}} \frac{1+u}{c} \frac{1+u}{1-u} \sqrt{N_R / \Delta N_1}, \quad \Delta N_1 = |\delta N_0| - \Delta N, \quad (30)$$

где  $\Delta N_1$  — отклонение концентрации электронов от резонансного значения  $N_R$  внутри неоднородности  $\delta N_0 < 0$ ,  $r_R$  — радиальная координата для уровня верхнегибридного резонанса  $N_0 + \delta N_0(r_R) = N_R$ ,  $\nu_e$  — эффективная частота соударений электронов с тяжелыми частицами (ионами),  $u = \omega^2 / \omega_{Be}^2$ . Чтобы определить величину  $Q_p$ , усредним поток  $2\pi r_R Q(z)$ , приходящийся на единицу длины неоднородности, по площади сечения  $\pi r_R^2$  (полагая, что радиус неоднородности  $r_0 \simeq r_R$ ) и проинтегрируем его вдоль оси вытянутой неоднородности (т. е. по координате  $z$ ). В результате получаем

$$Q_p \equiv \int \frac{2}{r_R} \cdot 2\kappa_p S_{pM}^{(+)}(z) dz = 2 \frac{1+u}{1-u} \nu_e L_R N_R (T_e + T_i) (\delta N_0 / N_R)^2, \quad (31)$$

$$L_R = N_0 (dN_0/dz)^{-1},$$

где  $L_R$  — характерный масштаб изменения электронной концентрации в невозмущенной плазме вблизи уровня верхнегибридного резонанса  $N_0 = N_R$ . Отметим, что величина  $Q_p$  (31) в обозначениях работы [2] совпадает с левой частью определения (3) этой работы, что позволяет непосредственно использовать полученные в [2] результаты.

В условиях ионосферных экспериментов (при  $|\delta N_0|/N_R \simeq 10^{-2}$ ,  $L_R \simeq 30$  км,  $\nu_e \simeq 200$  с<sup>-1</sup>,  $T_e + T_i \simeq 3500^\circ$ ,  $N_R \simeq 3,5 \cdot 10^5$  см<sup>-3</sup>,  $\kappa_p \simeq 2 \cdot 10^{-4}$ ) параметр нелинейности  $a_0^2$  для плазменных волн, удерживаемых неоднородностью, превышает единицу ( $a_0^2 = 2 \div 3$ ), а поток энергии (31), расходуемый на нагрев электронов, оказывается порядка  $Q_p \simeq 2 \cdot 10^{-9}$  Вт/см<sup>2</sup>. Такие потоки обеспечиваются в ионосферных экспериментах при эффективной мощности излучения возмущающей радиоволны  $PG \geq 10$  МВт. Согласно [2], они приводят к увеличению возмущения концентрации в мелкомасштабных неоднородностях от начального уровня  $|\delta N_0| \simeq 10^{-3} N_R$  до  $|\delta N_0| \simeq 10^{-2} N_R$  за время порядка нескольких секунд.

#### 4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Описано влияние стрикционных возмущений плотности плазмы на интенсивность возбуждения полем электромагнитной волны коротковолновых колебаний плазмы, захваченных внутри вытянутой вдоль магнитного поля неоднородности с  $\delta N_0 < 0$ , в которой концентрация электронов пересекает уровень верхнегибридного резонанса. Стрикционные возмущения приводят к появлению коэффициентов

$\kappa(a_0^2)$  и  $\gamma(a_0^2)$  в уравнении (1) для безразмерной интенсивности  $a_0^2$  (или потока энергии  $S_p^{(+)}$ ) захваченной плазменной волны, а также к зависимости от  $a_0^2$  сдвига фазы  $\varphi_R = \arg R_p$  плазменной волны при ее отражении от резонанса (здесь  $R_p$  — коэффициент отражения). Коэффициент  $\kappa$  учитывает изменение интенсивности возбуждения и коэффициента высвечивания  $\kappa_R = (1 - |R_p|)$  плазменных волн за пределы неоднородности:  $\kappa_R \sim \kappa$ . Коэффициент  $\gamma$  описывает ширину пространственного резонанса по фазовой расстройке  $\delta\varphi_p = (\varphi_p - 2\pi n)$  для собственных мод плазменных колебаний, захваченных в неоднородности:  $\delta\varphi_p \sim 1/\gamma$ . Безразмерная интенсивность  $a_0^2$  характеризует степень нелинейности решаемой задачи: случай  $a_0^2 < 1$  соответствует переходу к линейному пределу слабых полей.

В условиях слабого поглощения и высвечивания плазменных волн рассчитана и проанализирована зависимость указанных коэффициентов и нелинейного сдвига фазы волны от интенсивности  $a_0^2$  для различных значений единственного "входного" параметра задачи — "начальной" фазы отражения волны от резонанса  $\varphi_{R \text{ lin}}$  в линейном пределе слабых полей (этот параметр характеризует величину и форму исходной неоднородности  $\delta N_0$ , положение уровня верхнегибридного резонанса и др.). Показано, что влияние стрикционных возмущений плотности в достаточно сильных полях приводит к усилению захваченных колебаний в пике пространственного резонанса  $\varphi_p = 2\pi n$  и к уменьшению ширины этого резонанса  $\delta\varphi_p$ .

Рассчитан эффект смещения в область непрозрачности точки отражения падающей на резонанс плазменной волны большой интенсивности в результате стрикционного выдавливания плазмы. Показано, что этот процесс приводит к ограничению интенсивности захваченных волн, удерживаемых данной неоднородностью  $\delta N_0$ . Для условий ионосферных экспериментов произведена оценка нагрева неоднородности полем возбуждаемых плазменных колебаний с учетом рассмотренных нелинейных эффектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-17809).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васьков В. В., Рябова Н. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1988. Т. 41. № 3. С. 270.
2. Васьков В. В., Гуревич А. В. // Геомагнетизм и аэрономия, 1984. Т. 24. № 3. С. 420.
3. Васьков В. В., Еременко В. А., Рябова Н. А. — В кн.: Взаимодействие радиоволн с ионосферой. — М.: Наука, 1990. С. 39.
4. Гуревич А. В., Шварцбург А. В. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1973.
5. Гильденбург В. Б., Фрайман Г. М. // ЖЭТФ, 1975. Т. 104. Вып. 5(11). С. 1601.

Институт земного магнетизма,  
ионосферы и распространения  
радиоволн РАН,  
г. Троицк Московской обл., Россия

Поступила в редакцию  
1 июня 1998 г.

**THE INFLUENCE OF THE STRICTION DENSITY PERTURBATIONS ON THE EXCITATION OF PLASMA  
OSCILLATIONS INSIDE THERMAL PLASMA IRREGULARITIES**

*V. V. Vas'kov, N. A. Ryabova*

This paper is a continuation of [1]. By means of calculation of the corresponding coefficients and nonlinear phase shift (which have been defined in [1]) we describe the influence of the striction density perturbations on the excitation of short-wave plasma oscillations by a powerful electromagnetic wave. This process occurs inside low density magnetic field aligned irregularities when the electron density profile intersects the level of the upper-hybrid resonance. Small absorption of the plasma wave and its irradiation from the irregularity are considered. Under these conditions, we describe the change of the rate of the plasma wave generation and its reflection from the resonance region caused by the deformation of plasma density profile due to the striction effects. The effective generation band of plasma eigenmodes versus the total phase accumulation across the irregularity is calculated. The effect of plasma wave penetration into opaque region owing to striction plasma expulsion is considered. The thermal irregularities heating by the trapped plasma modes under the conditions of ionospheric experiments is estimated taking into account the nonlinear effects considered.

УДК 551.510.535

## СЕЗОННОЕ ПОВЕДЕНИЕ СРЕДНЕШИРОТНЫХ КОРОТКОВОЛНОВЫХ МЕЗОСФЕРНЫХ РАДИОЭХО\*

*А. Н. Караштин, Ю. В. Шлюгаев, И. В. Березин, Г. П. Комраков*

С помощью радара на базе стенда СУРА исследовано суточное и сезонное поведение мезосферных среднеширотных КВ радиоэхо. Найдено, что суточная зависимость интенсивности отраженных сигналов определяется, в основном, освещенностью мезосферы Солнцем, т. е. интенсивностью фотоионизации. Обнаружено практически постоянное, не зависящее от сезона, наличие тонкого турбулентного слоя на высотах 82–84 км, интенсивности радиоэхо от которого максимальны в летний и зимний периоды и гораздо слабее в переходные — весенний и осенний. Спорадические летние радиоэхо повышенной интенсивности, наблюдаемые на несколько больших (на 2–4 км) высотах, по-видимому, соответствуют явлению мезосферного летнего эхо (MSE), наблюдаемому в УКВ диапазоне.

### ВВЕДЕНИЕ

Первые эксперименты по радиозондированию мезосферы в КВ диапазоне, проведенные на стенде СУРА летом 1994 года, показали практически постоянное наличие сильных радиоотражений от области мезопаузы в интервале высот 83–90 км [1, 2]. Хотя по свойствам эти отражения и похожи на наблюдаемые в УКВ диапазоне Мезосферные Летние Эхо (MSE) в средних и Полярные Мезосферные Летние Эхо (PMSE) в высоких широтах [3, 4], обращает на себя внимание факт постоянного наличия КВ радиоэхо в отличие от его спорадического характера на УКВ. Это позволяет предположить, что вблизи мезопаузы постоянно существует повышенный уровень атмосферной турбулентности, который может быть обнаружен КВ радаром.

Теоретические исследования возбуждения плазменной турбулентности турбулентностью нейтральной компоненты атмосферы показали, что в нормальных условиях на высотах мезопаузы она по масштабу соответствует КВ радиодиапазону [5]. При этом явления MSE и PMSE в УКВ диапазоне, соответствующем вязкому интервалу атмосферной турбулентности на высотах мезопаузы, могут быть связаны со спорадическими уменьшениями внутреннего масштаба плазменной турбулентности, либо с плазменными неустойчивостями. Для их объяснения привлекаются различные механизмы, связанные преимущественно с образованием многозарядных аэрозоль в области минимума температуры в летний период [6, 7].

Эксперименты [1, 2] были выполнены в летний период, поэтому сделанный там вывод о постоянно повышенном уровне турбулентности в области мезопаузы, строго говоря, относится только к летним условиям (отметим, что MSE и PMSE наблюдаются только летом, как это видно уже из их названий). В связи с этим поведение мезосферной турбулентности в зависимости от сезона года представляет особый интерес. Изменение глобальной атмосферной циркуляции при смене сезонов приводит к существенному изменению мезосферных параметров, в частности, температуры и направления ветра, которые могут заметно влиять на характеристики турбулентности. Использование коротковолнового радиозондирования оказывается наиболее адекватным задаче исследования мезосферной турбулентности, обеспечивая, в отличие от УКВ зондирования, более широкие возможности наблюдения.

\*Материалы статьи были доложены на III Международной школе "Физика космической плазмы".

В настоящей работе представлены результаты исследований сезонного поведения КВ мезосферных радиоэхо, выполненных с использованием радара стенда СУРА в 1995–96 годах. В разделе 1 в виде высотно–временных зависимостей интенсивности радиоэхо представлены наблюдательные данные, полученные в различные сезоны 1996 года. Раздел 2 содержит результаты анализа распределений вероятности появления радиоэхо различной интенсивности в зависимости от высоты по сезонам года. В заключение проводится обсуждение полученных результатов и сформулированы основные выводы работы.

Кроме сезонного поведения исследовался также и суточный ход мезосферных радиоэхо. Результатом явился довольно очевидный факт, что на средних широтах суточные вариации интенсивности определяются, в основном, изменениями уровня ионизации атмосферы на мезосферных высотах вследствие изменения освещенности ее Солнцем в течение суток.

### 1. ВЫСОТНО–ВРЕМЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ИНТЕНСИВНОСТИ РАДИОЭХО

Наблюдения мезосферных радиоотражений проводились на стенде СУРА Научно–исследовательского радиофизического института (НИРФИ, Нижний Новгород) по методике, описанной в [1, 2]. В течение 1995–96 годов было проведено несколько циклов наблюдений в различные сезоны года. Рабочая частота радара выбиралась в диапазоне 8–9 МГц, исходя из помеховой обстановки.

Типичные примеры высотно–временных зависимостей интенсивности радиоэхо, наблюдавшихся в 1996 г. приведены на рис. 1 а–е. Высотное разрешение представленных данных составляет 3 км и определяется длительностью зондирующего импульса (20 мкс). Временное разрешение составляет около 30 с и определяется параметрами обработки (исходные данные имеют временное разрешение 200–400 мс).

На рис. 1 а, б представлены данные, полученные в зимний период, 30 января (рис. 1а) и 31 января (рис. 1б); время наблюдений 10:30–13:00 мск 30 января и 14:00–17:00 мск 31 января (для стенда СУРА московское зимнее время приблизительно соответствует местному). На обоих рисунках отчетливо виден довольно интенсивный слой на высоте около 82 км, близкой к высоте летней мезопаузы, составляющей в средних широтах, согласно лидарным измерениям [8], величину  $86 \pm 3$  км (по данным лидарных измерений [9], выполненных, однако, в южном полушарии, в зимний период высота мезопаузы составляет около 100 км). На рис. 1б видно также уменьшение интенсивности отражения вплоть до полного исчезновения при переходе к вечерним часам, когда уменьшается освещенность мезосферы Солнцем и соответственно падает концентрация свободных электронов.

На рис. 1в представлены данные, полученные в весенний период, 18 марта; время наблюдений — 09:40–13:30 мск. Обращает на себя внимание факт существенно меньшей интенсивности радиоэхо по сравнению с зимним периодом. Хотя отражения видны и не все время наблюдений, они, тем не менее, образуют отчетливый слой на высоте около 82 км.

На рис. 1г, д представлены данные, полученные в летний период, 12 июня (рис. 1г) и 25 июня (рис. 1д); время наблюдений 08:30–13:10 мск 12 июня и 00:00–21:20 мск 25 июня (московское летнее время примерно на час опережает местное для стенда СУРА). На обоих рисунках отчетливо виден практически постоянно присутствующий слой умеренной интенсивности на высоте около 82 км. Кроме этого видны спорадические слои повышенной интенсивности на несколько большей высоте, около 85 км. Данные, полученные 25 июня, представляют практически круглосуточные наблюдения и показывают значительное уменьшение интенсивности радиоэхо в ночное время, когда на мезосферных высотах отсутствуют свободные электроны. Отметим также, что спорадические слои повышенной интенсивности в ночное время никогда не наблюдались.

На рис. 1е представлены данные, полученные 20 августа, которые соответствуют осеннему периоду; время наблюдений — 05:30–14:00 мск. Хотя радиоэхо и имеют исключительно низкую интенсивность,

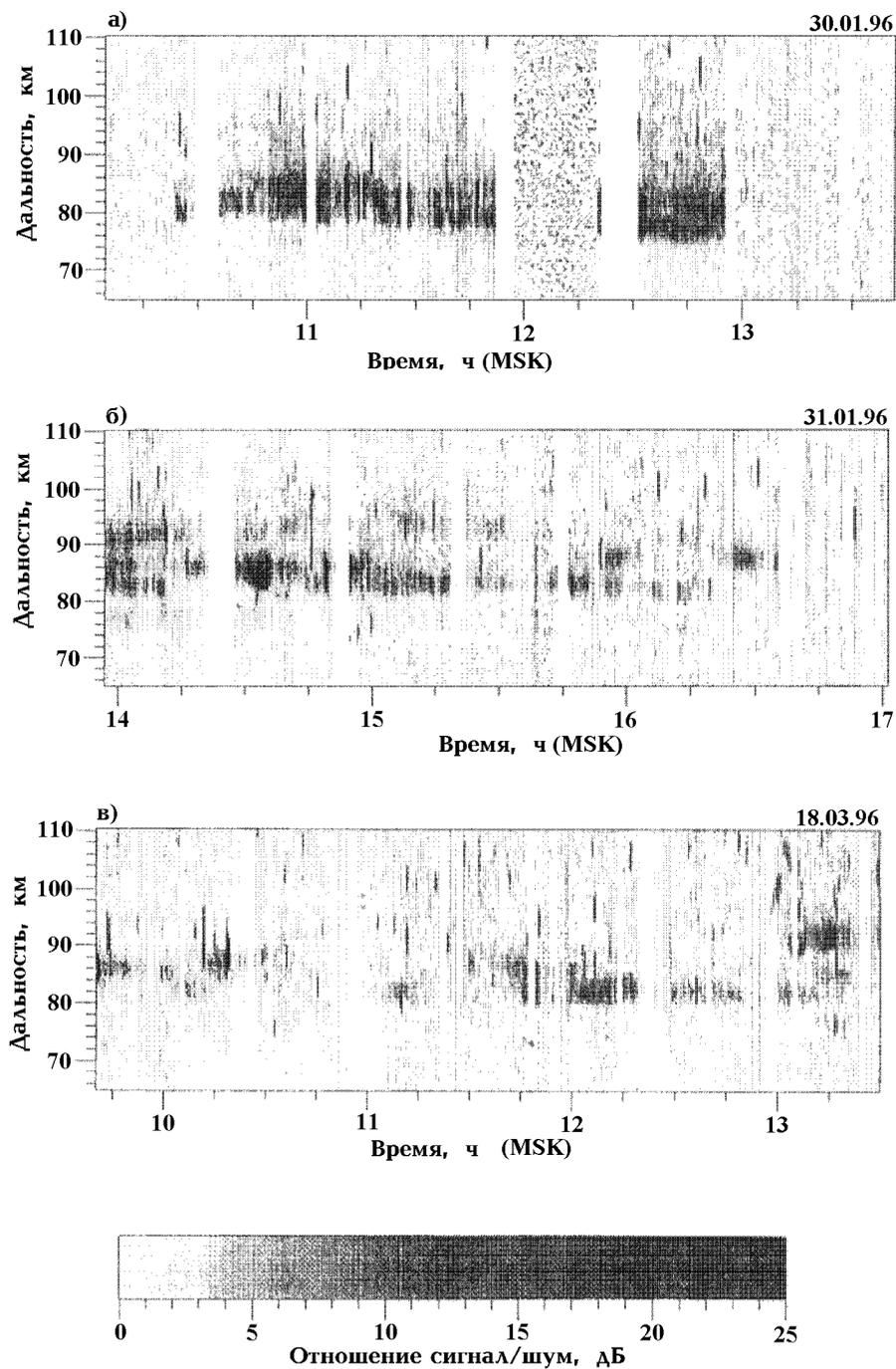


Рис. 1 а–в. Пространственно-временная зависимость интенсивности мезосферных радиоотражений в разные сезоны года по данным наблюдений 1996 г.: а) 30 января, б) 31 января, в) 18 марта.

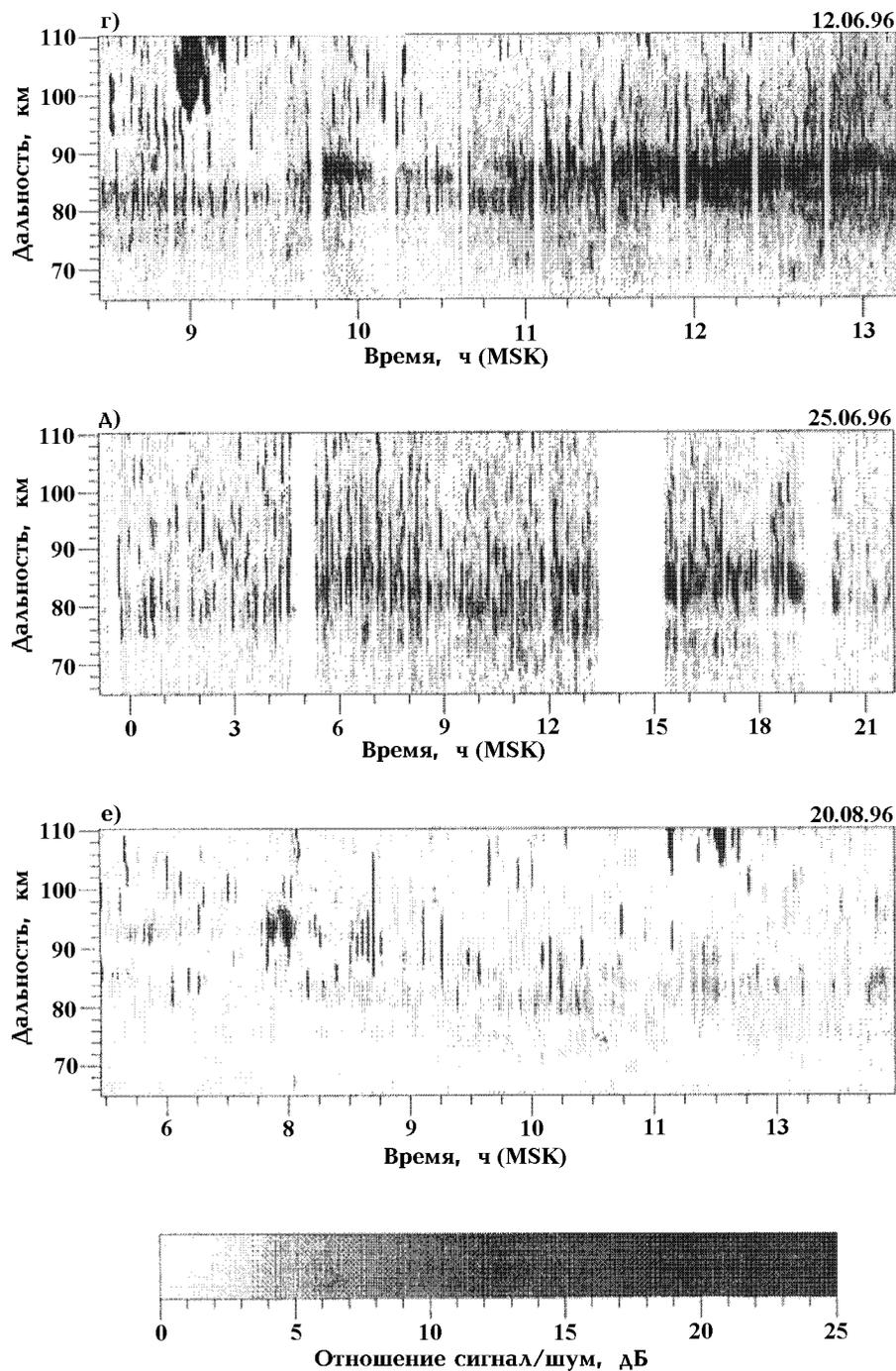


Рис. 1 г–е. Пространственно-временная зависимость интенсивности мезосферных радиоотражений в разные сезоны года по данным наблюдений 1996 г.: г) 12 июня, д) 25 июня, е) 20 августа.

они по-прежнему соответствуют высотам 82–84 км.

Кроме основного слоя на высоте около 82 км, который регистрируется практически постоянно, на ряде рисунков могут быть замечены более низкие слои существенно меньшей интенсивности, проявляющиеся лишь спорадически. В зимний, весенний и осенний периоды иногда также отмечались спорадические радиоэхо средней продолжительности (15–30 минут) на высотах, несколько превышающих 90 км, которые можно видеть на рис. 1б (31 января, около 14:00), рис. 1в (18 марта, около 13:00) и рис. 1е (20 августа, около 7:30). Еще раз отметим спорадические слои повышенной интенсивности на высотах 84–88 км продолжительностью 1,5–2 часа в летний период. Кратковременные радиоэхо, иногда очень высокой интенсивности, которые видны на всех рисунках на дальностях более 90 км, соответствуют рассеянию на метеорных следах.

Радиоотражения большой интенсивности на высотах 100–110 км около 09:00 12 июня (рис. 1г) и около 12:00 20 августа (рис. 1е) обусловлены отражениями от спорадических слоев  $E_s$  с достаточно высокой критической частотой.

## 2. ВЕРОЯТНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ РАДИОЭХО

Усредненные характеристики мезосферных радиоэхо в различные сезоны, соответствующие данным наблюдений, представленным на рис. 1 а–е, показаны соответственно на рис. 2 а–е. На этих рисунках приведены вероятности наблюдения радиоотражений с интенсивностью, большей заданной, в зависимости от высоты. В качестве заданных значений интенсивности использовалось превышение сигнала над шумом 5, 10, 15, 20 и 25 дБ.

Следует учитывать, что в КВ диапазоне фоновый уровень шума определяется преимущественно индустриальными помехами и помехами от работающих радиостанций и является сильно нестационарным. При проведении экспериментов рабочая частота зондирования выбиралась таким образом, чтобы уровень помех в необходимой для зондирования полосе частот (50 кГц, см. [1, 2]) был минимален. Тем не менее, их уровень всегда сильно варьировался и часть радиоэхо маскировалась достаточно сильными помехами. В качестве наглядного примера можно привести резкое и практически полное пропадание эхо 30 января (рис. 1а) в 11:30 с резким его восстановлением до прежнего уровня спустя примерно 4 минуты, что было связано с кратковременным появлением интенсивной помехи от работы неизвестной радиостанции, а также сильные помехи в интервале примерно 12:00–12:15 и после 13:00, полностью маскирующие радиоэхо. Аналогичные особенности видны и на других рисунках 1. Таким образом, рис. 2 а–е дают минимальную оценку вероятности наблюдения радиоотражений заданного уровня.

Отметим также, что из-за изменения высоты слоя, ответственного за образование радиоэхо, за время наблюдений на рис. 2 наблюдается уширение кривой, описывающей распределение вероятности наблюдения эхо по высоте, не соответствующее реальной толщине рассеивающего слоя. Из рис. 1 следует, что рассеивающий слой является довольно тонким и, как правило, не превышает разрешения по высоте, составлявшего 3 км. Изменение высоты рассеивающего слоя приводит также к тому, что вероятность наблюдения слоя может быть выше вероятности наблюдения радиоэхо на фиксированной высоте, приведенной на рис. 2.

Основным результатом, следующим из рис. 2, является то, что вероятность наблюдения радиоэхо с интенсивностью, превышающей 5 дБ, максимальна на высотах 81–83 км независимо от сезона (отметим здесь, что крайние значения этого интервала высот относятся к двум последовательным дням наблюдений — 30 и 31 января — и не могут быть связаны с сезонной зависимостью). Сами значения максимальных вероятностей весьма высоки — не менее 50% в зимний и летний периоды (более низкая вероятность, чуть выше 30%, для наблюдений 31 января (рис. 2б) обусловлена тем, что примерно половина сеанса относится к вечерним условиям пониженной концентрации свободных электронов

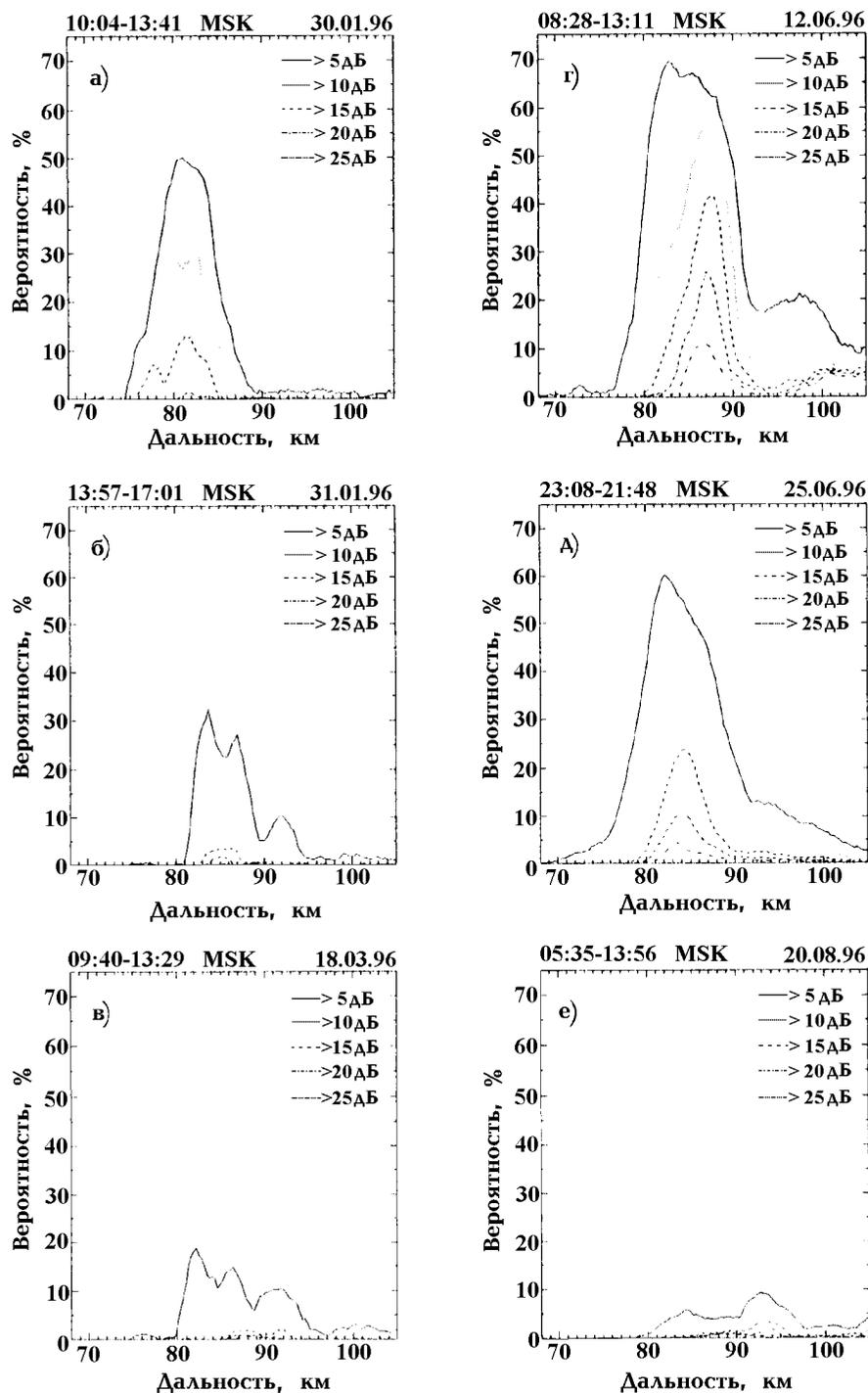


Рис. 2. Вероятность регистрации мезосферных радиоэхо с соотношением сигнал/шум, превышающим уровни 5, 10, 15, 20 и 25 дБ, в зависимости от дальности в разные сезоны года по данным наблюдений 1996 г., приведенным на рис. 1: а) 30 января, б) 31 января, в) 18 марта, г) 12 июня, д) 25 июня, е) 20 августа.

в мезосфере). С учетом сделанных выше замечаний относительно оценок вероятностей, приведенных на рис. 2, можно сделать вывод, что в зимний и летний периоды практически всегда имеются радиотражения умеренной интенсивности от тонкого слоя, расположенного на высотах около 82 км.

Основное различие между зимними и летними радиоэхо заключается в том, что в летний период наблюдаются спорадические отражения повышенной интенсивности. Если по зимним данным (рис. 2 а, б) вероятность радиоэхо с отношением сигнал/шум более 20 дБ практически равна нулю, то в летний период (рис. 2 в, г) она составляет 10–20%. Следует отметить, что максимум вероятности появления отражений повышенной интенсивности расположен на несколько (2–4) километров выше максимума вероятности наблюдения отражений умеренной интенсивности. Сравнение с данными радиозондирования в УКВ диапазоне [10] позволяет предположить, что летние КВ радиотражения высокой интенсивности связаны с наблюдаемым на УКВ явлением MSE.

В отличие от зимнего и летнего периодов, переходные (весенний и осенний) периоды характеризуются низкой, менее 20%, вероятностью наблюдения мезосферных радиоэхо, причем отражения с отношением сигнал/шум более 5 дБ практически отсутствуют. Тем не менее, вероятность наблюдения радиоэхо по-прежнему остается максимальной на высоте около 82 км.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты коротковолнового зондирования показывают, что вблизи мезопаузы на высотах 82–84 км практически постоянно, независимо от сезона наблюдений существует довольно тонкий, с толщиной, не превышающей высотного разрешения радара стенда СУРА (3 км), турбулентный рассеивающий слой. Если связывать летние спорадические радиоэхо повышенной интенсивности с явлениями, происходящими на высоте мезопаузы (высота летом около 86 км [8]), а именно с понижением температуры ниже точки образования многозарядных аэрозолей, (чем, согласно [6, 7], могут быть обусловлены PMSE и MSE), то данный турбулентный слой находится несколько ниже уровня мезопаузы, в среднем на 2–4 км. Увеличение высоты мезопаузы до 100 км в зимний период [9] никак не сказывается на положении турбулентного слоя. Следует также отметить, что его наличие, очевидно, не связано и с присутствием в мезосфере многозарядных аэрозолей, которые зимой образовываться не могут из-за довольно высокой мезосферной температуры в этот период.

Существующая теория генерации плазменной турбулентности (которая и детектируется радаром) за счет турбулентности нейтральной атмосферы [5] показывает, что высотная область возбуждения неоднородностей с масштабами, соответствующими длинам волн при КВ радиозондировании, согласуется с данными наблюдений. Однако, для объяснения малой толщины рассеивающего слоя следует предположить, что существует аналогичный тонкий слой интенсивной нейтральной турбулентности.

Причины образования тонкого турбулентного слоя на постоянной высоте предстоит еще выяснить, однако довольно очевидно, что они существенным образом связаны с температурным профилем атмосферы. По-видимому, вблизи минимума температуры возникают особые условия, либо облегчающие генерацию турбулентности, либо обеспечивающие ее более высокий уровень насыщения.

Сравнение результатов КВ и УКВ зондирования показывает, что природа постоянно наблюдаемых на КВ радиоэхо и спорадических отражений на УКВ должна быть различной, хотя их высотные области очень близки (в летний период, когда наблюдаются MSE).

В заключение сформулируем основные результаты данной работы:

1. КВ радиозондирование показывает практически постоянное наличие радиоэхо умеренной интенсивности от тонкого слоя, расположенного на высоте 82–84 км, независимо от сезона наблюдений.

2. В интенсивности радиоэхо от этого слоя четко просматривается полугодовая вариация: в зимний и летний периоды средняя амплитуда рассеянных сигналов значительно выше, чем в осенний и весенний.
3. Наблюдаемые в УКВ диапазоне спорадические мезосферные летние эхо (PMSE), по-видимому, соответствуют КВ спорадическим летним радиоэхо повышенной интенсивности, наблюдаемым на несколько больших (на 2–4 км) высотах.

Данная работа проводилась при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках грантов № 94–05–16862–а и № 96–02–16465–а.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Karashtin A. N., Shlyugaev Yu. V., Abramov V. I., Belov I. F., Berezin I. V., Vyckov V. V., Eryshev E. B., and Komrakov G. P. // *Annales Geophysicae*, 1997. V. 15. № 7. P. 935.
2. Караштин А. Н., Шлюгаев Ю. В., Абрамов В. И., Белов И. Ф., Березин И. В., Бычков В. В., Ерышев Е. Б., Комраков Г. П. Первые результаты коротковолновой радиолокации мезосферы. // *Геомагнетизм и аэронавигация*, 1998. Т. 38. № 4.
3. Cho J. Y. N. and Kelley M. C. // *Rev. Geophys.*, 1993. V. 31. № 3. P. 243.
4. Cho J. Y. N. and Röttger J. // *J. Geophys. Res.*, 1997. V. 102. № D2. P. 2001.
5. Gurevich A. V., Borisov N. D., and Zybin K. P. // *J. Geophys. Res.*, 1997. V. 102. № A1. P. 379.
6. Cho J. Y. N., Hall T. M., and Kelley M. C. // *J. Geophys. Res.*, 1992. V. 97. № 1. P. 875.
7. Trakhtengerts V. Yu. and Demekhov A. G. // *J. Atmos. Terr. Phys.*, 1995. V. 57. № 10. P. 1135.
8. Chilson P. B., Czechowsky P., Klostermeyer J., Ruster R., and Schmidt G. // *J. Geophys. Res.*, 1997. V. 102. № D20. P. 23819.
9. Von Zahn U., Höffner J., Eska V., and Alpers M. // *Geophys. Res. Lett.*, 1996. V. 23. № 22. P. 3231.
10. Kubo K., Sugiyama T., Nakamura T., and Fukao S. // *Geophys. Res. Lett.*, 1997. V. 24. № 10. P. 1211.

Научно–исследовательский  
радиофизический институт,  
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
16 апреля 1998 г.

#### SEASONAL BEHAVIOR OF MID-LATITUDE MESOSPHERIC HF ECHOES

*A. N. Karashtin, Yu. V. Shlyugaev, I. V. Berezin, G. P. Komrakov*

Seasonal and diurnal behavior of mid-latitude HF echoes was studied using SURA HF radar. Diurnal behavior of the intensity of reflected signals was found to be connected mainly with the sunlit mesosphere, i. e. the intensity of photoionization. A thin turbulent layer was detected almost permanently, independently of the season, at heights of 82–84 km. Echoes from this layer were most intensive during summer and winter while much weaker in spring and autumn. Sporadic summer echoes of higher intensity observed at some higher (by 2–4 km) altitudes seem to correspond to mesospheric summer echoes (MSE) observed at VHF.

## ТЕОРИЯ ОПТИЧЕСКОЙ КОГЕРЕНТНОЙ ТОМОГРАФИИ

*Л. С. Долин*

На основе теории рассеяния волн в случайно—неоднородных средах разработаны аналитические модели оптической когерентной томографии сильно мутных сред типа биологических тканей. Установлены соотношения подобия для сигналов когерентной и импульсной локации, получены общие выражения для случайных реализаций и статистических характеристик томограмм. Показано, что после соответствующей модификации аппарат теории переноса изображения в мутных средах может быть использован для анализа их информативных свойств. Предложены простые формулы для оценки глубины видимости внутренней структуры биотканей.

### ВВЕДЕНИЕ

Развитие методов оптической диагностики тканей и органов человеческого тела в терапевтическом окне прозрачности (0,6–1,3 мкм) вступает в стадию их практической реализации и создания медицинских приборов [1]. Наиболее впечатляющие успехи [2–5] достигнуты в оптической когерентной томографии (ОКТ) — формировании изображений внутренней структуры биотканей с помощью светолокатора, выполненного на основе непрерывного источника излучения с фемтосекундными временами когерентности и интерферометра Майкельсона, в предметное плечо которого помещается объект наблюдения. При этом раздельно наблюдаются отражения от слоев ткани с толщиной порядка половины длины когерентных цугов, из которых состоит непрерывный пучок подсветки. Световые сигналы системы ОКТ излучаются и принимаются торцом одномодового стекловолокна, который проецируется на исследуемый участок ткани с помощью оптической системы. Тем самым реализуется конфокальная схема наблюдения, и за счет этого достигается определенный выигрыш в угловой разрешающей способности.

Исследования голографических и интерферометрических методов послойной визуализации внутренней структуры рассеивающих объектов [6] имеют длительную историю (Caulfield H. S., 1968; Иванов А. П., Гурский И. М., Чайковский А. П., Кумейша А. А., Щербаков В. Н., 1976–1981; Кацев И. Л., 1985). Тем не менее, теоретические модели ОКТ разработаны еще не очень детально, хотя интересные публикации на эту тему появляются [7, 8]. В настоящей работе предпринята попытка ответить на 2 вопроса: 1) в какой мере и каким образом результаты теории инструментального видения в мутных средах [6, 9], относящиеся к системам наблюдения с прямым фотодетектированием сигнала, можно использовать для решения задач ОКТ; 2) в чем заключается специфика метода ОКТ и как ее учесть при построении моделей томографических изображений.

Чтобы сделать изложение материала более понятным (и попутно ввести необходимые термины и обозначения), в разделах 1.2 и 3 дается схематическое описание процесса формирования информативного и шумового видеосигналов в гетеродинном приемнике системы ОКТ. Более полно эти вопросы рассмотрены в работе [10], выполненной под руководством В. М. Геликонова.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 1.1. Модель среды

В качестве оптической модели объекта наблюдения рассматривается среда со случайно—неоднородным распределением комплексной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\vec{r}) = \langle \varepsilon \rangle [1 + \varepsilon_1(\vec{r}) + \varepsilon_2(\vec{r})]. \quad (1)$$

Ее среднее значение  $\langle \varepsilon \rangle$  считается постоянным, слагаемое  $\varepsilon_1$  описывает флуктуации  $\varepsilon$  с пространственным масштабом  $l_1 \gg \lambda$ , а  $\varepsilon_2$  — флуктуации с масштабом  $l_2 < \lambda$ . Распределения  $\varepsilon_{1,2}(\vec{r})$  образуют локально—однородные изотропные случайные поля с функциями пространственной корреляции

$$B_{\varepsilon_{1,2}}(\vec{r}, \rho) = \langle \varepsilon_{1,2}(\vec{r} + \vec{\rho}/2) \varepsilon_{1,2}^*(\vec{r} - \vec{\rho}/2) \rangle \quad (2)$$

и пространственными спектрами

$$\Phi_{1,2}(\vec{r}, \kappa) = (2\pi)^{-3} \iiint_{-\infty}^{\infty} B_{\varepsilon_{1,2}}(\vec{r}, \rho) e^{-i\vec{\kappa}\vec{\rho}} d^3\rho, \quad \kappa = |\vec{\kappa}|. \quad (3)$$

Флуктуации  $\varepsilon$  считаются малыми ( $B_{\varepsilon_{1,2}}(\vec{r}, 0) \ll 1$ ).

Предполагается также, что наряду с непрерывно распределенными неоднородностями в среде имеются отдельные локальные рассеиватели, расстояние между которыми превышает размеры элемента разрешения светолокатора. Эти неоднородности характеризуются их дифференциальным сечением рассеяния  $\Sigma_d$  или эффективной площадью рассеяния ЭПР =  $4\pi\Sigma_d$ .

### 1.2. Процесс формирования изображения

В системе ОКТ раздельное наблюдение отражений от элементов ткани, находящихся на различных глубинах ( $z$ ), осуществляется путем измерения функции взаимной корреляции отраженного сигнала и опорного, который является копией зондирующего (как при согласованном приеме сложных сигналов). Опора формируется путем ответвления света источника в референтное плечо стекловолноконного интерферометра Майкельсона. Рассеянная и опорная волны складываются на фотодетекторе приемника. Томографический сигнал получается в результате детектирования доплеровских биений, которые появляются в токе фотодетектора при изменении длины референтного плеча интерферометра. Изображение в плоскости  $z = \text{const}$  формируется за счет перемещения приемно—излучающей апертуры светолокатора вдоль поверхности ткани (рис. 1).

Будем рассматривать в качестве апертуры торец волоконнооптического одномодового волновода (наличие фокусирующей системы между апертурой и тканью учтем в дальнейшем). Излучаемое ( $u_0$ ) и принимаемое ( $u_s$ ) поля внутри волновода (между его торцом и делителем сигналов) зададим в виде

$$u_{0,s}(\vec{r}_\perp, z, t) = M(\vec{r}_\perp) v_{0,s}(t \mp z/c), \quad (4)$$

где  $\vec{r}_\perp$  — радиус—вектор точки в поперечном сечении волновода  $\Sigma_b$ ,  $z$  — координата вдоль его оси,  $c$  — фазовая скорость волны, функция  $M$  характеризует поперечную структуру моды и удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{\Sigma_b} M^2 d^2\vec{r}_\perp = 1, \quad (5)$$

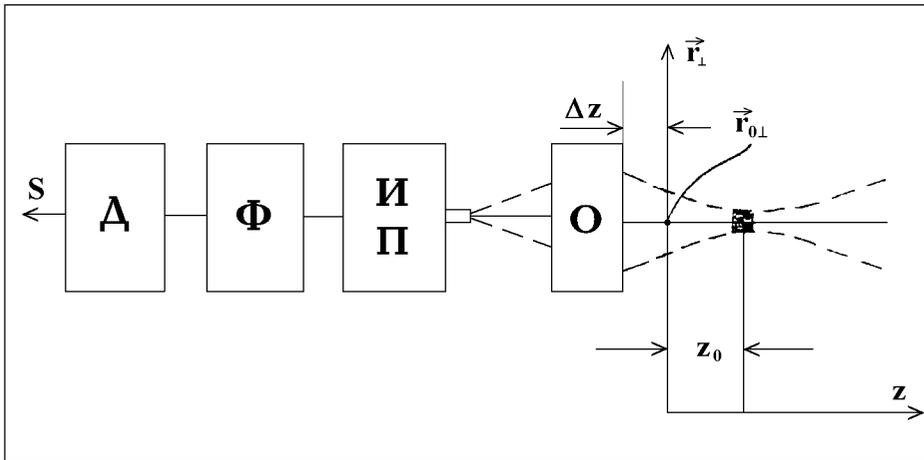


Рис. 1. Схема ОКТ: О — оптическая система формирования пучка подсветки, ИП — источник излучения и гетеродинный фотоприемник с устройствами задержки опорного сигнала и поперечного сканирования, Ф — полосовой фильтр с усилителем, Д — детектор видеосигнала,  $\vec{r}_{0\perp}$  и  $z_0$  — координаты лоцируемого элемента ткани.

$v_0$  — стационарный нормальный квазимонохроматический процесс с нулевым средним  $\overline{v_0} = 0$ , средней частотой  $\omega_0$  и автокорреляционной функцией

$$B_0(\tau) = \overline{v_0(t + \tau) v_0(t)} = P_0 b_0(\tau) \cos \omega_0 \tau, \tag{6}$$

$P_0$  — средняя мощность излучаемого сигнала,  $b_0(0) = 1$ , черта означает усреднение по ансамблю реализаций случайного процесса  $v_0$ . \* Этот процесс будем также характеризовать энергетическим спектром

$$S_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \tag{7}$$

Временной масштаб корреляции процесса  $\tau_k$  (время когерентности) и характерную ширину его энергетического спектра  $\Delta f_0$  определим формулами

$$\tau_k = \int_{-\infty}^{\infty} b_0^2(\tau) d\tau, \quad \Delta f_0 = 1/\tau_k. \tag{8a, б}$$

Полагая, что делитель интерферометра симметричен (ответвляет в соседнее плечо половину мощности падающего на него светового пучка), представим поля принимаемого ( $u_s$ ) и референтного ( $u_r$ ) сигналов на фотодетекторе приемника в виде

$$u_s = \frac{1}{\sqrt{2}} M(\vec{r}_\perp) v_s(t), \quad u_r = \frac{1}{\sqrt{n}} M(\vec{r}_\perp) v_0(t - t_0), \tag{9}$$

$$n = P_0/P_r, \quad P_{0,r} = \int_{\Sigma_B} \overline{u_{0,r}^2} d^2 \vec{r}_\perp. \tag{10}$$

\*Заметим, что, согласно (4)–(6), величину  $u_0^2$  можно рассматривать как мгновенное значение плотности потока энергии.

Здесь  $n$  — отношение средних мощностей излучаемого ( $P_0$ ) и референтного ( $P_r$ ) сигналов,  $t_0$  — время задержки референтного сигнала относительно зондирующего, общую для сигналов  $v_0$  и  $v_s$  задержку, которая возникает при транспортировке света к фотодетектору, мы не указываем.

Поле ( $u_r + u_s$ ) создает на выходе детектора фототок

$$i = \eta \int_{\Sigma_b} \overline{(u_r + u_s)^2} d^2 \vec{r}_\perp + i_{др} \cong \frac{\eta \overline{v_0^2}}{n} + \eta \sqrt{\frac{2 \overline{v_s(t) v_0(t - t_0)}}{n}} + i_{др}, \quad (11)$$

где  $\eta$  — чувствительность фотодетектора [А/Вт],  $i_{др}$  — дробовой ток, двойная черта означает сглаживание короткопериодных пульсаций мощности сигнала, обусловленное инерционностью фотодетектора; слагаемое  $\sim v_s^2$  в правой части (11) отброшено в соответствии с условием  $v_s \ll v_0$ .

Первое слагаемое в (11) содержит постоянную составляющую

$$i_r = \eta P_0 / n \quad (12)$$

и флуктуационную

$$i_{фл} = \eta \left( \overline{v_0^2} - P_0 \right) / n. \quad (13)$$

Второе слагаемое тоже имеет шумовую компоненту, однако при  $v_s \ll v_0$  она мала по сравнению с  $i_{фл}$ . Поэтому окончательное выражение для  $i$  можно приближенно записать в виде суммы постоянного ( $i_r$ ), полезного ( $i_n$ ) и шумового ( $i_{ш}$ ) токов

$$i = i_r + i_n + i_{ш}, \quad (14)$$

полагая

$$i_n = \eta \sqrt{2/n \overline{v_s(t) v_0(t - t_0)}}, \quad i_{ш} = i_{др} + i_{фл}. \quad (15a, б)$$

При фиксированном времени задержки референтного сигнала токи  $i_r$  и  $i_n$  неразличимы. Однако при изменении  $t_0$  ток  $i_n$  тоже становится функцией времени и может быть отделен от среднего тока референтного сигнала ( $i_r$ ) с помощью полосового фильтра, который служит также средством подавления шумов. Поясним это на простом примере.

Пусть объектом наблюдения является точечный отражатель, который располагается в однородной среде на расстоянии  $z$  от светолокатора. Тогда  $v_s(t) \sim v_0(t - 2z/c)$  и в соответствии с (15a), (6)  $i_n \sim B_0(t_0 - 2z/c)$ .

Если в формуле (6) положить

$$b_0(\tau) = \exp \left[ -\frac{\pi}{2} \left( \frac{\tau}{\tau_k} \right)^2 \right], \quad \omega_0 = 2\pi f_0, \quad (16)$$

и считать, что время задержки референтного сигнала изменяется по закону  $t_0 = \beta t$ , то

$$i_n \sim P_0 \exp \left[ -\left( \frac{\Delta t}{t_1} \right)^2 \right] \cos(2\pi f_1 \cdot \Delta t), \quad (17a - r)$$

$$\Delta t = t - 2z/(\beta c), \quad t_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\tau_k}{\beta}, \quad f_1 = \beta f_0.$$

Как видно из (17), полезный сигнал  $i_n(t)$  имеет вид импульса с несущей частотой  $f_1$  и длительностью  $2t_1$ . Время прихода его максимума определяется расстоянием до рассеивателя:  $t_m = 2z/\beta c$ . Спектр этого импульса представляет собой гауссовскую линию с центральной частотой  $f_1$  и шириной

$$\Delta f_1 = \beta \Delta f_0 = \beta / \tau_k, \quad (18)$$

так что относительная ширина спектра импульса совпадает с относительной шириной энергетического спектра источника ( $\Delta f_1/f_1 = \Delta f_0/f_0$ ).

В дальнейшем полагаем, что сигнал  $i$  проходит через фильтр с полосой пропускания  $f_1 - \Delta f_1/2 < f < f_1 + \Delta f_1/2$  и преобразуется в сигнал  $\Delta i = i_n + \Delta i_{ш}$  ( $\Delta i_{ш}$  — шумовой ток на выходе фильтра), который поступает на линейный или квадратичный детектор.\* Изображение формируется путем визуализации видеосигнала  $S_1$  или  $S_2$ , снимаемого с линейного или квадратичного детектора, как функции переменной  $z_0 = ct_0/2$  и координат точки пересечения оси светового пучка с границей среды ( $\vec{r}_{0\perp}$ ). Для упрощения последующих формул мы будем оперировать безразмерными сигналами вида

$$S_1(\vec{r}_{0\perp}, z_0) = \overline{|\Delta i|} / i_r \sqrt{n} = S_{п1} + S_{ш1}, \quad S_{п1} = \overline{|i_n|} / i_r \sqrt{n}, \quad (19a, б)$$

$$S_2(\vec{r}_{0\perp}, z_0) = \overline{(\Delta i)^2} / i_r^2 n = S_{п2} + S_{ш2}, \quad S_{п2} = i_n^2 / i_r^2 n, \quad (20a, б)$$

где двойная черта означает сглаживание осцилляций с частотой  $2f_1$ ,  $S_{п1,2}$  — полезный сигнал на выходе линейного или квадратичного детектора,  $S_{ш1,2}$  — шумовой сигнал. Сигнал  $S_{1,2}(z_0)$  при фиксированном  $\vec{r}_{0\perp}$  будем называть строкой изображения, а максимальное значение  $z_0$  — длиной строки ( $z_c$ ). Как следует из соотношений  $z_0 = ct_0/2$ ,  $t_0 = \beta t$ , параметр  $\beta$  выражается через длину строки и время ее формирования ( $t_c$ ) в виде

$$\beta = 2z_c / ct_c. \quad (21)$$

## 2. СООТНОШЕНИЯ ПОДОБИЯ ДЛЯ СИГНАЛОВ ИМПУЛЬСНОЙ И КОГЕРЕНТНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ЛОКАЦИИ

Сигнал  $v_s$ , возникающий в результате рассеяния света на “замороженных” неоднородностях диэлектрической проницаемости среды, связан с зондирующим сигналом  $v_0$  линейным соотношением

$$v_s(\vec{r}_{0\perp}, t) = \int_0^{\infty} v_0(t-t') H(\vec{r}_{0\perp}, t') dt' \quad (22)$$

(ранее зависимость  $v_s$  от  $\vec{r}_{0\perp}$  в явном виде не указывалась для упрощения записи формул).

Согласно (6), (15a), (22) полезный ток ( $i_n$ ) с фотодетектора системы ОКТ представляется через функцию  $H$  (импульсный отклик среды) в виде

$$i_n(\vec{r}_{0\perp}, t_0) = i_r \sqrt{2n} \int_0^{\infty} b_0(t_0 - t) \cos \omega_0(t_0 - t) H(\vec{r}_{0\perp}, t) dt, \quad (23)$$

а полезный сигнал на выходе квадратичного детектора определяется соотношениями

$$S_{п2}(\vec{r}_{0\perp}, t_0) = \overline{i_n^2} / i_r^2 n = (b_1^2 + b_2^2), \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \end{array} \right\} = \int_0^{\infty} b_0(t_0 - t) H(\vec{r}_{0\perp}, t) \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{array} \right\} dt, \quad (25)$$

которые следуют из (20б), (23).

\*В реальных томографических системах применяется более сложное детектирование. Вместе с тем, сопоставление результатов линейного и квадратичного детектирования уже дает достаточно ясное представление о зависимости характеристик томограммы от параметров детектора видеосигнала.

Зададим теперь зондирующий сигнал в виде регулярного квазимонохроматического импульса

$$v_0(t) = A_0 b_0(t) \cos \omega_0 t, \quad (26)$$

подобного автокорреляционной функции (6) непрерывного сигнала.

Как видно из (26), (22), в этом случае рассеянный сигнал  $v_s(\vec{r}_{0\perp}, t)$  в волноводном тракте светолокатора повторяет зависимость  $i_n(\vec{r}_{0\perp}, t)$ , а его мощность

$$P_s(\vec{r}_{0\perp}, t) = \overline{v_s^2} = \frac{A_0^2}{2} [(b_1^2 + b_2^2)]_{t_0=t} \quad (27)$$

воспроизводит зависимость  $S_{п2}(t)$  (двойная черта в (27) означает операцию усреднения осцилляций мощности с частотой  $2\omega_0$ ).

В результате оказывается, что если известен энергетический отклик среды  $P_s(\vec{r}_{0\perp}, t)$  на импульсную посылку с мощностью

$$P_0(t) = \overline{v_0^2} = P_0(0) b_0^2(t), \quad (28)$$

то сигнал  $S_{п2}$  на выходе системы ОКТ с квадратичным детектором видеосигнала можно определить из соотношения

$$S_{п2}(\vec{r}_{0\perp}, t_0) = p_s(\vec{r}_{0\perp}, t_0), \quad (29)$$

где

$$p_s(\vec{r}_{0\perp}, t) = P_s(\vec{r}_{0\perp}, t) / P_0(0) \quad — \quad (30)$$

коэффициент передачи сигнала (величина, обратная коэффициенту ослабления мощности сигнала, приходящего из среды через время  $t$  после посылки зондирующего импульса (28)).

Полезный сигнал, снимаемый с линейного детектора, выражается через  $p_s$  в виде

$$S_{п1} = \frac{1}{\pi} \sqrt{8S_{п2}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{8p_s}. \quad (31)$$

Таким образом, в системе ОКТ после корреляционной обработки непрерывного рассеянного сигнала формируется копия сигнала, который образуется на выходе идеального энергетического приемника (с полосой пропускания  $\Delta f > 1/\tau_k$ ) при зондировании среды световым импульсом с мощностью (28). Импульсный отклик среды воспроизводится коррелометром как функция времени задержки ( $t_0$ ) референтного сигнала. Поэтому для определения дальности до рассеивателя ( $z$ ) можно использовать соотношение  $z = ct_0/2$ . Длительность импульса (28)

$$\tau_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_0(t) dt / P_0(0) \quad (32)$$

равна времени когерентности непрерывного сигнала ( $\tau_n = \tau_k$ ). Отсюда следует, что при непрерывной локации размер элемента разрешения по дальности ( $\Delta z_3$ ) связан с временем когерентности поля ( $\tau_k$ ) соотношением  $\Delta z_3 = c\tau_k/2$ .

### 3. ВНУТРЕННИЕ ШУМЫ В СИСТЕМАХ КОГЕРЕНТНОЙ И ИМПУЛЬСНОЙ ЛОКАЦИИ

Изображение, формируемое системой когерентной локации, имеет случайную составляющую, которая создается внутренними шумами и флуктуациями полезного сигнала  $S_{п1,2}$ . Последние обусловлены случайными искажениями поля световой волны в процессе ее распространения и хаотичностью структуры лоцируемых неоднородностей. Оставляя в стороне вопрос о флуктуациях полезного

сигнала, оценим сначала уровень внутренних шумов по отношению к статистически среднему полезному сигналу  $\langle S_{\Pi 1,2} \rangle$ , т. е. сигналу, усредненному по ансамблю реализаций полей  $\varepsilon_{1,2}$ .

Согласно (15), шумовой ток с фотодетектора системы ОКТ равен сумме дробового тока ( $i_{др}$ ) и тока  $i_{фл}$ , воспроизводящего флуктуации мощности референтного светового пучка (избыточный шум). На выходе фильтра с полосой пропускания  $f_1 - \Delta f_1/2 < f < f_1 + \Delta f_1/2$  (см. (18)) дисперсия дробового тока равна

$$\overline{i_{др}^2} = 2ei_r \Delta f_1 = 2ei_r \beta / \tau_k. \quad (33)$$

Если ток  $i_{фл}$  считать нормальным случайным процессом, то, пренебрегая инерционностью фотодетектора, его автокорреляционную функцию можно представить в виде

$$B_{фл}(\tau) = \overline{i_{фл}(t+\tau)i_{фл}(t)} = i_r^2 b_0^2(\tau) \quad (34)$$

через функцию автокорреляции зондирующего (референтного) сигнала  $v_0$ . Как следует из (34), спектр мощности сигнала  $i_{фл}$  имеет характерную ширину  $\sim \Delta f_0$ , а его значение на нулевой частоте определяется выражением

$$F_{фл} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_{фл}(\tau) d\tau = 2i_r^2 \tau_k. \quad (35)$$

Поэтому при  $f_1 \ll \Delta f_0$  дисперсия тока  $i_{фл}$  на выходе полосового фильтра будет равна

$$\overline{i_{фл}^2} = 2i_r^2 \tau_k \Delta f_1 = 2\beta i_r^2. \quad (36)$$

Отношение средних мощностей полезного сигнала и шума на выходе фильтра

$$(\prime) = \frac{\overline{\langle i_{\Pi}^2 \rangle}}{\overline{i_{др}^2} + \overline{i_{фл}^2}} \quad (37)$$

с учетом (33), (36) и соотношения  $\overline{i_{\Pi}^2} = ni_r^2 p_s$  (см. (20б), (29)) представляется в виде

$$(\prime) = \frac{\chi \langle p_s \rangle}{\beta(1 + \delta)}, \quad (38)$$

$$\chi = \eta P_0 \tau_k / (2e), \quad \delta = \overline{i_{фл}^2} / \overline{i_{др}^2} = \frac{2}{n} \chi \quad (e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ К}). \quad (39а, б)$$

Если сигнал ( $i_{\Pi} + \Delta i_{ш}$ ) поступает на квадратичный детектор (см. (20а,б)), то отношение сигнал/шум по напряжению на его выходе

$$(\prime)_2 = \frac{\langle S_{\Pi 2} \rangle}{\sqrt{(S_{ш2} - \overline{S_{ш2}})^2}} \quad (40)$$

связано с (С/Ш) соотношением [11]

$$(\prime)_2 = \frac{(\prime)}{\sqrt{1 + 2(\prime)}} = \begin{cases} (\prime), & (\prime) \ll 1, \\ \sqrt{(\prime)}/2, & (\prime) \gg 1. \end{cases} \quad (41)$$

Отношение сигнал/шум на выходе линейного детектора оценивается по формуле

$$(\prime)_1 = \frac{\langle S_{\Pi 1} \rangle}{\sqrt{(S_{ш1} - \overline{S_{ш1}})^2}} = \begin{cases} (\prime), & (\prime) \ll 1, \\ \sqrt{2(\prime)}, & (\prime) \gg 1. \end{cases} \quad (42)$$

Приведем теперь аналогичные соотношения для лидара с идеальным энергетическим приемником (без опорного пучка). Приемно—излучающие апертуры лидара и системы ОКТ считаем одинаковыми, мощность зондирующего импульса задаем в виде (28) с тем, чтобы статистически средний ток полезного лидарного сигнала

$$\langle i_{\text{п}}(t) \rangle = \eta \langle P_S \rangle = \eta P_0(0) \langle p_S(\vec{r}_{0\perp}, t) \rangle \quad (43)$$

при  $t = t_0$  воспроизводит зависимость  $S_{\text{п2}}(\vec{r}_{0\perp}, z_0) \sim i_{\text{п}}^2$ . Тогда, учитывая, что дисперсия дробового тока в полосе лидарного сигнала  $\Delta f_{\text{и}} = 1/\tau_{\text{и}}$  равна

$$\overline{i_{\text{др}}^2} = 2e \langle i_{\text{п}} \rangle / \tau_{\text{и}}, \quad (44)$$

отношение сигнал/шум в лидарном изображении среды можно представить в виде

$$(\text{./})_{\text{и}} = \frac{\langle i_{\text{п}} \rangle}{\sqrt{\overline{i_{\text{др}}^2}}} = \sqrt{\frac{\eta W_0 \langle p_S \rangle}{2e}}, \quad (45)$$

где  $W_0 = P_0(0)\tau_{\text{и}}$  — энергия зондирующего импульса. Сравнение формул (38)–(42) и (45) позволяет сделать следующие выводы:

1. Зависимость параметров (С/Ш) и (С/Ш)<sub>и</sub> от коэффициента ослабления полезного сигнала существенно различна: первый из них изменяется пропорционально  $\langle p_S \rangle$ , а второй — пропорционально  $\sqrt{\langle p_S \rangle}$ . Это объясняется тем, что при когерентной локации шумы порождаются референтным световым пучком, а при импульсной — отраженным сигналом. В первом случае они являются аддитивными, а во втором — мультипликативными.

2. В процессе детектирования сигнала ( $i_{\text{п}} + \Delta i_{\text{ш}}$ ) аддитивный шум трансформируется в мультипликативную помеху, вследствие чего при  $(\text{./}) > 2$  (см. (41)) параметр (С/Ш)<sub>1,2</sub> изменяется пропорционально  $\sqrt{\langle p_S \rangle}$  подобно величине (С/Ш)<sub>и</sub>.

3. В случае, когда избыточные шумы в системе ОКТ малы по сравнению с дробовыми ( $\delta \ll 1$ ) и  $(\text{./}) > 2$ , параметры (С/Ш)<sub>1,2</sub> и (С/Ш)<sub>и</sub> одинаково зависят от мощности источника излучения. Однако, по мере роста тока  $i_{\text{т}}$  вклад избыточных шумов растет и при  $i_{\text{т}} \gg e/\tau_{\text{к}}$  становится определяющим. При этом отношение сигнал/шум в системе ОКТ перестает зависеть от мощности пучка подсветки.\*

4. В случае  $\delta \ll 1$ ,  $(\text{./}) > 2$  отношение сигнал/шум в системах когерентной локации (с квадратичным детектором видеосигнала) и импульсной локации (с идеальным энергетическим приемником без опорного пучка) будет одинаковым ((С/Ш)<sub>2</sub> = (./)<sub>и</sub>) при условии  $2\beta W_0 = P_0\tau_{\text{к}}$ . С учетом формулы (21) условие эквивалентности когерентной и импульсной локации можно записать в виде

$$W_0 = P_0 c \tau_{\text{к}} t_c / (4z_c) \quad (46)$$

или

$$\overline{P_0} = P_0 / (2N_{\text{э}}), \quad N_{\text{э}} = z_c / \Delta z_{\text{э}}, \quad (47)$$

где  $\overline{P_0} = W_0/t_c$  — средняя мощность импульсного источника излучения,  $z_c$  и  $t_c$  — длина и время формирования строки изображения,  $N_{\text{э}}$  — число элементов разложения в строке,  $\Delta z_{\text{э}} = c\tau_{\text{к}}/2$  — размер элемента. Если считать, что  $P_0$  — это половина мощности непрерывного источника света, то, согласно (47), при когерентной локации на формирование строки изображения тратится в  $4N_{\text{э}}$  раз больше энергии, чем при импульсной.

\*В принципе, избыточные шумы можно скомпенсировать, создав специальный канал контроля мощности референтного пучка. В действующих приборах они подавляются более простым способом — путем ослабления референтного пучка.

#### 4. МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ ОТРАЖЁННОГО СИГНАЛА

Будем предполагать, что крупномасштабные неоднородности среды рассеивают свет только вперед, а отраженный сигнал возникает в результате рассеяния света на мелкомасштабных флуктуациях диэлектрической проницаемости (сигнал объемного рассеяния) и локальных неоднородностях (объектах) с заданным сечением рассеяния.

В скалярной постановке задача о поле световой волны  $u(\vec{r}, t)$  в среде с неоднородным распределением  $\varepsilon$  вида (1) сводится к решению уравнения

$$\left[ \Delta + k^2(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right] V = 0 \quad (48)$$

для комплексной амплитуды гармонической составляющей поля

$$V(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt \quad (49)$$

при  $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c_0$  и соответствующих граничных условиях ( $c_0$  — скорость света в вакууме).

Обозначим через  $f_0$  и  $f_s$  спектры случайных реализаций зондирующего и рассеянного сигналов

$$f_{0,s}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_{0,s}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (50)$$

и представим  $V$  в виде

$$V = f_0(\omega) V_0(\vec{r}, \omega) + V_s(\vec{r}, \omega), \quad (51)$$

где  $V_0$  — решение уравнения (48) при  $\varepsilon_2 \equiv 0$  и граничном условии на апертуре светолокатора

$$V_0 = M(\vec{r}_\perp), \quad (52)$$

$V_s$  — поле, рассеянное на мелкомасштабных неоднородностях. В линейном по  $\varepsilon_2$  приближении  $V_s$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ \Delta + k^2(1 + \varepsilon_1) \right] V_s = -4\pi\rho_s, \quad (53)$$

которое отличается от уравнения для  $V_0$  только наличием в его правой части источников с плотностью

$$\rho_s = \frac{k^2}{4\pi} f_0(\omega) \varepsilon_2(\vec{r}) V_0(\vec{r}, \omega). \quad (54)$$

Амплитуда моды, которая возбуждается этими источниками в оптическом волноводе, находится с помощью теоремы взаимности:

$$f_s(\omega) = \frac{2\pi}{ik} \int_V \rho_s V_0 d^3\vec{r} = K(\omega) f_0(\omega), \quad (55)$$

$$K(\omega) = -\frac{ik}{2} \int_V \varepsilon_2(\vec{r}) V_0^2(\vec{r}, \omega) d^3\vec{r}. \quad (56)$$

(формула написана без учета отражения зондирующего сигнала от торца стекловолокна).

Из (15а), (55), (50) с учетом соотношения

$$\langle f_0(\omega) f_0^*(\omega') \rangle = S_0(\omega) \delta(\omega' - \omega) \quad (57)$$

находим

$$i_n(t_0) = \eta \sqrt{2/n} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) K(\omega) e^{-i\omega t_0} d\omega. \quad (58)$$

Выражение для сигнала, приходящего из точки  $\vec{r}_n$  от одиночной неоднородности, получается из (58), (56) путем формальной замены

$$\varepsilon_2 = \frac{4\pi}{k^2} A_p \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_n), \quad (59)$$

где  $A_p$  — амплитуда рассеяния, связанная с дифференциальным сечением рассеяния и эффективной площадью рассеяния (ЭПР) соотношением [12]

$$A_p A_p^* = \Sigma_d = \text{ЭПР}/4\pi. \quad (60)$$

Приведенные формулы показывают, что для нахождения полезного сигнала  $i_n$  необходимо располагать моделью поля монохроматического волнового пучка  $V_0$  в среде с крупномасштабными неоднородностями. Запишем это поле в виде

$$V_0 = A(\vec{r}) \exp(-ik'z - ik'\zeta(\vec{r})), \quad (61)$$

где  $A$  и  $k'\zeta$  — случайные значения амплитуды и фазы волны в точке  $\vec{r}$ ,  $k' = \omega/c$ ,  $c = c_0/\text{Re} \sqrt{\langle \varepsilon \rangle}$  — средняя скорость света в среде, и будем для простоты считать, что  $A$  и  $\zeta$  не зависят от частоты в полосе зондирующего сигнала. При этом мы пренебрегаем искажениями формы сигнала, связанными с дисперсией и зависимостью волнового размера апертуры от частоты.

Тогда из (58), (56), (61) и (7) с учетом квазимонохроматичности источника подсветки получаются формулы

$$i_n = \text{Re } I_n, \quad (62)$$

$$I_n = -i \frac{\omega_0}{c_0} \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \sqrt{\frac{n}{2}} i_r \int_V \varepsilon_2(\vec{r}) A^2(\vec{r}) b_0(\tau) e^{i\omega_0 \tau} d^3\vec{r}, \quad (63)$$

$$\tau = t_0 - \frac{2}{c} [z + \zeta(\vec{r})], \quad (64)$$

которые устанавливают непосредственную связь  $i_n$  с автокорреляционной функцией зондирующего сигнала. Изображение образуется в результате визуализации сигналов  $S_{n1}$  или  $S_{n2}$ , которые получаются после детектирования тока  $i_n$ . Эти сигналы выражаются через  $I_n$  в виде

$$S_{n1} = \frac{2}{\pi \sqrt{n} i_r} \sqrt{I_n \cdot I_n^*}, \quad S_{n2} = \frac{1}{2n i_r^2} I_n \cdot I_n^*. \quad (65а, б)$$

### 5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЁТА ИЗОБРАЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Видеосигналы, образующие изображение локальной неоднородности ("точечного" объекта) с заданной эффективной площадью рассеяния (ЭПР), находятся из (59), (63), (65), (60):

$$\begin{aligned} S_{\pi_1} &= 4(2\pi)^{-1/2} k_0^{-1} (\text{ЭПР})^{1/2} A^2(\vec{r}_n) |b_0(\tau_n)|, \\ S_{\pi_2} &= \pi k_0^{-2} (\text{ЭПР}) A^4(\vec{r}_n) b_0^2(\tau_n), \\ \tau_n &= t_0 - \frac{2}{c} [z_n + \zeta(\vec{r}_n)], \end{aligned} \quad (66a - b)$$

$k_0 = \omega_0/c$ ,  $c = c_0/\text{Re} \sqrt{\langle \varepsilon \rangle}$ ,  $\vec{r}_n(\vec{r}_{n\perp}, z_n)$  — точка расположения неоднородности (формулы написаны с учетом условия  $|\text{Im} \langle \varepsilon \rangle| \ll \text{Re} \langle \varepsilon \rangle$ ).

Из (66) видно, что полезный сигнал как функция времени задержки референтного сигнала ( $t_0$ ) повторяет огибающую автокорреляционной функции зондирующего сигнала (или огибающую в квадрате) и достигает максимума при значении  $t_0 = t_{0n} = 2(z_n + \zeta)/c$ . Амплитуда полезного сигнала пропорциональна интенсивности (или квадрату интенсивности) поля подсветки в точке расположения неоднородности и является случайной функцией  $\vec{r}_n$ . Величина  $t_{0n}$  тоже содержит случайную компоненту ( $2\zeta/c$ ). Поэтому погрешность определения дальности ( $z_n$ ) по измеренному значению  $t_{0n}$  зависит не только от времени когерентности ( $\tau_k$ ) излучаемого сигнала, но и от флуктуаций фазы волны  $V_0$  в точке  $\vec{r}_n$ .

Для расчета статистически средних видеосигналов воспользуемся следующими предположениями:

- А. Флуктуации  $A$  и  $\zeta$  статистически независимы.
- В. Рассеянная компонента поля пучка подсветки

$$V_s = V_0 - \langle V_0 \rangle = A_s e^{-i\varphi_s} \quad (67)$$

флуктуирует по нормальному закону, вследствие чего ее амплитуда и фаза подчиняются распределениям

$$\begin{aligned} p(A_s) &= \left( 2A_s / \langle A_s^2 \rangle \right) \exp \left( -A_s^2 / \langle A_s^2 \rangle \right), \\ p(\varphi_s) &= 1/2\pi \quad (0 \leq \varphi_s \leq 2\pi). \end{aligned} \quad (68a, б)$$

- С. Плотность вероятности  $\zeta$  может аппроксимироваться функцией

$$p(\zeta) = \left( \sqrt{2\pi\sigma_\zeta} \right)^{-1} \exp \left[ -(\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 / 2\sigma_\zeta^2 \right]. \quad (69)$$

Д. Огибающая автокорреляционной функции зондирующего сигнала имеет гауссовскую форму (см. (16)).

Е. Поле крупномасштабных флуктуаций диэлектрической проницаемости среды ( $\text{varepsilon}_{\text{epsilon}_1}$ ) статистически однородно в плоскости  $z = \text{const}$ .

При вычислении статистически средних значений  $S_{\pi_{1,2}}$  в качестве одного из аргументов  $A$  и  $\zeta$  будем рассматривать переменную  $\vec{r}_{0\perp}$  (ранее зависимость этих функций от  $\vec{r}_{0\perp}$  в явном виде не указывалась). Учтем далее, что при условии (Е) статистические моменты  $A(\vec{r}_{0\perp}, \vec{r}_\perp, z)$  и  $\zeta(\vec{r}_{0\perp}, \vec{r}_\perp, z)$  зависят только от переменных  $\vec{\rho} = \vec{r}_{0\perp} - \vec{r}_\perp$  и  $z$ . Для среднего квадрата амплитуды поля  $V_0$  и интенсивности его нерассеянной компоненты введем специальные обозначения

$$E(\vec{\rho}, z) = \frac{1}{2} \langle A^2(\vec{r}_{0\perp}, \vec{r}_\perp, z) \rangle, \quad (70)$$

$$E_{\text{ns}}(\vec{\rho}, z) = \frac{1}{2} \langle |V_0(\vec{r}_{0\perp}, \vec{r}_\perp, z)|^2 \rangle \quad (71)$$

и заметим, что при условии (В) выполняется соотношение

$$\langle A^4 \rangle / 4 = 2E^2 - E_{\text{ns}}^2. \quad (72)$$

С учетом условий А, С, Д и формулы (72) статистически средние изображения  $J_{1,2} = \langle S_{\text{п},2} \rangle$  представляются в виде

$$J_1(\vec{r}_{0\perp}, z) = \frac{8}{\sqrt{2\pi k_0}} (\text{ЭПР})^{1/2} E(\vec{\rho}_H, z_H) b_1(z_0 - z_H, z_H), \quad (73)$$

$$J_2(\vec{r}_{0\perp}, z_0) = \frac{4\pi(\text{ЭПР})}{k_0^2} [2E^2(\vec{\rho}_H, z_H) - E_{\text{ns}}^2(\vec{\rho}_H, z_H)] b_2(z_0 - z_H, z_H), \quad (74)$$

$$b_{1,2}(\Delta z, z_H) = \left[ 1 + 2\pi \left( \frac{\sigma_\zeta}{\Delta z_{1,2}} \right)^2 \right]^{-1/2} \exp \left[ -\frac{\pi(\Delta z - \langle \zeta \rangle)^2}{(\Delta z_{1,2})^2 + 2\pi\sigma_\zeta^2} \right], \quad (75)$$

$$z_0 = ct_0/2, \quad \vec{\rho}_H = \vec{r}_{0\perp} - \vec{r}_{H\perp}, \quad \Delta z_1 = \frac{c\tau_K}{\sqrt{2}}, \quad \Delta z_2 = \frac{c\tau_K}{2}. \quad (76a - r)$$

Величина  $z_H$  указана в качестве одного из аргументов функций  $b_{1,2}$  потому, что параметры  $\langle \zeta \rangle$  и  $\sigma_\zeta^2$  зависят от  $z_H$ ;  $E(\vec{\rho}, z)$  — это распределение облученности (статистически средней плотности потока энергии) в среде от непрерывного источника излучения с единичной мощностью и такими же, как у реального источника подсветки, характеристиками направленности или, другими словами, облученность в пучке подсветки, деленная на мощность источника;  $E_{\text{ns}}$  — облученность нерассеянным светом ( $E$  и  $E_{\text{ns}}$  имеют размерность  $[1/\text{м}^2]$ ).

Для расчета трехмерного изображения неоднородности помимо распределений  $E$  и  $E_{\text{ns}}$  необходимо знать параметры  $\langle \zeta \rangle$  и  $\sigma_\zeta^2$ , которые выражаются через временные характеристики  $\delta$ -импульсного светового пучка.

Действительно, используя (61), можно убедиться в том, что если источник с мощностью  $P = W_0 \delta(t)$  формирует в среде поле облученности  $E_\delta(\vec{r}, t)$ , то плотность вероятности  $\zeta$  выражается через  $E_\delta$  в виде

$$p(\zeta) = E_\delta \left( \vec{r}, \frac{z}{c} + \frac{\zeta}{c} \right) \left( c \int_{-\infty}^{\infty} E_\delta dt \right)^{-1}, \quad (76)$$

а параметры  $\langle \zeta \rangle$  и  $\sigma_\zeta^2$  связаны с временными характеристиками светового импульса, приходящего в точку  $\vec{r}$ , соотношениями

$$\langle \zeta \rangle = c\bar{t} - z, \quad \bar{t} = \int_{-\infty}^{\infty} t E_\delta dt / \int_{-\infty}^{\infty} E_\delta dt, \quad (78a, б)$$

$$\sigma_\zeta^2 = c^2 \overline{(\Delta t)^2}, \quad \overline{(\Delta t)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t})^2 E_\delta dt / \int_{-\infty}^{\infty} E_\delta dt. \quad (79a, б)$$

Заметим, что облученность в непрерывном пучке подсветки тоже выражается через импульсную облученность:

$$E = \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_\delta dt. \quad (80)$$

Как видно из (73), в случае линейного детектирования сигнала двумерное изображение точечной неоднородности повторяет распределение облученности ( $E$ ) в сечении пучка подсветки плоскостью

$z = z_n$ . При квадратичном детектировании (см. (74)) оно приблизительно воспроизводит распределение облученности, возведенное в квадрат. Отсутствие точного подобия между функциями  $J_2$  и  $E^2$  объясняется тем, что при использовании квадратичного детектора пространственные флуктуации интенсивности пучка подсветки вносят вклад в статистически среднее изображение (проявление эффекта усиления обратного рассеяния в среде с крупномасштабными неоднородностями [13]). Этот вклад зависит от статистики флуктуаций поля и оказывается минимальным при условии В, которое может нарушаться при наличии в среде неоднородностей, подобных короткофокусным линзам.

При квадратичном детектировании изображение получается более резким (менее размытым). Вместе с тем, оно сильнее флуктуирует, что подтверждается оценками коэффициентов вариации сигналов

$$\delta S_{n1,2} = \sqrt{\langle (S_{n1,2} - \langle S_{n1,2} \rangle)^2 \rangle} / \langle S_{n1,2} \rangle. \quad (81)$$

Эти коэффициенты связаны со статистическими моментами амплитуды поля подсветки соотношениями

$$\delta S_{n1} = \frac{\sqrt{\langle A^4 \rangle - \langle A^2 \rangle^2}}{\langle A^2 \rangle}, \quad \delta S_{n2} = \frac{\sqrt{\langle A^8 \rangle - \langle A^4 \rangle^2}}{\langle A^4 \rangle}, \quad (82a, б)$$

из которых, в частности, следует, что при  $E_{ns} \ll E$

$$\delta S_{n1} = 1, \quad \delta S_{n2} = \sqrt{5}. \quad (83a, б)$$

## 6. ИЗОБРАЖЕНИЕ СРЕДЫ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ РАССЕИВАТЕЛЯМИ. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗОБРАЖЕНИЯ

В результате обратного рассеяния пучка подсветки на мелкомасштабных неоднородностях среды каждая из них порождает корреляционный отклик  $i_n \sim b_0(\tau_n) \cos \omega_0 \tau_n$  со случайной амплитудой и фазой. Если число неоднородностей в элементе разрешения велико, то сумма этих откликов образует шумоподобный сигнал  $i_n$  со статистически средним значением  $\langle i_n \rangle = 0$ . После детектирования  $i_n$  в сигнале появляется регулярная составляющая. Она рассчитывается путем подстановки выражения (63) в (65) и усреднения  $S_{n1,2}$  по ансамблям реализаций полей  $\varepsilon_{1,2}$ . Статистически средние изображения среды описываются формулами

$$J_2(\vec{r}_{\perp 0}, z_0) = \langle S_{n2} \rangle = 2\pi^3 k_0^2 \int_V \Phi_2(\vec{r}, 2k_0) \langle A^4(\vec{r}_{\perp 0}, \vec{r}) b_0^2(\tau) \rangle d^3 \vec{r}, \quad (84)$$

$$J_1 = \langle S_{n1} \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} J_2, \quad (85)$$

где  $z_0 = ct_0/2$ ,  $\Phi_2$  и  $\tau$  находятся из (3), (64). При выводе (84), (85) крупномасштабные ( $\varepsilon_1$ ) и мелкомасштабные ( $\varepsilon_2$ ) флуктуации  $\varepsilon$  считались статистически независимыми и использовалось условие малости радиуса корреляции ( $l_2$ ) мелкомасштабных флуктуаций по сравнению с масштабом пространственной неоднородности  $A^2(\vec{r})$  и размером элемента разрешения по дальности ( $ct_k/2$ ). Соотношение (85) написано в предположении, что квадратурные составляющие тока  $i_n$  ( $\text{Re } I_n, \text{Im } I_n$ ) распределены по нормальному закону.

Согласно (84), (85) изображения  $J_{1,2}$  несут информацию о спектральной плотности флуктуаций  $\varepsilon$  с пространственной частотой  $2k_0$ .

Функция объемного рассеяния ( $\beta$ ) случайно-неоднородной среды (дифференциальное сечение рассеяния единицы ее объема) выражается через суммарный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$\Phi(\vec{r}, \kappa) = \Phi_1(\vec{r}, \kappa) + \Phi_2(\vec{r}, \kappa) \quad (86)$$

в виде [14]

$$\beta(\vec{r}, \gamma) = \frac{\pi}{2} k_0^4 \Phi\left(\vec{r}, 2k_0 \sin \frac{\gamma}{2}\right) \quad (87)$$

( $\gamma$  — угол рассеяния). Поэтому с учетом условия  $\Phi_1(\vec{r}, 2k_0) \equiv 0$ , в (84) можно полагать

$$\Phi_2(\vec{r}, 2k_0) = \frac{2}{\pi k_0^4} \beta(\vec{r}, \pi) = \frac{1}{2\pi^2 k_0^4} \sigma_0(\vec{r}), \quad (88)$$

где

$$\sigma_0(\vec{r}) = 4\pi\beta(\vec{r}, \pi) \quad — \quad (89)$$

коэффициент обратного рассеяния (эффективная площадь обратного рассеяния единичного объема среды). Если далее воспользоваться выражением для  $\langle A^4 b_0^2 \rangle$  из раздела 5, то  $J_2$  можно представить в форме

$$J_2(\vec{r}_0) = \int_V \sigma_0(\vec{r}) Q(\vec{r}_0 - \vec{r}) d^3\vec{r}, \quad (90)$$

$$Q(\vec{\rho}) = 4\pi k_0^{-2} \left[ 2E^2(\vec{\rho}_\perp, z_0) - E_{\text{нс}}^2(\vec{\rho}_\perp, z_0) \right] b_2(\rho_z, z_0), \quad (91)$$

где  $\vec{r} = \vec{r}_\perp + z \cdot \vec{z}_0$ ,  $\vec{r}_0 = \vec{r}_{0\perp} + z_0 \cdot \vec{z}_0$ ,  $\vec{\rho} = \vec{\rho}_\perp + \rho_z \cdot \vec{z}_0$ ,  $z_0 = \frac{ct_0}{2}$ .

Формула (90) является трехмерным аналогом уравнения переноса изображения [6, 9], а функция  $Q(\vec{\rho})$  представляет собой трехмерную функцию размытия точки (ФРТ). Статистически среднее изображение точечной неоднородности (определяемое формулой (74)) получается из (90) путем формальной замены

$$\sigma_0(\vec{r}) = (\text{ЭПР}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_\text{н}) \quad (92)$$

и выражается через  $Q$  в виде

$$J_2(\vec{r}_0) = (\text{ЭПР}) \cdot Q(\vec{r}_0 - \vec{r}_\text{н}). \quad (93)$$

Таким образом, статистически средние изображения локальной неоднородности и распределенных рассеивателей описываются универсальными формулами (90), (91). Однако их случайные реализации заметно различаются по уровню флуктуаций. Сигналы  $S_{\text{п1}}$  и  $S_{\text{п2}}$ , приходящие от мелкомасштабных неоднородностей, распределены, соответственно, как амплитуда и интенсивность нормального шума. Они характеризуются коэффициентами вариации

$$\delta S_{\text{п1}} \cong 0,523, \quad \delta S_{\text{п2}} = 1, \quad (94)$$

которые примерно в 2 раза меньше коэффициентов (83).

## 7. ФУНКЦИЯ РАЗМЫТИЯ ТОЧКИ (ФРТ)

Как видно из (90), (91), для исследования регулярной составляющей изображения ( $J_2$ ) необходимо располагать моделью ФРТ, которая может быть построена на основе данных о распределении облученности в непрерывном пучке подсветки ( $E$ ) и параметрах  $\bar{t}$ ,  $(\Delta t)^2$ , характеризующих групповое запаздывание и размытие  $\delta$ -импульсного сигнала при его прохождении через рассеивающую среду.

При расчете ФРТ следует учесть наличие фокусирующей системы между излучающим торцом оптического волновода и границей среды. Для этого достаточно в формуле (52) заменить  $M$  на функцию  $M_0(\vec{r}_\perp)$ , которая описывает распределение поля  $V_0$  на выходе фокусирующей системы и удовлетворяет условию нормировки

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |M_0|^2 d^2\vec{r}_\perp = 1. \quad (95)$$

Напомним, что  $V_0$  — это поле волнового пучка в фиктивной среде без мелкомасштабных неоднородностей. Эту среду мы будем характеризовать функцией объемного рассеяния  $\beta_1(z, \gamma) \sim \Phi_1$  (см. (86), (87)), показателем малоуглового рассеяния

$$\sigma_1(z) = 2\pi \int_0^\pi \beta_1(z, \gamma) \sin \gamma d\gamma = \frac{k_0^2}{2} \int_0^\infty B_{\varepsilon_1}(z, \rho) d\rho, \quad (96)$$

индикатрисой малоуглового рассеяния

$$x_1(z, \gamma) = \beta_1 / \sigma_1, \quad (97)$$

показателем ослабления  $\alpha(z)$  и эффективным показателем поглощения

$$\kappa_1(z) = \alpha(z) - \sigma_1(z). \quad (98)$$

Полагаем, что  $\alpha$  совпадает с показателем ослабления реальной среды (благодаря этому учитываются потери энергии пучка подсветки из-за рассеяния света на мелкомасштабных неоднородностях).

Для разделения измеренной функции объемного рассеяния среды на остронаправленную ( $\beta_1$ ) и слабоанизотропную части целесообразно пользоваться соотношением

$$\beta_1 = \begin{cases} \beta, & \gamma < \pi/4, \\ 0, & \gamma > \pi/4, \end{cases} \quad (99)$$

или описывать  $\beta_1$  функцией, которая аппроксимирует  $\beta$  в области  $0 < \gamma < \pi/4$  и экспоненциально быстро спадает при  $\gamma > \pi/4$ . При этом эффективный показатель поглощения среды ( $\kappa_1$ ) и показатель малоуглового рассеяния ( $\sigma_1$ ) будут связаны с показателем истинного поглощения  $\kappa(z)$  и полным показателем рассеяния  $\sigma(z)$  соотношениями [9]

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa + \varphi_{45}\sigma, & \sigma_1 &= (1 - \varphi_{45})\sigma, \\ \varphi_{45} &= \int_{\pi/4}^{\pi} \beta \sin \gamma d\gamma / \int_0^{\pi} \beta \sin \gamma d\gamma \end{aligned} \quad (100a - b)$$

( $\varphi_{45}$  — доля света, рассеиваемого элементарным объемом среды на углы  $\gamma > 45^\circ$ ). Для индикатрисы рассеяния Хеньи—Гринштейна, которую обычно используют в задачах оптики тканей, с очень высокой точностью выполняется соотношение

$$\varphi_{45} = 1 - \langle \cos \gamma \rangle \quad (101)$$

( $\langle \cos \gamma \rangle$  — средний косинус индикатрисы). Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять параметр  $\kappa_1$  с транспортным показателем ослабления:

$$\kappa_1 = \alpha_T = \sigma_T + \kappa, \quad \sigma_T = (1 - \langle \cos \gamma \rangle)\sigma. \quad (102)$$

Основываясь на решении уравнения переноса излучения (УПИ) в малоугловом приближении, распределение  $E$  в стратифицированной мутной среде можно представить в виде [15]

$$E(\vec{\rho}_\perp, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} C(\vec{h}, z) e^{i\vec{h}\vec{\rho}_\perp} d^2\vec{h}, \quad (103)$$

$$C(\vec{h}, z) = C_{\text{ns}}(\vec{h}, z) \exp \left[ \int_0^z \sigma_1(z-z') \overline{x}_1(z-z', hz') dz' \right], \quad (104)$$

$$C_{\text{ns}}(\vec{h}, z) = \frac{e^{-\tau_\alpha}}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} M_0 \left( \vec{r}_\perp + \frac{\vec{h}z}{2k_0} \right) M_0^* \left( \vec{r}_\perp - \frac{\vec{h}z}{2k_0} \right) e^{-i\vec{h}\vec{r}_\perp} d^2\vec{r}_\perp, \quad (105a, б)$$

$$\tau_\alpha = \int_0^z \alpha(z) dz,$$

$$\begin{aligned} \overline{x}_1(z, p) &= \int_0^\infty x_1(z, \gamma) J_0(p\gamma) \gamma d\gamma / \int_0^\infty x_1(z, \gamma) \gamma d\gamma = \\ &= \frac{k_0^2}{2\sigma_1} \int_0^\infty B_{\varepsilon_1} \left( z, \sqrt{\rho^2 + (p/k_0)^2} \right) d\rho. \end{aligned} \quad (106)$$

Распределение облученности  $E_{\text{ns}}$ , создаваемое нерассеянной компонентой светового пучка, находится подстановкой в правую часть (103) выражения (105) вместо (104).

В частности, для сфокусированного гауссовского пучка, полагая

$$M_0 \sim \exp \left( -\frac{r_\perp^2}{2a_0^2} + \frac{ik_0 r_\perp^2}{2z_\Phi} \right) \quad (107)$$

и считая, что апертура фокусирующей системы отодвинута от границы среды на расстояние  $\Delta z$ , получим

$$E_{\text{ns}}(\vec{\rho}_\perp, z) = \frac{1}{\pi a^2} \exp \left( -\tau_\alpha - \frac{\rho_\perp^2}{a^2} \right), \quad (108)$$

$$a^2 = a_0^2 \left( 1 - \frac{z + \Delta z}{z_\Phi} \right)^2 + \left( \frac{z + \Delta z}{k_0 a_0} \right)^2. \quad (109)$$

Через  $a_0$  мы обозначили эффективный радиус пучка на апертуре фокусирующей системы,  $z_\Phi$  — расстояние от апертуры до точки фокусировки,  $a$  — эффективный радиус пучка на глубине  $z$ .

Полная облученность ( $E$ ) при подходящей аппроксимации  $x_1(\gamma)$  представляется в виде однократного интеграла, что обеспечивает возможность построения достаточно простых численных алгоритмов расчета ФРТ и  $J_2$ . Для ориентировочных оценок (которыми мы здесь и ограничимся) можно использовать предельно простое (хотя и грубое) выражение для  $E$  в виде суммы  $E_{\text{ns}}$  и гауссовского распределения облученности, параметры которого подобраны таким образом, чтобы интегральные характеристики пучка (полная мощность и дисперсия распределения облученности в его поперечном сечении)

описывались формулами [6, 16] малоуглового диффузионного приближения теории переноса излучения\*:

$$E = E_{\text{ns}} + E_S, \quad E_S = \frac{P_S}{\pi a_S^2} \exp\left(-\frac{\rho_{\perp}^2}{a_S^2}\right), \quad P_S = e^{-\tau_T} - e^{-\tau_{\sigma}},$$

$$a_S^2 = a^2 + \frac{1}{3} \langle \gamma^2 \rangle \tau_{\sigma} z^2 / (1 - e^{-\tau_{\sigma}}),$$
(110а – ж)

$$\langle \gamma^2 \rangle = \frac{\int_0^{\pi/4} \gamma^2 x_1(\gamma) \sin \gamma d\gamma}{\int_0^{\pi/4} x_1(\gamma) \sin \gamma d\gamma},$$

$$\tau_T = \int_0^z \alpha_T(z') dz', \quad \tau_{\sigma} = \sigma_1 z.$$

Здесь  $E_S$  — облученность плоскости  $z = \text{const}$  рассеянным светом,  $P_S$  — мощность рассеянной компоненты светового пучка,  $a_S^2$  — дисперсия распределения облученности в световом пятне, которое формируется рассеянным светом,  $\langle \gamma^2 \rangle$  — дисперсия остронаправленной части индикатрисы рассеяния.

Для оценки параметров  $\langle \zeta \rangle$  и  $\sigma_{\zeta}^2$ , входящих в (75), (91), воспользуемся формулами, которые следуют из автомодельного решения УПИ в малоугловом диффузионном приближении [17, 18]:

$$\langle \zeta \rangle_{\rho_{\perp}=0} = \frac{\langle \gamma^2 \rangle}{20} \tau_{\sigma} z,$$
(111а, б)

$$[\sigma_{\zeta}^2]_{\rho_{\perp}=0} = \frac{\langle \gamma^2 \rangle^2}{560} \tau_{\sigma}^2 z^2.$$

Формулы (110), (111) в отличие от (103)–(106) написаны для случая  $\sigma_1 = \text{const}$ , хотя они достаточно просто обобщаются на произвольно стратифицированную среду.

## 8. ЧАСТОТНО–КОНТРАСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА (ЧКХ) СИСТЕМЫ ОКТ

Соотношение (90) позволяет рассматривать изображение  $J_2(\vec{r})$  как пространственный сигнал, который образуется в результате прохождения сигнала  $\sigma_0(\vec{r})$  через линейный фильтр с импульсным откликом  $Q(\vec{\rho})$  и частотной характеристикой

$$M(\vec{h}, z_0) e^{-i\psi} = \frac{\iiint_{-\infty}^{\infty} Q(\vec{\rho}, z_0) e^{-i\vec{h}\vec{\rho}} d^3\vec{\rho}}{\iiint_{-\infty}^{\infty} Q d^3\vec{\rho}},$$
(112)

которую называют оптической передаточной функцией, а ее модуль  $M$  — частотно–контрастной характеристикой. Если пренебречь зависимостью параметров  $\langle \zeta \rangle$  и  $\sigma_{\zeta}^2$  от  $\rho_{\perp}$  и представить  $\vec{h}$  в виде

\* Аналогичный прием использовался в [17] для уточнения автомодельных решений уравнения переноса.

$\vec{h} = \vec{h}_\perp + h_z \cdot \vec{z}_0$ , то при условии аксиальной симметрии пучка подсветки из (91), (112) получим

$$M(\vec{h}, z_0) = M_\perp(\vec{h}_\perp, z_0) M_z(h_z, z_0),$$

$$M_\perp(\vec{h}, z_0) = f(h_\perp, z_0)/f(0, z_0), \quad h_\perp = |\vec{h}_\perp|,$$

$$f(h_\perp, z_0) = 2\pi \int_0^\infty [2E^2(\rho_\perp, z_0) - E_{\text{ns}}^2(\rho_\perp, z_0)] J_0(h_\perp \rho_\perp) \rho_\perp d\rho_\perp, \quad (113a - д)$$

$$M_z(h_z, z_0) e^{-i\psi} = \int_{-\infty}^\infty b_2(\rho_z, z_0) e^{-ih_z \rho_z} d\rho_z / \int_{-\infty}^\infty b_2 d\rho_z.$$

Согласно (90), (113), при наблюдении слоя среды с коэффициентом обратного рассеяния

$$\sigma_0(\vec{r}_\perp, z) = \bar{\sigma}_0 (1 + m_0 \cos \vec{h}_\perp \vec{r}_\perp) \quad (114)$$

изображение этого слоя

$$J_2(\vec{r}_{0\perp}, z_0) = \bar{J}_2 [1 + m \cos \vec{h}_\perp \vec{r}_{0\perp}] \quad (115)$$

воспроизводит вариации  $\sigma_0$  с контрастом

$$m = m_0 M_\perp, \quad (116)$$

если толщина слоя превышает размер элемента разрешения по дальности. Поэтому  $M_\perp$  можно рассматривать как коэффициент передачи контраста синусоидальной составляющей распределения  $\sigma_0(\vec{r}_\perp)$ .

Средняя "яркость" изображения  $\bar{J}_2$ , как и ЧКХ, выражается через функцию  $f$ :

$$\bar{J}_2 = \bar{\sigma}_0 \int_V Q d^3\vec{r} = 4\pi \bar{\sigma}_0 c \tau_k k_0^{-2} f(0, z_0). \quad (117)$$

Используя (108)–(110) и (113г), эту функцию можно записать в виде

$$f(h_\perp, z_0) = \frac{e^{-2\tau_\tau}}{\pi a^2} \left[ \frac{1}{2} e^{-2\tau_\sigma - (h_\perp a)^2/8} + \frac{4e^{-\tau_\sigma}(1 - e^{-\tau_\sigma})}{1 + \varphi} e^{-\frac{\varphi}{4(1+\varphi)}(h_\perp a)^2} + \frac{(1 - e^{-\tau_\sigma})^2}{\varphi} e^{-\frac{\varphi}{8}(h_\perp a)^2} \right], \quad (118a - д)$$

$$\varphi = a_s^2/a^2 = 1 + \frac{1}{C} \cdot \tau_\sigma^3 (1 - e^{-\tau_\sigma})^{-1},$$

$$C = 3(\sigma_1 a)^2 / \langle \gamma^2 \rangle, \quad \tau_\sigma = \sigma_1 z_0, \quad \tau_\tau = \int_0^{z_0} \alpha_\tau dz.$$

Результаты расчета  $M_\perp$  по формулам (113б), (118а) представлены на рис. 2 в виде кривых, изображающих зависимость ЧКХ от оптической глубины  $\tau_\sigma$ , на которой находится наблюдаемый слой среды. Каждая из кривых соответствует определенному значению параметра  $C$  и заданной величине  $l_\perp/2a$ , где

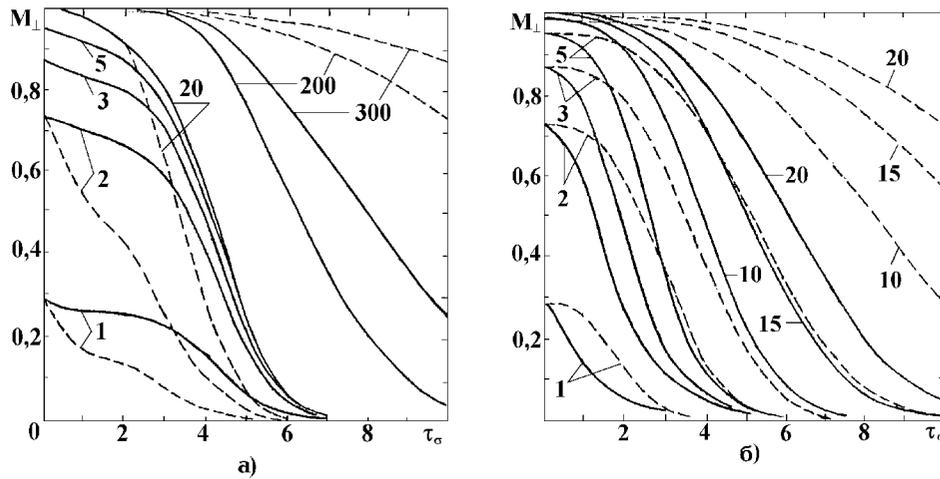


Рис. 2. Частотно-контрастные характеристики  $M_{\perp}$  в зависимости от  $\tau_{\sigma} = \sigma_1 z_0$  при различных значениях параметра  $C = 3(\sigma_1 a)^2 / \langle \gamma^2 \rangle$ : а)  $C = 0,01$  — сплошные линии,  $C = 0,1$  — пунктир; б)  $C = 1,0$  — сплошные линии,  $C = 10$  — пунктир; цифрами на рисунке указаны значения  $l_{\perp}/2a$ ;  $l_{\perp} = 2\pi/h_{\perp}$  — масштаб неоднородности коэффициента обратного рассеяния,  $2a$  — диаметр фокального пятна.

$l_{\perp} = 2\pi/h_{\perp}$  — масштаб неоднородности  $\sigma_0$ ,  $2a$  — диаметр светового пятна, формируемого нерассеянным светом в плоскости  $z = z_0$ . Зависимостью  $a$  от  $z_0$  мы пренебрегаем, полагая  $z_0 \ll \Delta z$ ,  $\Delta z \cong z_{\phi}$ ,  $a \cong (z_{\phi}/k_0 a_0)$  (см. (109)).

Кривые рис. 3 иллюстрируют зависимость  $\lg M_{\perp}$  от абсолютных значений  $z_0$  ( в миллиметрах) и  $l_{\perp}$  ( в микронах) при значениях  $\langle \gamma^2 \rangle$  и  $\sigma_1$ , характерных для кожного покрова [19].

На основе данных рис. 2 можно сделать вывод о возможности наблюдения внутренней структуры тканей с достаточно высоким поперечным разрешением ( $l_{\perp} < 20a$ ) на оптических глубинах  $\tau_{\sigma} < \tau_{\sigma}^0 \sim 5 \div 10$ . Обращает на себя внимание немонотонный характер зависимости  $\tau_{\sigma}^0$  от параметра  $C$  (пропорционального  $\sigma_1^2$ ): величина  $\tau_{\sigma}^0$  минимальна при  $C \sim 1$  и растет при изменении  $C$  в сторону больших или меньших значений. Такая зависимость  $\tau_{\sigma}^0$  от  $C$  объясняется конкуренцией 2-х факторов, влияющих на разрешающую способность: 1) в более прозрачной среде конфокальное наблюдение дает больший выигрыш в разрешающей способности; 2) оптическая глубина  $\tau_{\sigma}$ , на которой пучок подсветки уширяется в заданное число раз, растет с увеличением показателя рассеяния как  $\sigma_1^{2/3}$  (см. (110г)). При этом абсолютные значения глубины видимости неоднородностей  $\tau_{\sigma}^0/\sigma_1$  монотонно растут при уменьшении  $\sigma_1$  (см. рис. 3).

Потери контраста при наблюдении слоистых структур в ткани характеризуются функцией  $M_z$ . Изображение стратифицированной среды с коэффициентом обратного рассеяния

$$\sigma_0(z) = \overline{\sigma_0}(1 + m_0 \cos h_z z) \tag{119}$$

имеет вид

$$J_2(z_0) = \overline{J_2}[1 + m \cos(h_z z_0 - \psi)]. \tag{120}$$

Оно воспроизводит распределение (119) с контрастом  $m = m_0 M_z$  и пространственным сдви-

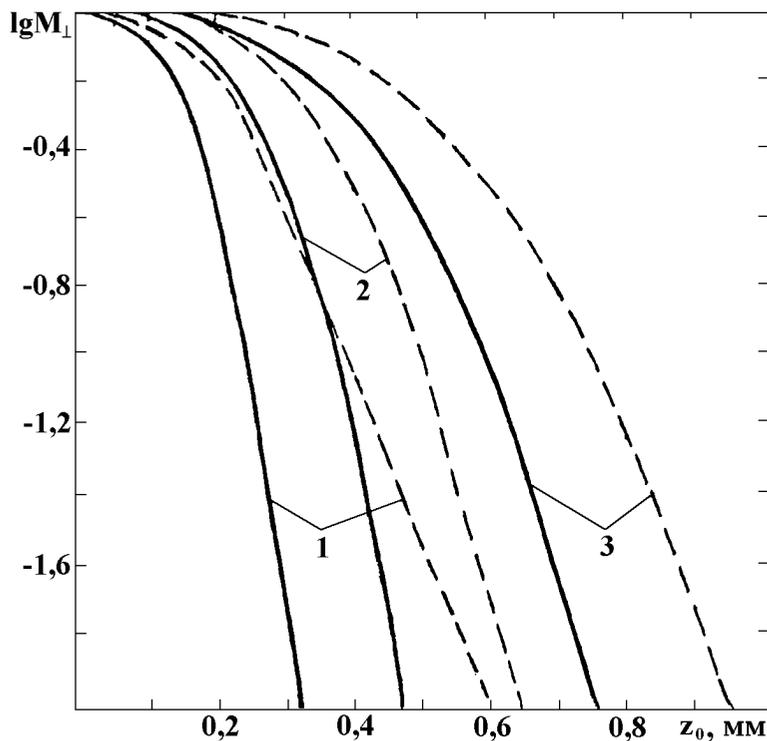


Рис. 3. Частотно-контрастные характеристики  $M_{\perp}$  для среды типа кожного покрова в зависимости от глубины расположения наблюдаемого слоя ткани (мм):  $2a = 15$  мкм;  $\langle \gamma^2 \rangle = 0,03$  ( $\langle \cos \gamma \rangle = 0,9$ );  $\sigma_1 = 20$  мм $^{-1}$  — сплошные линии,  $\sigma_1 = 10$  мм $^{-1}$  — пунктир;  $l_{\perp} = 2\pi/h_{\perp} = 75$  мкм — кривые 1, 150 мкм — кривые 2, 300 мкм — кривые 3.

гом  $\Delta z_0 = \psi/h_z$ , которые определяются из (75), (90), (113):

$$M_z = \exp \left[ -(h_z/h_z^0)^2 \right],$$

$$h_z^0 = 2\sqrt{\pi} \left[ \left( \frac{c\tau_k}{2} \right)^2 + 2\pi\sigma_{\zeta}^2 \right]^{-1/2}, \quad (121a - b)$$

$$\Delta z_0 = \langle \zeta \rangle.$$

Согласно (121a) коэффициент передачи контраста  $M_z$  превышает  $1/e$ , если пространственный масштаб наблюдаемой структуры  $l_z = 2\pi/h_z$  удовлетворяет условию

$$l_z > l_z^0 = 2\pi/h_z^0. \quad (122)$$

На начальном интервале оптических глубин, когда разброс фотонов по пробегам мал по сравнению с длиной когерентности зондирующего сигнала,  $l_z^0 = \sqrt{\pi}(c\tau_k/2)$ . Как следует из (111б), (122), существенное размытие функции когерентности, приводящее к увеличению  $l_z^0$  (и уменьшению  $h_z$ ) в 2 раза, происходит на оптической глубине

$$\tau_{\sigma} = \sigma_1 z_0 = 2,9\sqrt{\sigma_1 c \tau_k / \langle \gamma^2 \rangle}. \quad (123)$$

Например, если  $\langle \gamma^2 \rangle = 0,03$ ,  $c\tau_k/2 = 10$  мкм, то формула (123) дает  $\tau_\sigma = 10,6$  ( $z_0 = 0,53$  мм) при  $\sigma_1 = 20$  мм<sup>-1</sup>;  $\tau_\sigma = 7,5$  ( $z_0 = 0,75$  мм) при  $\sigma_1 = 10$  мм<sup>-1</sup>. Зависимость  $l_z^0$  от глубины расположения наблюдаемого слоя ткани (при указанных выше значениях параметров) изображена на рис. 4.

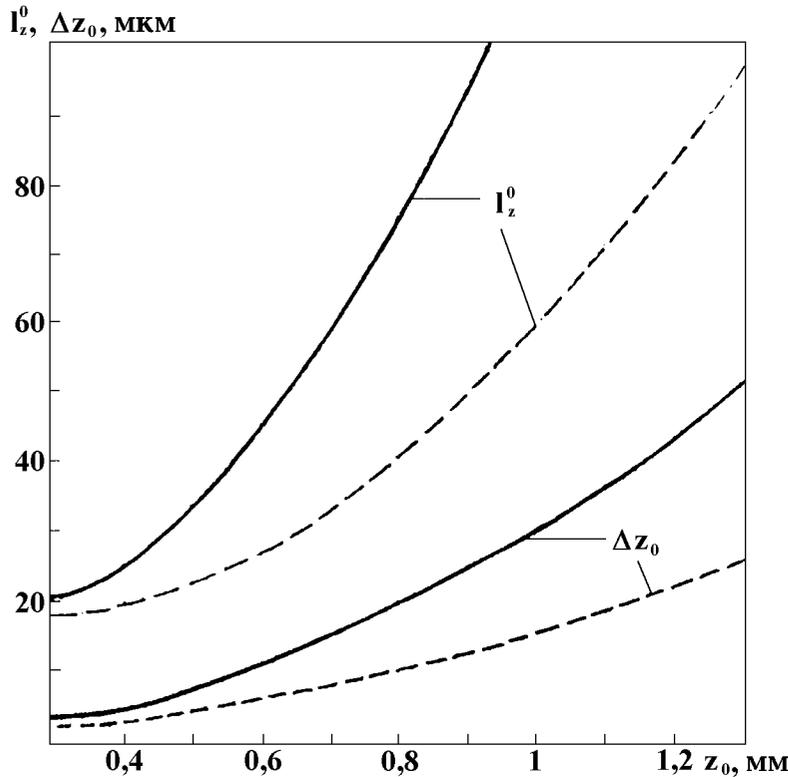


Рис. 4. Систематическая погрешность в определении дальности ( $\Delta z_0$ ) и минимальный период контрастно отображаемой слоистой структуры ( $l_z^0$ ) в зависимости от глубины зондирования  $z_0$ :  $\langle \gamma^2 \rangle = 0,03$ ;  $(c\tau_k/2) = 10$  мкм,  $\sigma_1 = 20$  мм<sup>-1</sup> — сплошные линии,  $\sigma_1 = 10$  мм<sup>-1</sup> — пунктир.

Рассеяние света на крупномасштабных неоднородностях приводит к задержке видеосигнала на время  $\langle \zeta \rangle / c$ , вследствие чего возникает систематическая погрешность в определении дальности до элемента среды, из которого приходит сигнал: дальность завышается на величину  $\Delta z_0 = \langle \zeta \rangle$ . Зависимость  $\Delta z_0$  от  $z_0$ , рассчитанная по формуле (111а), показана на рис. 4.

**9. ОСЛАБЛЕНИЕ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ГЛУБИНЫ ВИДИМОСТИ**

Глубина видимости внутренней структуры тканей может ограничиваться не только потерями контраста, но и ослаблением средней "яркости" изображения ( $\overline{J_2}$ ). С помощью (29), (117), (118а)  $\overline{J_2}$  представляется в виде

$$\overline{J_2} = \langle \overline{p_S} \rangle \tag{124}$$

через средний коэффициент передачи сигнала, который определяется по формулам

$$\langle \overline{p_S} \rangle = \overline{\sigma_0} c \tau_k (k_0 a)^{-2} e^{-2\tau_\tau} p(\tau_\sigma), \tag{125а, б}$$

$$p(\tau_\sigma) = e^{-2\tau_\sigma} + \frac{8}{1 + \varphi} e^{-\tau_\sigma} (1 - e^{-\tau_\sigma}) + \frac{2}{\varphi} (1 - e^{-\tau_\sigma})^2.$$

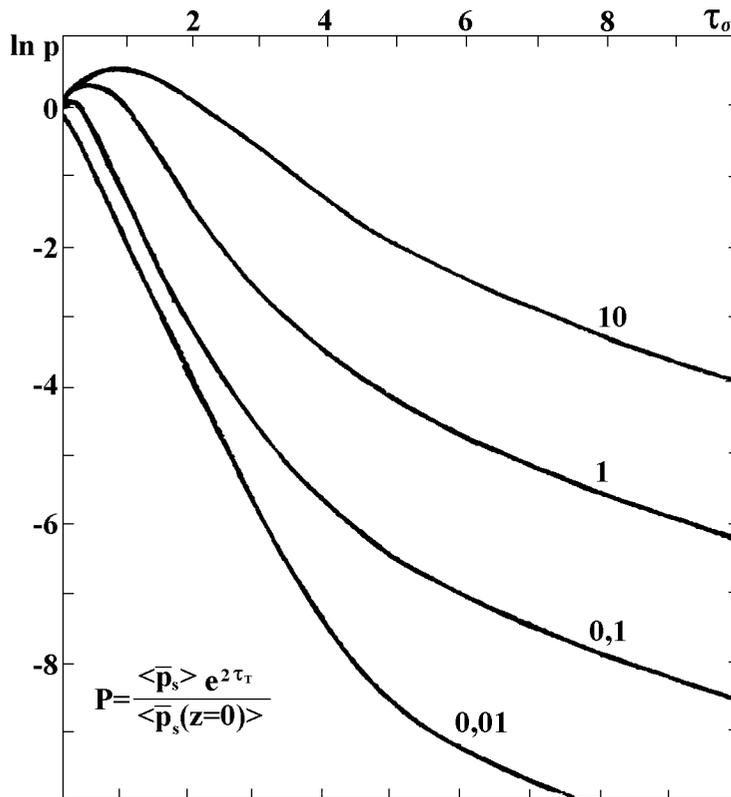


Рис. 5. Коэффициент передачи мощности сигнала  $\langle \bar{p}_s \rangle$ , деленный на величину  $\langle \bar{p}_s(z=0) \rangle \exp(-2\tau_\tau)$ , в зависимости от  $\tau_\sigma = \sigma_1 z_0$ . Цифрами указаны значения параметра  $C$ . Максимумы на кривых — проявление эффекта усиления обратного рассеяния.

Результаты расчета  $p(\tau_\sigma)$  для нескольких значений параметра  $C$  представлены на рис. 5. Как видно из этого рисунка, участок экспоненциального ослабления сигнала четко наблюдается только при значениях  $C$ , меньших 1, когда отношение диаметра пучка к длине свободного пробега фотона меньше среднеквадратичного угла отклонения луча в элементарном акте рассеяния. При уменьшении радиуса пучка или показателя рассеяния среды сигнал быстрее убывает с ростом оптической глубины. Вместе с тем, его абсолютные значения возрастают в результате увеличения мощности сигнала, приходящего от переднего слоя ткани. При условиях

$$\tau_\sigma \gg 1, \quad \tau_\sigma^3 > C > \tau_\sigma^3 e^{-2\tau_\sigma} \quad (126a, б)$$

для оценки  $\langle \bar{p}_s \rangle$  можно использовать простую асимптотическую формулу

$$\langle \bar{p}_s \rangle = \frac{12}{\langle \gamma^2 \rangle} \left( \frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_1} \right) \left( \frac{c\tau_k}{2z_0} \right) (k_0 z_0)^{-2} e^{-2\tau_\tau}. \quad (127)$$

Заметим, что при значениях  $\langle \cos \gamma \rangle > 0,8$  оптические характеристики среды с индикатрисой рассеяния Хеньи—Гринштейна связаны соотношениями

$$\sigma_1 = \langle \cos \gamma \rangle \sigma, \quad \bar{\sigma}_0 \cong \sigma_\tau = (1 - \langle \cos \gamma \rangle) \sigma, \quad (128a - в)$$

$$\langle \gamma^2 \rangle \cong 0,3(1 - \langle \cos \gamma \rangle),$$

которые позволяют исключить параметры  $\overline{\sigma_0}$ ,  $\sigma_1$  и  $\langle \gamma^2 \rangle$  из формулы (127) и записать ее в виде

$$\langle \overline{p_s} \rangle = \left( \frac{c\tau_k}{2z_0} \right) \left( \frac{\lambda_0}{z_0} \right)^2 e^{-2\tau_T} / \langle \cos \gamma \rangle, \quad (129)$$

где  $\lambda_0 = c/f_0$ ,  $c$  — скорость света в среде,  $\tau_T = (\sigma_T + k)z_0$  — транспортная глубина, с которой приходит рассеянный сигнал.

Как следует из (125а), (129), коэффициент передачи сигнала, отражаемого самым верхним слоем ткани, равен

$$\langle \overline{p_s}(z=0) \rangle = \sigma_T c \tau_k (k_0 a)^{-2}, \quad (130)$$

а потери мощности при прямом и обратном прохождении сигнала через слой ткани толщины  $z_0$  определяются выражением

$$\langle \overline{p_s} \rangle / \langle \overline{p_s}(z=0) \rangle = 20 \left( \frac{a}{z_0} \right)^2 \frac{e^{-2\tau_T}}{\langle \cos \gamma \rangle \tau_T}. \quad (131)$$

При  $\sigma_T = 1 \text{ мм}^{-1}$ ,  $k \ll \sigma_T$ ,  $c\tau_k/2 = 10 \text{ мкм}$ ,  $\lambda_0 = 0,8 \text{ мкм}$ ,  $2a = 15 \text{ мкм}$ ,  $\langle \cos \gamma \rangle = 0,9$ ,  $z_0 = 1 \text{ мм}$  формулы (130), (131) дают

$$\langle \overline{p_s}(z=0) \rangle = 5,8 \cdot 10^{-6}, \quad \langle \overline{p_s} \rangle / \langle \overline{p_s}(z=0) \rangle = 1,7 \cdot 10^{-4}.$$

Этот пример показывает, что потери при распространении света в ткани составляют меньшую часть общих потерь, а фактор экспоненциального ослабления света относительно слабо влияет на среднюю яркость изображения глубоких слоев ткани.

После замены  $\overline{\sigma_0} \rightarrow \sigma_0(\vec{r}_0)$ ,  $\overline{J_2} \rightarrow J_2(\vec{r}_0)$  формулы (124), (127) применимы также и для расчета изображений крупномасштабных неоднородностей коэффициента обратного рассеяния, если их поперечный размер

$$l_{\perp} > z_0 \sqrt{0,1 \cdot \tau_T}. \quad (132)$$

Сигнал от неоднородностей с такими размерами и "истинным контрастом"

$$m_0 = (\sigma_0 - \overline{\sigma_0}) / \overline{\sigma_0} \quad (133)$$

будет различим на фоне дробовых шумов приемника при условии (см. (38))

$$m_0 \langle \overline{p_s} \rangle \geq \beta(1 + \delta)(C/\text{Ш})_0 / \chi, \quad (134)$$

где  $(C/\text{Ш})_0$  — пороговое отношение сигнал/шум. При этом дальность видимости ( $z_0$ ) определяется уравнением

$$z_0 e^{\frac{2}{3}(\sigma_T + \kappa)z_0} = \left[ \frac{m_0 \lambda_0^2 (c\tau_k/2) \chi}{\langle \cos \gamma \rangle \beta(1 + \delta)(C/\text{Ш})_0} \right]^{1/3}, \quad (135)$$

из которого, в частности, следует, что при значениях параметров, указанных в предыдущем примере, и при условиях  $(C/\text{Ш})_0 = 5$ ,  $\delta \ll 1$ ,  $m_0 / \langle \cos \gamma \rangle = 0,5$ ,  $\eta P_0 = 50 \text{ мкА}$ ,  $f_1 = \beta f_0 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Гц}$  ( $\beta = 5,4 \cdot 10^{-10}$ ,  $z_c = 1,5 \text{ мм}$ ,  $t_c = 0,025 \text{ сек}$ ) дальность  $z_0 = 1,16 \text{ мм}$ .

Заметим, что в общем случае при оценках дальности видимости наряду с внутренними шумами необходимо учитывать пространственный шум, порождаемый флуктуациями самого полезного сигнала (спекл-шум). Масштабы его корреляции совпадают с размерами элемента разложения (один из них — это ширина строки, другой —  $c\tau_k/2$ ). Поэтому флуктуации полезного сигнала не препятствуют наблюдению неоднородностей  $\sigma_0$  с достаточно высоким контрастом  $m_0$ , если изображение неоднородности содержит большое число элементов. Вместе с тем, видимость локальных рассеивателей и

слабоконтрастных крупномасштабных неоднородностей будет ограничиваться именно спекл—шумом. Оценки их видимости могут быть выполнены стандартными методами на основе данных о статистике флуктуаций сигнала и характеристиках статистически среднего изображения.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнительный анализ методов ОКТ и лазерно—импульсного видения показал, что, хотя они и отличаются способом формирования элемента разрешения по дальности, однако, на информативных свойствах изображения это различие не сказывается. Системе ОКТ можно поставить в соответствие эквивалентную импульсную систему.

В соответствии с принципом эквивалентности для описания томограмм мутной среды, формируемых системой ОКТ с линейным усилителем и квадратичным детектором видеосигнала, непосредственно применим аппарат теории импульсного видения, основанный на уравнении переноса изображения и таких понятиях, как функция размытия точки и частотно—контрастная характеристика. Структуры томограмм, получаемых при квадратичном и линейном детектировании видеосигнала, связаны простым универсальным соотношением. В обоих случаях томограмма несет информацию о пространственных вариациях коэффициента обратного рассеяния среды.

Благодаря одномодовому режиму излучения и приема сигналов и регулярности временной структуры видеосигнала, образующего изображение точечного объекта, в томограммах мутной среды присутствует такой же спекл—шум, как в голографических изображениях, а также проявляются эффекты когерентного обратного рассеяния. Полезный эффект заключается в увеличении (на 3 дБ) интенсивности сигнала, приходящего из среды с больших оптических глубин. Негативные эффекты — это возрастание флуктуаций яркости изображения и нарушение монотонного характера зависимости средней яркости от глубины в изображении приповерхностного слоя среды (не связанное со стратификацией ее оптических свойств).

Аналогичные явления будут возникать из-за рассеяния света на неровностях границы среды. Для их оценки можно воспользоваться результатами теории оптического наблюдения через взволнованную морскую поверхность [20, 21].

В системе ОКТ с гетеродинным фотоприемником энергия источника излучения используется менее эффективно, чем при импульсной локации с прямым фотодетектированием сигнала. Несмотря на это, при фемтосекундной томографии биотканей глубина видимости их структуры в основном ограничивается не энергетическими потерями, а потерями в разрешающей способности.

При выполнении конкретных расчетов и оценок мы использовали максимально упрощенные (и поэтому грубые) модели световых полей. Более универсальное и строгое описание томограмм может быть построено на основе формул (103)—(106), которые позволяют также исследовать возможности восстановления оптических характеристик стратифицированной среды по ее изображениям и проанализировать возможности коррекции искажений изображения, связанных с неоднородностью оптических свойств среды на трассе распространения зондирующего и обратно рассеянного сигналов. Формулы (121в), (111а) можно непосредственно использовать для устранения ошибки в определении дальности до рассеивателя, возникающей из-за разброса фотонов по пробегам.

Благодарю А. В. Гапонова—Грехова за интерес к работе, А. М. Сергеева, И. А. Андронову, Ф. И. Фельдштейна, В. М. Геликонова, Г. В. Геликонова, Р. В. Куранова и Д. В. Шабанова за те знания, которые я получил от них при обсуждении проблем ОКТ, В. А. Савельева за помощь при выполнении расчетов и подготовке работы к публикации и А. Г. Лучинина за полезные замечания, сделанные им при прочтении рукописи статьи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 95–02–05797, № 96–02–05990) и Фонда ведущих научных школ (грант № 96–15–96592).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тучин В. В. //УФН, 1997. Т. 165. № 5. С. 517.
2. Huang D., Wang J., Lin C. P., Schuman J. S., Stinson W. G., Chang W., Hee M. R., Flotte T., Gregory K., Puliafito C. A., and Fujimoto J. G. //Science, 1991. V. 254. P. 1178.
3. Геликонов В. М., Геликонов Г. В., Гладкова Н. Д., Куранов Р. В., Никулин Н. К., Петрова Г. А., Починко В. В., Правденко К. И., Сергеев А. М., Фельдштейн Ф. И., Ханин Я. И., Шабанов Д. В. //Письма в ЖЭТФ, 1995. Т. 61. № 2. С. 149.
4. Sergeev A. M., Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., Fel'dstein F. I., Gladkova N. D., Kamensky V. A. //OSA TOPS on Advances in Optical Imaging and Photon Migration, 1996. V. 2. P. 196.
5. Sergeev A. M., Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., Fel'dchtein F. I., Kuranov R. V., Gladkova N. D., Shakhova N. M., Snopova L. B., Shakhov A. V., Kuznetzova I. A., Denisenko A. N., Pochinko V. V., Chumakov Yu. P., Streltsova O. S. //Optics Express, 1997.
6. Зеге Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. — Минск: Наука и техника, 1985. — 327 с.
7. Pan Y., Birngruber R., Rosperich J., and Engelhardt R. //Appl. Opt., 1995. V. 34. № 28. P. 6564.
8. Knüttel A., Schork R., Bocker D. //Proc. SPIE, 1996. V. 2655. P. 258.
9. Долин Л. С., Левин И. М. Справочник по теории подводного видения. — Л.: Гидрометеиздат, 1991. — 230 с.
10. Куранов Р. В. Оптическая когерентная томография биотканей: Дипломная работа. /Нижегород. гос. ун-т. Высш. шк. общ. и прикл. физики, Н. Новгород, 1995.
11. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Сов. радио, 1971. — 672 с.
12. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981. — 208 с.
13. Кравцов Ю. А., Саичев А. И. //УФН, 1982. Т. 137. Вып. 3. С. 501.
14. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
15. Долин Л. С., Савельев В. А. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1979. Т. 22. № 11. С. 1310.
16. Bremmer H. //Radio Sci., 1964. V. 68D, № 2. P. 967.
17. Долин Л. С. //Докл. АН СССР, 1981. Т. 260. № 6. С. 1344.
18. Долин Л. С. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1983. Т. 26. № 3. С. 300.
19. Cheong W. F., Pahl S. A., and Welch A. J. //IEEE J. of Quant. Electr., 1990. V. 26. № 12. P. 2166.
20. Лучинин А. Г. //Изв. АН СССР. ФАО, 1979. Т. 15. № 7. С. 770.
21. Вебер В. Л., Сергиевская И. А. //Изв. РАН. ФАО, 1992. Т. 28. № 3. С. 325.

Институт прикладной физики РАН,  
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
30 марта 1998 г.

**THEORY OF OPTICAL COHERENCE TOMOGRAPHY***L. S. Dolin*

Analytical models of optical coherence tomography (OCT) of strongly turbid media such as biotissues are developed on the basis of the theory of wave scattering in random inhomogeneous media. Similarity relations for signals of coherence and impulse sounding are established, general expressions are received for random realizations and statistical characteristics of tomograms. It is shown, that after appropriate modification the apparatus of the transfer image theory in turbid media may be used for the analysis of their informative properties. The simple formulas for valuation of visibility depth of internal structure of biotissues are proposed.

УДК 538.56:519.25

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПРОФИЛЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ВИДА

*О. В. Музычук*

Получены некоторые вероятностные характеристики броуновского движения в симметричном потенциальном профиле с двумя равновесными состояниями, подверженном воздействию случайной силы.

Рассмотрены два вида флуктуаций потенциала — дельта-коррелированный гауссов шум и телеграфный случайный процесс с пуассоновской статистикой скачков. Найдены стационарные вероятностные распределения координаты частицы, исследована зависимость от характеристик параметрического и аддитивного шума. Показано, что сильные флуктуации потенциала приводят к сближению и исчезновению ненулевых равновесных состояний.

Для случая дельта-коррелированных случайных сил численным образом исследована релаксация интенсивности флуктуаций координаты и дисперсии интенсивности. Выяснено влияние на процесс релаксации величины параметрического и аддитивного шума, нелинейности системы, начальных условий.

Исследование вероятностных характеристик броуновского движения в различных потенциальных профилях представляет интерес для ряда фундаментальных и прикладных проблем (см., например, [1–3]). В настоящей работе рассмотрен случай, когда потенциальный профиль является стохастическим.

1. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\dot{x} - a(t)x + bx^3 = a_0\eta(t), \quad (1)$$

которое можно трактовать, как уравнение Ланжевена для координаты безынерционной броуновской частицы в случайно меняющемся потенциальном профиле с двумя равновесными состояниями вида

$$U(x, t) = -a(t)x^2/2 + bx^4/4, \quad a(t) = a_0[1 + \xi(t)].$$

Случайную силу  $\eta(t)$  считаем гауссовым дельта-коррелированным шумом

$$\langle \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(t - \tau) \rangle = 2D_\eta\delta(\tau), \quad (2)$$

а статистические характеристики параметрического воздействия  $\xi$  определим ниже. Рассмотрим сначала стационарные вероятностные характеристики процесса  $x(t)$ . Заметим, что в силу четности потенциала стационарное вероятностное распределение будет симметричным. Отметим, что это распределение существует и в отсутствие аддитивного шума.

Запишем (1) в безразмерном виде

$$T\dot{x} = [1 + \xi(t)]x - \beta x^3 + \eta(t), \quad T = a_0^{-1}, \quad \beta = bT. \quad (1a)$$

В отсутствие аддитивного шума  $\eta$  из (1a) легко найти стационарное значение средней интенсивности

$$\langle I \rangle = \langle x^2(\infty) \rangle = 1/\beta, \quad (3)$$

не зависящее для рассматриваемой системы от величины параметрического воздействия. Очевидно, что этот результат справедлив для любой модели процесса  $\xi(t)$  с нулевым средним значением. Для получения более общих вероятностных характеристик ниже рассмотрим, главным образом, две модели параметрического воздействия: гауссов дельта-коррелированный процесс с характеристиками вида (2) и "телеграфный" случайный процесс с пуассоновской статистикой переключений.

В первом случае для моментов интенсивности  $I_n = \langle x^{2n}(t) \rangle$  стандартным путем (см., например, [4]) приходим к следующему уравнению релаксации:

$$n^{-1} I_n' = (1 + nD)I_n - \beta I_{n+1} + (n - 1/2)D_0 I_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

где

$$D = 2D_\xi/T, \quad D_0 = 2D_\eta/T \quad —$$

безразмерные спектральные интенсивности случайных сил  $\xi$  и  $\eta$ ; здесь и ниже штрих — производная по безразмерному времени  $\tau = 2t/T$ .

Как следует из (4), для системы без аддитивного шума ( $D_0 = 0$ ) имеет место рекуррентная формула для стационарных моментов

$$I_{n+1} = (1 + nD)I_n/\beta, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

В частности, для среднего и дисперсии имеем

$$I_1 = \langle I \rangle = 1/\beta, \quad D_I = I_2 - I_1^2 = D I_1^2. \quad (5a)$$

При наличии случайной силы  $\eta(t)$  для стационарных моментов интенсивности имеем цепочку трехчленного взаимодействия, позволяющую представить моменты в форме цепных дробей [5]. Как показывает анализ, в данном случае эти дроби являются расходящимися "с самого начала" и соответствующее представление моментов интенсивности бесполезно. Заметим, однако, что для обратных моментов  $S_n = I_{-n}$  указанные цепные дроби, в принципе, можно использовать. В частности для  $S_1$  имеем

$$S_1 = \beta \left/ \left[ 1 - D + \frac{1,5\beta D_0}{1 - 2D + [2,5\beta D_0/(1 - 3D + \dots)]} \right] \right. \quad (6)$$

Хотя при  $D \neq 0$  эта цепная дробь (6) является расходящейся, при малых  $D$  несколько первых подходящих дробей приближаются к точному значению соответствующего момента.

Для случая дельта-коррелированных случайных сил стационарную плотность вероятности нетрудно найти из уравнения Фоккера—Планка

$$w(x) = C(D_0 + Dx^2)^\gamma \exp(-\beta x^2/D), \quad \gamma = \beta D_0/D^2 + 1/D - 1/2. \quad (7)$$

(Константу нормировки  $C$ , зависящую от параметров системы, можно выразить через функции Уиттекера, однако для анализа легче использовать численную нормировку). В частности, при  $D_0 = 0$  из (7) получим

$$w_0(x) = C_0 x^{2/D-1} \exp(-\beta x^2/D), \quad C_0 = \Gamma^{-1}(1/D)(\beta/D)^{1/D}, \quad (8)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. На основании (8) четные моменты можно представить в виде

$$\langle x^{2n} \rangle = \Gamma(n + 1/D)\Gamma^{-1}(1/D)(D/\beta)^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

откуда нетрудно заметить рекуррентную формулу (5). Как видно из (8), при  $D = 2$  это вероятностное распределение становится гауссовым с дисперсией  $\langle x^2 \rangle = 1/\beta$ .

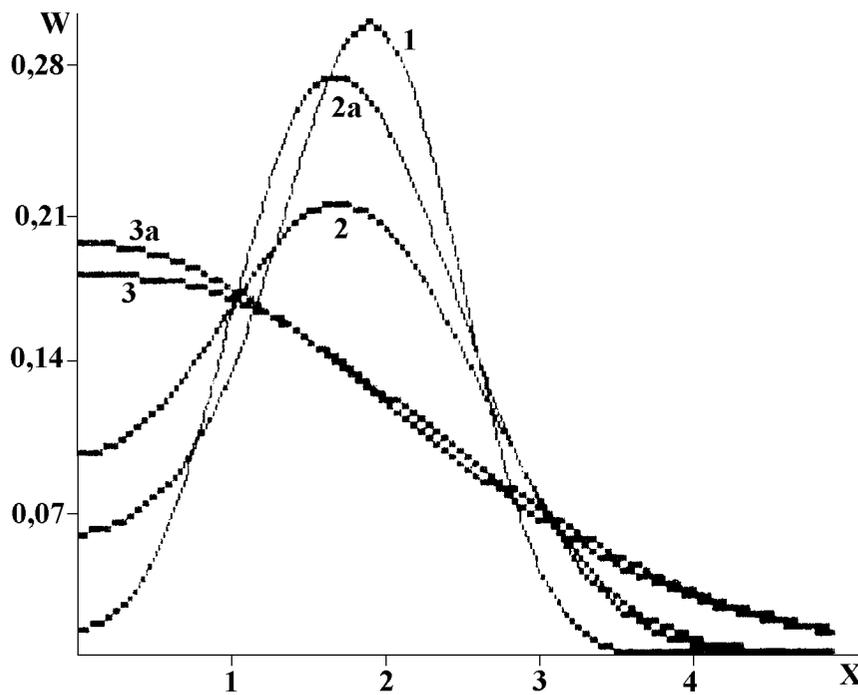


Рис. 1. Кривые 1–3 —  $D = 0,1, 0,5, 2$ , соответственно, при  $D_0 = 1$ . Кривые 2а, 3а —  $D = 0,5, 2$ , соответственно, при  $D_0 = 0,1; \beta = 0,25$  всюду.

Зависимость плотности вероятности (8) от интенсивностей случайных сил приведена на рис. 1 (в силу симметрии показана только область положительных значений  $x$ ). Отметим, что с ростом интенсивности параметрического воздействия  $D$  максимумы распределения сглаживаются, сближаются и сливаются в нуле, что можно трактовать как исчезновение равновесных состояний. Рост же интенсивности аддитивного шума лишь несколько сглаживает максимумы распределения. Плотность вероятности перестает быть двугорбой при выполнении неравенства

$$D \geq 1 - \beta D_0 + \sqrt{1 + \beta^2 D_0^2},$$

а при условии

$$D = 1 + \sqrt{2\beta D_0}$$

она оказывается гауссовой (при этом, разумеется, ненулевых равновесных состояний уже нет).

2. В отсутствие аддитивного шума можно найти ряд вероятностных характеристик системы не только для случая дельта-коррелированных флуктуаций потенциала. Заметим что замена  $x^2 = I$  приводит (1а) к стохастическому уравнению Ферхюльста

$$I' = [1 + \xi(t)]I - \beta I^2, \tag{16}$$

ряд статистических характеристик которого исследован в [6], а замена  $S = 1/I$  приводит последнее к линейному стохастическому уравнению вида

$$S' + [1 + \xi(t)]S = \beta. \tag{10}$$

Это позволяет, в принципе, получить точные результаты для релаксации некоторых вероятностных характеристик системы. Из (10), в частности, следует, что релаксация среднего значения  $\langle S \rangle$  при любой функции корреляции параметрического шума  $B_\xi(\tau)$  описывается уравнением

$$\langle S(\tau) \rangle = S_0 F(\tau) + \beta \int_0^\tau \exp[F(\tau_1)] d\tau_1, \quad (11)$$

где

$$F(\tau) = \int_0^\tau (\tau - \tau_1) B_\xi(\tau_1) d\tau_1 - \tau$$

( $\tau$  — безразмерное время). В частности, для дельта-коррелированного  $\xi$  релаксация “обратной интенсивности” и ее дисперсии  $D_s$  такова:

$$\langle S(\tau) \rangle = \langle S \rangle_{\text{ст}} + (S_0 - \langle S \rangle_{\text{ст}}) \exp[(D - 1)\tau], \quad D < 1, \quad (12)$$

$$D_s(\tau) = 2D \int_0^\tau \langle S(\tau_1) \rangle^2 \exp[2(2D - 1)(\tau - \tau_1)] d\tau_1, \quad D < 1/2,$$

где  $S_0$  — начальное, а  $\langle S \rangle_{\text{ст}}$  — стационарное значение. Для стационарных значений высших моментов нетрудно получить рекуррентную формулу

$$\langle S^n \rangle_{\text{ст}} = \beta(1 - nD)^{-1} \langle S^{n-1} \rangle_{\text{ст}}, \quad D < 1/n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Как следует из (13), высшие  $S$ -моменты не существуют. Это хорошо известный факт для стохастического уравнения (10) (см., например, [7]), связанный с медленным спаданием крыльев соответствующего вероятностного распределения.

По-видимому, с этим же связано увеличение времени релаксации обратных моментов с ростом интенсивности шума  $D$ , вытекающее из (12). Все это делает весьма неудобным формально точное описание рассматриваемой системы с помощью  $S$ -характеристик.

3. Рассмотрим теперь “телеграфное” параметрическое воздействие с функцией корреляции вида

$$B_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\Pi|\tau|). \quad (14)$$

Как известно [4], при этом для стохастического уравнения 1-го порядка общего вида

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \xi(t)$$

аналитически находится стационарная плотность вероятности

$$w(x) = C \frac{|g(x)|}{G(x)} \exp\left(\Pi \frac{\int f(x) dx}{G(x)}\right), \quad G(x) = \sigma^2 g^2 - f^2, \quad (15)$$

существующая в области значений  $x$ , где  $G(x) > 0$ . Для рассматриваемой системы формула (15) приводит к выражению

$$w(x) = C |x^p| (x^2 - z_1)^{p_1} (z_2 - x^2)^{p_2}, \quad (16)$$

где

$$z_{1,2} = \beta^{-1}(1 \mp \sigma), \quad p = \nu(\sigma^2 - 1) - 1, \quad \nu = \Pi T,$$

$$p_1 = -1 - \nu/4(\sigma - 1), \quad p_2 = -1 + \nu/4(\sigma + 1).$$

Эта плотность вероятности является финитной, что связано с дихотомичностью случайного воздействия, и существует в области значений

$$z_1 < x^2 < z_2 \quad \text{при} \quad \sigma < 1,$$

$$0 < x^2 < z_2 \quad \text{при} \quad \sigma > 1.$$

Нетрудно убедиться, что при предельном переходе

$$\nu \rightarrow \infty, \quad 2\sigma^2/\nu = D = \text{const}$$

мы приходим к вероятностному распределению (8), соответствующему дельта-коррелированному параметрическому воздействию (в данном случае величина  $D$  есть безразмерная спектральная плотность случайной силы на нулевой частоте).

Зависимость плотности вероятности (16) от спектральной интенсивности  $D$  и относительного времени корреляции случайной силы  $\tau = \nu^{-1}$  показана на рис. 2, 3. Рис. 2 соответствует  $\tau = \text{const}$ , а рис. 3 —  $D = \text{const}$ . Кривые, построенные точками, соответствуют дельта-коррелированным флуктуациям потенциала.

Как видно из рисунков, на границах области существования вероятностного распределения имеются интегрируемые особенности (с ростом времени корреляции шума или с уменьшением его дисперсии они появляются сначала на внешней границе  $x = \sqrt{z_2}$ , затем, после образования внутренней границы  $x = \sqrt{z_1}$ , появляются и там). Наличие этих особенностей можно трактовать как “прилипание” частиц к соответствующим границам.

4. Рассмотрим теперь релаксацию моментов к стационарным значениям, полагая флуктуации потенциала и аддитивный шум дельта-коррелированным. Так как нестационарное уравнение Фоккера–Планка аналитически не решается, сделать это можно лишь приближенными методами, используя то или иное предположение для “размыкания” моментных цепочек. Поскольку для рассматриваемой системы нелинейность принципиально нельзя считать малой, использование какой-то эквивалентной линеаризации либо гауссового и высших кумулянтных приближений [8] совершенно неадекватно.

Поскольку в данном случае, при отсутствии внешней силы для стационарных значений моментов, существует рекуррентная формула (5), попытаемся использовать ее для замыкания уравнений релаксации (4). Заметим, что для этого следует использовать не сами стационарные значения моментов, а лишь “стационарные связи” между ними (см. также [9]). Этот прием гарантирует, по крайней мере, то, что релаксация идет к истинным значениям. Как показывает анализ, для указанной цели вместо (5) можно использовать эквивалентные соотношения

$$I_2(t) = (1 + D)I_1^2(t), \quad I_{n+1}(t) = [1 + n d(t)]I_1(t)I_n(t), \quad (17)$$

где

$$I_1 = \langle I \rangle, \quad d = D_I / \langle I \rangle^2 \quad —$$

нормированная дисперсия интенсивности. При  $D_0 = 0$  применение формул (17) для замыкания цепочек (4) приводит к точным стационарным значениям моментов, а при не слишком большом аддитивном шуме результаты мало отличаются от истинных (которые можно найти численным интегрированием вероятностного распределения (7)). Соответствующий численный анализ показывает (см. также рис. 1), что влияние аддитивного шума на вероятностные характеристики рассматриваемой системы гораздо слабее влияния флуктуаций потенциала.

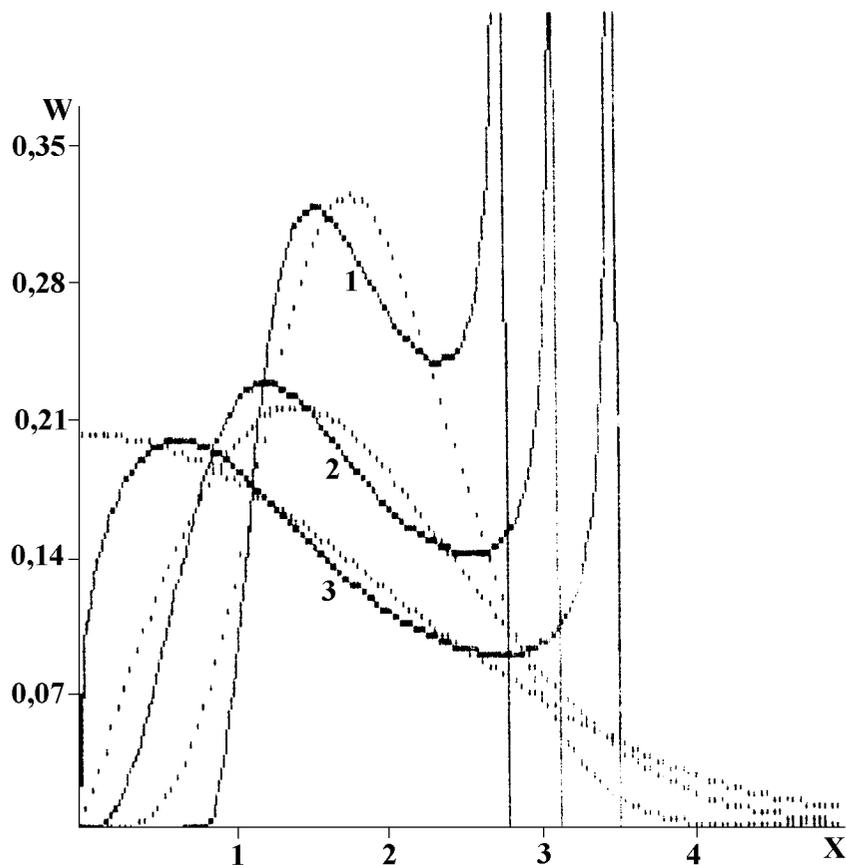


Рис. 2. Кривые 1–3 —  $D = 0,4, 1, 2$  (или  $\sigma^2 = 0,8, 2, 4$ ), соответственно. Пунктирные кривые — для  $\delta$ -коррелированного шума при тех же значениях  $D$ .  $\tau = 0,25, \beta = 0,25$  всюду.

Таким образом, на основании (4), (17) приходим к следующим уравнениям релаксации средней интенсивности и ее дисперсии:

$$\langle I \rangle' = (1 + D)\langle I \rangle(1 - \beta\langle I \rangle) + D_0/2, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2}D_I' = [1 + 2D - 2\beta(D_I/\langle I \rangle + \langle I \rangle)]D_I + D\langle I \rangle^2,$$

первое из которых имеет аналитическое решение. В частности, при  $D_0 = 0$  оно имеет вид ( $\tau$  — безразмерное время)

$$\langle I(\tau) \rangle = \left\{ \beta + (I_0^{-1} - \beta) \exp[-(1 + D)\tau] \right\}^{-1}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что с ростом  $D$  время релаксации уменьшается; это же видно из рис. 4, где показаны результаты численного решения уравнений (18) при различных значениях интенсивности параметрических флуктуаций  $D$ . Здесь сплошные линии — средняя интенсивность, пунктир — ее дисперсия. Отметим, что в данном случае времена релаксации средней интенсивности и ее дисперсии при соответствующих значениях параметров практически одинаковы.

На рис. 5 показана зависимость релаксации средней интенсивности от нелинейности системы  $\beta$  и величины начальных условий  $I_0$ . Видно, что изменение нелинейности, сильно влияя на величину ста-

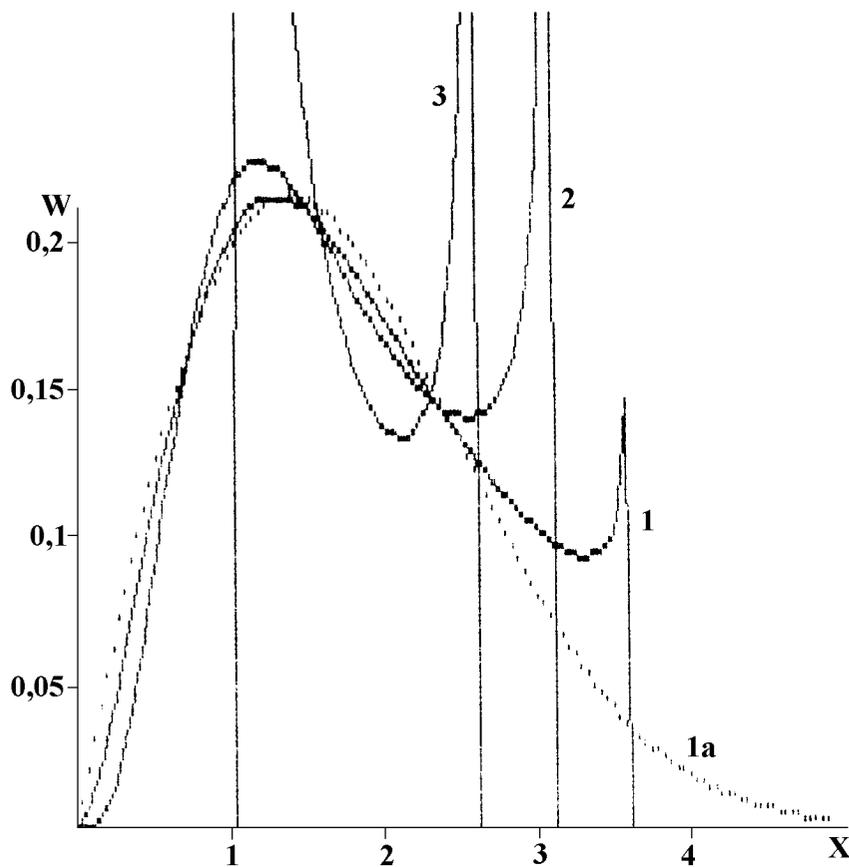


Рис. 3. Кривые 1–3 —  $\tau = 0,1, 0,25, 1$  (или  $\sigma^2 = 5, 2, 0,5$ ), соответственно. Кривые 1a — для  $\delta$ -коррелированного шума.  $D = 1, \beta = 0,25$  всюду.

ционарного значения  $\langle I \rangle$ , мало сказывается на времени релаксации. С ростом величины начального значения  $I_0$  время установления уменьшается, что вполне естественно для системы с параметрической случайной силой.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. — М.: Мир, 1987. — 397 с.
1. Malakhov A. N., Pankratov A. L. //Physica, 1996. V. A229. № 1, P. 109.
  2. Malakhov A. N. //Chaos, 1997. V. 7(3). P. 488.
  3. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно—неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
  4. Музычук О. В. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1989. Т. 32. № 2. С. 169.
  5. Музычук О. В. //Изв. ВУЗов. Прикл. нелин. динамика, 1996. Т. 4. № 3. С. 26.
  6. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.
  7. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
  8. Музычук О. В. // Изв. ВУЗов. Прикл. нелин. динамика, 1997. Т. 5. № 2–3. С. 80.

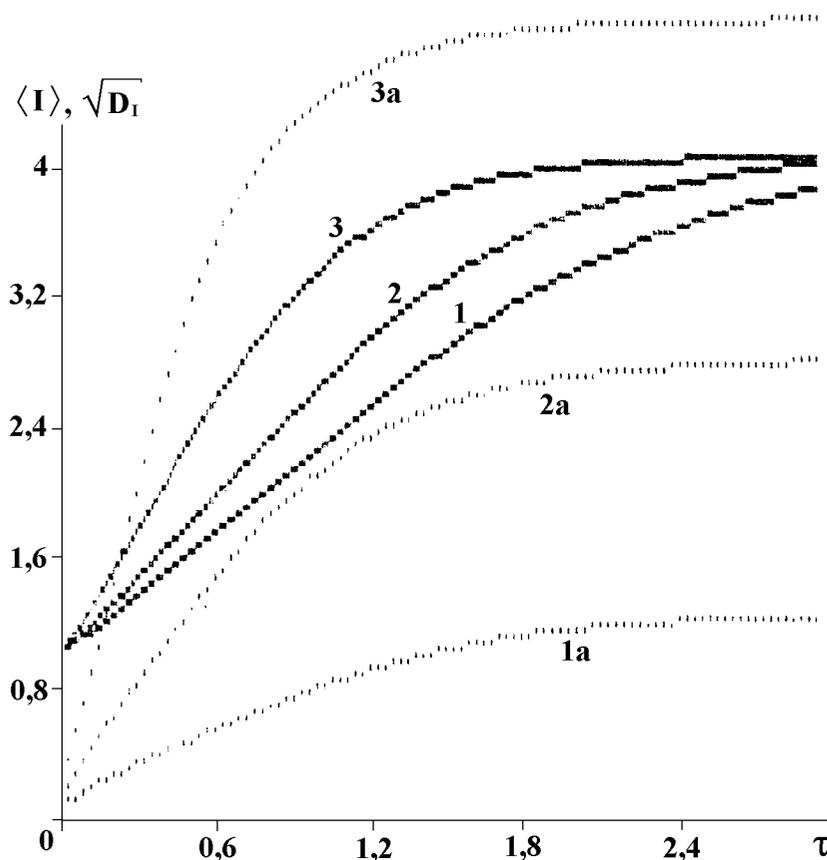


Рис. 4. Кривые 1–3 — релаксация  $\langle I \rangle$ .  $D = 0,1, 0,5, 1,5$ , соответственно. Кривые 1а–3а — релаксация дисперсии  $D_I$  при тех же значениях  $D$ .  $\beta = 0,25$ ,  $D_0 = 0,5$ ,  $I_0 = 1$  всюду.

Нижегородский  
архитектурно–строительный  
университет, Россия

Поступила в редакцию  
16 марта 1998 г.

#### SOME PROBABILITY CHARACTERISTICS OF BROWNIAN MOTION IN STOCHASTIC POTENTIAL PROFILE OF SPECIFIC TYPE

*O. V. Muzychuk*

Some probability characteristics of Brownian motion in a symmetric potential profile with two steady-states subjected to a random force are obtained. Two sorts of potential's fluctuations are considered: the delta-correlated Gaussian noise and stochastic telegraph process with Poisson statistics of skips. Stationary probability densities of the Brownian particle coordinate are found: their dependence on parametric and additive noise values are investigated. The intensive fluctuations of the potential are shown to lead to approaching and vanishing nonzero steady-states.

*O. V. Muzychuk*

1297

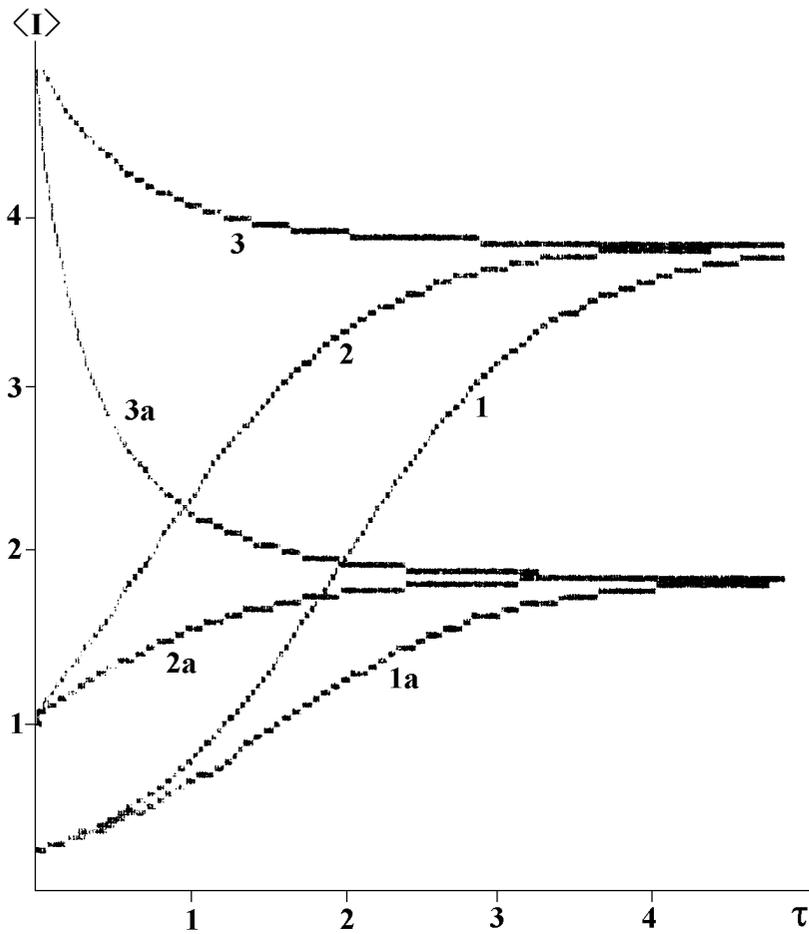


Рис. 5. Кривые 1–3 —  $\beta = 0,25$ ,  $I_0 = 0,2, 1, 5$ , соответственно. Кривые 1а–3а —  $\beta = 0,5$  при тех же значениях  $I_0$ .  $D = D_0 = 0,5$  всюду.

For a delta-correlated random force the relaxation of intensity fluctuations of coordinate and its dispersion are investigated by numerical method. The influence of parametric and additive noise values, nonlinearity of the system and initial conditions on relaxation process are clarified.

## ПОСТРОЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ РЕГИСТРИРУЕМОЙ ДЕТЕКТОРОМ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ

*Е. З. Грибова, А. И. Саичев*

Для частиц пассивной примеси в потоке внешнего газа найдено вероятностное распределение скоростей в заданной области пространства (детекторе). Поскольку непосредственное вычисление указанной плотности вероятностей представляет значительные трудности, решение строится на основе классической задачи о вероятностном распределении координат и скорости броуновской частицы в фиксированный момент времени. Анализ зависимости решения от параметров исходной задачи дает условия, при которых справедливы сделанные предположения о характере движения частицы.

### ВВЕДЕНИЕ

При изучении движений сплошных сред, например, при исследовании состояния атмосферы или океана, большой интерес представляет анализ диффузии пассивных примесей. В общем случае частицы примеси участвуют одновременно в двух движениях: в регулярном сносе вместе со средой и в случайном (броуновском) движении.

Заметим, что задача о диффузии частицы в поле случайных сил является классической [1–3]. Однако обычно исследуют вероятностные свойства координат и скорости частицы в заданный момент времени  $t$ . В то же время часто наблюдения ведутся с помощью неподвижных датчиков. Поэтому ниже изучается вероятностное распределение скоростей частиц, попадающих в некоторую заранее заданную область пространства (детектор).

Пусть частица вылетает из источника в момент  $t = 0$  с начальной скоростью  $\vec{v}_0$  и попадает в поток газа, движущийся со скоростью  $\vec{v}'_0$ . Взаимодействие частицы с потоком происходит двумя способами: за счет силы вязкого трения с эффективным коэффициентом  $k$ , пропорциональной относительной скорости частицы, и за счет межмолекулярного взаимодействия, которое учитываем случайной силой  $\vec{\xi}(t)$ . Будем считать, что  $\vec{\xi}(t)$  — гауссов процесс с корреляционным тензором

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t + t') \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(t') \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $D$  — коэффициент молекулярной диффузии.

Выберем систему координат  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  с началом в источнике. Для дальнейшего удобно одно из направлений (например,  $x_3$ ) считать продольным, а  $(x_1, x_2) \equiv \vec{x}_\perp$  — поперечной плоскостью. Пусть также имеется детектор, поверхность  $S$  которого задана уравнением  $x_3 = \varphi(\vec{x}_\perp)$ , а весовая функция  $M(\vec{x}_\perp)$  характеризует чувствительность разных его точек. Детектор измеряет скорости частиц, попавших в него в течение промежутка времени  $[0, T]$ . При этом регистрируются лишь частицы, у которых в момент достижения детектора продольная составляющая скорости  $v_3 > 0$ . В данной работе мы обсудим плотность вероятностей скорости указанных частиц  $W(\vec{v}; \varphi, T)$ .

Движение частицы описывается уравнениями Ланжевена [1, 2]

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V}, \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = -k(\vec{V} - \vec{v}'_0) + \vec{\xi}(t) \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\vec{X}(t=0) = 0, \quad \vec{V}(t=0) = \vec{v}_0.$$

*Е. З. Грибова, А. И. Саичев*

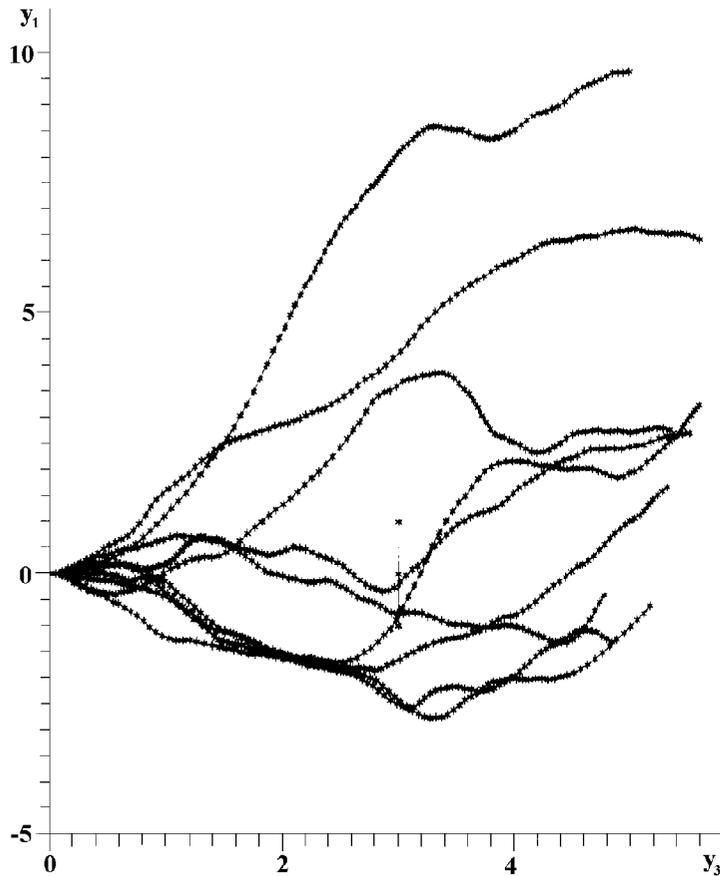


Рис. 1. Траектории движения частицы (результат численного решения уравнений (2)). Параметры задачи:  $q_x = -1$ ,  $q_z = 0$ ;  $\alpha_x = 0,01$ ,  $\alpha_z = 1$ .

Соображения размерности позволяют ввести параметры, определяющие соотношение между регулярным сносом и диффузией частицы

$$\alpha_i = \frac{kv'_{0i}}{2D}$$

(здесь  $v'_{0i}$  — скорость потока в  $i$ -ом направлении,  $i = 1, 2, 3$ ).

В качестве примера на рис. 1 приведены траектории частицы, полученные численным моделированием уравнений движения (2) в двумерном случае при условии, что  $\vec{v}_0 = \vec{v}'_0$ . Безразмерные координаты частицы  $y_i$  (в двумерном случае остается одна поперечная координата  $y_1$  и продольная  $y_3$ ), в которых построены траектории на рис. 1, связаны с размерными  $x_i$  соотношением  $y_i = kx_i/v'_{0i}$ . Детектор изображен на рисунке отрезком  $[-1, +1]$ , расположенным на расстоянии  $y_3 = 3$  от источника. Параметры задачи ( $\alpha_1 = 0,01$ ,  $\alpha_3 = 1$ ) соответствуют случаю, когда влияние сноса и диффузии в продольном направлении одинаково, а поперечным сносом можно пренебречь.

Очевидно, что качественный характер движения частицы при разных значениях  $\alpha$  различен. Так, если внешний поток, в основном, сносит частицу к детектору (случай, представленный на рис. 1), то время  $t$  достижения детектора будет конечным для большинства частиц. Кроме того, в этом случае мала вероятность возврата в детектор частиц со скоростью  $v_3 < 0$ . Если же есть сильный поперечный снос ( $\alpha_1 \gg \alpha_3$ ), то частица может вообще не попасть в детектор, обойдя его “сбоку”, а при сильной диффузии и слабом сносе ( $\alpha_1 \ll 1$ ,  $\alpha_3 \ll 1$ ) частица будет хаотически двигаться в пространстве между источником и детектором. Ясно, что искомая плотность вероятностей существенно зависит от указан-

ных условий.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Из уравнений (2), дополненных начальными условиями, следует, что с учетом дельта-коррелированности процесса  $\vec{\xi}(t)$  (предположение (1)) плотность вероятностей координат и скорости частицы

$$f(\vec{x}, \vec{v}; t) = \langle \delta[\vec{x} - \vec{X}(t)] \delta[\vec{v} - \vec{V}(t)] \rangle \quad (3)$$

(здесь и далее угловые скобки означают усреднение по ансамблю случайных реализаций координат и скоростей частицы) удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - k \frac{\partial}{\partial \vec{v}} [(\vec{v} - \vec{v}_0') f] = D \Delta_v f \quad (4)$$

с начальным условием

$$f(\vec{x}, \vec{v}; t=0) = \delta(\vec{x}) \delta(\vec{v} - \vec{v}_0). \quad (5)$$

Постановке рассматриваемой задачи соответствует граничное условие

$$f(\varphi, \vec{v}; t) \Big|_{(\vec{v} \cdot \vec{n}) < 0} = 0, \quad (6)$$

где  $\vec{n}$  — внутренняя нормаль к поверхности детектора.

Установим связь искомой плотности вероятностей  $W(\vec{v}; \varphi, T)$  с решением задачи (4)–(6). Для этого вычислим с учетом определения (3) интеграл

$$\begin{aligned} F(\vec{v}, \varphi; T) &= \int_0^T dt \iiint d\vec{x} M(\vec{x}_\perp) \delta[x_3 - \varphi(\vec{x}_\perp)] (\vec{v} \cdot \vec{n}) \sqrt{1 + (\nabla_\perp \varphi)^2} f(\vec{x}, \vec{v}; t) = \\ &= \int_0^T dt \iiint d\vec{x}_\perp (\vec{v} \cdot \vec{n}) \sqrt{1 + (\nabla_\perp \varphi)^2} M(\vec{x}_\perp) \langle \delta[\varphi(\vec{x}_\perp) - X_3(t)] \delta[\vec{x}_\perp - \vec{X}_\perp(t)] \delta[\vec{v} - \vec{V}(t)] \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Пользуясь представлением дельта-функции

$$\delta[q(t)] = \frac{\delta(t - t^*)}{|q'(t)|}$$

и учитывая, что в нашем случае  $q(t)$  представляет собой сложную функцию с векторным промежуточным аргументом, перепишем первый множитель под знаком среднего

$$\delta[\varphi(\vec{x}_\perp) - X_3(t)] = \frac{1}{|(\vec{v} \cdot \vec{n}) \sqrt{1 + (\nabla_\perp \varphi)^2}|} \delta[t - t^*(\vec{x}_\perp)],$$

где  $t^*(\vec{x}_\perp)$  — наименьший корень уравнения  $X_3(t) = \varphi(\vec{x}_\perp)$  (значение момента времени, когда частица попадает на детектор). Подставляя это выражение в (7) и интегрируя в предположении, что за интервал времени  $[0, T]$  частица обязательно попадет в детектор, причем только один раз, получим

$$F(\vec{v}; \varphi, T) = \left\langle \delta[\vec{v} - \vec{V}(t^*)] \Big|_{t^* \leq T} \right\rangle.$$

Правая часть последнего равенства по определению как раз и есть вероятностное распределение скоростей частицы в детекторе. Поэтому, замечая, что  $\sqrt{1 + (\nabla_\perp \varphi)^2} \delta[x_3 - \varphi(\vec{x}_\perp)]$  — одна из форм записи

поверхностной дельта-функции, выделяющей из объемного интеграла поверхностный по заданной поверхности  $S$ , приходим к формуле

$$W(\vec{v}; \varphi, T) = \int_0^T dt \iint_S dS (\vec{v} \cdot \vec{n}) M(\vec{x}_\perp) f(\vec{x}, \vec{v}; t). \quad (8)$$

Заметим, что определяемая выражением (8) плотность вероятностей  $W(\vec{v}; \varphi, T)$  нормирована не на единицу. Чтобы найти нормировку, проинтегрируем (8) по скорости  $\vec{v}$ . Это дает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v} W(\vec{v}; \varphi, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v} \int_0^T dt \iint_S dS (\vec{v} \cdot \vec{n}) M(\vec{x}_\perp) f(\vec{x}, \vec{v}; t) = \\ &= \left\langle \int_0^T dt \iint d\vec{x}_\perp M(\vec{x}_\perp) \delta[t - t^*(\vec{x}_\perp)] \delta[\vec{x}_\perp - \vec{X}_\perp(t)] \right\rangle = \langle \chi(\varphi; T) \rangle, \end{aligned}$$

где функция  $\chi(\varphi; T)$ , обозначающая интеграл под знаком среднего, равна единице, если в момент  $t^* \in [0, T]$  частица действительно попадет в детектор ( $\vec{x}_\perp \in \varphi$ ), и нулю, если за промежуток времени  $[0, T]$  попадания не было. Среднее значение этой функции есть вероятность однократного попадания частицы в детектор за интервал времени  $[0, T]$ :  $\langle \chi(\varphi; T) \rangle = P(1; T)$ , и плотность вероятностей  $W(\vec{v}; \varphi, T)$  нормирована на эту вероятность.

## 2. ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ

К сожалению, точное решение краевой задачи (4)–(6) неизвестно. В то же время хорошо известно [4] решение задачи Коши (4)–(5) — это совместное гауссово распределение координат и компонент скорости частицы в произвольный момент времени  $t$ . В дальнейшем это решение обозначим  $g(\vec{x}, \vec{v}; t)$ . Заметим, что плотность вероятностей  $f(\vec{x}, \vec{v}; t)$  соответствует случаю, когда детектор “поглощает” частицы со скоростями  $v_z > 0$ . Физический смысл отказа от граничного условия (6) состоит в том, что мы рассматриваем теперь “прозрачный” детектор, не препятствующий многократному возврату частиц в него и регистрирующий скорости всех частиц, в том числе и тех, у которых  $v_z < 0$ .

Найдем теперь связь искомой плотности вероятностей  $W(\vec{v}; \varphi, T)$  с вероятностным распределением  $g(\vec{x}, \vec{v}; t)$ . Для этого, по аналогии с (7), вычислим интеграл

$$G(\vec{v}; \varphi, T) = \int_0^T dt \iiint d\vec{x} M(\vec{x}_\perp) \delta[x_z - \varphi(\vec{x}_\perp)] (\vec{v} \cdot \vec{n}) \sqrt{1 + (\nabla_\perp \varphi)^2} g(\vec{x}, \vec{v}; t). \quad (9)$$

Преобразования, аналогичные выполненным для интеграла (7), приводят функцию  $G(\vec{v}; \varphi, T)$  к виду

$$G(\vec{v}; \varphi, T) = \left\langle \sum_{i=1}^N \delta[\vec{v} - \vec{V}(t_i)] \right\rangle.$$

В последнем равенстве учтено, что частица может попадать в “прозрачный” детектор  $N$  раз в моменты  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Поскольку число  $N$  случайно, то по формуле полной вероятности получим

$$G(\vec{v}; \varphi, T) = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; T) \sum_{i=1}^N w_i(\vec{v}; \varphi, T|N). \quad (10)$$

Здесь  $P(N; T)$  — вероятность того, что за промежуток времени  $[0, T]$  частица  $N$  раз попадет в детектор,  $w_i(\vec{v}; \varphi, T|N)$  — плотность вероятностей скорости частицы в детекторе в момент  $i$ -го попадания при условии, что всего попаданий  $N$ .

Если за время  $T$  частица успеваеет лишь один раз пересечь поверхность детектора (причем так, что  $v_z > 0$ ), то входящая в (10) условная плотность вероятностей  $w_1(\vec{v}; \varphi, T|1)$  совпадает с искомым вероятностным распределением  $W(\vec{v}; \varphi, T)$ . Таким образом, в этом случае

$$W(\vec{v}; \varphi, T) = G(\vec{v}; \varphi, T). \quad (11)$$

Очевидно, равенством (11) можно приближенно пользоваться и в том случае, когда  $N > 2$ , но вероятности многократных попаданий в детектор  $P(N; T)$  много меньше, чем  $P(1; T)$ . Из качественных представлений о характере движения частицы, которые дает рис. 1, ясно, что при некоторых соотношениях между параметрами задачи указанный случай действительно может иметь место. Так, если детектор достаточно мал (предельный случай — точечный детектор), то мала и вероятность  $P(1; T)$  даже однократного попадания в него, и тем более мала вероятность большего числа попаданий. Также мала вероятность возвращения в детектор частицы и в том случае, когда снос вдоль продольной оси сильнее, чем диффузия — частица “улетит” вместе с потоком (этому соответствуют значения параметра  $\alpha_3 \gg 1$  при  $\alpha_1 \leq 1$ ).

Действительно, результаты численного моделирования, проведенного для двумерного случая (детектор — отрезок  $[-a/2, a/2]$ , расположенный перпендикулярно оси  $x_3$  на расстоянии  $L$  от источника, весовая функция  $M(\vec{x}_\perp)$  равна единице всюду на поверхности и нулю — вне ее), показывают, что при значениях  $\alpha_1$  от 0,01 до 1 и  $\alpha_3 = 1$  даже при соотношении  $a/L = 5$  вероятность двукратного попадания в детектор  $P(2; T)$  не превышает  $10^{-2}P(1; T)$  для всех значений  $T$  из интервала  $[0, T_{\max}]$  (где  $T_{\max}$  определяется условием  $P(1; T_{\max}) \approx 1$ ). Естественно предположить, что в реальном трехмерном случае вероятностями больше чем одного пересечения поверхности детектора тем более можно пренебречь.

Таким образом, отказавшись от граничного условия (6), но при этом рассматривая такие параметры задачи, при которых частица практически лишь один раз достигает поверхности детектора, мы достаточно точно найдем искомую плотность вероятностей  $W(\vec{v}; \varphi, T)$ .

### 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Как уже было сказано, приближенное равенство (11) тем точнее определяет распределение скоростей частицы в детекторе, чем меньше вероятности  $P(N; T)$  при  $N > 2$ . Поэтому прежде, чем пользоваться формулой (11), необходимо вычислять вероятности  $P(1; T)$  и, хотя бы,  $P(2; T)$ . Заметим, что вероятности также могут быть найдены с помощью функции  $G(\vec{v}; \varphi, T)$ . Для этого проинтегрируем равенство (10) по  $\vec{v}$  и учтем, что условные плотности вероятностей  $w_i$  нормированы на единицу. Это дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v} G(\vec{v}; \varphi, T) = \sum_{N=1}^{\infty} N P(N; T). \quad (12)$$

Если вероятностями более чем одного попадания в детектор можно пренебречь, то в правой части (12) как раз останется  $P(1; T)$ . Ниже будет показано, что и вероятность  $P(2; T)$  может быть оценена с помощью  $G(\vec{v}; \varphi, T)$ .

Необходимое для вычисления  $G(\vec{v}; \varphi, T)$  решение задачи Коши (4)–(5) известно [1, 4]: по любому из направлений совместное распределение координаты и скорости частицы  $g_i(x_i, v_i; t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) является гауссовым, а все направления независимы, поэтому

$$g(\vec{x}, \vec{v}; t) = \prod_{i=1}^3 g_i(x_i, v_i; t). \quad (13)$$

Для дальнейшего анализа, кроме уже использованной безразмерной координаты  $y_i$ , удобно ввести еще безразмерные скорость  $u_i = v_i/v'_{0i}$  и время  $\tau = kt$  и перейти к безразмерной плотности вероятностей

$$\begin{aligned} \gamma_i(y_i, u_i; \tau) &= (v'^2_{0i}/k) g_i(x_i, v_i; t) = \frac{\alpha_i}{\pi\sqrt{c(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{\alpha_i}{c(\tau)} \times \right. \\ &\times \left[ (1 - e^{-2\tau}) [y_i - \tau - q_i(1 - e^{-\tau})]^2 - 2(1 - e^{-\tau})^2 [y_i - \tau - q_i(1 - e^{-\tau})] \times \right. \\ &\left. \left. \times (u_i - 1 - q_i e^{-\tau}) + (2\tau + 4e^{-\tau} - e^{-2\tau} - 3)(u_i - 1 - q_i e^{-\tau})^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$c(\tau) = 2\tau(1 - e^{-2\tau}) - 4(1 - e^{-\tau})^2, \quad q_i = (v_{0i} - v'_{0i})/v'_{0i}.$$

Таким образом, вместо размерной плотности вероятностей  $W(\vec{v}; \varphi, T)$  будем искать безразмерную

$$\omega(\vec{u}; \varphi, kT) = v'_{01} v'_{02} v'_{03} W(\vec{v}; \varphi, T).$$

Рассмотрим уже упоминавшийся конкретный пример: пусть детектор — отрезок длины  $a$ , расположенный перпендикулярно оси  $z$  на расстоянии  $L$  от источника, центр детектора лежит на оси  $z$  (поскольку рассматривается двумерный случай, то здесь мы переобозначили оси: продольная координата  $x_z$  теперь обозначена  $z$ , а поперечная —  $x$ ). Заметим, что в задаче при этом появляются два характерных масштаба: безразмерное расстояние до детектора  $Y = kL/v'_{0z}$  и безразмерная длина детектора  $A = ka/v'_{0x}$ .

Данная геометрия задачи позволяет легко найти искомую плотность вероятностей двумя способами: численным моделированием движения частицы и аналитически с помощью формул (9), (11), (13). Первый способ состоит в численном интегрировании стохастических уравнений (2) с учетом условия (1). Интегрирование проводилось методом Эйлера, имеющим первый порядок точности [5]. Полученная при этом гистограмма скоростей частицы в детекторе соответствует “точному” решению граничной задачи. Сравнение результатов численного эксперимента и приближенного решения позволяет проверить обоснованность предположения о практически однократном попадании частицы в детектор.

На рис. 2 приведены гистограмма (ломаная 1) и плотность вероятностей (кривая 2) для продольной составляющей скорости  $\omega(u_z)$  при следующих значениях параметров:  $Y = 1$ ,  $A = 1$ ,  $\alpha_x = 0,01$ ,  $\alpha_z = 1$ ,  $q_x = -1$ ,  $q_z = 0$ . Выбранные параметры соответствуют случаю, когда частица вылетает из источника с начальной скоростью, направленной к детектору, влияние сноса и диффузии в продольном направлении одинаково, а поперечный снос практически отсутствует. Характер движения частицы в этом случае виден из рис. 1: ни одна из траекторий не пересекает поверхность детектора дважды. Считая, однако, теоретически возможным двукратное попадание частицы в детектор, оценим вероятность  $P(2; T)$ . Чтобы получить приближенное выражение для этой вероятности, мы не будем рассматривать случай, когда частица “пролетела мимо” детектора в области  $|x| > a/2$  и возвратилась в него с  $v_z < 0$  из полупространства  $z > L$  (значения параметров задачи, при которых справедливо это допущение, установлены ниже численным расчетом). Это означает, что нечетные пересечения поверхности детектора происходят слева с  $v_z|_{\varphi} \geq 0$ , а четные — справа с  $v_z|_{\varphi} < 0$ . Интегрируя в соответствующих пределах равенство (10), получим

$$J_+ \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_0^{\infty} dv_z G(\vec{v}; \varphi, T) = P(1; T) + P(2; T) + 2P(3; T) + 2P(4; T) + \dots, \quad (14a)$$

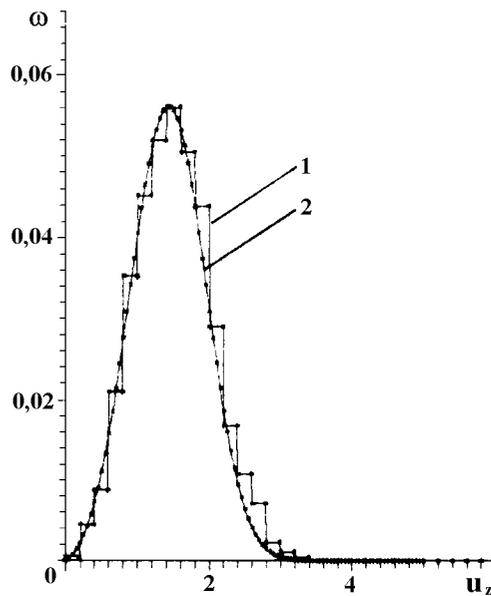


Рис. 2. Гистограмма (1) и плотность вероятностей (2) продольной составляющей скорости частицы в детекторе  $\omega(u_z)$ .

$$J_- \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{\infty}^0 dv_z G(\vec{v}; \varphi, T) = P(2; T) + P(3; T) + 2P(4; T) + 2P(5; T) + \dots \quad (146)$$

Приближенное условие однократности попадания в детектор, записанное в виде  $P(1; T) \gg P(2; T)$ , дает

$$J_+ \approx P(1; T), \quad J_- \approx P(2; T), \quad (15)$$

что позволяет оценить вероятность  $P(2; T)$ . Например, при указанных параметрах расчет вероятности  $P(1; T)$  по формулам (14а), (15) дает расхождение со значениями, вычисленными в соответствии с (12), не более чем на 1%, а вероятность  $P(2; T)$ , найденная по (14б), (15), составляет не более  $10^{-2}P(1; T)$ . Из этого следует, что приближенное равенство (11) действительно дает решение исходной граничной задачи. Кроме того, поскольку вероятность двукратного попадания в детектор мала по сравнению с  $P(1; T)$ , то вероятностями большего числа достижений детектора можно пренебречь. Это означает, что равенства (15) совместно с условием нормировки

$$\sum_{N=1}^{\infty} P(N; T) \approx P(1; T) + P(2; T) = 1 - P(0; T)$$

дают вероятность  $P(0; T)$  того, что частица за интервал времени  $[0; T]$  ни разу не попадет в детектор.

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ЧАСТИЦЫ В ДЕТЕКТОРЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ

Заметим, что задача содержит большое число независимых параметров. Прежде всего естественно выделить три характерных масштаба времени:  $t_0 = L/v_{0z}$  — время, за которое частица попадает в детектор в отсутствие внешнего газа,  $k^{-1}$  — характерное время установления дисперсии скорости частицы,  $T$  — время работы детектора. Далее, есть 2 характерных линейных масштаба: расстояние до

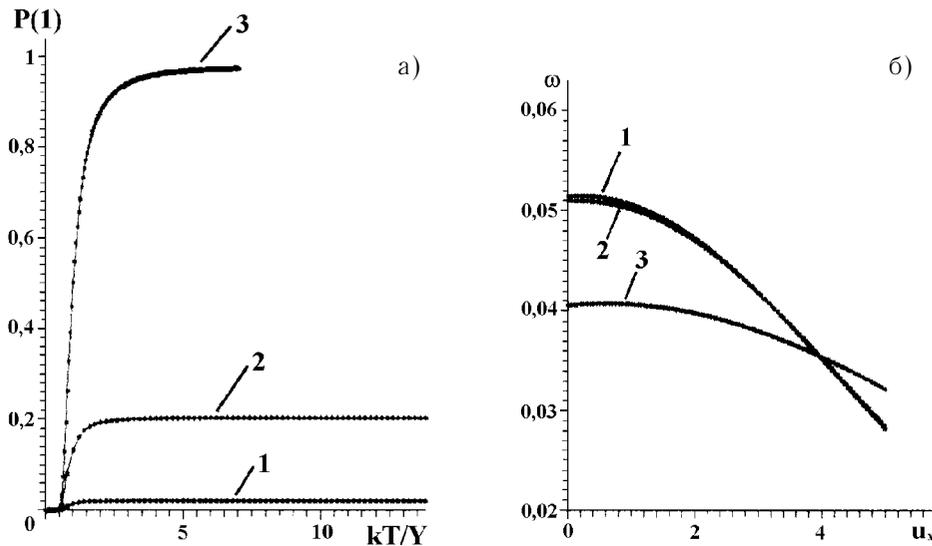


Рис. 3. Зависимость решения от размеров детектора. Параметры задачи:  $q_x = -1$ ,  $q_z = 0$ ;  $\alpha_x = 0,01$ ,  $\alpha_z = 1$ . Кривые 1 —  $A/Y = 0,1$ , 2 —  $A/Y = 1$ , 3 —  $A/Y = 10$ . а) Вероятности однократного достижения детектора. б) Сечения плотности вероятностей  $\omega(u_x, u_z=1)$ .

детектора  $L$  и его длина  $a$ . Кроме того, параметры  $\alpha_x$  и  $\alpha_z$  характеризуют соотношение между регулярным сносом и диффузией в поперечном и продольном направлениях, а параметры  $q_x$ ,  $q_z$  — соотношение скорости внешнего потока и начальной скорости частицы. Зависимость плотности вероятностей скорости частицы в детекторе от параметров  $\alpha_z$ ,  $T/t_0$  и  $Y = kt_0$  была подробно рассмотрена для одномерного случая в [6], поэтому здесь мы исследуем влияние только тех параметров, которые отражают двумерный характер задачи. В рассматриваемом примере это величины  $A/Y$  и  $\alpha_x$ .

Вначале установим, как влияет на вероятность достижения детектора соотношение между его размером  $A$  и расстоянием  $Y$ .

На рис. 3а приведены вероятности однократного достижения  $P(1; T)$ , полученные на основе аналитических формул (14а), (15) для трех значений параметра  $A/Y$ : 0,1, 1, 10 (кривые 1, 2, 3, соответственно; остальные параметры задачи:  $q_x = -1$ ,  $q_z = 0$ ;  $\alpha_x = 0,01$ ,  $\alpha_z = 1$ ). Результат легко понять: в первом случае детектор является практически точкой на плоскости, по которой движется частица, и вероятность попадания в эту точку почти нулевая. В другом предельном случае ( $A/Y = 10$ ) детектор превращается в "стенку", в которую частица обязательно попадает за конечное время (при условии, что боковой снос не сильно превышает продольный). Очевидно, что в этом случае равенства (14а), (14б) становятся строгими (частица не может "пролететь мимо" детектора, и здесь действительно при каждом нечетном пересечении  $v_z \geq 0$ , а при четном —  $v_z < 0$ ). Расчет по формулам (14а) и (14б) с учетом (15) дает  $P(2; T) \approx 10^{-1}P(1; T)$ . Заметим, что такое же соотношение вероятностей имеет место и в одномерной задаче [6], когда частица может двигаться только вдоль прямой, соединяющей источник и детектор. В то же время в двумерном случае при уменьшении размера детектора ( $A/Y \leq 1$ ) уменьшается вероятность попадания в него  $P(1; T)$ , одновременно становится меньше и вероятность двукратного попадания:  $P(2; T) \approx 10^{-2}P(1; T)$ . Эти расчеты подтверждают качественные представления о характере движения частицы и обосновывают предлагаемый метод решения исходной задачи.

Сечения плотности вероятностей  $\omega(u_x, u_z=1)$ , построенные на рис. 3б, показывают, что с увеличением размера детектора распределение параллельной ему составляющей скорости  $u_x$  стремится к равномерному. Действительно, на "бесконечную" стенку может с единичной вероятностью попасть частица с любым значением параллельной составляющей скорости.

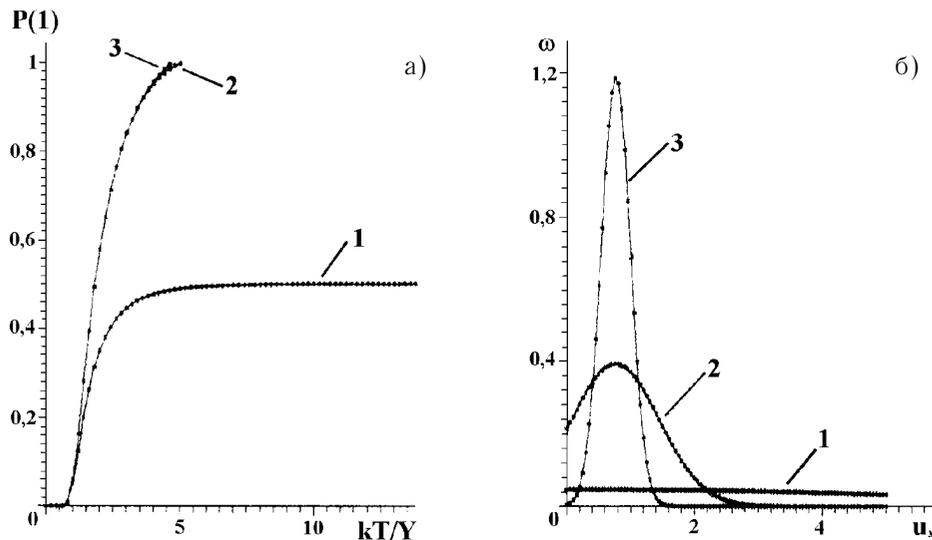


Рис. 4. Зависимость решения от соотношения между диффузией и поперечным сносом. Параметры задачи:  $q_x = q_z = -1$ ;  $\alpha_z = 1$ ;  $A/Y = 5$ . Кривые 1 —  $\alpha_x = 0,01$ , 2 —  $\alpha_x = 1$ , 3 —  $\alpha_x = 10$ . а) Вероятности однократного достижения детектора. б) Сечения плотности вероятностей  $\omega(u_x, u_z=1)$ .

Рассмотрим влияние диффузии, которую характеризуют параметры  $\alpha_x = kv'_{0x}/(2D)$ ,  $\alpha_z = kv'_{0z}/(2D)$ . Вероятность однократного достижения детектора  $P(1; T)$  построена на рис. 4а для случаев  $\alpha_x = 0,01, 1$  и  $10$  (кривые 1, 2, 3, соответственно) при  $A/Y = 10$  (детектор — “бесконечная стенка”) и  $q_x = q_z = -1$  и  $\alpha_z = 1$ . Считая, что скорость поперечного сноса  $v'_{0x}$  одинакова во всех трех случаях, получаем, что при сильной диффузии вероятность достижения частицей даже “бесконечной” стенки асимптотически стремится к  $1/2$ , а с уменьшением коэффициента диффузии  $D$  (с ростом  $\alpha_x$ ) вероятность попадания в детектор увеличивается. Заметим, что рост вероятности  $P(1; T)$  происходит, несмотря на уменьшение скорости сноса частицы к детектору  $v'_{0z}$  (влияние скорости и диффузии в продольном направлении одинаково).

Увеличение коэффициента диффузии  $D$  приводит к увеличению дисперсии скорости  $\sigma_u^2 \cong D/k$ , в результате плотность вероятностей (на рис. 4б приведены сечения  $\omega(u_x, u_z=1)$ ) из-за беспорядочного поперечного движения частиц расплывается и растет вероятность попадания в детектор частиц с большими значениями  $u_x$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы обсудили метод решения задачи о вероятностных характеристиках скорости броуновской частицы, достигающей детектора в течение заданного интервала времени. Рассматриваемая задача сводится к краевой для уравнения Фоккера–Планка и не допускает в общем случае аналитического решения. Мы формально “отбросили” граничное условие, однако, проанализировав влияние различных параметров задачи (размеры детектора, соотношение между сносом и диффузией), указали естественные условия, при которых частица лишь один раз может попасть в детектор. Численные расчеты доказывают справедливость сделанных предположений о характере движения частицы, что позволяет легко найти искомое вероятностное распределение с помощью известного решения задачи Коши.

Сравнение полученной плотности вероятностей с результатами численного эксперимента (который соответствует строгой постановке задачи) дает хорошее совпадение приближенного и точного решений. Анализ зависимости решения от параметров исходной задачи в одно- и двумерном случаях

показывает, что вероятность возвращения частицы в детектор уменьшается с увеличением числа степеней свободы частицы (вероятность двукратного попадания в детектор при движении на плоскости примерно в 10 раз меньше соответствующей вероятности для одномерного случая, когда частица движется только вдоль прямой, соединяющей источник и детектор). Это позволяет считать, что в реальном трехмерном случае и при ограниченных размерах детектора вероятность даже двукратного попадания частицы в детектор за интервал времени  $[0, T]$  пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью однократного попадания. Сказанное означает, что соотношения, справедливые для "прозрачного" детектора, действительно дают искомое вероятностное распределение скоростей частицы в "поглощающем" детекторе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96–15–96722, № 97–02–16521), а также РФФИ-ИНТАС 95–IN–RU–723.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. — М.: Иностран. лит-ра, 1947.
2. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
3. Csányi G. T. Turbulent Diffusion in the Environment. — D. Reidel Publ. Comp., 1980.
4. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно–неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
6. Грибова Е. З., Саичев А. И. //Изв. АН. Сер. Физика атмосферы и океана, 1997. Т. 33. № 5. С. 654.

Нижегородский государственный  
университет, Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
22 апреля 1998 г.

#### CONSTRUCTION OF THE VELOCITY PROBABILITY DISTRIBUTION OF A BROWNIAN PARTICLE

*E. Z. Gribova, A. I. Saichev*

For particles of passive impurity in the external gas stream the velocity probability distribution in the given area (detector) has been found. As the direct calculation of the probability density is a hard problem, the solution is constructed on the basis of the classical problem on the probability distribution of coordinates and velocities of a Brownian particle at the fixed instant of time. The analysis of the solution dependence on the initial parameters gives the conditions, at which the assumptions made on the character of particle movement are valid.

УДК 621.396.96

## ОБНАРУЖЕНИЕ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ РАССЕЯННЫХ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ АКТИВНЫХ ПОМЕХОВЫХ ПОЛЕЙ. II. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

*М. А. Островский, С. А. Рябинин*

Данная работа посвящена исследованию специфически нелинейных функций обнаружителя, требующихся в ситуациях несовпадения закона распределения рассеянной помехи с гауссовым.

### НЕЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УЗКОПОЛОСНОЙ НЕГАУССОВОЙ ПОМЕХИ

Как отмечалось в [1], нелинейное преобразование осуществляется после пространственного обеления помехи, при котором устраняются не только корреляционные, но и любые статистические связи ее пространственных отсчетов. Это непосредственно следует из модели рассеянной помехи, образованной путем пространственно–временной фильтрации белого негауссового поля [2]. При этом нелинейное преобразование (НП) соответствует безынерционному, а его характеристика имеет вид

$$f(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \ln \omega_1(\xi) \quad (1)$$

и целиком зависит от одномерной плотности вероятности (ПВ) обеленных отсчетов помехи.

Для узкополосной помехи  $\xi = \rho e^{j\varphi}$ , путем перехода к полярным координатам как самого отсчета  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , так и дифференцирующего оператора

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = e^{-j\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{j}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

из (1) получаем

$$f(\rho, \varphi) = \xi^* [A(\rho, \varphi) + jB(\rho, \varphi)], \quad (2)$$

где  $A(\rho, \varphi) = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[ \frac{W_2(\rho, \varphi)}{\rho} \right]$ ,  $B(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln W_2(\rho, \varphi)$ ,  $W_2(\rho, \varphi)$  — двумерная ПВ амплитуды  $\rho$  и фазы  $\varphi$  отсчета, \* — знак комплексного сопряжения.

Из (2) следует, что НП узкополосной помехи соответствует комплексной модуляции нелинейной функцией  $A(\rho, \varphi) + jB(\rho, \varphi)$  комплексно–сопряженного отсчета  $\xi^*$  (рис. 1). Поскольку вид преобразования (2) зависит от двумерной ПВ амплитудно–фазовых флуктуаций рассеянного поля, а сама плотность  $W_2(\rho, \varphi)$  зависит от ряда факторов, из которых главенствующим является характер статистики рассеивателей, рассмотрим две типовые ситуации концентрации в пространстве неоднородностей.

1. Пусть среда распространения содержит достаточно большое число равноценно “блестящих” независимых рассеивателей, хаотически равномерно распределенных в объеме  $v$ . Для такого ансамбля можно воспользоваться равномерной моделью ПВ начальных фаз рассеяний [3]

$$W_2(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} P(\rho),$$

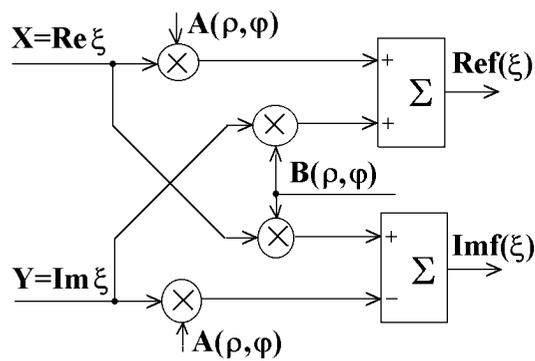


Рис. 1.

где  $P(\rho)$  — закон распределения амплитуд.

В этом случае (2) принимает вид

$$\begin{cases} A(\rho, \varphi) = A(\rho) = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \frac{P(\rho)}{\rho}, \\ B(\rho, \varphi) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

а НП сводится лишь к нелинейной амплитудной модуляции помехи.

Если количество неоднородностей, определяющих межэлементный градиент рассеянной волны, достаточно велико, но конечно, двумерную ПВ квадратурных составляющих  $x$ ,  $y$  приближенно можно записать в виде двумерного ряда Эджворта [4]

$$\begin{aligned} \omega_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ \frac{-(x - m_x)^2 - (y - m_y)^2}{2\sigma^2} \right] \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\gamma_1^{(x)}}{3!} \left[ \left( \frac{x - m_x}{\sigma} \right)^3 - 3 \left( \frac{x - m_x}{\sigma} \right) \right] + \frac{\gamma_2^{(x)}}{4!} \left[ \left( \frac{x - m_x}{\sigma} \right)^4 - 6 \left( \frac{x - m_x}{\sigma} \right)^2 + 3 \right] \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\gamma_1^{(y)}}{3!} \left[ \left( \frac{y - m_y}{\sigma} \right)^3 - 3 \left( \frac{y - m_y}{\sigma} \right) \right] + \frac{\gamma_2^{(y)}}{4!} \left[ \left( \frac{y - m_y}{\sigma} \right)^4 - 6 \left( \frac{y - m_y}{\sigma} \right)^2 + 3 \right] \right\}, \end{aligned}$$

где  $m$ ,  $\sigma^2$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  — среднее, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса, соответственно. Полагая распределение помехи несмещенным ( $m_x = m_y = 0$ ) и симметричным ( $\gamma_1^{(x)} = \gamma_1^{(y)} = 0$ ), а коэффициенты эксцесса квадратурных составляющих одинаковыми ( $\gamma_2^{(x)} = \gamma_2^{(y)} = \gamma_2$ ), переходя к полярным координатам  $\rho$ ,  $\varphi$ , интегрируя двумерную ПВ по фазе в симметричных пределах, а затем подставляя полученное выражение в (3), получим

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^2} \times \\ &\times \frac{\left\{ \frac{\gamma_2}{4!} \left[ \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^2 - 4 \right] + \left( \frac{\gamma_2}{4!} \right)^2 \left[ \frac{1}{16} \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^6 - \frac{3}{2} \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^4 + 9 \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^2 - 12 \right] \right\}}{\left\{ 1 + \frac{\gamma_2}{4!} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^4 - 6 \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^2 + 6 \right] + \left( \frac{\gamma_2}{4!} \right)^2 \left[ \frac{3}{128} \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^8 - \frac{3}{4} \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^6 + \frac{27}{4} \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^4 - 18 \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^2 + 9 \right] \right\}}. \end{aligned} \quad (4)$$

При нормальности ПВ ( $\gamma_2 = 0$ ) амплитудный множитель (4) обращается в константу, а модулятор осуществляет линейное преобразование помехи. Наличие у помехи положительного эксцесса (обострение центральной и подъем периферийной частей распределения) приводит к спадающему характеру модулирующей функции (к значению  $A = 1/\sigma^2$ ). Это означает, что при наличии у помехи редких, но интенсивных выбросов, малые амплитуды помехи пропускаются на выход модулятора с большим коэффициентом усиления, чем сильные выбросы. В случае отрицательного эксцесса (уплощенная центральная и быстро спадающая периферийная части распределения) характеристика  $A(\rho)$  принимает колебательный характер с возрастанием амплитуды к значению  $A = 1/\sigma^2$ . Таким образом, для оптимальной характеристики модулирующей функции выполняется условие

$$\gamma_2 \text{grad}A(\rho) \leq 0. \tag{5}$$

2. Пусть среда наряду с равноценными содержит и независимый доминирующий рассеиватель. Тогда на входе НП присутствует аддитивная смесь двух независимых случайных величин

$$\xi_+ = \rho_+ e^{i\varphi_+} = \rho e^{i\varphi} + \rho_0 e^{i\varphi_0},$$

где  $\rho_+ = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$ ,  $\varphi_+ = \text{arctg} \frac{\rho \sin \varphi + \rho_0 \sin \varphi_0}{\rho \cos \varphi + \rho_0 \cos \varphi_0}$ ,

$\rho_0, \varphi_0$  — соответственно амплитуда и фаза доминирующего рассеяния.

Вводя переменные  $\rho_+ = g_1(\rho_0; \rho; \varphi_0; \varphi)$ ,  $\varphi_+ = g_2(\rho_0; \rho; \varphi_0; \varphi)$ ,  $\rho^* = \rho = g_3(\rho_0; \rho; \varphi_0; \varphi)$ ,  $\varphi^* = \varphi = g_4(\rho_0; \rho; \varphi_0; \varphi)$ , полагая функции  $g_i$  аналитическими с однозначными обратными преобразованиями  $\rho_0 = h_1(\rho_+; \rho^*; \varphi_+; \varphi^*)$ ,  $\varphi_0 = h_2(\rho_+; \rho^*; \varphi_+; \varphi^*)$ ,  $\rho = h_3(\rho_+; \rho^*; \varphi_+; \varphi^*)$ ,  $\varphi = h_4(\rho_+; \rho^*; \varphi_+; \varphi^*)$  и отличным от нуля Якобианом

$$|D| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \rho_+} & \frac{\partial h_1}{\partial \rho^*} & \frac{\partial h_1}{\partial \varphi_+} & \frac{\partial h_1}{\partial \varphi^*} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \rho_+} & \frac{\partial h_2}{\partial \rho^*} & \frac{\partial h_2}{\partial \varphi_+} & \frac{\partial h_2}{\partial \varphi^*} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| -\frac{\partial h_1}{\partial \rho_+} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \varphi_+} + \frac{\partial h_2}{\partial \rho_+} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \varphi_+} \right| =$$

$$= \frac{\rho_+}{\sqrt{(\rho_+)^2 + (\rho^*)^2 - 2\rho_+\rho^* \cos(\varphi_+ - \varphi^*)}},$$

первоначально запишем выражение для четырехмерной ПВ смеси

$$W_4(\rho_+; \rho^*; \varphi_+; \varphi^*) = |D| \omega_4(h_1; h_2; h_3; h_4).$$

Затем, учитывая статистическую независимость доминирующего рассеяния от равноценных  $\omega_4(h_1; h_2; h_3; h_4) = \omega_{12}(h_1; h_2) \omega_{34}(h_3; h_4)$ , независимость флуктуаций амплитуд от флуктуаций фаз

$$\omega_{12}(h_1; h_2) = P_0 \left[ \sqrt{(\rho_+)^2 + (\rho^*)^2 - 2\rho_+\rho^* \cos(\varphi_+ - \varphi^*)} \right] \times$$

$$\times Q_0 \left[ \text{arctg} \frac{\rho_+ \sin \varphi_+ - \rho^* \sin \varphi^*}{\rho_+ \cos \varphi_+ - \rho^* \cos \varphi^*} \right],$$

$$\omega_{34}(h_3; h_4) = \frac{1}{2\pi} P(\rho^*),$$

интегрируя полученное выражение по аргументам  $\rho^*$  и  $\varphi^*$ , получим искомое выражение для двумерной ПВ смеси

$$W_2(\rho_+; \varphi_+) = \frac{\rho_+}{2\pi} \int_0^\infty P(\rho^*) \int_{-\pi}^\pi P_0 \left[ \sqrt{(\rho_+)^2 + (\rho^*)^2 - 2\rho_+\rho^* \cos(\varphi_+ - \varphi^*)} \right] \times \\ \times Q_0 \left[ \operatorname{arctg} \frac{\rho_+ \sin \varphi_+ - \rho^* \sin \varphi^*}{\rho_+ \cos \varphi_+ - \rho^* \cos \varphi^*} \right] \frac{d\rho^* d\varphi^*}{\sqrt{(\rho_+)^2 + (\rho^*)^2 - 2\rho_+\rho^* \cos(\varphi_+ - \varphi^*)}}, \quad (6)$$

где  $P_0, P$  — закон распределения амплитуд соответственно доминирующего и равноценных рассеяний,  $Q_0$  — закон распределения фазы доминирующего рассеяния.

Как видно из (4), двумерную ПВ аддитивной смеси не удастся выразить в явном виде без указания конкретных распределений  $P, P_0, Q_0$ . Однако, учитывая преобладающее влияние в смеси доминирующего рассеяния, нахождение этой функции становится возможным путем разложения подынтегрального выражения (6) в двучленный ряд Тейлора по степеням  $\rho^*/\rho_+$

$$W_2(\rho_+; \varphi_+) \approx Q_0(\varphi_+) \left[ P_0(\rho_+) \left( 1 + \frac{\langle \rho^2 \rangle}{4\rho_+^2} \right) - \frac{\langle \rho^2 \rangle}{4\rho_+^2} \cdot \frac{\partial P_0(\rho_+)}{\partial \rho_+} \right]. \quad (7)$$

Из (7) следует, что двумерная ПВ описывается факторизующейся функцией от амплитуды  $\rho_+$  и фазы  $\varphi_+$  смеси. Следовательно, и алгоритм НП (2) в этом случае предусматривает отдельную амплитудную и фазовую обработки принятой выборки. Так, при явной доминированности наиболее интенсивного рассеяния, когда справедлива аппроксимация законов распределения [5]

$$\begin{cases} P_0(\rho_+) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_0}} \exp \left[ -\frac{(\rho_+ - \rho_0)^2}{2\sigma^2} \right], \\ Q_0(\varphi_+) \approx \frac{\rho_+}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\rho_+\varphi_+)^2}{2\sigma^2} \right], \end{cases}$$

из (2) и (7) следуют приближенные зависимости составляющих модулирующей функции

$$\begin{cases} A(\rho_+) \approx \frac{1}{2\rho_+^2} \left( 1 - \frac{\langle \rho^2 \rangle}{\sigma^2} \right) \\ B(\varphi_+) \approx -\frac{\varphi_+}{\sigma^2}. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, оптимальное НП узкополосной помехи сводится к ее амплитудной модуляции в случае равноценных рассеивателей (4) и отдельной амплитудной и линейной фазовой обработкам (8) в случае доминирующих рассеяний. Амплитудная модулирующая функция в последнем случае имеет закон, пропорциональный  $\rho^{-2}$ , и является быстро спадающей с ростом аргумента. Исследованные характеристики НП можно рассматривать как предельные, т. к. в реальных условиях возможно произвольное соотношение между интенсивностями равноценных и доминирующих рассеяний. Хотя требуемую характеристику НП в произвольном случае найти не удастся, весь предыдущий анализ показывает, что модулирующие функции достаточно хорошо разлагаются в ряды по степеням  $(\rho/\sigma)$  для амплитудной и по степеням  $\varphi$  для фазовой обработки. Поэтому для произвольной ПВ  $\omega_1(\xi)$  можно

записать в достаточно общей форме

$$\begin{cases} \hat{A}(\rho, \vec{C}) = \sum_{\nu=-N_1}^N C_\nu \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^\nu, \\ \hat{B}(\varphi, \vec{E}) = \sum_{\mu=1}^M E_\mu \varphi^\mu, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\hat{A}(\rho)$  и  $\hat{B}(\varphi)$  — соответственно амплитудный и фазовый аппроксимирующие многочлены,  $C_\nu$  и  $E_\mu$  — коэффициенты разложения,  $N_1$  — максимальный отрицательный показатель степени амплитудного степенного полинома, равный двум (8).

### ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Выражение (9) указывает на возможность оптимизации полиномов  $\hat{A}(\rho, \varphi, \vec{C})$  и  $\hat{B}(\rho, \varphi, \vec{E})$  путем соответствующего подбора вектор-параметров  $\vec{C}$  и  $\vec{E}$ , при которой функции (9) мало отличались бы от оптимальных (2). В качестве критерия оптимизации может использоваться, например, усиленный критерий минимума квадрата расстояния [6] между этими функциями

$$\begin{cases} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \rho^{N_1} [\hat{A}(\rho, \varphi, \vec{C}) - A(\rho, \varphi)]^2 W_2(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \min, \\ \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \rho^{N_1} [\hat{B}(\rho, \varphi, \vec{E}) - B(\rho, \varphi)]^2 W_2(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \min. \end{cases}$$

Умножение подынтегральных функций на  $\rho^{N_1}$  (усиление критерия) вызвано необходимостью сохранения их непрерывности при стремлении  $\rho$  к нулю. Поскольку оптимальные функции  $A(\rho, \varphi)$  и  $B(\rho, \varphi)$  (2) не зависят от оптимизируемых параметров  $\vec{C}$  и  $\vec{E}$ , систему оптимизационных функционалов можно упростить как для амплитудного

$$I_1(\hat{A}) = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \rho^{N_1} [\hat{A}^2(\rho, \varphi, \vec{C}) - 2\hat{A}(\rho, \varphi, \vec{C}) A(\rho, \varphi)] W_2(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \min, \quad (10)$$

так и для фазового полиномов

$$I_2(\hat{B}) = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \rho^{N_1} [\hat{B}^2(\rho, \varphi, \vec{E}) - 2\hat{B}(\rho, \varphi, \vec{E}) B(\rho, \varphi)] W_2(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \min. \quad (11)$$

Введем множество  $L_1$  однозначных, непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций  $\rho^{N_1} \hat{A}(\rho, \varphi, \vec{C})$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \rho^{N_1-1} \hat{A}(\rho, \varphi, \vec{C}) W_2(\rho, \varphi) = 0. \quad (12)$$

Несложно показать, что условие (12) выполняется для большинства известных ПВ и степенных полиномов с максимальным отрицательным показателем, не превышающим значения  $N_1$ . Для такого множества при  $N_1 = 2$ , путем подстановки (2) в (10), выполняя интегрирования по частям второго слагаемого (10), получим преобразованный функционал качества оптимизации

$$I_1(\hat{A}) = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \left\{ \rho^2 \hat{A}^2(\rho, \varphi, \vec{C}) - \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho^2 \hat{A}(\rho, \varphi, \vec{C}) \right] \right\} W_2(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \min. \quad (13)$$

Вводя далее множество  $L_2$  функций  $\rho^{N_1} \hat{B}(\rho, \varphi, \vec{E})$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} \hat{B}(\rho, \varphi, \vec{E}) W_2(\rho, \varphi) = 0,$$

аналогично можно получить функционал качества для фазового полинома

$$I_2(\hat{B}) = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \left\{ \rho^2 \hat{B}^2(\rho, \varphi, \vec{E}) + 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{B}(\rho, \varphi, \vec{E}) \right\} W_2(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \min. \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) фактически означают, что для отыскания оптимальных значений вектор-параметров  $\vec{C}$  и  $\vec{E}$  требуется минимизация усредненных по ансамблю значений функционалов от аппроксимирующих функций (9) в фигурных скобках. Однако нахождение ансамблевых средних возможно только при полной известности двумерной ПВ помехи. Поскольку в реальных условиях это недостижимо, воспользуемся известным в литературе алгоритмом стохастической аппроксимации [7], заменяющим в (13) и (14) ансамблевое усреднение усреднением по времени

$$\begin{cases} \frac{d\vec{C}}{dt} = -\Gamma_1 \nabla_{\vec{C}} \left\{ \rho^2 \hat{A}^2(\rho, \varphi, \vec{C}) - \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho^2 \hat{A}(\rho, \varphi, \vec{C}) \right] \right\}, \\ \frac{d\vec{E}}{dt} = -\Gamma_2 \nabla_{\vec{E}} \left\{ \rho^2 \hat{B}^2(\rho, \varphi, \vec{E}) + 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{B}(\rho, \varphi, \vec{E}) \right\}, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — коэффициенты сходимости.

Алгоритмы (15) превращают оптимизационную задачу аппроксимации функций (2) с помощью степенных полиномов в задачу адаптивной настройки параметров этих полиномов при неизвестной статистике помехи. Подставляя в (15) зависимости (9), получаем выражения для оптимальных управлений параметрами полиномиальных модулирующих функций  $\hat{A}(\rho, \varphi)$  и  $\hat{B}(\rho, \varphi)$

$$\begin{cases} \frac{dC_k}{dt} = -2\Gamma_1 \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^k \left[ \sum_{\nu=-N_1}^N C_\nu \rho^2 \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^\nu - 2-k \right], \quad k = -N_1, \dots, 0, \dots, N, \\ \frac{dE_m}{dt} = -2\Gamma_2 \left[ \rho^2 \sum_{\mu=1}^M E_\mu \varphi^{\mu+m} + m\varphi^{m-1} \right], \quad m = 1, 3, 5, \dots, M. \end{cases} \quad (16)$$

Отметим, что реальные законы распределения начальных фаз рассеяний обладают свойством симметрии. При этом фазовый модулирующий множитель  $\hat{B}(\rho, \varphi)$  является нечетной функцией, т. е. содержит только нечетные степени аргумента  $\varphi$ .

В соответствии с (16), приведем примеры структурных схем формирования модулирующих функций  $\hat{A}(\rho, \varphi, \vec{C})$  при  $\sigma = 1, N_1 = N = 1$  (рис. 2) и  $\hat{B}(\rho, \varphi, \vec{E})$  при  $M = 3$  (рис. 3).

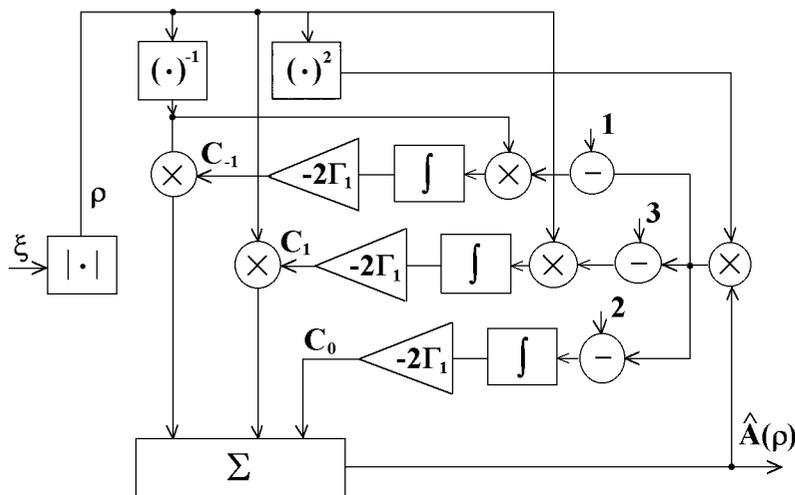


Рис. 2.

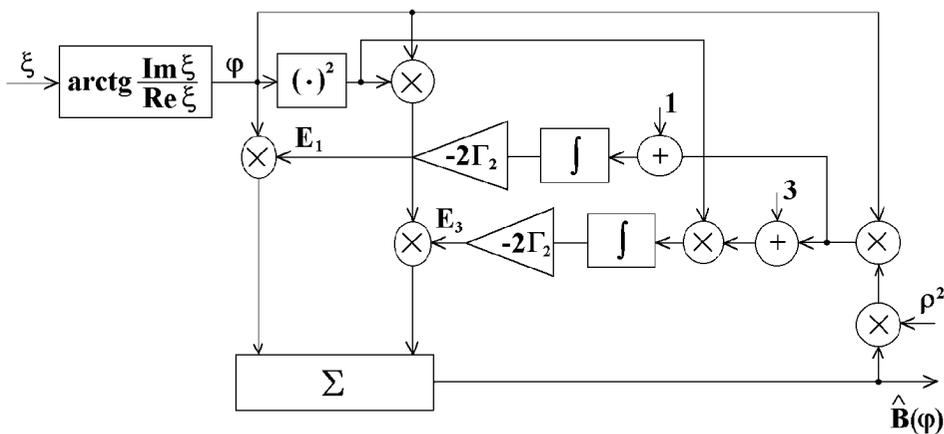


Рис. 3.

**АНАЛИЗ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБНАРУЖИТЕЛЯ С АМПЛИТУДНЫМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ МОДУЛЯТОРОМ**

Для анализа потенциальной эффективности обнаружителя с нелинейным компенсатором активных помех необходимо сравнить его характеристики обнаружения с характеристиками аналогичного линейного устройства при одинаковых помеховых воздействиях. В качестве последнего может быть рассмотрен пространственно–временной обнаружитель, оптимальный при гауссовом помеховом воздействии [1]. Близкая задача для класса немодуляционных НП решалась в [8]. Сущность ее состояла в том, что при достаточно больших, но конечных значениях пространственно–временной базы сигнала поля  $L$ , равной произведению числа элементов линейной антенной решетки, количества импульсов в сигнальном пакете и коэффициента сложности сигнала, накопительные устройства обнаружителя почти нормализуют случайные отсчеты помехи на входе порогового устройства. Если пространственное обеление и восстановление первичной волны помехи осуществляется в обнаружителе

идеально, то одномерный закон распределения достаточно точно описывается Эджвортской моделью [4], а коэффициент эксцесса выступает в качестве приближенной меры негауссовости помехи.

В [8], на основании анализа этой модели приведено выражение выигрыша в отношении пороговых сигналов (ОПС) оптимального (т. е. содержащего НП) и линейного обнаружителей

$$q \approx \frac{z_0}{z_0} \sqrt{\chi_2^{(f)} \chi_2^{(\xi)}}, \quad (17)$$

где  $\chi_2^{(\xi)}, \chi_2^{(f)}$  — значения вторых кумулянтов на входе и выходе НП,  $z_0, z_0$  — значение нормированных порогов линейного и оптимального обнаружителей. Величины порогов, входящие в (17), определяются из приведенного там же выражения вероятности ложных тревог

$$F_{\text{лт}} = 1 - \Phi(z_0) + \frac{\gamma_2}{4!} \omega_1(z_0)(z_0^3 - 3z_0), \quad (18)$$

где  $\gamma_2$  — коэффициент эксцесса процесса на входе НП, если рассматривается линейный обнаружитель и на его выходе для оптимального устройства;  $z_0 = z_0$  — для линейного обнаружителя,  $z_0 = z_0$  — для оптимального обнаружителя;  $\Phi(z)$  — интеграл вероятности;  $\omega_1(z)$  — гауссова ПВ.

Таким образом, для определения выигрыша ОПС, т. е. выигрыша за счет использования НП, требуется нахождение вторых кумулянтов и коэффициентов эксцесса входного и выходного процессов комплексного модулятора с характеристикой (9). Для нахождения этих характеристик рассмотрим простейший случай помехового воздействия с равномерным законом распределения фазы. При этом НП осуществляет только амплитудную модуляцию помехи, а отмеченные кумулянты равны

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_2^{(\xi)} = \frac{\langle \rho^2 \rangle}{2}, \\ \chi_2^{(f)} = \frac{\langle \rho^2 \hat{A}^2(\rho) \rangle}{2}, \\ \gamma_2^{(\xi)} = \frac{3\langle \rho^4 \rangle}{2\langle \rho^2 \rangle^2} - 3, \\ \gamma_2^{(f)} = \frac{3\langle \rho^4 \hat{A}^4(\rho) \rangle}{2\langle \rho^2 \hat{A}^2(\rho) \rangle^2} - 3. \end{array} \right. \quad (19)$$

Рассмотрим далее показательную—степенную модель закона распределения амплитуд

$$P(\rho) = \frac{\alpha \beta^{-2/\alpha}}{\Gamma(\alpha/2)} \rho \exp\left(-\frac{\rho^\alpha}{\beta}\right), \quad (20)$$

охватывающую достаточно широкий класс ПВ и сравнительно легко позволяющую выразить коэффициент эксцесса помехи через параметры модели  $\alpha > 0, \beta > 0$  и гамма функцию  $\Gamma(\cdot)$ . Для приведенной модели (20) при различных значениях  $F_{\text{лт}}, \gamma_2^{(\xi)}, L$  и порядков  $N$  модулирующего полинома  $\hat{A}(\rho)$  были определены выигрыши ОПС.

Так, разница выигрышей  $q$  при  $N_1 = +1$  и возрастании значения  $N$  от трех до пяти не превышает десятых долей децибела. Поэтому использование трехчленного полинома является уже достаточным для обеспечения его высокой эффективности. При возрастании объема накопления  $L$  величина выигрыша ОПС уменьшается до величины выигрыша в отношении сигнал/помеха [8]. Объясняется это нормализующим действием накопительных устройств, сводящих к минимуму положительный эффект

от нелинейной обработки негауссовых процессов. Уменьшение  $F_{\text{ЛТ}}$  приводит к росту  $q$ , что с очевидностью доказывает сильное влияние формы "хвостов" ПВ на величину вероятности ложных тревог. Аналогично, возрастание степени отличия ПВ помехи от гауссовой (возрастание эксцесса) приводит к увеличению выигрыша оптимального устройства. Результаты анализа обнаружителя при  $N = 3$ ,  $L = 100$ ,  $F_{\text{ЛТ}} = 10^{-3} \div 10^{-6}$  и различных значениях коэффициента эксцесса помехи в виде зависимости  $q(\gamma_2)$  приведены на рис. 4.

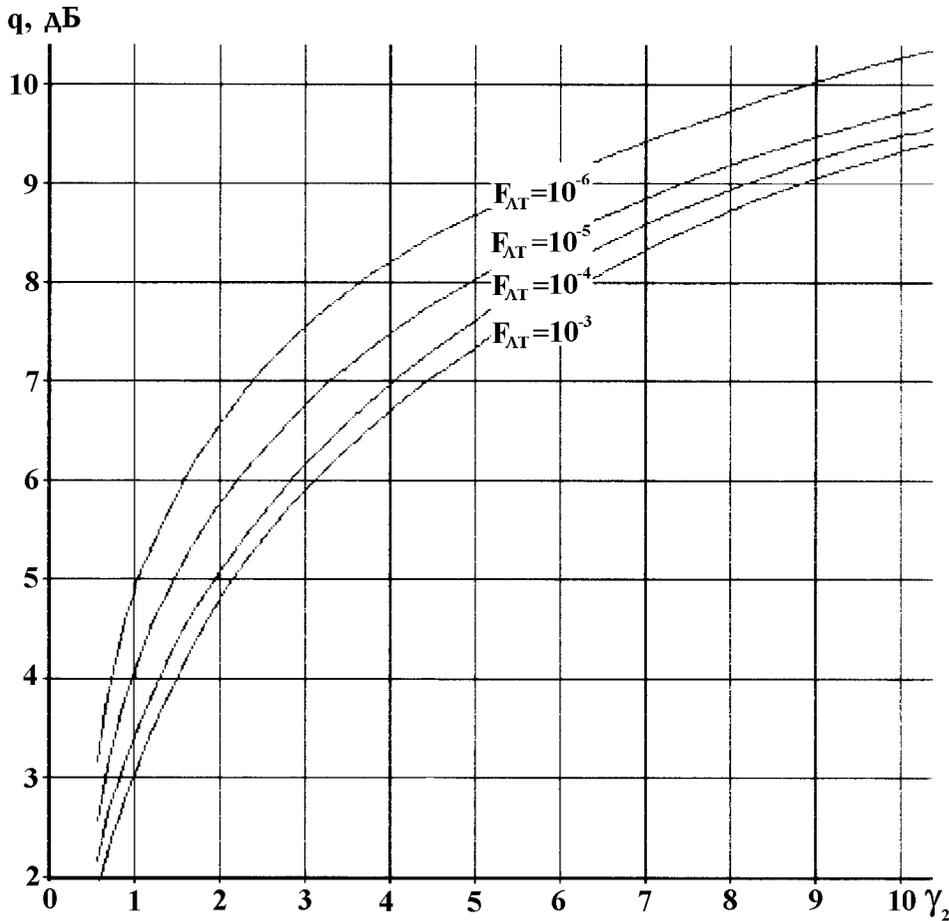


Рис. 4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Островский М. А. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1998. Т. 41. № 9. С. 1177.
2. Островский М. А. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1997. Т. 40. № 6. С. 769.
3. Фельдман Ю. И., Мандуровский И. А. Теория флуктуаций локационных сигналов, отраженных распределенными целями. — М.: Сов. радио, 1988.
4. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
5. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966.
6. Канторович Л. В., Акипов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
7. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1970.

8. Островский М. А. // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника, 1990. Т. 33. № 11. С. 75.

ВЗРКУ, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
31 октября 1997 г.

**DETECTION OF WEAK SIGNALS ON THE BACKGROUND OF ARTIFICIAL NOISES, SCATTERED BY IRREGULAR MEDIUM.**

**II. GENERAL CASE**

*M. A. Ostrovsky, S. A. Ryabinin*

In this article specific the nonlilear functions of the detector for non-gaussian scattered artifical noise are investigated.

УДК 621.372.8

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН В СВЯЗАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

*А. Е. Свеженцев*

В рамках строгой электродинамической теории изучаются волны в системе из двух связанных цилиндрических полосковых линий передачи (ЦПЛ) с круглой формой поперечного сечения. Для симметрично расположенных связанных ЦПЛ исследован эффект расщепления спектра и помимо строгого анализа получено приближенное дисперсионное уравнение для основных волн. Наряду со связанными ЦПЛ, обладающими одной и двумя плоскостями симметрии, рассмотрена структура, состоящая из цилиндрической щелевой линии (ЦЩЛ) и ЦПЛ. Проведен анализ дисперсионных характеристик и структуры электромагнитного поля собственных волн. Обнаружена новая закономерность проявления эффекта взаимной трансформации типов волн.

### ВВЕДЕНИЕ

Построение строгих электродинамических моделей структур, состоящих из двух металлодиэлектрических волноводов, представляет не только теоретический интерес, но также является полезным для целого ряда практических приложений, включая направленные ответвители, фильтры, антенны и другие устройства [1]. В [2] проведен строгий электродинамический анализ характеристик волн в системе из двух связанных цилиндрических щелевых линий передачи, щели которых ориентированы напротив друг друга, а структура в целом всегда обладала горизонтальной плоскостью симметрии. Решение соответствующей электродинамической задачи для волн в системе из двух произвольно ориентированных цилиндрических щелевых/полосковых линий (ЦЩЛ/ЦПЛ) было получено в [3] с помощью метода задачи Римана—Гильберта и теорем сложения для цилиндрических функций.

Настоящая статья посвящена исследованию волн в системе из двух ЦПЛ, поперечное сечение которых изображено на рис. 1. Связанные ЦПЛ состоят из двух параллельно расположенных круглых диэлектрических стержней с радиусами  $a_1$  и  $a_2$ , на поверхностях которых находятся продольные бесконечно тонкие и идеально проводящие металлические полоски с угловыми размерами  $2\delta_1$  и  $2\delta_2$ , соответственно; расстояние между центрами волноводов  $O_1O_2 = L$ . Отличие ЦПЛ и ЦЩЛ является условным, таким, что одиночная структура с шириной полоски  $2\delta < 180^\circ$  является ЦПЛ, а с угловой шириной полоски  $2\delta > 180^\circ$  — ЦЩЛ. Эта работа является логическим продолжением статьи [2], затрагивая до сих пор не рассмотренные вопросы. Так, в частности, здесь не только подробно исследуются свойства волн в симметрично расположенных ЦПЛ, обладающих как одной, так и двумя плоскостями симметрии, а также исследованы несимметричные структуры, состоящие из ЦПЛ и ЦЩЛ. Существенным новым шагом является расчет структуры электромагнитного поля, что позволило детально исследовать новые особенности проявления эффекта взаимной трансформации типов волн в связанных структурах.

### 1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛН В СВЯЗАННЫХ ЦПЛ/ЦЩЛ

В [3] показано, что спектральные значения (постоянные распространения)  $h$  волн в связанных ЦЩЛ/ЦПЛ подчиняются дисперсионному уравнению

$$\det[\mathbf{I} - \mathbf{A}(h)] = 0, \quad (1)$$

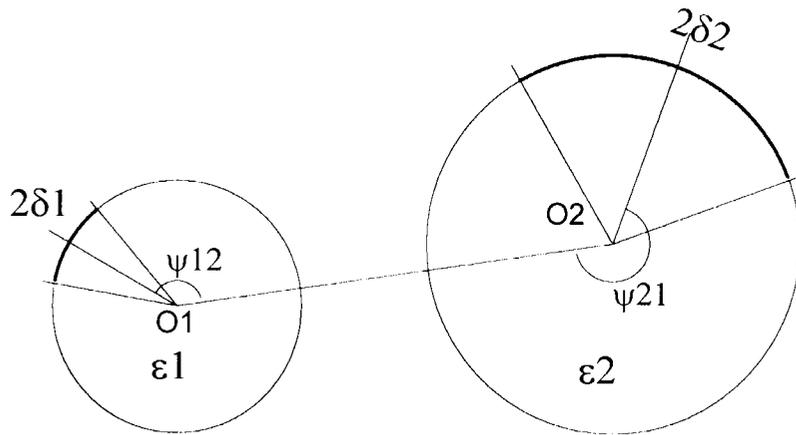


Рис. 1.

где  $(h)$  — ядерная оператор-функция, представляющая собой блочную матрицу размера  $4 \times 4$  с блоками  ${}^{(i,j)}(h)$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , причем каждый блок — матрица бесконечной размерности:  $bfA^{(i,j)}(h) = \{A_{m,n}^{(i,j)}\}_{m,n=-\infty}^{\infty}$ ,  $\mathbf{I}$  — единичный оператор.

Строение  $bfA(h)$  таково, что блоки с индексами  $i, j = 1, 2$  и  $i, j = 3, 4$  соответствуют первой и второй одиночным ЦЩЛ/ЦПЛ, а блоки, соответствующие  $i = 1, 2, j = 3, 4$  и  $i = 3, 4, j = 1, 2$ , описывают взаимное влияние двух структур. Далее, для удобства, будем придерживаться обозначений, принятых в [3]. Для нахождения в общем случае комплексных корней (спектральных значений) редуцированного дисперсионного уравнения (1) был реализован алгоритм, основанный на методе Ньютона. При этом, если значение порядка редукции ПР каждого блока полагать равным

$$\text{ПР} = \text{ENT} \{ \max(|\bar{x}_{1,2}|, |y_{1,2}|) \} + 3,$$

где  $\bar{x}_{1,2}^2 = (ka_{1,2})^2[(h/k)^2 - 1]$ ,  $y_{1,2}^2 = (ka_{1,2})^2[\varepsilon_{1,2} - (h/k)^2]$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве, ENT означает целую часть, то это обеспечивает три значащие цифры после запятой при вычислении спектрального значения.

## 2. ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ КВАЗИ-Т ВОЛН В СИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ ЦПЛ

Очевидный интерес представляет рассмотрение симметрично расположенных связанных ЦПЛ, изображенных на рис. 2. Такая структура имеет две плоскости симметрии: горизонтальную, проходящую через центры волноводов, и вертикальную, расположенную посередине между ними.

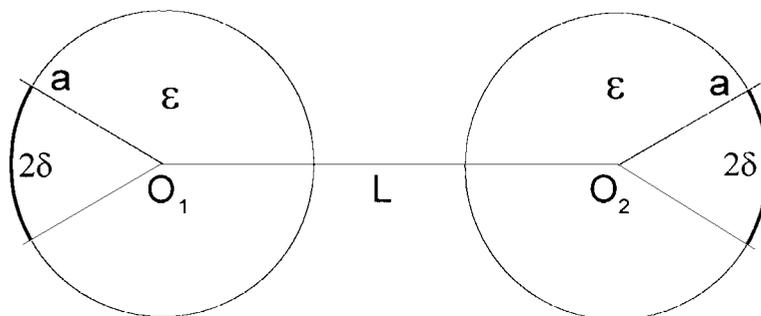


Рис. 2.

Отметим, что в случае симметрии порядок исследуемого дисперсионного уравнения может быть понижен и относительно каждой плоскости симметрии возможно выделение независимых семейств волн:  $H_z^+/E_z^-$  и  $H_z^-/E_z^+$  (знак  $+$  ( $-$ ) означает четность (нечетность) соответствующей  $z$ -й компоненты поля относительно указанной плоскости симметрии), которые соответствуют фактически двум независимым задачам, а именно: с магнитной и электрической стенками, соответственно. Однако, более существенные упрощения последуют, когда полоски достаточно узкие, т. е.  $\delta_{1,2} = \delta \ll 1$ , и  $|\bar{x}|, |y| < 1$  (длинноволновое приближение). В этом случае, как показал асимптотический анализ матричных элементов, сложное дисперсионное уравнение (1) в нулевом приближении ( $m, n = 0$ ) может быть сведено к более простому уравнению, в котором реальный вклад дают только элементы  $A_{0,0}^{(1,1)} = A_{0,0}^{(3,3)}$  и  $A_{0,0}^{(1,3)} = A_{0,0}^{(3,1)}$ . В результате получим приближенные дисперсионные уравнения для двух квази-Т волн в симметрично связанных ЦПЛ:

$$1 - A_{0,0}^{(1,1)}(h) = \pm A_{0,0}^{(1,3)}(h), \quad (2)$$

где знак  $\pm$  соответствует магнитной (электрической) стенке в вертикальной плоскости симметрии. Используя выражения, приведенные в [3], уравнения (2) сводятся к виду

$$1 - \Delta_0^{(E)} T_{00}(u) = \pm \ln[(\gamma\sigma\bar{x})/2] / \ln[(\gamma\bar{x})/2], \quad (3)$$

где

$$\Delta_0^{(E)} = \frac{(\bar{x}^2 - y^2)}{2(\varepsilon + 1)\bar{x}^2 \ln[(\gamma\bar{x})/2]}, \quad T_{00}(-u) = -2 \ln[\sin(\delta/2)],$$

$$\bar{x}^2 = (ka)^2[(h/k)^2 - 1], \quad y^2 = (ka)^2[\varepsilon - (h/k)^2],$$

где  $\gamma = 1,78107$  — постоянная Эйлера,  $\sigma = L/a$ . Уравнения (3) были решены методом Ньютона. Два найденных решения соответствуют четной и нечетной полосковым волнам: квази- $T_0^+$  и  $T_0^-$ . Зависимости коэффициентов замедления  $h/k$  квази- $T_0^-$ ,  $T_0^+$  волн (кривые 1 и 2, соответственно) от нормированного расстояния между центрами волноводов  $L/a$  даны на рис. 3 и соответствуют параметрам  $\delta = 1^\circ$ ,  $\varepsilon = 2,25$  и  $ka = 0,2$ . На этом же рисунке изображены аналогичные зависимости (кривые 1а и 2а), рассчитанные в результате численного анализа точного дисперсионного уравнения (1). Сравнение показывает, что погрешность расчета по приближенному уравнению (3) в данном случае не превышает 0,1%.

Отметим, что рассмотренные здесь четная и нечетная полосковые волны относятся к тому семейству волн, которое соответствует магнитной стенке в горизонтальной плоскости симметрии.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА СТРОГОГО ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛН В СВЯЗАННЫХ ЦПЛ

Вернемся к анализу волн в симметрично расположенных ЦПЛ. Как видно из рис. 3, из двух квази- $T_0$  волн нечетная квази- $T_0^-$ , соответствующая электрической стенке в вертикальной плоскости симметрии, имеет больший коэффициент замедления. Структура поперечного электрического поля квази- $T_0^-$  и  $T_0^+$  волн изображена на рис. 4, 5, соответственно. Для квази- $T_0^-$  силовые линии поперечного электрического поля направлены от одной полоски к другой, соответствуя противофазному распределению поля двух ЦПЛ. Поле четной квази- $T_0^+$  волны образовано путем суперпозиции синфазных распределений поля для двух ЦПЛ. Отметим, что противофазное распределение поля, соответствующее квази- $T_0^-$  волне, обеспечивает несколько большую концентрацию поля в диэлектрических стержнях и, следовательно, больший коэффициент замедления, чем синфазное распределение поля квази- $T_0^+$  волны.

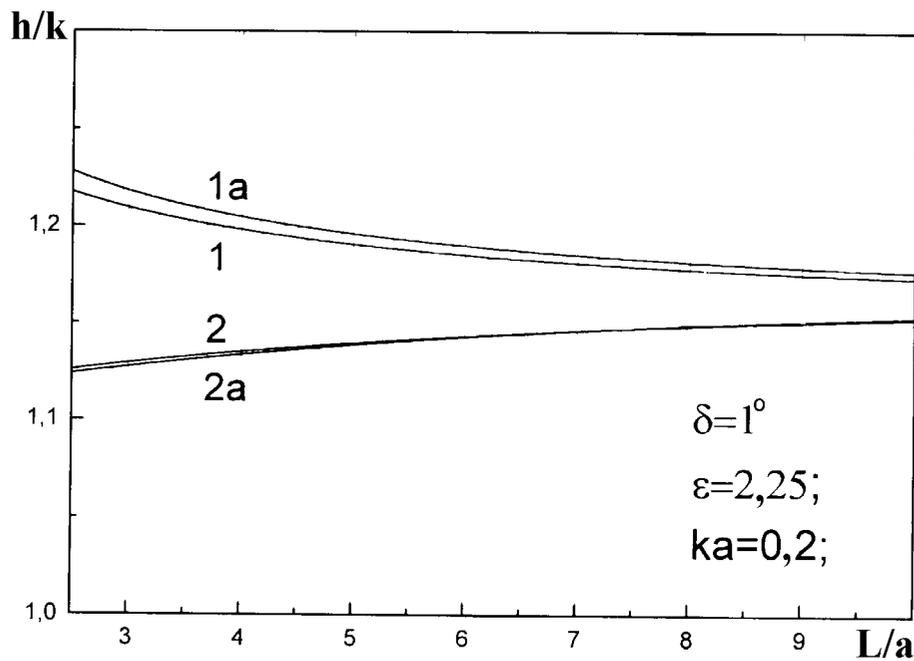


Рис. 3

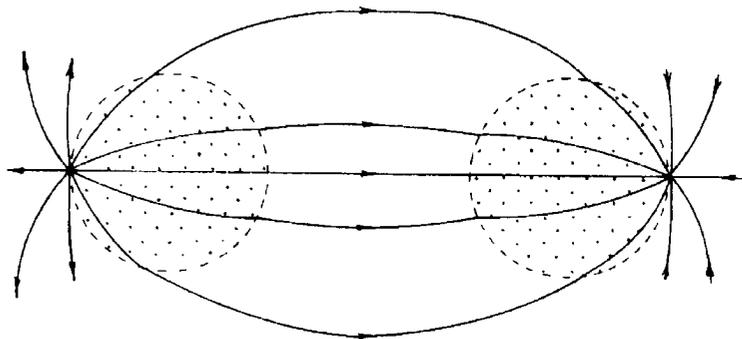


Рис. 4.

Таким образом, эффект возникновения, благодаря симметрии относительно вертикальной плоскости четной и нечетной волн (квази- $T_0^+$ ,  $T_0^-$ ), является эффектом расщепления спектра по отношению к квази- $T_0$  волне в одиночной ЦПЛ.

Пусть симметрия связанных ЦПЛ относительно горизонтальной плоскости будет нарушена путем разворота линий на одинаковый угол по часовой и против часовой стрелки, что соответствует  $\Psi_{12} = 45^\circ$  и  $\Psi_{21} = 315^\circ$ . Дисперсионные характеристики нечетной квази- $T_0^-$  волны (кривые под номерами 1 и 2) и четной квази- $T_0^+$  волны (кривые под номерами 4 и 5) в такой модификации связанных ЦПЛ, обладающей только вертикальной плоскостью симметрии, изображены на рис. 6 для различных нормированных расстояний  $L/a$  между центрами линий.

Опорная дисперсионная кривая (под номером 3), соответствующая квази- $T_0$  волне в одиночной ЦПЛ, показывает, что степень расщепления спектра (модуль разности между нормированными постоянными распространения четной и нечетной волн в связанных ЦПЛ) тем сильнее, чем меньше расстояние между центрами линий. Когда параметр  $ka$  стремится к нулю, нормированные спектральные значения  $h/k$  квази- $T_0^+$ ,  $T_0^-$  волн ведут себя различным образом, а именно: для квази- $T_0^+$  волны  $h/k$  стремится к единице, т. е. ведет себя так же, как и коэффициент замедления основной квази- $T_0$  волны в одиноч-

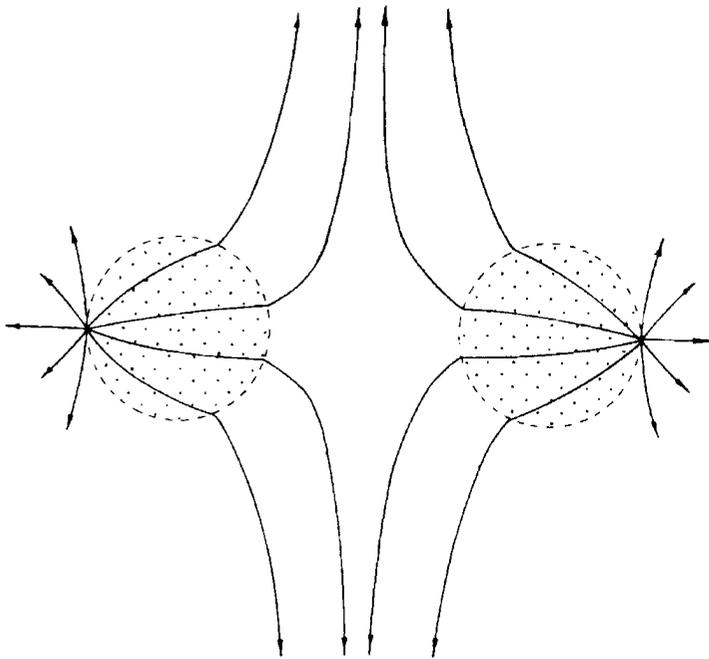


Рис. 5.

ной ЦПЛ [4]. Для квази- $T_0^-$  волны  $h/k$  стремится к некоторой постоянной величине (статическому пределу), что характерно только для волн двухпроводных линий, при этом силовые линии поперечного электрического поля направлены от одного проводника к другому. Отметим, что приведенные здесь результаты могут быть непосредственно использованы для расчета направленных ответвителей на базе связанных ЦПЛ [5, 6].

Рассмотрим конфигурацию связанных линий в виде “ЦЩЛ+ЦПЛ”, в которой одной из двух “взаимодействующих” линий является ЦЩЛ с узкой щелью, а другой — ЦПЛ с узкой полоской. Пусть ЦЩЛ с узкой щелью ( $\theta_1 = 1^\circ$ ,  $\theta_2 = 180^\circ - \delta_1$ ) и ЦПЛ с узкой полоской ( $\delta_1 = 1^\circ$ ) имеют различное диэлектрическое заполнение:  $\varepsilon_1 = 3$  и  $\varepsilon_2 = 2,25$ , соответственно, и расположены несимметрично:  $\Psi_{12} = 0^\circ$  и  $\Psi_{21} = 200^\circ$ . Дисперсионные характеристики такой структуры представлены на рис. 7.

Кривая 1 соответствует полосковой квази- $T_0$  волне ЦПЛ, кривая 2 — щелевой квази- $H_{00}$  волне ЦЩЛ, а кривая 3 —  $HE_{11}$  волне ЦПЛ. Как видно из рис. 7, рассматриваемая ситуация характерна для эффекта взаимной трансформации волн 1 и 2, когда дисперсионные кривые сближаются в некоторой области изменения параметра  $ka$  и, не пересекаясь, качественно изменяют свой ход. Такого рода эффекты были обнаружены в одиночных ЦЩЛ/ЦПЛ [7–11], а также в связанных ЦЩЛ [2]. Суть их заключается в том, что “взаимодействующие” волны обмениваются структурой поля при изменении какого-либо неспектрального параметра. В данном случае таким параметром является волновой размер  $ka$ . Здесь возникает вопрос о том, как же ведут себя поля собственных волн в области “взаимодействия”. Для ответа на этот вопрос проанализируем структуру силовых линий поперечного электрического поля квази- $T_0$  и квази- $H_{00}$  волн, рассчитанную для значений  $ka = 0,35$ ,  $0,435$  и  $0,5$  и изображенную на рис. 8(а,б,в) и рис. 9(а,б,в), соответственно, для указанных значений  $ka$ .

В частности, рис. 8 показывает этапы преобразования поля квази- $T_0$  волны в поле квази- $H_{00}$  волны. Рис. 8а соответствует значению  $ka = 0,35$  и показывает поле квази- $T_0$  волны, поддерживаемое ЦПЛ до “взаимодействия”. В этом случае поле внутри ЦЩЛ крайне мало и она выполняет функцию металлического цилиндра, возмущающего силовые линии. На рис. 8б изображено поле квази- $T_0$  волны

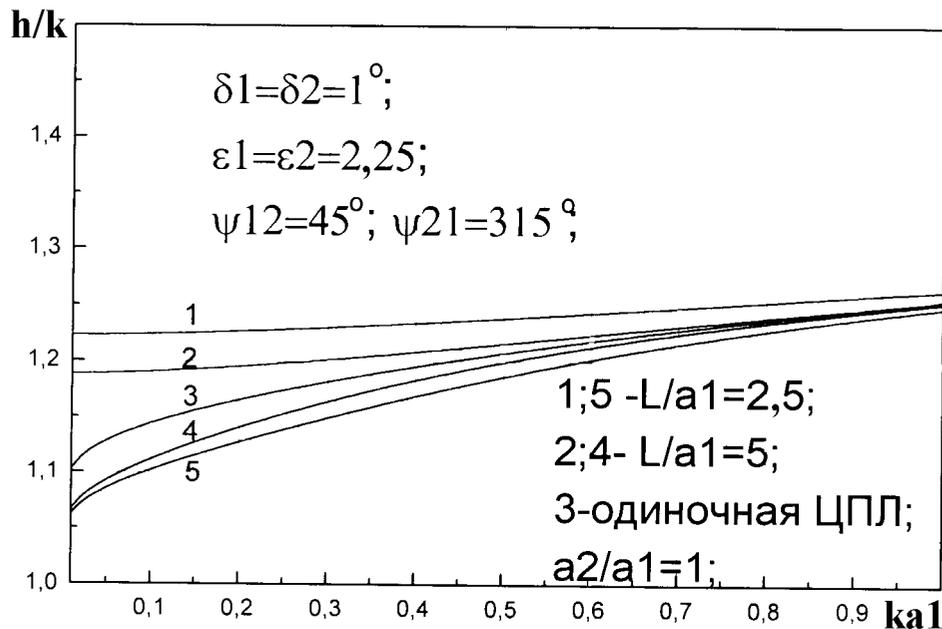


Рис. 6.

в области “взаимодействия”. Видно, что здесь мы имеем дело с ситуацией, когда ЦПЛ поддерживает квази- $T_0$  волну, а ЦЩЛ, в отличие от предыдущего случая, поддерживает квази- $H_{00}$  волну. Такую волну в составной структуре будем называть гибридной квази-“ $H_{00} + T_0$ ” волной. При дальнейшем увеличении параметра  $ka$  поле этой гибридной волны трансформируется в поле квази- $H_{00}$  волны, направляемой ЦЩЛ (рис. 8в). Здесь ЦПЛ является пассивным элементом, возмущая поле ЦЩЛ. Процесс, противоположный описанному, показан на рис. 9. При  $ka = 0,35$  (рис. 9а) ЦЩЛ направляет квази- $H_{00}$  волну, при этом концентрация поля в ЦПЛ мала и последняя выполняет пассивную роль. В области “взаимодействия” ЦПЛ уже поддерживает полосковую квази- $T_0$  волну, а ЦЩЛ еще поддерживает квази- $H_{00}$  волну, и мы имеем дело с гибридной квази-“ $H_{00} - T_0$ ” волной. При  $ka = 0,5$  вдоль ЦПЛ распространяется квази- $T_0$  волна, а ЦЩЛ теряет волноведущие функции. Отметим, что обозначения гибридных волн даны не случайно, а связаны с особенностью распределения полей. А именно, гибридные волны квази-“ $H_{00} + T_0$ ” и квази-“ $H_{00} - T_0$ ” отличаются фазовым сдвигом  $180^\circ$  между полями квази- $T_0$  волн, поддерживаемыми ЦПЛ, как это имеет место в данном случае, либо между полями квази- $H_{00}$ , если рассмотреть временной сдвиг на полпериода на рис. 8б или рис. 9б.

Таким образом, в области “взаимодействия” обнаружены две гибридные волны: квази-“ $H_{00} + T_0$ ” и квази-“ $H_{00} - T_0$ ” (либо квази-“ $T_0 + H_{00}$ ” и квази-“ $T_0 - H_{00}$ ”), отличающиеся фазовым сдвигом на  $180^\circ$  для полей в ЦПЛ либо в ЦЩЛ. Назовем этот сдвиг “частичным” фазовым сдвигом.

Исследования показали, что указанная выше особенность формирования поля в области “взаимодействия” характерна для эффекта взаимной трансформации волн как для связанных, так и для одиночных ЦЩЛ/ЦПЛ.

Отметим, что если в одиночных ЦЩЛ/ЦПЛ в процессе взаимной трансформации изменяется структура поля волны в том же самом волноводе, то в связанных ЦЩЛ/ЦПЛ указанный эффект может также проявляться путем пространственного перераспределения поля из одного волновода в другой, как наблюдалось в структуре “ЦЩЛ+ЦПЛ”.

#### ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной работе на основе строгого решения задачи проведено численное исследование физических особенностей распространения волн в различных конфигурациях связанных ЦПЛ.

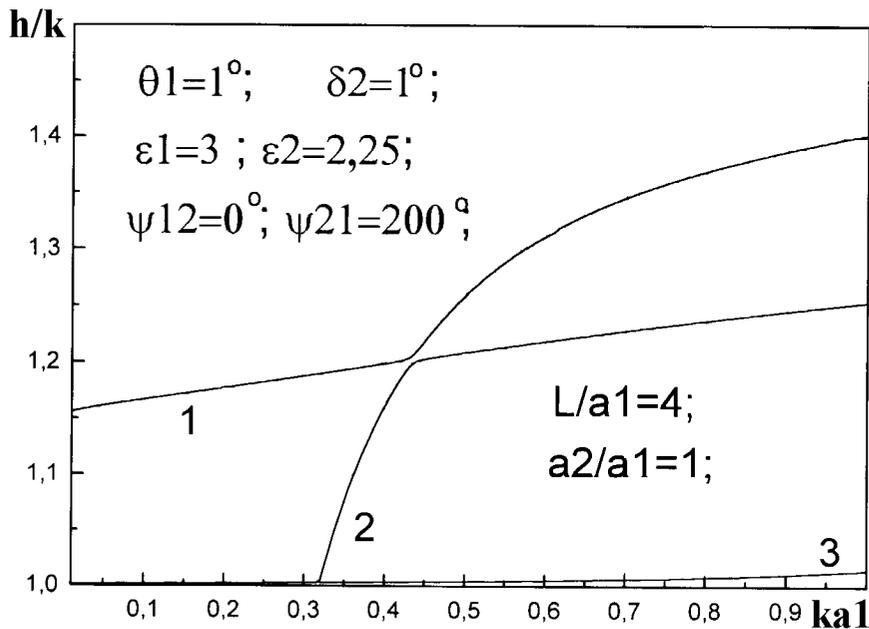


Рис. 7.

Наряду со структурами, обладающими двумя и одной плоскостями симметрии, рассмотрена несимметричная структура, состоящая из ЦЩЛ и ЦПЛ.

Показано, что в случае симметрично расположенных ЦПЛ с двумя и одной плоскостями симметрии существуют две основные волны квази- $T_0$  типа: четная и нечетная, возникающие в результате расщепления квази- $T_0$  волны одиночной ЦПЛ. Для этих волн в ЦПЛ с двумя плоскостями симметрии получены приближенные дисперсионные уравнения, описывающие решение с хорошей точностью в случае малых волновых размеров линий.

Проведен численный анализ точного дисперсионного уравнения. Изучены дисперсионные характеристики и структура поля собственных волн. Обнаружен эффект взаимной трансформации типов волн между щелевой и полосковой волной в структуре "ЦЩЛ+ЦПЛ". Исследована структура поля волн в области "взаимодействия". Показано, что в области "взаимодействия" существуют две гибридные волны, отличающиеся "частичным" фазовым сдвигом на  $180^\circ$ .

Полученные новые физические результаты представляют также практический интерес, в частности, для создания направленных ответвителей на основе связанных ЦПЛ/ЦЩЛ.

Автор благодарен проф. В. П. Шестопалову за постоянный интерес и поддержку исследований связанных цилиндрических линий передачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в интегральную оптику. /Под ред. М. Барноски. — М: Мир, 1977. — 367 с.
2. Свеженцев А. Е. //Изв. Вузов. Радиофизика, 1997. Т. 40. № 9. С. 1172.
3. Свеженцев А. Е. //Доклады НАН Украины. Сер. А, 1996. № 5. С. 71.
4. Носич А. И., Свеженцев А. Е., Шестопалов В. П. //Докл. АН СССР, 1986. Т. 289. № 1. С. 88.
5. Marcatili E. A. J. //The Bell System Technical Journal, 1969. V. 48. № 7. P. 2071.
6. Сомах С. Введение в интегральную оптику. — М.: Мир, 1977. — 266 с.
7. Свеженцев А. Е. //Докл. АН Украины. Сер. А, 1986. № 7. С. 58.
8. Носич А. И., Свеженцев А. Е., Шестопалов В. П. //Радиоэлектроника, 1987. Т. 32. № 11. С. 2262.

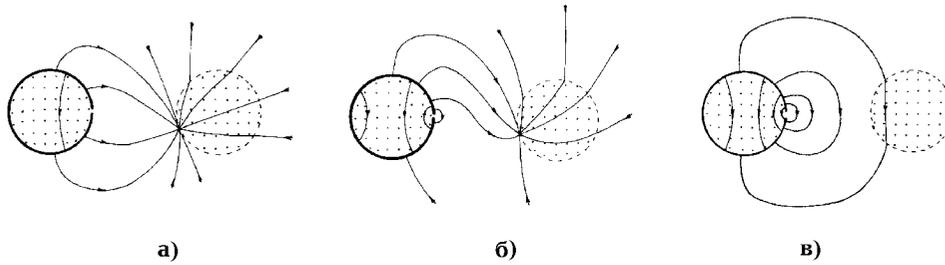


Рис. 8.

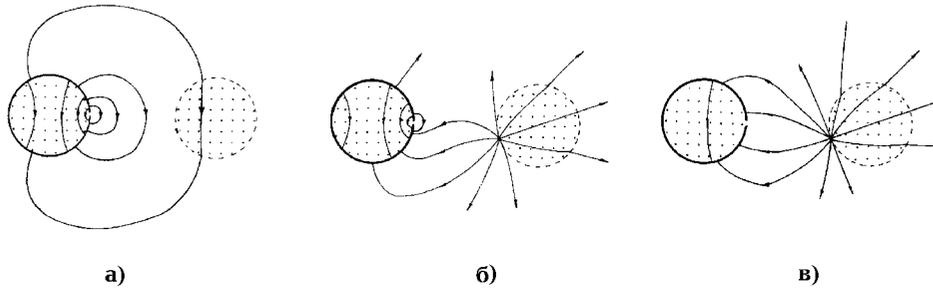


Рис. 9.

9. Свеженцев А. Е. Кандидатская диссертация. — Харьков: ХГУ, 1986. — 178 с.
10. Носич А. И., Свеженцев А. Е. //Радиоэлектроника, 1989. Т. 34. № 8. С. 1633.
11. Свеженцев А. Е., Шестопапов В. П. //Доклады АН УССР. Сер. А, 1994. № 4. С. 82.

Институт радиофизики и  
электроники НАН Украины  
им. акад. А. Я. Усикова

Поступила в редакцию  
20 марта 1998 г.

#### SIMULATION OF WAVES IN COUPLED CYLINDRICAL STRIPLINES

*A. E. Svezhentsev*

Waves of two coupled cylindrical strip lines (CStLs) of circular cross section are studied in the context of a rigorous electromagnetic theory. The wave spectrum splitting is discussed in symmetrically coupled CStLs and the approximate dispersion equations for two strip waves were derived side by side with the rigorous one. The structure which consists of a cylindrical slot line (CSIL) plus CStL was examined in addition to the coupled CStLs possessing one and two planes of symmetry. The dispersion curves are analyzed together with the field structure of modes. A new peculiarity of mutual transformation effect has been found.

УДК 537.874.6.01

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА С МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

*А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук*

Предложен метод исследования спектральных характеристик открытых резонаторов, содержащих круговые металлодиэлектрические цилиндры. В результате построен алгоритм расчета спектра собственных частот такого класса электродинамических структур. С помощью ЭВМ проведен сравнительный анализ спектральных характеристик двухзеркального конфокального открытого резонатора с круговым металлодиэлектрическим цилиндром и такого же резонатора с соответствующим радиально—слоистым диэлектрическим цилиндром.

В [1] на основе метода задачи Римана—Гильберта для разомкнутых контуров (ЗРГ) [2, 3] с использованием свойств несамосопряженных аналитических (конечномероморфных) оператор—функций в гильбертовых пространствах предложен алгоритм расчета спектра собственных частот двумерных открытых цилиндрических резонаторов с круговыми радиально—слоистыми включениями, слои которых заполнены однородными изотропными средами с потерями. В [4, 5] с помощью указанного метода исследованы электродинамические характеристики двумерного открытого двухзеркального резонатора, содержащего двухслойный круговой диэлектрический цилиндр.

В настоящей работе предлагается строгая в математическом отношении электродинамическая модель, которая описывает и позволяет рассчитывать спектральные характеристики (резонансные частоты, дифракционные потери, добротности собственных колебаний) открытого резонатора (ОР) с круговым металлодиэлектрическим цилиндром (МДЦ) с любой наперед заданной точностью. Важно то, что предлагаемая модель допускает изменение длины волны, геометрических и материальных параметров исследуемой электродинамической структуры в широких пределах и не накладывает априори на них каких—либо существенных ограничений.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ (РЕЗОНАНСНЫЕ) ЧАСТОТЫ ДЛЯ ДВУХМЕРНОГО ОР С КРУГОВЫМ МДЦ

Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — поперечные сечения зеркал ОР, а  $S_3$  — соответственно поперечное сечение кругового МДЦ (рис. 1), где  $\Omega_1$  — идеально проводящая металлическая граница  $S_3$ , а  $\Omega_2$  — граница диэлектрической среды с комплексной проницаемостью  $\epsilon$ .

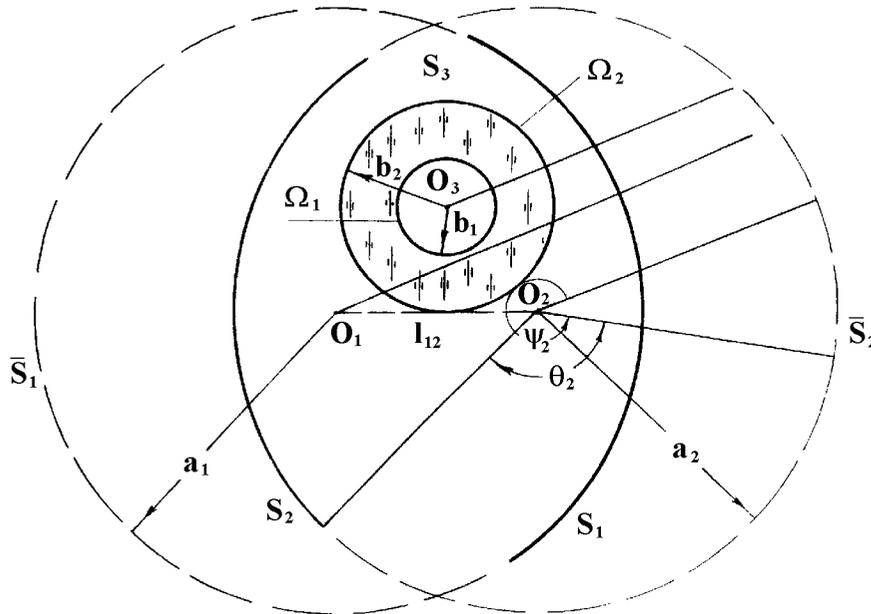


Рис. 1.

Предполагается, что ось металлодиэлектрического цилиндра  $S_3$  и образующие зеркал ОР параллельны оси  $Oz$  декартовой системы координат  $Oxyz$ , а также, что зеркала резонатора идеально проводящие, незамкнутые цилиндрические поверхности. Как и в [1, 4–6] считается, что вдоль оси  $Oz$  рассматриваемая электродинамическая структура (ОР+МДЦ) бесконечная и однородная, а электромагнитное поле не зависит от координаты  $z$ , иными словами, рассматриваются двухмерные колебания. В случае двухмерных колебаний для рассматриваемого класса электродинамических структур система однородных уравнений Максвелла сводится к двум независимым краевым задачам для систем скалярных уравнений Гельмгольца (задачам с краевыми условиями Неймана и Дирихле на зеркалах ОР и идеально проводящей металлической границе включения и условиям сопряжения на границе диэлектрической среды), описывающим соответственно собственные колебания  $H$ - и  $E$ -типов. В данной работе приведены исследования только для случая  $H$ -поляризованных собственных колебаний. Случай  $E$ -поляризации рассматривается аналогично.

Обозначим через  $R_k$  риманову поверхность аналитического продолжения по спектральному параметру  $k$  ( $k = \frac{\omega}{c}$ , где  $\omega$  — собственная частота ОР с МДЦ,  $c$  — скорость света в вакууме) функции Грина  $G(k, p, p_0) = -\frac{i}{4}H_0(k|p - p_0|)$  (временная зависимость выбрана в виде  $\exp(-i\omega t)$ ) уравнения Гельмгольца  $\Delta V + k^2 V = 0$ .

Задача о спектре (комплексных) собственных частот состоит в том, чтобы определить те значения  $k \in R_k$ , при которых существуют ненулевые решения  $V_1$  и  $V_2$  уравнений

$$\Delta V_1(p) + k^2 V_1(p) = 0, \quad p \notin \bigcup_{j=1}^3 S_j,$$

(1)

$$\Delta V_2(p) + k^2 \varepsilon \mu V_2(p) = 0, \quad b_1 < |p| < b_2,$$

удовлетворяющие условиям Неймана на  $S_j$  ( $j = 1, 2$ ) и на  $\Omega_1$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_j} = \frac{\partial V_2}{\partial \vec{v}_1} \Big|_{\Omega_1} = 0, \quad (2)$$

условиям сопряжения на  $\Omega_2$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} [V_1(p + h\vec{v}_2) - V_2(p - h\vec{v}_2)] = 0, \quad p \in \Omega_2, \quad (3)$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} [\varepsilon (\text{grad} V_1(p + h\vec{v}_2), \vec{v}_2) - (\text{grad} V_2(p - h\vec{v}_2), \vec{v}_2)] = 0, \quad p \in \Omega_2,$$

условию типа Мейкснера в любой ограниченной области из  $R^2$  [6] и для  $V_1$  — условию излучения Рейхардта на бесконечности [5, 6]. Здесь  $b_j$  — радиус окружности  $\Omega_j$ ,  $|p| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $\vec{n}_j$  и  $\vec{v}_j$  — соответственно орты внешних нормалей к  $S_j$  и  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Функции  $V_1(p)$  и  $V_2(p)$  связаны с  $H_z$ -компонентой напряженности магнитного поля следующим образом:

$$H_z = \begin{cases} V_1(p), & p \notin S_3, \\ V_2(p), & p \in S_3. \end{cases}$$

Остальные компоненты электромагнитного поля выражаются через  $V_1(p)$  и  $V_2(p)$  из уравнений Максвелла.

## 2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3). АЛГОРИТМ РАСЧЁТА СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОР С КРУГОВЫМ МДЦ

Задача (1)–(3) — несамосопряженная краевая задача в неограниченной области из  $R^2$ , причем, как и в задачах, рассмотренных в [1, 4–6], спектральный параметр  $k \in R_k$  нелинейным образом входит в формулу условия излучения.

Эти свойства спектральной краевой задачи (1)–(3) не позволяют использовать для ее численного решения аппарат теории линейных операторов в гильбертовых (банаховых) пространствах, который составляет основу асимптотической теории ОР [7, 8].

Как и в [1, 4–6] применим к (1)–(3) подход, основанный на процедуре аналитического обращения оператора, соответствующего главной сингулярности парной системы функциональных уравнений относительно собственных токов на зеркалах резонатора с помощью стандартной процедуры метода ЗРГ для разомкнутых контуров [2, 3].

В результате применения такого вида процедуры регуляризации, с учетом условий сопряжения (3) и краевого условия на  $\Omega_1$ , задача (1)–(3) эквивалентным образом сведена к задаче на характеристические числа матричной оператор-функции в гильбертовом пространстве  $l_2^3 = l_2 \times l_2 \times l_2$  вида

$$I - A(k), \quad \text{где } I \text{ — тождественный оператор в } l_2^3, \text{ а}$$

$$A(k) = A(k, a_1, a_2, b_1, b_2, \varepsilon \dots) = \left\| A_{mn}^{jp}(k) \right\|_{j,p=1}^3.$$

Обозначим через  $R_k^0 = \{k : -\pi < \arg(k) < \pi\}$  "физический" лист  $R_k$ . Тогда при  $k \in R_k^0$  матричные элементы оператор-функции  $A(k)$  при  $j, p = 1, 2$  и когда  $p = 3$ , а  $j = 1, 2$  с точностью до постоянной совпадают с соответствующими матричными элементами, приведенными в [9], а остальные имеют следующий вид:

$$A_{mn}^{3j}(k) = S_m(\varepsilon, \eta) J_m(kb_2), J_{n-m}(kl_{3j}) H'_n(ka_j) e^{i(n-m)\varphi_{j3}} \quad (j = 1, 2) \text{ и}$$

$$A_{mn}^{33}(k) = \left\{ 1 + S_n(\varepsilon, \eta) \frac{J_n(kb_2)[F_n(k)H_n(kb_2) - H'_n(kb_2)]}{H_n(kb_2)[F_n(k)J_n(kb_2) - J'_n(kb_2)]} \right\} \delta_{mn}.$$

Здесь  $a_j$  — радиусы кривизны зеркал ОР,  $l_{3j} = l_{j3}$  и  $\varphi_{j3}$  определяют взаимное расположение зеркал ОР и включения.

$$S_m(\varepsilon, \eta) = \frac{\varepsilon - 1 + \eta^{2|m|}}{\varepsilon + 1}, \quad \text{где } \eta = \frac{b_1}{b_2},$$

$$\frac{\eta^{2|m|}\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} + 1$$

$$F_m(k) = \frac{J'_m(kwb_1)H'_m(kwb_2) - J'_m(kwb_2)H'_m(kwb_1)}{w(J'_m(kwb_1)H_m(kwb_2) - J_m(kwb_2)H'_m(kwb_1))},$$

где  $w = \sqrt{\varepsilon}$ , причем  $\text{Im}(w) \geq 0$ , а когда  $\text{Im}(w) = 0$ , то  $\text{Re}(w) > 0$ ;  $J_m(z)$  и  $H_m(z)$  — функции Бесселя и Ханкеля первого рода [10], а  $J'_m(z)$  и  $H'_m(z)$  — соответственно их производные по аргументу;  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера.

Когда  $k \in R_k \setminus R_k^0$ , то, согласно [6], функция Бесселя заменяется функцией

$$W_m^q(z) = (-1)^{mq} J_m((-1)^q z),$$

а функция Ханкеля

$$U_m^q(z) = (-1)^{mq} [2qJ_m((-1)^q z) + H_m((-1)^q z)].$$

Здесь  $q$  — номер листа римановой поверхности  $R_k$  либо, что то же самое, римановой поверхности функции  $\text{Ln}(z)$ .

Можно показать, что при  $|m| \rightarrow \infty$  функции  $W_m^q(z)$  и  $U_m^q(z)$  ведут себя так, как  $J_m(z)$  и  $H_m(z)$ .

Отметим также то, что оператор-функция  $I - A(k)$  может быть получена из оператор-функции задачи на собственные частоты ОР с двухслойным магнитоэлектрическим цилиндром (см. [4, 5]) в результате предельных переходов:  $\varepsilon_1 \mu_1 \rightarrow 1$ ,  $\mu_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \rightarrow 0$ , где  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$  — материальные параметры среды, находящейся во внутреннем слое включения.

При  $|m| \gg |k|$  для  $F_m(k)$  справедлива асимптотическая оценка:

$$F_m(k) = \frac{|m|}{kb_2\varepsilon} (1 - \eta^{2|m|}) (1 + \eta^{2|m|})^{-1} (1 + O(m^{-2})). \quad (4)$$

Учитывая (4) и асимптотики функций  $J_m(z)$  и  $H_m(z)$  при  $|m| \gg |z|$  (см. [10]), получаем, что элементы диагональной матрицы  $\|A_{mm}^{33}(k)\|_{m=-\infty}^{+\infty}$  при  $|m| \rightarrow \infty$  стремятся к нулю как  $O(m^{-2})$ . Иными словами, матрица  $\|A_{mm}^{33}(k)\|_{m=-\infty}^{+\infty}$  задает в пространстве  $l_2$  ядерную, конечномероморфную по  $k \in R_k$  и по  $\varepsilon$  оператор-функцию. Оценки для всех остальных матричных элементов при  $|m| \gg 1$  и  $|n| \gg 1$  оператор-функции  $A(k)$  аналогичны оценкам для соответствующих матричных элементов в [9].

Иными словами,  $A(k)$  — ядерная оператор-функция, конечномероморфно зависящая от  $k$  и от  $\varepsilon$ .

Пусть  $\sigma(k)$  — множество характеристических чисел фредгольмовой оператор-функции  $I - A(k)$ .

Используя свойства  $A(k)$  (ядерность, конечномерность по  $k$ ) и повторяя приведенные в [4–6, 9] рассуждения, получаем, что  $\sigma(k)$  — дискретное, конечнократное множество на  $R_k$  с единственной точкой накопления на бесконечности. Кроме того,  $k_0$  является характеристическим числом  $I - A(k)$  (собственной частотой краевой задачи (1)–(3)) тогда и только тогда, когда  $k_0$  удовлетворяет “дисперсионному” уравнению

$$\det \{I - A(k_0)\} = 0, \quad (5)$$

где  $\det \{I - A(k)\}$  — бесконечный характеристический определитель оператор-функции  $I - A(k)$ .

Наряду с уравнением (5) рассмотрим последовательность уравнений следующего вида:

$$\det A_N(k) = 0, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где конечномерная матрица  $A_N(k) = \left\| \delta_{mn} - (A(k) e_m, e_n) \right\|_{m,n=1}^N$ ,  $(e_m)_{m=1}^\infty$  — произвольный ортонормированный базис, а  $(,)$  — скалярное произведение в  $l_2^3$ . Согласно свойствам  $A(k)$  и утверждению теоремы Руше для операторов [11], следует, что корни (5) могут аппроксимироваться корнями уравнений (6) с любой наперед заданной точностью. При этом, как и в [5, 6, 9], справедлива асимптотическая оценка скорости сходимости:

$$|k_N - k| < \frac{C}{N}, \quad N \rightarrow \infty,$$

где  $C$  — постоянная, зависящая от геометрических и материального ( $\varepsilon$ ) параметров структуры ОР+МДЦ.

При численной реализации (6) можно использовать метод Ньютона, метод секущих либо их различные модификации.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

С целью проведения численного анализа спектральных характеристик ОР с МДЦ предложенный алгоритм реализован на ЭВМ в виде пакета прикладных программ. Без ограничения общности открытый резонатор полагался симметричным и конфокальным. Систематические расчеты, проводившиеся на ЭВМ с помощью метода Ньютона, показали, что для вычисления собственной частоты ОР с МДЦ (корня системы (6)) с точностью до 4–5 значащих цифр порядок редукции  $N$  достаточно положить в виде  $N = \lceil ka \rceil + 10$ , где  $a = \max(a_1, a_2)$ ,  $\lceil \dots \rceil$  — целая часть числа.

На рис. 2. приведены зависимости резонансных частот и характеристик дифракционных потерь ОР с МДЦ от  $\Delta_2 = \frac{b_2}{a}$  для собственных колебаний  $H_{11}$ -,  $H_{02}$ - и  $H_{21}$ -типов (классификация типов колебаний ОР с включениями определена в [9]) при  $\frac{s}{a} = 1,638$ , \*  $\Delta_1 = \frac{b_1}{a} = 0,04$  и  $\varepsilon = 2,08 + 0,001i$ . Здесь и далее под терминами резонансная частота и характеристика дифракционных потерь понимаются соответственно  $\text{Re}(ka)$  и  $\text{Im}(ka)$ , т. е. вещественная и мнимая части корня системы (6);  $s$  — апертура зеркал ОР.

Для сравнения, на рис. 3 приведены зависимости резонансных частот и характеристик дифракционных потерь этих собственных колебаний при указанных выше геометрических и материальном параметрах для ОР с двухслойным круговым диэлектрическим цилиндром (ДЦ) с  $\varepsilon_1 = 1$ .

Видно, что как в первом, так и во втором случаях с увеличением  $\Delta_2$  резонансные частоты смещаются в более длинноволновую область. Кроме того, величина  $\text{Im}(k)$  колебания  $H_{02}$ -типа как для ОР с

\*Выбору значения соответствует выбор угла раскрытия зеркал  $\theta_j = 125^\circ$  ( $j = 1, 2$ ).

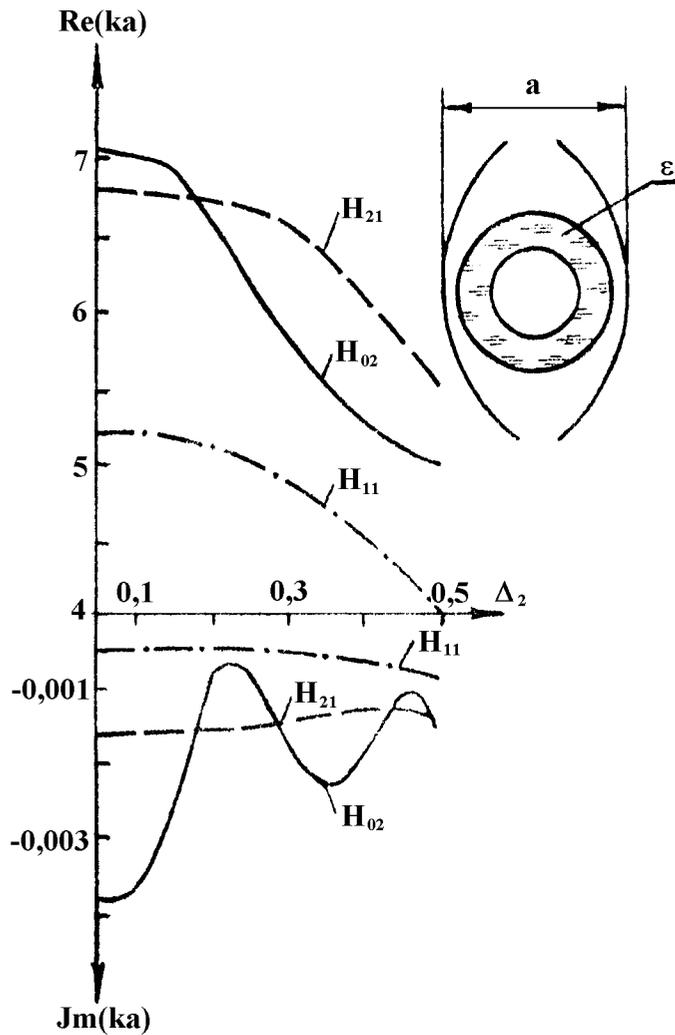


Рис. 2.

МДЦ, так и для ОР с ДЦ ведет себя ярко выраженным осциллирующим образом. Единственным различием между ними является наличие локального минимума для ОР с МДЦ в окрестности  $\Delta_2 = 0,07$ . Наибольшее значение добротности собственного колебания  $H_{02}$ -типа  $Q$  ( $Q = -\frac{\text{Re}(ka)}{2\text{Im}(ka)}$ , причем здесь и далее полагается, что  $k \in R_k^0$ ) достигается при  $\Delta_2 = 0,23$  и равно  $5,272 \cdot 10^3$ . Для сравнения приведем наибольшее значение  $Q$  для ОР с ДЦ. Оно, как показали вычисления, достигается при  $\Delta_2 = 0,195$  и равно  $7,357 \cdot 10^3$ .

Иными словами, “замена” внутренней границы находящегося в ОР двухслойного диэлектрического цилиндра идеально проводящей металлической оболочкой приводит в целом к понижению добротности системы, хотя были обнаружены диапазоны изменения  $\Delta_2$ , например,  $0,355 < \Delta_2 < 0,465$ , где добротность ОР с МДЦ выше добротности соответствующего ОР с ДЦ.

Дифракционные потери собственных колебаний  $H_{11}$ - и  $H_{21}$ -типов системы ОР+МДЦ при изменении  $\Delta_2$  ведут себя так, как и соответствующие им для ОР с ДЦ.

На рис. 4 приведены зависимости резонансных частот и характеристик дифракционных потерь, соответствующих колебанию  $H_{02}$ -типа, от  $\Delta_1$  при  $\varepsilon = 2,08 + 0,001i$  и  $\Delta_2 = 0,465$  (при таких значениях  $\varepsilon$  и  $\Delta_2$  достигается локальный максимум добротности собственного колебания  $H_{02}$ -типа ОР с МДЦ) ОР

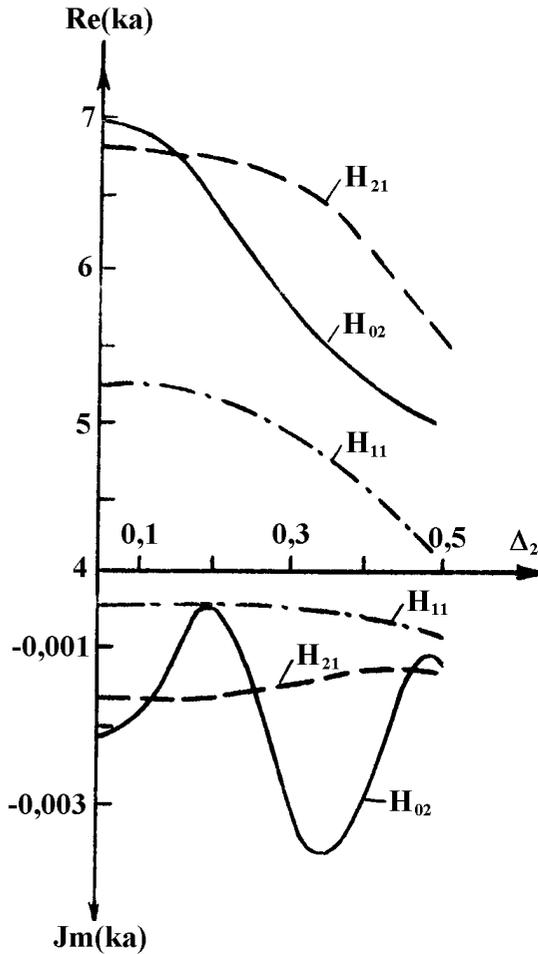


Рис. 3.

с МДЦ и ОР с ДЦ. Здесь спектральные характеристики ОР с МДЦ отмечены штриховыми линиями, а спектральные характеристики ОР с ДЦ — сплошными.

Видно, что увеличение  $\Delta_1$  как для ОР с МДЦ, так и для ОР с ДЦ приводит к смещению их резонансных частот в более коротковолновую область. При этом поведения характеристик дифракционных потерь этих систем коренным образом отличаются. Так, мнимая часть собственной частоты системы ОР+МДЦ с увеличением  $\Delta_1$  монотонно убывает, а ОР с ДЦ — растет. Иными словами, увеличение радиуса металлической оболочки приводит, как и следовало ожидать, к росту дифракционных потерь и, естественно, к падению добротности ОР с МДЦ.

В случае же ОР с ДЦ увеличения  $\Delta_1$  при фиксированном экстремальном значении  $\Delta_2$  (т. е. значении, где добротность, соответствующая собственному колебанию  $H_{02}$ -типа достигает локального максимума) приводят к увеличению добротности системы в целом.

Исследования поведения спектральных характеристик электродинамической системы ОР с МДЦ проводились не только при изменении ее геометрических параметров, но также и при изменении  $\epsilon$ . Причем основное внимание здесь было уделено тем диапазонам вариации диэлектрической проницаемости, где имеют место гибридные междутиповые колебания (см. [5]).

Зависимости резонансных частот и добротностей собственных колебаний (на примере колебаний  $H_{03}$ - и  $H_{41}$ -типов) от  $\epsilon$  (полагалось, что потери в среде отсутствуют) ОР с МДЦ при  $\frac{s}{a} = 1,618$ ,  $\Delta_1 = 0,05$ ,  $\Delta_2 = 0,1$  приведены на рис. 5. Выбор такого значения апертуры зеркал ОР, соответствующую

шей углу раскрытия зеркал  $\theta_j = 126^\circ$  ( $j = 1, 2$ ) обусловлен нахождением самого "пустого" резонатора в режиме междутиповой связи собственных колебаний  $H_{03}$ - и  $H_{41}$ -типов. Из рисунка видно, что увеличение значения диэлектрической проницаемости среды системы приводит к смещению резонансной частоты колебания  $H_{03}$ -типа в более длинноволновую область и резкому падению добротности. Резонансная частота и добротность собственного колебания  $H_{41}$ -типа при этом от  $\varepsilon$  практически не зависят.

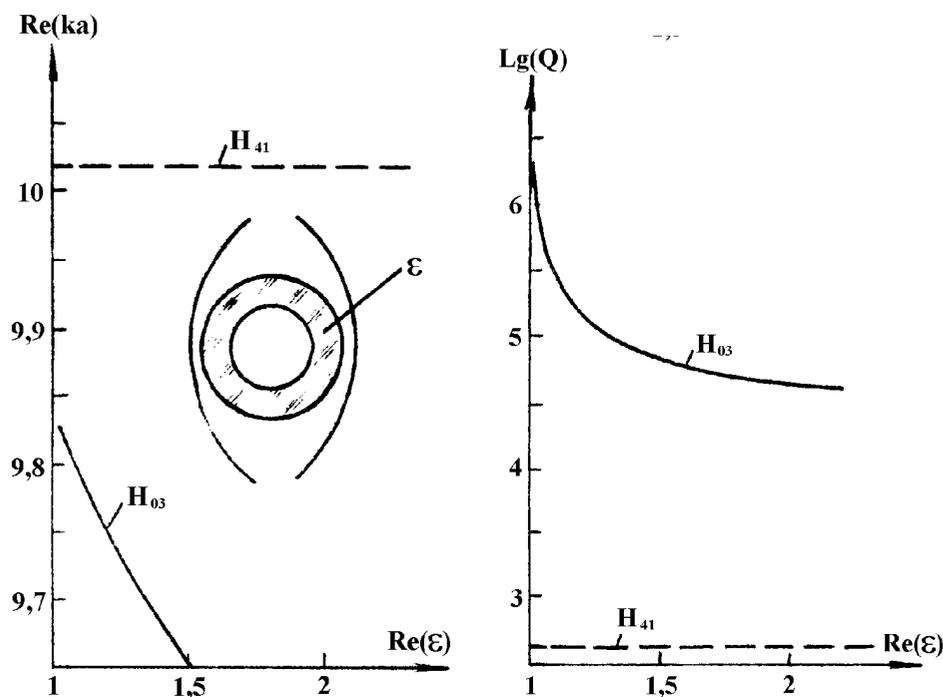


Рис. 5.

Приведем для сравнения с вышеуказанной ситуацией зависимости резонансных частот и добротностей этих колебаний ( $H_{03}$ - и  $H_{41}$ -типов) от  $\varepsilon$  для ОР с ДЦ. Видно (см. рис. 6), что кривые, характеризующие зависимости  $\text{Re}(ka)$  от  $\varepsilon$  образуют классический график Вина. Причем в диапазоне, где максимально сближаются кривые, описывающие зависимость  $\text{Re}(ka)$  от  $\varepsilon$ , происходит пересечение кривых, описывающих зависимость  $Q$  от  $\varepsilon$ .

Иными словами, при  $1 \leq \varepsilon < 2$  (случай "слабых" диэлектриков) колебания  $H_{03}$ - и  $H_{41}$ -типов вступают в "связь", обмениваясь при этом типами. Причем колебание  $H_{03}$ -типа трансформируется в колебание  $H_{41}$ -типа ( $H_{03} \rightarrow H_{41}$ ), а  $H_{41} \rightarrow H_{03}$ . Отметим, что при преобразовании колебания  $H_{03}$ -типа в колебание  $H_{41}$ -типа, за счет роста дифракционных потерь, происходит падение добротности, а в случае, когда  $H_{41} \rightarrow H_{03}$  — ее рост, который обусловлен уменьшением дифракционных потерь.

В результате получаем, что в указанном диапазоне изменения диэлектрической проницаемости системы для собственных колебаний  $H_{03}$ - и  $H_{41}$ -типов "замена" внутренней границы диэлектрического включения ОР металлической оболочкой приводит к разрушению "связи" этих колебаний.

Аналогичное явление наблюдалось (см. исследования в [6]), когда в ОР, настроенный в режим "междутиповой" связи "помещали" круговой плазменный цилиндр и осуществляли, например, изменения ленгмюровской частоты.

В заключение отметим, что приведенные здесь результаты вычислительных экспериментов справедливы только для случаев, когда ось МДЦ (ДЦ) является пересечением продольной и поперечной

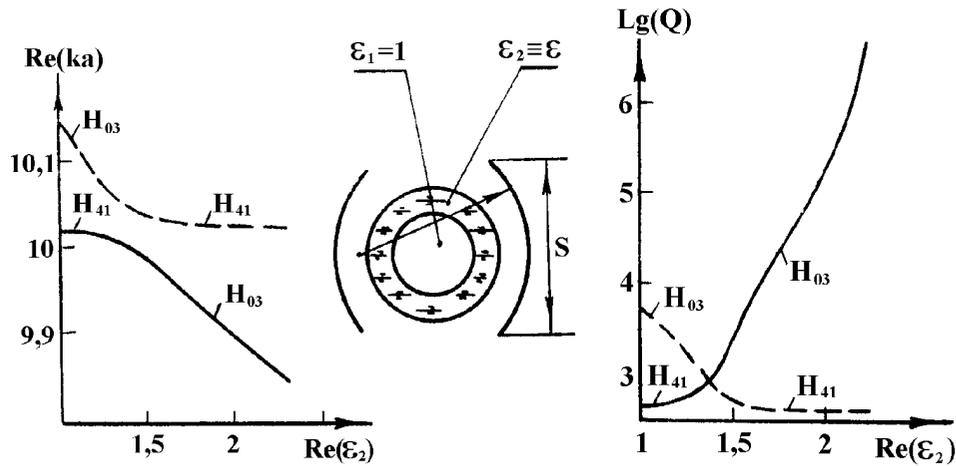


Рис. 6.

плоскостей симметрии конфокального симметричного ОР. Предложенная в работе электродинамическая модель ОР с МДЦ может быть расширена до любого конечного числа зеркал и такого вида включений при условиях, что  $(S_n \cup \bar{S}_n) \cap S_m = \emptyset$  ( $n \neq m$ ),  $(S_n \cup \bar{S}_n) \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Здесь  $\bar{S}_n$  — дополнение  $S_n$  к окружности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бровенко А. В. // ДАН УССР. Сер. А, 1987. № 1. С. 51.
2. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. — Харьков: Гос. ун-т, 1971. — 400 с.
3. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. — Киев: Наук. думка, 1983. — 252 с.
4. Бровенко А. В., Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Шестопалов В. П. // Укр. физ. журн., 1993. Т. 38. № 10. С. 1468.
5. Бровенко А. В., Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Шестопалов В. П. // Радиотехника и электроника, 1997. Т. 42. № 10. С. 1174.
6. Бровенко А. В., Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Шестопалов В. П. // Изв. вузов. Радиофизика, 1996. Т. 39. № 9. С. 1161.
7. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1996. — 476 с.
8. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972. — 456 с.
9. Шестопалов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. — Киев: Наук. думка, 1987. — 288 с.
10. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949. Ч. 1. — 798 с.
11. Гохберг И. Ц., Сигал Е. И. // Мат. сб., 1971. Т. 84. № 4. С. 607.

Институт радиофизики и  
электроники им. А. Я. Усикова  
НАН Украины, г. Харьков

Поступила в редакцию  
22 апреля 1998 г.

**THE SPECTRAL CHARACTERISTICS OF AN OPEN RESONATOR WITH A METAL–DIELECTRIC INHOMOGENEITY**

*A. V. Brovenko, P. N. Melezhik, A. E. Poyedinchuk*

A new method to study the spectral characteristics of an open resonator loaded with a circular metal-dielectric cylinder is presented. A mathematically justified numerical algorithm calculating the eigenfrequency spectrum of this class of electrodynamic structures has been built on that basis.

The computer-assisted analysis of the spectral characteristics of a two-mirror confocal open resonator when it contains either a circular metal-dielectric cylinder or the similar radial-layered dielectric cylinder has been carried out for comparison purposes.

УДК 537.52

**ВЛИЯНИЕ ОТРАЖЕНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГИРОТРОНАХ***М. Ю. Глявин, В. Е. Запезалов*

Исследовано влияние некоторых видов отражений на колебательные процессы, происходящие в гиротроне. Приводятся оценки условий устойчивости колебаний в присутствии отраженного сигнала, проведено численное моделирование процессов в гиротроне с фиксированной структурой ВЧ поля, исследовано обогащение спектра сигнала в присутствии отражений.

**ВВЕДЕНИЕ**

Мощные генераторы когерентного электромагнитного излучения миллиметрового диапазона длин волн — гиротроны — все более широко применяются для нагрева квазистационарной термоядерной плазмы в условиях электронно—циклотронного резонанса [1, 2]. В настоящее время в крупных существующих и планируемых термоядерных реакторах ставится задача создания многомодульных СВЧ-комплексов с длинными линиями передачи СВЧ-мощности от гиротронов к плазме. С другой стороны, гиротроны все более широко используются для решения технологических задач, в частности, для объемного нагрева и спекания керамических материалов [3]. В подобных системах возможны различные виды отражений проходящей СВЧ-мощности от элементов тракта, от стенок камеры токамака, керамических окон и т. п. Наиболее сильное влияние внешних СВЧ-полей должно проявляться в гиротронах без квазиоптической развязки между пространством взаимодействия и окном вывода СВЧ-мощности, когда отраженный сигнал попадает непосредственно в резонатор, ухудшая условия взаимодействия электронного пучка с ВЧ полем. В данной работе описываются результаты исследования влияния некоторых видов отражений на колебательные процессы в гиротроне. Необходимо отметить, что современные гиротроны с пространственно развитыми электродинамическими системами представляют из себя многомодовые приборы, в которых динамика установления колебаний существенно зависит от взаимодействия мод. В настоящей работе рассмотрена одномодовая модель, поскольку такой подход позволяет отделить эффекты, вызванные присутствием отраженного сигнала, от процессов взаимодействия между модами. Более корректный анализ системы с учетом многомодовости планируется представить в следующей работе.

**ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Для решения этой задачи использовалась аксиально—симметричная модель гиротрона в пренебрежении разбросом скоростей электронов и радиусов ведущих центров электронных орбит в трубчатом пучке, а также полями пространственного заряда. Поскольку резонатор может возбуждаться не только протекающим внутри объема током, но и любым полем, попадающим в резонатор извне, представим фактор возбуждения ВЧ-поля в виде суммы фактора возбуждения резонатора электронным пучком в отсутствие отражений и слагаемого, пропорционального попадающему в резонатор отраженному сигналу. Нестационарные процессы в таком гиротроне описываются самосогласованной системой уравнений (см., например, [4]), состоящей из укороченного уравнения движения электронов

во внешнем магнитном поле и поле существующей в гиротроне моды

$$\frac{da}{d\zeta} - i(\Delta + |a|^2 - 1)a = i(a^{n-1} F f e^{i(\Psi - n\vartheta_0)})^* , \quad (1)$$

$$a(\zeta_0) = 1 ,$$

уравнений возбуждения мод, которые при малой величине попадающего в резонатор извне сигнала,  $A \ll F$ , имеют вид

$$\frac{dF}{dt'} = \frac{\omega_0}{2Q} [(\Phi' \tilde{I} - 1)F + \text{Re}[Ae^{-i\phi}]] , \quad (2)$$

$$F \frac{d\Psi}{dt'} = \frac{\omega_0}{2Q} \left[ F \left( \Phi'' \tilde{I} + 2Q \frac{\omega_0 - \omega_s}{\omega_s} \right) + \text{Im}[Ae^{-i\phi}] \right] ,$$

и выражения, определяющего фактор возбуждения моды электронным пучком. Комплексный фактор возбуждения  $\Phi = \Phi' + i\Phi''$  характеризует комплексную мощность взаимодействия электронного пучка с ВЧ-полем

$$\Phi = -i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{F} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int a^* f^* e^{-i(\Psi - n\vartheta_0)} d\zeta d\vartheta_0 d\varphi . \quad (3)$$

Величина электронного тока описывается параметром  $\tilde{I}$ , пропорциональным постоянной составляющей тока пучка. Комплексная величина описывает изменение энергии и фазы вращательного движения электронов под действием высокочастотного поля с амплитудой  $F$ , фазой  $\Psi$  и распределением  $f$ . Определены  $F$ ,  $\Psi$  и  $\tilde{I}$  дано, например, в [5]. Интегрирование по приведенной продольной координате  $\zeta = \frac{\beta_{\perp 0}^2}{2\beta_{\parallel 0}} \cdot \frac{\omega_0 z}{c}$  ведется по всей длине взаимодействия; здесь  $\beta_{\perp, \parallel} = \frac{V_{\perp, \parallel}}{c}$  — безразмерные компоненты скорости,  $\omega_0$  — частота генерируемых колебаний, а  $\omega_s$  — собственная частота резонатора. В качестве временной переменной используется безразмерное время  $t' = \omega_0 t$ . Условия оптимального отбора энергии электронного пучка тормозящей фазой ВЧ-поля обеспечивается подбором расстройки циклотронного резонанса  $\Delta = \frac{2}{\beta_{\perp 0}^2} \cdot \frac{(\omega_0 - n\omega_H)}{\omega_0}$ , где  $n$  — номер гармоники. Положение электронов на входе в пространство взаимодействия описывается азимутальной координатой ведущих центров орбит электронов  $\varphi$  и их начальной фазой  $\vartheta_0$ . Возмущение, вносимое попадающим в резонатор извне сигналом, определяется величиной  $\phi = \Psi(t') - \Psi(t' - T)$  — разностью фаз между отраженным и “прямым” сигналами, описываемой запаздывающей функцией от амплитуды колебаний в резонаторе и параметром  $A = \sqrt{\frac{2}{QQ_{\text{св}}}} R F(t' - T)$ , зависящим от добротности резонатора  $Q$ , добротности связи резонатора и внешнего тракта  $Q_{\text{св}}$ , коэффициента отражения по амплитуде  $R \ll 1$ , который в общем случае является комплексной величиной, и от времени запаздывания отраженного сигнала  $T$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для численного моделирования процессов в гиротроне реальная продольная структура ВЧ-поля в резонаторе аппроксимировалась близкой к ней гауссовой функцией  $f = e^{-(2\zeta/\mu)^2}$ , где  $\mu = \zeta(L)$  —

приведенная длина резонатора. В качестве временной переменной естественно использовать безразмерный параметр  $\tau = \omega_0 t / Q$ . Для гиротрона, находящегося в режиме генерации, близком к оптимальному, при  $\mu = 10$ ,  $\Delta = 0,5$ ,  $\tilde{I}Q = 0,1$  рассчитывался сценарий установления колебаний в зависимости от уровня отраженного сигнала.

Оценим характерные для гиротронных комплексов времена запаздывания. Для круглого сверхразмерного волновода длиной  $L$  и диаметром  $d$ , в котором распространяется мода  $TE_{m,p}$ , характеризующаяся корнем функции Бесселя  $\nu_{m,p}$ , время запаздывания сигнала, отраженного от конца волновода,  $T = 2 \frac{L}{\omega} \cdot \frac{k^2}{\sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}}$ , где  $k_{\perp} = \frac{2\nu_{m,p}}{d}$ . В отсутствие трансформации мод для характерных типов волн, используемых в гиротронах, при  $L \approx 1$  м,  $d \approx 5\lambda$  время запаздывания составляет несколько наносекунд. В использованных в работе безразмерных величинах, при характерной добротности резонатора  $Q \approx 10^3$ , это соответствует  $T \approx 1$ . В качестве параметра запаздывания для представленных в работе расчетов использовались значения времени задержки в диапазоне  $0,25 \leq T \leq 5$ . Для рассмотренных значений характер поведения генератора качественно сохраняется. При этом  $T \leq 0,5$  соответствует отражениям от вакуумного окна типичного технологического гиротрона либо отражению от начальных элементов тракта передачи, а  $T' \approx 5$  — отражениям от удаленных элементов линии передачи или от вакуумного окна ввода микроволнового излучения в рабочую область. Протяженности волноводного тракта могут быть, вообще говоря, во много раз больше, чем несколько метров, но с ростом протяженности уменьшается как вероятность попадания отраженного сигнала в гиротрон, так и его амплитуда, вследствие затухания. Кроме этого, при больших значениях  $T$  существенно возрастает время счета, поэтому в данной работе эффекты отражения от далеко удаленных неоднородностей не исследовались.

Как отмечалось выше, величина поступающего в резонатор сигнала определяется добротностями системы и коэффициентом отражения  $R$ . В гиротронах добротность резонансной системы определяется дифракционной добротностью  $Q_{\text{диф}} \approx 8\pi(L/\lambda)^2$ , омической добротностью  $Q_{\text{ом}}$  и добротностью контура, связанной с потерями на переизлучение в другие моды. В современных гиротронах с дифракционным выводом мощности и электродинамическими системами сложного профиля потери на переизлучение практически отсутствуют, а  $Q_{\text{ом}} \gg Q_{\text{диф}}$ . На рис. 1 приводятся сценарии установления колебаний, рассчитанные при типичных значениях добротностей гиротрона ( $Q \sim Q_{\text{диф}} \sim 10^3$ ) для различных значений коэффициента отражения от неоднородностей тракта: а)  $R \approx 0$ , б)  $R \approx 0,1$ , в)  $R \approx 0,3$ , г)  $R \approx 0,4$ . В данной задаче коэффициент отражения считался чисто действительным. Ток пучка примерно вдвое превышает стартовый ток ( $\frac{\tilde{I}}{\tilde{I}_{\text{ст}}} = 2,1$ ), что соответствует режиму генерации с максимальным КПД.

В отсутствие отраженного сигнала характер установления колебаний сходен с попаданием изображающей точки в фазовом пространстве в состояние равновесия типа “устойчивый узел”. При  $R < 0,25$  стационарный уровень амплитуды ВЧ-поля в резонаторе изменяется при сохранении режима генерации колебаний с постоянной амплитудой. По мере выхода из оптимального режима КПД уменьшается с ростом коэффициента отражения. Характер установления колебаний при этом сходен с попаданием в “устойчивый фокус”, причем время установления пропорционально как величине отраженного сигнала, так и времени запаздывания. При  $0,25 < R < 0,35$  устанавливается режим автомодуляционных колебаний, а глубина модуляции растет по мере увеличения коэффициента отражения. При  $R > 0,35$  происходит переход к стохастическим колебаниям.

Характер поведения системы существенно зависит и от величины параметра тока. При фиксированном коэффициенте отражения с ростом тока генератор переходит от режима генерации колебаний с постоянной амплитудой к стохастическим колебаниям. При этом с ростом параметра тока происходит удвоение периода автоколебаний. Характер изменения режима автоколебаний позволяет утвер-

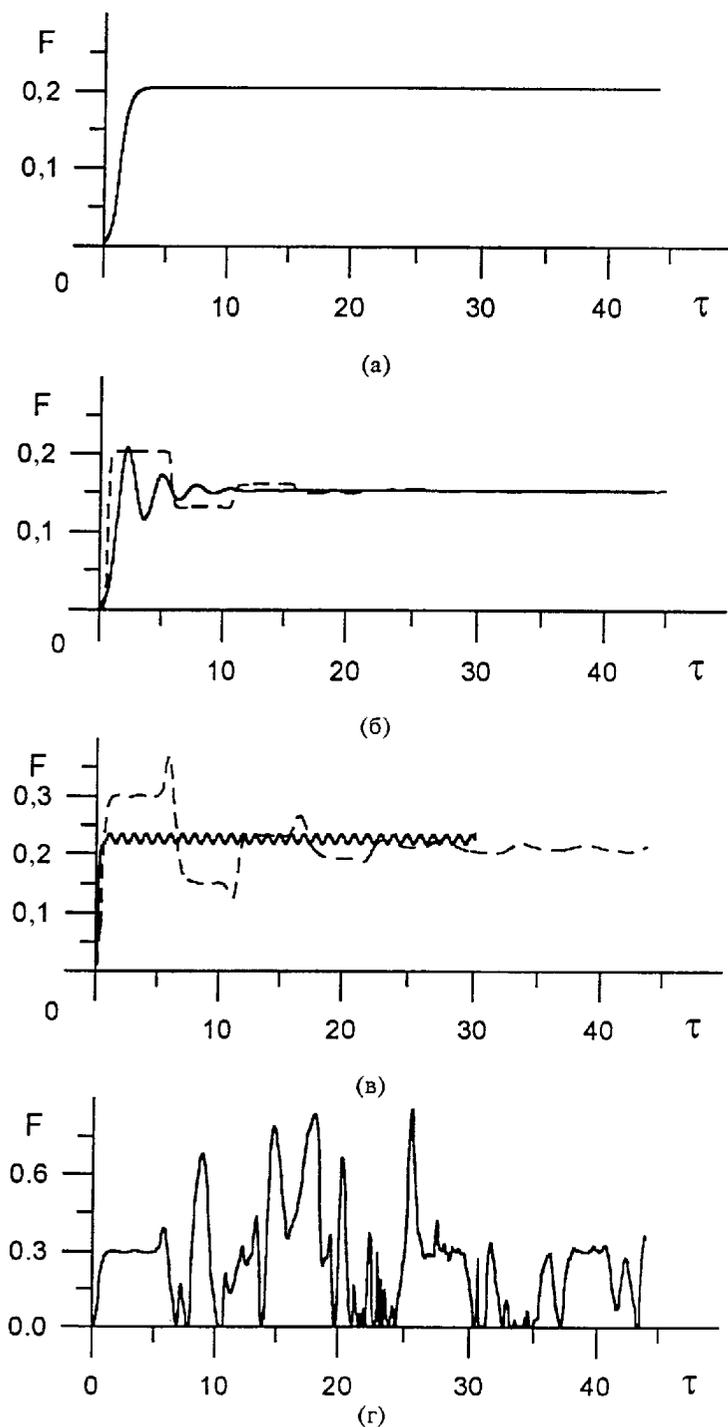


Рис. 1. Изменение режима колебаний гиротрона по мере увеличения коэффициента отражения  $R$  ( $R = 0, 0,1, 0,3, 0,4$ , время задержки отраженного сигнала: сплошная линия —  $T = 5$ , штрих —  $0,5$ ).

ждать о сценарии перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. На рис. 2 приведены зависимости амплитуды установившегося режима колебаний от времени при  $R = 0,3$  для различных значений параметра тока ( $\tilde{I}_1 = 4\tilde{I}_{ст}$ ,  $\tilde{I}_2 = 8\tilde{I}_{ст}$ ).

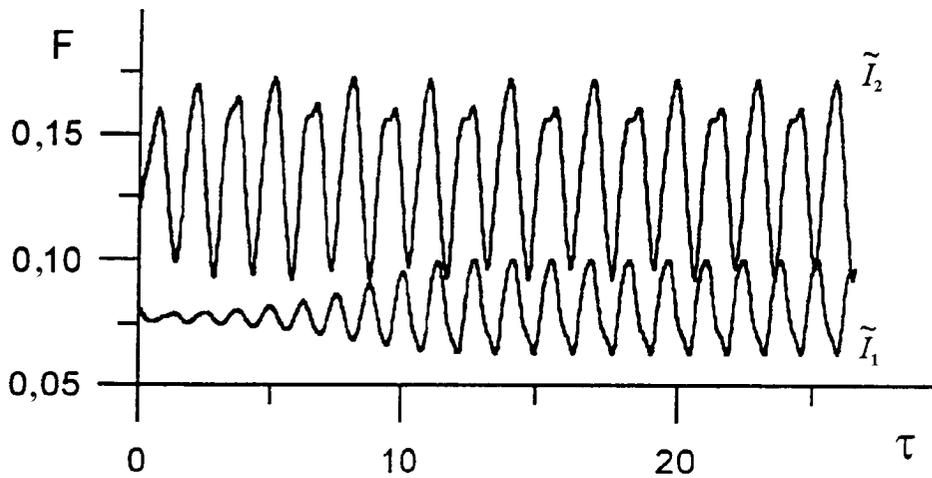


Рис. 2. Временные зависимости амплитуды колебаний для различных значений параметра тока ( $\tilde{I}_1 < \tilde{I}_2$ ).

Наиболее полное представление об устойчивости автоколебаний в гиротроне в присутствии отраженного сигнала можно получить из разбиения зоны генерации на области, соответствующие различным режимам генерации (рис. 3). Сплошная линия соответствует стартовым токам генератора, пунктирная — току срыва автоколебаний в режиме жесткого самовозбуждения. Для генератора с приведенной длиной резонатора  $\mu = 10$ , коэффициентом отражения  $R = 0,2$  и временем задержки отраженного сигнала  $T = 1$ , в области параметров, соответствующих оптимальному по КПД режиму ( $\Delta \approx 0,6$ ,  $\tilde{I}Q \approx 0,1$ ), ток пучка превышает стартовый ток в 2–2,5 раза. При не слишком больших значениях коэффициента отражения в этой области (зона Б на рис. 3) наиболее вероятно возникновение затухающих осцилляций амплитуды выходного сигнала. Наименьшей устойчивостью обладает область малых расстроек и больших токов электронного пучка (зона А на рис. 3). В этой области реализуется режим стохастической генерации, причем с ростом тока область расширяется в сторону больших расстроек циклотронного резонанса. Если ток пучка приблизительно на порядок превышает стартовый ток гиротрона, реализуется либо автомодуляционный режим (зона В) при больших расстройках циклотронного резонанса, либо стохастический (зона А). При дальнейшем увеличении тока наступает ситуация, когда возможны только стохастические колебания. Однако в типичных гиротронах такое превышение тока над стартовым практически нереализуемо. С увеличением коэффициента отражения, значения параметра тока, при которых происходит смена режима генерации, снижаются. При отражении 10% мощности бифуркационные значения тока снижаются больше чем на порядок, по сравнению с режимом без отражений. Таким образом, при экспериментальном исследовании гиротронов в близких к оптимальному по КПД режимам эффект отражения выходной мощности может приводить к возникновению автомодуляционных или стохастических колебаний выходного излучения. Возможно, именно этим объясняется снижение эффективности гиротрона без квазиоптического преобразователя выходного излучения, по сравнению с расчетным, наблюдавшееся в эксперименте. Полученные оценки влияния отражений на устойчивость и эффективность генерации гиротрона хорошо согласуются с экспериментальными данными. Так, например, в экспериментах с промышленным гиротроном 140 ГГц, предназначенным для ЭЦР нагрева плазмы, в выходном тракте устанавливалась диэлектрическая пластина, отражавшая обратно около 3% мощности [6]. При этом наблюдалось уменьшение

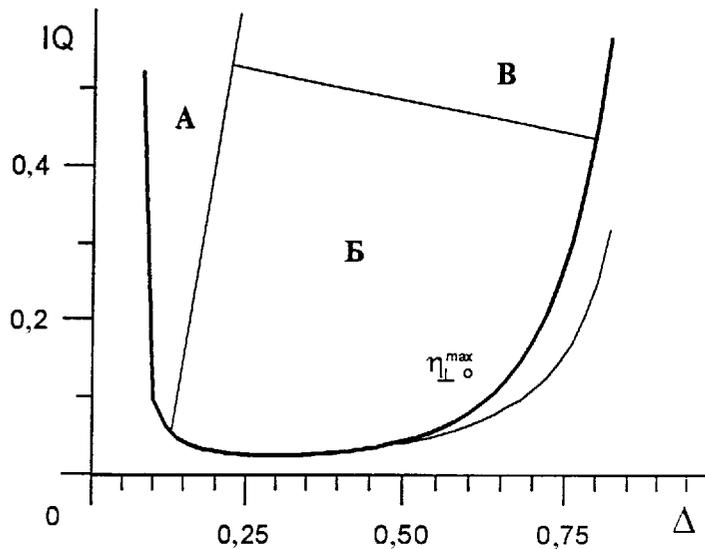


Рис. 3. Разбиение зоны генерации гиротрона на области, соответствующие различным режимам. Кружком отмечена точка наибольшей эффективности генерации.

выходной СВЧ-мощности на 10–20%, что соответствует расчетам.

Для полного представления о влиянии отраженного сигнала целесообразно проанализировать обогащение спектра излучения гиротрона по мере перехода от режима генерации с постоянной амплитудой к стохастическим колебаниям. Изменения спектра легко наблюдать, вычисляя фурье-гармоники для различных режимов. Соответствующие графики фурье-гармоник

$$F_{\Omega} = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} F(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau - \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} F(\tau) d\tau, \quad (4)$$

вычисленные при  $\tau_{\min} = 5$  и  $\tau_{\max} = 150$ , для процессов, представленных на рис. 1 (а, в, г), приведены на рис. 4. В режиме колебаний с постоянной амплитудой отношение максимума фурье-гармоник (наибольшее значение на графиках) к амплитуде спектра на несущей частоте равно  $2 \cdot 10^{-5}$ , а в режимах автомодуляции и стохастическом составляет около  $10^{-2}$ . Излучение в режиме с постоянной амплитудой является почти монохроматическим (рис. 4а), а в автомодуляционном (рис. 4б) и стохастическом (рис. 4в) режимах максимумы гармоник являются величинами одного порядка и существенно выше, чем в режиме колебаний с постоянной амплитудой. При переходе к стохастике наблюдается существенное уширение спектра, что соответствует росту интегральной мощности на частотах, отличных от несущей. Данное обстоятельство может нести положительный эффект, например, в гиротронах, используемых для объемного нагрева и спекания керамики, поскольку обеспечит отсутствие интерференционной картины в области нагрева и, следовательно, более равномерное прогревание образца по сравнению с одночастотным излучением. В то же время, например, в гиротронах для активной диагностики плазмы, уширение спектра выходного излучения крайне нежелательно.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты демонстрируют существенное влияние отражений на устойчивость работы и состав выходного излучения гиротрона. По мере увеличения отраженного сигнала происходит сме-

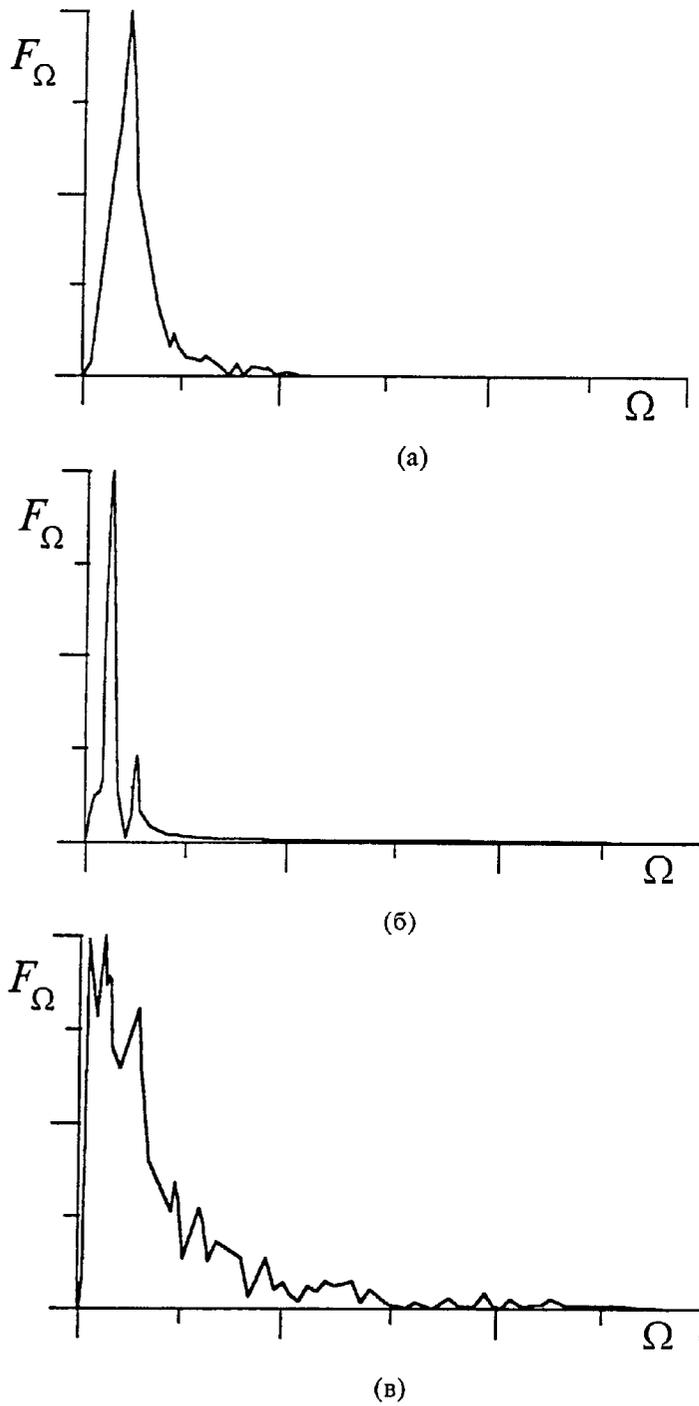


Рис. 4. Обогащение спектра излучения гиротрона по мере перехода от режима генерации с постоянной амплитудой к режиму модулированных колебаний и к стохастическим колебаниям.

на режимов генерации от режима с постоянной амплитудой к режиму автомодуляции, и при дальнейшем увеличении — к стохастическим колебаниям. Результаты показывают, что отражение в пространство взаимодействия примерно 10% мощности при параметрах генератора, близких к оптимальному по КПД режиму, приводит к установлению стохастических колебаний со снижением КПД и значительным уширением спектра выходного излучения.

Описанный сценарий развития генерации, по мере превышения накачки над пусковым током, сохраняет все ранее известные тенденции перехода от стационарного режима генерации к автомодуляционному и далее к стохастике, неоднократно описанные в литературе, например, [7]. Но, в отличие от режима в отсутствие отражений, смена режима генерации происходит при существенно меньших (примерно на порядок) превышениях тока пучка над стартовым током генератора. При этом бифуркационные токи становятся соизмеримыми с рабочими токами гиротронов. Результаты исследования позволяют оценить условия устойчивости генерации ВЧ-колебаний в гиротронах в присутствии отраженного сигнала и выработать требования к согласованию элементов электродинамической системы гиротронов и линий передачи микроволнового излучения.

Авторы глубоко признательны М. А. Моисееву за неоднократное обсуждение данной работы и ценные советы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 97-02-17061.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гиротроны: Сб. научных трудов /Под ред. В. А. Флягина. — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1989. — 216 с.
2. Запевалов В. Е., Кейер А. П., Мясников В. Е., Малыгин С. А., Флягин В. А. //Электронная промышленность, 1991. № 6. С. 71.
3. Вуков Ю. В., Еремеев А. Г., Семенов В. Е. — In: Proc. of the Int. Workshop Strong Microwaves in Plasmas. N. Novgorod, 1993. V. 1. P. 414.
4. Ергаков В. С., Моисеев М. А., Хижняк В. И. //Радиотехника и электроника, 1978. Т. 23. № 12. С. 2591.
5. Моисеев М. А., Нусинович Г. С. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1974. Т. 17. № 11. С. 1709.
6. Myasnikov V. E., Denisov G. G., Zapevalov V. E. et al. — In: Proc. of the Russian-German Meeting on ECRH and Gyrotron, 1997.
7. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П. Релятивистская высокочастотная электроника. — Горький, 1981. С. 101.

Институт прикладной физики РАН,  
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
25 сентября 1997 г.

#### THE IMPACT OF REFLECTIONS ON THE STABILITY OF GYROTRON AUTOOSCILLATIONS

*M. Yu. Glyavin, V. E. Zapevalov*

The influence of some types of reflections on gyrotron autooscillations has been studied. The estimation is given of oscillation stability conditions in the presence of the reflected signal. The processes in a gyrotron with a fixed structure of HF-field are numerically simulated. The signal spectrum enrichment in the presence of reflections has been investigated.

*M. Ю. Глявин, В. Е. Запевалов*

1355