

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XL № 8

Нижний Новгород

1997

Содержание

Лесовой С. В., Лубышев Б. И., Трекков Т. А. Метод повышения чувствительности солнечных линейных интерферометров .....	933
Платонов К. Ю., Флейшман Г. Д. Реабсорбция резонансного переходного излучения .....	941
Сугак В. Г. Оценка возможности обнаружения подповерхностных слоистых неоднородностей при зондировании с поверхности Земли .....	952
Разсказовский В. Б. Дифракция на полуплоскости с неровным краем в задаче распространения радиоволн над поверхностью при малых углах скольжения .....	965
Вебер В. Л. Контраст изображений малоразмерных объектов при наблюдении через рассеивающую среду методом просветной конфокальной микроскопии .....	980
Введенский Н. В., Вдовичева Н. К., Гильденбург В. Б., Жарова Н. А., Шерешевский И. А., Ясин М. И. Мелкомасштабные динамические структуры в микроволновых разрядах низкого давления .....	991
Маниенков А. Б. Отражение поверхностной моды от обрыва диэлектрического волновода .....	1004
Жукова И. С., Саичев А. И. Двухточечные статистические свойства пассивной примеси в хаотической сжимаемой среде .....	1019
Апресян Л. А., Караваев В. В., Молодцов В. С. Модификации метода Редди и их предельное разрешение мощных случайных источников .....	1035

<b>Запевалов В. Е., Моисеев М. А.</b> Влияние эффеkта прови- сания потенциала пучка в гиротронах . . . . .	1042
<b>Боярский Д. А.</b> Микроволновая радиометрия снежного по- крова и мерзлой почвы на частоте 3,95 ГГц . . . . .	1050

УДК 535.853.4

# МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СОЛНЕЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРФЕРОМЕТРОВ

*С. В. Лесовой, Б. И. Лубышев, Т. А. Трекков*

Впервые предложен и реализован метод повышения чувствительности линейных солнечных интерферометров путём усреднения получаемой информации в рабочей полосе инструмента. Он позволяет проводить наблюдения слабоконтрастных источников на Солнце и абсолютные калибровки Сибирского солнечного радиотелескопа (ССРТ) по известным радиоисточникам. В результате таких калибровок можно определять чувствительность телескопа и абсолютное положение диаграммы направленности (ДН). Наблюдения по этому методу начаты в марте и сентябре 1994 г., в качестве стандартных источников были выбраны Луна и 3C273. Приведённые наблюдения этих источников показали, что достижима чувствительность по потоку, равная 14 Ян. На момент первых наблюдений отклонение диаграммы интерферометра Восток–Запад (В–З) от расчётного положения составило не более 17", для интерферометра Север–Юг (С–Ю) выявлен фазовый набег, приводящий к отклонению диаграммы от расчётного положения на 60–180" в зависимости от времени наблюдений.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Трудности наблюдений слабоконтрастных деталей в распределении радиояркости по Солнцу и проведения калибровок абсолютных потоков солнечных радиоинтерферометров определяются их низкой чувствительностью. Рассмотрим предлагаемый метод повышения чувствительности на примере наблюдений космических источников для целей калибровки. Как правило, для калибровок солнечных интерферометров используют излучение самого Солнца, абсолютный поток которого измеряется эталонными антennами [1].

Метод частотного сканирования, применяемый на ССРТ, основан на том, что модуль спектра отклика линейного интерферометра зависит от распределения радиояркости по углу в направлении, перпендикулярном к его "ножевой" ДН [2–4]. При этом ширина ДН также зависит от ширины полосы частотного канала и для обеспечения высокого углового разрешения она должна быть достаточно узкой, что ограничивает чувствительность инструмента. Предлагается снять это ограничение, соответственно повысить чувствительность путём усреднения информации, зарегистрированной по всем частотным каналам в рабочей полосе радиотелескопа.

Конструктивные особенности поворотных устройств антенной системы ССРТ позволяют наблюдать источники только в пределах солнечных склонений ( $\pm 24^\circ$ ). Наиболее яркими источниками, удовлетворяющими этим требованиям, являются Луна, квазар 3C273 и Телец-А. При этом Луна, угловой размер которой близок к солнечному, удобна для абсолютных калибровок потока принимаемого излучения, а 3C273 (угловой размер порядка  $20''$  сравним с шириной ДН ССРТ) удобен для контроля положения ДН.

## 2. МЕТОДИКА

Акустооптический приёмник (АОП) ССРТ, используемый при калибровках, представляет собой фактически 192-канальный анализатор спектра, параметры которого задаются управляющим компьютером [4]. Регистрируемая информация записывается на жёсткий диск этого же компьютера. Однократная запись всех используемых каналов представляет собой одномерное распределение радиояркости по углу в данный момент, так называемый частотный скан. Если рассматривать выходной сигнал каждого канала в зависимости от времени, то будем иметь 192 распределения радиояркости, полученные сканированием за счёт вращения Земли, так называемых временных сканов. Если пренебречь изменением ширины ДН с частотой в данном порядке интерференционной картины, то эти временные сканы будут отличаться лишь сдвигом по времени и периодом. Это пренебрежение правомочно, так как изменение периода и временное положение определяются первой гармоникой линейного интерферометра, в то время как изменение ширины ДН — максимальной:

$$\rho(p, \nu) = \frac{c}{N\nu d \sin p}, \quad \gamma(p, \nu) = \frac{c}{\nu d \sin p}, \quad \frac{\Delta\rho/\Delta\nu}{\Delta\gamma/\Delta\nu} = \frac{1}{N},$$

где  $\rho$  — ширина ДН,  $\gamma$  — период (угол между интерференционными максимумами),  $p$  — угол между базой интерферометра и направлением на источник,  $\nu$  — частота,  $c$  — скорость света,  $N$  — число элементов интерферометра (для ССРТ — 128),  $d$  — расстояние между ближайшими антеннами. Изменение ширины ДН за счёт частоты достигает нескольких угловых секунд лишь при углах, близких к направлению базы. Данные, полученные при таких углах, как правило, интереса не представляют, т.к. само угловое разрешение при этом значительно ухудшается.

Предлагаемый метод увеличения чувствительности радиотелескопа заключается в усреднении всех получаемых временных сканов, что эквивалентно увеличению полосы или времени накопления в 192 раза, а соответственно и чувствительности приёмного устройства в  $\sqrt{192}$  раза. При этом сканы должны быть выделены по периоду и приведены к одному

временному положению. Для того, чтобы не прибегать к интерполяции, можно проводить усреднение на интервале времени, соответствующем наименьшему из периодов.

Опуская технические подробности, связанные с конкретным форматом записи, приведём алгоритм усреднения временных сканов, полученных на различных частотах. Запись частотных сканов за некоторый интервал времени представляет собой матрицу с фиксированным числом столбцов (частотных каналов) — 192 и некоторым числом строк —  $M$ , представляющих собой последовательно полученные частотные сканы. Требования к числу строк очевидны: для усреднения по периоду число строк должно быть не меньше чем интервал времени, определяемый разностью времён начала и окончания периодов на, соответственно, максимальной и минимальной частотах, выраженный в дискретах записи:

$$t_1 = \frac{\arcsin\left(\frac{(n-0,5)c}{d\nu_{\min} \cos p}\right)}{\omega}, \quad t_2 = \frac{\arcsin\left(\frac{(n+0,5)c}{d\nu_{\max} \cos p}\right)}{\omega}, \quad M \geq \frac{|t_1 - t_2|}{\Delta t},$$

где  $n$  — номер интерференционного максимума,  $t_1$ ,  $t_2$  — времена начала и окончания периода, отсчитываемые от кульминации,  $\nu_{\min}$ ,  $\nu_{\max}$  — минимальная и максимальная частоты,  $\omega$  — скорость вращения Земли,  $\Delta t$  — временной дискрет записи.

Алгоритм усреднения работает следующим образом: прежде всего задаётся интервал времени, на котором желательно получить усреднённые сканы, процедура, непосредственно выполняющая усреднение, определяет список порядков, соответствующих заданному интервалу времени и, если этот список не пуст, выполняет цикл построения усреднённых сканов. Элементами цикла являются: позиционирование в записи на время, соответствующее данному порядку, вычисление длины скана и смещения каждого скана в отсчётах, суммирование элементов записи по столбцам с учётом смещения, вывод скана в заданном формате в заданный выходной файл. Отличие методики получения усреднённых сканов с интерферометров В-З и С-Ю заключается лишь в вычислениях порядков. Отметим, что из рассмотрения исключаются времена, при которых само понятие скана отсутствует, практически это сводится к исключению полуденного скана интерферометра С-Ю.

### 3. НАБЛЮДЕНИЯ

Рассмотрим результаты наблюдений Луны и квазара 3С273. На рис. 1 представлен отклик на распределение радиояркости по диску Луны. Выделение быстрофлюктуирующей части шумов осуществлено путём сглаживания и последующего вычитания сглаженного сигнала из исходного.

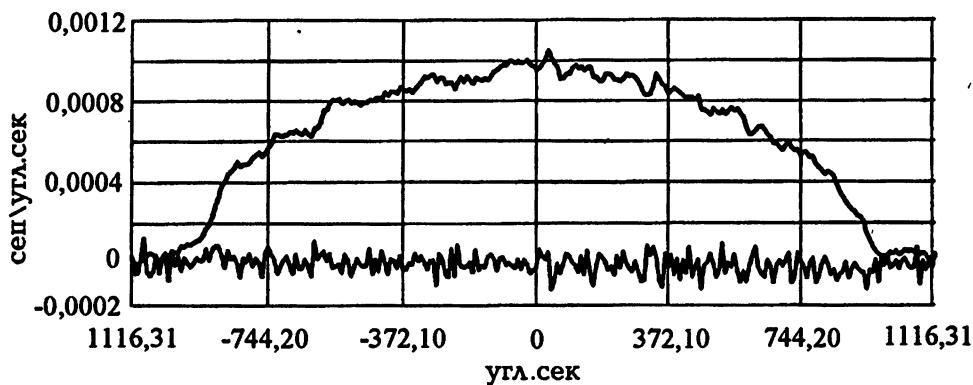


Рис. 1. Одномерная плотность потока Луны. Отклик слажен по четырем точкам, шумы — разность между исходным и слаженным откликами.

Масштаб по оси абсцисс определяется частотой снятия отсчётов и временем наблюдения. Смещение ДН между соседними отсчёты в угловой мере равно

$$\Delta\theta = \omega_E \cos \delta \Delta t,$$

где  $\omega_E$  — относительная угловая скорость вращения Земли,  $\delta$  — склонение на момент наблюдений,  $\Delta t$  — интервал времени между отсчёты. По оси ординат удобно откладывать величину одномерной плотности потока. Для определения масштаба воспользуемся известной яркостной температурой Луны, приведённой в работе Кузьмина А. Д. и Саломоновича А. Е. [5]:

$$\bar{T} = \bar{T}_0 - \bar{T}_1 \cos(\Phi - \eta),$$

где  $\bar{T}_0$ ,  $\bar{T}_1$  — соответственно постоянная и переменная части усреднённой по диску яркостной температуры,  $\Phi$ ,  $\eta$  — оптическая фаза Луны и фазовый сдвиг, зависящий от частоты наблюдения.

Полный поток при этом равен

$$F_s = \frac{2k\bar{T}}{\lambda^2} \Omega_s,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $\lambda$  — длина волны,  $\Omega_s$  — телесный угол Луны. На день наблюдений  $\bar{T} \approx 200^\circ\text{K}$ , т.е. полный поток Луны — 1,39 сеп. Зная полный поток Луны и угловой масштаб оси абсцисс, можно перейти к одномерной плотности потока, исходя из того, что интеграл от отклика по углу должен равняться полному потоку. Интенсивность излучения измеряется суммой двух круговых поляризаций, поэтому используется полный поток. Стандартное отклонение шумов является мерой чувствительности телескопа и равняется в данном случае  $3 \cdot 10^{-3}$  сеп.

На рис. 2 представлен отклик линейного интерферометра В-З ССРТ от квазара 3C273, полученный вышеописанным методом и, дополнительно, усреднённый по десяти сканам. При данном уровне шумов точность определения положения диаграммы сравнима с полушириной последней, т.е. составляет  $17''$ .

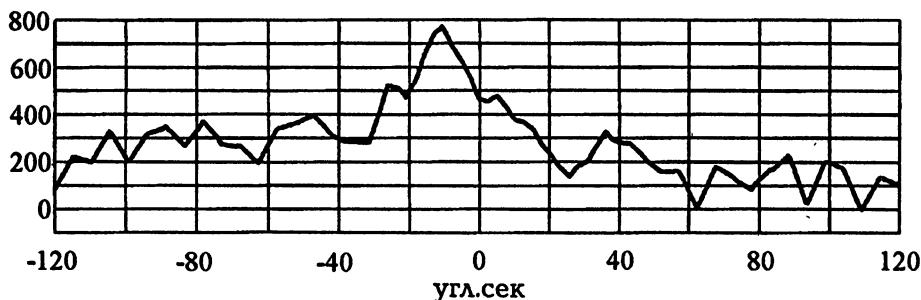


Рис. 2. Отклик квазара 3C273 с интерферометром В-З в разные моменты времени; сплошная линия — до кульминации, штриховая после. По оси Y — абстрактные значения.

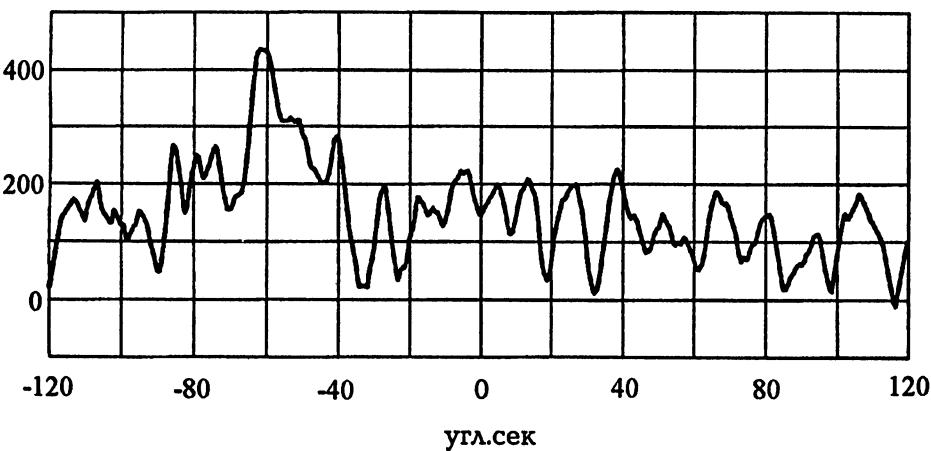


Рис. 3. Отклик квазара 3C273 с интерферометром С-Ю в разные моменты времени, сплошная линия — до кульминации, штриховая после. По оси Y — абстрактные значения. Величина и разность смещений откликов от центра свидетельствуют о наличии в антенно-фидерном тракте интерферометра С-Ю фазового набега, равного  $5'$  на антенну.

Аналогичный отклик интерферометра С-Ю показан на рис. 3. Видно, что он значительно смещён относительно расчётного местоположения (центр рисунка). Из этого смещения, зная время наблюдений, можно определить фазовый набег в антенно-фидерном тракте на момент наблю-

дений:

$$\delta\psi \approx 2\pi \left[ n - \frac{d\nu}{c} (\cos h - \sin h \cdot \delta h) \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \right],$$

где  $\delta\psi$  — искомый фазовый набег от антенны к антенне (в данном случае он равен  $5^\circ$ ),  $h$  — часовой угол,  $\varphi$  — широта места наблюдений.

Данные о величине потока излучения квазара 3С273 на рабочей частоте ССРТ любезно предоставлены академиком Ю.Н. Парижским. Исходя из этой величины — 42 Ян, чувствительность по потоку (трёхкратное превышение среднеквадратичных флюктуаций) равна 14 Ян при постоянной времени 0,28 с и усреднении по 10 сканам.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённые наблюдения Луны и квазара 3С273 показали практическую приемлемость метода повышения чувствительности путём усреднения частотных сканов. В стандартном режиме наблюдений на АОП ССРТ (используется половина рабочей полосы) при частотном усреднении за один период интерференционной картины достигается чувствительность  $3 \cdot 10^{-3}$  сеп. при постоянной времени регистрации, равной 0,56 с. Такой чувствительности достаточно для успешной калибровки абсолютных потоков по Луне и для наблюдения слабоконтрастных образований на Солнце. Практическая значимость метода иллюстрируется приведёнными ниже рис. 4 и рис. 5. На рис. 4 приведён отклик от Солнца в момент кульминации в Бадарах при наблюдении 13 февраля 1997 г. в одном канале (вверху) и при усреднении в 384 каналах (внизу). По оси ординат отложены относительные одномерные потоки, по оси абсцисс — отсчёты. На усреднённом скане видны мелкомасштабные и крупномасштабные неоднородности записи. Они не являются шумами аппаратуры, а проявлением структуры солнечной атмосферы. Детальное сопоставление усреднённых записей радиоизлучения с деталями атмосферы Солнца в оптическом диапазоне предполагается сделать в отдельной работе.

На рис. 5 метод проиллюстрирован наблюдением квазара 3С273 25 марта 1995 г. при постоянной времени 0,28 с. На рис. 5а приведён отклик от 3С273 в одном канале радиоприёмника ССРТ, на рис. 5б — усреднённые записи в одном порядке интерференционной картины по 192 каналам, и на рис. 5в — отклики, усреднённые в пяти порядках интерференционной картины, и в каждом порядке усреднение по 192 каналам. По оси ординат отложены в произвольных единицах: по оси  $x$  — отсчёты, по оси  $y$  — одномерные потоки. Напомним, на рис. 3 приведён отклик квазара 3С273, усреднённый по 10 порядкам интерференционной картины и также по 192 каналам в каждом порядке. Видно, что сигнал от квазара 3С273

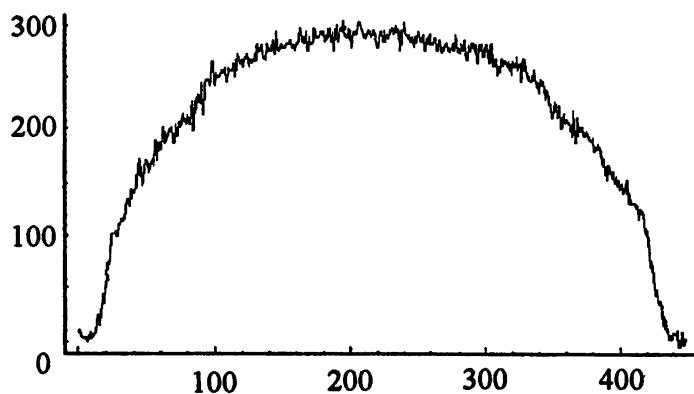


Рис. 4.

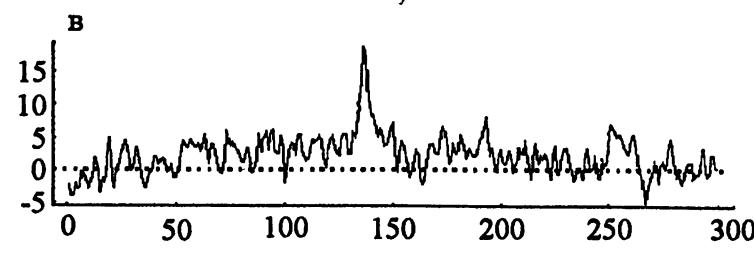
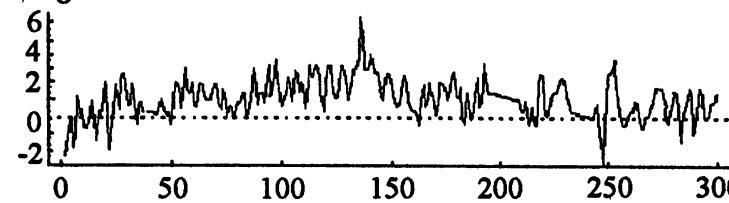
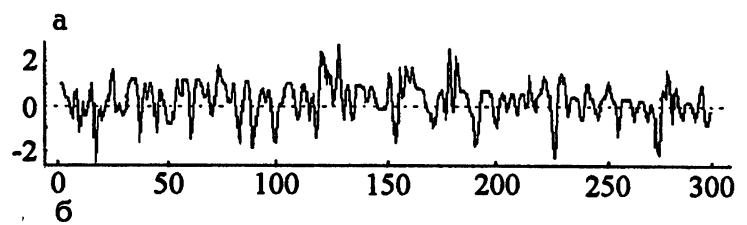


Рис. 5.

регистрируется достаточно уверенно, что позволяет контролировать положение ДН линейных интерферометров. Чувствительность по потоку, полученная из отклика на 3С273 (42 Ян), равна 14 Ян.

В заключение статьи авторы выражают благодарность В. В. Гречневу за консультации и помощь в работе.

Работа выполнена при частичном финансировании программы "Астрономия" и гранта РФФИ 96-02-16648.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tanaka H., Kakinuma T. et al. // Proc. of the Res. Inst. of Atmosph., Nagoya Univ., 1969. V. 16. P. 113.
2. Гельфрейх Г. Б., Корольков Д. В., Смольков Г. Я., Тресков Т. А. // Результаты наблюдений и исследований в период МГСС. Сибирь и Дальний Восток. — М.: Наука, 1967. Вып. 4. С. 168.
3. Смольков Г. Я., Тресков Т. А., Криссинель Б. Б., Потапов Н. Н. // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — М.: Наука, 1983. Вып. 64. С. 130.
4. Алтынцев А. Т., Гречнев В. В., Есепкина Н. А. и др. Наблюдения всплесков микроволнового излучения Солнца на Сибирском солнечном радиотелескопе с 50-миллисекундным разрешением. // Препринт № 11-92. — Иркутск: ИСЗФ СО РАН, 1992. — 12 с.
5. Кузьмин А. Д., Саломонович А. Е. Радиоастрономические методы измерений параметров антенн. — М.: Сов. радио, 1964.

Институт солнечно-земной физики  
СО РАН,  
Иркутск, Россия

Поступила в редакцию  
12 августа 1996 г.

#### METHOD OF SENSITIVITY ENHANCEMENT OF SOLAR LINEAR INTERFEROMETERS

*S. L. Lesovoy, B. I. Lubyshev, T. A. Treskov*

A method of sensitivity enhancement through averaging of the received data in a reception wavelength band of linear solar interferometers has been developed for the first time. It permits us to do the Siberian Solar Radio Telescope (SSRT) absolute calibration using the known radio sources. As a result of such calibration, the telescope sensitivity and absolute beam direction can be estimated. The observation by this method were carried out in March and September 1994, as standard sources the Moon and 3C273 were chosen. The observations have shown, that accessible sensitivity appears down to 14 Ja. On a day of observation, a deviation of the beam East-West SSRT array, a true direction is at least not worse than 17", for North-South array a phase trend was revealed, causing a beam displacement depending on time of observation from a true direction up to 60-180".

УДК 537.531.3

## РЕАБСОРБЦИЯ РЕЗОНАНСНОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*К. Ю. Платонов, Г. Д. Флейшман*

Исследована реабсорбция резонансного переходного излучения (РПИ) быстрых частиц в магнитоактивной плазме со случайными неоднородностями электронной концентрации. Получены инкременты РПИ для изотропных и анизотропных функций распределения быстрых электронов. Коэффициент поглощения радиоволн тепловыми электронами в области плазменной частоты. Показано, что при достаточно сильной анизотропии возможна реализация неустойчивости РПИ. Свойства такого мазерного переходного излучения позволяют отличить его от других когерентных механизмов излучения при интерпретации лабораторных и астрофизических наблюдений.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] вычислены спектры переходного излучения (ПИ) частицы произвольной энергии на частотах  $\omega \geq \omega_p$  с учётом пространственной дисперсии. Сильное увеличение поляризуемости плазмы вблизи  $\omega_p$  приводит к появлению мощного пика (названного резонансным ПИ, ЗПИ), на который приходится основная часть энергии ПИ. Как показано в [2], спектр РПИ оказывается довольно чувствительным к виду диэлектрической проницаемости плазмы. В частности, внешнее магнитное поле существенно модифицирует РПИ при условии

$$\frac{\omega_B^2}{\omega_p^2} > \frac{v_t^3}{v^2 c}, \quad (1)$$

где  $\omega_B$  — гирочастота электрона,  $v_t$  — тепловая скорость,  $v$  — скорость излучающей частицы. Легко оценить с помощью (1), что в астрофизических условиях при анализе РПИ магнитное поле следует учитывать практически всегда.

Для возможных приложений любого механизма излучения к интерпретации наблюдательных данных наряду со спектрами излучения, необходимо знать и соответствующие коэффициенты реабсорбции. Коэффициент реабсорбции ПИ на высоких частотах (в релятивистском пределе) вычислялся в работе [3], где было показано, что оптическая толщина астрофизических источников по переходному излучению, как правило, значительно меньше единицы. В [4] проанализированы общие закономерности индуцированного ПИ и сделан ряд важных качественных заключений

о свойствах такого излучения. В частности, показано, что индуцированного ПИ не возникает, если неоднородности среды распределены изотропно, а интенсивность ПИ отдельной частицы описывается в ультрарелятивистском пределе. В [5] рассмотрено индуцированное ПИ при падении плотного потока частиц на границу раздела двух сред.

Исследование индуцированного излучения представляет наибольший интерес в тех областях частот, где велика интенсивность ПИ отдельной частицы, т.к. на этих частотах легче обеспечить большую оптическую толщину источника излучения. В настоящей работе коэффициент реабсорбции РПИ в магнитном поле вычисляется на основе стандартной методики коэффициентов Эйнштейна [4] с использованием полученных ранее спектров спонтанного РПИ в магнитном поле вблизи  $\omega_p$  [2]. В разделе 3 обсуждается поглощение РПИ изотропным распределением частиц, а в четвёртом разделе выясняются условия, при которых может иметь место усиление РПИ анизотропно распределенными частицами. В заключении обсуждаются вопросы, связанные с приложением указанного механизма излучения к астрофизическим наблюдениям.

## 2. ИНКРЕМЕНТ РЕЗОНАНСНОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Получим выражение для инкремента РПИ методом коэффициентов Эйнштейна. Воспользуемся для этого стандартной методикой, изложенной, например, в [4], обобщив её на случай сильной частотной дисперсии, т.к. вблизи плазменной частоты дисперсионные эффекты весьма существенны. Пусть  $N_{\vec{k}, \sigma}$  — концентрация квантов моды  $\sigma$  с волновым вектором  $\vec{k}$ , а  $w_p^\sigma(\vec{k}, \vec{k}')$  — вероятность излучения кванта с импульсом  $\hbar\vec{k}$  частицей с импульсом  $\vec{v}_{esr}$  при получении ею от среды импульса  $\hbar\vec{k}'$ . Легко понять, что импульс частицы после элементарного акта излучения становится равным  $\vec{p} - \hbar(\vec{k} - \vec{k}')$ . Вероятность  $w_p^\sigma(\vec{k}, \vec{k}')$  связана с интенсивностью спонтанного излучения из единицы объёма очевидным соотношением:

$$\begin{aligned} I_p^\sigma &= \int \hbar\omega_\sigma(\vec{k}) w_p^\sigma(\vec{k}, \vec{k}') d\vec{k}' \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} = \\ &= \int \hbar\omega_\sigma(\vec{k}) w_p^\sigma(\vec{k}, \vec{k}') d\vec{k}' \frac{\omega^2 \frac{d(\omega n_\sigma)}{d\omega} n_\sigma^2 d\omega d\Omega_{\vec{k}}}{(2\pi)^3 c^3}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $n_\sigma$  — показатель преломления соответствующей моды.

Вероятности индуцированного излучения и поглощения пропорциональны  $N_{\vec{k}, \sigma} w_p^\sigma(\vec{k}, \vec{k}')$ , однако, излучение определяется числом частиц с

импульсом  $\vec{p}$  (на верхнем уровне), а поглощение — числом частиц с импульсом  $\vec{p} - \hbar(\vec{k} - \vec{k}')$  (на нижнем уровне). Поэтому уравнение баланса числа квантов имеет вид:

$$\frac{dN_{\vec{k},\sigma}}{dt} = 2\gamma_{\vec{k},\sigma} N_{\vec{k},\sigma} = N_{\vec{k},\sigma} \int w_p^\sigma(\vec{k}, \vec{k}') \left( f_{\vec{p}} - f_{\vec{p}-\hbar(\vec{k}-\vec{k}')} \right) d\vec{k}' d\vec{p}, \quad (3)$$

где  $\gamma_{\vec{k},\sigma}$  — инкремент амплитуды поля излучения,  $f_{\vec{p}}$  — функция распределения быстрых частиц. В результате инкремент РПИ определяется как

$$\gamma_{\vec{k},\sigma} = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^3 c^3}{\omega^3 n_\sigma^2 \frac{d}{d\omega}(\omega n_\sigma)} \int \frac{dI_p^\sigma}{dw d\Omega_{\vec{k}} d\vec{k}'} (\vec{k} - \vec{k}') \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} d\vec{k}' d\vec{p}. \quad (4)$$

Величина  $\frac{dI_p^\sigma}{dw d\Omega_{\vec{k}} d\vec{k}'}$ , представляет собой спектрально-угловое распределение интенсивности спонтанного излучения единицы объёма плазмы, при котором плазма теряет импульс  $\hbar \vec{k}'$ . В нашем случае для вычисления  $\frac{df}{d\vec{p}}$  удобно воспользоваться сферической системой координат в импульсном пространстве, направив ось  $z$  вдоль внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Воспользовавшись выражением оператора градиента в сферических координатах и предположив независимость функции распределения от азимутального угла, окончательно получим:

$$\begin{aligned} \gamma_{\vec{k},\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^3 c^3}{\omega^2 n_\sigma^2 \frac{d}{d\omega}(\omega n_\sigma)} \int \frac{dI_p^\sigma}{dw d\Omega_{\vec{k}} d\vec{k}'} \frac{1}{pv} \left[ p \frac{\partial f}{\partial p} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{v(\vec{k} - \vec{k}') \vec{B}}{\omega B} - \mu \right) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] d\vec{k}' d\vec{p}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mu = \cos \theta_{\vec{v}\vec{B}}$  — косинус угла между скоростью частицы и направлением внешнего магнитного поля. Для РПИ в магнитном поле величина

$\frac{dI_p^\sigma}{dw d\Omega_{\vec{k}} d\vec{k}'}$ , имеет вид:

$$\frac{dI_p^\sigma}{dw d\Omega_{\vec{k}} d\vec{k}'} = \frac{4\pi e^4 q^2 n_\sigma}{m^2 c^3} \frac{[\vec{n} \vec{k}']^2 \delta[\omega - (\vec{k} - \vec{k}') \vec{v}] |\delta N|_{\vec{k}}^2}{(\vec{k} - \vec{k}')^4 \left[ (\epsilon(\omega) - 3(\vec{k} - \vec{k}')^2 d^2 - \frac{\omega_B^2 \omega_B^2}{\omega^4} \sin^2 \theta)^2 + \epsilon''^2 \right]}, \quad (6)$$

где  $q$ ,  $\vec{v}$  — заряд и скорость излучающей частицы,  $\vec{n}$  — единичный вектор в направлении излучения волны,  $m$ ,  $e$  — масса и заряд электрона,  $|\delta N|_{\vec{k}}^2$  — спектр неоднородностей плотности плазмы,  $\epsilon''$  — мнимая часть диэлектрической проницаемости,  $\omega_B$  — гирочастота электрона,  $\theta$  — угол между вектором  $\vec{k}'$  и направлением магнитного поля,  $d$  — дебаевский радиус экранирования [2]. Обратим внимание на то, что в данной задаче

магнитное поле играет двойкую роль: модифицирует спектр спонтанного РПИ через влияние на дисперсию плазмы и обеспечивает выделенное направление при формировании анизотропного распределения быстрых электронов.

### 3. ПОГЛОЩЕНИЕ РПИ ПРИ ИЗОТРОПНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ

При изотропном распределении быстрых частиц

$$f(\vec{p}) = \frac{\xi - 3}{4\pi p_0^3} \left( \frac{p_0}{p} \right)^\xi \quad (7)$$

член с производной по углу в (5) исчезает и инкремент РПИ представляется в виде

$$\gamma_{\vec{k},\sigma} = \frac{\xi}{2} \frac{(2\pi)^3 c^3}{\omega^2 n_\sigma^2 \frac{d}{d\omega} (\omega n_\sigma)} \int \frac{4\pi f(\vec{p}) p \, dp}{v} \int I_{\vec{n},\omega}^\sigma \frac{d\Omega_{\vec{p}}}{4\pi}, \quad (8)$$

где  $I_{\vec{n},\omega}^\sigma = \int \frac{dI_p^\sigma}{d\omega d\Omega_{\vec{k}} d\vec{k}'} d\vec{k}'$  — спектрально-угловое распределение интенсивности РПИ. Последний интеграл в (8) вычислен в [2] для степенного распределения случайных неоднородностей

$$|\delta N|_{\vec{k}'}^2 = \frac{\nu - 1}{4\pi} \frac{k_0^{(\nu-1)} \langle \Delta N^2 \rangle}{k'^{(\nu+2)}} \quad (9)$$

и имеет вид

$$\int I_{\vec{n},\omega}^\sigma \frac{d\Omega_{\vec{p}}}{4\pi} = \frac{4\pi(\nu - 1)}{3(\nu + 2)} \frac{e^4 q^2 n_\sigma}{vm^2 c^3} \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1} \left( \frac{v}{\omega} \right)^{\nu+2} \Phi(\alpha, \beta), \quad (10)$$

где величины  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от параметров плазмы и скорости частиц:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{3} \left( \frac{v}{v_T} \right)^2, \quad \beta = \frac{\omega_B^2}{3\omega_p^2} \left( \frac{v}{v_T} \right)^2, \quad (11)$$

а функция  $\Phi(\alpha, \beta)$  определяется формулами (18)–(22) работы [2]. Подставляя (7) и (10) в (8), получим:

$$\gamma_{\vec{k},\sigma} = -\frac{\xi(2\pi)^4(\nu - 1)(\xi - 3)}{3(\nu + 2)} \frac{e^6 p_0^{\xi-3} n_e k_0^{\nu-1} \langle \Delta N^2 \rangle}{m^2 \omega^{\nu+4} n_\sigma \frac{d}{d\omega} (\omega n_\sigma)} \int \Phi(\alpha, \beta) \frac{v^\nu dp}{p^{\xi-1}}. \quad (12)$$

Декремент затухания РПИ выражается, таким образом, через однократный интеграл по импульсу от функции  $\Phi(\alpha, \beta)$ , который не описывается

элементарными функциями. Тем не менее, легко видеть, что величина интеграла в (12) определяется областью значений переменной  $p \sim mc$ , т.к. подынтегральное выражение достаточно быстро (по степенным законам) убывает при  $p < mc$  и при  $p > mc$  [2]. С учётом уменьшения функции  $\Phi(\alpha, \beta)$  при уменьшении  $v$ , соответствующий интеграл оценивается как

$$\int \Phi(\alpha, \beta) \frac{v^\nu dp}{p^{\xi-1}} = \Phi_c(\alpha, \beta) \frac{c^\nu}{(mc)^{\xi-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-\xi+5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\xi-2}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}, \quad (13)$$

где  $\Phi_c(\alpha, \beta)$  определяется функцией  $\Phi(\alpha, \beta)$  [2] при  $v = c$  (индекс  $c$  у функции  $\Phi_c(\alpha, \beta)$  в дальнейшем опускаем). Подставляя (13) в (12), получим окончательно:

$$\begin{aligned} \gamma_{k,\sigma}^* = & -\frac{\xi(\nu-1)(\xi-3)\Gamma\left(\frac{\nu-\xi+5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\xi-2}{2}\right)}{6(\nu+2)\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) n_\sigma \frac{d}{d\omega}(\omega n_\sigma)} \frac{e^2 n_e}{m\omega_p} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^{\nu+4} \left(\frac{k_0 c}{\omega_p}\right)^{\nu-1} \times \\ & \times \left(\frac{p_0}{mc}\right)^{\xi-3} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \Phi(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (14)$$

где при анализе РПИ можно опустить множитель  $(\omega_p/\omega)^{\nu+4}$  ввиду близости частоты максимума излучения (и поглощения) к плазменной частоте. Заметим, что декремент РПИ может превосходить величину столкновительного затухания волн. Так, при  $N \sim 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $T \sim 10^6 \text{ К}$  (параметры, характерные для корональных арок на Солнце) декремент столкновительного затухания равен

$$\nu_{ei} \approx 60 \frac{N}{T^{3/2}} \approx 600 \text{ с}^{-1}. \quad (15)$$

Декремент РПИ при тех же параметрах фоновой плазмы и

$$\left(\frac{k_0 c}{\omega_p}\right)^{\nu-1} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \approx 10^{-4}, \quad n_e \left(\frac{p_0}{mc}\right)^{\xi-3} \approx 10^3 \quad (16)$$

равен

$$\gamma^\sigma = 10^3 \text{ с}^{-1}. \quad (17)$$

#### ~4. УСИЛЕНИЕ РПИ ПРИ АНИЗОТРОПНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Анизотропные распределения быстрых частиц при определённых условиях оказываются неустойчивыми относительно генерации тех или иных мод электромагнитного излучения. Примером таких неустойчивостей

является возбуждение ленгмюровских волн пучками надтепловых электронов [6] или циклотронная (мазерная) неустойчивость поперечных волн в магнитоактивной плазме [7]. В данном разделе мы обсудим условия, при которых возникает неустойчивость в резонансном переходном излучении и получим выражение соответствующего инкремента неустойчивости.

Рассмотрение коэффициента реабсорбции для анизотропного распределения частиц можно провести тем же способом, что и вычисление интенсивности излучения, т.е. разложив зависящую от углов часть функции распределения в ряд по полиномам Лежандра [2]. Однако, если реальную анизотропию частиц аппроксимировать первыми полиномами Лежандра,

$$f(p, \mu) = f_0(p)[1 + A_1(p)P_1(\mu) + A_2(p)P_2(\mu)], \quad (18)$$

то усиления РПИ не возникает.

Действительно, вклад от потокового члена  $A_1(p)P_1(\mu)$  содержит множитель  $kv/\omega$ , который мал в области пика (при  $\omega \sim \omega_3$  см. [2]):

$$\frac{kv}{\omega} \sim \frac{\omega_B}{\omega_p}. \quad (19)$$

Это означает, что при слабой анизотропии потокового типа, описываемой первым полиномом Лежандра ( $-1 \leq A_1 \leq 1$  из условия положительной определённости функции распределения), неустойчивости не возникает. Чётная часть анизотропной составляющей функции распределения,  $A_2(p)P_2(\mu)$ , не содержит указанной малости. Тем не менее, при  $\xi > 3$  положительный вклад от производной по углу оказывается (по абсолютной величине) меньше отрицательного вклада от производной по модулю импульса. Это значит, что анизотропия указанного типа не достаточно сильная, чтобы обеспечить неустойчивость РПИ.

Для определения требуемой анизотропии рассмотрим две модельные зависимости функции распределения электронов от угла. Первая из них

$$f(p, \mu) \propto \exp(a\mu), \quad \partial f / \partial \mu = af, \quad (20)$$

не является чётной и содержит потоковую составляющую. Главный положительный вклад в данном случае обеспечивает член  $kv \cos \theta / \omega$ , а главный отрицательный — член  $p \partial f / \partial p$ . Таким образом,

$$\left[ p \frac{\partial f}{\partial p} + \left( \frac{v(\vec{k} - \vec{k}') \vec{B}}{\omega_B} - \mu \right) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] \cong \left[ -\xi + a \frac{v}{c} n_\sigma \cos \theta \right] f(p, \mu). \quad (21)$$

В области пика РПИ  $n_\sigma \approx \omega_B / \omega_p$ , а основной вклад в интеграл по модулю импульса дают значения  $v \sim c$ . Поэтому неустойчивость РПИ возможна, если

$$a > \xi / n_\sigma \approx \xi \omega_p / \omega_B. \quad (22)$$

При  $\xi > 3$ ,  $\omega_p/\omega_B \sim 3$  имеем  $a > 10$ , т.е. основная доля быстрых электронов должна быть сосредоточена в пределах конуса с углом раствора меньше или порядка  $25^\circ$ . Раскладывая функцию распределения (20) в выражении (21) (т.е. после дифференцирования по  $mu!$ ) по полиномам Лежандра, легко убедиться, что с точностью порядка 30%, можно ограничиться первым членом такого разложения при интегрировании по углам. В этом приближении инкремент неустойчивости РПИ будет отличаться от (14) лишь заменой множителя  $(-\xi)$  на  $(-\xi + a \frac{v}{c} n_\sigma \cos \theta)$ . Наибольшее усиление в данном случае возникает в направлении вдоль магнитного поля, в поперечном направлении всегда происходит поглощение волн.

Рассмотрим теперь чётную по  $\mu$  функцию распределения, для которой вклад члена  $v\vec{k}\vec{B}/\omega B$  тождественно равен нулю. Можно показать, что независимо от вида чётной функции распределения, после интегрирования по углам имеем:

$$\left[ p \frac{\partial f}{\partial p} - \left( \frac{v\vec{k}'\vec{B}}{\omega B} + \mu \right) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] \cong (-\xi + 1)f < 0, \quad (23)$$

если основная доля частиц имеет малые  $\mu \ll 1$ .

Однако, если производная  $\partial f / \partial \mu$  имеет большую величину в области  $\mu \sim 1$ , то неустойчивость РПИ возможна. Пусть функция распределения не зависит от  $\mu$  при  $|\mu| < \mu_1$  и линейно убывает до нуля при увеличении  $|\mu|$  до единицы ( $f(p, \mu) = f(p)f(\mu)$ ):

$$f(\mu) = \frac{1}{1 + \mu_1} \begin{cases} 1, & |\mu| < \mu_1, \\ (1 - \mu)/(1 - \mu_1), & \mu_1 < |\mu| < 1, \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \begin{cases} 0, & |\mu| < \mu_1, \\ -1/(1 - \mu_1^2), & \mu_1 < |\mu| < 1. \end{cases} \quad (25)$$

В таком случае провести вычисления для всех частот не удается. Тем не менее, в области пика можно воспользоваться тем, что  $k'_{\text{eff}} \gg \omega/v$ , и учесть, что главный вклад в интеграл по углам  $\theta_{\vec{k}'\vec{B}}$  в (5), (6) от членов, содержащих  $\cos^{2n} \theta_{\vec{k}'\vec{B}}$ , мал по сравнению с вкладом членов, не содержащих  $\cos \theta_{\vec{k}'\vec{B}}$  в числителе. Поэтому разложение  $\mu$  по углам  $\theta_{\vec{k}'\vec{B}}$  и  $\theta_{\vec{k}'\vec{v}}$  упрощается (для простоты угол между  $\vec{k}'$  и  $\vec{v}$  обозначим  $\theta_1$ , а через  $\varphi$  — азимутальный угол между  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$ ):

$$\mu = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos \varphi \approx \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{k'v} \right)^2 \right]^{1/2} \cos \varphi. \quad (26)$$

Тогда с учётом (26)

$$\int d\vec{p} \delta(\omega + \vec{k}' \cdot \vec{v}) \left( -\xi f(p, \mu) - \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = \\ = \pi \int \frac{f(p)p^2 dp}{k' v} \left( -\xi + \frac{2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{k' v} \right)^2 - \mu_1^2 \right]^{1/2}}{\pi(1 - \mu_1^2)} \right). \quad (27)$$

После чего инкремент неустойчивости РПИ принимает вид:

$$\gamma^\sigma = \frac{(2\pi)^5 e^6 n_e}{4m^2 \omega^2 n_\sigma \frac{d}{d\omega} (\omega n_\sigma)} \int \frac{f(p)p dp}{v^2} \int dk' dx (1 + \cos^2 \theta) \times \\ \times |\delta N|_{\vec{k}}^2 \frac{\left( -\xi + \frac{2[1 - (\omega/k' v)^2 - \mu_1^2]^{1/2}}{\pi(1 - \mu_1^2)} \right)}{k' \left[ \left( \epsilon(\omega) - 3(\vec{k} - \vec{k}')^2 d^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{\omega^4} (1 - x^2) \right)^2 + \epsilon''^2 \right]}. \quad (28)$$

Дальнейшие вычисления полностью аналогичны проведённым в работе [2] и в разделе 3 данной работы. Единственное отличие состоит в том, что теперь мы можем удержать только наибольшие в области пика члены, так как учёт следующих членов (не содержащих множителя  $(c/v_T)^{1/2}$ ) привёл бы к превышению точности, с которой получено выражение (27). В результате находим

$$\gamma^\sigma = \frac{(\nu - 1)(\xi - 3)(\nu + 3)\pi^5 e^6 n_e N^2}{3^{3/2}(\nu - \xi + 5)(\xi - 2)m^3 \omega_p^5 n_\sigma \frac{d}{d\omega} (\omega n_\sigma)} \left( \frac{p_0}{mc} \right)^{\xi - 3} \times \\ \times \left( \frac{c}{v_T} \right)^3 \left( \frac{k_0 c}{\omega_p} \right)^{\nu - 1} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left( \frac{\omega_p}{\omega_B} \right) (1 + \cos^2 \theta_{\vec{n}}) \times \\ \times \frac{[c/(2 \cdot 3^{1/2} v_T)]^{1/2}}{(\alpha - \beta)^3 [\alpha(\alpha - \beta)]^{1/4}} \left\{ -\xi + \frac{2(1 - \zeta^2 - \mu_1^2)^{1/2}}{\pi(1 - \mu_1^2)} \right\}, \quad (29)$$

где  $\zeta = \omega_p v_T / (\omega_B c)$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  определяются выражением (11) при  $v = c$ . В данном случае усиление вдоль поля вдвое превышает усиление поперёк поля. Рассмотрим зависимость инкремента от параметра  $\mu_1$ . Фигурная скобка в (29) достигает своего максимального значения, равного  $-\xi + 1/(\pi\zeta)$ , при  $\mu_1^2 = 1 - 2\zeta^2$ : при увеличении или уменьшении  $\mu_1$  инкремент падает. Таким образом, для возникновения неустойчивости в случае чётной функции распределения частиц по углам необходимо отсутствие частиц в малом интервале углов  $|\mu| = 1$ , ширина интервала  $\Delta\theta \cong \zeta$ . В остальном диапазоне углов  $f(\mu)$  может быть любой плавной функцией. Функции распределения такого вида могут встречаться в магнитных ловушках, часто возникающих в магнитосферах планет и звёзд.

Проведём численные оценки инкремента (29) и необходимых параметров магнитной ловушки в случае ионосферной плаэмы. При  $k_0 c / \omega_p)^{\nu-1} \langle \Delta N^2 \rangle / N^2 \cong 10^{-4}$ ,  $(p_0/mc)^{\xi-3} n_e \cong 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ ,  $\omega_p/\omega_B \cong 3$ ,  $\mu_1^2 = 1 - 2\zeta^2$ ,  $\omega_p \cong 3 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $v_t/c \cong 10^{-3}$  инкремент  $\gamma^\sigma \cong 80 \text{ с}^{-1}$ . Величина пробочного отношения  $B/B_{\max}$ , необходимая для установления необходимого профиля функции распределения  $f(\mu)$  составляет  $B/B_{\max} = \cong 2\zeta^2 \cong 2 \cdot 10^{-5}$ .

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена реабсорбция резонансного переходного излучения в магнитном поле. Оказывается, что коэффициент поглощения РПИ может превышать коэффициент поглощения радиоволн тепловыми электронами в области плаэменной частоты.

Для анизотропных функций распределения быстрых электронов возможна реализация неустойчивости РПИ. Соответствующий экспоненциальный рост такого (мазерного) РПИ может приводить к высоким яркостным температурам результирующего радиоизлучения, как и другие когерентные механизмы — плаэменный или циклотронный мазерный. Эти механизмы широко применяются для различных типов радиоизлучения Солнца, планет и звёзд, часто демонстрирующих сверхтонкую временную структуру, например, миллисекундные радиоспайки [8]. Представляет интерес остановиться подробнее на отличиях мазерного РПИ от этих механизмов. Прежде всего, следует отметить принципиальное отсутствие гармонической структуры радиоизлучения, генерируемого мазерным РПИ: существенно усиливается только излучение вблизи локальной плаэменной частоты. Плаэменным механизмом генерируются волны вблизи  $\omega_p$  и  $2\omega_p$  (реже — на третьей гармонике) [6]. Циклотронное мазерное излучение возникает вблизи низших гармоник электронной циклотронной частоты, причём возможны нецелые отношения "гармоник" [9]. Кроме того, циклотронное мазерное излучение, генерируемое в условиях солнечных вспышек, не должно, как показано в [10], сопровождаться мягким гамма-излучением, тогда как обязательно должно сопровождаться жёстким рентгеновским излучением (т.е. число быстрых электронов с  $E^k > 0,5-1 \text{ МэВ}$  должно быть достаточно малым). Наличие же неустойчивости РПИ не чувствительно к особенностям энергетического спектра электронов в области 1 МэВ, так что мазерное РПИ может сопровождаться мягким гамма-излучением.

Механизмы генерации многих типов солнечного радиоизлучения установлены достаточно надёжно. Тем не менее, вопрос о механизме излучения миллисекундных радиоспайков остаётся открытым и дискуссионным, несмотря на огромное число работ, посвящённых этой проблеме. В качестве примера упомянем работу [11], в которой показано, что кластеры

спайков демонстрируют нецелые отношения гармоник. Как было указано выше (см. также [9]), это свойство характерно для циклотронного мазерного излучения. Однако, вывод о наличии гармонической структуры (с нецелыми отношениями) сделан на основе анализа части спайковых событий. Поэтому остаётся неясным, представляют ли все "спайкоподобные" всплески однородную группу явлений или нет. Нельзя исключить возможность, что часть таких явлений (без гармонической структуры, возможно сопровождающихся мягким гамма-излучением) генерируется мазерным РПИ. Для того, чтобы проверить это предположение, следует произвести специальное исследование на достаточно большом наблюдательном материале (тем более, что условия возникновения неустойчивости РПИ более жёсткие, чем для циклотронного мазерного излучения, т.ч. в любом случае, последнее должно возникать чаще, чем мазерное РПИ).

Настоящее исследование стало возможным отчасти благодаря гранту № J56100, предоставленному Международным научным фондом и Правительством Российской Федерации. Г.Д.Флейшман благодарит Международный центр фундаментальной физики в Москве за предоставление стипендии в рамках гранта INTAS 93-2492-ext.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Платонов К.Ю., Флейшман Г.Д. //ЖЭТФ, 1994. Т.106. С.1053.
2. Платонов К.Ю., Флейшман Г.Д. //ЖЭТФ, 1995. Т.108. С.1942.
3. Флейшман Г.Д. //Астрон. ж., 1989. Т.66. С.932.
4. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное расщепление. — М.: Наука, 1984.
5. Истомин Я.Н., Лукьянов А.В. //ЖЭТФ, 1990. Т.97. С.1578.
6. Железняков В.В. Электромагнитные волны в космической плазме. — М.: Наука, 1977.
7. Степанов А.В. //Письма в Астрон. ж., 1978. Т.4. С.193.
8. Benz A. O. //Solar Phys., 1986. V.104. P.99.
9. Fleishman G. D., Yastrebov S. G. //Solar Phys., 1994. V. 154. P. 361.
10. Fleishman G. D., Yastrebov S. G. //Solar Phys., 1994. V. 153. P. 389.
11. Krucker S., Benz A. O. //Astron. Astrophys., 1994. V. 285. P. 1038.

С.-Петербургский  
государственный технический  
университет,  
физико-технический институт  
им. А. Ф. Иоффе РАН

Поступила в редакцию  
18 октября 1996 г.

## REABSORPTION OF RESONANT TRANSITION RADIATION

*K. Yu. Platonov, G. D. Fleishman*

Reabsorption of resonant transition radiation (RTR) emitted by fast particles in magnetized plasma with random inhomogeneities of electron concentration is investigated. The RTR growth rates for isotropic and anisotropic distributions of fast electrons are calculated. The RTR absorption coefficient can exceed the free-free absorption coefficient. An RTR instability is shown to arise if the anisotropy is strong enough. The maser emission has properties different from other kinds of maser emissions, which allows us to distinguish it in the laboratory experiments and astrophysical observations.

УДК 528.813; 550.837.7

# ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПОДПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОИСТЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПРИ ЗОНДИРОВАНИИ С ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

*B. Г. Сугак*

Излагаются метод расчёта электромагнитных полей над трёхслойной средой, основанный на использовании функции ослабления и импедансных граничных условий, и результаты моделирования двухпозиционного зондирования такой среды применительно к обнаружению второго от поверхности слоя.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наряду с традиционными для геофизиков задачами электромагнитного зондирования коры Земли усилился интерес к методам, позволяющим обнаруживать слоистые образования на глубинах до десятков метров. Такие методы, в частности, рассматриваются в связи с экологическими задачами, когда требуется обнаруживать и идентифицировать подпочвенные скопления нефтепродуктов техногенного происхождения, возникающие в окрестностях нефтехранилищ и нефтеперерабатывающих заводов. Такие скопления нефтепродуктов располагаются, как правило, на сравнительно небольших глубинах (до 10 м) в слое крупнопористых пород, например, песка, ограничиваемые снизу уровнем грунтовых вод. Верхняя граница может быть размытой и определяется только количеством нефтепродуктов и рельефом слоёв. Слой, насыщенный нефтепродуктами, обычно имеет мощность до нескольких метров и может существенно менять своё местоположение при изменении метеоусловий, в частности, количества осадков.

Имеющиеся в арсенале геофизического зондирования земной коры, разработанные и применяющиеся на практике методы не могут быть непосредственно использованы для решения рассматриваемых задач, так как они разрабатывались, в основном, для глубинного зондирования (от нескольких сотен метров до нескольких десятков километров), что обусловило применение низкочастотных зондируемых сигналов (верхние значения частот составляют единицы килогерц). Кроме того, при низкочастотных сигналах возможность обнаружения слоев обусловлена, главным

образом, проводимостью земных пород. В то же время в случае грунтов, пропитанных нефтепродуктами, можно ожидать значительного изменения диэлектрической проницаемости, роль которой при традиционных подходах к задачам геофизического зондирования не учитывается. С другой стороны, известно [1], что при распространении радиоволн поле на поверхности Земли зависит от электрических свойств подповерхностных слоёв грунта, причём на разных частотах влияние глубинных слоёв и их электрических свойств оказывается различным.

Таким образом, для решения рассматриваемой задачи необходимо знание особенностей распространения радиоволн над слоистой поверхностью Земли с целью извлечения информации о характеристиках слоёв из измеряемых значений напряжённости электромагнитного поля на поверхности.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в качестве первого приближения к реальной ситуации следующую трёхслойную модель: верхний от поверхности слой толщиной от единиц до нескольких метров, который в дальнейшем будем называть экранирующим, обнаруживаемый полезный слой толщиной до 2–3 м, лежащий на хорошо проводящем основании, которое можно считать простирающимся в бесконечность. Этим основанием являются водоносные слои, насыщенные грунтовыми водами, которые служат естественным препятствием для нефтепродуктов. Причём типичным слоем, лежащим выше уровня грунтовых вод, является песок, который обладает относительно хорошими канализирующими свойствами для последних. Типичным экранирующим слоем обычно являются образования типа глины, суглинка, супеси и т.п. при различном процентном содержании влаги. Геометрия рассматриваемой задачи представлена на рис. 1. Каждый слой характеризуется своими значениями диэлектрической проницаемости  $\epsilon_i$ , удельной проводимости  $\sigma_i$ , где  $i = 1, 2, 3, 4$  — номер слоя.

Решение более простых задач, например, связанных с зондированием двухслойных сред, после решения рассматриваемой задачи, будет тривиальным.

Для дальнейшего решения задачи существенным является знание электрических свойств упомянутых слоёв, т.е. значений диэлектрической проницаемости и удельной проводимости, и их частотных зависимостей. В литературе этот вопрос освещён недостаточно. Наиболее важной является эта информация для слоя, представляющего собой смесь песка, нефтепродуктов и влаги, т.к. в литературе отсутствуют какие-либо данные для этого случая. Экранирующий слой при этом можно рассматривать как слой, препятствующий получению информации о полезном слое, т.е. рассматривать его удельную проводимость до предельных значений, при

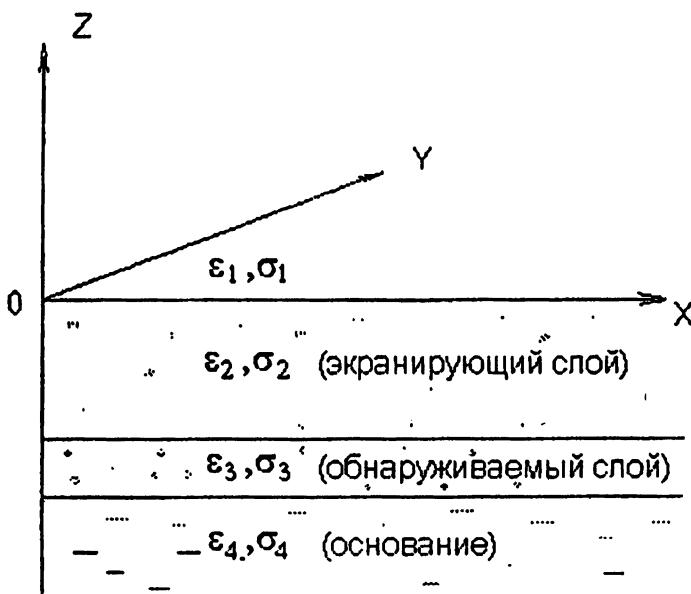


Рис. 1.

которых затухание радиоволны ещё позволяет оценивать характеристики обнаруживаемого слоя.

С целью получения дополнительной информации были проведены измерения электрических характеристик песка при различных содержаниях в нём нефтепродуктов и влаги в диапазоне частот от 30 до 150 мГц с помощью специально разработанного датчика коаксиального типа и измерителя полных сопротивлений ИПС-2. Датчик можно было погружать в среду с поверхности без существенного нарушения её структуры. Основные результаты измерений и соответствующие литературные данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

## Измеренные значения

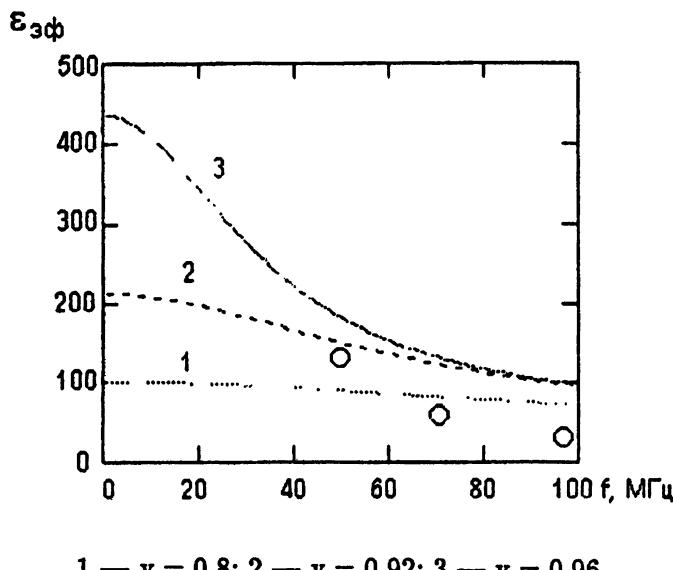
Частота, МГц	Песок сухой		Песок мокрый		Песок сухой + дизтопливо		Песок + дизтопл.+вода	
	$f$	$\epsilon$	$\sigma$ , См/м	$\epsilon$	$\sigma$ , См/м	$\epsilon$	$\sigma$ , См/м	$\epsilon$
50	10	$8 \cdot 10^{-5}$	37	$5 \cdot 10^{-4}$	18	$1,3 \cdot 10^{-4}$	110	$4,5 \cdot 10^{-4}$
100	8	$1 \cdot 10^{-4}$	26	$1,6 \cdot 10^{-3}$	15	$2,6 \cdot 10^{-4}$	45	$5 \cdot 10^{-4}$
150	6	$8 \cdot 10^{-3}$	21	$1 \cdot 10^{-3}$	14	$3,4 \cdot 10^{-4}$	39	$6 \cdot 10^{-4}$
Литературные данные [2, 3]								
0,1–50 МГц	4–11	$> 1 \cdot 10^{-5}$	$> 20$	$> 1 \cdot 10^{-3}$	–	–	–	–

Видно, что результаты измерений не противоречат имеющимся литературным данным [2]. Следует отдельно отметить случай, когда во

влажный песок с диэтиловым добавлялась вода. При этом отмечалось существенное увеличение диэлектрической проницаемости, особенно на сравнительно низких частотах (20–30 мГц), что может свидетельствовать о сложном механизме образования смеси частиц песка, влаги и диэтилового. При этом, частицы песка с пленкой влаги разной толщины могут находиться в среде, образованной из смеси диэтилового и воды. Если рассматривать такую среду, характеризующуюся значениями ( $\epsilon_1, \sigma_1$ ), в которую вкраплены мелкие частицы с другими значениями ( $\epsilon_2, \sigma_2$ ) [3], то можно воспользоваться следующей формулой для эффективной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\text{eff}}$ :

$$\epsilon_{\text{eff}}(f, v) = \left( \epsilon_0 \epsilon_1 + i \frac{\sigma_1}{2\pi f} \right) \frac{2(1-v) \left( \epsilon_0 \epsilon_1 + i \frac{\sigma_1}{2\pi f} \right) + (1+2v) \left( \epsilon_0 \epsilon_2 + i \frac{\sigma_2}{2\pi f} \right)}{(2+v) \left( \epsilon_0 \epsilon_1 + i \frac{\sigma_1}{2\pi f} \right) + (1-v) \left( \epsilon_0 \epsilon_2 + i \frac{\sigma_2}{2\pi f} \right)}, \quad (1)$$

где  $v$  — удельное объемное содержание вкраплений ( $\epsilon_2, \sigma_2$ ) в среду с ( $\epsilon_1, \sigma_1$ ),  $f$  — частота.



1 —  $v = 0,8$ ; 2 —  $v = 0,92$ ; 3 —  $v = 0,96$ .

Рис. 2.

На рис. 2 представлены графики вещественной части  $\epsilon_{\text{eff}}(f, v)$  как функции частоты  $f$  при разных значениях  $v$  соответственно. Экспериментально измеренные значения относительной диэлектрической проницаемости представлены на рис. 2 в виде кружков. Видно, что измеренные значения примерно соответствуют значениям  $\epsilon_{\text{eff}}(f, v)$ , вычисленным по формуле (1) при  $v \approx 85\%$ ,  $\epsilon_1 = 60$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 6$ ,  $\sigma_2 = 3 \cdot 10^{-5}$ . Необходимо отметить, что описанный выше эффект резкого увеличения диэлектриче-

ской проницаемости не наблюдался в случае, когда дизтопливо вводилось во влажный песок, что требует дополнительных исследований для выяснения механизма этого явления.

Таким образом, скопление нефтепродуктов в слое песка выше уровня грунтовых вод в некоторых случаях (проникание влаги, обусловленной осадками с поверхности Земли и др. явлениями) может сопровождаться значительным возрастанием эффективной диэлектрической проницаемости в области частот 10–70 МГц, что может служить отличительным признаком для их обнаружения и идентификации под поверхностью.

### 3. АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Решению задачи о распространении электромагнитных волн над неоднородной по глубине средой, в частности, в слоистой коре Земли, посвящено значительное количество работ, опубликованных в разные годы. Наиболее детально этот вопрос рассматривался, как уже упоминалось, применительно к глубинным зондированиям Земли [3]. В строгой постановке решение этой задачи достаточно подробно описано в [4]. В частности, один из методов решения, с помощью которого можно решать задачу о зондировании подповерхностной слоистой структуры, основан на разложении сферической волны на плоские волны с соответствующими коэффициентами отражения для каждой рассматриваемой волны (метод Вейля) [1]. Более простым по вычислительным затратам является метод, основанный на приближённых импедансных граничных условиях на поверхности слоистой структуры, аналогичных граничному условию Леонтьевича [4].

Рассмотрим случаи вертикального электрического и магнитного диполей, расположенных на поверхности Земли (т.е. при  $z = 0$ ). Напряжённость поля в точке наблюдения определяется двумя волнами: прямой, которая скользит вдоль поверхности в верхнем полупространстве, и боковой — в нижнем. Поля этих волн наиболее просто вычисляются с помощью импедансных граничных условий. Например, для вертикального электрического диполя последние определяются следующей формулой [3]:

$$\frac{\partial E_{1z}}{\partial z} = -ik_1 \frac{Z_{||s}}{Z_{01}} E_{1z}, \quad (2)$$

где  $E_{1z}$  — вертикальная составляющая напряжённости электрического поля,  $k_1$  — волновое число среды, в которой распространяется волна,  $Z_{01}$  — импеданс 1-й среды, определяемый отношением электрической и магнитной компонент напряжённости поля в 1-й среде,  $Z_{||s}$  — поверхностный импеданс полупространства, соответствующий вертикальному

электрическому диполю, который при скользящем распространении определяется следующим образом:

$$Z_{\parallel s} = Z_{02} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}, \quad (3)$$

где  $Z_{02}$  — импеданс 2-го слоя, определяемый отношением электрической и магнитной компонент напряжённости поля во 2-м слое,  $n$  — коэффициент преломления.

Аналогичная формула имеет место и для вертикального магнитного диполя с заменой выражения для поверхностного импеданса полу-пространства на:

$$Z_{\perp s} = Z_{02} \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}, \quad (4)$$

При представлении решения уравнения Гельмгольца в виде:

$$F = F_{\text{сф}} Y, \quad (5)$$

где  $F_{\text{сф}}$  — сферическая волна в однородной среде,  $Y$  — функция ослабления, зависящая от координат точки наблюдения, частоты и электрических параметров среды, применимость граничных условий (2) для отыскания решения определяется неравенством:

$$\left| \frac{1}{k_1 Y} \frac{\partial Y}{\partial z} \right| \ll 1, \quad (6)$$

Если рассматривать поле в дальней зоне, для которой  $k_1 r \gg 1$ , где  $r$  — расстояние от источника до точки наблюдения в плоскости  $z = 0$ , что обычно реализуется уже при  $r > 20$  м и  $f > 20$  мГц, то боковой волной, распространяющейся в Земле, можно пренебречь. При этих условиях для компонент поля в дальней зоне имеем [3, 4]:

1) в случае вертикального электрического диполя

$$E_{1z} = \frac{p \omega^2 \mu}{2\pi} \frac{e^{ik_1 r}}{r} Y(s_{\parallel 1} \cdot r), \quad (7)$$

$$H_{1\varphi} = \frac{E_{1z}}{Z_{01}}, \quad E_{1r} = Z_{\parallel s 1} H_{1\varphi},$$

где  $p$  — электрический момент диполя,  $Z_{\parallel s 1}$  — поверхностный импеданс на границе 1-ой и 2-ой сред,  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $s_{\parallel 1} \cdot r$  — численное расстояние; при этом,

$$s_{\parallel 1} = \frac{ik_1}{2} \left( \frac{Z_{\parallel s 1}}{Z_{01}} \right)^2. \quad (8)$$

Функция ослабления  $Y(s_{\parallel 1} \cdot r)$  определяется для импедансных условий (2) следующей формулой:

$$Y(s_{\parallel 1} \cdot r) = 1 - 2\sqrt{s_{\parallel 1} \cdot r} e^{-s_{\parallel 1} r} \int_{i\infty}^{\sqrt{s_{\parallel 1} r}} e^{v^2} dv; \quad (9)$$

2) в случае вертикального магнитного диполя

$$H_{1z} = \frac{k_1 m}{2\pi} \frac{e^{ik_1 r}}{r} Y(s_{\perp 1} r), \quad (10)$$

$$E_{1\varphi} = Z_{01} H_{1z}, \quad H_{1r} = \sqrt{n^2 - 1} H_{1z},$$

где  $m$  — магнитный момент диполя,

$$s_{\perp 1} = \frac{ik_1}{2} \left( \frac{Z_{01}}{Z_{\perp s1}} \right)^2. \quad (11)$$

Наличие слоистой подповерхностной структуры учитывается использованием в формулах для импедансных граничных условий (2) и соответственно для численных расстояний, входящих в уравнения для множителя ослабления (9), значений поверхностных импедансов, соответствующих слоистой модели нижнего полупространства [3]. При рассмотрении нескольких подповерхностных слоёв, как в нашем случае, вычисление поверхностного импеданса на границе  $z = 0$  необходимо производить рекуррентно, начиная с последнего от границы слоя по формулам:

$$Z_{s_{n-1}} = \frac{Z_{s_n} - iZ_{n-1} \operatorname{tg}(k_{n-1} d_{n-1} \cos \theta_{n-1})}{Z_{n-1} - iZ_{s_n} \operatorname{tg}(k_{n-1} d_{n-1} \cos \theta_{n-1})} Z_{n-1}, \quad (12)$$

где  $\theta_{n-1}$  — угол падения, под которым происходит распространение волны в  $n-1$  слое (определяется из закона Снелиуса [1]),  $Z_{s_n}$  — поверхностный импеданс  $n$ -го слоя,  $Z_{n-1}$  — импеданс  $n-1$  слоя,  $d_{n-1}$  — толщина  $n-1$  слоя.

Таким образом, определив поверхностный импеданс слоистой структуры, можно вычислить функцию ослабления по формуле (9), после чего значения напряжённостей полей в точке наблюдения определяются по формулам (7) или (10) соответственно для вертикального электрического и магнитного диполей.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим двухпозиционный метод зондирования, когда излучающая антenna расположена в начале координат на поверхности Земли, а приёмные антены — на некотором расстоянии от последней (в волновой

зоне). Так как поле в точке приёма определяется поверхностными импедансами слоистой структуры, которые, в свою очередь, зависят от частоты, то в этом случае полезную информацию наиболее просто извлечь, осуществляя частотное сканирование излучаемого сигнала с выхода передающей антенны. Функция отклика принимаемого сигнала от частоты будет содержать тогда чередующиеся максимумы и минимумы, период следования которых связан с параметрами слоев ( $\epsilon$ ,  $\sigma$ ,  $d$ ), что обусловлено интерференцией радиоволн, отражённых от границ слоёв с поверхностной волной, распространяющейся вдоль границы верхнего полупространства от излучающего диполя в точку приёма. Так как распространение волны вдоль поверхности раздела сопровождается появлением ортогонально поляризованной компоненты, то для устранения зависимости отклика полезного сигнала от характеристик антенн и аппаратуры можно использовать информацию, заключённую в отношении радиальной и вертикальной составляющих напряжённости электрической или магнитной компонент поля в точке приёма.

Знание частотного отклика принимаемого сигнала при зондировании ещё не достаточно для обнаружения полезного слоя, так как подобные отклики получаются для множества трёхслойных сред. Поэтому измерениям в полосе частот должны предшествовать измерения дистанционных зависимостей электромагнитных полей (электромагнитное профилирование). Осуществляя профилирование можно обнаружить скачок поля в момент перехода через границу обнаруживаемого слоя, так как этому переходу будет соответствовать скачок функции ослабления. В данном случае, вследствие сильного затухания волн в экранирующем и подстилающем слоях, дифракционными эффектами на границе перехода можно пренебречь и воспользоваться рассмотренным выше подходом при условии, что  $|k_i - k_{i-1}| \cdot r \gg 1$ , что обычно имеет место для рассматриваемых сред и расстояний. Подобный вопрос детально рассмотрен в [1] для кусочно-неоднородных однослойных трасс. Применительно к рассматриваемой задаче на основании подхода, изложенного в этой работе, можно записать следующее выражение для функции ослабления трассы, составленной из 2-х участков:

$$W_1 = Y(s_1 r), \quad (13)$$

$$W_2 = Y(s_1 r) + i \sqrt{\frac{r}{\pi}} (\sqrt{s_1} - \sqrt{s_2}) \int_0^{s_1} \frac{Y(s_1 x) Y(s_2(r-x))}{\sqrt{x(r-x)}} dx,$$

где  $s_1$  и  $s_2$  определяются формулами (8) или (11) соответственно для электрического или магнитного вертикальных диполей с электрическими характеристиками слоёв, соответствующих участку с номером 1 (присутствует обнаруживаемый слой) или 2 (вместо обнаруживаемого имеется

слой такой же толщины, что и для участка 1, но с другими значениями диэлектрической проницаемости и удельной проводимости).

Рассмотрим основные результаты численных расчётов полей для трёхслойной подповерхностной модели Земли, в которой 2-й от поверхности слой является обнаруживаемым слоем. На рис. 3а,б приведены зависимости отношения горизонтальных к вертикальным компонентам соответственно для  $H_r/H_z$  и  $E_r/E_z$  от частоты, полученные при следующих исходных данных, типичных для задачи обнаружения слоя нефтепродуктов, залегающего под поверхностью Земли.

*Параметры верхнего экранирующего слоя:*

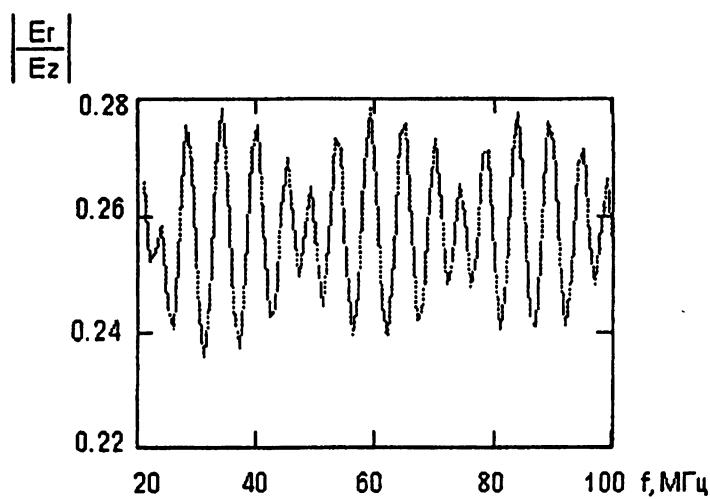
$$d = 7 \text{ м}, \epsilon = 15, \sigma = 0,005 \text{ См/м}.$$

*Параметры обнаруживаемого слоя:*

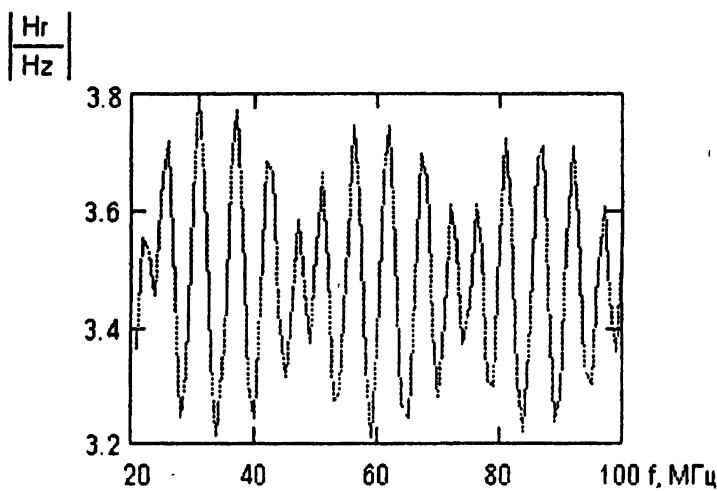
$$d = 1 \text{ м}, \epsilon_{\text{оф}} — \text{рассчитанная по формуле (1), для } v = 0,85, \sigma_2 = 0,005 \text{ См/м}, \\ \epsilon_2 = 6, \sigma_1 = 1 \text{ См/м } \epsilon_1 = 60.$$

Обнаруживаемый слой проявляется при частотном сканировании в появлении огибающей осцилляций отклика, обусловленной интерференцией между отражёнными сигналами от границ основания и полезного слоя, что хорошо видно из рисунка. Кроме того, видно, что зависимости  $H_r/H_z$  и  $E_r/E_z$  от частоты имеют примерно одинаковый относительный размах осцилляций. Это означает, что использование для зондирования как магнитных, так и электрических диполей примерно одинаково эффективно. Разница между использованием магнитных и электрических диполей обуславливается разницей в граничных импедансных условиях и, как следствие, в численных расстояниях (8) и (11). При одних и тех же значениях  $r$  и  $f$  численное расстояние для вертикального магнитного диполя существенно больше соответствующего значения для вертикального электрического диполя. При значениях параметра  $\pi r < 1$  наблюдаются существенные искажения осцилляций частотного отклика, препятствующие получению информации об обнаруживаемом слое при разделении сигналов, отражённых от границ слоёв. Практически, при расстояниях от источника излучения порядка 50–100 м, такие искажения начинают проявляться на частотах 10–20 мГц. Отсюда можно сделать вывод о целесообразности использования частот выше 20 мГц при осуществлении практических электромагнитных зондирований.

Увеличение проводимости экранирующего верхнего слоя сопровождается быстрым ростом затухания радиоволн при его прохождении, что препятствует обнаружению полезного слоя. Так, при значении проводимости экранирующего слоя, равном 0,005 См/м, и типичных значениях относительной диэлектрической проницаемости, лежащих в диапазоне 10–30, что соответствует затуханию порядка 1,8 дБ/м на рассматриваемых частотах, величина осцилляций частотного отклика при обнаружении полезного слоя на глубине около 10 м составляет величину порядка 1–2 дБ. Дальнейший рост проводимости экранирующего слоя со-



a)



б)

Рис. 3.

проводится резким уменьшением относительного размаха огибающей осцилляций частотного отклика. В табл. 2 приведены значения относительного размаха огибающей упомянутых выше осцилляций в зависимости от значения проводимости экранирующего слоя, а также соответствующие значения затухания радиоволны в этом слое.

Таблица 2

$\sigma$ , См/м	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$
20 lg (размах)	0,35	1,5	6,7	14,5	21
затухание, дБ/м	2,1	1,8	1,1	0,6	0,2

Моделирование дистанционных зависимостей электромагнитных полей при обнаружении границы залегания полезного слоя выполнялось на ЭВМ по формуле (13) для вертикального электрического и магнитного диполей, сопровождаемое частотным сканированием в пределах нескольких МГц в каждой измеряемой точке для нахождения максимума величины измеряемого поля. Результаты позволяют говорить о возможности определения границы залегания обнаруживаемого слоя при изменении значения относительной диэлектрической проницаемости на величину, превышающую  $\epsilon_{\text{оф}} = 10$  для слоёв с проводимостью меньше 0,005 См/м на глубине до 10 м при значении проводимости экранирующего слоя  $\sigma \leq 0,005$  См/м и толщины обнаруживаемого слоя  $d \geq 0,5$  м. Применительно к обнаружению слоёв с нефтепродуктами более предпочтительным является использование частоты зондирующего сигнала, лежащей в диапазоне 20–30 МГц, где наиболее чётко выражен эффект увеличения эффективной диэлектрической проницаемости полезного слоя, о чём говорилось выше. При этом, дополнительный выигрыш за счёт этого эффекта может составлять 3 дБ и более. На рис. 4 приведена зависимость функции ослабления вдоль трассы измерения в функции от расстояния. Видно, что в момент перехода через границу скачка электрических свойств обнаруживаемого слоя наблюдается хорошо различимый скачок электромагнитного поля.

### ВЫВОДЫ

Проведённая оценка возможностей подповерхностного зондирования слоистых неоднородностей позволяет сделать следующие выводы:

- в случае грунтов, пропитанных нефтепродуктами, можно ожидать существенного увеличения эффективной диэлектрической проницаемости при некоторых условиях (попадание влаги с поверхности Земли), что даёт дополнительный положительный эффект при обнаружении таких слоёв;
- использование двухпозиционного метода зондирования с вертикальными электрическими и магнитными диполями в качестве передающих

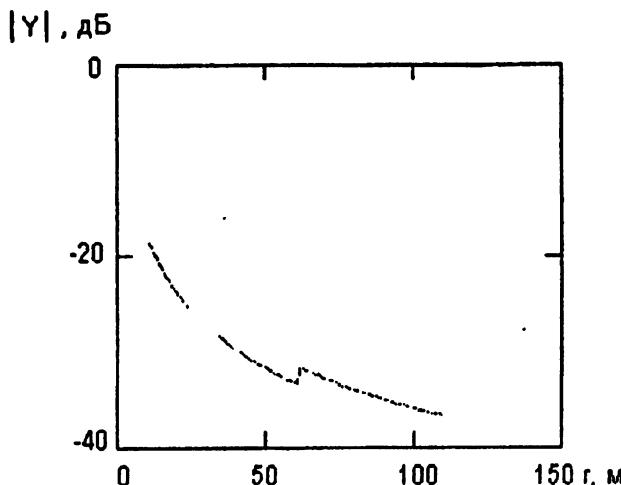


Рис. 4.

антенны и применение частотного сканирования в диапазоне примерно 30–100 МГц позволяет наблюдать при приёме согласованной по поляризации с излучаемым сигналом и ортогональной к нему компонентами частотный отклик, пропорциональный отношению этих компонент, содержащий информацию о подповерхностной структуре;

— возможность обнаружения слоя, залегающего на глубине до десяти метров, существенно зависит от проводимости верхнего от горизонта (экранирующего) слоя. Наблюдаемое резкое уменьшение полезного сигнала при превышении проводимости этого слоя величин примерно 0,003–0,006 См/м ограничивает возможности обнаружения подповерхностных слоёв в данном случае;

— сочетание частотного сканирования с дистанционными измерениями электромагнитного поля на поверхности Земли позволяет обнаруживать пространственную границу залегания слоёв (осуществлять картографирование) по скачку поля в момент прохождения последней.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. — М.: Изд-во АН СССР, 1961.
2. Зaborовский А. И. и др. Электрические свойства породообразующих минералов в переменном электромагнитном поле //Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1968. № 4.
3. Петровский А. Д. Радиоволновые методы в подземной геофизике. — М.: Недра, 1971. – 224 с.

4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Изд-во АН СССР, 1957.

Институт радиофизики и  
электроники НАН Украины,  
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию  
4 июля 1996 г.

**ESTIMATION OF POSSIBILITIES OF DETECTION OF SUBSURFACE  
LAYER INHOMOGENEITIES AT SOUNDING FROM EARTH SURFACE**

*V. G. Sugak*

The method of calculation of the electromagnetic fields over a three-layer medium based on using of the attenuation function and impedance boundary conditions of the layer medium as well as the results of simulation of the two-position sounding of such medium are expounded applicable for detection of the second layer from the earth surface.

УДК 537.874.6.65

# ДИФРАКЦИЯ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ С НЕРОВНЫМ КРАЕМ В ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

*B. B. Разсказовский*

Исходя из представления поля над неровной поверхностью при скользящем распространении как результата дифракции на экране с неровным краем, получены оценки среднего значения дисперсии, пространственной корреляции и углового спектра мощности в зоне полутени и перехода в освещённую область пространства. Показано, что рассчитанные при таком подходе статистические характеристики поля качественно согласуются с экспериментальными.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проведённое в последние годы экспериментальное изучение распространения миллиметровых и сантиметровых волн над морской поверхностью при малых (менее  $1^\circ$ ) углах скольжения [1–5] показало, что ряд принципиально важных особенностей явления не удается объяснить в рамках существующих теоретических исследований, основанных на методе Кирхгофа или его модификациях. К таким особенностям, в частности, относятся практически отсутствующая зависимость ширины и формы спектров флуктуаций сигнала от длины волны, убывание интенсивности диффузной компоненты и дисперсии флуктуаций угла прихода при уменьшении угла скольжения не до нуля, а до некоторого конечного уровня. Причина этих несоответствий очевидна — это неправомерность применения к криволинейным элементам поверхности при малых углах скольжения отражательных формул.

С другой стороны, известно, что именно при малых углах скольжения в окрестностях границы тени поле дифракции на выпуклых телах оказывается близким к полю дифракции на полу平面ости с границей, совпадающей с границей тени на выпуклой поверхности [6]. Это послужило основанием ряда авторов при расчётах поля за препятствиями заменять последние непрозрачными полу平面остями [7, 8]. Как будет показано ниже, такой подход позволяет, по крайней мере, на качественном уровне объяснить особенности поля, о которых говорилось выше.

## 2. ПОЛЕ ЗА ПРЕПЯТСТВИЯМИ ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

Критерии правомерности замены дифракции на телах с выпуклой поверхностью дифракцией на полуплоскости рассмотрены в ряде работ. В частности, в [9] указывается, что ошибка в расчете амплитуды поля при такой замене будет менее 10%, если выполняется неравенство

$$\rho_{kp} \leq 10^{-3} \left( \frac{k R_A^3 R_B^3}{2 R_{AB}^3} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

$$k = 2\pi\lambda^{-1}, \quad (2)$$

где  $\rho_{kp}$  — радиус кривизны поверхности,  $\lambda$  — длина волны, а смысл остальных величин понятен из рис. 1. Например, при  $\lambda = 10^{-2}$  м,  $R_A = R_B = 10^3$  м,  $\psi_A = \psi_B = 1^\circ$  получим  $\rho_{kp} \leq 198$  м, что значительно превосходит радиусы кривизны вершин ветровых волн на море.

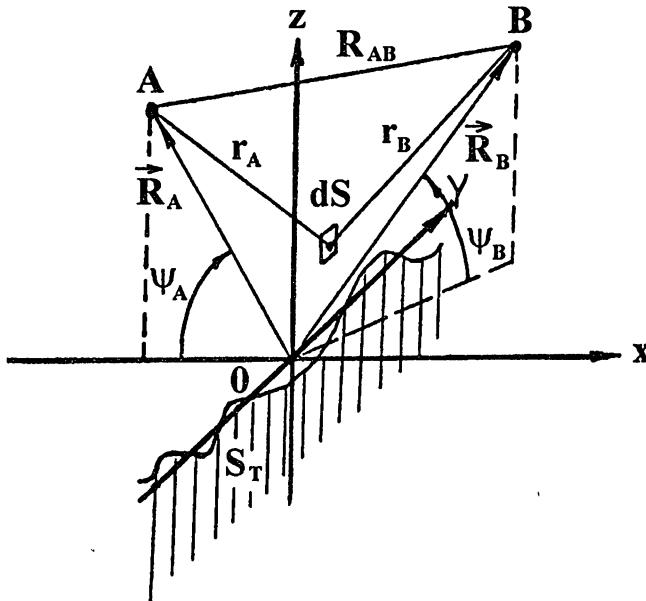


Рис. 1.

Рассмотрим поде скалярной сферической волны, создаваемой источником в точке А (рис. 1) при дифракции на непрозрачном экране, лежащем в плоскости Y0Z, со статистически неровной границей  $z_k(y)$ , причём будем считать, что среднее по множеству  $\bar{z}_k(y) = 0$ , т.е. граница экрана в среднем совпадает с осью 0Y. Будем предполагать, что  $z_k(y)$  является стационарной случайной функцией координаты  $y$  с дисперсией  $D_z$ , а координаты точки излучения и наблюдения удовлетворяют условиям:

$$z_{A,B} \cdot R_{A,B}^{-1} \ll 1, \quad y_A = 0, \quad y_B R_B^{-1} \ll 1, \quad kR_{A,B} \gg 1. \quad (3)$$

Считая, что в плоскости Y0Z поле отсутствует ниже границы  $z_k(y)$ , а выше неё равно

$$U(\vec{R}_S) = \frac{e^{ikr_A}}{r_A}, \quad (4)$$

с учётом неравенств (3), используя результаты [6], можно записать поле в точке наблюдения в виде

$$U(\vec{R}_B) = \frac{e^{ikr_{AB}}}{r_{AB}} - U_k(\vec{R}_B), \quad (5a)$$

$$U_k(\vec{R}_B) = -\frac{ik}{2\pi} \int \frac{e^{ik(r_A+r_B)}}{r_A r_B} dS. \quad (5b)$$

В этом варианте записи поле в точке наблюдения представляется как разность полей свободного пространства и "теневого" поля (5b). Поверхностный интеграл (5b) описывает так называемую краевую волну, причём при выполнении неравенств (3) даёт результат, совпадающий со строгим решением задачи дифракции на полу平面 для граничных условий как Дирихле, так и Неймана [10]. После ряда преобразований, аналогичных приводимым, например, в [6], получим (ограничиваясь разложением в ряд Тейлора квадратичными относительно  $z_{A,B} r_{A,B}^{-1}$  и  $y B r_B^{-1}$  членами):

$$U_k(\vec{R}_B) = \frac{\exp[i(-\frac{\pi}{2} + \varphi_k)]}{2(R_A + R_B)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \int_{-\infty}^{s_k(t)} \exp\left(i\frac{\pi}{2}s^2\right) ds, \quad (6)$$

$$s = b^{-1}(z - z_0), \quad s_0 = z_0 b^{-1}, \quad s_k = b^{-1}(z_k - z_0),$$

$$t = b^{-1}\left(y - \frac{R_A y_B}{R_A + R_B}\right),$$

$$b = \left(\frac{\lambda}{2} \frac{R_A R_B}{R_A + R_B}\right)^{1/2},$$

$$z_0 = \frac{R_B z_A + R_A z_B}{R_A + R_B},$$

$$\varphi_k = k(R_A + R_B) \left[ 1 - \frac{R_A y_B^2}{2R_B(R_A + R_B)^2} - \frac{z_0^2}{2R_A R_B} \right].$$

Как видно из вышеприведённого, параметр  $b$  представляет собой радиус первой зоны Френеля в плоскости Y0Z. Верхним пределом интегрирования во внутреннем интеграле является случайная функция  $s_k(t) \equiv s_k[y(t)]$ , вследствие чего и сам внутренний интеграл оказывается случайной функцией  $y$  и  $t$ .

В дальнейшем мы ограничимся нахождением статистических характеристик (6) для двух предельных случаев: области полутени, где  $|s_k| < 1$ ,

и освещённой области  $|s_k| \gg 1$ , где интенсивность возмущений поля мала по сравнению с полем свободного пространства. В этих областях будут использоваться, соответственно, разложение (6) в ряд Тейлора либо асимптотическое разложение интеграла Френеля:

$$\mathcal{F}(s_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\frac{\pi}{2}s^2\right) ds \approx \frac{\exp(i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}} + s_k, \quad |s_k| < 1, \quad (7)$$

$$\mathcal{F}(s_k) \approx (\pi i s_k)^{-1} \exp\left(i\frac{\pi}{2}s_k^2\right), \quad |s_k| \gg 1. \quad (8)$$

### 3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ КРАЕВОЙ ВОЛНЫ

Найдём два первых статистических момента краевой волны: среднее и корреляционную функцию при разнесении точек наблюдения  $B_1$  и  $B_2$  параллельно оси Y. Для среднего, меняя местами интегрирование по  $t$  и усреднение по множеству реализаций  $s_k(t)$ , получим

$$\overline{U_k(\vec{R}_B)} = \frac{\exp[i(-\frac{\pi}{2} + \varphi_k)]}{2(R_A + R_B)} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}(s_k)} \exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right) dt. \quad (9)$$

Поскольку вследствие стационарности  $\overline{\mathcal{F}(s_k)}$  не является функцией  $y$ ,

$$\overline{U_k(\vec{R}_B)} = \frac{\exp[i(-\frac{\pi}{4} + \varphi_k)]}{\sqrt{2}(R_A + R_B)} \overline{\mathcal{F}(s_k)}. \quad (10)$$

При  $|s_k| < 1$ , воспользовавшись (7), получим

$$\overline{U_k(\vec{R}_B)} \approx \frac{\exp(i\varphi_k)}{2(R_A + R_B)} + \frac{\overline{s_k} \exp[i(-\frac{\pi}{4} + \varphi_k)]}{\sqrt{2}(R_A + R_B)}, \quad (11)$$

т.е. среднее поле такое же, как при дифракции на экране с прямолинейной границей  $\overline{z_k(y)}$ ; аналогичный вывод сделан в [8]. В области  $|s_k| \gg 1$  с целью упрощения выкладок будем дополнительно предполагать, что  $\sqrt{D_z} \ll z_0$ , и на этом основании считать

$$\mathcal{F}(s_k) \approx \frac{1}{i\pi s_0} \exp\left(i\frac{\pi}{2}s_k^2\right). \quad (12)$$

Для нормального закона распределения высот неровностей края получим

$$\overline{\mathcal{F}(s_k)} \approx \frac{\exp(i\frac{\pi}{2})}{\pi s_0 \sqrt{2\pi D_S}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{\pi}{2}(s_0 + \zeta)^2 - \frac{\zeta^2}{2D_S}\right] d\zeta, \quad (13)$$

$$\zeta = z_k b^{-1},$$

$$D_S = D_Z b^{-2}.$$

Интеграл (13) является табличным; решив его и подставив результат в (9), получим:

$$\begin{aligned} \overline{U_k(\vec{R}_B)} \approx & \frac{1}{\sqrt{2\pi s_0(R_A + R_B)} \sqrt{1 + \pi^2 D_S^2}} \exp \left[ -\frac{\pi^2 s_0^2 D_S}{2(1 + \pi^2 D_S^2)} \right] \times \\ & \times \exp \left[ i \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi s_0^2}{2} - \frac{\pi^3 s_0^2 D_S^2}{2(1 + \pi^2 D_S^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \pi D_S + \varphi_k \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) видно, что в области  $|s_k| \gg 1$  среднее поле краевой волны зависит не только от положения средней границы экрана, как это имело место в области полути согласно (11), а и от дисперсии высоты неровностей. Наиболее наглядно это видно, когда выполняется неравенство (15):

$$\pi D_S = \pi D_Z b^{-2} \ll 1, \quad (15)$$

т.е. когда высота неровностей мала по сравнению с радиусом первой зоны Френеля. В этом случае, перейдя к исходным переменным, получим

$$\begin{aligned} \overline{U_k(\vec{R}_B)} \approx & \frac{b}{\sqrt{2\pi z_0(R_A + R_B)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} k^2 D_Z (\sin \psi_A + \sin \psi_B)^2 \right] \times \\ & \times \exp \left[ i \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} z_0^2 b^{-2} - \frac{\pi^3}{2} z_0^2 D_Z^2 b^{-6} + \varphi_k \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sin \psi_{A,B} = \frac{z_{A,B}}{R_{A,B}}, \quad (17)$$

откуда видно, что амплитуда среднего поля краевой волны содержит кроме коэффициента, соответствующего дифракции на прямолинейной границе  $z_k = 0$ , экспоненциальный множитель, совпадающий с аналогичным множителем при отражении волн от статистически неровной поверхности [6, 11]. Фаза среднего поля краевой волны тоже отличается от той, которая существовала бы при дифракции на прямолинейной границе, на величину

$$\varphi_S \approx -\frac{\pi^3}{2} z_0^2 D_Z^2 b^{-6}, \quad (18)$$

которая даже при выполнении неравенства (15) может оказаться существенной за счёт присутствия большого сомножителя  $z_0^2 b^{-2} = s_0^2$ .

Статистический момент второго порядка при разнесении точек наблюдения, параллельном оси Y и малом по сравнению с расстоянием до

экрана, т.е. при  $|\vec{R}_{B1} - \vec{R}_{B2}| \ll |\vec{R}_{B1, B2}|$  можно представить в виде

$$Q(\vec{R}_{B1}, \vec{R}_{B2}) = \overline{U_k(\vec{R}_{B1}) \cdot U_k^*(\vec{R}_{B2})} = \quad (19)$$

$$= \frac{e^{i(\varphi_{k1}-\varphi_{k2})}}{(R_A+R_B)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ i \frac{\pi}{2} (t_1^2 - t_2^2) \right] dt_1 dt_2 \int_{-\infty}^{s_k(t_1)} \int_{-\infty}^{s_k(t_2)} \exp \left[ i \frac{\pi}{2} (s_1^2 - s_2^2) \right] ds_1 ds_2.$$

Здесь и далее для сокращения записи будем обозначать

$$R_B = \frac{|\vec{R}_{B1}| + |\vec{R}_{B2}|}{2} \approx |R_{B1}| \approx |R_{B2}|. \quad (20)$$

Здесь  $U_k^*$  означает комплексно сопряженную  $U_k$  величину. Исследуем вначале общие особенности выражения (19). Прежде всего, входящая в него функция

$$W(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{s_k(t_1)} \int_{-\infty}^{s_k(t_2)} \exp \left[ i \frac{\pi}{2} (s_1^2 - s_2^2) \right] ds_1 ds_2, \quad (21)$$

при принятом ранее условии, что  $z_k(y)$  является стационарной случайной функцией, будет функцией только разности аргументов, т.е.

$$W(t_1, t_2) = W(y_1 - y_2) = W[b(t_1 - t_2)]. \quad (22)$$

В случае  $|s_k| \ll 1$ , используя (7), находим

$$W(t_1, t_2) \approx \frac{1}{2} + \overline{s_k(t_1) \cdot s_k(t_2)} = \frac{1}{2} + D_Z b^{-2} \rho(\ell), \quad (23)$$

$$\rho(\ell) = \overline{z_k(y_1) \cdot z_k(y_2)}, \quad (24)$$

$$\ell = y_1 - y_2. \quad (24a)$$

Очевидно, в этом случае  $W(t_1, t_2)$  линейно зависит от коэффициента корреляции неровностей края экрана  $\rho(\ell)$ .

В случае  $|s_k| \gg 1$ , используя асимптотическое разложение (8) и неравенство (15), получим при нормальном законе распределения  $z_k(y)$ :

$$\begin{aligned} W(t_1, t_2) &= \frac{1}{2\pi^3 s_0^2 D_S \sqrt{1 - \rho^2(\ell)}} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{\zeta_1^2 - 2\rho(\ell)\zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^2}{2D_S[1 - \rho^2(\ell)]} + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\pi}{2} (s_{k1}^2 - s_{k2}^2) \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \end{aligned} \quad (25)$$

и после преобразований

$$W(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi^2 s_0^2 \sqrt{1 + \pi^2 D_S^2 [1 - \rho^2(\ell)]}} \exp \left( -\frac{\pi^2 s_0^2 D_S [1 - \rho(\ell)]}{1 + \pi^2 D_S^2 [1 - \rho^2(\ell)]} \right). \quad (26)$$

Легко показать, что двойное интегрирование в (19) по  $t_1$  и  $t_2$  в случае  $W(t_1, t_2) = W(t_1 - t_2)$  приводит только к изменению масштаба переменной в функции  $W(t_1 - t_2)$ , не меняя вида последней.

Действительно, выполнив замену переменных

$$\begin{aligned}\tau &= b^{-1}(y_1 - y_2) = t_1 - t_2 + \tau_0, \\ \vartheta &= b^{-1}(y_1 + y_2) = t_1 + t_2 + \vartheta_0, \\ \tau_0 &= b^{-1}R_A(y_{B1} - y_{B2})(R_A + R_B)^{-1}, \\ \vartheta_0 &= b^{-1}R_A(y_{B1} + y_{B2})(R_A + R_B)^{-1},\end{aligned}\quad (27)$$

приведем (19) к виду

$$Q(\vec{R}_{B1}, \vec{R}_{B2}) = \frac{\exp[i(\varphi_{k1} - \varphi_{k2})]}{8(R_A + R_B)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} W(b\tau) \exp\left[i\frac{\pi}{2}(\tau - \tau_0)(\vartheta - \vartheta_0)\right] d\vartheta d\tau. \quad (28)$$

Входящий в (28) двойной интеграл можно представить либо как прямое, а затем обратное преобразование Фурье от  $W(b\tau)$ , либо как интегрирование по  $\tau$  произведения  $W(b\tau)$  на дельта-функцию

$$\delta(\tau - \tau_0) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{\pi}{2}\vartheta(\tau - \tau_0)\right] d\vartheta. \quad (29)$$

В обоих случаях в результате получаем, заменив  $\varphi_{k1}$ ,  $\varphi_{k2}$  их значениями:

$$Q(\vec{R}_{B1}, \vec{R}_{B2}) = \frac{W(L)}{2(R_A + R_B)^2} \exp\left[ik\frac{y_{B1}^2 - y_{B2}^2}{2(R_A + R_B)}\right], \quad (30)$$

$$L = \frac{R_A}{R_A + R_B}(y_{B1} - y_{B2}).$$

В дальнейшем будем пользоваться вторым статистическим моментом, пронормированным на квадрат амплитуды поля свободного пространства в точке наблюдения:

$$Q_0(\vec{R}_{B1}, \vec{R}_{B2}) = Q(\vec{R}_{B1}, \vec{R}_{B2})R_{AB}^2 \approx \frac{1}{2}W(L) \exp\left[ik\frac{y_{B1}^2 - y_{B2}^2}{2(R_A + R_B)}\right]. \quad (31)$$

Подставляя в (31)  $y_{B1} = y_{B2}$ , получим среднюю плотность потока мощности краевой волны (в дальнейшем для краткости будем называть её интенсивностью). При  $|s_k| \ll 1$ , используя (23), найдём

$$Q_0(\vec{R}_B) \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{2}D_Z b^{-2}, \quad (31a)$$

т.к. (23) справедливо при  $D_Z b^{-2} \ll 1$  и членом порядка  $D_Z^2 b^{-4}$  можно пренебречь.

При  $|s_k| \gg 1$  из (26), (31) получим

$$Q_0(\vec{R}_B) \approx \frac{1}{2\pi^2 s_0^2} = \frac{b^2}{2\pi^2 z_0^2}. \quad (316)$$

Таким образом, интенсивность поля краевой волны практически не отличается от существующей при дифракции на прямолинейной границе как в области полутени, так и в освещённой зоне.

Корреляционную функцию поля краевой волны найдём, воспользовавшись результатами [12] для комплексных случайных величин:

$$K_0(y_{B1} - y_{B2}) = Q_0(\vec{R}_{B1}, \vec{R}_{B2}) - \overline{U_k(\vec{R}_{B1})} \cdot \overline{\left[ U_k(\vec{R}_{B2}) \right]^*} \cdot (R_A + R_B)^{-2}. \quad (32)$$

При  $|s_k| \ll 1$  получим корреляционную функцию и дисперсию

$$K_0(y_{B1} - y_{B2}) = \frac{1}{2} D_Z b^{-2} \rho(L) \exp \left[ ik \frac{y_{B1}^2 - y_{B2}^2}{2(R_A + R_B)} \right], \quad (33a)$$

$$D_U = \frac{1}{2} D_Z b^{-2}. \quad (33b)$$

Из (33a) видно, что модуль функции корреляции краевой волны повторяет по форме функцию корреляции неровностей края экрана, отличаясь от неё только масштабным коэффициентом  $\frac{R_A}{R_A + R_B}$ , а дисперсия тем больше, чем большую часть радиуса первой зоны Френеля составляет высота неровностей края экрана. Для случая  $|s_k| \gg 1$  выражение для  $K_0$  получается подстановкой в (32) зависимостей (14) и (26); в общем виде оно громоздко и не наглядно, поэтому мы ограничимся частными случаями, позволяющими понять общие закономерности.

При выполнении неравенства (15)

$$D_U \approx \frac{b^2}{2\pi^2 z_0^2} \left\{ 1 - \exp \left[ -k^2 D_Z (\sin \psi_A + \sin \psi_B)^2 \right] \right\}, \quad (34a)$$

а при ещё более жёстком условии

$$g = \pi^2 z_0^2 D_Z b^{-4} = k^2 D_Z (\sin \psi_A + \sin \psi_B)^2 < 1 \quad (35)$$

$$D_U \approx \frac{1}{2} D_Z b^{-2}, \quad (34b)$$

т.е. дисперсия такая же, как и в случае  $|s_k| \ll 1$ . Это даёт основание пользоваться (34a) как интерполяционной для любых значений  $s_k$ . Неравенство (35) означает, что высота неровностей мала не только по сравнению с радиусом первой зоны Френеля, а и с квазипериодом осцилляций интеграла Френеля в окрестностях значений аргумента, соответствующих  $z_0$ .

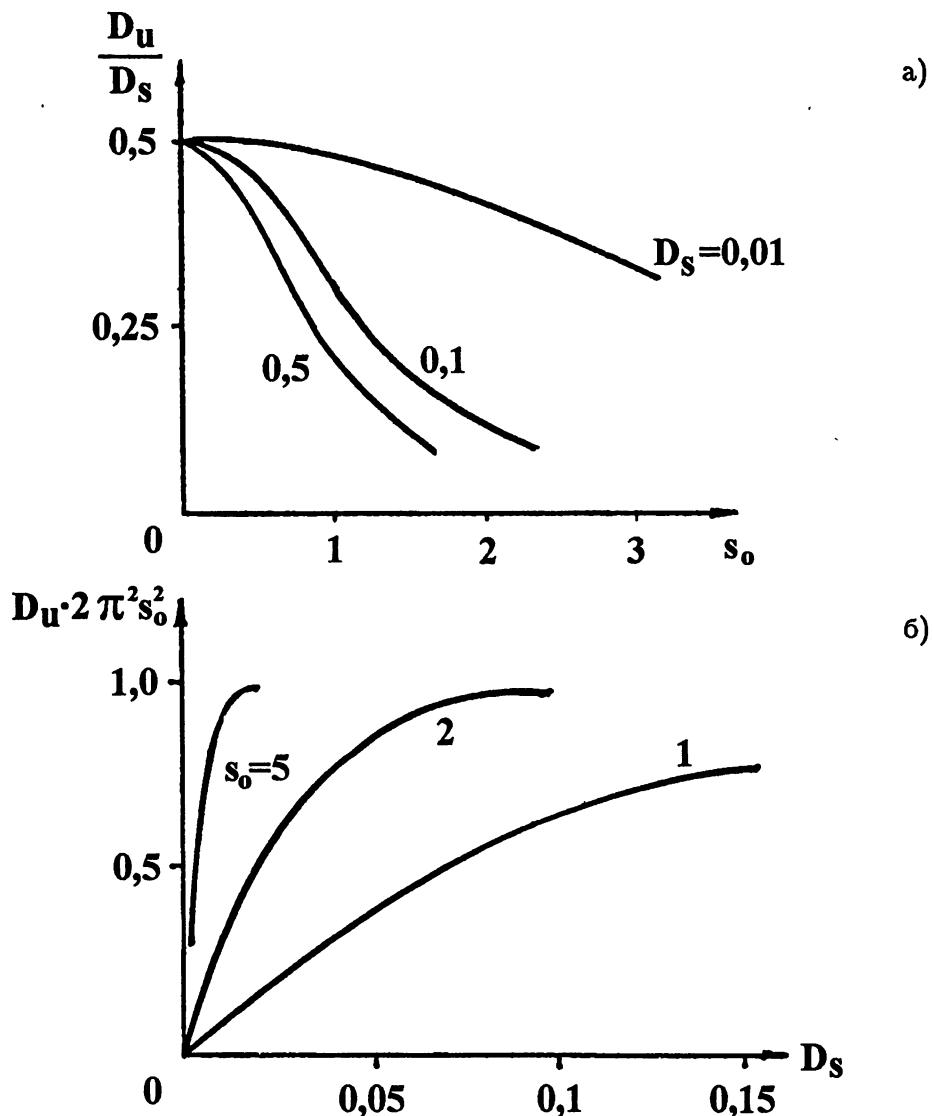


Рис. 2.

На рис. 2а приведены рассчитанные по (34а) зависимости нормированной на величину  $D_s$  дисперсии поля краевой волны от величины  $s_0$  при трёх значениях  $D_s$ , а на рис. 2б — рассчитанные по той же формуле зависимости  $D_U \cdot 2\pi^2 s_0$  в функции  $D_s$ . Из рис. 2а видно, что при удалении от границы тени (возрастании  $s_0$ ) происходит падение дисперсии случайной составляющей поля краевой волны, причём оно происходит тем быстрее, чем больше отношение дисперсии неровностей квадрату радиуса зоны Френеля. В функции дисперсии неровностей края экрана, как видно из рис. 2б, возрастание дисперсии поля происходит тем быстрее, чем дальше от границы тени находится точка наблюдения; т.е.

чем больше параметр  $s_0$ . Однако это возрастание ограничено значением  $(2\pi^2 s_0^2)^{-1}$  за исключением случая  $|s_0| \ll 1$ , когда согласно (33б) и (34б)

$$D_U \approx \frac{1}{2} D_S.$$

Функция корреляции при выполнении неравенства (15)

$$K_0(L) \approx \frac{1}{2\pi^2 s_0^2} \left\{ \exp \left[ \pi^2 s_0^2 D_S \rho(L) \right] - 1 \right\} \exp \left( -\pi^2 s_0^2 D_S + ik \frac{y_{B1}^2 - y_{B2}^2}{2(R_A + R_B)} \right), \quad (36a)$$

а при условии (35)

$$K_0(L) \approx \frac{1}{2} D_S \rho(L) \exp \left( ik \frac{y_{B1}^2 - y_{B2}^2}{2(R_A + R_B)} \right), \quad (36b)$$

т.е. только в последнем случае модуль функции корреляции поля повторяет форму функции корреляции неровностей.

Вид зависимости

$$\rho_U(L) = |K_0[\rho(L)]| \cdot |K_0(0)|^{-1} \quad (36b)$$

при нормальном законе распределения высоты неровностей края экрана, рассчитанной по (36а), показан на рис. 3а, а на рис. 3б приведены графики коэффициента корреляции случайной компоненты краевой волны при гауссовской корреляции неровностей края с радиусом корреляции  $\ell_0$  для нескольких значений параметра  $g$ .

Из рисунков видно, что при  $g < 1$  функция корреляции поля практически повторяет с учётом масштабного коэффициента  $(R_A + R_B)R_A^{-1}$  функцию корреляции неровностей, а при  $g > 1$  происходит уменьшение радиуса корреляции поля по сравнению с  $\ell_0 \frac{R_A + R_B}{R_A}$ , причём тем более существенное, чем больше  $g$ .

Определив радиус корреляции поля в точке наблюдения из условия

$$\rho_U(L_{0,5}) = 0,5,$$

получим для случая  $g < 1$

$$L_{0,5} \approx \frac{R_A + R_B}{R_A} \cdot \ell_0. \quad (37)$$

Для  $g \gg 1$ , разлагая (36а) в ряд Тейлора, считая случайную функцию  $z_k(y)$  дифференцируемой и представляя на этом основании функцию корреляции неровностей в окрестностях её максимума в виде

$$\rho(\ell) \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\ell}{\ell_0} \right)^2, \quad (38)$$

получим

$$L_{0,5} \approx 1,2 \frac{\ell_0 b^2 (R_A + R_B)}{\pi z_0 \sqrt{D_z} R_A} \approx \frac{0,2\lambda}{\gamma_{\phi} (\sin \psi_A + \sin \psi_B)}, \quad (38a)$$

$$\gamma_{\phi} = \frac{\sqrt{D_z}}{\ell_0}. \quad (38b)$$

Как видно из (38б),  $\gamma_{\phi}$  представляет собой эффективный наклон неровностей края экрана.

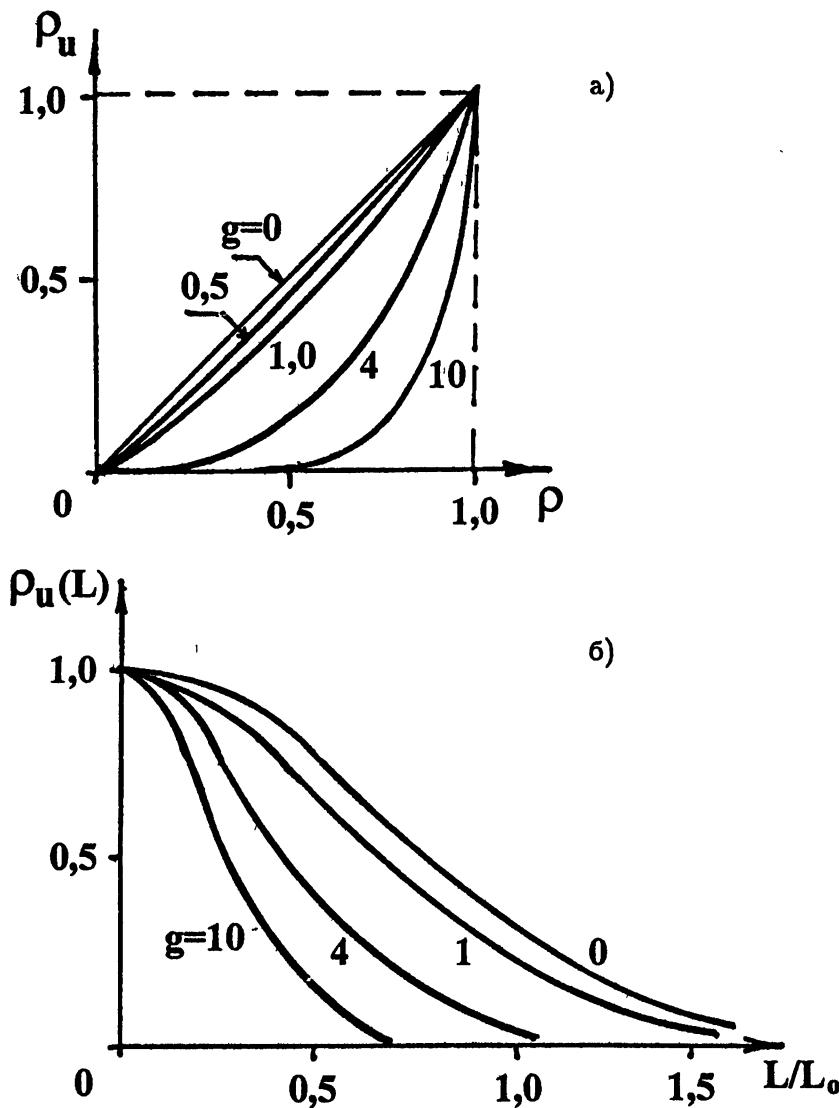


Рис. 3.

Во многих практических приложениях и расчётах удобнее пользоваться не корреляционной функцией, а так называемым угловым спектром

мощности (УСМ), описывающим распределение средней мощности перезлучённого поля по углам прихода плоских волн в точку наблюдения (см., например, [13]). Его главной характеристикой является угловая ширина, связанная с пространственным радиусом корреляции соотношением

$$2\alpha_{0,5} = \frac{m\lambda}{\pi L_{0,5}}, \quad (39)$$

где  $\alpha_{0,5}$  — полуширина углового спектра мощности по уровню 0,5;  $m$  — коэффициент, зависящий от вида функции  $\rho(\ell)$  и уровня, на котором отсчитывается радиус корреляции, как правило,  $1 < m \leq 2$ . Соответственно для случая  $|z_k| < 1$  или  $g < 1$  угловая ширина спектра будет равна

$$2\alpha_{0,5} = \frac{m\lambda R_A}{\pi \ell_0(R_A + R_B)} = \frac{m\lambda \gamma_{\text{оф}}}{\pi \sqrt{D_Z}} \cdot \frac{R_A}{R_A + R_B}, \quad (40a)$$

а для случая  $g \gg 1$

$$2\alpha_{0,5} = 1,7\gamma_{\text{оф}}(\sin \psi_A + \sin \psi_B) \cdot R_A(R_A + R_B)^{-1}. \quad (40b)$$

Таким образом, при приближении точки наблюдения к границе тени либо при малой высоте неровностей края ( $g < 1$ ) угловая ширина спектра перестаёт зависеть от углов  $\psi_A$  и  $\psi_B$  и определяется только радиусом корреляции неровностей, длиной волны и масштабным коэффициентом  $R_A(R_A + R_B)^{-1}$ .

В случае  $g \gg 1$ , что означает удаление от границы тени в освещённую область и (или) возрастание высоты неровностей, ширина углового спектра мощности становится пропорциональной эффективному наклону неровностей и угловому возвышению над границей тени. Такой же характер зависимости от углов скольжения и эффективного наклона, согласно [6, 11], имеет ширина углового спектра при отражении от статистически неровной поверхности. На рис. 4 приведены графики рассчитанных по (40a) и (40b) зависимостей нормированной ширины углового спектра

$$\tilde{\alpha} = 2\alpha_{0,5} \cdot \frac{R_A + R_B}{m\gamma_{\text{оф}} R_A} \quad (41)$$

при  $R_A = R_B = 10^3$  м,  $\lambda = 10^{-2}$  м,  $D_Z = 10^{-1}$  м<sup>2</sup>. На прямой, соответствующей области  $g \gg 1$ , отмечено несколько точек с приведёнными возле них значениями параметра  $g$ . Интересно отметить, что точке пересечения прямых для  $g < 1$  и  $g \gg 1$  соответствует  $g = 1,4$ , которое не зависит от параметров неровностей, длины волны и соотношения расстояний. Из графика рис. 4 видно, что при уменьшении угла дифракции снижение ширины углового спектра мощности происходит только до некоторого конечного значения, определяемого (40a); в этом состоит принципиальное отличие полученного результата от предсказаний теории,

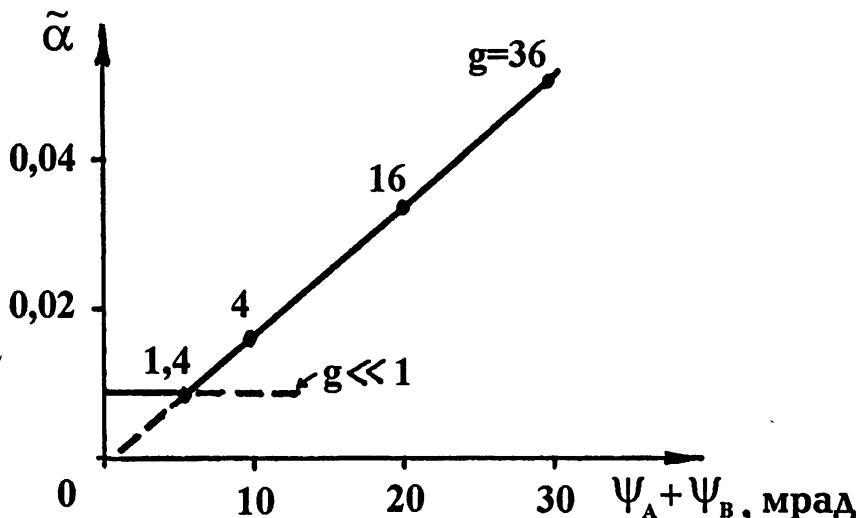


Рис. 4.

основанной на методах геометрической оптики и приближении Кирхгофа для неровных поверхностей.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим наиболее важные особенности поля в области от тени к освещённому пространству при дифракции на непрозрачном плоском экране со статистически неровным краем. Среднее значение переизлучённого экраном поля с ростом угла дифракции убывает быстрее, чем при прямолинейном крае, причём влияние неровностей описывается множителем, совпадающим с полученным в теории рассеяния неровными поверхностями. Этим может объясняться согласие эмпирических данных о средних полях с результатами расчётов методами геометрической оптики вплоть до нулевых углов скольжения, где эти методы не применимы.

Зависимости дисперсии случайной компоненты переизлучённого поля, её пространственной корреляции и ширины углового спектра мощности от геометрии трассы по мере перехода в освещённую область также приближаются к аналогичным зависимостям, предсказываемым теорией в рамках метода геометрической оптики.

В то же время при приближении к границе тени характер этих зависимостей существенно изменяется. Во-первых, дисперсия случайной компоненты убывает с уменьшением угла дифракции до некоторой конечной величины, зависящей от высоты неровностей края и размера зоны Френеля. Во-вторых, конечной при этом остаётся и ширина углового

спектра мощности переизлучённого поля. Эти эффекты согласуются, по крайней мере, на качественном уровне с экспериментально наблюдаемыми особенностями поля СВЧ при распространении над реальными поверхностями раздела, в частности, над морем под малыми углами скольжения, не получившими объяснения в рамках метода геометрической оптики.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Балан М.Г., Беслечный С. Б., Горбач Н. В., Педенко Ю. А., Разсказовский В. Б. //Изв. вузов. Радиофизика, 1982. Т. 25. № 11. С. 1260.
2. Разсказовский В. Б. Распространение и дифракция радиоволн в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах. — Киев: Наукова думка, 1984. С. 13.
3. Зуйков В. А., Педенко Ю. А., Разсказовский В. Б. — В сб.: Распространение радиоволн миллим. и субмиллим. диапазона. — Харьков: ИРЭ АН УССР, 1984. С. 76.
4. Разсказовский В. Б., Педенко Ю. А. //Зарубежная радиоэлектроника, 1996. № 7. С. 29.
5. Педенко Ю. А., Разсказовский В. Б. — В сб.: III Крымская конф. "СВЧ техника и спутниковый приём", 20-23 сент. 1993 г. Т. 6. С. 790.
6. Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — 346 с.
7. Калинин А. И. Распространение радиоволн на трассах наземных и космических радиолиний. — М.: Связь, 1979. — 296 с.
8. Полищук Ю. М. //Изв. вузов. Радиофизика, 1968. Т. 11. № 1. С. 72.
9. Barton D. K. — In: Electronics and Aerospace syst. conf., Arlington, okt. 9-11, 1979. V. 2. P. 224.
10. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. — М.: Сов. радио, 1962. — 243 с.
11. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние радиоволн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
12. Пугачев В. С. Теория случайных функций. — М.: Физматгиз, 1962. — 884 с.
13. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1966. — 404 с.

Институт радиофизики и  
электроники НАН Украины,  
г. Харьков, Украина

Поступила в редакцию  
28 июля 1996 г.

**STOCHASTIC EDGE DIFFRACTION IN THE PROBLEM OF  
RADIO-WAVE PROPAGATION OVER SURFACE AT GRAZING ANGLES**

*V. B. Razskazovsky*

The radio-wave propagation over the rough surface at grazing angles is assumed as the diffraction on the stochastic screen border. Estimates of the average field, its dispersion, space diversity correlation and angle power spectra are calculated in zones of penumbra and transition to the light space. It is determineted that statistical field descriptions calculated by such approach are in agreement with the experimental results.

УДК 535.361

# КОНТРАСТ ИЗОБРАЖЕНИЙ МАЛОРАЗМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ЧЕРЕЗ РАССЕИВАЮЩУЮ СРЕДУ МЕТОДОМ ПРОСВЕТНОЙ КОНФОКАЛЬНОЙ МИКРОСКОПИИ

*B. L. Вебер*

На основе теории видения в рассеивающих средах разработана модель наблюдения неоднородностей в биологических тканях методом просветной конфокальной микроскопии. Выведены общие формулы для расчёта контраста изображения локальной неоднородности с синусоидальным распределением коэффициента пропускания, находящейся в однородной рассеивающей среде. Проведён анализ влияния параметров системы наблюдения на предельную глубину видимости неоднородностей.

Исследование возможностей оптического наблюдения внутренней структуры тканей и органов человеческого тела в терапевтическом "окне" проэрачности (длины волн 0,6–1,2 мкм) ведётся в настоящее время методами импульсной фемтосекундной томографии, средствами техники фемтокоррелированного излучения, а также на базе использования различных вариантов конфокальной микроскопии [1–3]. Эти методы и средства найдут применение в медицине для раннего обнаружения опухолей молочной железы, диагностики кожного покрова, сетчатки глаза и т.д. Накопленный экспериментальный материал позволяет судить о больших потенциальных возможностях разрабатываемых методов. Проблема же количественной оценки этих возможностей на основе современной теории видения в мутных средах до сих пор, по существу, остаётся открытой.

Цель данной работы — разработка модели, описывающей процесс формирования изображения объекта в рассеивающей среде применительно к одной из возможных схем наблюдения — просветной конфокальной микроскопии. Аналогичная задача рассмотрена в [3] применительно к отражательной геометрии.

**1. Формула переноса изображения.** Рассмотрим схему наблюдения, приведённую на рис. 1. Поглощающий объект диаметром  $d_0$  с коэффициентом пропускания  $R_0(\vec{r}_3)$  находится в толще однородной рассеивающей среды, ограниченной двумя параллельными плоскостями (толщина среды —  $d$ ). Система наблюдения (СН) состоит из схемы подсветки, включающей в себя источник света яркостью  $B_0$  и имеющий диаграмму

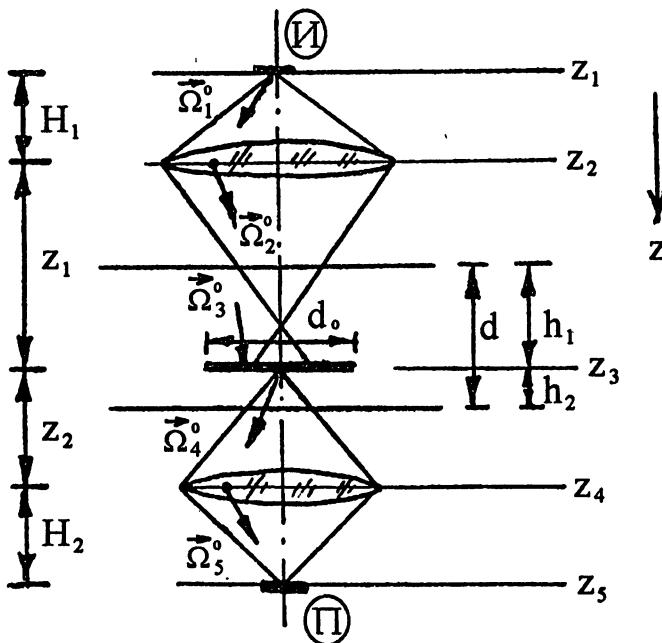


Рис. 1. Схема наблюдения.

направленности  $D_1(\vec{r}_1, \vec{\Omega}_1)$  ( $\vec{r}_i$  здесь и далее — пространственные координаты в плоскостях  $z_i$ ,  $\vec{\Omega}_i$  — проекции единичных векторов  $\vec{\Omega}_i^0$  на плоскость  $z = \text{const}$ ) и линзу с фокусным расстоянием  $f_1$ , находящуюся на расстоянии  $H_1$  от источника, а также схемы приёма излучения, расположенной со стороны рассеивающей среды, противоположной той, где находится источник света, и включающей в себя фотоприёмник с диаграммой направленности  $D_2(\vec{r}_5, \vec{\Omega}_5)$  и линзу с фокусным расстоянием  $f_2$  на расстоянии  $H_2$  от приёмника. Процесс наблюдения осуществляется посредством регистрации пропущенного объектом светового излучения при поперечном перемещении СН.

Яркость светового излучения от источника в плоскости линзы 1 описывается выражением

$$B_2(\vec{r}_2, \vec{\Omega}_1) = B_0 \iint_{-\infty}^{\infty} D_1(\vec{r}_1, \vec{\Omega}_1) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 - H_1 \vec{\Omega}_1) d\vec{r}_1. \quad (1)$$

Яркость светового излучения на "выходе" линзы 1:

$$B_2^0(\vec{r}_2, \vec{\Omega}_2) = \Pi_1(\vec{r}_2) \iint_{-\infty}^{\infty} B_2(\vec{r}_2, \vec{\Omega}_1) G_{s_1}(\vec{\Omega}_1 \rightarrow \vec{\Omega}_2, \vec{r}_2) d\vec{\Omega}_1, \quad (2)$$

где  $\Pi_1$  — функция амплитудного пропускания линзы 1,  $G_{s_1}$  — функция Грина линзы, описывающая изменение направления луча, падающего на

линзы, в результате преломления; в пренебрежении дифракционными эффектами  $G_{s_1}(\cdot) = \delta(\vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1 + \vec{r}_2/f_1)$ , при учёте дифракции на оправе линзы  $\delta$ -функция заменяется на некоторую конечную функцию  $G_{d_1}$ , ширина которой зависит от освещённой площади линзы.

Яркость светового излучения в плоскости объекта описывается выражением

$$B_3(\vec{r}_3, \vec{\Omega}_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int B_2^0(\vec{r}_2, \vec{\Omega}_2) b_c(\vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_3, \vec{\Omega}_2 \rightarrow \vec{\Omega}_3, h_1) d\vec{r}_2 d\vec{\Omega}_2, \quad (3)$$

где  $b_c(\cdot) \equiv b_c(\vec{r}_3 - \vec{r}_2 - z_1 \vec{\Omega}_2, \vec{\Omega}_3 - \vec{\Omega}_2, h_1)$  — распределение яркости в точке  $\vec{r}_3$  в направлении  $\vec{\Omega}_3$  от точечного моноаправленного источника в рассеивающей среде, находящегося в точке  $\vec{r}_2$  и излучающего в направлении  $\vec{\Omega}_2$ , на расстоянии  $h_1$  от него.

Яркость светового поля непосредственно за объектом промодулирована распределением его коэффициента пропускания:

$$B_3^0(\vec{r}_3, \vec{\Omega}_3) = B_3(\vec{r}_3, \vec{\Omega}_3) R_0(\vec{r}_3 - \vec{r}), \quad (4)$$

где  $\vec{r}$  — координата точки наблюдения.

Распределение яркости на входе линзы 2 описывается выражением

$$B_4(\vec{r}_4, \vec{\Omega}_4) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int B_3^0(\vec{r}_3, \vec{\Omega}_3) b_c(\vec{r}_3 \rightarrow \vec{r}_4, \vec{\Omega}_3 \rightarrow \vec{\Omega}_4, h_2) d\vec{r}_3 d\vec{\Omega}_3. \quad (5)$$

Яркость светового излучения на входе фотоприёмника СН

$$\begin{aligned} B_5(\vec{r}_5, \vec{\Omega}_5) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int B_4(\vec{r}_4, \vec{\Omega}_4) \Pi_2(\vec{r}_4) G_{s_2}(\vec{\Omega}_4 \rightarrow \vec{\Omega}_5, \vec{r}_4) \times \\ &\times \delta(\vec{r}_5 - \vec{r}_4 - H_2 \vec{\Omega}_5) d\vec{r}_4 d\vec{\Omega}_4, \end{aligned} \quad (6)$$

(функции  $\Pi_2$  и  $G_{s_2}$  аналогичны функциям  $\Pi_1$  и  $G_{s_1}$ ).

Мощность светового излучения, формирующего изображение объекта, описывается соотношением

$$P = \iiint_{-\infty}^{\infty} D_2(\vec{r}_5, \vec{\Omega}_5) B_5(\vec{r}_5, \vec{\Omega}_5) d\vec{r}_5 d\vec{\Omega}_5. \quad (7)$$

Проведя в выражениях (5), (6) замену переменных

$$\vec{r}_4 \rightarrow \vec{r}'_2, \quad \vec{r}_5 \rightarrow \vec{r}'_1, \quad \vec{\Omega}_4 \rightarrow -\vec{\Omega}'_2, \quad \vec{\Omega}_5 \rightarrow -\vec{\Omega}'_1,$$

а также используя соотношение взаимности

$$b_c(\vec{r}_3 \rightarrow \vec{r}_4, \vec{\Omega}_3 \rightarrow \vec{\Omega}_4) \equiv b_c(\vec{r}'_2 \rightarrow \vec{r}_3, \vec{\Omega}'_2 \rightarrow -\vec{\Omega}_3),$$

получим следующее выражение для мощности светового излучения, попадающего в приёмник СН:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int R_0(\vec{r}_3) B_3(\vec{r}_3, \vec{\Omega}_3) B'_3(\vec{r}_3, -\vec{\Omega}_3) d\vec{r}_3 d\vec{\Omega}_3, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} B'_3(\cdot) = & \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int D_2(\vec{r}'_1, \vec{\Omega}'_1) \delta(\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 - H_2 \vec{\Omega}'_1) \Pi_2(\vec{r}'_2) \times \\ & \times G_{s_2}(\vec{\Omega}'_1 \rightarrow \vec{\Omega}'_2, \vec{r}'_2) b_c(\vec{r}'_2 \rightarrow \vec{r}_3, \vec{\Omega}'_2 \rightarrow -\vec{\Omega}_3, h_2) d\vec{r}'_{1,2} d\vec{\Omega}'_{1,2}. \end{aligned}$$

Мощность светового излучения, формирующего изображение объекта, выраженная через спектры входящих в (1)–(8) функций, описывается соотношением

$$P(\vec{r}) = \frac{B_0}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int F_0(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) F_1^0(\vec{k}_1, \vec{p}) F_2^0(\vec{k}_2, \vec{p}) e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\vec{r}} d\vec{k}_{1,2} d\vec{p}, \quad (9)$$

где

$$F_i^0(\vec{k}_i, \vec{p}) = F_b(\vec{k}_i, \vec{p}, h_i) F_{d_i}(\vec{p} + \vec{k}_i z_i) \Phi_i(\vec{k}_i, \vec{p}),$$

$$\Phi_i(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F_i(\vec{\omega}, \vec{p} + \vec{k}_i z_i - \vec{\omega} H_i) F_{\Pi_i} \left[ \frac{\vec{p}}{f_i} + \vec{k}_i \left( \frac{z_i}{f_i} - 1 \right) - \vec{\omega} \right] d\vec{\omega},$$

$F_0, F_b, F_d, F_i, F_{\Pi_i}$  — пространственные спектры функций  $R_0, b_c, G_d, D_i, \Pi_i$ .

Заметим, что формулы (8), (9) являются обобщением соответствующих выражений работы [3], посвящённой наблюдению ламбертово отражающего объекта методом конфокальной микроскопии.

2. Модели источника, приёмника, линзы, объекта и среды. В качестве оптических передаточных функций источника и приёмника воспользуемся гауссовыми функциями:

$$F_i(\vec{k}, \vec{p}) = \Sigma_i \Delta_i \exp \left[ -\frac{1}{4\pi} (\Sigma_i k^2 + \Delta_i p^2) \right] \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

где  $\Sigma_{1(2)}$  — площадь апертуры источника (приёмника),  $\Delta_{1(2)}$  — телесный угол излучения (приёма).

Для описания пространственного спектра функции пропускания линз 1 и 2 также используем гауссовую функцию:

$$F_{\Pi_i}(\vec{k}) = \Sigma_{s_i} \exp\left(-\frac{\Sigma_{s_i}}{4\pi} k^2\right) \quad (i = 1, 2), \quad (11)$$

где  $\Sigma_{s_{1,2}}$  — площади линз 1 и 2.

В качестве оптической передаточной функции рассеивающей толщи воды  $F_b(\cdot)$  используем фурье-образ автомодельного решения уравнения переноса излучения для распределения яркости в среде с анизотропным рассеянием [4]:

$$F_b(\vec{k}, \vec{p}, h) = e^{-\alpha h} \sum_{i=1}^2 C_i \exp\left[-\frac{1}{4\pi}(T_i k^2 + 2R_i \vec{k} \cdot \vec{p} + q_i p^2)\right], \quad (12)$$

где  $C_1 = \exp(-\sigma h)$  — амплитуда нерассеянной компоненты излучения,  $C_2 = 1/\operatorname{ch} \zeta - \exp(-\sigma h)$  — амплитуда рассеянной компоненты,

$$T_1 = R_1 = q_1 = 0, \quad T_2 = \frac{4\pi}{A\alpha^2 \Omega_\infty} (\zeta - \operatorname{th} \zeta), \quad R_2 = \frac{2\pi}{A\alpha} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \zeta}\right).$$

$$q_2 = \frac{\pi}{A} \Omega_\infty \operatorname{th} \zeta, \quad A = 1 - \operatorname{ch} \zeta \exp(-\sigma h), \quad \zeta = \frac{1}{2} \Omega_\infty \alpha h, \quad \Omega_\infty = \sqrt{2\sigma\gamma^2/\alpha},$$

$\sigma$  — коэффициент рассеяния воды,  $\alpha$  — коэффициент поглощения,  $\gamma^2$  — дисперсия индикаторы рассеяния.

Оптическая передаточная функция, описывающая дифракционные эффекты на апертуре освещённой части поверхности линзы, определяется выражением

$$F_d(\vec{k}z) = \exp\left(-\frac{\sigma_d}{4\pi} \Sigma_s k^2\right), \quad (13)$$

где  $\sigma_d = (\lambda z/d_s)^2$  — относительная площадь дифракционного пятна на глубине  $z$  ( $\sigma_d$  получено из формулы для телесного угла дифракции  $\Delta_d = \frac{\pi}{4}(\lambda/d_s)^2$ ).

Оценку возможностей различных систем видения удобно производить по контрасту изображения деталей объектов определённого класса (тест-объектов). В качестве таких объектов могут служить объекты с синусоидальным распределением коэффициента пропускания:

$$R_0(\vec{r}) = 1 - R_0 \exp\left(-\frac{\pi r^2}{\Sigma_0}\right) (1 + K_0 \sin \omega_0 \vec{r}),$$

где  $R_0$  — среднее значение коэффициента пропускания,  $\omega_0$  — пространственная частота полос на объекте,  $K_0$  — исходный контраст полос,  $\Sigma_0$  — площадь объекта.

Пространственный спектр объекта описывается выражением

$$F_0(\vec{k}) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k}) - R_0 \Sigma_0 \left\{ \exp \left( -\frac{\Sigma_0}{4\pi} k^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{K_0}{2i} \left[ \exp \left( -\frac{\Sigma_0}{4\pi} (\vec{k} - \vec{\omega}_0)^2 \right) - \exp \left( -\frac{\Sigma_0}{4\pi} (\vec{k} + \vec{\omega}_0)^2 \right) \right] \right\}. \quad (14)$$

3. Изображение объекта в конфокальном микроскопе. Подставляя соотношения (10), (11) в формулу (9), получим в качестве промежуточного результата выражение для функции  $\Phi_1$ :

$$\Phi_1(\vec{k}, \vec{p}) = \frac{\Sigma_1 \Delta_1}{\sigma_1^0} \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi \sigma_1^0} \left\{ k_1^2 \Sigma_{s_1} [\sigma_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (\alpha_1 - \beta_1)^2] + \right. \right. \\ \left. + p^2 \Delta_1 \left[ \sigma_1 \left( 1 + \frac{H_1^2}{f_1^2} \right) + \left( \frac{H_1}{f_1} - 1 \right)^2 \right] + \right. \\ \left. \left. + 2\vec{k}\vec{p} \frac{\Sigma_{s_1}}{H_1} \left[ \sigma_1 \left( \alpha_1 + \beta_1 \frac{H_1}{f_1} \right) + (\beta_1 - \alpha_1) \left( \frac{H_1}{f_1} - 1 \right) \right] \right\} \right\}, \quad (15)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{z_1}{H_1}, \quad \beta_1 = \frac{z_1}{f_1} - 1, \quad \sigma_1 = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_{s_1}}, \quad \sigma_1^0 = 2 + \sigma_1$$

(аналогично записывается функция  $\Phi_2$  с заменой индексов 1 на 2).

Интегрируя выражение (9) с учётом (12)–(15) последовательно по переменным  $\vec{p}$ ,  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_2$ , получим в результате громоздких, но, в принципе, несложных выкладок следующее выражение для распределения яркости в изображении объекта, наблюдаемого посредством конфокального микроскопа сквозь слой рассеивающей среды:

$$P(\vec{r}) = P_0 \frac{\Delta_2}{\pi} \frac{\sigma_2}{\sigma_1^0 \sigma_2^0} e^{-\varphi(h_1 + h_2)} \sum_{i,j=1}^2 \frac{C_i C_j}{\gamma_{ij}} \left[ \frac{1}{\nu} - \mathcal{F}(\vec{r}) \right], \quad (16)$$

где  $P_0 = B_0 \Sigma_1 \Delta_1$  — мощность источника света,

$$\mathcal{F}(\vec{r}) = \frac{R_0 \sigma_0}{\mu + \nu \sigma_0} \exp \left( -\frac{\pi r^2}{\xi \Sigma_0} \right) \left[ 1 + K_s K_s \sin \left( \frac{\vec{\omega}_0 \vec{r}}{\xi} \right) \right],$$

$$K_s = \exp \left[ - \left( \frac{\pi N}{4} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right], \quad \xi = 1 + \frac{\mu}{\nu \sigma_0}, \quad \mu = a_1 a_2 - \Delta_1 \Delta_2 a_3^2,$$

$$\nu = \frac{\Sigma_{s_1}}{\Sigma_{s_2}} a_1 + a_2 + 2\Delta_1 \frac{H_1}{H_2} a_3, \quad a_1 = \eta_1 + \sigma_{d_1} + \tau_i - \Delta_1 b_i^2, \quad a_2 = \eta_2 + \sigma_{d_2} + \tau_j - \Delta_2 b_j^2,$$

$$a_3 = b_i b_j, \quad \eta_{1,2} = \frac{1}{\sigma_{1,2}^0} [\sigma_{1,2} (\alpha_{1,2}^2 + \beta_{1,2}^2) + (\alpha_{1,2} - \beta_{1,2})^2],$$

$$b_i = \gamma_{ij}^{-1/2} \left\{ \frac{1}{\sigma_1^0} \left[ \sigma_1 \left( \alpha_1 + \beta_1 \frac{H_1}{f_1} \right) + (\beta_1 - \alpha_1) \left( \frac{H_1}{f_1} - 1 \right) \right] + \frac{1}{\alpha_1} (\sigma_{d_1} + \rho_i) \right\}$$

( $b_j$  записывается аналогично — с заменой индексов 1 на 2,  $i$  на  $j$ ),

$$\gamma_{ij} = \gamma_1 + \gamma_2 + q_i + q_j + \Delta_{d_1} + \Delta_{d_2},$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{\Delta_{1,2}}{\sigma_{1,2}^0} [\sigma_{1,2}(1 + H_{1,2}^2/f_{1,2}^2) + (H_{1,2}/f_{1,2} - 1)^2],$$

$$\tau_i = \frac{T_i}{\Sigma_{s_1}}, \quad \tau_j = \frac{T_j}{\Sigma_{s_2}}, \quad \rho_i = \frac{R_i z_1}{\Sigma_{s_1}}, \quad \rho_j = \frac{R_j z_2}{\Sigma_{s_2}}$$

(заметим, что аргументом функций среды с индексом  $i$  является  $h_1$ , а функций с индексом  $j$  —  $h_2$ );  $N$  — число полос на объекте.

Формула (16) является основной в последующих рассуждениях. Заметим, что поперечное разрешение СН определяется параметром  $\xi$  — чем он меньше по величине, тем выше разрешение. Этот параметр зависит от размеров освещённых областей на объекте от источника и приёмника, которые, в свою очередь, зависят от геометрии задачи (параметры  $\eta_{1,2}$ ) и от эффектов дифракции (параметры  $\sigma_{d_{1,2}}$ ) и рассеяния (параметры  $\tau_{i,j}$ ). В том случае, когда объект расположен в плоскости, сопряжённой источнику и приёмнику, выполняется равенство  $\alpha_{1,2} = \beta_{1,2}$ . В этом случае параметр  $\xi$  получает значение, близкое к 1, что обеспечивает системе наблюдения наилучшее разрешение по координате.

**4. Контраст изображения.** Проведём оценку возможностей рассматриваемой системы видения по контрасту изображения тест-объекта типа (14). В качестве критерия видимости объекта в теории видения в рассеивающих средах используют критерий Джонсона [5]. В основе этого критерия лежит экспериментально установленный факт соответствия характера распознавания реальных объектов и тест-объектов с набором чередующихся светлых и тёмных полос, причём каждому уровню видения соответствует определённое число разрешаемых полупериодов эквивалентной миры. В частности, уровню “различение деталей” на реальном объекте соответствует разрешение (по контрасту) 8-и полос на тест-объекте.

Выражение для контраста центральной части изображения  $P(\vec{r})$  имеет следующий вид:

$$K_i = K_0 \frac{\Delta P}{P}, \quad (17)$$

где

$$\Delta P = \frac{1}{2} (P_{\max} - P_{\min}) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{C_i C_j}{\gamma_{ij}} \cdot \frac{R_0 \sigma_0}{\mu + \nu \sigma_0} K_s,$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}(P_{\max} + P_{\min}) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{C_i C_j}{\gamma_{ij}} \left( \frac{1}{\nu} - \frac{R_0 \sigma_0}{\mu + \nu \sigma_0} \right),$$

где  $P_{\max(\min)}$  — максимальное (минимальное) значение  $P(\vec{r})$ .

5. Анализ результатов расчётов. Полученные в предыдущих разделах соотношения позволяют провести анализ зависимости контраста от всех физических факторов задачи. Ниже излагаются результаты численных расчётов контраста изображения для следующих значений параметров: длина волны излучения  $\lambda = 600$  нм, диаметры источника и приёмника  $d_{1,2} = 4$  мкм, диаметры линз  $d_{s1,2} = 4$  мм, фокусные расстояния линз  $f_{1,2} = 4$  мм, расстояния от источника и приёмника до соответствующих линз  $H_{1,2} = 160$  мм, диаметр объекта  $d_0 = 0,1$  мм, коэффициент пропускания объекта  $R_0 = 0,5$ , контраст полос на объекте  $K_0 = 1$ , число полос  $N = 8$ , коэффициент рассеяния среды  $\sigma = 20 \text{ мм}^{-1}$ , коэффициент поглощения  $\alpha = 0,02 \text{ мм}^{-1}$ , дисперсия индикатрисы рассеяния  $\gamma^2 = 0,04$ .

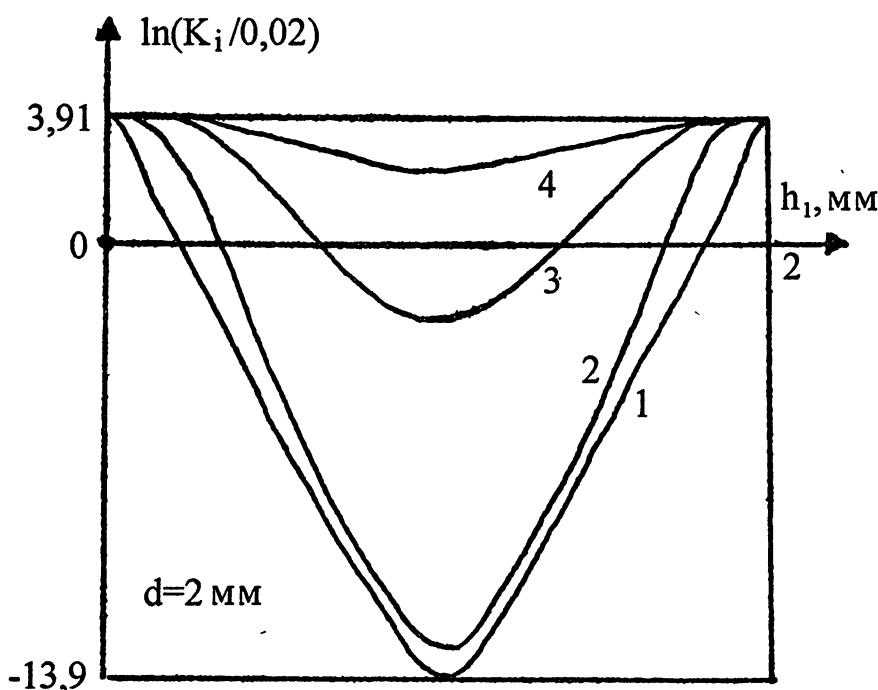


Рис. 2. Зависимость контраста изображения полос на объекте от глубины объекта при различных размерах объекта:  $d_0 = 0,1$  мм (1),  $0,5$  мм (2),  $1$  мм (3),  $2$  мм (4).

Перейдём к обсуждению полученных результатов. На рис. 2 приведены рассчитанные по формулам (16), (17) зависимости контраста от глубины расположения объекта при соблюдении условия оптического сопря-

жения плоскостей, в которых располагаются источник света (приёмник) и объект (при этом  $\alpha_{1,2} = \beta_{1,2}$ ). Эти зависимости имеют минимум на глубине, соответствующей середине слоя рассеивающей среды. Такое поведение контраста характерно для конфокальной схемы освещения–приёма; при диффузной подсветке объекта контраст монотонно растёт с увеличением  $h_1$  (по мере приближения объекта к нижней границе среды). Для определения предельной глубины видимости (разрешения полос в изображении объекта) необходимо задаться пороговым значением контраста — мы принимаем его равным 0,02 (контрастная чувствительность глаза). Точка пересечения графика  $\ln(K_i/0,02)$  с осью абсцисс определяет значение предельной дальности видимости. Из рис. 2 видно, что предельная глубина видимости объекта растёт при увеличении размеров объекта (напомним, что при этом увеличивается и пространственный период полос на объекте).

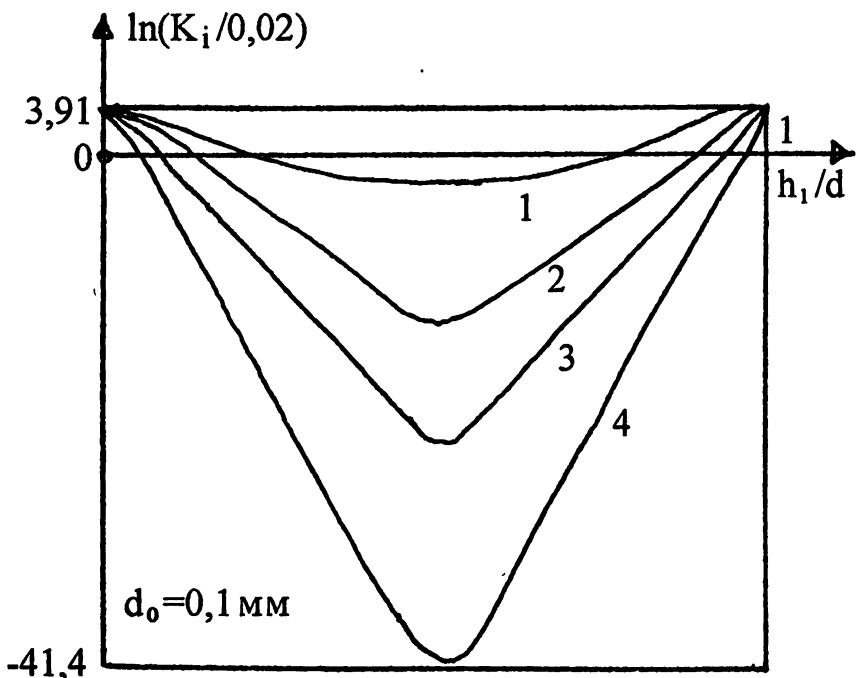


Рис. 3. Зависимость контраста изображения полос на объекте от безразмерной глубины объекта при различных толщинах среды:  $d = 1 \text{ мм}$  (1),  $2 \text{ мм}$  (2),  $3 \text{ мм}$  (3),  $5 \text{ мм}$  (4).

На рис. 3 приведены зависимости контраста от безразмерной глубины расположения объекта при оптическом сопряжении источника (приёмника) и объекта. Эти зависимости также имеют минимум на глубине, соответствующей середине слоя рассеивающей среды. С увеличением толщины рассеивающей среды предельная глубина видимости объекта монотонно уменьшается. Отметим, что во всех этих случаях важную роль в

формировании изображения играет нерассеянная компонента излучения; расчёт по одной только рассеянной компоненте даёт существенно меньшие значения контраста.

Проведённые расчёты показали, что контраст изображения и предельная глубина видимости со стороны источника (приёмника) уменьшаются при увеличении размеров источника (приёмника), диаметра или фокусного расстояния линзы источника (приёмника) и уменьшении расстояния источника (приёмника) – линзы. Эти результаты согласуются с соответствующими выводами [3] и интерпретируются аналогичным образом.

Специальный интерес представляет исследование влияния расфокусировки излучающей и приёмной систем по отношению к объекту. Зависимость наблюдаемого контраста полос на объекте от величины вертикального смещения глубины фокусировки источника и приёмника относительно объекта позволяет судить о глубине резкости просветной конфокальной схемы. На рис. 4 приведён пример расчёта контраста изображения по формулам (16), (17), в которых положено:

$$z_{1,2} = L_{1,2} + \Delta, \text{ где } L_i = H_i f_i / (H_i - f_i)$$

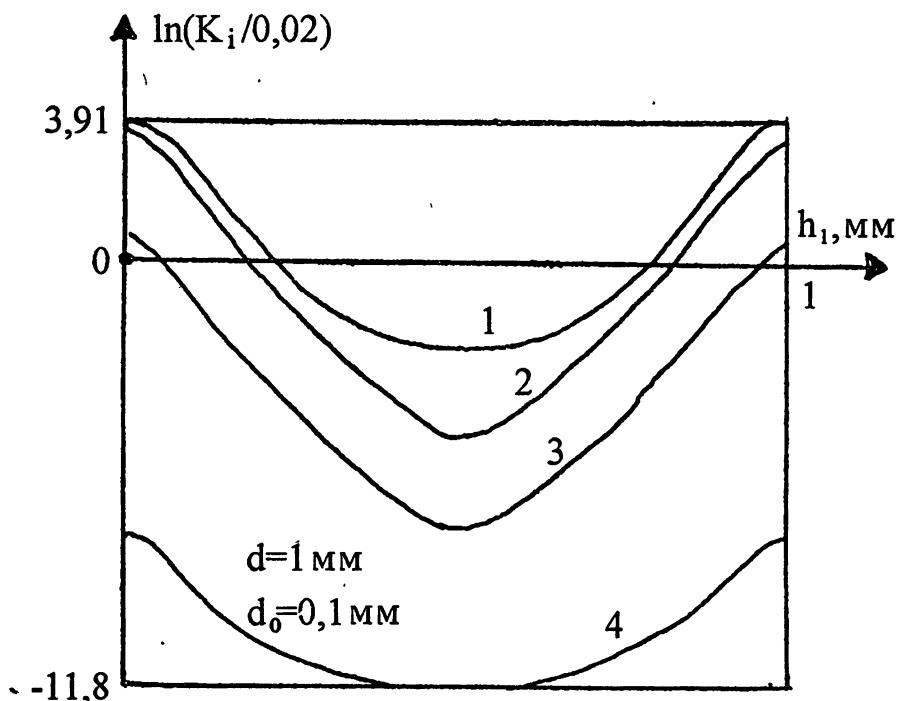


Рис. 4. Зависимость контраста изображения полос на объекте от глубины объекта при различных значениях продольной расфокусировки системы наблюдения:  $\Delta = 0 \text{ мм}$  (1),  $0,02 \text{ мм}$  (2),  $0,05 \text{ мм}$  (3),  $0,1 \text{ мм}$  (4).

(при этом, очевидно,  $\alpha_{1,2} \neq \beta_{1,2}$ ). Зависимости рис. 4 наглядно свидетель-

ствуют о том, что продольная "расстройка" СН существенным образом ухудшает качество изображения объекта в рассеивающей среде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-02-5797).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Amos W. B., White J. G., Fordham M. //Appl. Opt., 1987. V. 26. P. 3239.
2. Massig J. H., Preissler M., Wegener A. R., Gaida G. //Appl. Opt., 1994. V. 33. № 4. P. 690.
3. Вебер В. Л. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1996. Т. 39. № 7. С. 925.
4. Долин Л. С. //Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1983. Т. 19. № 4. С. 400.
5. Зеге Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. — Минск: Наука и техника. 1985. — 327 с.

Институт прикладной физики  
РАН, Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
27 декабря 1996 г.

### THE CONTRAST OF IMAGE OF SMALL SIZE OBJECT FOR OBSERVATION THROUGH THE SCATTERING MEDIA BY THE METHOD OF TRANSMITTED CONFOCAL MICROSCOPY

Weber W. L.

The model of the observation of inhomogeneity in biological tissue by the method of transmitted confocal microscopy was worked out based on the vision theory in turbid media. The main formulas for calculation of contrast of the image of local inhomogeneity with sinusoidal distribution of transmission coefficient setting in isotropic scattering media are presented. The analysis of influence of the observing system parameters on the maximum vision depth of inhomogeneity was carried out.

УДК 533.951

## МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В МИКРОВОЛНОВЫХ РАЗРЯДАХ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ

*H. B. Введенский, Н. К. Вдовичева, В. Б. Гильденбург, Н. А. Жарова,  
И. А. Шерешевский, М. И. Ясин*

Исследованы аналитически и численно три различные физические модели нелинейной стадии плазменно-резонансной ионизационной неустойчивости (ПРИН) микроволнового разряда в полях различной конфигурации. Изучены режимы одномерного обострения профилей амплитуды поля и плотности плазмы, описывающиеся автомодельным решением уравнения диффузии с нелинейным источником. Описаны сценарии двумерной эволюции волны пробоя в неоднородном газе (или в сфокусированном волновом пучке с заданными лучевыми трубками), распадающейся в результате развития неустойчивости на отдельные плаэмоиды, внутри которых генерируются резонансные "активные зоны" с повышенными значениями амплитуды поля и скорости ионизации. Проведено компьютерное моделирование процессов формирования самоподдерживающихся плазменных волноводов и адиабатического преобразования быстрой волновой моды в медленную при пробое газа в неоднородном поле волны *p*-поляризации.

Целью данной работы является исследование динамических структур, формируемых в высокочастотных разрядах на нелинейной стадии плазменно-резонансной ионизационной неустойчивости (ПРИН). Эта неустойчивость, обусловленная эффектом взаимного усиления мелкомасштабных возмущений амплитуды поля и плотности плазмы, приводит к их пространственной модуляции в направлении вектора электрического поля и весьма существенно определяет динамику и структуру микроволнового (а в определенных условиях и оптического) разрядов в области не слишком высоких давлений газа, где частота соударений электронов меньше частоты поля. Хотя анализ начальной (линейной) стадии ПРИН (известной также под названиями "ионизационно-полевая" и "квазистатическая") и экспериментальные наблюдения некоторых форм разряда, возникавших в результате её развития, были выполнены довольно давно [1-4], в исследовании процессов, характерных для её нелинейной стадии, пока сделаны лишь первые шаги [5, 6].

Нами было проведено компьютерное моделирование таких процессов в рамках приближений, обычных для теории неравновесного высокочастотного разряда в холодном газе [7, 8] (локальность и безынерционность усреднённого нагрева электронов и локальность поляризационного

отклика плазмы на частоте поля  $\omega$ ). В уравнении для плотности плазмы  $N(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \nabla(D\nabla N) + (\nu_i - \nu_a)N - \alpha N^2 \quad (1)$$

частота прилипания электронов  $\nu_a$  и коэффициент рекомбинации  $\alpha$  предполагались постоянными, для частоты ионизирующих соударений  $\nu_i$  и коэффициента диффузии  $D$  использовались степенные аппроксимации

$$\nu_i = \nu_a(|E|/E_c)^\beta, \quad D = D_0(|E|/E_c)^\sigma \quad (2)$$

где  $E(\mathbf{r}, t)$  — комплексная амплитуда (медленная огибающая) электрического поля  $\mathcal{E}$ , представляемого в виде  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}E \exp(i\omega t) + \text{к.с.}$ ,  $E_c$  — критическое (пороговое) поле однородного пробоя,  $D_0$  — значение коэффициента диффузии при  $|E| = E_c$ ; показатели  $\beta$  и  $\sigma$  зависят от рода газа и диапазона изменения амплитуды поля; в частности, для воздуха  $\beta \sim 5 \div 3$ ,  $\sigma \simeq 2$  при  $|E|/E_c \sim 1 \div 5$ . Были рассмотрены три динамические модели, различающиеся конфигурацией электромагнитного поля, создающего разряд, и общим характером постановки задачи.

1. *Разряд в продольном переменном поле ( $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E(x, t)$ ,  $N = N(x, t)$ ).* Данная одномерная модель (модель "плоского конденсатора") пригодна для описания мелкомасштабного дробления разрядов как в квазистатических, так и в волновых полях при условии малости характерного масштаба неустойчивости по сравнению с длиной волны  $\lambda \sim c/\omega$ . Уравнение для электрического поля и его решение имеют в этом приближении весьма простой вид:

$$\nabla(\epsilon E) = \partial(\epsilon E)/\partial x = 0, \quad E = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (3)$$

Здесь  $\epsilon = 1 - n(1 + i\bar{\nu})$  — комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы,  $n = N/N_c$ ,  $\bar{\nu} = \nu/\omega$ ,  $N_c = m(\omega^2 + \nu^2)/4\pi e^2$ ,  $\nu$  — частота соударений электронов,  $E_0 = \text{const}$  — амплитуда электрического поля вне плазмы, совпадающая с амплитудой электрической индукции в плазме и рассматриваемая как заданная величина, не зависящая от времени (альтернативная одномерная модель, в которой фиксировалась не индукция  $E_0$ , а среднее на некотором промежутке поле  $\langle E(x) \rangle = \text{const}$ , рассматривалась в работе [5]).

Вводя безразмерные переменные ( $x/L_a \rightarrow x$ ,  $\nu_a t \rightarrow t$ ) и используя уравнения (2), (3), запишем уравнение для плотности плазмы в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( f^\sigma(n) \frac{\partial n}{\partial x} \right) + [f^\beta(n) - 1]n - \alpha_0 n^2; \quad f(n) = \left[ \frac{U_0^2}{(1-n)^2 + (\bar{\nu}n)^2} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Здесь единицей масштаба по  $x$  служит диффузационная длина прилипания электронов  $L_a = (D_0/\nu_a)^{1/2}$ ,  $U_0 = E_0/E_c$ ,  $\alpha_0 = \alpha N_c/\nu_a$ . При достаточно малых значениях параметров  $\alpha_0$  и  $\bar{\nu}$  однородное (не зависящее от  $x$ ) решение уравнения (4) (как стационарное, так и нестационарное во времени) неустойчиво по отношению к малым неоднородным возмущениям в широкой области значений плотности плазмы  $n_a < n < n_b$ , где  $r_a \simeq L^{-2}$ ,  $n_b = 1/(1 + \bar{\nu}^2) \simeq 1$ ;  $L$  — безразмерный (отнесённый к  $L_a$ ) пространственный масштаб возмущения (см. работы [1, 4, 5]). Эволюция сильных возмущений (какими они неизбежно становятся на нелинейной стадии неустойчивости и, в частности, при приближении плотности к критическому значению  $n = 1$ ) может быть рассчитана только численными методами. Уравнение (4) решалось численно с помощью компьютера на промежутке  $-L \leq x \leq L$  при следующих начальных и граничных условиях для функции  $n(x, t) = n(-x, t)$ :

$$n(x, 0) = n_0 \cos^2 \left( \frac{\pi x}{2d} \right) \text{ при } |x| \leq d; \quad (5)$$

$$n(x, 0) = 0 \text{ при } d \leq |x| \leq L; \quad \frac{\partial n}{\partial x}(\pm L, t) = 0.$$

Типичный сценарий эволюции разряда при значениях параметров  $n_0 = 0,3$ ,  $U_0 = 1,2$ ,  $\bar{\nu} = 0,2$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta = 4$ ,  $\sigma = 2$ ,  $L = 3$ ,  $d = 1$  показан на рис. 1. На первой стадии процесса рост максимальной плотности, достигающейся в точке  $x = 0$  ( $n_{\max} = n(0, t)$ ), происходит с увеличивающейся скоростью в режиме обострения вплоть до значения  $n_{\max} \simeq 1$  (неустойчивость носит взрывной характер). После прохождения точки критической плотности скорость роста  $n_{\max}$  снижается и процесс приобретает характер стационарной волны пробоя с весьма резким фронтом [9], распространяющейся в направлении от центра к краям промежутка. На завершающей стадии процесса образуется устойчивое однородное стационарное состояние с  $|E| = E_c$ ,  $n \simeq 1 + U_0 = 2,2$ .

Процесс обострения профилей поля и плотности плазмы при приближении к точке плазменного резонанса (в области  $0 < 1 - n \ll 1$ ) в случае малых  $\bar{\nu}$  и  $\alpha_0$  можно описать приближённо на основании автомодельного решения некоторого упрощённого уравнения. Полагая в уравнении (4)  $\bar{\nu} = \alpha_0 = 0$  и заменяя последнее слагаемое (нелинейный источник) в правой части этого уравнения его асимптотикой при  $n \rightarrow 1$ , в новых переменных  $\varepsilon = 1 - n$ ,  $y = x U_0^{(\beta-\sigma)/2}$ ,  $\tau = (t_0 - t) U_0^\beta$  ( $t_0$  — момент достижения особенности в точке  $x = 0$ ) получаем из (4):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon^{-\sigma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - \varepsilon^{-\beta}. \quad (6)$$

Уравнение (6), как нетрудно показать, имеет в области  $\tau > 0$  автомо-

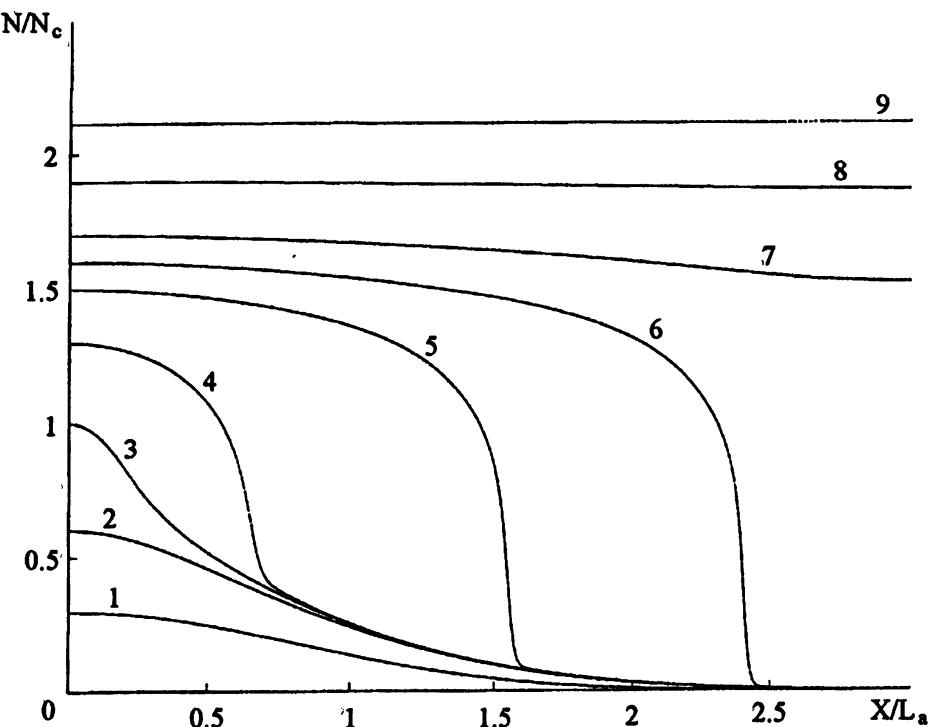


Рис. 1. Одномерные пространственные распределения плотности плазмы  $n(x)$  на нелинейной стадии неустойчивости в различные моменты времени. Кривые 1–9 соответствуют моментам времени  $t = 0,155; 0,235; 0,238; 0,239; 0,244; 0,249; 0,259; 0,307; 0,69$ .

дельное решение вида

$$\varepsilon(x, t) = \tau^p G(\xi), \quad (7)$$

где  $\xi = y/\tau^q$  — автомодельная переменная,  $p = 1/(\beta + 1)$ ,  $q = (1/2)[1 - \sigma/(\beta + 1)]$ ; функция  $G(\xi)$  удовлетворяет уравнению в полных производных

$$G'' - q\xi G^\sigma G' - \sigma G^{-1} (G')^2 + pG^{\sigma+1} - G^{\sigma-\beta} = 0. \quad (8)$$

Интересующее нас решение этого уравнения (конечное при всех  $\xi \neq \infty$  и отвечающее условиям:  $\partial\varepsilon/\partial x(0, t) = 0$ ,  $\varepsilon(0, t) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ ) имеет при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  степенную асимптотику  $G_{as}(\xi) \sim \xi^r$ ,  $r = 2/(\beta + 1 - \sigma)$ , позволяющую найти вид функций  $\varepsilon(x, t_0) = 1 - n(x, t_0) \sim |x|^r$  и  $E(x, t_0) \sim 1/|x|^r$  в момент возникновения особенности  $t = t_0$ . При  $t < t_0$  автомодельное решение  $\varepsilon(x, t)$  близко к указанной асимптотике всюду, за исключением непрерывно сужающегося (при  $t \rightarrow t_0$ ) интервала шириной  $\Delta x \sim (t_0 - t)^q$ , внутри которого оно сохраняет колоколообразную форму с нулевой производной в точке  $x = 0$ . Процесс выхода решения  $n(x, t)$  из автомодельного в

области малых положительных  $\epsilon(x, t)$  иллюстрируется результатами численных расчётов, представленными на рис. 2 для тех же значений параметров  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 4$ ,  $U_0 = 1,2$  и тех же начальных условий, что и кривые рис. 1. Как видим, при значениях  $t$ , достаточно близких к  $t_0$  ( $t_0 - t < 10^{-7}$ ), решение уравнения (4) с  $\bar{\nu} = \alpha_0 = 0$  (сплошные кривые) вблизи точки плаэменного rezонанса (при  $1 - n(x, t) < 10^{-1}$ ) близко к автомодельному, изображённому на рис. 2 для тех же значений разности  $t_0 - t$  звёздочками. Пунктиром на рис. 2 показана асимптотика автомодельного решения  $n_{as}(x) = n(x, t_0) = 1 - 0,9412 x^{2/3}$ .

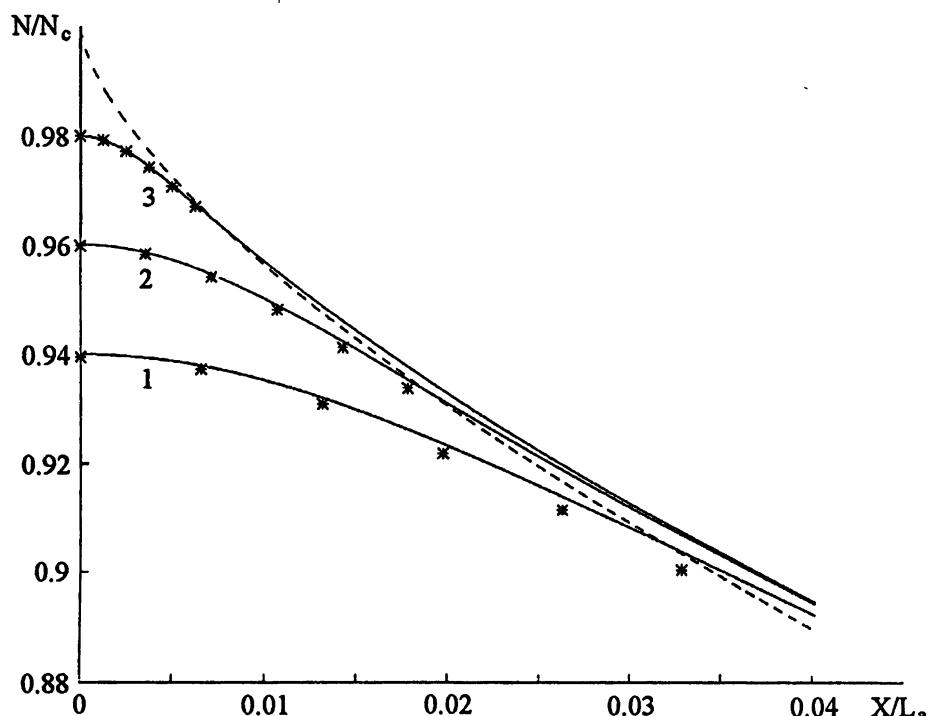


Рис. 2. Выход решения с “физическими” начальными условиями на автомодельное вблизи момента достижения особенности ( $t \approx t_0 \approx 0,231$ ). Сплошные кривые — решение уравнения (4)  $n(x, t)$  с начальными условиями (5) при  $\bar{\nu} = \alpha = 0$ ,  $\beta = 4$ ,  $\sigma = 2$ ,  $U_0 = 1,2$ ; звёздочки — автомодельное решение уравнения (6); пунктир — асимптотика автомодельного решения  $n_{as} = n(x, t_0)$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям разности  $(t_0 - t) \times 10^8 = 10,3; 1,35; 0,042$ .

Заметим, что при  $\sigma = 0$ , т.е. в пренебрежении зависимостью коэффициента диффузии от амплитуды поля, автомодельного решения уравнения (6), удовлетворяющего требуемым условиям  $\epsilon'_x(0, t) = 0$ ,  $\epsilon(0, t_0) = 0$ ,  $\epsilon_{as}(x) = \epsilon(x, t_0) \not\equiv \infty$ , не существует, хотя общий характер решения нелинейного диффузационного уравнения (4) с начальными условиями типа (5) и в этом случае остаётся прежним. Ситуация здесь сходна с описан-

ной в книге [10], где были детально исследованы режимы обострения для несколько отличного от (6) уравнения нелинейной теплопроводности.

**2. Разряд в поле плоской волны (граничнаа двумерная задача).** Пусть амплитуда  $E_0$  электрического поля плоской волны  $E_0 = \mathbf{x}_0 E_0 \exp(i\omega t - ikz)$ , распространяющейся в неоднородном газе, превышает критическую для пробоя величину  $E_c(z) = E_{c0}[1 + (z - z_0)/l]^2$  в некоторой ограниченной области  $z_1 < z < z_2$ . Как ясно из предыдущего, формируемый в этой области разряд неустойчив по отношению к периодическим возмущениям в направлении электрического поля  $\mathbf{x}$ . Возмущенное электрическое поле имеет компоненты  $E_x$  и  $E_z$ , зависящие, как и плотность плазмы  $n$ , от переменных  $x, z, t$ . Магнитное поле имеет только  $y$ -компоненту, комплексная амплитуда которой  $H(x, z, t)$  в предположении достаточной медленности изменения параметра  $N(t)$  ( $\nu \ll \omega$ ) описывается уравнением

$$\nabla(\epsilon^{-1}\nabla H) + k^2 H = 0, \quad k = \omega/c. \quad (9)$$

Компоненты электрического поля  $E_x, E_z$  выражаются через  $H$  с помощью уравнений Максвелла:

$$ik\epsilon E_x = -\partial H / \partial z, \quad ik\epsilon E_z = \partial H / \partial x. \quad (10)$$

Заметим, что данная двумерная модель качественно описывает также динамику разряда, создаваемого в однородном газе полем сфокусированного волнового пучка с заданными лучевыми трубками ( $E_c = \text{const}$ ,  $E_0 = E_0(z)$ ).

Система уравнений (1), (2), (9), (10) решалась на компьютере для области  $0 < z < L_z$ ,  $0 < x < L_x$  с граничными условиями, записанными в форме условий излучения или ограниченности для пространственных гармоник полей отражённой и прошёдшей волн, в предположении периодичности решения  $H(x, z, t)$ ,  $n(x, z, t)$  по поперечной координате  $x$ . Для Фурье-компонент магнитного поля

$$H_m(z, t) = L_x^{-1} \int_0^{L_x} H(x, z, t) \exp(-2\pi imx/L_x) dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

эти условия имеют вид

$$\left. \left( \frac{\partial H_m}{\partial z} - \kappa_m H_m \right) \right|_{z=0} = 2q_m H^{(i)}, \quad \left. \left( \frac{\partial H_m}{\partial z} - \kappa_m H_m \right) \right|_{z=L_z} = 0, \quad (12)$$

где  $\kappa_m = \sqrt{(2\pi m/L_x)^2 - k^2}$ ,  $H^{(i)} = E_0$  — амплитуда падающей волны,  $q_m = 1$  при  $m = 0$ ,  $q_m = 0$  при  $m \geq 1$ . В проводившихся расчётах было выполнено условие  $2\pi/L_x > k$ , означавшее, что все волновые гармоники,

кроме нулевой, описывали неоднородные волны с комплексными волновыми векторами. В качестве граничного условия для плотности плазмы при  $z = 0, z = L_z$  использовалось  $\partial n / \partial z = 0$ . Предполагалось, что на границах  $z = 0, z = L_z$  плотность  $n \ll 1$ , так что уравнения для поля здесь не отличаются от вакуумных. Начальная (затравочная для начала процесса лавинной ионизации) плотность задавалась в виде суммы однородной составляющей и малого неоднородного (периодического по  $x$ ) возмущения, игравшего роль затравки для развития неустойчивости:

$$n(x, z, 0) = n_0 + n_1 \cos(2\pi x / L_x). \quad (13)$$

Предполагались выполненными условия  $n_1 < n_0 \ll 1$ .

Как показали численные расчёты, типичный сценарий эволюции разряда в области существования неустойчивости выглядит следующим образом. Вначале в области минимума величины  $E_c$  (при  $z \approx z_0$ ) образуется максимум плотности плазмы, перемещающийся в виде квазиоднородной по фронту (в направлении  $x$ ) волны пробоя навстречу падающему излучению. Затем, вследствие неустойчивости присутствующих в ней неоднородных по  $x$  возмущений, волна пробоя распадается на отдельные плазменные образования (двумерные плазмоиды), продолжающие двигаться в том же направлении и испытывающие эволюцию, подобную описанной выше в п. 1. Описанный процесс проиллюстрирован на рис. 3, где изображены распределения плотности  $n(x, z)$  для двух моментов времени: а)  $t = 2$ , б)  $t = 4$  (использованы безразмерные переменные  $kx, kz, \nu_a t$ ; расчёты проводились при значениях параметров  $E_0/E_{c0} = 1,5$ ,  $\bar{\nu} = 0,6$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $k^2 D_0 / \nu_a = 0,2$ ,  $kz_0 = kl = 15$ ,  $kL_x = 3$ ,  $n_0 = 10^{-2}$ ,  $n_1 = 10^{-4}$ ). Внутри плазмоидов присутствуют поверхности критической плотности, на некоторых участках которых амплитуда электрического поля имеет сильные резонансные пики (рис. 3в) с  $|E|_{\max} \sim E_0 \omega / \nu$ , что свидетельствует об образовании в разряде движущихся "горячих точек" локальных активных зон, характеризуемых повышенными значениями электронной температуры и скоростей ионизационных и плазмохимических процессов.

При выходе в область с  $E_c(z) > |E|$  плазмоиды останавливаются и плотность в них приближается к нулю, однако при этом в области  $z \approx z_0$  образуется новая волна пробоя, которая (при наличии малой затравочной неоднородности плотности по  $x$ ) повторяет эволюцию прежней.

*3. Разряд в поле двух пересекающихся волн; образование свободно локализованных плазменных волноводов (начальная задача).* Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  в однородном газе ( $E_c = \text{const}$ ) с малой однородной затравочной концентрацией электронов  $n = n_0 \ll 1$  электромагнитное поле задано в виде суперпозиции двух плоских волн с одинаковыми амплитудами и одинаковыми по модулю ( $k = \omega_0/c$ ) волновыми векторами,

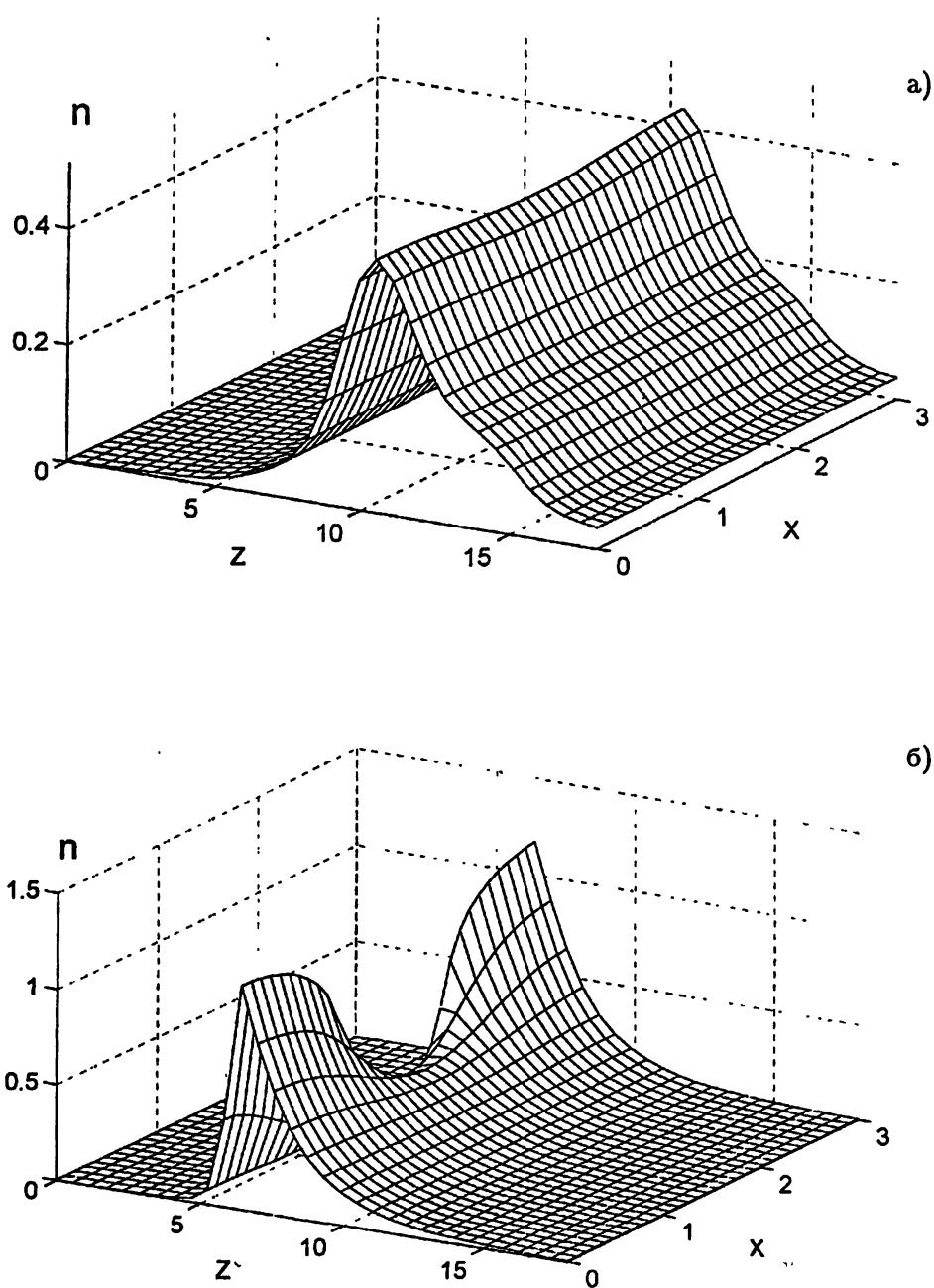


Рис. 3. Двумерные пространственные распределения плотности плаэмы  $n(x, z) = N/N_c$  в граничной волновой задаче в различные моменты времени:  
а)  $t = 2$ ; б)  $t = 4$ ; падающая волна с электрическим полем, параллельным оси  $x$ , распространяется в  $+z$ -направлении.

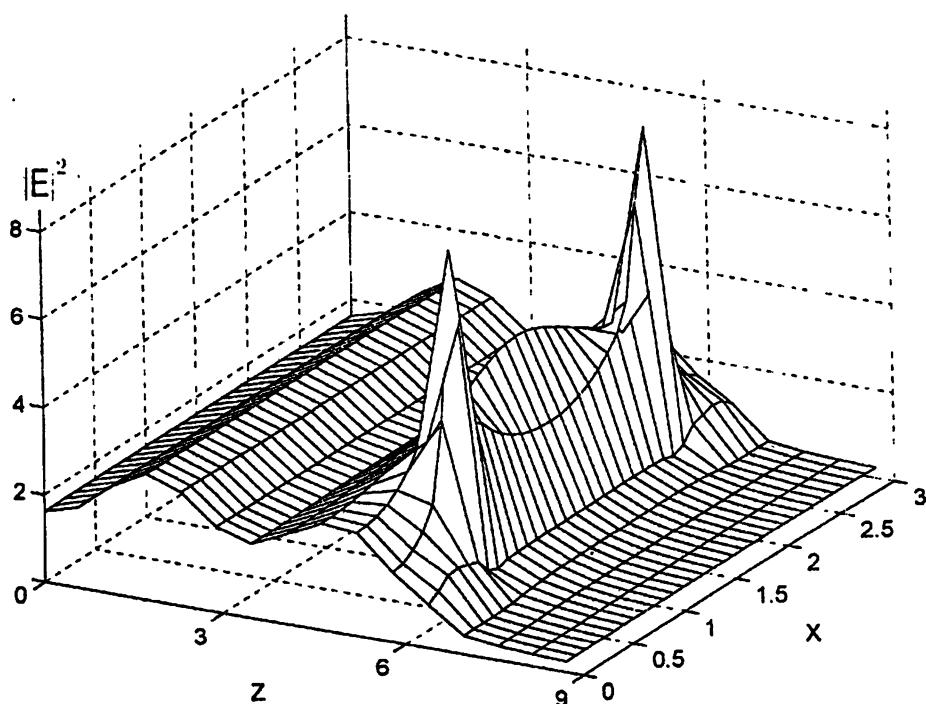


Рис. 3в. Двумерные пространственные распределения интенсивности поля  $|E|^2(x, z)$  в граничной волновой задаче в момент времени  $t = 4$ ; падающая волна с электрическим полем, параллельным оси  $x$ , распространяется в  $+z$ -направлении.

лежащими в плоскости  $x, z$  и образующими равные углы  $\theta$  с осью  $z$ . Электрическое поле, как и в п. 2, имеет компоненты  $E_x, E_z$ , а магнитное поле — компоненту  $H_y$ . При достаточно малой скорости ионизации ( $\nu_i \ll \omega_0$ ) пространственную структуру поля в продольном направлении  $z$  можно считать неизменной, а частоту и амплитуду — медленными функциями времени  $t$ , представляя решение в виде  $H_y = H(x, t) \exp\left(i \int_0^t \omega(t) dt - ik_z\right)$ ,

где  $k_z = \omega_0 \cos \theta / c$ ,  $\omega_0 = \omega(0)$ . Поперечное распределение поля  $H(x, t)$  и частота  $\omega(t) = \omega'(t) + i\omega''(t)$  (в общем случае — комплексная) определяются при этом для каждого момента времени  $t$  как собственная функция и собственное значение в краевой задаче для уравнения, получаемого из (9) заменой  $\nabla \rightarrow \partial/\partial x$ ,  $k^2 \rightarrow (\omega/c)^2 - k_z^2$ , с граничными условиями, отвечающими заданной периодичности решения по  $x$  (при всех  $t \geq 0$  период  $L_x = 2\pi/k_x$ ,  $k_x = \omega_0 \sin \theta / c$ ). Функция  $\epsilon(\omega, x, t)$  в уравнении для  $H$  находится путём интегрирования уравнения (1). Нормирующий множитель в определении собственной функции  $H(x, t)$  может быть найден на основании закона изменения запасённой на промежутке  $L_x$  энергии поля.

Для того, чтобы иметь возможность описать в рамках данной временной задачи эффект сильного адиабатического преобразования частоты и фазовой скорости волны  $v_{ph} = \omega/k_z$ , \* в проводившихся расчётах мы искусственным образом компенсировали временное затухание волны, обусловленное соударениями электронов, добавляя к величине  $\epsilon$ , входящей в (9), слагаемое  $i s$  ( $\epsilon \rightarrow \epsilon + i s$ ,  $s = \text{const} > 0$ ), т.е. фактически исследовали динамику неоднородного пробоя, возникающего в процессе генерации излучения в активной среде.

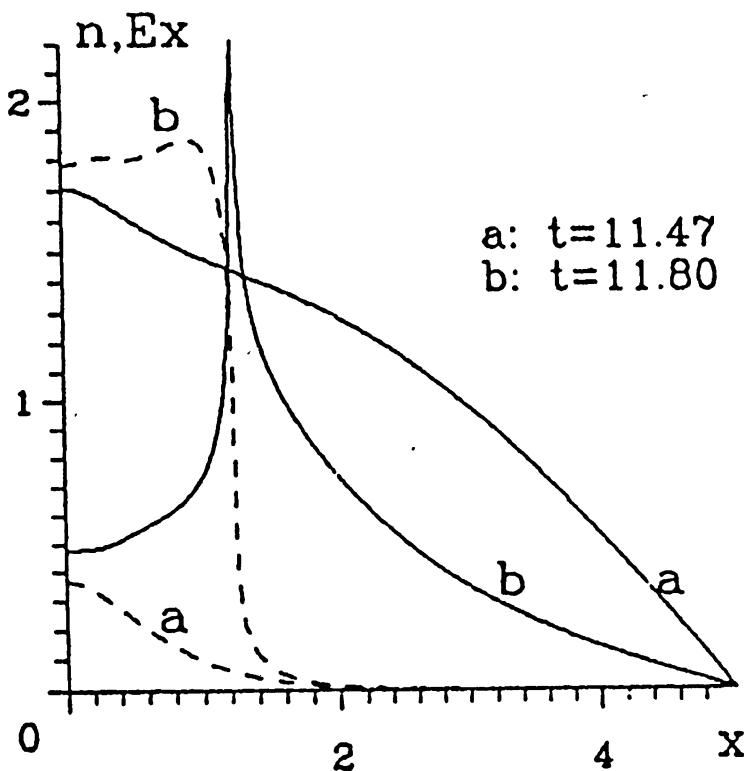


Рис. 4. Пространственные распределения плотности плаэмы  $n = N/N_{c0}$  (пунктир) и модуля поперечной компоненты электрического поля  $E_x$  (сплошные кривые) при пробое газа в поле двух пересекающихся волн  $p$ -поляризации для двух моментов времени.

На рис. 4 изображены в безразмерных переменных  $x \rightarrow kx$ ,  $t \rightarrow v_a t$ ,  $E_x \rightarrow E_x/E_c$ ,  $\bar{n} = N/N_{c0}$  ( $N_{c0} = m\omega_0^2/4\pi e^2$ ) распределения величины  $|E_x|$  (сплошные кривые) и плотности плаэмы (пунктир), рассчитанные для различных моментов времени  $t$  при значениях параметров  $k_z/k = 0,95$ ,

\*Ранее процесс частотной автоконверсии при пробое газа (приводивший к росту  $\omega'(t)$ ) исследовался только для случая однородной или квазиоднородной ионизации газа полем поперечной однородной волны [11, 12] или широкого волнового пучка [13, 14] в отсутствие интересующих нас здесь эффектов сильной поперечной модуляции плотности плаэмы и резонансного усиления поля в областях с критической плотностью.

$4H(0,0) = 0,1E_c$ ,  $n_0 = 10^{-3}$ ,  $\alpha N_{c0}/\nu_a = 0,2$ ,  $\nu/\omega_0 = 1$ ,  $s = 0,05$ ,  $\beta = 4$ ,  $\nu_a/\omega_0 = 0,1$ . Соответствующие временные зависимости частоты  $\omega'(t)$  (отнесённой к  $\omega_0$ ) и потока энергии волны  $P(t)$  в направлении  $z$  (нормированного на максимальное значение) показаны на рис. 5. Как видим, на некотором этапе эволюции разряда ( $t \approx 11,7$ ) в нём формируется само-поддерживающийся плазменный волновод (с  $\text{Re } \epsilon < -1$ ), направляющий прижатую к нему медленную волну, частота и фазовая скорость которой (так же как и переносимая волной мощность) убывают со временем.

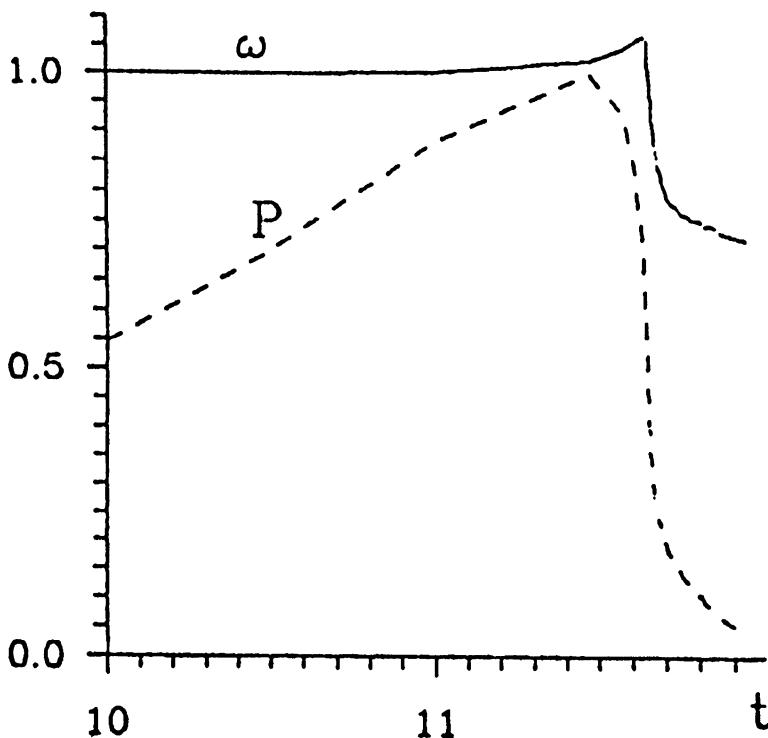


Рис. 5. Зависимости действительной части частоты волны  $\omega$  и потока энергии  $P$  (нормированных на начальные значения) от времени для того же случая, что и на рис. 4.

Рассмотренные модели свидетельствуют о важной роли, которую могут играть в динамике высокочастотных разрядов при  $\nu < \omega$  эффекты взаимного усиления поля и скорости ионизации в области плазменного резонанса. Анализ одномерной модели разряда в потенциальном поле позволил достаточно детально описать эволюцию возникающих структур на масштабах, малых по сравнению с длиной волны. На основании исследования двух других моделей, описывающих динамику аналогичных процессов при пробое газа в волновых полях, проанализированы эффекты: (а) распада разряда на нелинейной стадии ПРИН на движущиеся двумер-

ные плаэмоиды, внутри которых локализуются резонансные пики поля и скорости ионизации; (б) преобразования быстрой волны  $p$ -поляризации в медленную в результате формирования самоподдерживающихся двумерных плаэменных волноводов.

Авторы признательны В. Е. Семёнову за полезные дискуссии. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-02-17467).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гильденбург В. Б., Ким А. В. //ЖЭТФ, 1978. Т. 74. С. 141.
2. Киквидзе Р. Р., Рухадзе А. А. //Физика плаэмы, 1987. Т. 13. С. 246.
3. Вихарев А. Л., Гильденбург В. Б. и др. //Физика плаэмы, 1984. Т. 10. С. 165.
4. Вихарев А. Л., Гильденбург В. Б. и др. //ЖЭТФ, 1988. Т. 94. С. 136.
5. Гильденбург В. Б., Солодов А. А. //Письма в ЖЭТФ, 1995. Т. 62. С. 535.
6. Gil'denburg V. B., Litvak A. G., Zharova N. A. //Phys. Rev. Lett., 1997. V. 78. P. 2968.
7. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения волн в ионосфере. — М.: Наука, 1973.
8. Mayhan J. T., Fante R. L. et.al. //J. Appl. Phys., 1971. V. 42. P. 5362.
9. Гильденбург В. Б., Залесский А. А., Семёнов В. Е. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1995. Т. 38. С. 991.
10. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
11. Yablonovitch E. //Phys. Rev. A, 1974. V. 10. P. 1888.
12. Гильденбург В. Б., Крупнов В. А., Семёнов В. Е. //Письма в ЖТФ, 1988. Т. 14. С. 1695.
13. Rae S. C. //Opt. Commun., 1994. V. 104. P. 330.
14. Gil'denburg V. B., Pozdnyakova V. I., Shereshevskii I. A. //Phys. Lett. A, 1995. V. 203. P. 214.

Институт прикладной физики  
РАН, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
30 декабря 1996 г.

**SMALL-SCALE DYNAMICS STRUCTURES IN LOW-PRESSURE  
MICROWAVE DISCHARGES**

*N. V. Vvedenskii, N. K. Vdovicheva, V. B. Gil'denburg, N. A. Zharova,  
I. A. Shereshevskii, and M. I. Yasin*

We investigate by analytical and computation methods three different physical models of the nonlinear stage of the plasma-resonance ionization instability (PRI) in the microwave discharges produced by the fields of various configuration. Regime of 1-D sharpening of field amplitude and density profiles is studied using the self-similar solution and computer simulation on the basis of the diffusion equation with a nonlinear source. Scenarios of 2-D evolution of the transverse-unstable breakdown wave in an inhomogeneous gas (or in a focused wave beam with given ray traces) are described. As a result of the instability the breakdown wave disintegrates into separate plasmoids containing small-sized resonance "active zones" with increased values of the field amplitude and ionization rate. It is performed the computer simulation of the self-sustained plasma waveguide generation in a free gas accompanied by the adiabatic self-conversion of the fast wave mode into the slow one during a gas breakdown process in an inhomogeneous field of a *p*-polarized wave.

УДК 621.372

# ОТРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ МОДЫ ОТ ОБРЫВА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

*A. B. Маненков*

Вариационным методом решена задача об отражении поверхностной моды от обрыва диэлектрического волновода произвольного поперечного сечения. Исследованы зависимости коэффициента отражения от размеров и формы сечения волновода. Проведено сравнение с результатами, полученными другими методами, в том числе с данными, рассчитанными для двумерной задачи (обрыв диэлектрической пластины).

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача расчёта коэффициента отражения поверхностной моды от обрыва диэлектрического волновода (оптического волокна) важна для различных приложений и в первую очередь при конструировании элементов вывода света из волокон, для анализа работы устройств интегральной оптики (например, модуляторов и усилителей), оптических сенсоров, антенных систем и т.п. В настоящее время опубликовано большое число работ, в которых рассматривались двумерные задачи такого типа (обрыв диэлектрических плёнок); см., например, краткий обзор результатов в статьях [1, 2]. Трёхмерные задачи, которые не менее важны для многочисленных применений, исследованы в существенно меньшей степени. Сложность решения трёхмерных задач возникает обычно уже на первом этапе, когда требуется определить характеристики самой поверхностной моды, распространяющейся в волокне произвольного поперечного сечения. К настоящему времени предложено несколько подходов, с помощью которых проанализированы задачи об отражении поверхностных мод от обрыва волноводов со сравнительно простой формой поперечного сечения (в основном, круглой формы [3–5]), когда часть результатов можно получить в аналитическом виде. Однако, до сих пор не исследован интересный вопрос о влиянии геометрии поперечного сечения волокна на величины коэффициентов отражения мод.

В настоящей статье описан достаточно общий метод расчёта коэффициента отражения поверхностных мод от обрыва открытого диэлектрического волновода при произвольной форме его поперечного сечения. Метод базируется на вариационных принципах, которые, в свою очередь, выводятся с помощью теории спектральных разложений по собственным

модам открытых волноводов. Ранее эта методика применялась для задачи об обрыве волокон круглого сечения [3, 4]. Для волокна с вытянутой формой сечения мы сравнили результаты расчёта коэффициента отражения с данными, полученными при решении двумерной задачи. Эти результаты позволяют дать оценку параметров таких волноводов, когда задача может быть сведена к двумерной.

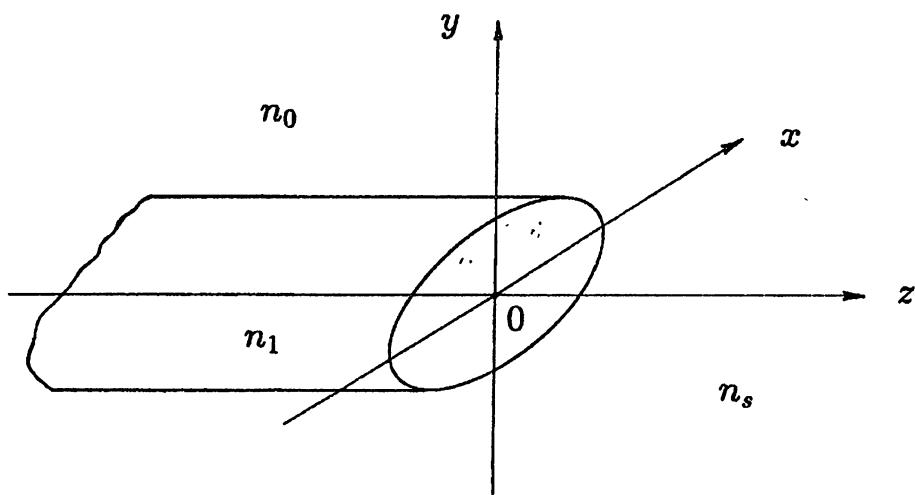


Рис. 1. Обрыв диэлектрического волновода.

Геометрия волновода и система координат изображены на рис. 1. Будем решать задачу в скалярном приближении [4, 6], считая, что показатели преломления снаружи волокна и внутри него  $n_0$  и  $n_1$  близки по величине и не зависят от поперечных координат (константы). Показатель преломления правого полупространства обозначим через  $n_s$ , считая  $n_s \sim n_0$ . Предполагаем, что поперечное сечение волновода симметрично относительно осей  $0x$  и  $0y$  и контур сечения не имеет изломов. Считаем также, что волновод одномодовый и по нему к плоскости обрыва  $z = 0$  распространяется основная волна  $LP_{01}$  [6]. Для рассматриваемой геометрии в этом приближении вектор поперечного электрического поля  $\vec{E}_\perp$  собственных мод поляризован вдоль одной из координатных осей  $0x$  или  $0y$ , причём фазовые скорости взаимно ортогональных мод равны (моды вырождены). В дальнейшем будем анализировать только одну из таких мод. Временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  опущен во всех формулах работы.

## 2. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД

В этом разделе опишем вариационный метод, который будет использован для расчёта отражения основной моды от обрыва волокна. Этот метод является развитием хорошо известного подхода, широко применявш-

шегося в теории металлических волноводов [7]. В металлических волноводах используются так называемые электрические и магнитные формулировки вариационного принципа. Аналогичные формулировки можно получить и для открытых систем, однако, как оказалось, они неудобны для расчётов нерегулярных оптических волокон [8], когда коэффициент отражения  $\rho$  мал. Коротко опишем модификацию подхода, основанную на использовании смешанной вариационной формулировки; эта формулировка обеспечивает большую точность получаемых результатов и является более простой и численно устойчивой.

Стационарные функционалы для коэффициента отражения поверхностной моды получаются, исходя из спектрального разложения полей по системе собственных мод. В волноводе при  $z < 0$  поле имеет вид

$$E = E_{01}^{(+)} + \rho E_{01}^{(-)} + \sum_{\tau} \int_0^{\infty} C_{\tau\kappa}^{(-)} E_{\tau\kappa}^{(-)} d\kappa, \quad (1)$$

где  $E_{01}^{(\pm)}$  и  $E_{\tau\kappa}^{(\pm)}$  — поля поверхностных и радиационных мод волокна,  $\tau$  — дискретный индекс (для круглого волокна  $\tau$  — азимутальное число),  $\kappa$  — поперечное волновое число радиационных мод (непрерывный параметр) [3],  $\rho$  — коэффициент отражения волны  $LP_{01}$ . Во всех формулах верхним индексом (+) отмечены прямые моды, у которых  $\text{Im } h > 0$  при  $\text{Im } k > 0$ , а индексом (-) — встречные моды. Аналогичное разложение (только по радиационным модам) может быть записано для поля в правом полупространстве. На основе спектральных разложений с учётом непрерывности полей при  $z = 0$  выводится интегральное уравнение для поля в плоскости обрыва  $\mathcal{E}$ :

$$\int_{z=0} K_E(\vec{r}, \vec{r}') \mathcal{E}(\vec{r}') dx' dy' = (1 - \rho) h_{01}(1) E_{01}(\vec{r}; 1), \quad (2)$$

$$h_{01}^2(1) = k^2 n_0^2 - \kappa_{01}^2(1),$$

где  $\vec{r} = (x, y)$  — поперечные координаты в плоскости  $z = 0$ ,  $h_{01}(1)$  — постоянная распространения основной поверхностной моды  $LP_{01}$ ,  $k = \omega/c$  — волновое число в свободном пространстве ( $c$  — скорость света в вакууме),  $\kappa_{01}(1)$  — поперечное волновое число основной моды волокна. Числами 1 и 2 в скобках будем отмечать величины, относящиеся соответственно к волноводу и правому полупространству. Ядро уравнения (2) равно

$$K_E(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{\tau} \int_0^{\infty} \frac{E_{\tau\kappa}(\vec{r}; 1) E_{\tau\kappa}(\vec{r}'; 1)}{h_{\kappa}^{-1}(1) D_{\tau}(\kappa; 1)} d\kappa + \sum_{\tau} \int_0^{\infty} \frac{E_{\tau\kappa}(\vec{r}; 2) E_{\tau\kappa}(\vec{r}'; 2)}{h_{\kappa}^{-1}(2) D_{\tau}(\kappa; 2)} d\kappa. \quad (3)$$

В формуле (3) через  $E_{\tau\kappa}(\vec{r}; \nu)$  обозначены поля радиационных мод слева ( $\nu = 1$ ) и справа ( $\nu = 2$ ) от плоскости  $z = 0$ ,  $D_{\tau}(\kappa; \nu)$  — их нормирующие

множители, а через  $h_\kappa(\nu)$  — продольные волновые числа этих мод. Выражение для ядра (3) получается с учётом условия ортогональности мод. Для радиационных мод это условие имеет вид [9]:

$$\lim_{r_0 \rightarrow +\infty} \int E_{\tau\kappa} E_{\tau'\kappa'} \exp[-(r/r_0)^2] dx dy = D_\tau(\kappa) \delta_{\tau\tau'} \delta(\kappa - \kappa'), \quad (4)$$

где  $r_0$  — вспомогательный параметр,  $\delta_{\tau\tau'}$  — единичный тензор,  $\delta(\kappa - \kappa')$  — дельта-функция. Моды непрерывного спектра могут быть построены методом S-оператора; детали построения радиационных мод описаны в работе [9].

Из уравнения (3) могут быть выведены различные стационарные функционалы, позволяющие рассчитать характеристики рассеяния волн (коэффициенты отражения моды и диаграмму направленности излучения). Опуская выкладки, приведём окончательное выражение для коэффициента отражения  $\rho$  поверхностной волны, набегающей на обрыв волокна:

$$\frac{1 - \rho}{1 + \rho} = \frac{N_{01}(1)}{h_{01}(1)} \iint K_E(\vec{r}, \vec{r}') \mathcal{E}(\vec{r}) \mathcal{E}(\vec{r}') dx dy dx' dy' \left/ \left[ \int \mathcal{E}(\vec{r}) dx dy \right]^2 \right., \quad (5)$$

где  $N_{01}(1)$  — норма поверхностной моды. Интегрирование в формуле (5) проводится по всему сечению  $z = 0$ . В качестве пробного поля  $\mathcal{E}$  в вариационные выражения будем, как обычно, подставлять поля основной моды, набегающей на обрыв, т.е. полагаем  $\mathcal{E} = E_{01}(1)$ .

Приведённое выше соотношение (5) является электрической формулировкой вариационного принципа. Аналогичным образом можно вывести уравнение и стационарные соотношения, в которые входит магнитное поле  $\mathcal{H}$  в плоскости стыка (магнитную формулировку). Смешанная формулировка получается при совместном использовании уравнений для  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ . Для задачи об обрыве волокна соответствующее выражение имеет вид [8]:

$$\frac{4\rho}{1 - \rho^2} = \frac{k^4}{h_{01}(1) N_{01}(1)} \sum_{\tau} \int_0^{\infty} \frac{Q_\tau^2(\kappa) d\kappa}{(h_{01}^2 - h_\kappa^2(2)) h_\kappa(2) D_\tau(\kappa; 2)}, \quad (6)$$

$$Q_\tau(\kappa) = \int_{z=0} [n^2(\vec{r}; 1) - n_s^2] E_{01}(\vec{r}; 1) E_{\tau\kappa}(\vec{r}; 2) dx dy, \quad (7)$$

где  $n(\vec{r}; 1)$  — распределение показателя преломления волокна (по сечению  $z = -0$ ). Отметим одно из преимуществ выведенной формулы: если проницаемости правого полупространства и оболочки волокна совпадают, то в (7) интегрирование по координатам ведётся в конечной области, только по сечению сердцевины волокна  $\Omega_1$ . При использовании же электрической

формулировки в формуле (5) интегралы берутся по всему сечению  $z = 0$ . Кроме того, применяя "электрический" функционал, при малых  $\rho$  возможна большая погрешность вычислений, так как окончательное выражение для  $\rho$  получается как разность двух очень близких чисел. Выражение (6) свободно от этого недостатка.

Из приведённого соотношения можно получить несколько оценок. В дальнейшем будем считать, что проницаемости оболочки и правого полупространства совпадают, т.е.  $n_0 = n_s$ . Если максимальный размер поперечного сечения  $a_m$  волокна мал, т.е.  $ka_m\sqrt{(n_1^2 - n_0^2)} \ll 1$ , коэффициент отражения поверхностной моды приближённо равен [8]

$$\rho = -\frac{\kappa_{01}^2}{2k^2 n_0^2} \ln\left(\frac{2kn_0}{\kappa_{01}}\right), \quad \kappa_{01} a_m \approx \frac{2i}{\gamma_E} \exp\left[\sigma_2 - \frac{2\pi}{k^2 \text{mes } \Omega_1(n_1^2 - n_0^2)}\right], \quad (8)$$

где  $\kappa_{01} = \kappa_{01}(1)$ ,  $\gamma_E = 1,78107\dots$ ,  $\text{mes } \Omega_1$  — площадь поперечного сечения сердцевины волокна,  $\sigma_2 \sim 1$  — параметр, зависящий от формы волокна. Отметим, что в последнее выражение для  $\rho$  параметры волновода (размеры и т.д.) входят только через величину  $\kappa_{01}$ . Формула (8) может быть также получена методом Винера–Хопфа с использованием свойств S-оператора [9]. Для круглого волновода из (6) нетрудно вывести [9] предельное выражение для  $\rho$  в случае высоких частот ( $k \rightarrow \infty$ ):

$$\rho_\infty = (n_1 - n_s)/(n_1 + n_s). \quad (9)$$

При произвольной форме поперечного сечения волновода последняя формула легко выводится из соображений геометрической оптики.

### 3. СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ

Эффективность алгоритмов, основанных на приведённых выше формулах (6)–(7), в основном определяется эффективностью процедур, вычисляющих характеристики собственных мод. Как показали численные эксперименты [4], для решения задач дифракции поверхностные моды должны быть рассчитаны со сравнительно высокой точностью (обычно требуется точность не хуже  $10^{-5}$ – $10^{-4}$ ). Кроме того, при использовании вариационного подхода требуется простое представление для поля, так как при расчётах интегралов  $Q_\tau(\kappa)$  приходится многократно вычислять это поле. Для определения характеристик поверхностных мод использовался модифицированный метод интегральных уравнений, который обеспечивает необходимую точность расчётов и позволяет быстро рассчитывать эти моды в волноводе с произвольной формой поперечного сечения.

Поле во внутренней области волновода  $\Omega_1$  удовлетворяет интегральному уравнению [10]:

$$E(\vec{r}_1) = \frac{k^2}{2\pi} \iint_{\Omega_1} [n^2(\vec{r}_2) - n_0^2] K_0(|\kappa_{01}|r_{12}) E(\vec{r}_2) dx_2 dy_2, \quad (10)$$

где  $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ ,  $K_0(|\kappa_{01}|r_{12})$  — модифицированная цилиндрическая функция. В этой и последующих формулах для упрощения записи будем опускать в скобках цифру 1, которая показывает, что рассматриваемые величины относятся к волноводу. Приближённое решение уравнения (10), т.е. внутреннее поле, можно искать в виде конечного ряда по цилиндрическим гармоникам

$$E(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{M-1} A_m J_{2m}(gr) \cos(2m\varphi), \quad g^2 = k^2(n_1^2 - n_0^2) + \kappa_{01}^2, \quad (11)$$

где  $J_{2m}(gr)$  — функции Бесселя. Алгебраизацию задачи проводим, используя метод коллокации [10]: левую и правую часть (10) приравниваем в конечном числе точек (узлов)  $\vec{r}_j = (x_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . В силу симметрии задачи эти точки можно расположить в одном (например, в первом) квадранте. Отметим, что, используя рекуррентные соотношения для функций Бесселя и одновременное вычисление всех интегралов от членов разложения (11) для каждого из узлов  $\vec{r}_j$ , можно существенно сократить время вычисления матричных элементов.

Как показано в [10], коллокационный алгоритм сходится, если использовать аддитивное распределение узлов. Обозначим контур границы раздела сред в поперечном сечении волновода через  $\Lambda$ . Аддитивные точки лежат на контуре  $\Lambda$  и их предельная плотность распределения (при  $M \rightarrow \infty$ ) пропорциональна  $|\Psi'(\zeta)|$ , где  $w = \Psi(\zeta)$  — аналитическая функция комплексной переменной  $\zeta = x + iy$ , которая осуществляет конформное преобразование области, расположенной вне  $\Lambda$  (т.е. оболочки волокна) на внешность круга  $|w| > 1$  [10]. Для некоторых задач (например, для эллиптического волокна) функция  $\Psi(\zeta)$ , а затем и распределение узлов, находится в явной форме. В общем случае аддитивные точки можно найти численно. Ранее применяющийся в работе [10] алгоритм, основанный на свойствах нулей гармонических полиномов, которые ортогональны на контуре  $\Lambda$ , сравнительно громоздок, поскольку сама задача построения таких многочленов достаточно сложна; поэтому в настоящей работе была использована более простая и быстрая процедура с использованием узлов Фекете [11]. Коротко опишем этот подход. Обозначим через  $\zeta_k$  комплексные координаты всех узлов на контуре  $\Lambda$  ( $k$  — номера точек). В число этих узлов надо включить точки, которые лежат во всех четырёх квадрантах, так что  $k = 1, 2, \dots, 4M$ ; их координаты легко вычисляются по координатам узлов, расположенных в первом квадранте, с учётом симметрии контура  $\Lambda$ . Далее определим функцию

$$W(\zeta_1, \dots, \zeta_{4M}) = \prod_{k \neq l} |\zeta_k - \zeta_l|. \quad (12)$$

Правая часть (12) равна произведению расстояний между всеми узлами  $\zeta_k$ . Узлы Фекете определяются как система точек  $\{\zeta_k\}$ , на которой функ-

ция  $W$  достигает своего максимума [11]. Эти точки легко находятся численно стандартными программами оптимизации.

Отметим, что представление решения в виде (11) тесно связано с так называемой гипотезой Релея [10]. При произвольной форме контура  $\Lambda$  ряд по цилиндрическим гармоникам (мультиполям) не является сходящимся при  $M \rightarrow \infty$ ; он лишь аппроксимирует решение подобно тому, как полином аппроксимирует согласно теореме Вейерштрасса любую непрерывную функцию, которая определена на отрезке вещественной оси. При этом система узлов Фекете напоминает систему Чебышевских узлов, которая используется для многочленной интерполяции функций. Предполагая, что контур  $\Lambda$  достаточно гладкий, можно показать, что внутреннее поле моды не имеет особенностей вблизи границы волновода, если его формально продолжить за этот контур. Отсюда следует одно важное для вычислений свойство: коллокационный алгоритм сходится не только при использовании аддитивных узлов, но и при использовании близкой к ним системы точек; поэтому координаты узлов Фекете можно вычислять с небольшой точностью. Этот факт особенно важен при больших числах  $M$ , когда задача поиска максимума функции  $W$  может быть недостаточно устойчивой. Проведённые численные эксперименты показали, что для поиска узлов Фекете можно ограничиться даже случайным поиском максимума функции  $W$ . Так как время вычислений этой функции мало, то такой алгоритм работает очень быстро. Уточнить положение узлов, вычисленных таким образом, можно с помощью, например, простых программ покоординатной оптимизации.

Характеристики радиационных мод правого полупространства рассчитываются в явном виде. Их поля определяются формулами

$$E_{\tau\kappa}(\vec{r}; 2) = J_\tau(\kappa r) \cos(\tau\varphi), \quad \tau = 0, 2 \dots, \quad (13)$$

а нормирующие множители равны  $D_0(\kappa; 2) = 2\pi/\kappa$  и  $D_\tau(\kappa; 2) = \pi/\kappa$  при  $\tau > 0$ . В силу условий ортогональности функций  $E_{\tau\kappa}(\vec{r}; 1)$  и  $E_{01}(\vec{r}; 1)$  поля радиационных мод волновода (при  $z < 0$ ) не вошли в выражение (6) для величины  $\rho$ , поэтому мы не будем их рассматривать подробнее.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

При расчётах поверхностных мод в разложении (11), а также в формуле (6) при вычислении  $\rho$ , учитывалось обычно 4–8 цилиндрических гармоник. Число гармоник определялось на основе анализа внутренней сходимости поперечного волнового числа  $\kappa_{01}(1)$ . Расчёты проводились для волокон эллиптической и суперэллиптической форм поперечного сечения; такие волноводы (или близкие к ним) довольно часто применяются в интегральной оптике и в системах волоконной связи.

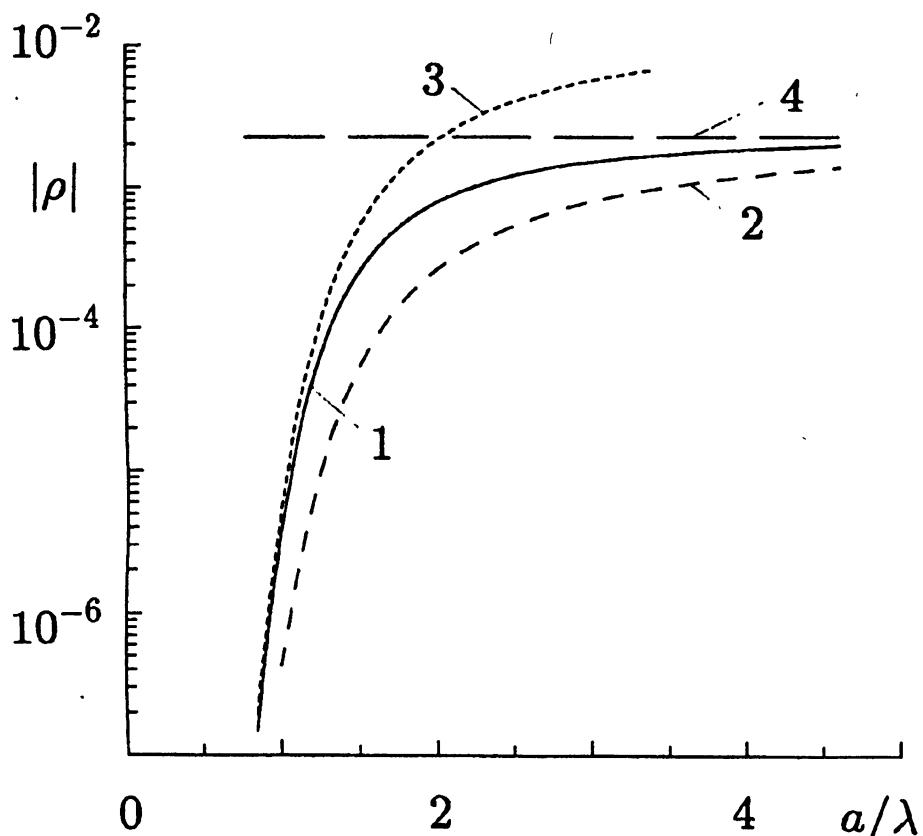


Рис. 2. Модуль коэффициента отражения основной моды для задачи об обрыве эллиптического волокна.

На рис. 2 приведена зависимость  $|\rho|$  от  $a/\lambda$  для задачи об обрыве эллиптического волновода с отношением полуосей  $a/b = 2$ . Параметры задачи были следующими:  $n_1^2 = 2,25$ ,  $n_0^2 = 2,23$ ,  $n_s = n_0$ , длина волны в вакууме  $\lambda = 1,3$  мкм. На рисунке\* кривая 1 рассчитана по вариационной формуле (6). Для сравнения кривая 2 представляет значения  $|\rho_{\text{оф}}|$ , рассчитанные методом эффективного показателя преломления. В соответствии с этой методикой волновод заменяется некоторой эффективной средой с показателем преломления  $n_{\text{оф}} = h_{01}(1)/k$ , в которой вдоль оси  $0z$  распространяется плоская волна, так что  $\rho_{\text{оф}}$  вычисляется по формуле Френеля:

$$\rho_{\text{оф}} = (h_{01} - kn_s)/(h_{01} + kn_s). \quad (14)$$

Соотношение (14) даёт правильные предельные значения  $\rho$  при  $k = 0$  и  $k = \infty$  и качественно согласуется с вариационной формулой, тем не менее

\*При указанных параметрах задачи волновод можно считать одномодовым только при  $a/\lambda < 4,908$ ; при больших  $a/\lambda$  погрешность метода может возрастать, особенно вблизи критических частот высших мод.

эта оценка является достаточно грубой. Кривая 3 представляет данные, рассчитанные по формуле (8), которая была выведена при условии  $ka \rightarrow 0$ . Расчёты показывают, что эта формула согласуется с вариационным соотношением (6) при условии  $ka_m \sqrt{(n_1^2 - n_0^2)} < 0,5 - 1,0$ . Штриховая прямая 4 показывает геометрооптическое значение  $\rho_\infty$  (см. выше формулу (9)); при указанных выше параметрах задачи  $\rho_\infty = 2,23215 \cdot 10^{-3}$ .

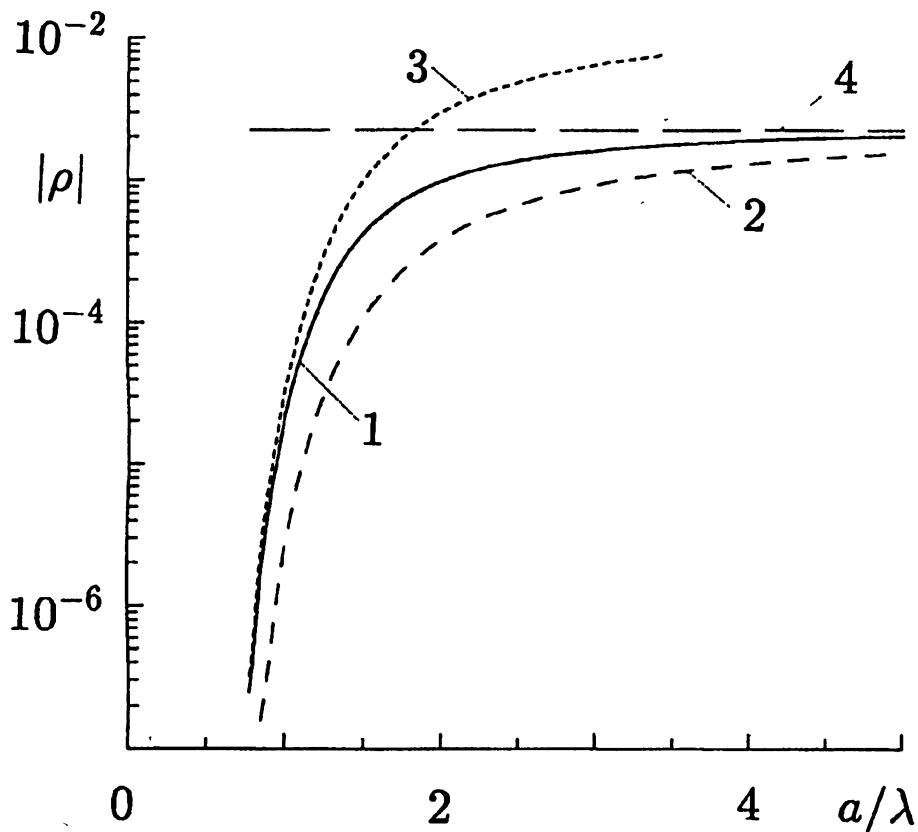


Рис. 3. Модуль коэффициента отражения от обрыва волокна суперэллиптического сечения.

На рис. 3 представлены зависимости  $|\rho(a/\lambda)|$  для волокна, сечение которого имеют форму суперэллипса. В полярной системе координат  $(r, \varphi)$  граница  $\Lambda$  описывается соотношением

$$r_c(\varphi) = ab / [(a \sin \varphi)^{2N_s} + (b \cos \varphi)^{2N_s}]^{1/(2N_s)}, \quad (15)$$

где  $N_s$  — целое число,  $a$  и  $b$  — полуоси суперэллипса. Отметим, что при  $N_s = 1$  функция (15) определяет обычный эллипс. Для рис. 3 этот параметр был равен  $N_s = 8$ , а отношение полуосей  $a/b = 2$ . Остальные параметры задачи (показатели преломления сред и длина волны  $\lambda$ ) были те

же, что и для рис. 2, причём  $n_s = n_0$ . Как и выше, кривые 1–4 построены по формулам (6), (14), (8) и (9), соответственно. Качественно зависимости  $|\rho(a/\lambda)|$  имеют тот же вид, что и для эллиптического волокна. На рис. 4 представлены зависимости  $|\rho|$  для суперэллиптического волокна при изменении параметра  $N_s$ , для волноводов с отношением полуосей  $a/b = 2$ . При увеличении  $N_s$  форма границы  $\Lambda$  суперэллипса постепенно трансформируется от эллипса ( $N_s = 1$ ) к прямоугольнику со слегка скругленными углами (при  $N_s = 16$ ). Отметим, что с увеличением  $N_s$  по сходному закону, как и  $\rho(N_s)$ , растёт величина  $|\kappa_{01}|/k$ .

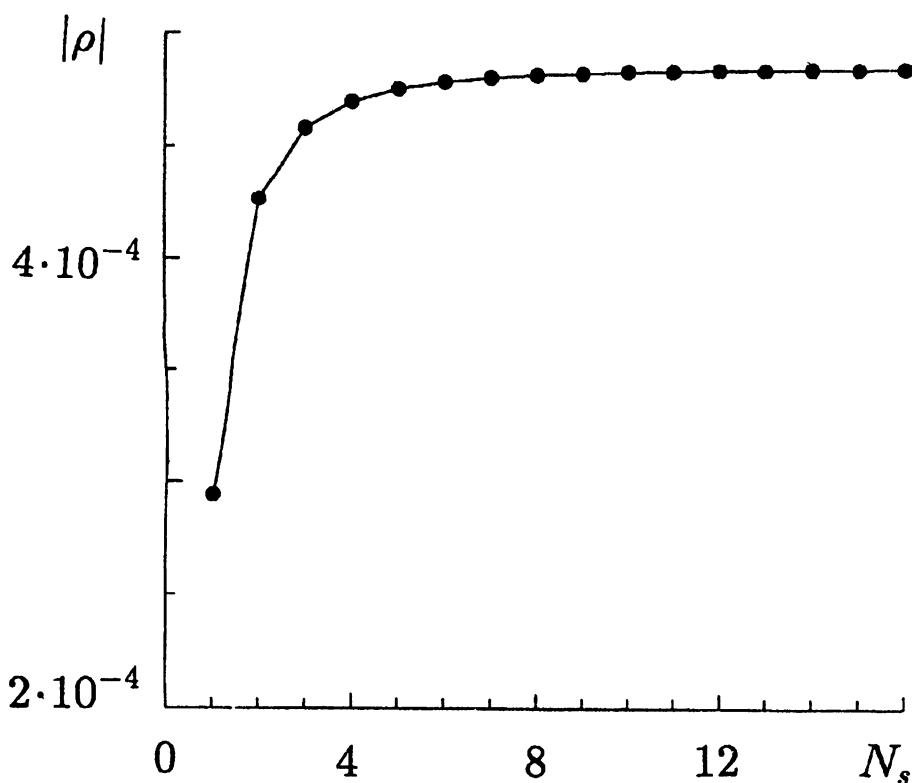


Рис. 4. Зависимость модуля коэффициента отражения от параметра  $N_s$ , определяющего форму поперечного сечения суперэллиптического волокна.

Аналогичные результаты были получены и для волноводов других сечений (в частности, для волокна с сечением в виде овала Кассини). Во всех случаях при изменении геометрических параметров (или частоты) коэффициенты отражения  $|\rho|$  растут с увеличением величины  $h_{01}/k$ . Как отмечалось выше, при малых  $ka$  коэффициент отражения от обрыва волокна зависит от его геометрии (формы сечения) только через величину  $\kappa_{01}/k$ . При больших  $ka$  значения  $\rho$  стремятся к величине  $\rho_\infty$ , также не зависящей от его формы. Поэтому можно предположить, что в общем

случае коэффициент отражения должен достаточно слабо зависеть от геометрии волновода, по крайней мере для случая, когда отношение максимального поперечного размера к минимальному не очень велико. На рис. 5 приведена зависимость величин  $|\rho|$  от  $|\kappa_{01}|/V_k$ , где  $V_k = k\sqrt{n_1^2 - n_0^2}$ , для четырёх задач. Кривая 1 построена для обрыва круглого волокна, кривая 2 — для эллиптического с отношением полуосей  $a/b = 2$ , кривая 3 — также для эллиптического волокна, но при  $a/b = 8$ , а кривая 4 — для обрыва диэлектрической пластины (см. ниже). Видно, что кривые 1 и 2 достаточно близки друг к другу, хотя значения  $a/b$  для этих случаев заметно отличаются. Сделанный вывод справедлив только для задач, к которым применимо скалярное приближение. В общем случае влияние поляризации мод может быть существенным, что видно уже на примере двумерных проблем [1, 2].

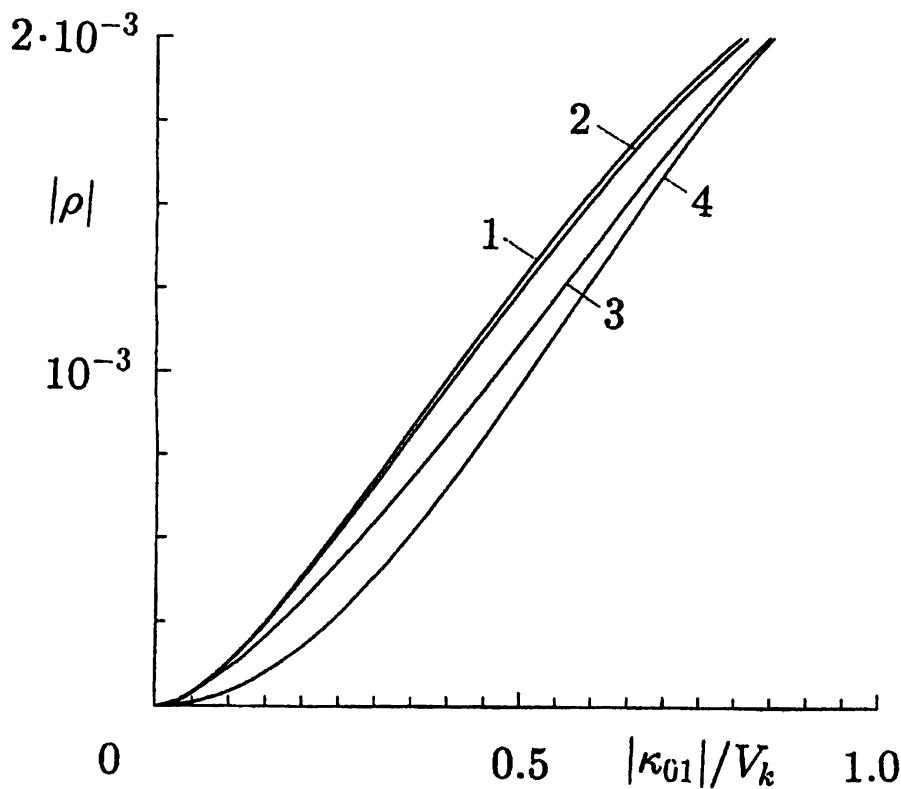


Рис. 5. Сравнение коэффициентов отражения мод от обрыва круглого (кривая 1), эллиптических (кривые 2, 3) и плоского (кривая 4) волноводов.

### 5. СРАВНЕНИЕ С ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕЙ

При расчётах схем интегральной оптики часто заменяют реальную трёхмерную структуру двумерной (диэлектрической пластиной). Разви-

тая методика позволяет рассмотреть вопрос о различии в величинах коэффициента отражения основных мод от обрыва двумерных и трёхмерных систем. Отражение от обрыва пластины рассчитывалось также с помощью вариационной методики; соответствующая формула получается по той же схеме, что и (6), поэтому мы её не будем приводить.

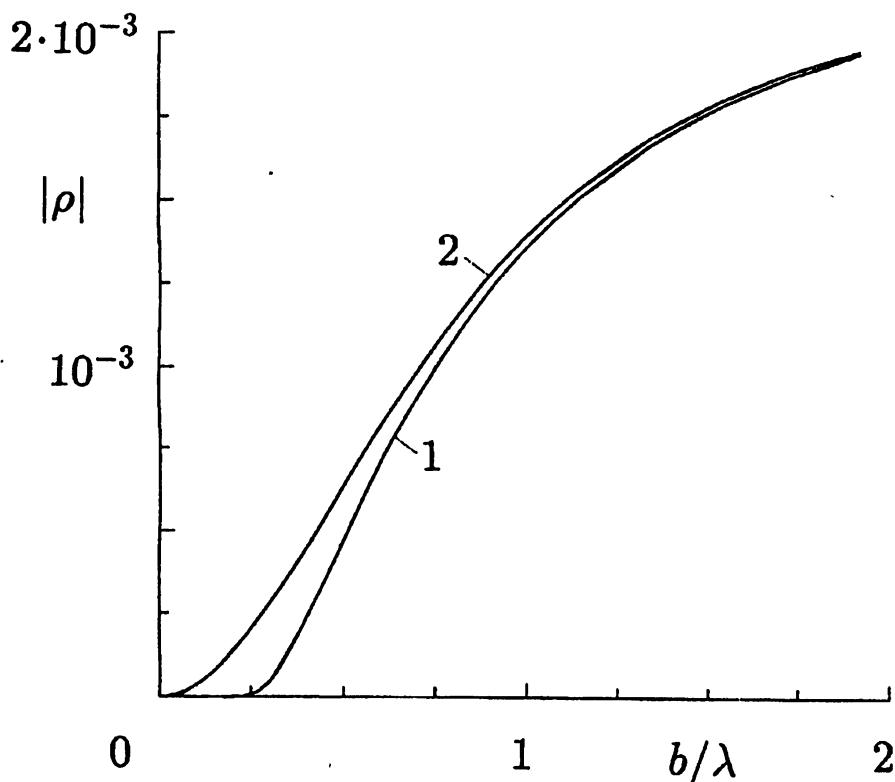


Рис. 6. Сравнение коэффициентов отражения мод от обрыва суперэллиптического (кривая 1) и плоского (кривая 2) волноводов.

На рис. 6 приведены зависимости  $|\rho(b/\lambda)|$  для волн, отражающихся от обрыва суперэллипса (кривая 1) и диэлектрической пластины (кривая 2). Полувысота пластины  $d_p$  была равна размеру малой полуоси суперэллипса  $b$  ( $d_p = b$ ); другие параметры суперэллипса равны:  $a/b = 8$ ,  $N_s = 2$ . Показатели преломления сред и длина волны  $\lambda$  были те же, что и для рис. 2, причём  $n_s = n_0$ . Как и следовало ожидать, при больших  $b/\lambda$  обе кривые сближаются, так как в этом случае значения  $\rho$  стремятся к геометрооптической величине  $\rho_\infty$ . В области малых  $b/\lambda$  поведение кривых существенно отличается. Как следует из (8) для трёхмерного волновода при  $kb \rightarrow 0$  имеем  $|\rho| \sim \exp(-c_1/k^2ab)$ , где  $c_1$  — некоторая константа. Аналогичным образом для диэлектрической пластины можно вывести оценку для  $|\rho|$  в

области низких частот:

$$|\rho| \approx |(h_0 - kn_s)/h_0| \sim c_2(kb)^2, \quad (16)$$

где  $h_0$  — постоянная распространения основной моды пластины, а  $c_2$  — также некоторая постоянная. Существенная разница рассматриваемых зависимостей наблюдается в области  $k\sqrt{ab(n_1^2 - n_0^2)} < 1$ . Согласно приведённой оценке эта область сужается, если  $a/b \rightarrow \infty$ .

Следует отметить, что различие между двумерными и трёхмерными задачами проявляется не только в разнице значений  $\rho$ . Существенно различается и структура поля, рассеянного на обрыве. Соответствующие оценки можно получить, исходя из свойств S-оператора, который используется для построения радиационных мод волновода [12]. Исходя из спектрального разложения (1), можно показать, что поле на оси волновода (при  $r = 0$ ) равно сумме падающей и отражённой поверхностных мод, а также поля пространственной волны  $E_{sp}$  (интегрального слагаемого). В трёхмерной задаче поле пространственной волны  $E_{sp}$  при удалении от обрыва при  $z \rightarrow -\infty$  спадает как  $\exp(ikn_0 z)/|z \ln^2 z|$  (при  $|z| \gg ka_m^2$ ). Это соотношение справедливо при произвольной форме волокна. Для двумерной задачи поле пространственной волны убывает несколько быстрее и по другому закону:  $E_{sp} \sim \exp(ikn_0 z)/|z|^{3/2}$ . Отметим, что вид диаграммы направленности рассеянного поля также существенно зависит от размерности задачи [12].

Заметим, что для трёхмерных задач дифракции в открытых волноводных системах характерно присутствие логарифмических зависимостей во многих соотношениях. Этот факт объясняется тем, что при малых по-перечных волновых числах  $\kappa$  собственное значение  $s_0(\kappa)$  S-оператора [12] для основной ветви радиационных мод имеет приближённое представление, в которое входят логарифмические функции:  $s_0(\kappa) \sim \frac{\ln(ika_s)}{\ln(-ika_s)}$ , где  $a_s$  — некоторая константа. В свою очередь величина  $s_0(\kappa)$  входит в выражения для полей, нормирующего множителя радиационных мод, а в конечном итоге и в характеристики рассеяния на нерегулярностях волноводов. Отметим также, что в теории закрытых волноводов двумерные и трёхмерные задачи различаются не столь сильно, как в открытых системах. Многие трёхмерные проблемы, например, задачи дифракции волн на диафрагмах в прямоугольных металлических волноводах, обычно сводятся к решению двумерных задач. Полученные результаты показывают, что результаты анализа двумерных открытых систем достаточно трудно связать с результатами для трёхмерных задач.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассчитаны коэффициенты отражения основных поверхностных мод от обрывов диэлектрических волноводов при различной форме их поперечных сечений. Задача решена в скалярном приближении с использованием вариационного подхода. Оказалось, что в скалярном приближении основной величиной, определяющей коэффициент отражения  $\rho$ , является фазовая скорость моды, причём зависимость  $\rho$  от формы поперечного сечения волновода сравнительно слабая. Тем не менее, сравнение с решением задачи об обрыве диэлектрической пластины показало, что в области низких частот характеристики двумерных и трёхмерных задач существенно различаются.

В заключение заметим, что в работе не рассмотрен важный вопрос о точности вариационных соотношений. Для нескольких модельных задач этот вопрос исследован в работах [8, 13], где вариационное решение сравнивается с данными, полученными методом Винера–Хопфа, а также в работе [14], где задача об обрыве круглого волокна решалась методом интегрального уравнения. Результаты работы [8] показывают, что для случая, когда показатели всех сред близки друг к другу, т.е.  $n_1 \sim n_0 \sim n_s$ , смешанная формулировка обеспечивает относительную точность расчёта  $\rho$  лучше  $10^{-4}$ . В этих же случаях точность электрической и магнитной формулировок была на порядок хуже. Высокая точность вариационного подхода объясняется тем, что в этой задаче есть малые параметры  $|n_1 - n_0|/n_0$  и  $|n_s - n_0|/n_0$  [13]. Результаты работ [4, 14] показали также, что одного условия  $n_1 \sim n_0$  недостаточно для применимости скалярной теории при расчёте величины  $\rho$ , хотя в обоих полупространствах (при  $z < 0$  и  $z > 0$ ) волноводы являются слабонаправляющими [6]. Для сравнительно сильно отличающихся значений  $n_s$  и  $n_0$  скалярное приближение даёт значения коэффициента отражения поверхностных мод, которые даже качественно не согласуются с векторной теорией, хотя при расчёте регулярных волокон получается прекрасное согласие между векторной и скалярной теориями. Подчеркнём, что этот вывод оказывается несколько неожиданным, так как в обеих частях пространства выполнены условия применимости скалярного приближения и, кроме того, рассеянные волны в этих задачах распространяются в основном под малыми углами к оси  $Oz$ . В статье [5] указанные выше выводы не учитывались и результаты этой работы неверны [4, 14].

Автор признателен Е. Л. Косареву и А. Г. Рожневу за полезное обсуждение деталей расчётов. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 97-02-16334).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Vassallo C. // IEE Proc., pt. J. 1993. V. 137. № 4. P. 193.
2. Kendall P. C., Roberts D. A., Robson P. N., Adams M. J., Robertson M. J. // IEEE Photonics Technol. Lett., 1993. V. 5. № 2. P. 148.
3. Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика, 1982. Т. 25. № 12. С. 1484.
4. Manenkov A. B. // Optical Quantum Electron., 1991. V. 23. № 1. P. 81.
5. Uzunoglu N. K., Capsalis C. N., Tigelis I. // J. Opt. Soc. Am., 1987. V. A-4. № 11. P. 2150.
6. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь, 1987.
7. Левин Л. Теория волноводов. Методы решения волноводных задач. — М: Радио и связь, 1981.
8. Manenkov A. B. // IEE Proc. – J., 1992. V. 139. № 3. P. 194.
9. Manenkov A. B. // Optical Quantum Electron., 1991. V. 23. № 5. P. 621.
10. Клеев А. И., Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика, 1988. Т. 31. № 1. С. 93.
11. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. — М.: Мир, 1986.
12. Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика, 1981. Т. 24. № 1. С. 84.
13. Васильев А. Д., Маненков А. Б. // Изв. вузов. Радиофизика, 1987. Т. 30. № 3. С. 405.
14. Tigelis I., Uzunoglu N. K., Capsalis C. N. // J. Electromagn. Waves Appl., 1991. V. 5. № 12. P. 447.

Институт физических проблем  
им. П. Л. Капицы РАН,  
Москва, Россия

Поступила в редакцию  
13 июня 1997 г.

**REFLECTION OF A SURFACE MODE FROM ABRUPTLY ENDED  
DIELECTRIC WAVEGUIDE**

*A. B. Manenkov*

The problem of a surface mode reflection from an abruptly terminated dielectric waveguide of an arbitrary cross section is solved by the variational technique. Dependencies of the reflection coefficient on the sizes and cross section form of the waveguide are examined. Comparisons with results, obtained by other methods, including the data, calculated for two-dimensional problem (abruptly ended slab waveguide) are made.

УДК 532.591

# ДВУХТОЧЕЧНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В ХАОСТИЧЕСКОЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

*И. С. Жукова, А. И. Саичев*

Исследована двухточечная статистика примеси в хаотической сжимаемой среде. Получены и проанализированы уравнения для лагранжева и эйлерова вероятностных распределений поля плотности примеси. Рассмотрено поведение с течением времени дисперсии логарифма якобиана поля плотности. Теоретически получен степенной закон, аналогичный закону Колмогорова–Обухова для реальной турбулентности.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ диффузии пассивной примеси в турбулентных средах необходим для решения многих прикладных задач физики атмосферы и океана и вызывает в последнее время повышенный интерес (см., например, [1–5]). При этом основное внимание уделяется эволюции средней плотности примеси [3–5]. Отметим, однако, что усреднение по ансамблю реализаций сглаживает тонкую пространственную структуру поля плотности. Для выявления этой структуры необходимо исследовать вероятностные свойства поля плотности. Ранее авторами были изучены вероятностные свойства градиента плотности и одноточечные статистические свойства плотности пассивной примеси [6, 7]. Ниже, в целях получения более детальной количественной картины эволюции примеси в хаотически движущейся сжимаемой среде, исследуются её двухточечные вероятностные свойства.

## 2. ДВУХТОЧЕЧНОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Изучим некоторые двухточечные статистические свойства поля плотности пассивной примеси в сжимаемой хаотически движущейся среде. Заметим, что, как показывает опыт исследования многомерных полей плотности в разных физических системах (см., например, [8]), пространственная структура подобных полей носит существенно анизотропный характер. Поэтому многие статистические свойства одномерных полей плотности близки к соответствующим характеристикам многомерных полей. В

связи с этим, чтобы не усложнять изложение, ограничимся ниже случаем одномерной среды. Нас прежде всего будут интересовать статистические связи значений поля плотности примеси  $\rho(x_1, t)$ ,  $\rho(x_2, t)$  на расстояниях  $|x_2 - x_1| \leq l_v$ , где относительная диффузия частиц примеси ещё не является результатом статистически независимых диффузий частиц. Кроме того, будем считать справедливым диффузионное приближение (см., например, [5, 9]), в рамках которого вероятностные распределения плотности и координат частиц удовлетворяют уравнениям Фоккера–Планка.

Прежде чем обсудить эйлерову статистику поля плотности, изучим вначале лагранжеву статистику координат частиц  $X(y, t)$ , где  $y$  — её лагранжева координата, и якобиана преобразования лагранжевых координат в эйлеровы, в одномерном случае равного:

$$J(y, t) = \frac{\partial X(y, t)}{\partial y}. \quad (1)$$

Соответствующее эйлерово поле якобиана обозначим:  $j(x, t)$ . Легко показать, что указанные лагранжевые поля удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dX}{dt} = v(x, t), \quad X(y, t=0) = y, \quad (2)$$

$$\frac{dJ}{dt} = u(X, t)J, \quad J(y, t=0) = 1. \quad (3)$$

Искомая эйлерова плотность вероятности

$$f_E(j_1, j_2; s, t) = \langle \delta(j(x, t) - j_1) \delta(j(x+s, t) - j_2) \rangle \quad (4)$$

следующим образом [7, 9]

$$f_E(j_1, j_2; s, t) = j_1 j_2 \int f_L(s, j_1, j_2; s_0, t) ds_0 \quad (5)$$

связана с лагранжевым вероятностным распределением

$$f_L(j_1, j_2; s, t) = \langle \delta(X(y+s_0, t) - X(y, t) - s) \delta(J(y+s_0, t) - j_1) \delta(J(y, t) - j_2) \rangle \quad (6)$$

расстояний между частицами и значениями якобиана в их окрестности. Можно показать, что в диффузионном приближении  $f_L(j_1, j_2; s, t)$  удовлетворяет уравнению [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_L}{\partial t} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (d(s)f_L) - 2 \frac{\partial}{\partial s} \left( C(s) \left[ \frac{\partial}{\partial j_1} (j_1 f_L) + \frac{\partial}{\partial j_2} (j_2 f_L) \right] \right) + \\ &+ B \left[ \frac{\partial^2}{\partial j_1^2} (j_1^2 f_L) + \frac{\partial^2}{\partial j_2^2} (j_2^2 f_L) \right] + 2B(s) \frac{\partial}{\partial j_2} \left( j_2 \frac{\partial}{\partial j_1} (j_1 f_L) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

с начальным условием

$$f_L(s, j_1, j_2; s_0, t=0) = \delta(j_1 - 1) \delta(j_2 - 1) \delta(s - s_0). \quad (8)$$

В уравнении (7) использованы следующие обозначения:

$$D(s) = \int_0^\infty \langle v(x, t)v(x+s, t+\tau) \rangle d\tau, \quad d(s) = [D(0) - D(s)], \\ (9)$$

$$C(s) = \frac{d}{ds} D(s), \quad B(s) = -\frac{d^2}{ds^2} D(s), \quad B = B(0).$$

С учётом (5), от уравнения (7) можно перейти к следующему уравнению для упомянутой эйлеровой плотности вероятностей случайных значений якобиана в момент  $t$  и в точках, отстоящих на расстоянии  $s$ :

$$\frac{\partial f_E}{\partial t} = 2d(s) \frac{\partial^2 f_E}{\partial s^2} - 2C(s) \left[ \frac{\partial}{\partial j_1} \left( j_1 \frac{\partial}{\partial s} f_E \right) + \frac{\partial}{\partial j_2} \left( j_2 \frac{\partial}{\partial s} f_E \right) \right] + \\ + B \left[ \frac{\partial}{\partial j_1} \left( j_1^2 \frac{\partial}{\partial j_1} f_E \right) + \frac{\partial}{\partial j_2} \left( j_2^2 \frac{\partial}{\partial j_2} f_E \right) \right] + 2B(s) \frac{\partial^2}{\partial j_1 \partial j_2} (j_1 j_2 f_E), \quad (10)$$

$$f_E(j_1, j_2; s, t=0) = \delta(j_1 - 1) \delta(j_2 - 1).$$

Приведём, в частности, следующее отсюда уравнение для корреляционной функции плотности

$$b_\rho(s; t) = \langle \rho(x, t) \rho(x+s, t) \rangle. \quad (11)$$

Учитывая, что поле плотности связано с полем якобиана равенством

$$\rho(x, t) = \frac{\rho(y(x, t))}{j(x, t)} \quad (12)$$

и положив для простоты  $\rho_0 = \text{const}$ , получим

$$b_\rho(s; t) = \rho_0^2 \left\langle \frac{1}{j_1(x, t) j_2(x+s, t)} \right\rangle = \rho_0^2 \left\langle \frac{1}{j_1 j_2} \right\rangle. \quad (13)$$

Домножив уравнение (10) на  $1/j_1 j_2$ , придём к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} b_\rho = 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (d(s) b_\rho), \quad b_\rho(s, t=0) = \rho_0^2, \quad (14)$$

совпадающему с уравнением для лагранжева вероятностного распределения

$$f_L(s, s_0, t) = \langle \delta[X(y+s_0, t) - X(y, t) - s] \rangle \quad (15)$$

расстояния между фиксированными частицами. В самом деле, как видно из (7), это вероятностное распределение подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} f_L = 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (d(s) f_L), \quad f_L(s, s_0, t) = \delta(s - s_0). \quad (16)$$

Из формул (5), (12) следует, что если при  $t = 0$  начальная плотность  $\rho_0(x)$  статистически однородна, а также если выполнено естественное требование о статистической независимости  $\rho_0(x)$  и последующих флуктуаций якобиана  $j(x, t)$ , то решение уравнения (16) связано с корреляционной функцией плотности равенством

$$b_\rho(s, t) = \int b_0(s_0) f_L(s; s_0, t) ds_0. \quad (17)$$

Здесь  $b_0(s) = \langle \rho_0(x) \rho_0(x + s) \rangle$  — корреляционная функция начальной плотности. Отсюда и из (16) следует, что  $b_\rho(s, t)$  (17) удовлетворяет уравнению (14), но с более общим начальным условием:

$$b_\rho(s, t) = b_0(s). \quad (18)$$

К сожалению, даже в рассматриваемом одномерном случае уравнение для совместного вероятностного распределения якобианов в разных точках пространства (10) настолько сложно, что до сих пор не известно его аналитическое решение для типичных профилей коэффициента  $d(\rho)$ . Тем не менее приведём некоторые предварительные исследования свойств решений уравнения (10), которые могут оказаться полезными в дальнейшем.

Заметим, во-первых, что уравнение (10) сводится к менее громоздкому уравнению для вероятностного распределения вспомогательного случайного поля

$$\mu(x, t) = \ln j(x, t). \quad (19)$$

Его двухточечное вероятностное распределение

$$g(\mu_1, \mu_2; s, t) = \langle \delta(\ln j(x, t) - \mu_1) \delta(\ln j(x+s, t) - \mu_2) \rangle \quad (20)$$

следующим образом связано с вероятностным распределением якобианов (4):

$$f(e^{\mu_1}, e^{\mu_2}; s, t) = e^{-\mu_1 - \mu_2} g(\mu_1, \mu_2; s, t).$$

Учитывая это и перейдя в (10) от дифференцирования по  $j_1, j_2$  к дифференцированию по  $\mu_1, \mu_2$ , в итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= 2d(s) \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} - 2C(s) \left( \frac{\partial}{\partial \mu_1} + \frac{\partial}{\partial \mu_2} \right) \frac{\partial g}{\partial s} - B \left( \frac{\partial}{\partial \mu_1} + \frac{\partial}{\partial \mu_2} \right) g + \\ &+ B \left( \frac{\partial^2}{\partial \mu_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu_2^2} \right) g + 2B(s) \frac{\partial^2 g}{\partial \mu_1 \partial \mu_2}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$g(\mu_1, \mu_2; s, t=0) = \delta(\mu_1)\delta(\mu_2).$$

Напомним, мы пытаемся анализировать двухточечные статистические свойства поля плотности пассивной примеси и тесно связанного с ним якобиана потому, что они содержат более детальную, чем одноточечные вероятностные распределения, информацию о тонкой структуре пространственного поведения указанных полей. Важную информацию о характерных особенностях их пространственного поведения на произвольных, больших и малых, масштабах, содержит вероятностное распределение ещё одного вспомогательного поля:

$$\kappa = \mu(x+s, t) - \mu(x, t) = \ln\left(\frac{j(x+s, t)}{j(x, t)}\right). \quad (22)$$

Отметим ещё, что если начальная плотность примеси всюду одинакова, то

$$\kappa = \ln\left(\frac{\rho(x, t)}{\rho(x+s, t)}\right) \quad (23)$$

характеризует отношение плотностей примеси в соседних точках. Выведём уравнение для вероятностного распределения  $\kappa$ , перейдя в (21) к новым переменным:

$$\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2, \quad \kappa = \mu_2 - \mu_1; \quad \mu_1 = \mu - \kappa/2, \quad \mu_2 = \mu + \kappa/2.$$

В итоге уравнение (21) перейдёт в следующее:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2d(s)\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} - \left(2C(s)\frac{\partial}{\partial s} + B\right)\frac{\partial g}{\partial \mu} + \frac{1}{2}(B + B(s))\frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} + 2(B - B(s))\frac{\partial^2 g}{\partial \kappa^2}, \quad (24)$$

$$g(\mu, \kappa; s, t=0) = \delta(\mu)\delta(\kappa).$$

Интегрируя почленно последнее уравнение по всем значениям "лишней" переменной  $\mu$ , придём к исковому уравнению

$$\frac{\partial g_-}{\partial t} = 2d(s)\frac{\partial^2 g_-}{\partial s^2} + 2e(s)\frac{\partial^2 g_-}{\partial \kappa^2}, \quad g_-(\kappa; s, t=0) = \delta(\kappa), \quad (25)$$

для вероятностного распределения поля  $\kappa(x, s, t)$  (22)

$$g_-(\kappa; s, t) = \langle \delta(\kappa(x, s, t) - \kappa) \rangle. \quad (26)$$

В (25) использовано новое обозначение  $e(s) = B - B(s)$ . Заметим для полноты картины, что после интегрирования уравнения (24) по всем  $\kappa$ , получим уравнение для вероятностного распределения

$$g_+(\mu; s, t) = \langle \delta(\mu(x, s, t) - \mu) \rangle, \quad (27)$$

где

$$\mu(x, s, t) = \ln \sqrt{j(x, t)j(x+s, t)} = \ln \sqrt{\frac{\rho_0^2}{\rho(x, t)\rho(x+s, t)}}. \quad (28)$$

Упомянутое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial g_+}{\partial t} = 2d(s) \frac{\partial^2 g_+}{\partial s^2} - 2C(s) \frac{\partial^2 g_+}{\partial s \partial \mu} + \frac{1}{2} \left[ B(s) \frac{\partial^2 g_+}{\partial \mu^2} + B \left( \frac{\partial^2 g_+}{\partial \mu^2} - 2 \frac{\partial g_+}{\partial \mu} \right) \right], \quad (29)$$

$$g_+(\mu; s, t=0) = \delta(\mu).$$

Вероятностные распределения  $g_+$  и  $g_-$  несут существенную информацию о пространственном поведении случайного поля плотности  $\rho(x, t)$ . Причём  $g_-$  как бы фильтрует пространственные масштабы, поскольку случайное поле  $\kappa(x, s, t)$  (22) при заданном значении  $s$  зависит от поведения полей якобиана и плотности на масштабах  $l < s$  и практически не зависит от их поведения на больших масштабах  $l > s$ . Поэтому исследуем детальнее именно вероятностное распределение  $g_-(\kappa; s, t)$  (26). Чтобы понять смысл входящих в уравнение (25) слагаемых, вернёмся к определению коэффициента  $2d(s)$ . Его лучше определять не через корреляционную функцию случайного поля скорости, как в (9), а через его структурную функцию

$$d_v(s, \tau) = \langle [v(x+s, t) - v(x, t)][v(x+s, t+\tau) - v(x, t+\tau)] \rangle. \quad (30)$$

С помощью структурной функции коэффициент  $2d(s)$  выражается равенством

$$2d(s) = \int_0^\infty d_v(s, \tau) d\tau. \quad (31)$$

Соответственно, второй, зависящий от  $s$  коэффициент в уравнении (25)

$$2e(s) = 2[d''(0) - d''(s)] \quad (32)$$

опосредованно, через  $d(s)$ , также выражается через структурную, а не корреляционную функцию поля скорости. Мы особо подчёркиваем этот факт потому, что в отличие от абсолютной диффузии частиц, описание которой требует знания корреляционной функции поля скорости, при анализе процессов относительной диффузии и тесно связанных с ними флуктуаций якобиана и плотности достаточно знания структурной функции поля скорости. Приведём простейшую модель статистически неоднородного поля скорости, корреляционная функция которого не существует, а структурная функция — гладкая функция  $s$ . Это модельное поле скорости вида

$$v(x, t) = (x + C)\beta(t), \quad (33)$$

где  $C$  — случайная величина, равномерно распределённая по всей оси, а  $\beta(t)$  — гауссов случайный процесс с заданной корреляционной функцией. Тогда структурная функция поля скорости равна  $d_v(s, \tau) = s^2 \langle \beta(t)\beta(t+\tau) \rangle$ , а входящий в уравнение (25) коэффициент диффузии принимает вид

$$d(s) = 2Bs^2, \quad B = \frac{1}{2} \int_0^\infty \langle \beta(t)\beta(t+\tau) \rangle d\tau. \quad (34)$$

При этом, как следует из (32),  $e(s) \equiv 0$  и уравнение (25) вырождается в

$$\frac{\partial g_-}{\partial t} = 4Bs^2 \frac{\partial^2 g_-}{\partial s^2}, \quad g_-(\kappa; s, t=0) = \delta(\kappa).$$

Решение этого уравнения  $g_-(\kappa; s, t) = \delta(\kappa)$  выражает тот очевидный факт, что поле скорости с пространственной структурой (33) равномерно сжимает (или растягивает) среду, так что якобиан всюду принимает одинаковые значения:  $j(x, t) = j(x+s, t) = j(t)$ .

Перейдём к анализу более реальных ситуаций, когда растяжение и сжатие разных участков среды в один и тот же момент времени разные. Обсудим вначале случай, когда  $d(s)$  и  $e(s)$  — гладкие ограниченные функции:  $d(\infty) = D < \infty$ ,  $e(\infty) = B < \infty$ .

Рассмотрим, например, зависимость от  $s$ , с течением времени, дисперсии случайной функции  $\kappa$ :

$$\delta(s, t) = \langle \kappa^2(x, s, t) \rangle. \quad (35)$$

Согласно (25), она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = 2d(s) \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} + 4e(s), \quad \delta(s, 0) = 0. \quad (36)$$

Отсюда и из физического смысла  $\delta(s, t)$  следует, что она удовлетворяет следующим “граничным условиям”:

$$\delta(0, t) \equiv 0, \quad \delta(\infty, t) = 4e(\infty)t = 4Bt. \quad (37)$$

Выясним поведение функции  $\delta(s, t)$  в малой окрестности  $s = 0$ . Для этого представим её в виде ряда по степеням  $s$ :

$$\delta(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(t) (-1)^{n-1} s^{2n}. \quad (38)$$

Из структуры уравнения (36) видно, что каждый из коэффициентов  $\delta_n(t)$  ряда удовлетворяет замкнутой системе конечного числа обыкновенных

дифференциальных уравнений. Выпишем их, для чего представим в виде аналогичных степенных рядов функции  $d(s)$  и  $e(s)$ :

$$2d(s) = Bs^2 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(-1)^n s^{2(n+1)}, \quad (39)$$

$$2e(s) = 2B - 2d''(s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e_n(n+1)(2n+1)(-1)^{n-1} s^{2n}.$$

Подставив ряды (38), (39), в уравнение (36) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , приходим к цепочке уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \delta_n(t) &= n(2n-1)B\delta_n(t) + \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} e_m(n-m)(2n-2m-1)\delta_{n-m}(t) + (n+1)(2n+1)e_n, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\delta_1(0) = \delta_2(0) = \dots = \delta_n(0) = \dots = 0.$$

Выпишем отдельно несколько первых уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d\delta_1}{dt} &= B\delta_1 + 6e_1, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{d\delta_2}{dt} = 6B\delta_2 + \delta_1 e_1 + 15e_2, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{d\delta_3}{dt} &= 15B\delta_3 + 6\delta_2 e_1 + \delta_1 e_2 + 28e_3, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Решения первых двух из них таковы:

$$\begin{aligned} \delta_1(t) &= \frac{6e_1}{B}(e^{\tau} - 1), \\ \delta_2(t) &= \frac{15e_2}{B}(e^{6\tau} - 1) + \left(\frac{e_1}{B}\right)^2 \left[ \frac{1}{5}(e^{6\tau} - e^{\tau}) - \frac{1}{6}(e^{6\tau} - 1) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь введено безразмерное время  $\tau = 2Bt$ .

Из (40)–(42) видно, что коэффициенты разложения  $\delta(s, t)$  по степеням  $s$  экспоненциально растут с течением времени:

$$\delta_n(t) = 0 \left( e^{n(2n-1)\tau} \right), \quad (43)$$

в то время как максимальное значение  $\delta(s, t)$  при больших  $s$  растёт гораздо медленнее — по линейному закону (37):  $\delta(\infty, t) = 2\tau$ . Всё это означает, что график  $\delta(s, t)$  как функции  $s$  совпадает с горизонтальной прямой  $2\tau$ , за исключением малых  $s$ , где он “проваливается” до нуля.

Причём этот провал с ростом времени сужается. Характерный график  $\delta(s, t)$  представлен на рис. 1. Там же штриховой линией изображена парабола — график 1-го члена разложения функции  $\delta(s, t)$  в ряд (38). Можно оценить ширину провала, приравняв 1-е слагаемое в (38) к  $2\tau$ :  $\delta_1 s^2 = 2\tau$ . При этом значение характерной ширины провала оказывается равным

$$s_\kappa = \sqrt{\left(\frac{B}{3e_1}\right) \frac{\tau}{(e^\tau - 1)}} \sim \sqrt{\frac{B\tau}{3e_1}} \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right). \quad (44)$$

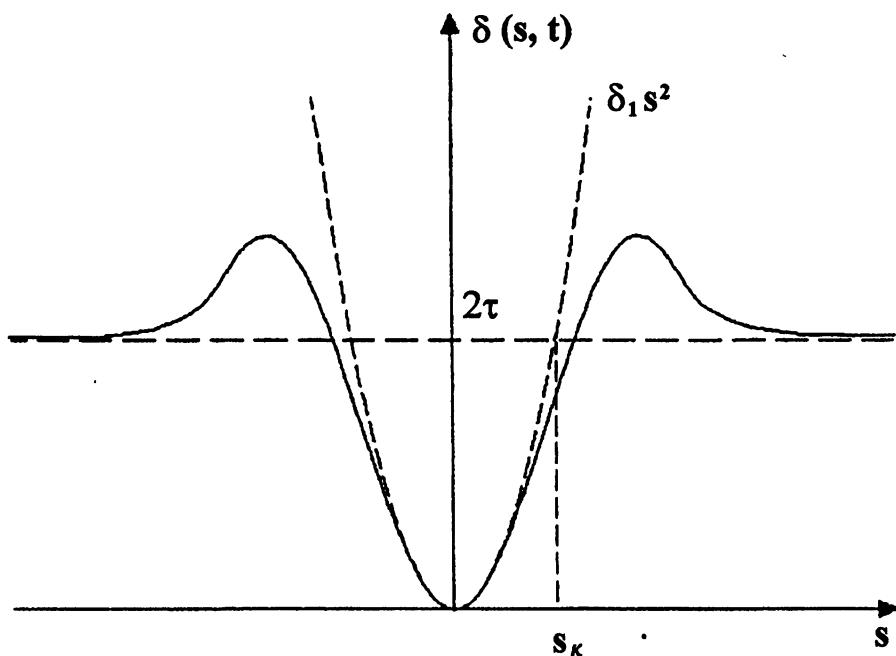


Рис. 1.

Уменьшение  $s_\kappa$  с ростом  $t$  означает, что асимптотическое поведение решения уравнения (36) при больших  $\tau$  должно быть близко к решению более простого уравнения, полученного из (36) заменой переменного коэффициента диффузии  $2d(s)$  на первое слагаемое степенного ряда (39):

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = B s^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial s^2} + 4e(s), \quad \delta(s, 0) = 0. \quad (45)$$

Чтобы решить это неоднородное уравнение, найдём функцию Грина соответствующего однородного уравнения  $G(s, s_0; t)$ :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = B s^2 \frac{\partial^2 G}{\partial s^2}, \quad G(s, s_0; t=0) = \delta(s - s_0). \quad (46)$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$G(s, s_0; t) = \frac{1}{2s_0\sqrt{\pi Bt}} \exp\left[-\frac{\ln^2(s_0 e^{Bt}/s)}{4Bt}\right]. \quad (47)$$

Решение неоднородного уравнения (45) выражается следующим образом через функцию Грина (47):

$$\delta(s, t) = 4 \int_0^t dt' \int_0^\infty e(s_0) G(s, s_0; t') ds_0. \quad (48)$$

Подставив сюда выражение (47), найдём, что в рамках уравнения (45)  $\delta(s, t)$  описывается формулой

$$\delta(s, t) = 2\tau - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} \int_0^\infty b(sy) \exp\left[-\frac{\ln^2(ye^{\mu/2})}{2\mu}\right] \frac{dy}{y}. \quad (49)$$

Здесь введена безразмерная функция

$$b(s) = B(s)/B, \quad b(0) = 1. \quad (50)$$

Исследуем поведение выражения (49) при различных  $s$  и  $t$ . Для этого перепишем его в более удобном для анализа виде:

$$\delta = 4 \int_0^{\tau/2} \Phi(s, \mu) d\mu, \quad (51)$$

где

$$\Phi(s, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{se^z}{l}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu}} \exp\left[-\frac{(z+\mu)^2}{4\mu}\right] dz. \quad (52)$$

Здесь введена новая функция  $f(s/l) = 1 - b(s)$ , явно учитывающая тот факт, что функция  $b(s)$  обладает единственным характерным пространственным масштабом  $l$ . Это, в свою очередь, означает, что обезразмеренная функция  $f(z)$  существенно изменяется лишь в окрестности  $z \sim 1$ . При  $z \ll 1$  и  $z \gg 1$  она хорошо описывается асимптотическими законами:

$$f(z) \approx \begin{cases} 1, & z \gg 1; \\ z^2, & z \ll 1. \end{cases} \quad (53)$$

Характерный график функции  $f(z)$  изображён на рис. 2.

Преобразуем интеграл (52). Для этого введём новую величину  $\gamma = \ln(1/s)$  и перейдём в (52) к новой переменной интегрирования  $y = z - \gamma$ . В итоге получим

$$\Phi(s, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^y) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu}} \exp\left[-\frac{(y+\gamma+\mu)^2}{4\mu}\right] dy. \quad (54)$$

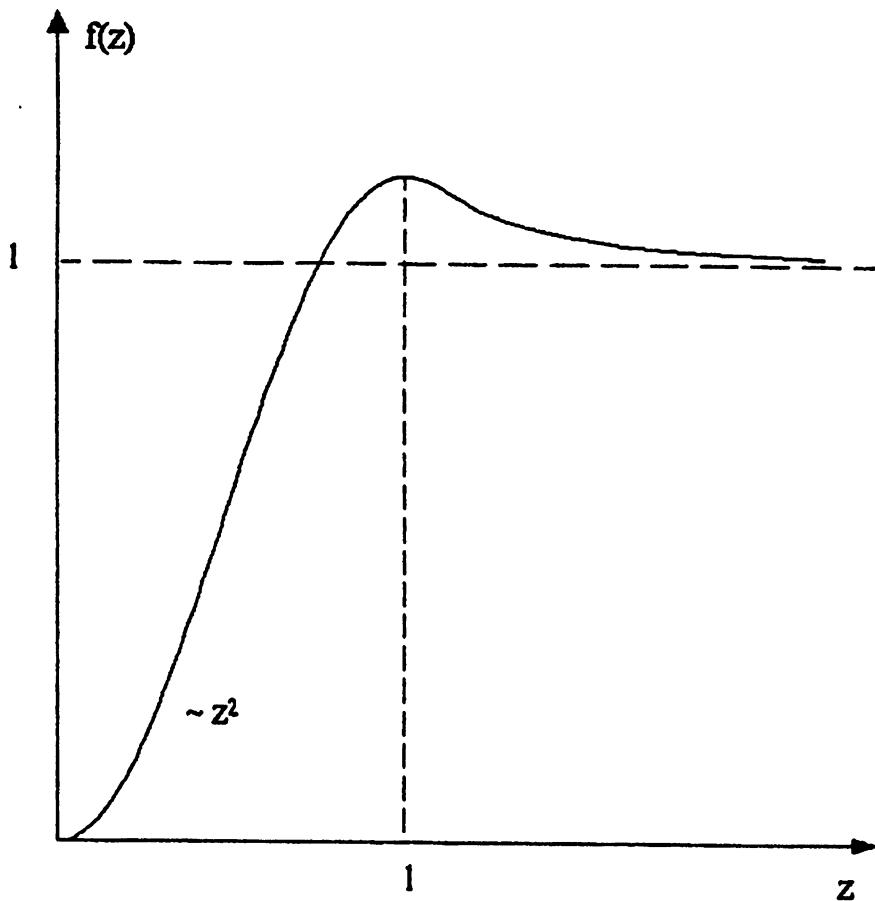


Рис. 2.

Обратим внимание на то, что при любом заданном  $\gamma$  и  $\mu \rightarrow \infty$  этот интеграл обладает универсальной, не зависящей от  $\gamma$  (а значит и от  $s$ ), асимптотикой:

$$\Phi \sim \frac{e^{-\mu/4}}{2\sqrt{\pi\mu}} \int_0^\infty \frac{f(z)}{z\sqrt{z}} dz \quad (\mu \rightarrow \infty). \quad (55)$$

Экспоненциальное стремление асимптотики к нулю, в свою очередь, означает, что интеграл от  $\Phi(s, \mu)$  по  $\mu$  (51) при  $\tau \rightarrow \infty$  стремится к ограниченному предельному значению:

$$\delta_\infty(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(s, t). \quad (56)$$

Это в корне противоречит нашим предварительным прогнозам поведения дисперсии (35) поля  $\kappa(x, s, t)$ . В частности, выводу об "обужжении провала" функции  $\delta(s, t)$  в окрестности  $s = 0$ , с ростом  $t$ , а также выводу о том,

что при достаточно больших  $s$  дисперсия  $\delta(s, t)$  неограниченно растёт с течением времени по линейному закону  $\delta = 2t$ . Полученная в рамках приближённого уравнения (45) картина поведения  $\delta(s, t)$  как функции времени означает, что при фиксированном  $s$  увеличение  $\delta(s, t)$  с ростом  $t$  продолжается лишь до тех пор, пока  $\delta(s, t)$  не достигнет значения  $\delta_\infty(s)$ . На ещё больших временах  $t > \tau(s)$  рост  $\delta(s, t)$  прекращается. Характерное безразмерное время установления  $\tau(s)$  определяется по формуле

$$\delta_\infty(s) = 2\tau. \quad (57)$$

Сказанное иллюстрируют графики  $\delta(s, t)$  на рис. 3 при разных  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ . Там же пунктиром изображена предельная кривая  $\delta_\infty(s)$ . Кажущееся противоречие между наличием предельной кривой  $\delta_\infty(s)$  и безграничным ростом (42), (43) коэффициентов разложения  $\delta(s, t)$  в ряд (38), снимается тем фактом, что предельная кривая не имеет второй производной в нуле:

$$\delta''(0) = \infty. \quad (58)$$

Напомним, что сами поля якобиана и плотности нестационарны, т.к. их моменты  $\langle \rho^n \rangle$  и  $\langle j^n \rangle$  ( $n > 1$ ), описывающие интегральный вклад всех масштабов поля скорости в флуктуации якобиана и плотности, экспоненциально растут со временем [5, 7]. Тем не менее на любых конечных масштабах  $s$  со временем возникает универсальный стационарный статистический режим, при котором дисперсия разности логарифмов якобиана в точках, разнесённых на расстояние  $s$ , сохраняет значение. Подчеркнём, что такое поведение случайных полей характерно для любой (например, атмосферной) сильной турбулентности, нестационарной на больших масштабах и стационарной в масштабах малых.

Впрочем, в решаемой нами задаче доверять выводам об установлении стационарного режима и расчётом формы предельной кривой  $\delta_\infty(s)$  можно только на малых масштабах  $s \ll l$ , где зависящие от  $s$  коэффициенты диффузии исходного (36) и приближённого (46) уравнений асимптотически совпадают. Поэтому остановимся детальнее именно на случае  $s \ll l$ . Можно показать, что при этом на зависимость  $\Phi(\mu, s)$  от  $\mu$  и  $s$  не влияет тонкая структура функции  $f(z)$  при  $z \sim 1$ , а всё определяется только асимптотическими законами (53). Поэтому заменим входящую в интеграл (54) функцию  $f(e^z)$  модельной функцией

$$f(e^y) = \begin{cases} 1, & y > 0; \\ e^{2y}, & y < 0, \end{cases} \quad (59)$$

согласующейся с асимптотиками (53). Тогда интеграл (54) окажется равным

$$\Phi(\mu, s) = \exp[2(\mu - \gamma)] \Phi\left(\frac{\gamma - 3\mu}{2\sqrt{\mu}}\right) + \Phi\left(-\frac{\gamma + \mu}{2\sqrt{\mu}}\right), \quad (60)$$

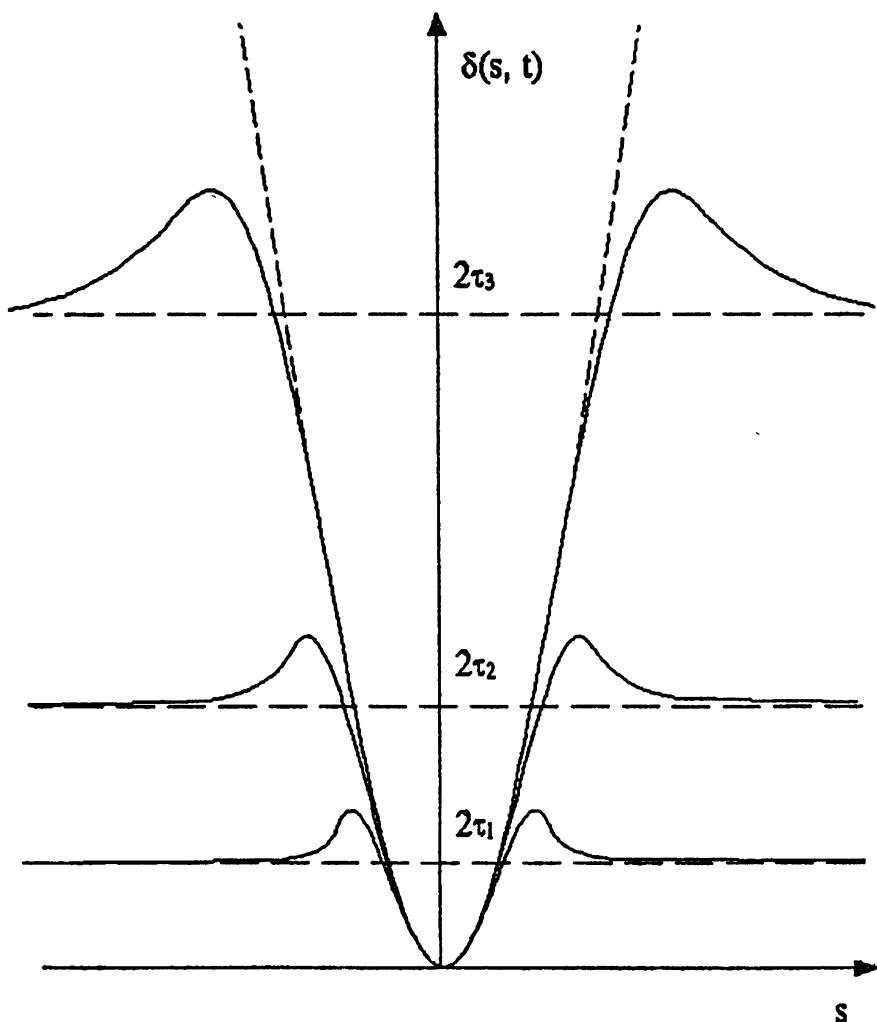


Рис. 3.

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2} dy$  — функция ошибок. При  $s \ll l$ , когда  $\gamma \gg 1$ , вклад последнего слагаемого в интеграл (51) пренебрежимо мал по сравнению с первым слагаемым в (60). Поэтому при расчётах можно оставить только его и переписать (60) в виде

$$\Phi(\mu, s) = \left(\frac{s}{l}\right)^2 e^{2\mu} \Phi\left(\frac{\gamma - 3\mu}{2\sqrt{\mu}}\right). \quad (61)$$

На начальном этапе, когда  $0 < \mu \ll \gamma$  ( $\gamma \gg 1$ ), последний множитель

здесь практически равен единице,  $\Phi(\mu, s) \approx \left(\frac{s}{l}\right)^2 e^{2\mu}$ , а интеграл (51)

$$\delta \approx 4 \left(\frac{s}{l}\right)^2 \int_0^{\tau/2} e^{2\mu} d\mu = 2 \left(\frac{s}{l}\right)^2 (e^\tau - 1) \quad (62)$$

экспоненциально растёт с увеличением  $\tau$ , в полном соответствии с законом роста (42) коэффициента при  $s^2$  в разложении (38). Однако в дальнейшем, при  $\mu \geq \gamma$ , последний множитель  $\Phi\left(\frac{\gamma - 3\mu}{2\sqrt{\mu}}\right)$  в (61) начинает быстро стремиться к нулю, а  $\delta(s, t)$  (51) сходится к предельному значению

$$\delta_\infty(s) = \int_0^\infty \Phi(\mu, s) d\mu = 4 \left(\frac{s}{l}\right)^2 \int_0^\infty e^{2\mu} \Phi\left(\frac{\gamma - 3\mu}{2\sqrt{\mu}}\right) d\mu. \quad (63)$$

Найдём асимптотику этого выражения при интересующих нас больших значениях  $\gamma$ . Для этого преобразуем интеграл в (63):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{2\mu} \Phi\left(\frac{\gamma - 3\mu}{2\sqrt{\mu}}\right) d\mu &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\gamma - 3\mu}{2\sqrt{\mu}}\right) de^{2\mu} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{2\mu} d\Phi\left(\frac{\gamma - 3\mu}{2\sqrt{\mu}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{3\mu + \gamma}{2\mu\sqrt{\mu}} \exp\left(2\mu - \frac{(\gamma - 3\mu)^2}{4\mu}\right) d\mu, \end{aligned}$$

или, после приведения показателя экспоненты к полному квадрату,

$$\frac{1}{2} + \frac{e^\gamma}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{3\mu + \gamma}{2\mu\sqrt{\mu}} \exp\left[-\frac{(\mu - \gamma)^2}{4\mu}\right] d\mu \approx \frac{1}{2}(1 + e^\gamma) \approx \frac{1}{2}e^\gamma = \frac{1}{2s}.$$

Подставив это выражение в (63), будем иметь:

$$\delta_\infty(s) = 2 \frac{|s|}{l} \quad (s \ll l). \quad (64)$$

Этот, на наш взгляд интересный, результат нуждается в комментариях. Он напоминает закон Колмогорова-Обухова для структурной функции сильной атмосферной турбулентности в инерционном интервале  $l_i \ll s \ll l$ , где  $l$  — внешний, а  $l_i$  — внутренний масштаб турбулентности. У нас роль внешнего масштаба играет характерный масштаб поля скорости  $l_o \sim l$ , а внутренний масштаб равен нулю, т.к. мы пренебрегаем броуновской компонентой движения частиц примеси. Из (64) следует вывод, что реализации поля  $\kappa(s, x, t)$  как функции  $x$  имеют либо разрывы 1-го рода, либо ведут как всюду недифференцируемый винеровский процесс.

То же справедливо и по отношению к реализациям полей  $j(x, t)$  и  $\rho(x, t)$ . Соответственно, пространственные спектры этих полей, например,

$$S_\rho(\Omega) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \rho(x, t) \rho(x+s, t) \rangle e^{i\Omega s} ds, \quad (65)$$

должны при  $\Omega \gg 1/l$  спадать по универсальному степенному закону:

$$S_\rho(\Omega) \approx 1/\Omega^2 \quad (\Omega \gg 1/l). \quad (66)$$

Уже зная результат (64), его можно получить "на пальцах", подставив в вытекающую из (38), (42) формулу  $\delta(s, t) \sim \left(\frac{s}{l}\right)^2 e^\tau$  характерное время насыщения роста  $\delta(s, t)$ :  $\tau^* \approx \gamma = \ln(l/s)$ . Заметим, что это время безгранично увеличивается с уменьшением  $s$ . Таким образом, достижение функцией  $\delta(s, t)$  предельного значения  $\delta_\infty(s)$  идёт тем медленнее, чем меньше  $s$ . Заметим ещё, что (64) является сингулярным решением уравнения  $s^2 \frac{d^2 \delta}{ds^2} = 0$ . Соответственно, обобщённое стационарное решение уравнения (45) имеет вид:

$$\delta_\infty(z) = 2|z| + \int_0^z \frac{f(y)(z-y)}{y^2} dy.$$

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье исследованы двухточечные статистические свойства поля плотности пассивной примеси в сжимаемой движущейся среде, содержащие дополнительную (по сравнению с одноточечными характеристиками) информацию о пространственно-временном поведении случайных полей и их спектральных свойствах. Результаты такого исследования могут быть использованы при решении широкого спектра прикладных задач, например, изучения загрязнения турбулентной атмосферы, процессов переноса тепла и примесей океаническими течениями и подземными водами, процессов формирования структуры распределения вещества во Вселенной на нелинейной стадии гравитационной неустойчивости и др.

Работа выполнена частично при поддержке грантов РФФИ 97-02-16521 и РФФИ-ИНТАС 95-IN-RU-723.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Csanady G. T. Turbulent Diffusion in the Environment. — Boston: Reidel, 1980.
2. Careta A., Sagues F., Ramirez-Piscina L., Sancho J. M. //J. Stat. Phys., 1993. V. 71. P. 235.
3. Crisanty A., Vulpiani A. //J. Stat. Phys., 1993. V. 70. P. 197.
4. Докучаев В. П. //Изв. РАН. ФАО, 1995. Т. 31. № 2. С. 275.
5. Кляцкин В. И. //УФН, 1994. Т. 164. № 5. С. 531.
6. Жукова И. С., Саичев А. И. //Изв. вузов. Радиофизика, 1996. Т. 39. № 5. С. 597.
7. Жукова И. С., Саичев А. И. //Прикладная математика и механика (в печати).
8. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. — М.: Наука, 1990.
9. Saichev A. I., Woyczyński W. A. Distribution of Passive Tracers in Randomly Moving Media. — In: Stochastic Models in Geosystems, IMA volumes, Springer-Verlag, NY. 1996. P. 43.
10. Кляцкин В. И., Саичев А. И. //УФН, 1992. Т. 162. № 3. С. 161.

Государственный университет,  
Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
20 декабря 1996 г.

**TWO-POINT STATISTICAL PROPERTIES OF PASSIVE TRACER IN  
TURBULENT COMPRESSIBLE MEDIUM**

*I. S. Zhukova, A. I. Saichev*

The two-point probability properties of passive tracer in turbulent moving compressible medium are presented. The equations for Lagrange and Euler probability distributions of the distances between particles and of Jacobean's values in the particles vicinity are obtained. On the basis of these equations the dependence of the logarithm of density field's Jacobean on particles distances with the course of time are investigated. The dependence for decaying of space spectra of the density fields and Jacobean's field, that is analogous to the Kolmogorov-Obukhov law for the real turbulence, is derived.

УДК 621.396.677

## МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА РЕДДИ И ИХ ПРЕДЕЛЬНОЕ РАЗРЕШЕНИЕ МОЩНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ИСТОЧНИКОВ

*Л. А. Апресян, В. В. Караваев, В. С. Молодцов*

В пределе большого отношения сигнал/шум проведено сравнение разрешающей способности метода Редди и его модификации, основанной на точном знании среднего положения между разрешаемыми источниками, как с традиционным заданием элемента предсказания (на концах антенной решётки), так и с произвольным. Источники считались независимыми гауссовскими и равнomoщными, а критерием разрешения служило равенство средней целевой функции в точках истинного положения источников её значению в точке посередине между ними.

**1.** В прикладных задачах нелинейного спектрального анализа, например, связанных с определением координат источников активных помех или координат лоцируемых источников, излучающих случайный сигнал, широко используются проекционные алгоритмы [1]. Ценность этих алгоритмов во многом обусловлена тем, что в определённых случаях обеспечивающие ими оценки координат источников приближаются к идеальным, описываемым границами Крамера–Рао [1]. Вопрос о том, в какой степени пороговые свойства таких алгоритмов можно улучшить за счёт перехода к более изощрённой обработке, требует корректного сравнения результатов разных методов на основе одинаковых критерии разрешения.

В данной работе для гауссовых независимых источников в пределе больших отношений сигнал/шум рассмотрено рэлеевское разрешение основанного на линейном предсказании варианта Редди [2] проекционного метода. В отличие от традиционного подхода, исследованы разные способы выбора элемента антенны, сигнал которого предсказывается по сигналам остальных. Оказалось, что при удачном выборе (он совпадал с традиционным) достигается уменьшение порогового уровня сигнала по сравнению с проекционным методом. Однако, как показано в [3], при этом существенно ухудшаются точностные характеристики оценок.

Описана также модификация метода Редди, не привлекающая философии линейного предсказания. Найдено, что она существенно уменьшает нужный для разрешения уровень сигнала. Вопрос о практической ценности такой модификации связан, однако, с её чувствительностью к ошибке задания среднего положения разрешаемых источников.

**2.** Интересуясь разрешением по критерию Рэлея, рассмотрим ситуацию, когда на антенную решётку падает излучение от двух источников, симметричных относительно нормали к решётке и расположенных по отношению к этой нормали под углами (пеленгами)  $\Delta$  и  $-\Delta$ . Если излучает только первый источник, то принимаемые элементами антенны колебания можно объединить в вектор-столбец  $a|\Delta\rangle$ , где множитель  $a$  описывает амплитуду сигнала данного источника, а вектор  $|\Delta\rangle$ , который мы называем опорным и считаем нормированным ( $\langle\Delta|\Delta\rangle=1$ ), зависит только от положения источника, т.е. от  $\Delta$ . Соответственно, опорный вектор второго источника обозначим через  $|-\Delta\rangle$ . Амплитуда его сигнала независима от амплитуды первого и также меняется независимым образом от одной наблюдаемой реализации к другой (всего наблюдается  $L$  реализаций). Для компактной записи объединим оба опорных вектора в матрицу  $B = (|\Delta\rangle, |-\Delta\rangle)$ , а векторы  $L$  наблюдаемых амплитуд обоих источников — в матрицу  $A = (|a_+\rangle, |a_-\rangle)$ , так что  $\langle a_{\pm}| = (a_{1\pm}, a_{2\pm}, \dots, a_{L\pm})$ , где знаки + и - относятся, соответственно, к источникам с пеленгами  $\Delta$  и  $-\Delta$ . Наблюдение производится на фоне шума, который мы описываем матрицей  $V$ , составленной из столбцов-реализаций этого шума в элементах решётки. Тогда принятая сумма поля источников и шума записывается в виде матрицы  $X = S + V$ , где  $S = BA^*$  (звездочка обозначает эрмитовское сопряжение матрицы, а  $\langle |$  — то же для вектора  $| \rangle$ ).

Рассмотрим два (левых) сингулярных вектора матрицы  $X$ , отвечающих двум наибольшим сингулярным числам (два — число источников). Они образуют так называемое сигнальное подпространство исходного пространства, соответствующего всевозможным колебаниям в элементах антенны. Обозначим проектор на это подпространство через  $\hat{\Pi}$ ; тогда проектор на дополнительное (шумовое) подпространство матрицы  $X$  (назовём его для краткости антипроектором) есть  $\hat{\perp} = I - \hat{\Pi}$ , где  $I$  — единичная матрица.

Пеленгация по методу Редди сводится к поиску минимумов целевой функции  $\hat{C}_{\alpha} = \langle \alpha | \hat{\perp} | 1 \rangle \langle 1 | \hat{\perp} | \alpha \rangle$ , где вектор обзора  $|\alpha\rangle$  есть опорный вектор источника с пеленгом  $\alpha$ , а вектор  $|1\rangle$  (довольно произвольно) выбирается состоящим целиком из нулей кроме единицы на первом (или последнем) месте. Этот метод рассматривается как альтернатива проекционному, в котором целевая функция имеет вид  $\langle \alpha | \hat{\perp} | \alpha \rangle$ , в основном, из-за наблюдающегося при моделировании улучшения разрешения близких источников [4].

Возможны, конечно, и другие выборы вектора  $|1\rangle$ , например, с единицей на произвольном месте. Именно этот случай и будет рассмотрен ниже, причём через  $|n\rangle$  мы обозначим вектор, состоящий из нулей с единицей на  $n$ -ом месте. Более того, никаких усложнений в расчёты не вносится, если вместо диады  $|n\rangle\langle n|$  использовать любую эрмитовскую положительно определённую матрицу  $D$ , подчинённую лишь условию, что

хотя бы один её собственный вектор не был близок к сигнальному подпространству.

В отсутствие шума при  $\mathbf{V} = 0$  проектор  $\hat{\Pi}$  совпадает с проектором  $\Pi$ , построенным на опорных векторах истинных источников. Поэтому целевая функция  $C_\alpha = \langle \alpha | \perp D \perp | \alpha \rangle$  имеет нули при значениях  $\alpha$ , совпадающих с истинными пеленгами источников. При этом подпространство первых двух сингулярных векторов  $\mathbf{X} = \mathbf{S}$  совпадает с подпространством опорных векторов источников  $\mathbf{B}$ . Шум возмущает эти сингулярные векторы и, соответственно,  $\Pi$  и  $\perp$ . Для расчёта возмущённого антипроектора  $\perp$  можно воспользоваться стандартной теорией возмущений, последовательно учитывая члены возрастающих порядков по (малому) обратному отношению сигнал/шум.

Как и в [4], в качестве рэлеевского критерия разрешения двух равномощных источников примем равенство нулю величины  $\hat{C}_0 - \hat{C}_\Delta$  — перепада средней по флюктуациям источников и шуму целевой функции  $\hat{C}_\alpha$  между точками истинных пеленгов источников и точкой среднего направления между ними. В отличие от ранее использованных приближений [4], здесь не налагается условие длинной выборки: оно заменяется условием большого отношения сигнал/шум.

Последовательно учитывая члены возрастающих порядков по малому параметру — обратному отношению сигнал/шум, для поправки первого порядка к антипроектору получаем (см. [5], с. 102)

$$\perp^1 = -[\perp \mathbf{V} \mathbf{S}^+ + (*)], \quad (1)$$

а для поправки второго —

$$\begin{aligned} \perp^2 &= \mathbf{S}^{++} \mathbf{V}^* \perp \mathbf{V} \mathbf{S}^+ - \perp \mathbf{V} (\mathbf{S}^* \mathbf{S})^+ \mathbf{V}^* \perp + [\perp (\mathbf{V} \mathbf{S}^+)^2 + (*)] - \\ &- [\perp \mathbf{V} (\mathbf{I} - \mathbf{S}^+ \mathbf{S}) \mathbf{V}^* (\mathbf{S} \mathbf{S}^*)^+ + (*)]. \end{aligned} \quad (2)$$

В этих формулах верхний индекс “плюс” означает псевдообращение матрицы.

В дальнейшем шум считается независимым однородным с нулевым средним. В соответствии с этим обращаются в нуль выражения, содержащие средние произведений разного числа матриц  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{V}^*$ , и для любой квадратной матрицы  $\mathbf{M}$  имеет место равенство  $\overline{\mathbf{V}^* \mathbf{M} \mathbf{V}} = \mathbf{I} \text{Sp} \mathbf{M}$  (черта означает усреднение по шуму,  $\text{Sp}$  — след матрицы).

Опуская детали вычислений и обозначая через  $\mathbf{P}$  ненормированную на число наблюдений  $L$  выборочную корреляционную матрицу,  $\mathbf{P} = \mathbf{A}^* \mathbf{A}$ , а через  $\mathbf{R}$  — соответствующую корреляционную матрицу сигналов в элементах антennы, получаем в окрестности среднего пеленга источников в

главных порядках по обратному отношению сигнал/шум и  $\Delta$

$$\overline{\mathbf{I} \mathbf{D} \mathbf{I}} \sim \perp \mathbf{D} \perp + \mathbf{R}^+ \text{Sp}(\mathbf{D} \perp).$$

Для дальнейших упрощений примем, что источники излучают белые гауссовские шумы. Это позволяет при усреднении матрицы  $\mathbf{R}^+ = \mathbf{B}^{++} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^+$  по флуктуациям источников воспользоваться вытекающей из распределения Уишарта матрицы  $\mathbf{P}$  формулой

$$\overline{\mathbf{P}^{-1}} = (\overline{\mathbf{P}})^{-1} L / (L - 2).$$

Для независимых равномощных источников  $\overline{\mathbf{P}} = p \mathbf{I}$ , что позволяет записать принятый ранее критерий их разрешения в виде

$$C_0 = \text{Sp}(\mathbf{C} \perp) / [2p(L - 2)],$$

где  $C_0$  — невозмущённая целевая функция в среднем между источниками направлений. Разложим опорный вектор  $|\Delta\rangle$  в ряд по  $\Delta$  в этой точке

$$|\Delta\rangle \sim |0\rangle + \Delta |\dot{0}\rangle + \Delta^2 / 2 |\ddot{0}\rangle,$$

где  $|\dot{0}\rangle$  — его первая производная в нуле и т.д. Используя соотношения  $\perp |0\rangle \sim -(|0\rangle + |\dot{0}\rangle) \Delta^2 / 2$  и  $\perp \sim \mathbf{I} - (|0\rangle \langle 0| + |\dot{0}\rangle \langle \dot{0}|)$ , справедливое при нормировке  $\langle 0|\alpha\rangle \sim 1 - \alpha^2 / 2$ , приходим к ответу для величины предельного разрешения

$$\Delta^4 = \frac{2[\text{Sp} \mathbf{D} - (\langle 0|\mathbf{D}|0\rangle + \langle \dot{0}|\mathbf{D}|\dot{0}\rangle)]}{p(L-2)(\langle 0| + \langle \dot{0}|)\mathbf{D}(|0\rangle + |\dot{0}\rangle)}.$$

Заметим, что указанная нормировка обеспечивает измерение величины  $\Delta$  в единицах обычного (без сверхразрешения) рэлеевского предела.

Метод Редди соответствует частному выбору  $\mathbf{D}$  в виде диады  $|n\rangle \langle n|$ . Чтобы не загромождать формулы, ограничимся здесь только равномерной линейной решёткой из достаточно большого числа элементов  $N$ . Тогда

$$\Delta^4 \sim 2N / [(1 - 12n^2/N^2)^2 p(L-2)],$$

причём  $-N/2 \leq n \leq N/2$ . Очевидно минимум  $\Delta$  достигается, когда  $n$  выбирается равным  $\pm N/2$ , т.е. на краях решётки. При таком выборе

$$\Delta^4 = N / [2p(L-2)]. \quad (3)$$

Этот результат хорошо согласуется с приведёнными в [4] графическими результатами численного моделирования.

Насколько существенно влияет на разрешающую способность выбор матрицы  $\mathbf{D}$  при отказе от условия неблизости его собственного подпространства к сигнальному, можно продемонстрировать на примере матрицы  $\mathbf{D} = |0\rangle\langle 0|$ , где  $|0\rangle$  — опорный вектор источника, расположенного посередине между разрешаемыми. Целевая функция при таком выборе имеет вид  $C_\alpha = |\langle \alpha | \perp |0\rangle|^2$ .

Из-за того, что антипроекторы дополнительно умножаются на вектор, близкий к опорным, изменяются порядки членов, которые необходимо учитывать при рассмотрении целевой функции вблизи истинных пеленгов источников. Именно, т.к.  $\perp |0\rangle \sim -(|0\rangle + |0\rangle) \Delta^2 / 2$ , невозмущённая целевая функция пропорциональна  $\Delta^8$ , а поправка к ней второго порядка —  $\Delta^4$ , и потому, по сравнению с ней, поправка четвёртого порядка уже не может считаться малой. Эта последняя слагается из члена, содержащего произведение вторых поправок к антипроектору, и перекрёстных поправок нулевого и четвёртого, а также первого и третьего порядков. Перекрёстные поправки, однако, из-за умножений справа и слева на вектор, близкий к  $|0\rangle$ , приводят к появлению множителей, пропорциональных второй и более высоким степеням  $\Delta$ . Произведение же вторых поправок содержит слагаемое, не приводящее к таким множителям. Только оно поэтому и должно учитываться в дальнейшем.

Для среднего положения между источниками целевая функция (без исчезающих при усреднении поправок первого и третьего порядков) даётся выражением

$$\hat{C}_0 \sim \perp_0 + 2\perp_0 \perp_0 + (\perp_0)^2 + (\perp_0)^2,$$

где  $\perp_0 = \langle 0 | \perp | 0 \rangle$ . Усредняя это по шуму и используя свойства моментов четвёртого порядка гауссовских векторов, находим

$$\bar{C}_0 \sim (\perp_0)^2 + 2\perp_0(N-1)R_0^+ + (N-1)(N-2)(R_0^+)^2.$$

Дальнейшее усреднение этого выражения по независимым гауссовским флуктуациям амплитуд источников осуществляется с помощью распределения Уишарта выборочной корреляционной матрицы  $\mathbf{P}$ , что с учётом приближённого равенства  $|0\rangle \sim (|\Delta\rangle + |-\Delta\rangle)/2$  даёт

$$\overline{R_0^+} \sim 1/[2p(L-2)], \quad \overline{(R_0^+)^2} \sim 1/[4p^2(L-2)(L-3)].$$

Для углового положения каждого из источников целевая функция даётся выражением

$$\hat{C}_\Delta \sim |\langle 0 | \perp | \Delta \rangle|^2 + |\langle 0 | \perp | -\Delta \rangle|^2.$$

Усреднение этого по шуму даёт

$$\overline{\hat{C}_\Delta} \sim \perp_0 R_\Delta^+ + (N-2)^2 |\langle 0 | R^+ | \Delta \rangle|^2 + (N-2) R_0^+ R_\Delta^+, \quad (R_\Delta = \langle 0 | R^+ | \Delta \rangle),$$

а последующее по флуктуациям источников —

$$\overline{R_{\Delta}^+} = 1/[p(L-2)],$$

$$| < 0 | R^+ | \Delta > |^2 \sim L/[4p^2(L-1)(L-2)(L-3)],$$

$$\overline{R_0^+ R_{\Delta}^+} \sim (2L-3)/[4p^2(L-1)(L-2)(L-3)].$$

Приравнивая найденные средние и вводя для краткости приведённые длины выборок  $l = L - 2$  и размерность антенны  $n = N - 2$ , находим для предельного разрешения при выборе матрицы  $\mathbf{D}$  в виде диады  $|0><0|$

$$\Delta^4 \sim \frac{2}{pl(\varphi-1)} \left[ \sqrt{n[l(l+n)/(l^2-1)+n]} - n \right],$$

причём единицы измерения  $\Delta$  выбраны так, что  $<0|\alpha>\sim 1-\alpha^2/2-\alpha^4\varphi/4$ .

Для равномерной решётки ( $\varphi = 9/5$ ) это выражение отличается от (3) множителем в квадратных скобках, поделённым на  $N/5$ . При больших  $L$  и  $N$  он равен  $5(N+L)/(2LN)$ . Обратная к этой величине есть энергетический выигрыш, достигаемый в задаче разрешения при переходе от проекционного алгоритма к рассматриваемому. Когда  $L \sim N$ , выигрыш порядка  $N/5$ . Если же значения  $L$  и  $N$  сильно различаются, то он равен наименьшему из них, умноженному на  $2/5$ .

Для сравнения с методом максимального правдоподобия [2] и проверки правомочности использования критерия, основанного на двухмодовом характере средней целевой функции, был проведён расчёт по уточнённому критерию разрешения [2], учитывающему флуктуации целевой функции. Результаты, которые мы за громоздкостью не приводим, подтверждают малую зависимость результата от выбора целевой функции. Любопытно, что модифицированный метод Редди при расчёте по нашему первоначальному критерию разрешения и определённых ограничениях на число элементов решётки и длину выборки ( $L \gg N \gg 1$ ) формально обеспечивает разрешение, вчетверо лучшее, чем метод максимального правдоподобия; расчёт по уточнённому критерию снижает величину выигрыша до  $4/3$ . Однако надо помнить, что модифицированный метод Редди предполагает точное знание среднего направления на источники, чего в методе максимального правдоподобия не предполагается. Ошибка в задании этого среднего направления может существенно изменить результаты.

Эта работа выполнена при поддержке Международного Фонда Научных Исследований (грант № M 1J000).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Караваев В. В., Сазонов В. В. Статистическая теория пассивной локации. — М.: Радио и связь, 1987.
2. Reddi S. S. //IEEE Trans., 1979. V. AES-15. № 1. P. 95.
3. Апресян Л. А., Караваев В. В., Молодцов В. С. //Радиотехника и электроника, 1996. Т. 41. № 6. С. 1.
4. Kaveh M., Barabell A. J. //IEEE Trans., 1986. V. ASSP-34. № 2. P. 331.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

Радиотехнический институт  
им. акад. Минца,  
Москва, Россия

Поступила в редакцию  
27 августа 1996 г.

**MODIFICATION OF THE REDDI'S METHOD AND ITS LIMITING  
RESOLUTION OF POWER RANDOM SOURCES**

*L. A. Apresyan, V. S. Molodzov, V. V. Karavaev*

In the asymptotic limit of large signal to noise ratio the ultimate Rayleigh resolving capacities of various modifications of the Reddy method have been analyzed. Both the traditional choice of prediction element (on the ends of array) and the arbitrary one are considered. Sources are supposed to be independent Gaussian with equal mean power. The resulting criterion was the equality of the mean goal function at the points of the source location and at the middle of them.

УДК 621.385.69.01

# ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА ПРОВИСАНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ПУЧКА В ГИРОТРОНАХ

*B. E. Запевалов, M. A. Мусеев*

Теоретически исследуется влияние провисания потенциала электронного пучка в мощных гиротронах со сверхразмерными открытыми резонаторами. Определены ограничения мощности и КПД гиротрона, обусловленные провисанием потенциала пучка в резонаторе. Рассмотрены изменения условий самовозбуждения, КПД и оптимальных параметров при ионной компенсации пространственного заряда электронного пучка в короткоимпульсном и длинноимпульсном режимах генерации.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Гиротроны ММ диапазона используются для ЭЦР нагрева и активной диагностики плазмы, а в последнее время и для технологических целей [1–3]. Для проектирования и оптимизации гиротронов необходима достоверная информация о параметрах активной среды — винтовых электронных пучков (ВЭП), а также факторах и процессах, на эти параметры влияющих. Одним из таких факторов является провисание потенциала ВЭП в резонаторе гиротрона, обусловленное собственным пространственным зарядом пучка. Особенно сильно влияние этого фактора в сверхмощных гиротронах при использовании интенсивных ВЭП и пространственно-развитых рабочих мод сверхразмерных открытых резонаторов. Теоретические исследования особенностей эффекта провисания потенциала для ВЭП выполнены в ряде работ [4–6]. Расчетные модели разной степени сложности показывают, что влияние провисания на параметры ВЭП выражено гораздо сильнее, чем в случае прямолинейных электронных пучков.

## 2. ОГРАНИЧЕНИЯ МОЩНОСТИ

Легко показать, что провисание потенциала является существенным фактором, ограничивающим мощность и эффективность гиротронов с полыми резонаторами в виде слабонерегулярных отрезков цилиндрических волноводов.

Мощность гиротрона можно записать в виде [7]

$$P = IU t_{\perp} \eta_{\perp} \eta_c \frac{Q_{\text{ohm}}}{Q_{\text{ohm}} + Q_d}, \quad (1)$$

где  $I$  и  $U$  — ток и ускоряющее напряжение,  $\eta_{\perp}$  и  $\eta_c$  — поперечный КПД [8, 9] и коэффициент преобразования встроенного преобразователя,  $t_{\perp}$  — отношение осцилляторной энергии электронов к полной,  $Q_d$  и  $Q_{ohm}$  — дифракционная и омическая добротности. Скорость осцилляторного движения  $v_{\perp}$  определяется условиями формирования пучка в электронной пушке и с точностью до релятивистских поправок не зависит от провисания потенциала в резонаторе  $\Delta U$  [10]. Скорость поступательного движения

$$v_z = \sqrt{(2e/m_0)(U - \Delta U) - v_{\perp}^2} \quad (2)$$

уменьшается с увеличением  $\Delta U$  ( $e/m_0$  — отношение заряда к массе покоя электрона). При токах, больших предельного, провисание потенциала возрастает настолько, что приводит к неустойчивости электронного пучка ( $v_z \rightarrow 0$ ). Тогда, учитывая выражения для предельного тока, ограниченного провисанием [5, 6]

$$I_{max} = 0,4U^{3/2}k/[(1 + g^2)^{3/2} \ln(R_c/R_b)], \quad (3)$$

и связь между питч-фактором  $g$  и  $t_{\perp}$  ( $t_{\perp} = g^2/(1 + g^2)$ ), получаем

$$P_{max} = 0,4U^{5/2}\eta_c\eta_{\perp}k \frac{Q_{ohm}}{Q_{ohm} + Q_d} \frac{y(t_{\perp})}{\ln(R_c/R_b)}, \quad (4)$$

где  $k$  — коэффициент, зависящий от скоростного разброса ( $k(0) = 1$ ) [5, 6, 10],  $y(t_{\perp}) = t_{\perp}(1 - t_{\perp})^{3/2}$ ,  $R_c$  и  $R_b$  — радиусы резонатора и электронного пучка. Легко видеть, что при прочих равных условиях  $y(t_{\perp})$  (см. рис. 1) определяет максимальную мощность гиротрона. Эта функция имеет единственный максимум при  $t_{\perp} = 0,4$  и обращается в нуль при  $t_{\perp}$ , равном 0 и 1, что имеет очевидный физический смысл. При типичных для современных гиротронов значениях  $t_{\perp} \approx 0,7$  величина  $y(t_{\perp})$  в 1,5–2 раза меньше максимальной (максимум КПД  $\eta = P/IU$  достигается при  $t_{\perp} \rightarrow 1$ , когда  $y(t_{\perp}) \rightarrow 0$ , так что приходится искать компромиссное решение между  $\eta_{max}$  и  $P_{max}$ ). Тем не менее, работа гиротрона при максимальной величине  $y(t_{\perp})$  в некоторых случаях может иметь смысл, особенно при использовании рекуперации [11, 12].

Зависимости максимальной достижимой мощности гиротрона от ускоряющего напряжения при различных величинах отношения  $R_b/R_c$  на рис. 2 приведены для типичных величин  $Q_{ohm}/(Q_{ohm} + Q_d) = 0,95$ ,  $t_{\perp} = 0,75$ ,  $\eta_{\perp} = 0,6$ ,  $\eta_c = 0,83$  и  $k = 1$  (нулевой разброс). Отметим, что при типичных значениях питч-фактора и скоростного разброса величина  $k$  составляет 0,5–0,7 [5, 6] и величина максимальной выходной мощности снижается в 1,5–2 раза. Использование в современных гиротронах для снижения омических потерь пространственно развитых мод ( $R_b/R_c \sim 0,5$ ) [2, 3] вместо используемых ранее мод шепчущей галереи

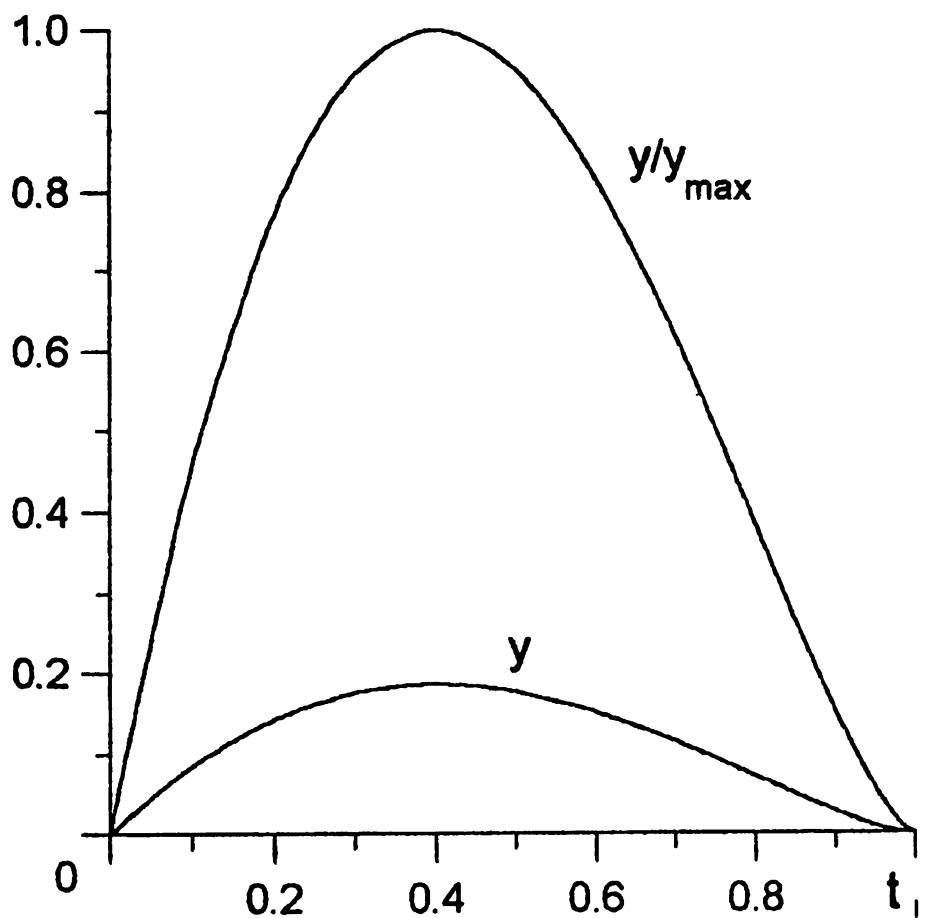


Рис. 1. Зависимость безразмерной мощности гиротрона от отношения осцилляторной энергии электронов к полной.

$(R_b/R_c \sim 1)$  [1] требует, согласно рис. 2, для достижения уровня мощности 1 МВт ускоряющих напряжений 80 кВ и более.

### 3. УСЛОВИЯ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ

Вторым, довольно очевидным эффектом является снижение стартового тока при самовозбуждении колебаний в гиротроне и смещение зоны самовоизбуждения в сторону меньших магнитных полей, что обусловлено снижением эффективного потенциала и увеличением времени пролёта.

В модели гиротрона с гауссовой продольной структурой ВЧ поля в резонаторе  $f(z) = \exp[-(2z/L)^2]$  стартовый ток определяется выражениями [8]

$$I_{st} \frac{1,44 Q \beta_{\perp}^{2n} L^2 G}{10^3 \beta_z^3 \lambda^2} \left( -\frac{n}{\mu} - \frac{d}{d\theta} \right) \exp\left(-\frac{\theta^2}{8}\right) = 1. \quad (5)$$

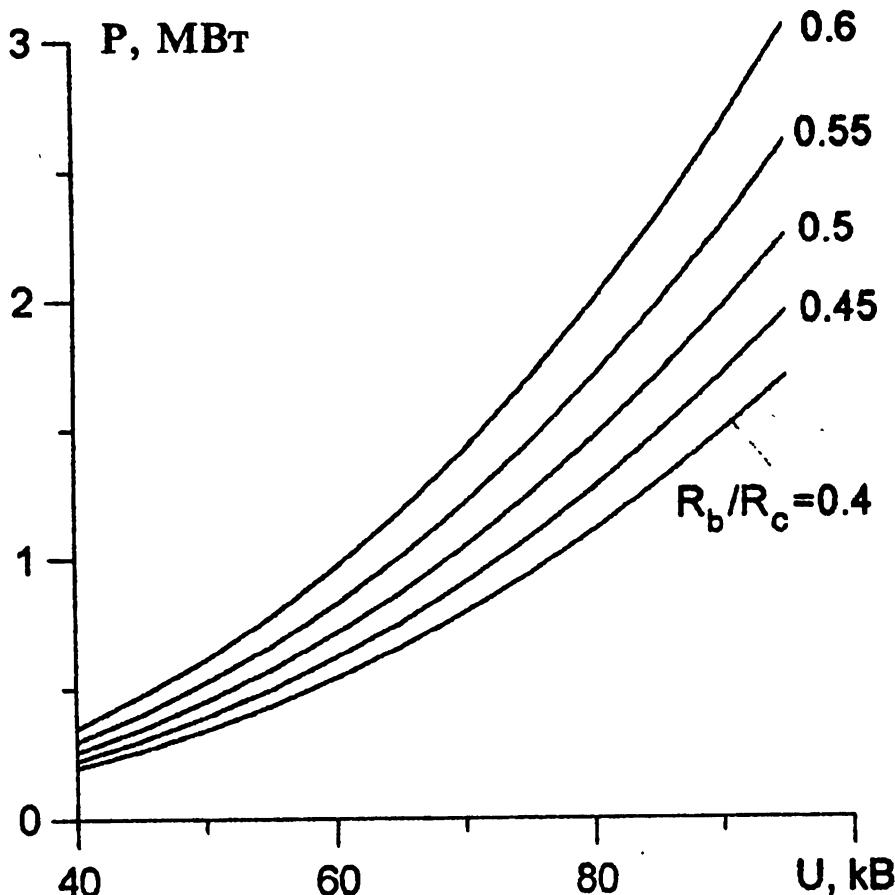


Рис. 2. Зависимость мощности гиротрона от ускоряющего напряжения.

Здесь  $Q$  — добротность резонатора,  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ ,  $\beta_z = v_z/c$ ,  $c$  — скорость света,  $L$  — эффективная длина резонатора,  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве,  $\mu = \pi\beta_{\perp}^2 L / (\beta_z \lambda)$ ,  $n = 1, 2$  — номер рабочей гармоники циклотронной частоты ( $\omega \approx n\omega_H$ ),  $\theta = (2\pi L/\beta_z \lambda)(1 - n\omega_H/\omega)$  — угол пролёта через резонатор,  $G$  — структурный фактор, определяющий связь электронного пучка с ВЧ полем [7–9]. Минимум стартового тока достигается при  $\theta = 2\sqrt{1 + n^2/\mu^2} + 2n/\mu$ . В гиротронах, как правило, параметр  $\mu \gg n$ . Тогда из (2), (5) следует:

$$I_{st}^{\min} = \frac{2,26 \cdot 10^3 \lambda^2}{QL^2 G \beta_{\perp}^{2n}} \left( \frac{2e}{m_0 c^2} (U - \Delta U) - \beta_{\perp}^2 \right)^{3/2}, \quad (6)$$

оптимальная величина статического магнитного поля равна

$$B = \left( 1 - \frac{\beta_z \lambda}{\pi L} \right) \frac{\omega m_0}{ne} \left( 1 + \frac{e}{m_0 c^2} (U - \Delta U) \right). \quad (7)$$

Первый множитель в (7) близок к единице и почти не изменяется. Зависимость  $B$  от  $\Delta U$  определяется, главным образом, последним множителем.

В реальных гиротронах со слаженным профилем продольного сечения структура ВЧ поля в резонаторе [1–3, 7] близка к гауссовой и зоны самовозбуждения качественно соответствуют выражениям (5)–(7). Для примера на рис. 3 приведены расчётные зоны самовозбуждения самосогласованной модели гиротрона (с нефиксированной структурой ВЧ поля [9] и разбросом скоростей электронов [7, 10]) при наличии и отсутствии провисания потенциала. Осцилляции зависимости  $I_{st}(B)$  получаются вследствие нефиксированности реальной структуры ВЧ поля.

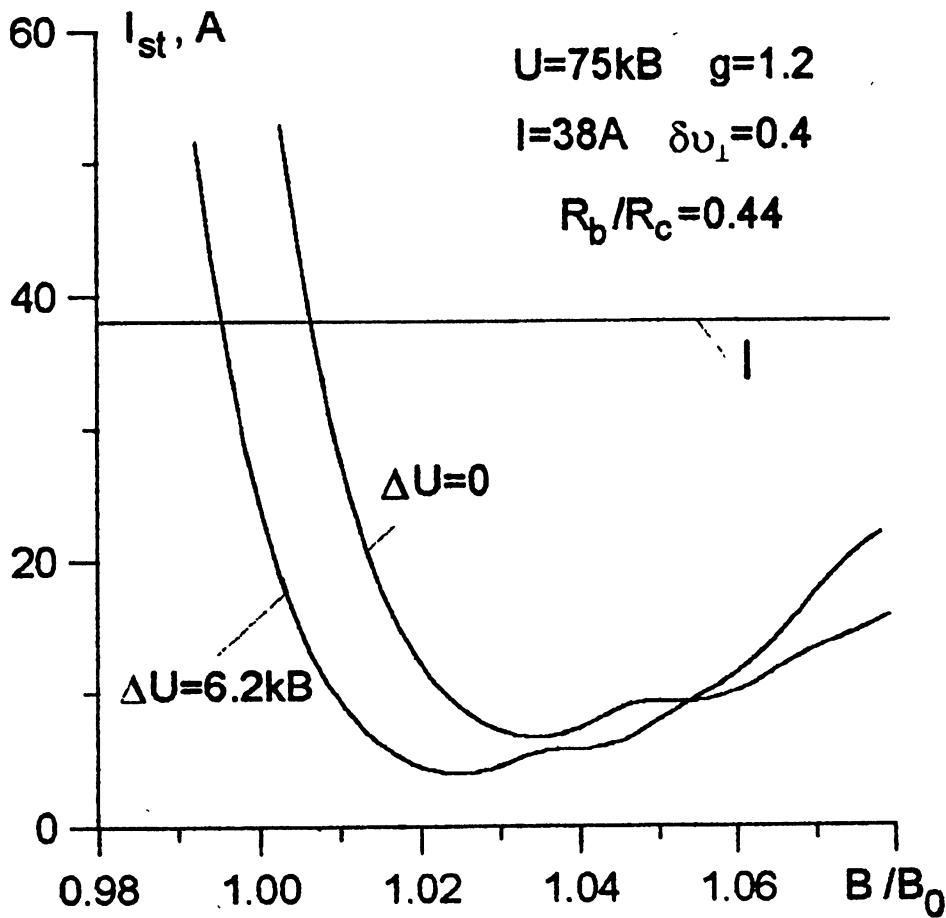


Рис. 3. Зависимость стартового тока  $I_{st}$  от величины статического магнитного поля в резонаторе  $B$ .

#### 4. ИЗМЕНЕНИЕ ЗОНЫ ГЕНЕРАЦИИ

Третьим эффектом является смещение настроенных кривых (зависи-

мостей КПД и выходной мощности от магнитного поля) в сторону меньших магнитных полей, что также обусловлено снижением эффективного потенциала и увеличением времени пролёта. Оптимальные значения угла пролёта, таким образом, при наличии провисания соответствуют меньшим магнитным полям и достижимые значения КПД могут несколько измениться. На рис. 4 приведены расчётные настроочные кривые для типичного гиротрона при наличии и отсутствии провисания.

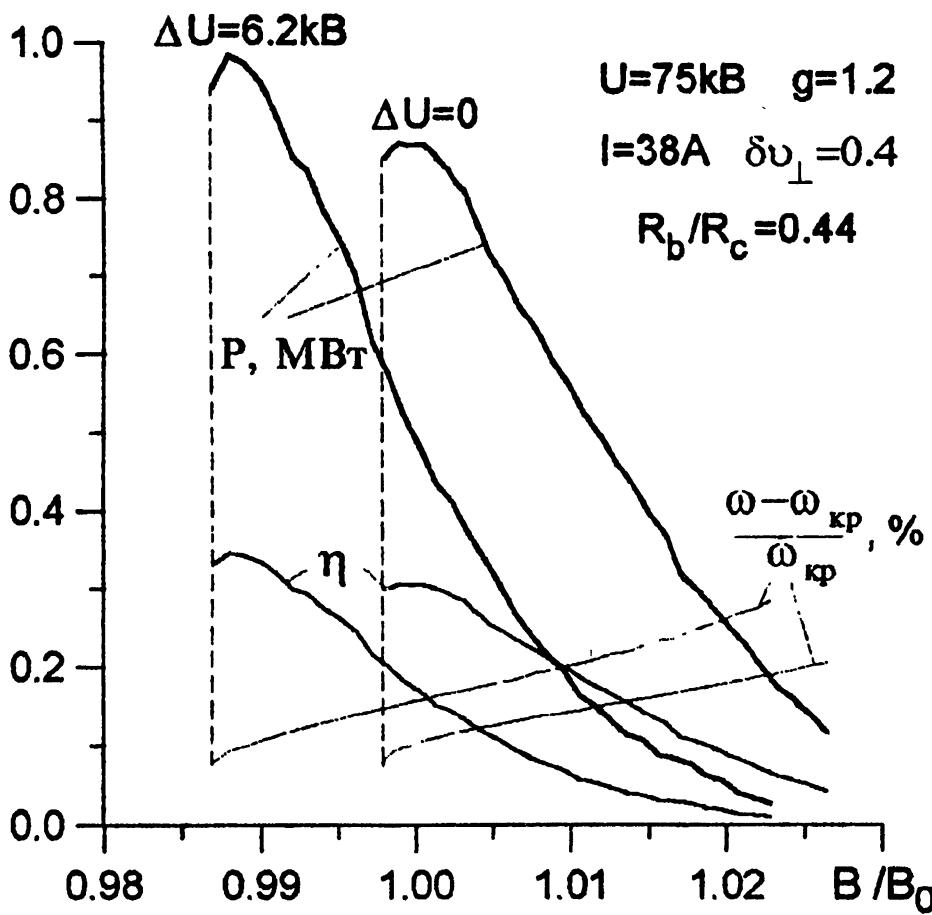


Рис. 4. Зависимости КПД, выходной мощности и расстройки рабочей и критической частот  $\omega - \omega_{kp}$  от величины магнитного поля в резонаторе  $B$ .

Отметим, что в длинноимпульсных и непрерывных гиротронах за время порядка 100 мс происходит практически полная компенсация пространственного заряда пучка положительными ионами, и это соответствует отсутствию провисания [13]. Таким образом, оптимальное магнитное поле настроенных кривых при наличии провисания  $B_1$  соответствует

короткоимпульсному режиму ( $T_i \ll 100$  мс), а при отсутствии провисания  $B_0$  — непрерывному режиму ( $T_i \gg 100$  мс). Значения магнитного поля, меньшие  $B_0$ , приводят к ограничению длительности импульса. При длительностях  $T_i \sim 100$  мс постоянное магнитное поле не может быть установлено на оптимальное значение и в этих режимах достижимый КПД обычно меньше, чем в короткоимпульсном или длинноимпульсном, что соответствует хорошо известным эмпирическим фактам. Отметим, что в процессе ионной компенсации происходит не только изменение выходной мощности, но и снижение частоты генерации (электронная перестройка, также показанная на рис. 4).

Очевидно, что эффекты провисания и ионной компенсации могут существенно повлиять на процессы межмодового взаимодействия, которые зависят от параметров электронного пучка, расстройки магнитного поля и сценария включения, и это требует их корректного учёта при численном моделировании процессов взаимодействия мод.

Аналогичные расчёты, проведённые для случая коаксиальных резонаторов, показали, что в них эффект провисания существенно ослаблен.

В свете вышеизложенного видно, что назрела необходимость разработки методики экспериментального определения влияния провисания на параметры ВЭП, проведения экспериментов и их сопоставления с расчётными данными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Andronov A. A., Flyagin V. A., Gaponov A. V. et al. //Infrared Physics, 1978. V. 18. № 6. P. 385.
2. Flyagin V. A., Goldenberg A. L., Zapevalov V. E. //Conf. Digest, 18 Int. Conf. on IR and MM Waves, 6–10 September, University of Essex Colchester, United Kingdom, 1993. P. 581.
3. Denisov G. G., Flyagin V. A., Zapevalov V. E. //Conf. Proc., 20 Int. Conf. on IR and MM Waves, Orlando, USA, 1995. P. 197.
4. Drobot A. T., Kim K. //Int. J. Electronics, 1981. V. 51. P. 351.
5. Цимлинг III. Е. //Радиотехника и электроника, 1990. Т. 35. № 6. С. 1284.
6. Tsimring Sh. E. //Int. J. of IR and MM Waves, 1993. V.14. № 4. P. 817.
7. Запевалов В. Е. и др. //Электронная промышленность, 1991. № 6. С. 71.
8. Нусинович Г. С., Эрм Р. Э. //Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, 1972. № 8. С. 55.
9. Кураев А. А. Теория и оптимизация электронных приборов СВЧ. — Минск: Наука и техника, 1979. — 336 с.
10. Lygin V. K. //Int. J. of IR and MM Waves, 1995. V. 16. № 2. P. 363.

11. Fix A. Sh. et al. //Int. J. Electronics, 1984. V. 57. № 6. P. 821.
12. Бородачёва Т. В., Гольденберг А. Л., Мануилов В. Н. //Гиротроны. — Горький: ИПФ АН СССР, 1989. С. 161.
13. Варенцов В. А., Цимринг III. Е. //ЖТФ, 1983. Т. 53. № 2. С. 264.

Институт прикладной физики  
РАН,  
Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
21 ноября 1996 г.

**AN EFFECT OF THE BEAM POTENTIAL DEFLECTION IN  
GYROTRONS**

*V. E. Zapevalov, M. A. Moiseev*

An effect of the electron beam potential deflection in powerful gyrotrons with overdimensional open resonators is theoretically investigated. The power limitations and the efficiency of the gyrotron have been defined, which are specified by the beam potential deflection in the resonator. We have considered the variation of self-excitation conditions, the efficiency and optimal parameters at the ion compensation of the spatial charge of an electron beam in short-pulse and long-pulse schedules of generation.

УДК 551.32

# МИКРОВОЛНОВАЯ РАДИОМЕТРИЯ СНЕЖНОГО ПОКРОВА И МЁРЗЛОЙ ПОЧВЫ НА ЧАСТОТЕ 3,95 ГГц

*Д. А. Боярский*

Рассмотрено влияние стратиграфии снежного покрова на его радио-яркостную температуру в сантиметровой части СВЧ диапазона. Показано, что наблюдаемые угловые распределения радиояркостной температуры связаны со структурными изменениями снежного покрова. Обсуждена возможность создания методики дистанционного контроля состояния глубинных слоёв снежного покрова для оценки лавинной опасности в горах.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Методы микроволнового дистанционного зондирования успешно применяются для исследования гидрологии снежного покрова. Наиболее информативными для решения задачи дистанционного зондирования снежного покрова являются диапазоны сантиметровых и миллиметровых волн, т.к. длина волны оказывается сравнимой либо с размером частиц, либо с неоднородностями их концентрации.

Снежный покров имеет слоистое строение, которое обусловлено как внешними причинами — прерывистостью снегонакопления, метеорологическими условиями, так и процессами внутри снежной толщи. Физические свойства снежного покрова находятся в прямой зависимости от его слоистой структуры [1]. Структура слоёв снега меняется от года к году и в пространстве, а каждый слой видоизменяется в процессе пространственно-временной эволюции под действием внешних и внутренних факторов. Проводимые в настоящее время измерения радиофизических параметров снежного покрова, включающие съёмку со спутников и самолётов, показывают, что радиояркостная температура сильно зависит от физических параметров снега: плотности, толщины, влажности, размера ледяных зёрен и дисперсии их размеров. Характер этой зависимости определяется стратиграфией снежной толщи [2, 3].

С точки зрения электродинамики сухой снежный покров является сильно рассеивающей средой, состоящей из дискретных плотноупакованных рассеивателей — зёрен льда. Микроволновое излучение, проходящее сквозь снежную толщу, поглощается и рассеивается снежными

кристаллами. Преобладание эффектов рассеяния или поглощения электромагнитного излучения в снежном покрове определяется длиной волны излучения и размерами ледяных кристаллов, образующих снежный покров.

Экспериментальные исследования и расчёты по теории Ми показывают, что эффекты рассеяния излучения перестают преобладать над потерями на частоте ниже 14 ГГц (при размерах зёрен льда 1 мм) [4, 5]. В [6] отмечается, что на частоте 18 ГГц необходимо учитывать рассеяние в снежном покрове, а в двухсантиметровом диапазоне общие потери в снегу определяются поглощением, которое меньше чем во льду. Рассеяние по расчётам, выполненным в [7], практически исчезает для снежного покрова с размерами зёрен: 0,5 мм — на частоте 20 ГГц, 1 мм — на частоте 10 ГГц, 2 мм — на частоте 4 ГГц. Таким образом, считается [4–8], что на частотах ниже 10 ГГц параметры снежного покрова не оказывают значительного влияния на его радиояркостную температуру, поскольку как поглощение, так и рассеяние в снегу на этих частотах незначительно.

Отсутствие рассеяния и слабое поглощение электромагнитного излучения на частотах ниже 10 ГГц обуславливает применение в многочастотных радиометрических комплексах длинноволновых каналов СВЧ диапазона, в основном, для контроля за состоянием подстилающей поверхности. Однако, в работе [9] было замечено понижение радиояркостной температуры снежного покрова на частоте 3,95 ГГц примерно с середины снежного сезона. В этой работе высказано предположение, что на распространение электромагнитного излучения длинноволновой части СВЧ диапазона оказало влияние изменение структуры приземного слоя снежного покрова, а именно, образование слоя глубинной изморози, состоящей из вертикальных сростков ледяных кристаллов.

Данная работа посвящена рассмотрению результатов наземного эксперимента по определению радиояркостной температуры снежного покрова на частоте 3,95 ГГц в течение двух снежных сезонов 1987–1988 и 1988–1989 гг. Контактные измерения физических параметров и стратиграфии снежного покрова, а также состояния почвы под снегом проводились одновременно с радиометрией. Сопоставление полученных результатов как радиометрических, так и контактных измерений позволило рассмотреть причины изменения радиояркостной температуры, которые связаны с изменением структуры снега в течение снежного сезона.

## 2. НАЗЕМНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

**Тестовая площадка и радиометр.** Экспериментальные исследования излучательной способности снежного покрова, лежащего на поверхности земли, проводились на радиометрическом полигоне в течение двух зим 1987–1988 и 1988–1989 гг. Радиометрический полигон находился на

высоте 2297 м над уровнем моря в районе Большого Кавказа. Тестовая площадка выбиралась таким образом, чтобы она была по возможности плоской или же с плавными изменениями рельефа и на ней отсутствовали камни, а также крупная растительность (деревья, кустарники). При выборе тестовой площадки было соблюдено условие свободного горизонта, что позволило корректно провести измерения угловых зависимостей излучения снега при настильных углах зондирования. Радиометр размещался на высоте 5 м над землей на поворотном устройстве, позволяющем в ходе эксперимента изменять угол места и азимутальный угол. Радиометр имел следующие основные характеристики: центральная частота — 3,95 ГГц, поляризация — вертикальная, ширина полосы пропускания — 0,5 ГГц, чувствительность ( $\tau = 1$  с) — 0,2 К, ширина диаграммы направленности антенны по уровню половинной мощности —  $10^\circ$ . Для проведения калибровки радиометра в качестве эталонных источников излучения использовались: зенит, металлический лист и чёрное тело. Металлический лист и чёрное тело располагались в дальней зоне антенны и их угловой размер был больше углового размера главного лепестка диаграммы направленности антенны.

**Экспериментальные результаты.** Измерения собственного излучения сухого снежного покрова проводились в вечерние часы, после захода Солнца. Как показали исследования [10], в этом случае снег успевает остыть и его влажность становится пренебрежимо малой.

Программа измерений включала: ежедневное определение радиояркостной температуры ( $T_y$ ) снежного покрова под различными углами визирования, температуры и влажности воздуха, а в течение измерительного сезона 1988–1989 гг. — физической температуры поверхности почвы под снегом. Контроль физических параметров снежного покрова производился одновременно с радиометрическими измерениями с помощью гляциологических контактных методов и включал в себя: исследование стратиграфии снега, послойное определение плотности, температуры, влажности и параметров структуры снега (среднего диаметра зёрен, дисперсию распределения зёрен по размерам).

Две серии данных были получены в ходе эксперимента: с 27 декабря 1987 г. по 2 апреля 1988 г. измерения проводились в диапазоне углов от надира 40–90 градусов с интервалом 10 градусов и с 9 января по 9 апреля 1989 г. — в диапазоне углов 50–85 градусов с интервалом 5 градусов. Зависимости радиояркостной температуры от угла наблюдения приведены на рис. 1 и 2. Как видно из рисунков, в начале измерительного сезона угловые зависимости имеют вид, соответствующий френелевским коэффициентам отражения, когда угол Брюстера ярко выражен (см. зависимости 1, 2 (рис. 1) и зависимости 1–3 (рис. 2)). Сравнение угловых зависимостей радиояркостной температуры, полученных, например, 20 января, 8 и 25 февраля 1989 г. (кривые 1–3, рис. 2), показывает, что величина угла

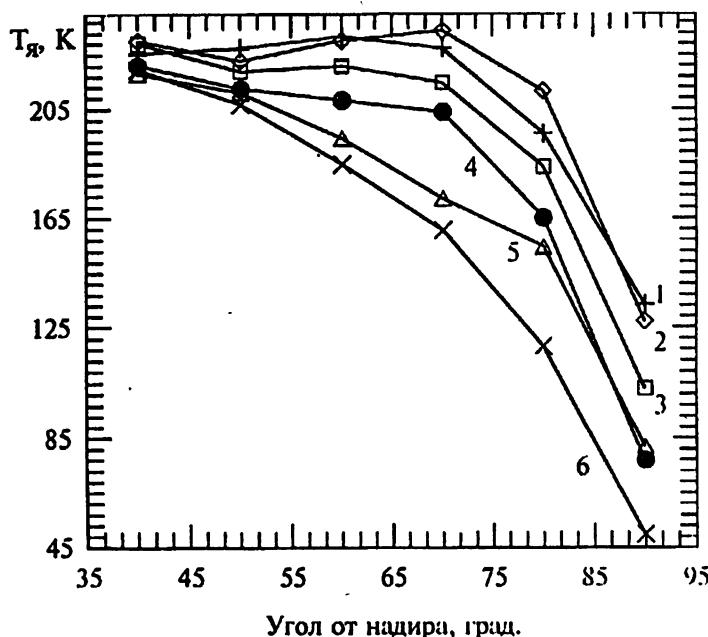


Рис. 1. Угловые зависимости радиояркостной температуры для снежного сезона 1987–1988 гг. Даты измерений: 1 — 27.11.87, 2 — 14.01.88, 3 — 17.02.88, 4 — 24.02.88, 5 — 10.03.88, 6 — 01.04.88.

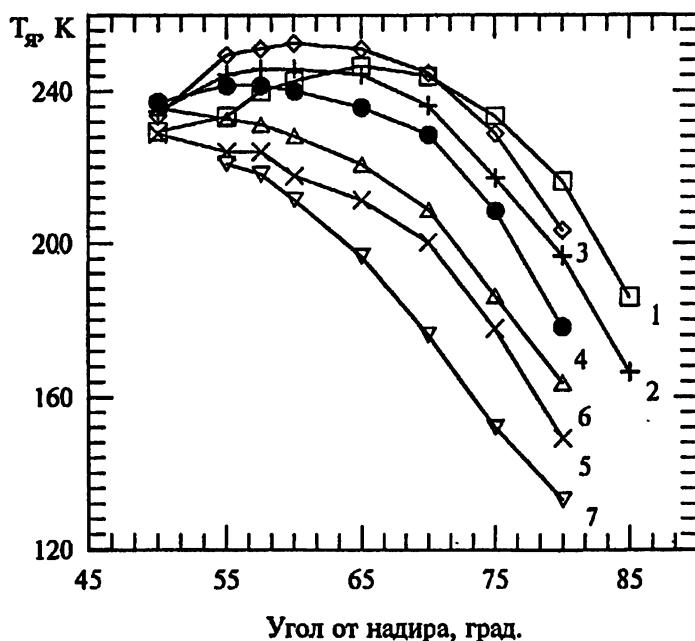


Рис. 2. Угловые зависимости радиояркостной температуры для снежного сезона 1988–1989 гг. Даты измерений: 1 — 20.01.89, 2 — 08.02.89, 3 — 25.02.89, 4 — 02.03.89, 5 — 13.03.89, 6 — 20.03.89, 7 — 08.04.89.

Брюстера различна для разных дней проведения измерений. Наблюдения показали, что его величина зависит от температуры почвы под снегом. Экспериментально определённые значения угла Брюстера в зависимости от физической температуры поверхности почвы показаны на рис. 3 одновременно с аппроксимирующей кривой, которая имеет вид:

$$f(t) = a + b \exp(ct),$$

где  $t$  — физическая температура поверхности почвы в градусах Цельсия,  $a = 58,89$ ,  $b = 12,03$ ,  $c = 0,98$ . Даты проведения измерений указаны на рис. 3.



Рис. 3. Значение угла Брюстера в зависимости от физической температуры поверхности почвы под снегом.

Известно, что величина угла Брюстера определяется диэлектрической проницаемостью вещества. Диэлектрическая проницаемость почвы при отрицательных температурах имеет температурную зависимость [11], поскольку не вся вода в почве замерзает даже при температурах  $-40 \div -50^{\circ}\text{C}$ . Таким образом, снижение физической температуры почвы приводит к уменьшению количества жидкой влаги, содержащейся в ней при отрицательных температурах, и, следовательно, уменьшению её диэлектрической проницаемости и угла Брюстера.

Сопоставление угловых зависимостей  $T_x$  за время проведения измерений показывает, что в течение снежного сезона угол Брюстера станов-

вится менее выраженным (кривая 3 рис. 1 и кривая 4 рис. 2), а в конце измерительного сезона угловая зависимость радиояркостной температуры имеет слаженный характер (кривые 5, 6 рис. 1 и кривые 5–7 рис. 2).

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ

Для каждого дня измерений мы определили разность между  $T_a$  на разных углах измерений:  $\Delta T(n) = T_n(\theta_i) - T_n(\theta_j)$ , где  $n$  — номер дня измерений,  $\theta_i$ ,  $\theta_j$  — углы наблюдения. Усреднённые по трём последовательным дням измерений изменения разностей радиояркостных температур  $\Delta T = \sum \Delta T(n)/3$  в течение сезона показаны на рис. 4, 5 (значения  $\theta_i$ ,  $\theta_j$  приведены в подписях к рисункам). Как видно из рис. 4, 5, для обоих сезонов измерений ход зависимостей  $\Delta T$  с некоторого момента времени изменяется. Разности  $\Delta T_{1,2}$ ,  $\Delta T_{5,6}$  становятся отрицательными, а разности  $\Delta T_{3,4}$ ,  $\Delta T_{7,8,9}$  увеличиваются. Изменение хода зависимостей  $\Delta T$  (рис. 4, 5) совпадает со слаживанием угла Брюстера на угловых зависимостях яркостной температуры (рис. 1, 2). Ясно, что изменение угловых зависимостей  $T_a$  произошло в результате изменения состояния снежного покрова. Для того, чтобы выяснить причину изменения угловых зависимостей  $T_a$ , рассмотрим развитие структуры снежного покрова в течении сезона (рис. 6, 7). На этих рисунках для структуры снежного покрова приняты следующие обозначения: звёздочки — свежевыпавший снег, точки — мелковернистый, незакрашенные кружки — средневернистый, закрашенные кружки — крупновернистый, треугольники — глубинная изморозь, — а также приведено изменение температур воздуха и поверхности почвы под снегом. Сравнение зависимости  $\Delta T$  и сезонного развития снежного покрова показывает, что слаживание зависимости радиояркостной температуры от угла визирования совпадает с появлением слоя глубинной изморози.

Глубинная изморозь представляет собой кристаллы, образующиеся в завершающей стадии конструктивного метаморфизма [12]. Глубинная изморозь может встречаться во всех регионах земли, где формируется снежный покров, который существует достаточно долго — до достижения этапа конструктивного метаморфизма. В целом, при увеличении континентальности климата глубинная изморозь развивается быстрее и её горизонты в снежной толще более мощные. Размеры кристаллов глубинной изморози варьируют от 0,8 мм до 6–7 мм. По мере перекристаллизации снежной толщи в ней развивается вертикальная предпочтительная ориентировка главных осей кристаллов. Вертикальные сростки ледяных частиц придают снежному разрезу характерную “волокнистую” текстуру [12].

Принимаемое радиометром излучение состоит из трёх компонент: излучение земли, прошедшее сквозь снежный покров, отражённое излучение

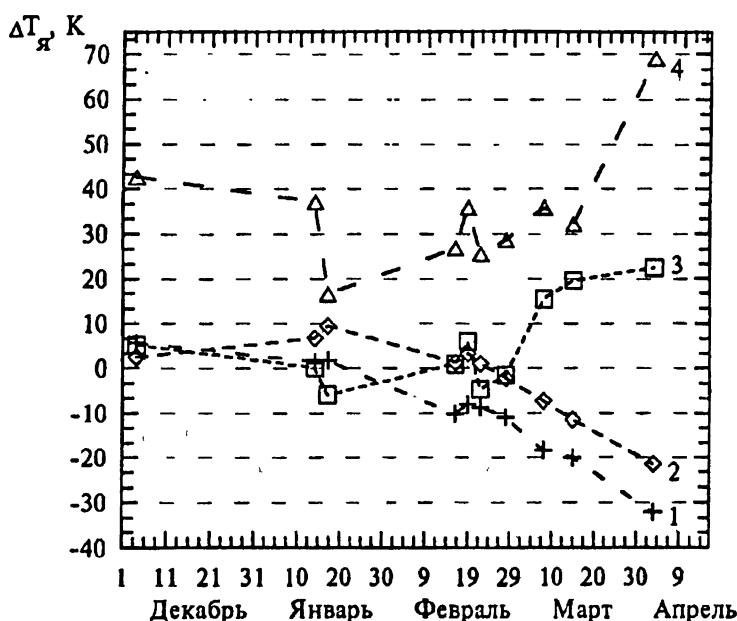


Рис. 4. Разность радиояркостных температур на разных углах измерений для снежного сезона 1987–1988 гг. Номера кривых соответствуют следующим разностям: 1 —  $\Delta T = T_{я}(60^\circ) - T_{я}(40^\circ)$ , 2 —  $\Delta T = T_{я}(60^\circ) - T_{я}(50^\circ)$ , 3 —  $\Delta T = T_{я}(60^\circ) - T_{я}(70^\circ)$ , 4 —  $\Delta T = T_{я}(60^\circ) - T_{я}(80^\circ)$ .

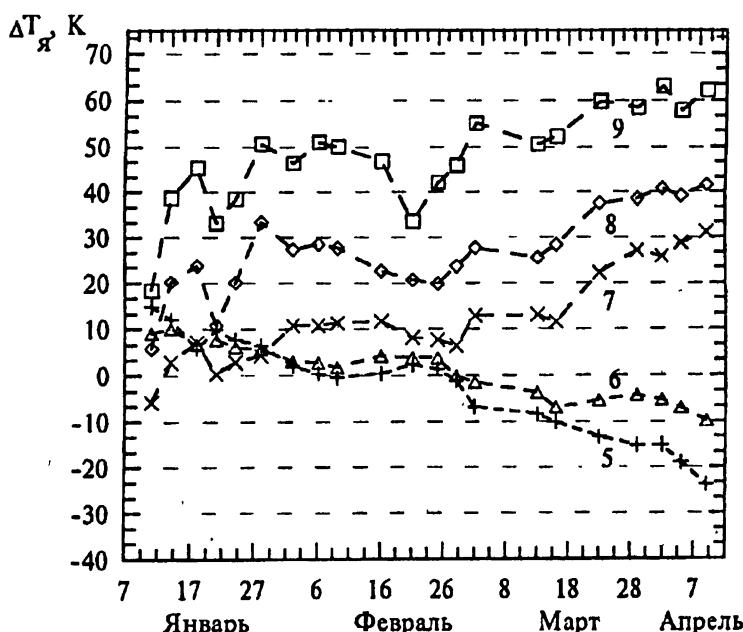


Рис. 5. Разность радиояркостных температур на разных углах измерений для снежного сезона 1988–1989 гг. Номера кривых соответствуют следующим разностям: 5 —  $\Delta T = T_{я}(65^\circ) - T_{я}(55^\circ)$ , 6 —  $\Delta T = T_{я}(60^\circ) - T_{я}(55^\circ)$ , 7 —  $\Delta T = T_{я}(60^\circ) - T_{я}(70^\circ)$ , 8 —  $\Delta T = T_{я}(65^\circ) - T_{я}(75^\circ)$ . 9 —  $\Delta T = T_{я}(65^\circ) - T_{я}(80^\circ)$ .

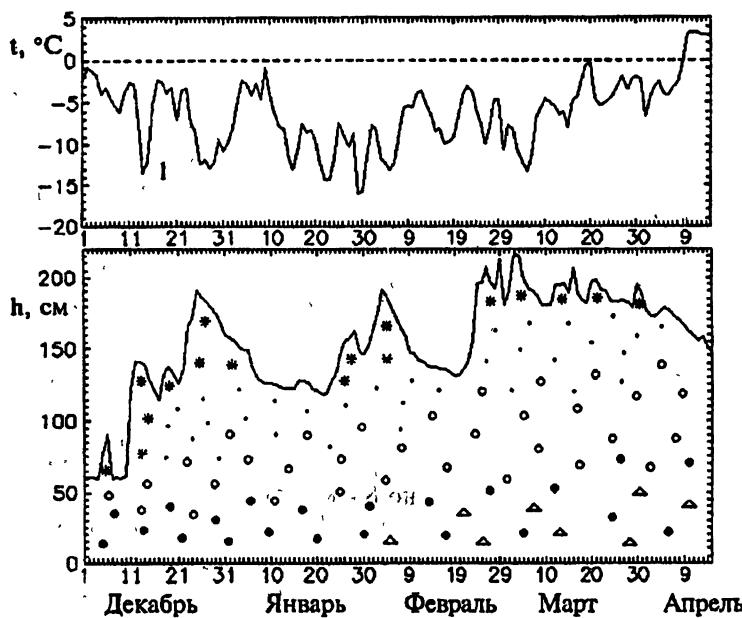


Рис. 6. Развитие снежного покрова в течение зимы 1987–1988 гг. Кривая 1 — изменение температуры воздуха.

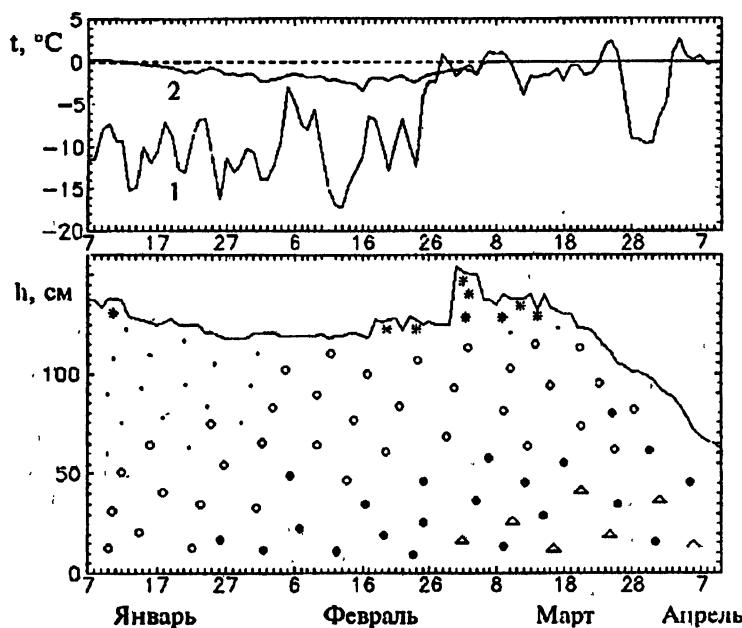


Рис. 7. Развитие снежного покрова в течение зимы 1988–1989 гг. Кривая 1 — изменение температуры воздуха, 2 — температура поверхности почвы под снегом.

неба и собственное излучение снежного покрова. Микроволновое излучение, проходящее сквозь снежную толщу, поглощается и рассеивается снежными кристаллами. При отсутствии слоя глубинной изморози излучение на частоте 3,95 ГГц определяется только излучением земли, т.к. снег является практически прозрачным в этом диапазоне. При появлении слоя глубинной изморози происходит рассеяние излучения на вертикальных сростках ледяных кристаллов. Это приводит к изменению угловых зависимостей радиоакустической температуры.

Отметим, что в слоях глубинной изморози при развитии снежных форм образуется так называемый ослабленный горизонт, по которому возможен сход лавин, т.к. ледяная решётка снега становится более хрупкой и менее пластичной, и вероятность разрывных деформаций при нагрузках резко возрастает [13]. При разрыве связей и разрушении кристаллов нарушается связь между горизонтами снега, что приводит к сходу лавин. Например, на Тянь-Шане 84% лавин сходят по контакту "эрелой" глубинной изморози с вышележащими слоями — так называемые "лавины из снежной доски" [14]. Обнаруженное влияние слоя глубинной изморози на угловые зависимости радиоакустической температуры на частоте 3,95 ГГц позволяет вести дистанционный контроль состояния глубинных слоёв снежного покрова с целью оценки лавинной опасности в горах.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возникающая на стадии конструктивного метаморфизма структура приземного слоя снежного покрова оказывает существенное влияние на распространение электромагнитного излучения длинноволновой части СВЧ диапазона. Появление слоя глубинной изморози, состоящего из вертикальных сростков ледяных кристаллов, приводит к сглаживанию зависимости радиоакустической температуры от угла визирования. На основе обнаруженного влияния глубинной изморози на угловые зависимости радиоакустической температуры на частоте 3,95 ГГц возможно создание методики дистанционного контроля состояния глубинных слоёв снежного покрова для оценки лавинной опасности в горах.

Автор благодарит Мировского В.Г. за организацию эксперимента, Шамбу А.Ш. за создание радиометра, Дмитриева В.В. за участие в эксперименте (Московский педагогический университет). Сесиашвили Л.Д. (Тбилисский гидрометеорологический институт) обеспечил контроль физических параметров снежного покрова, Тихонов В.В. помогал при обработке данных.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Colbeck S. C. // Rev. Geophys., 1991. V. 21. № 1. P. 81.

2. Masahito S., Tadashi S. M. //Proc. NIPR Symp. Polar Meteorol. and Glaciol., 1991. № 4. P. 132.
3. Boyarskii D. A., Dmitriev V. V., Etkin V. S. //J. Electromagn. Waves and Appl., 1993. V. 7. № 7. P. 959.
4. Hallikainen M. T. //Proc. of IGARSS'85, 1985. V. 2. P. 848.
5. Ulaby F. T., Moore R. K., Fung A. K. Microwave Remote Sensing: Active and Passive. — Dedham, MA: Artech House, 1985. P. 456.
6. Hallikainen M. T. //Proc. of IGARSS'82, 1982. V. 2. P. 821.
7. Tiuri M., Schultz H. //10-th Eur. Microwave Conf., Warszawa, 1980. p. 574.
8. Jaaskelainen V., Hallikainen M. T. //Proc. of IGARSS'91, 1991. V. 4. P. 2323.
9. Дмитриев В. В. Влияние структуры снежного покрова на его излучательные характеристики в СВЧ диапазоне. //Дис. канд. физ. - мат. наук. — М.: МПГУ. 1990. 240 с.
10. Гершензон В. Е., Глотов А. А., Ерастова Н. Б. //Исследования Земли из космоса, 1988. № 4. С. 84.
11. Hallikainen M. T., Ulaby F. T., Dobson M. C., El-Rayes M. A., Lin-Kun Wu. //IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, 1985. V. 23. P. 25.
12. Божинский А. Н., Ловев К. С. Основы лавиноведения. — Л.: Гидрометеоиздат, 1987. С. 280.
13. Коломыц Э. Г. Структура снега и ладшафтная индикация. — М.: Наука, 1976. С. 230.
14. Зябкин В. В. Гляциология Ср. Азии. Лавины. — Л.: Гидрометеоиздат. 1974. С. 126.

Институт космических  
исследований РАН, Москва,  
Россия

Поступила в редакцию  
15 января 1997 г.

## PASSIVE MICROWAVE OBSERVATIONS OF SNOW AND FROZEN SOIL AT 3,95 GHz

*D. A. Boyarskii*

Snow stratigraphy influence on the angular dependencies of the brightness temperature at 3,95 GHz is discussed. The structure of snow cover near-earth layer formed via constructive metamorphism significantly affects the emissivity at low microwave frequencies. The appearance of layer of depth-hoar consisted of vertical cohesion-like structure of ice crystals leads to smoothing of angular dependence of the brightness temperature. This fact can provide a base for remote sensing techniques applicable to bottom snow layers with the aim of avalanche forecast.