

# ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

## РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XL N 3

Нижний Новгород

1997

### С о д е р ж а н и е

- Малыкин Г. Б.** Применение сферы Пуанкаре в поляризационной оптике, классической и квантовой механике. Обзор ..... 265
- Бахметьева Н. В., Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Бубукина В. Н., Игнатьев Ю. А.** Исследование волновых движений в нижней ионосфере методом резонансного рассеяния радиоволн на искусственных периодических неоднородностях ..... 308
- Выборнов Ф. И., Митякова Э. Е., Рахлин А. В.** Особенности поведения индекса среднеширотного F-рассеяния ..... 322
- Белашов В. Ю., Тюнина С. Г.** Качественный анализ и асимптотики решений обобщённых уравнений КдВ-класса ..... 328
- Шипов Н. В.** Рентгеновское резонансное переходное излучение в условиях трёхволновой дифракции ..... 345
- Гайкович К. П., Троицкий Р. В.** Динамика тепло- и массопереноса через поверхность вода-воздух по измерениям теплового радиоизлучения на частоте 60 ГГц ..... 351
- Браже Р. А.** Внутренние волны свободных носителей заряда в полупроводниках ..... 370
- Метелёв С. А., Шишкин Ю. В.** Оптимальный пространственный разделитель сигналов и помех в каналах радиосвязи. 1. Численное моделирование ..... 378

УДК 535.2; 535.854

# ПРИМЕНЕНИЕ СФЕРЫ ПУАНКАРЕ В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ, КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ.

## ОБЗОР

*Г. Б. Малыкин*

Метод сферы Пуанкаре, предложенный Анри Пуанкаре в 1891–1892 гг. является удобным способом наглядного изображения поляризованного света. Этот метод является графическим: каждая точка на сфере соответствует определённому состоянию поляризации.

Метод сферы Пуанкаре помимо наглядного графического представления поляризованного света, позволяет кратчайшим путём решать проблемы, возникающие при использовании набора фазовых пластинок или комбинации из фазовых пластинок и идеальных однородных поляризаторов.

В последнее время, в связи с появившейся потребностью вычисления геометрической фазы (которую часто именуют фазой Берри), в поляризационной оптике, квантовой и классической механике интерес к применению сферы Пуанкаре резко возрос — она позволяет просто и наглядно проводить эти вычисления через телесный угол, опирающийся на замкнутую кривую на сфере Пуанкаре, которая соответствует изменению состояния поляризации света или изменению состояния спина элементарной частицы, а применительно к системам в классической механике — её ориентации в пространстве.

В обзоре проводится рассмотрение работ, посвящённых данному кругу вопросов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Метод сферы Пуанкаре, предложенный Анри Пуанкаре в 1891–1892 годах [1], является удобным способом изображения поляризованного света и даёт возможность предсказать: как любое поляризационное устройство — фазовая пластинка или поляризатор — будет изменять состояние поляризации света. Этот метод является графическим: каждая точка на сфере (см. рис. 1) соответствует определённому состоянию поляризации. Первоначально Пуанкаре предложил отображать состояние поляризации в виде точки на комплексной плоскости [1], т.е. использовал двумерную модель, а затем перешёл к использованию сферы — трёхмерной модели. Метод сферы Пуанкаре применим для полностью поляризованного света, но в некоторых случаях его удаётся использовать и для неп полностью поляризованного света.

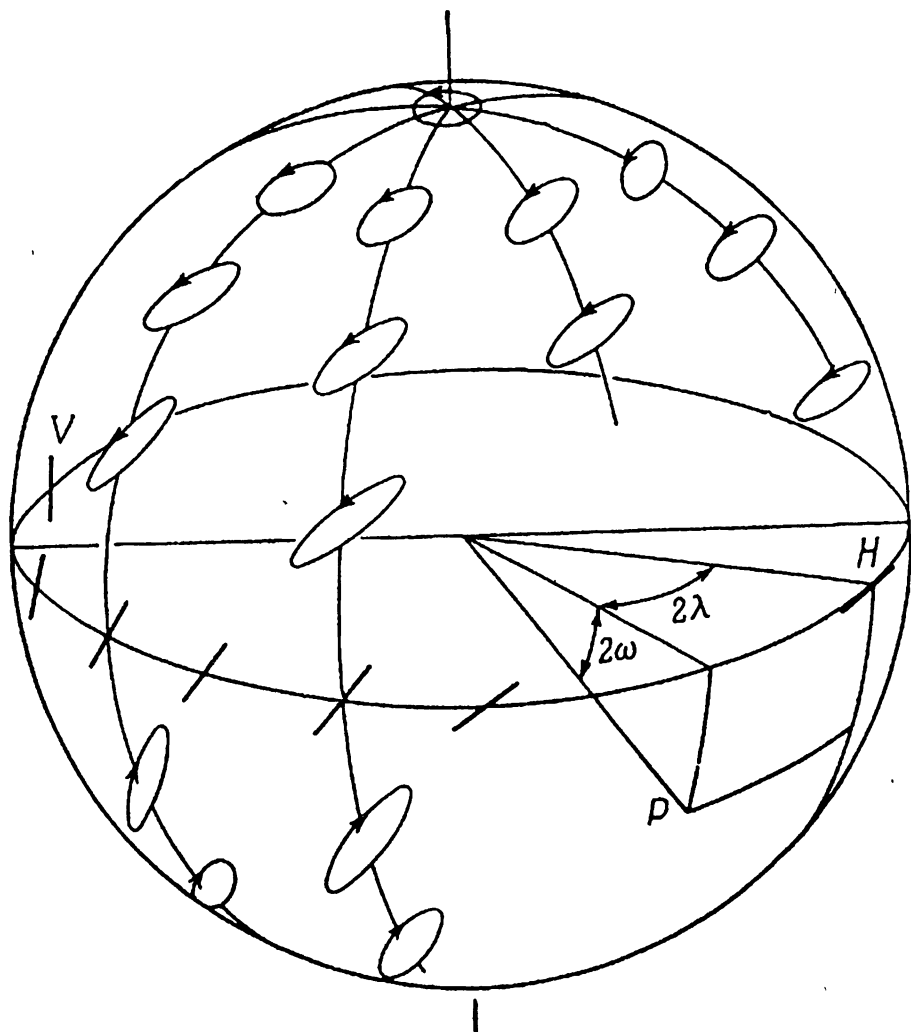


Рис. 1. Расположение различных форм поляризации на сфере Пуанкаре. Точка  $H$  соответствует линейной поляризации с горизонтальным азимутом, точка  $V$  — с вертикальным азимутом. Произвольная точка  $P$  на сфере Пуанкаре задаётся с помощью двух углов — долготы  $2\lambda$  и широты  $2\omega$ .

Подробное описание метода сферы Пуанкаре можно найти в ряде монографий, посвящённых поляризационной оптике [2–6], а также в обширной статье по кристаллооптике в немецкой физической энциклопедии [7]. Вместе с тем, в современных учебниках по оптике, насколько нам известно, этот вопрос не рассматривается. В отечественных физических энциклопедиях и физических энциклопедических словарях [8–11] описание сферы Пуанкаре не приводится, и только в последнем издании [11] имеется лишь краткое упоминание сферы Пуанкаре в статье [12], в контексте её связи через стереографическое проекционное преобразование с комплексной плоскостью.

Что касается метода комплексной плоскости, то его подробное описа-

ние можно найти в монографиях [4–5], в работе Джеррарда [13], а также в ряде работ Аззама и Башары [14–16]. Ранее метод комплексной плоскости использовался в работах Гурвица и Джонса [17] и Бокштейна [18]. Отметим, что метод комплексной плоскости не нашёл широкого применения и далее он рассматриваться не будет.

Метод сферы Пуанкаре помимо наглядного графического представления поляризованного света позволяет кратчайшим путём решать проблемы, возникающие при использовании набора фазовых пластинок или комбинации фазовых пластинок и идеальных однородных поляризаторов. Пользуясь представлением в виде сферы, можно быстро качественно, а при необходимости и количественно решить задачу, с трудом поддающуюся решению обычными методами. В последнее время, в связи с появившейся потребностью вычисления геометрической (топологической) фазы (которую часто именуют фазой Берри [19]) в поляризационной оптике, квантовой и классической механике (см. обзоры [20–24]) интерес к применению сферы Пуанкаре резко возрос — она позволяет просто и наглядно вычислять геометрическую фазу через телесный угол, опирающийся на замкнутую кривую на сфере Пуанкаре, которая соответствует изменению состояния поляризации света или изменению состояния спина элементарной частицы [20–24], а применительно к системам в классической механике — её ориентации в пространстве [21–23, 25].

## 2. МЕТОД СФЕРЫ ПУАНКАРЕ

Рассмотрим способ описания состояния поляризации света с помощью сферы Пуанкаре, придерживаясь, в основном, метода изложения [2]. На рис. 1 поясняется смысл различных точек этой сферы. Верхний (“северный”) и нижний (“южный”) полюса представляют соответственно лево- и правоциркулярно поляризованный свет (следует отметить, что в ряде работ и, в частности, в работе Пуанкаре [1], используется обратное определение). Точки на “экваторе” соответствуют линейной поляризации. Все остальные точки обозначают эллиптическую поляризацию. Произвольно выбранная за начало отсчёта на экваторе точка  $H$  соответствует горизонтальной поляризации, диаметрально противоположная точка  $V$  — вертикальной поляризации. Ортогональные формы поляризации изображаются диаметрально противоположными точками. Произвольная точка  $P$  на поверхности сферы Пуанкаре единичного радиуса определяется с помощью долготы ( $2\lambda$ ) и широты ( $2\omega$ ), где  $-180^\circ \leq 2\lambda \leq 180^\circ$  и  $-90^\circ \leq 2\omega \leq 90^\circ$ . Долгота положительна, если она измеряется по часовой стрелке от точки  $H$ , широта положительна, если она измеряется вниз от экватора.

Форму поляризации, определяемую произвольной точкой  $P$ , легко установить — она соответствует эллиптически поляризованному свету

с азимутом  $\lambda$  (относительно горизонтали) и эллиптичностью  $\operatorname{tg}|\omega|$ , направление обхода зависит от знака  $\omega$ : если  $\omega > 0$  имеет место левое вращение, если  $\omega < 0$  — правое вращение вектора электрического поля в данной точке пространства. Очевидно, что различные точки на сфере Пуанкаре соответствуют различным формам поляризации и наоборот — каждая форма поляризации представлена на сфере Пуанкаре одной точкой.

Точка  $P$  может быть представлена и с помощью правой системы декартовых координат  $XYZ$ , изображённой на рис. 2. При единичном радиусе сферы Пуанкаре точка  $P$  имеет следующие координаты:

$$\begin{aligned} X &= \cos 2\omega \cos 2\lambda, \\ Y &= \cos 2\omega \sin 2\lambda, \\ Z &= \sin 2\omega. \end{aligned} \quad (1)$$

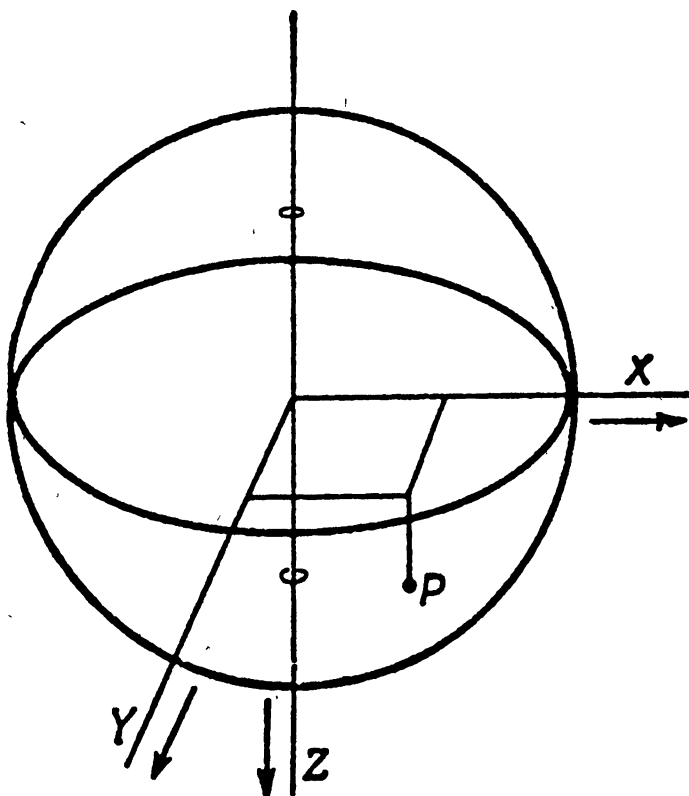


Рис. 2. Оси декартовой системы координат, используемой для определения положения точки  $P$  на сфере Пуанкаре единичного радиуса.

Нетрудно показать [2], что эти координаты, для случая полностью поляризованного света, соответствуют компонентам нормированного век-

тора Стокса:

$$\begin{vmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ A_x^2 - A_y^2 \\ 2A_x A_y \cos \delta \\ 2A_x A_y \sin \delta \end{vmatrix} \quad (2)$$

( $S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ ), где  $A_x, A_y$  — компоненты нормированного вектора Джонса ( $A_x^2 + A_y^2 = 1$ ) [2]:

$$\begin{vmatrix} A_x \\ A_y \cdot e^{i\delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos R \\ \sin R \cdot e^{i\delta} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Компоненты вектора Джонса  $A_x$  и  $A_y$  равны нормированным амплитудам соответствующих компонент вектора электрического поля —  $E_x$  и  $E_y$ , а  $\delta$  — разность фаз между ними,  $R = |\arctg A_y/A_x|$ . Как показано в [2], координаты точки на сфере Пуанкаре следующим образом связаны с параметрами вектора Джонса:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,5 \arctg \left[ (\operatorname{tg} 2R) \cdot (\cos \delta) \right] \\ \omega &= 0,5 \arcsin \left[ (\sin 2R) \cdot |\sin \delta| \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Покажем, насколько просто определять изменение состояния поляризации света, прошедшего одну или несколько фазовых пластинок методом сферы Пуанкаре. В качестве иллюстрации приведём два примера из работы [2].

1. На пути линейно поляризованного под углом  $45^\circ$  (здесь и далее отсчёт углов ведётся от горизонтали) пучка света (точка  $P$  на рис. 3) находится одна четвертьволновая фазовая пластинка, сдвигающая фазу на  $90^\circ$ , азимут быстрой оси которой составляет  $22^\circ,5$  (точка  $R$ ). Осуществим поворот на  $90^\circ$  вокруг радиуса-вектора  $OR$  по часовой стрелке (можно поворачивать сферу вокруг неподвижной точки, можно поворачивать точку на сфере). При этом точка  $P$  опишет дугу  $PP'$  и попадёт в точку  $P'$ , которая и является искомой: она указывает форму поляризации выходящего пучка. Пучок будет левоэллиптически поляризованным, поскольку  $P'$  лежит в верхней полуплоскости. Азимут большой оси эллипса равен  $22^\circ,5$ , так как точка  $P$  лежит на том же меридиане, что и  $R$ , а эллиптичность составляет  $\operatorname{tg}(45^\circ/2) = \operatorname{tg} 22^\circ,5 = 0,1442$ .

2. На пути пучка света с произвольной эллиптической поляризацией (точка  $P_a$  на рис. 4) стоят последовательно три произвольно ориентированных фазовых пластинок с собственным эллиптическим двулучепреломлением; собственным состояниям поляризации света, прошедшего по

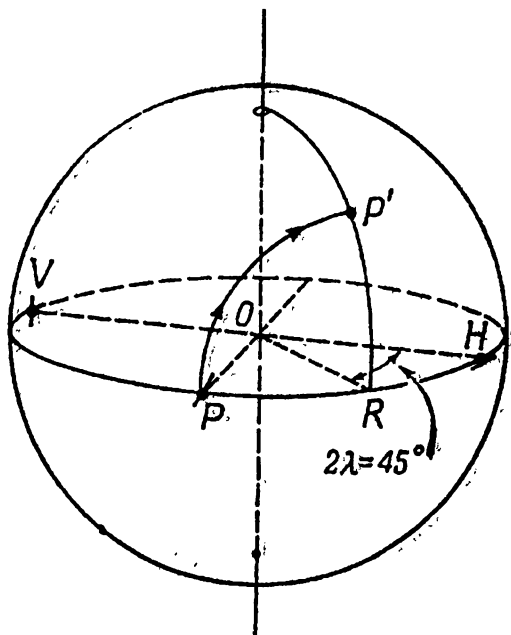


Рис. 3. Применение сферы Пуанкаре для определения действия линейной фазовой четвертьволновой пластинки с направлением быстрой оси, ориентированном под углом  $22^{\circ},5$  к горизонтали (точка  $R$ ), на линейно поляризованный пучок света с азимутом  $45^{\circ}$  (точка  $P$ ).

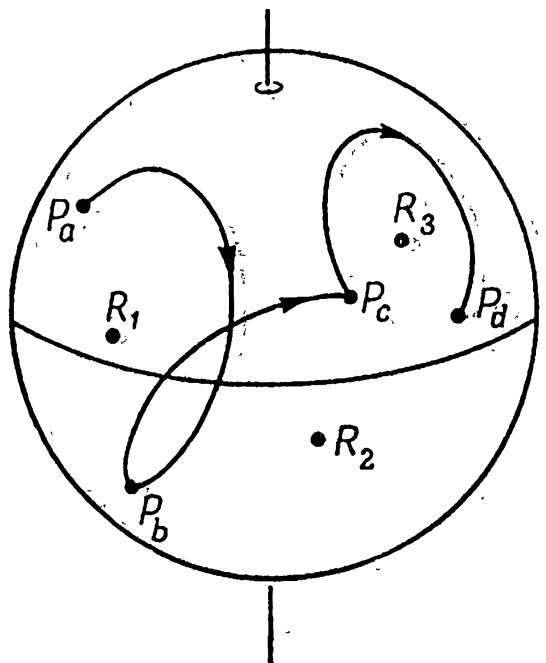


Рис. 4. Применение сферы Пуанкаре для определения действия трёх расположенных последовательно эллиптических фазовых пластинок (точки  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ ) на эллиптически поляризованный свет (точка  $P_a$  — поляризация света на входе,  $P_b$  и  $P_c$  — промежуточные состояния поляризации,  $P_d$  — состояние поляризации на выходе).

их быстрым осям, соответствуют точки  $R_1, R_2, R_3$ . Следует последовательно совершить три поворота вокруг радиусов-векторов  $OR_1, OR_2, OR_3$  (точка  $O$  — центр сферы Пуанкаре — на рис. 4 не показана). Повороты изображаются тремя дугами, конец каждой из которых совпадает с началом следующей. Свойства выходящего пучка  $P_d$  можно определить, не рассматривая свойств промежуточных пучков  $P_b$  и  $P_c$ .

Для точного вычисления формы поляризации выходного пучка можно воспользоваться сеткой Вульфа [18].

Отметим, что метод сферы Пуанкаре весьма подробно рассмотрен в статье [7], которая по объёму и количеству рассматриваемых вопросов фактически является монографией. Практически все вопросы поляризационной оптики рассмотрены в [7] методом сферы Пуанкаре, матричные методы Джонса и Мюллера [2] для вычисления состояния поляризации практически не применяются. Для иллюстрации возможностей метода сферы Пуанкаре приведём здесь их перечень [7].

1. Определение интенсивности света, прошедшего анализатор (поляризатор).
2. Вычисление состояния поляризации света, прошедшего фазовую пластинку с линейным двулучепреломлением.
3. Когерентное сложение двух полностью поляризованных лучей.
4. Вычисление состояния поляризации света после прохождения большого числа фазовых пластинок и поляризаторов.
5. Вычисление состояния поляризации света после прохождения среды с поглощением или дихроизмом, без двулучепреломления.
6. Некогерентное сложение лучей света.
7. Описание частично поляризованного света ( $S_0 < 1$  — длина вектора Стокса тем меньше, чем меньше степень поляризации света).
8. Сложение двух лучей света, состояния поляризации которых неортогональны.
9. Методы получения эллиптической поляризации света.
10. Определение параметров эллипса поляризации света (рассмотрены компенсационные методы Стокса и Мак-Кулага, а также полутеневого метод).
11. Описание действия фазового компенсатора (Бабине, Солейля).
12. Вычисление состояния поляризации и интенсивности света после прохождения вращающегося поляризатора или вращающейся фазовой пластинки.
13. Вычисление состояния поляризации света после прохождения одноосного кристалла.
14. Вычисление состояния поляризации света в среде с циркулярным дихроизмом.
15. Интерференционные явления в кристаллах.



16. Вычисление состояния поляризации света после прохождения через стопу расположенных веером фазовых пластинок (типа фильтра Шольца).

17. Вычисление состояния поляризации света при прохождении света в кристалле в направлении, отличном от направления оптической оси.

18. Вычисление состояния поляризации света в среде при одновременном наличии эффекта Фарадея и линейного двулучепреломления.

19. Метод измерения коэффициента фотоупругости в оптически активной среде.

Отметим, что сфера Пуанкаре полезна не только для решения задач по влиянию фазовых пластинок и поляризаторов на поляризацию света, но и для формулировки этих задач. Многие запутанные проблемы становятся ясными, как только исследователь перейдет к графическому, предельно четкому представлению с помощью сферы Пуанкаре. Конкретные примеры применения сферы Пуанкаре будут рассмотрены в разделах 4 и 5.

### 3. РАННИЕ РАБОТЫ ПО СФЕРЕ ПУАНКАРЕ

Предложенный в 1891–1892 гг. метод сферы Пуанкаре не сразу нашёл применение. Впервые, насколько нам известно, он использовался в учебнике Поккельса по кристаллографии [26], ещё при жизни Пуанкаре. Затем этот метод нашёл применение в работах Чамонта [26, 28], в учебнике по кристаллографии Боуасси [29], в работах Скиннера [30], Беккереля [31, 32], Райта [33], Гриле и Бизе [34], Матью [35], Брюха и Гриве [36], Бьернстла [37–39], Гурвица и Джонса [17], Перрена [40], Бокштейна [18], Дестри и Проте [41], Рамачандрана и Рамасешана [7, 42–44], Джеррарда [13], Уолкера [45], Макмастера [46], Розенберга [47], Панчаратнама [48–57], Кестера [58] и Такасаки [59, 60]. Отметим, что автором [58] была изготовлена трёхмерная модель сферы Пуанкаре на базе школьного глобуса, которая позволяла проводить непосредственные расчёты. После выхода в 1962 г. монографии Шерклиффа [2], в которой приводится систематическое и вместе с тем простое описание метода сферы Пуанкаре, этот метод получил широкое применение. Следует также отметить значение работы [7] в распространении этого метода. В нашей стране его популяризации способствовали работы [18, 47].

Следует отметить, что в первой половине нашего века метод сферы Пуанкаре не рассматривался (за исключением [26, 29]) в монографиях и учебниках по оптике (см., например, [61–66]). Между тем, сравнительно простые матричные методы расчёта состояния поляризации Джонса и Мюллера [2] были созданы в первой половине сороковых годов и метод сферы Пуанкаре был тогда единственным простым расчётным методом.

В [13, 43] приводятся в качестве примера работы некоторых авторов, например, Шивесси [67–69], выполненные в первой половине столетия, в которых использовались в высшей степени громоздкие и утомительные методы расчёта состояния поляризации света, которые могли бы быть существенно упрощены в случае использования метода сферы Пуанкаре. В качестве другого такого примера мы можем указать раннюю работу Цжеррарда [70], опубликованную им на шесть лет раньше его работы [43].

После опубликования [2, 7] ежегодно стало появляться большое число работ по методу сферы Пуанкаре, и полное их перечисление в рамках данного обзора невозможно. Здесь же рассмотрим вначале основные направления в современной поляризационной оптике и, в частности, оптике одномодовых волоконных световодов (ОВС), в которых нашёл применение метод сферы Пуанкаре.

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СФЕРЫ ПУАНКАРЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКИ

##### 4.1. Эволюция состояния поляризации света

Основной задачей поляризационной оптики, для которой был создан метод сферы Пуанкаре [1], является вычисление состояния поляризации света при распространении через различные анизотропные оптические элементы. В самом общем виде этот вопрос рассмотрен в монографиях [2–5, 7] и обзорах [18, 47]. В работах [7, 13, 43, 71–76] метод сферы Пуанкаре использовался для вычисления эволюции состояния поляризации света в анизотропных средах при наличии оптической активности — естественной [7, 13], вызванной эффектом Фарадея [7, 72, 74, 77], и связанной с кручением осей линейного двулучепреломления в жидком кристалле [71] или ОВС [73–75]. Работы [72–75] посвящены изучению эволюции состояния поляризации света в ОВС методом сферы Пуанкаре.

В работах [78, 79] метод сферы Пуанкаре используется для рассмотрения распространения частично поляризованного света через анизотропную среду, которое может сопровождаться или не сопровождаться деполаризацией света. Как было отмечено выше, сфера Пуанкаре используется для описания полностью поляризованного света. Однако, в отдельных случаях сферу Пуанкаре можно использовать и для описания частично поляризованного света [5, 7]. Если свет полностью поляризован, то абсолютная величина нормированного вектора Стокса  $|\vec{S}| = 1$  ( $|\vec{S}| = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = S_0$ ), если имеет место частичная поляризация света, то  $0 < |\vec{S}| < 1$ , если свет полностью деполаризован, то  $|\vec{S}| = 0$ . Направление на сфере Пуанкаре задаётся углами  $2\lambda, 2\omega$  (см. (1)). Таким

образом, если свет полностью поляризован  $|\vec{S}| = 1$ , то и соответствующая сфера Пуанкаре имеет единичный радиус, если  $|\vec{S}| < 1$ , то сфера Пуанкаре имеет радиус меньше 1.

Отметим, что в монографии [5] предлагается и другой способ отображения частично поляризованного света на сфере Пуанкаре — в виде набора точек на сфере Пуанкаре единичного радиуса, каждая из которых соответствует полностью поляризованному свету. Это описание основывается на том, что монохроматический свет всегда полностью поляризован, а полностью деполаризованный свет всегда является немонахроматическим, он состоит из суммы монохроматических составляющих с различными длинами волн, форма поляризации которых различна, — каждой длине волны света соответствует своя точка на сфере Пуанкаре. Таким образом, полностью деполаризованному свету соответствует равномерно окрашенная сфера Пуанкаре. В случае частичной деполаризации света сфера Пуанкаре имеет выделенную область окраски. Такое описание даёт наглядную картину деполаризации немонахроматического света при распространении в среде с тем или иным типом двулучепреломления. Вначале для всех длин волн имеет место одно и то же состояние поляризации света, и на сфере Пуанкаре все соответствующие точки сливаются в одну. По мере распространения света в такой среде для каждой длины волны имеет место своя эволюция состояния поляризации и соответствующие точки вначале двигаются вместе по сфере Пуанкаре, но постепенно расходятся всё больше и больше, и, таким образом, степень поляризации света уменьшается.

В работе [80] рассмотрены вопросы теории групп и поляризационной алгебры. Так, в [80] показано, что поляризационная алгебра базируется на специальных унитарных группах  $SU(2)$  и  $SU(4)$ , а также гомоморфизме с реализацией ортогональной группы  $O^+(3)$  и  $O^+(6)$ . В частности,  $SU(2) - O^+(3)$  гомоморфизм хорошо известен в теории углового момента и используется для отображения состояния поляризации света на сфере Пуанкаре.

#### 4.2. Определение параметров анизотропии среды

Другая важная задача поляризационной оптики — определение параметров анизотропии среды и, в частности, определение величины двулучепреломления ОВС и эллиптичности собственных поляризационных мод. В работах [72, 81] эта задача решается методом сферы Пуанкаре. В работе [72] рассмотрена эволюция состояния поляризации монохроматического света прошедшего ОВС, в случае, когда обе собственные поляризационные моды возбуждены с равным весом, а на короткий, по сравнению с длиной поляризационных биений, участок ОВС наложено однородное аксиальное переменное магнитное поле, причём точка приложения

поля может перемещаться вдоль ОВС. В этом случае, вследствие эффекта Фарадея, возникает вращение плоскости поляризации света, причём эффект максимален в тех точках ОВС, где форма поляризации света наиболее близка к линейной. Таким образом, передвигая зазор электромагнита вдоль волокна, можно определять длину поляризационных биений, а в случае, если минимумы модуляции плоскости поляризации, соответствующие тем точкам ОВС, где форма поляризации света наиболее близка к циркулярной, имеют различное значение вдоль ОВС, а именно, попеременно чередуются более и менее глубокие минимумы, то это свидетельствует о том, что собственные моды ОВС эллиптические. На сфере Пуанкаре такого рода эволюции состояния поляризации соответствует циклоида, проходящая вдоль широты, причём, если все периоды циклоиды одинаковые, то ОВС имеет собственные линейно поляризованные моды, если же периоды попеременно имеют более и менее глубокие минимумы, то ОВС имеет собственные эллиптические моды [72]. В более общем виде эта задача решена методом матриц Мюллера в работе [82], где предложен метод количественного определения эллиптичности собственных мод ОВС в зависимости от модуляции интенсивности света, прошедшего последовательно ОВС с наложенным на него переменным магнитным полем и поляризатор.

В работе [81] к локальному участку ОВС прикладывалось переменное давление. В ходе эксперимента точка приложения давления перемещалась, угол, под которым прикладывалось давление, подбирался таким, чтобы он составлял  $45^\circ$  с собственными осями ОВС, при этом имела место максимальная модуляция состояния поляризации. Метод позволяет определять как длину поляризационных биений, так и эллиптичность собственных мод ОВС. Интерпретация наблюдаемого эффекта в [81] проводилась на сфере Пуанкаре — линия, отображающая эволюцию состояния поляризации, имела вид циклоиды, проходящей вдоль экватора.

### 4.3. Измерение состояния поляризации света

Для измерения состояния поляризации света используют различные методы, в частности, основанные на компенсации состояния поляризации света до определённой формы, обычно линейной [7] (эти методы не позволяют отслеживать быстрые изменения состояния поляризации), или основанные на модуляции состояния поляризации света — с помощью вращающегося поляризатора [83], вращающейся фазовой пластинки [84] или одновременно того и другого [85]. В работе [7] приводится эволюция состояния поляризации на сфере Пуанкаре при прохождении луча через вращающийся поляризатор.

Наличие вращающегося оптического элемента вызывает ряд неудобств — частота модуляции ограничена, вибрации приводят к периоди-

ческому смещению луча. В работах [59, 60] было предложено для измерения состояния поляризации света модулировать его с помощью одного или двух электрооптических модуляторов, а сигнал с фотоприёмника, перед которым установлен поляризатор, обрабатывать с помощью электронной системы. Расчёт эволюции поляризации света при прохождении через электрооптические модуляторы в [59, 60] выполнен методом сферы Пуанкаре. Другой способ измерения состояния поляризации света, связанный с её модуляцией, был предложен в [81] и состоит в приложении переменного давления к ОВС (см. раздел 4.2). Соответствующий расчёт в [81] выполнен методом сферы Пуанкаре.

В [81] была также осуществлена визуализация формы поляризации на экране осциллографа. При этом, помимо довольно сложной электронной системы обработки сигнала с выхода фотоприёмника, использовалось и весьма сложное оптическое устройство — гетеродинный поляризационный интерферометр Майкельсона, включающий в себя акустооптический преобразователь, а также две призмы Глана — Тейлора: одну в поворотном устройстве в опорном плече, другую — в качестве анализатора на выходе. Изменение состояния поляризации интерферирующих пучков было сравнительно просто рассчитано авторами [81] методом сферы Пуанкаре.

#### 4.4. Преобразователи состояния поляризации на основе ОВС

Преобразователи (формирователи, управители, контроллеры) состояния поляризации света на основе ОВС служат для создания нужного состояния поляризации на входе устройства, при произвольном состоянии на входе устройства. Наиболее распространённым типом данного устройства являются поляризационные преобразователи Лефевра [86], состоящие из четырёх последовательных витков ОВС, диаметр которых подобран таким образом, что из-за наведённого изгибом линейного двулучепреломления каждый из витков является эквивалентом четвертьволновой фазовой пластинки. По краям устройства имеется по одному витку, а в середине два витка вместе — эквивалент полуволновой пластинки. Принцип действия этого устройства легко пояснить с помощью сферы Пуанкаре. Поворачивая крайний виток вокруг оси волокна, можно подобрать такой угол, при котором произвольная эллиптическая поляризация на входе устройства превратится в линейную — произвольная точка на сфере Пуанкаре перейдёт на экватор сферы (см. рис. 3). При повороте двойного витка — полуволновой пластинки — меняется только азимут поляризации, при этом изображающая точка на сфере Пуанкаре движется по экватору сферы до нужного азимута. И, наконец, последний виток — четвертьволновая пластинка — создаёт нужную эллиптичность поляризации (см. рис. 3). При этом вновь меняется азимут, но его можно скорректировать до нужного значения поворотом средней секции устройства — двойного витка.

Имеются и другие преобразователи состояния поляризации — на основе вращения отдельных участков вытянутого в длину ОВС вокруг своей оси относительно других, неподвижных [87, 88]. Число этих участков может равняться трём [87] или двум [88]. Ещё один вариант управления состоянием поляризации методом приложения давления к локальным участкам ОВС — при помощи якорей трёх электромеханических реле [89], причём каждое последующее реле повернуто на  $45^\circ$  относительно предыдущего. Все расчёты в работах [87–89] выполнены методом сферы Пуанкаре.

В работах [90, 91] методом сферы Пуанкаре рассмотрены вопросы подстройки состояния поляризации в волоконных кольцевых интерферометрах (ВКИ), выполненных на основе ОВС, а также эволюция состояния поляризации света в ВКИ при различных конфигурациях намотки контура ВКИ.

#### 4.5. Стабилизаторы состояния поляризации на выходе ОВС

В ряде случаев необходимо поддерживать на выходе ОВС вполне определённое состояние поляризации света, при этом как состояние поляризации света на входе ОВС, так и двулучепреломление и оптическая длина ОВС могут со временем меняться. Принцип действия стабилизатора состояния поляризации, описанного в работе [92], такой же, как и преобразователя [89] — на локальные участки ОВС давят якоря электромеханических реле. Отличие от [89] состоит в том, что на выходе ОВС состояние поляризации контролируется и усиленный электронно́й системой обработки сигнал обратной связи поступает на обмотки реле. Расчёт эволюции состояния поляризации в этой оптико-электромеханической системе выполнен методом сферы Пуанкаре [92]. Другой способ стабилизации состояния поляризации предложен в работе [93]. К двум вытянутым в длину соосным отрезкам ОВС с сильным линейным двулучепреломлением, собственные оси которых развёрнуты относительно друг друга на  $45^\circ$ , приложены вдоль волокна силы натяжения с помощью пьезокерамических цилиндров, напряжение на которые, так же как и в рассмотренном выше случае, подаётся из цепи обратной связи системы контроля состояния поляризации на выходе ОВС. Расчёт эволюции состояния поляризации в этой системе также выполнен методом сферы Пуанкаре [93].

Ещё одна возможность стабилизации состояния поляризации заключается в установке на выходе ОВС (или любого другого оптического устройства) последовательно электрооптического модулятора и поляризатора в поворотном устройстве, положение которого регулируется сервомотором [85]. Управляющее напряжение на электрооптический модулятор и сервомотор поступает из системы контроля состояния поляризации на выходе устройства. Как было отмечено выше, расчёты в работе [85] были выполнены методом сферы Пуанкаре.

Совершенно оригинальный способ стабилизации состояния поляризации был впервые предложен в работе [94]. Линейно поляризованный свет проходит произвольное оптическое устройство с нерегулярным характером анизотропии (в [94] кристалл KDP, анизотропия которого не вполне однородна по длине), затем фарадеевский вращатель на  $45^\circ$ , отражается от зеркала и возвращается назад по тому же пути. При этом на выходе устройства свет имеет линейную поляризацию, ортогональную к входной, независимо от поляризационных свойств устройства. Позднее, в работе [95], это утверждение было доказано в самом общем случае: если на вход такого устройства поступает свет с произвольной поляризацией, то на выходе будет иметь место ортогональное состояние поляризации. В [95] этот эффект был назван обращением состояния поляризации, а также были проведены соответствующие эксперименты с ОВС. В работе [96] была дана простая интерпретация эффекта обращения поляризации на сфере Пуанкаре: начальное состояние поляризации изображается произвольной точкой на сфере Пуанкаре, затем, после прохождения оптического устройства, изображающая точка перемещается в другое положение на сфере и, после двойного прохождения фарадеевского вращателя (в прямом и обратном направлении), занимает диаметрально противоположное положение на сфере относительно предыдущего, и, наконец, после прохождения оптического устройства в обратном направлении, занимает диаметрально противоположное положение на сфере относительно исходного, что означает, что состояние поляризации ортогонально относительно исходного.

#### 4.6. Оптические изоляторы

Принцип действия оптических изоляторов также основан на фарадеевском вращении на угол  $45^\circ$ . После прохождения входного линейного поляризатора свет проходит фарадеевский вращатель, второй (выходной) линейный поляризатор, развёрнутый относительно первого на  $45^\circ$ , и затем попадает в некоторое оптическое устройство. Отразившийся от входной поверхности оптического устройства свет проходит выходной поляризатор, после чего его поляризация становится линейной, доворачивается ещё на  $45^\circ$  и полностью поглощается входным поляризатором, и, таким образом, полностью исключается обратная реакция на источник излучения. В работах [77, 97] рассмотрены оптические изоляторы на основе бухты ОВС, на которую намотана катушка с током, создающая аксиальное магнитное поле. Анализ эволюции состояния поляризации в работах [77, 97] выполнен методом сферы Пуанкаре.

#### 4.7. Датчики электрического тока на основе ОВС

Принцип действия датчиков электрического тока на основе ОВС также основан на вращении плоскости поляризации магнитным полем, создаваемым током. Как было показано выше, такие задачи удобно решать методом сферы Пуанкаре. В качестве примера можно привести работу [70].

#### 4.8. Квазиспин фотона и поляризационное эхо в ОВС

В квантовой механике спиновая часть волновой функции фотона отражает наличие у него механического момента — спина [98–101]. Поскольку фотон имеет нулевую массу покоя, то для него не существует системы, в которой он покоится: в любой системе отсчёта он движется со скоростью света, и по отношению к нему всегда существует выделенное направление в пространстве — направление вектора импульсов, вследствие чего можно говорить об аксиальной симметрии относительно выделенной оси [98]. Поэтому проекция спина фотона на направление движения может быть +1 и -1 (правая и левая круговая поляризация соответственно). Все остальные типы поляризации являются смешанными состояниями и описываются поляризационной матрицей плотности [98], которая для света не что иное, как матрица когерентности [6, 99–106]

$$\hat{j} = \begin{vmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где  $\langle \rangle$  означает усреднение по времени. Как показано в [99–106], элементы матрицы  $\hat{J}$  можно выразить через компоненты вектора Стокса света  $\vec{S}$  и спиновые матрицы Паули (и наоборот):

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 S_j \sigma_j, \quad S_j = \text{Sp} [\hat{J} \sigma_j], \quad (6)$$

где  $\sigma_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ ,  $\sigma_3 = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}$  — спиновые матрицы

Паули,  $\sigma_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  — единичная матрица.

Выражение (6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S_0 &= J_{xx} + J_{yy}, & J_{xx} &= 1/2 (S_0 + S_1), \\ S_1 &= J_{xy} - J_{yy}, & J_{yy} &= 1/2 (S_0 - S_1), \\ S_2 &= J_{xy} + J_{yx}, & J_{xy} &= 1/2 (S_2 + iS_3), \\ S_3 &= i(J_{yx} - J_{xy}), & J_{yx} &= 1/2 (S_2 - iS_3). \end{aligned} \quad (7)$$



Напомним, что в случае нормированного вектора Стокса  $S_0 = 1$ .

В работах [21, 22, 45, 46, 104, 105] показано, что по аналогии со спином электрона в квантовой механике можно ввести понятие квазиспина фотона, характеризующего его механический момент, величина которого составляет  $\hbar$ , а направление совпадает с направлением вектора Стокса при условии, если ось  $Z$  на сфере Пуанкаре совпадает с вектором скорости фотона.

Отметим, что такое описание по отношению к единичному фотону находится в противоречии с квантовомеханическими представлениями (см. выше), однако в прошлом полагали [107], что спин фотона может быть ориентирован произвольно: если его направление совпадает с направлением скорости или противоположно, то фотон имеет круговую поляризацию (правую или левую), если оно ортогонально скорости — фотон имеет линейную поляризацию, а её азимут совпадает с азимутом спина фотона, в общем случае ориентации спина фотон имеет эллиптическую поляризацию [98]. Эксперименты Бета [108, 109] по измерению механического момента света показали, что свет с круговой поляризацией действительно переносит механический момент, который ориентирован вдоль направления луча, а свет с линейной поляризацией или деполаризованный свет механического момента не переносит и, следовательно, состоит из равного количества право- и левополяризованных фотонов, что находится в соответствии с квантовомеханическими представлениями [98]. Таким образом, понятие квазиспина фотона носит формальный характер и не совпадает с реальным спином фотона.

Тем не менее, представление о наличии у фотона некоторого “квазиспина” в некоторых случаях оказывается полезным. В работе [110] по аналогии с прецессией, магнитным резонансом, спиновым эхом и фазовой релаксацией спина элементарной частицы (например, электрона) в магнитном поле, рассматривается прецессия квазиспина фотона в среде с двулучепреломлением, т. е. прецессия вектора Стокса на сфере Пуанкаре (следует отметить, что работа [110] содержит ряд неточностей). В случае, если свет монохроматический, то при наличии поляризационных биений (например, в ОВС с линейным двулучепреломлением) вектора Стокса (“квазиспина”) для различных длин волн прецессируют вокруг заданного на сфере Пуанкаре направления с различными скоростями. Пройдя некоторое расстояние по ОВС с двулучепреломлением, монохроматический свет становится деполаризованным. Авторы [110] предлагают на некоторый локальный участок ОВС наложить продольное магнитное поле такой напряжённости, чтобы плоскость поляризации света повернулась на  $90^\circ$ , в этом случае вектора Стокса для всех длин волн света “перевернутся” на сфере Пуанкаре на  $180^\circ$  и займут диаметрально противоположное положение. После дальнейшего прохождения светом длины ОВС, равной

первому участку, вектора Стокса для различных длин волн вновь займут одно и то же положение на сфере Пуанкаре, и свет вновь будет полностью поляризован. Этот эффект назван авторами [110] поляризационным эхо. Отметим аналогию между рассматриваемым эффектом и эффектом фотонного эха [10].

Отметим также, что восстановление степени поляризации немонохроматического света при наличии поляризационных биений в среде с линейным двулучепреломлением можно получить и без магнитного поля — для этого достаточно разорвать среду (например, ОВС) посередине и затем соединить, повернув одну половину относительно другой на  $90^\circ$  так, чтобы медленная ось первой половины совпала с быстрой осью второй половины и наоборот. Такой эксперимент был проделан в работе [111]. Отметим также, что эффект поляризационного эха [110] во многом подобен эффекту обращения поляризации [94, 95] с той лишь разницей, что обращение поляризации происходит при отражении света назад, т. е. при двойном прохождении одного и того же образца ОВС. Кроме того, обращение поляризации происходит вне зависимости от поляризационных свойств ОВС, а эффект поляризационного эха реализуется только при отсутствии связи ортогональных линейно поляризованных мод на неоднородностях волокна, т. е. только тогда, когда первая и вторая половины ОВС идентичны.

#### 4.9. Связь ортогонально поляризованных мод в ОВС

Связь ортогонально поляризованных мод в ОВС на случайных неоднородностях приводит к тому, что если на входе ОВС возбудить одну собственную поляризационную моду ( $\parallel$ ), то по мере распространения света вдоль ОВС часть интенсивности света будет переходить в другую поляризационную моду ( $\perp$ ) [112]:

$$\begin{aligned} I_{\parallel} &= 0,5 \left[ \exp(-2hL) + 1 \right], \\ I_{\perp} &= 0,5 \left[ \exp(-2hL) - 1 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $I_{\parallel}$ ,  $I_{\perp}$  — нормированные интенсивности ортогональных мод,  $L$  — длина волокна,  $h$  — параметр сохранения поляризации ( $\text{м}^{-1}$ ) [112]. В работе [112] для иллюстрации эволюции состояния поляризации света в ОВС при наличии случайных неоднородностей используется метод сферы Пуанкаре. Так, если случайные неоднородности отсутствуют, то при возбуждении на входе ОВС одной собственной линейной поляризационной моды, точка, отображающая состояние поляризации на сфере Пуанкаре, неподвижна. При наличии постоянной связи линейно поляризованных мод — например, при наличии равномерного кручения волокна — точка

совершает прецессию вокруг некоторого центра, а при наличии случайного кручения волокна, которое может появиться в процессе вытяжки или намотки волокна, точка совершает случайные блуждания вокруг некоторого среднего значения, причём отклонения от среднего значения растут по мере увеличения длины ОВС.

Вопросам связи ортогонально поляризованных мод в ОВС посвящены сотни работ, однако, после опубликования [112] метод сферы Пуанкаре долгое время не использовался. В последнее время появился ряд интересных работ [113–115], в которых методом сферы Пуанкаре показано, что если в коротких, по сравнению с обратной длиной сохранения поляризации, отрезках ОВС ( $L \ll h^{-1}$ ) средняя разность временных задержек между излучением прошедшим по медленной и быстрой оси двулучепреломления ОВС пропорциональна  $L$ , то в длинных отрезках ОВС ( $L \gg h^{-1}$ ) она пропорциональна  $\sqrt{L}$ .

Существует ряд способов измерения величины  $h$  — параметра в ОВС [116], в частности, его можно измерять по излучению, рассеянному назад на неоднородностях ОВС [117]. Последний способ имеет то преимущество, что изменяя временную задержку при обработке сигнала, можно вычислить распределение неоднородностей по длине ОВС. В работе [117] использовался метод сферы Пуанкаре.

#### 4.10. Оптоволоконный деполаризатор Лيو

Деполаризатор монохроматического излучения Лيو, который позволяет избежать ряд нежелательных эффектов в волоконных интерферометрах, представляет две фазовые пластинки с линейным двулучепреломлением, оптические длины которых  $l_1$  и  $l_2$  относятся как 1:2, а оси двулучепреломления развернуты на  $45^\circ$ . Длина более короткого отрезка должна удовлетворять условию  $l > \lambda^2 / \Delta\lambda \Delta n$ , где  $\lambda$  — средняя длина волны источника излучения,  $\Delta\lambda$  — его спектральная ширина,  $\Delta n$  — разность показателей преломления в медленной и быстрой осях. Деполаризатор Лيو можно изготовить на основе ОВС с сильным линейным двулучепреломлением, в этом случае необходимо учитывать связь ортогональных поляризационных мод в ОВС, из которого он изготовлен [118, 119].

В работе [78] методом математического моделирования проводится расчёт эволюции состояния поляризации для различных длин волн монохроматического излучения в деполаризаторе Лيو на основе ОВС, иллюстрация проводится на сфере Пуанкаре — точки, изображающие состояние поляризации для различных длин волн расходятся по сфере. В работе [120] проводятся аналогичные расчёты для деполаризатора Лيو, состоящего из двух кварцевых фазовых пластинок, без учёта связи ортогонально поляризованных мод, иллюстрация также проводится на сфере Пуанкаре. В работе [120] методом сферы Пуанкаре решена также задача о распространении монохроматического линейно поляризованного

излучения в последовательно расположенных четырёх отрезках ОВС со слабым линейным двулучепреломлением, длины которых составляют соответственно 9,5 м; 9,09 м; 9,72 м; 9,45 м, а ориентация осей двулучепреломления относительно азимута линейной поляризации на входе соответственно  $41^\circ$ ;  $47^\circ$ ;  $50^\circ$ ;  $45^\circ$ .

#### 4.11. Теоремы эквивалентности в поляризационной оптике

Теоремы эквивалентности в поляризационной оптике рассмотрены в ряде работ (см., например, [4, 17, 121, 122]). Основной является теорема Пуанкаре (Эрпена – Пуанкаре), которая утверждает, что линейная фазовая пластинка, окружённая двумя ротаторами, или две линейные фазовые пластинки и ротатор между ними эквивалентны эллиптической фазовой пластинке. Доказательство этих теорем алгебраическими методами довольно громоздко, однако в [17] приводится чрезвычайно простое геометрическое доказательство теоремы Пуанкаре с помощью метода сферы Пуанкаре. Эллиптическая фазовая пластинка переводит точку, отображающую состояние поляризации света, из одного произвольного положения на сфере Пуанкаре в другое. Как показано в разделе 4.5, две фазовые пластинки и ротатор между ними также могут переводить точку на сфере Пуанкаре из одного произвольного положения в другое. Отметим, что принцип действия поляризационных управителей Лефевра [86] основан на теореме Пуанкаре и является прекрасной её иллюстрацией (см. также рис. 3, рис. 4).

### 5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СФЕРЫ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФАЗЫ В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ, КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

#### 5.1. Возникновение понятия геометрической фазы и сфера Пуанкаре

Впервые понятие геометрической фазы возникло в поляризационной оптике. В 1938 г. в работе Рытова [123] было показано, что луч света, при его распространении по неплоской траектории, приобретает дополнительный набег фазы, связанный с вращением плоскости поляризации. Вскоре, в работе Владимирского [124], было показано, что величина этой дополнительной или, как её в настоящее время именуют, геометрической фазы связана с эволюцией естественного трёхгранника Дарбу (касательная, нормаль, бинормаль) вдоль траектории луча и численно равна телесному углу, описываемому трёхгранником Дарбу на сфере единичного радиуса. Эта эволюция трёхгранника Дарбу на сфере единичного радиуса [124] связана с эволюцией точки, отображающей состояние поляризации на сфере Пуанкаре: можно показать, что величина геометрической

фазы численно равна половине телесного угла, описываемого вектором Стокса на сфере Пуанкаре.

В обзоре [20] было предложено геометрическую фазу для случая неплюской траектории луча именовать фазой Рытова–Владимирского. Интересно отметить, что метод расчёта геометрической фазы [123, 124] был недавно использован для расчёта эффекта “псевдогиротропии” — появления циркулярного двулучепреломления вследствие кривизны и кручения луча в неоднородной среде с произвольно плавно меняющимися параметрами [125].

В 1956 г. в работах Панчаратнама [51, 52] было показано, что даже в том случае, если луч света имеет плоскую и, в частности, прямую траекторию, но его состояние поляризации меняется в результате прохождения различных фазовых пластинок и поляризаторов, то величина геометрической фазы также численно равна половине телесного угла, описываемого вектором Стокса на сфере Пуанкаре. Отметим, что величина телесного угла, а следовательно, и геометрической фазы однозначно определена только в случае, если траектория изображающей точки на сфере Пуанкаре описывает замкнутую кривую, т.е. имеет место циклическая эволюция состояния поляризации.

В классической механике проявление геометрической фазы было обнаружено в начале 50-х годов М. Л. Ефа [126] при испытаниях одноосного гироскопа с сильной коррекцией ориентации оси вращения, который является неголономной системой [25]. Отметим, что аналогичное явление наблюдается в спаренном механическом гироскопе, который, в отличие от одиночного гироскопа, нечувствителен к вращению Земли и аналогично магнитному компасу указывает неизменное направление. Однако уже первые испытания на судах показали, что такие устройства накапливают угловую ошибку, пропорциональную площади акватории, которую обошло судно. Эти явления вскоре были объяснены А. Ю. Ишлинским, который показал, что угловая ошибка численно равна телесному углу, который опирается на замкнутую кривую на поверхности Земли, по которой перемещался гироскоп с сильной коррекцией или спаренный гироскоп. В работе [127] отмечено, что Ишлинским была строго доказана теорема о связи угловой ошибки неголономной системы и её траекторией на поверхности Земли. Таким образом, аналогом сферы Пуанкаре в классической механике является земная сфера, а аналогом точки, отображающей состояние поляризации (вектора Стокса), является точка на земной сфере, в которой находится гироскоп. Отметим, что здесь, так же как и в поляризационной оптике, строгое определение дополнительного угла возможно только в случае, когда кривая на поверхности Земли замкнута.

Эти результаты были впервые опубликованы Ишлинским в 1952 г. в монографии [128], которая вышла ограниченным тиражом и в настоящее время является библиографической редкостью. В 1963 г. вышло второе

дополненное издание этой монографии [25].

Значительно позже, в 1985 г. была опубликована работа Хэннэя [129], где были получены близкие к [25] результаты, однако без графической интерпретации. В настоящее время в ряде работ (см., например, [20, 23]) дополнительный угол, накапливаемый механической системой в процессе её эволюции в пространстве, именуют углом Хэннэя. Поскольку рассматриваемое явление в классической механике было впервые объяснено Ишлинским, с нашей точки зрения более целесообразно именовать его углом Ишлинского.

В квантовой механике появление дополнительной фазы волны де Бройля электрона, связанной с его движением в электронном микроскопе при наличии вектор-потенциала, предсказано ещё в 1949 г. [130]. Позднее этот эффект был рассмотрен в более общем виде в работе [131] и вскоре экспериментально обнаружен [132], после чего стал именоваться эффектом Ааронова–Бома. В 1984 г. Берри ввёл понятие геометрической (топологической) фазы [19], которая описывает фазовый набег испытываемый квантовомеханическим объектом в процессе его пространственной эволюции и определённый топологическими свойствами оператора эволюции в гильбертовом пространстве, а не локальной квантовой динамикой как таковой. Геометрическая фаза, получившая наименование фазы Берри, позволяет объяснить ряд эффектов в квантовой механике и, в частности, эффект Ааронова–Бома.

В работе [133] Берри и Хэннэя показали, что явление в классической механике, рассмотренное ранее Хэннэем [129] (и, как было показано выше, задолго до этого Ишлинским [25, 128]), имеют много общего — они связаны с характером топологических преобразований. В работе [134] Берри рассмотрел появление дополнительной геометрической фазы в оптике при наличии неплоской траектории луча и, в частности, при распространении света в ОВС имеющем неплоскую конфигурацию, фактически повторив работы Рытова [123] и Владимирского [124]. В работе [134] было также показано, что эту геометрическую фазу можно рассматривать как проявление фазы Берри в оптике. В работе [135] Берри показал, что фазу Панчаратнама [50, 51] можно рассматривать как проявление фазы Берри в оптике, и использовал метод сферы Пуанкаре. Позднее, в обзоре [21], Берри вновь рассмотрел явления в оптике, классической и квантовой механике, приводящие к появлению геометрической фазы, а также признал пионерскую роль работ Рытова [123] и Владимирского [124], узнав о них из обзора [20].

## 5.2. Применение метода сферы Пуанкаре при вычислении геометрической фазы в оптике

С момента публикации работ Панчаратнама исследователи не проявляли интереса к измерению или теоретическому рассмотрению гео-

метрической фазы в оптике (исключение составила экспериментальная работа [136]). После публикации [19] появилось большое число работ, посвящённых данному вопросу, в ряде из которых вычисление фазы Панчаратнама проводилось методом сферы Пуанкаре. Так в работе [137] метод сферы Пуанкаре использовался для вычисления геометрической фазы в скрученных ОВС. В работах [138, 139] проводились эксперименты по измерению зависящей от времени фазы Панчаратнама в интерферометре Майкельсона, в плечи которого были введены вращающиеся фазовые пластинки. Расчёт эффекта проводился методом сферы Пуанкаре. В частности, в [139] показано, что появление зависящей от времени фазы Панчаратнама эквивалентно сдвигу частоты света. В работе [140] проводился эксперимент по измерению фазы Панчаратнама в интерферометре Маха – Цендера, в одно из плеч которого были введены четвертьволновая и полуволновая фазовая пластинки и поляризатор. С помощью метода сферы Пуанкаре в [140] было показано, что геометрическая фаза в этом случае является неинтегрируемой.

В работах [141, 142] методом сферы Пуанкаре проводился синтез преобразователей фазы Панчаратнама на основе двух полуволновых и двух четвертьволновых фазовых пластинок [141] и одной полуволновой и четырёх четвертьволновых фазовых пластинок [142] (о применении метода сферы Пуанкаре для изменения фазы Панчаратнама с помощью фазовых пластинок см. также обзоры [20–23]). В работе [142] проводится аналогия между изменением состояния поляризации света и трансформацией спина квантовомеханической системы со спином  $1/2$  (по этому поводу см. также [21, 22, 45, 46, 104, 105, 110], а также раздел 4.8).

В работе [143] методом сферы Пуанкаре синтезируется ахроматический преобразователь фазы Панчаратнама. В простейшем варианте он состоит из двух поляризаторов, между которыми находится полуволновая фазовая пластинка, окружённая двумя четвертьволновыми фазовыми пластинками. В более сложном варианте между поляризаторами находятся четыре полуволновые и четыре четвертьволновые фазовые пластинки, соединённые в три группы, которые могут независимо поворачиваться относительно оптической оси. В последнем случае достигается независимость фазы Панчаратнама от длины волны света в диапазоне 50 нм. Отметим, что синтез ахроматического преобразователя состояния поляризации на основе фазовых пластинок с помощью метода сферы Пуанкаре проводился ещё в работе [41].

В работе [144] экспериментально и теоретически методом сферы Пуанкаре показано, что величина фазы Панчаратнама нелинейно зависит от изменения состояния поляризации света и, в частности, от его эллиптичности (“широты”  $2\omega$  на сфере Пуанкаре). В экспериментальной установке имелось два луча света, каждый из которых проходил через свой поляризатор (угол между разрешёнными направлениями поляризаторов

составлял  $45^\circ$ ), после чего они проходили общую фазовую пластинку (компенсатор Бабине–Солейля — фазовая пластинка переменной толщины) и интерферировали. Изменение фазы Панчаратнама измерялось по сдвигу интерференционных полос. Нелинейная зависимость фазы Панчаратнама от изменения состояния поляризации света обусловлена тем, что при изменении “широты”  $2\omega$  на сфере Пуанкаре площадь на поверхности сферы, ограниченная циклическим преобразованием состояния поляризации каждого из лучей нелинейно зависит от величины  $2\omega$ .

В работе [145] экспериментально измерялась фаза Панчаратнама в четырёхзеркальном кольцевом интерферометре, внутри которого находилась полуволновая (или четвертьволновая) фазовая пластинка, которая могла поворачиваться вокруг оптической оси. На вход интерферометра подавался линейно поляризованный монохроматический свет, на выходе по сдвигу интерференционной картины измерялась зависимость фазы Панчаратнама от угла поворота фазовой пластинки, которая оказалась нелинейной. Явление, рассмотренное в [145], хорошо известно в волоконных кольцевых интерферометрах (ВКИ), оно называется поляризационной невзаимностью ВКИ (см., например, [146, 147]) и приводит к сдвигу и дрейфу нуля ВКИ. В случае, если в ВКИ используется монохроматический источник излучения можно попытаться вычислить фазу Панчаратнама в ВКИ на сфере Пуанкаре с помощью построения на сфере эволюции состояния поляризации света при его распространении вдоль ОВС контура ВКИ. При этом возникают две трудности.

1. Не всегда точно известно, как происходит эволюция состояния поляризации света внутри ОВС контура, поскольку при длине контура 200 м — 1 км в нём укладывается много длин поляризационных биений и, кроме того, вследствие изгибов и скруток волокна меняется как величина его линейного, так и циркулярного двулучепреломления. Обычно известно состояние поляризации на входе и выходе контура ВКИ;

2. Фаза Панчаратнама строго определена только в случае циклической эволюции состояния поляризации, т. е. когда кривая, описывающая эволюцию состояния поляризации на сфере Пуанкаре, замкнутая. Иными словами, фаза Панчаратнама строго определена в случае, если состояние поляризации на входе и выходе контура ВКИ одинаково. Следует иметь в виду, что в настоящее время практически используются только ВКИ с немонахроматическим источником излучения, у которых излучение, прошедшее по медленной и быстрой осям контура, взаимно некогерентно и результат интерференции не зависит от длины контура, которая меняется при изменении температуры волокна. В случае ВКИ с немонахроматическим источником излучения для вычисления фазы Панчаратнама требуется для каждой длины волны света построить свою кривую на сфере Пуанкаре, отображающую эволюцию состояния поляризации, и задача становится практически невыполнимой.



Однако в наших работах [148, 149] удалось ввести понятие невзаимной геометрической фазы для встречных волн в ВКИ, которая определяется по отдельности для встречных прошедших по медленной и быстрой осям ОВС контура ВКИ. Её величина численно равна половине площади сферического треугольника на сфере Пуанкаре единичного радиуса, образованного тремя точками, соответствующими состоянию поляризации: 1) на входе контура ВКИ; 2) на одном из выходов контура ВКИ (в медленной или быстрой оси); 3) на другом выходе контура ВКИ (соответственно в медленной или быстрой оси). В случае, если интенсивность излучения в медленной и быстрой осях контура ВКИ возбуждена с равным весом и, кроме того, площади обоих сферических треугольников равны, то сдвиг интерференционной картины на выходе ВКИ численно равен невзаимной геометрической фазе встречных волн. В общем случае для вычисления величины поляризационной невзаимности необходимо знать как площади сферических треугольников, так и соотношение интенсивностей в медленной и быстрой осях ОВС контура ВКИ. Однако, предложенный в [148, 149] метод является чрезвычайно удобным для синтеза схем ВКИ свободных от поляризационной невзаимности — в этом случае оба сферических треугольника на сфере Пуанкаре вырождаются в точку или прямую линию на сфере, геодезическую, и их площадь равна нулю.

### 5.3. Применение метода сферы Пуанкаре в классической механике

В работе [150] было показано, что в ряде случаев геометрическая фаза в механических системах может возникать не только при наличии негोलонномных связей [25], и, в частности, она возникает в маятнике Фуко (см. также обзоры [21–23]). Предположим для простоты, что Земля не совершает ни орбитального вращения, ни вращения вокруг своей оси. В этом случае, если маятник Фуко достаточно медленно обнеси по поверхности Земли по некоторой траектории и вернуть в исходную точку, то плоскость, в которой он совершает колебания, повернётся на угол, численно равный телесному углу, опирающемуся на траекторию, по которой он двигался. Как было отмечено выше, в классической механике роль сферы Пуанкаре играет земная кора, и если вместо неё рассматривать сферу единичного радиуса, то угол поворота плоскости качания маятника Фуко численно равен площади поверхности сферы, заключённой внутри траектории. Учтём теперь вращение Земли вокруг своей оси. За сутки неподвижный маятник Фуко совершит вращение вокруг некоторой неподвижной сферы по широте, на которой он находится, и вернётся в исходную точку на неподвижной сфере. Площадь на неподвижной сфере единичного радиуса, ограниченная широтой  $\Omega$ , равна  $S = 2\pi \cos \Omega$ . Величина  $S$  численно равна ошибке, которую даёт маятник Фуко в зависимости от широты, на которой он находится. Так, на полюсах Земли ( $\Omega = \pm 90^\circ$ )  $S = 0$

и маятник Фуко не даёт ошибки — его плоскость колебаний не меняется относительно самой себя при вращении Земли, она повернётся на  $360^\circ$  относительно поверхности Земли за сутки. Но на произвольной широте поворот плоскости колебаний маятника Фуко относительно поверхности Земли за сутки равен  $360^\circ / (1 - \cos \Omega)$ . В частности, на экваторе плоскость колебаний маятника Фуко относительно поверхности Земли не меняется.

Плоскость колебаний маятника Фуко больших размеров, установленного в обсерватории Гриффитса в Лос-Анджелесе на широте  $34^\circ$  делает один оборот за 42 часа [21].

Отметим важное различие в поведении двух механических систем — двухгироскопной рамы и маятника Фуко: первая накапливает угловую ошибку только в том случае, если её перемещают по поверхности Земли [25], вторая даже в том случае, если её не перемещают. Следует также отметить, что хотя маятник Фуко является голономной системой, система, состоящая из маятника Фуко и Земли, является неголономной — даже в случае отсутствия вращения Земли плоскость колебаний маятника не может быть определена начальными и конечными координатами маятника, а зависит от траектории, по которой его перемещали по сферической поверхности Земли.

#### 5.4. Применение метода сферы Пуанкаре в квантовой механике

Геометрическую фазу в квантовой механике — фазу Берри — которая, как было отмечено выше, описывает фазовый набег волновой функции квантовомеханического объекта в процессе его пространственной эволюции, определяемый топологическими свойствами Гильбертова пространства, можно также вычислять через величину телесного угла на сфере, построенной в пространстве определённых параметров, оператора Гамильтона [151]. Эта сфера в пространстве параметров и является аналогом сферы Пуанкаре. Однако для вычисления фазы Берри можно использовать и обычную сферу Пуанкаре, если перейти от обычной формулировки квантовой механики в терминах векторов гильбертова пространства к другой формулировке — на языке матрицы плотности [20–24, 45, 46, 98, 104, 105]. Вместо представления физического состояния  $\psi$  при помощи вектора гильбертова пространства  $|\psi\rangle$ , теперь состояние представляется посредством оператора  $\rho_\psi$ , называемого матрицей плотности чистого состояния  $\psi$ :

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| / \langle\psi|\psi\rangle. \quad (9)$$

В общем случае смешанного состояния квантовой системы с двумя дискретными уровнями, например, для частицы со спином  $1/2$ , оператор матрицы плотности представляется эрмитовой матрицей

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 S_j \sigma_j, \quad (10)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — спиновые матрицы Паули,  $\sigma_0$  — единичная матрица (см. выражение (6)),  $\vec{S}$  — вектор поляризации для чистого состояния, т. е. то пространственное направление, вдоль которого угловой момент имеет проекцию  $1/2$  [45, 46, 104, 105]. Вектор  $\vec{S}$  является вектором Стокса частицы со спином  $1/2$  (электрона, нейтрона и др.). Отметим, что совокупность всех состояний поляризации частицы со спином  $1/2$  (в её системе покоя) может быть представлена точками на поверхности и внутри сферы единичного радиуса — сферы Пуанкаре. Ортогональные чистые состояния задаются диаметрально противоположными точками на поверхности сферы. Фактически вектор Стокса в данном случае является вектором спина частицы.

В работах [22, 24] рассмотрена задача о прецессии спина нейтрона в магнитном поле. При этом вектор спина описывает замкнутую кривую на сфере Пуанкаре — прецессирует вдоль её широты, а величина фазы Берри численно равна половине телесного угла, опирающегося на эту кривую.

Метод сферы Пуанкаре может быть использован и в ряде задач квантовой оптики, где появление геометрической фазы не всегда может быть получено из соображений классической оптики [152], однако, это направление пока не получило развития.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод сферы Пуанкаре является продуктом в высшей степени оригинального, уходящего временами, по его собственному свидетельству [153], на уровень бессознательного, мышления этого гениального учёного. Пуанкаре было свойственно создавать наглядные графические методы, позволяющие получать простое решение задачи, не прибегая к сложным вычислениям. В качестве другого примера графического метода можно привести его теорию предельных циклов [154], которая была создана в 1881–1882, 1885–1886 годах. Долгое время эта теория не находила применения (исключение составила работа Бендиксона [155] по теории множеств) и только в 1928 г. была использована А. А. Андроновым [156] для создания математического аппарата теории колебаний [157].

Пуанкаре по праву считается величайшим математиком конца XIX — начала XX века, им также было опубликовано более 20 монографий — курсов лекций в Сорбонне по различным вопросам математической физики, ряд работ по теории относительности [158–160]. Отметим здесь, что сам метод сферы Пуанкаре был изложен в курсе лекций “Математическая теория света” [1] (этот вопрос будет подробно рассмотрен в приложении к данной работе). Тем не менее, сам Пуанкаре отводил математической (теоретической) физике следующее место [161]: “Я позволю себе сравнить науку с библиотекой, которая должна непрерывно расширяться...

Такая обязанность... лежит на экспериментальной физике, которая одна лишь в состоянии обогащать библиотеку. Что касается математической физики, то её задача состоит в составлении каталога. Если каталог составлен хорошо, то библиотека не делается от этого богаче, но читателю облегчается пользование её сокровищами. С другой стороны, каталог, указывая библиотекарю на пробелы в его собраниях, позволяет ему дать его кредитам рациональное употребление; а это тем более важно ввиду их совершенной недостаточности". На этом весьма актуальном замечании Пуанкаре мы закончим первую часть обзора.

В заключение автор выражает благодарность Н. Г. Бондаренко за перевод отрывка из работы Пуанкаре, Я. И. Ханину, И. А. Андроновой, В. В. Кочаровскому и Вл. В. Кочаровскому за ряд полезных замечаний, позволивших улучшить содержание работы, С. А. Харламову (ИПМех РАН) за обсуждение вопросов, связанных с работой механических гироскопов, сотрудникам научных библиотек ИПФ РАН, НИРФИ, НИФТИ, ННГУ за помощь в работе.

Работа частично поддержана грантом N 96-02-18568а РФФИ.

Приложение

## ОТРЫВОК ИЗ РАБОТЫ А. ПУАНКАРЕ "МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА"

### Предисловие

С 1885 г. по 1895 г. Пуанкаре работал на кафедре математической физики Сорбонны — Парижского университета (с 1887 г. — заведующий кафедры). За эти годы им были прочитаны 20 курсов лекций (по числу семестров) [162]. Темы курсов очень редко повторялись, в этом случае читался совершенно новый курс. Пуанкаре никогда не писал заранее текст лекций, по ходу чтения их записывал кто-либо из студентов или бывших студентов [163], и к началу следующего учебного года они редактировались и издавались в виде книги. Среди лиц, записывавших лекции Пуанкаре [164], многие стали впоследствии известными учеными, например, Э. Борель — математик, академик Французской АН, чл. корр. АН СССР, директор института А. Пуанкаре, Э. Леруа — философ-идеалист, математик, палеонтолог, антрополог.

Изложение метода комплексной плоскости и метода сферы Пуанкаре является частью курса "Математическая теория света. Том 2" [1], прочитанного в 1 семестре 1891–1892 учебного года. Запись и редакцию лекций проводили Лямонт и доктор наук Гурмузеску [164]. Соответствующий отрывок из [1] был в 1975 г. переиздан в репринтном издании [165], по которому и был осуществлён настоящий перевод на русский язык. Прежде чем привести перевод этого отрывка, приведём некоторые пояснения

относительно упомянутых в нём исследователей, изучавших явление вращения плоскости поляризации света.

1. О. Френель (A. Fresnel, 1788–1827) первым ввёл понятие циркулярной и эллиптической поляризации света, а также дал феноменологическое описание вращения плоскости поляризации света.

2. Д. Эйри (D. Airy, 1801–1892), директор Гринвичской обсерватории. В 1830 г. ввёл разложение состояния поляризации света по взаимно ортогональным циркулярным поляризациям — правоциркулярной и левоциркулярной [29].

3. Реуш (Reusch) проводил описанные Пуанкаре эксперименты со стопой слюдяных пластинок. Никаких данных об этом учёном в известной нам литературе по истории физики не содержится.

4. Э. Малляр (E. Mallard, 1833–1894) — французский кристаллограф, геолог, генеральный инспектор шахт (1886), действительный член Французской АН (1890) создал теорию (по-видимому, феноменологическую) вращения поляризации [166, 167]. Как отмечено в [167], труды Малляра переиздавались во Франции в 1930 и 1953 гг., однако отыскать их в нашей стране не удалось. В [29] фрагментарно излагается его теория вращения поляризации в контексте возникновения частичной круговой поляризации при отражении света от кристалла андалузита, из чего можно сделать вывод, что это феноменологическая теория.

Рассмотрим вопрос о заголовке соответствующего раздела [1], который был назван Пуанкаре “Вращающаяся поляризация. Теория Г. Малляра”. Пуанкаре пишет, что будет излагать теорию вращения плоскости поляризации по г. Малляру, а для упрощения расчётов проведёт некоторые предварительные рассуждения. Здесь следует иметь в виду манеру Пуанкаре давать собственным результатам имена людей, с которыми он обсуждал данный вопрос, либо разговор с которыми или чтение работ которых привело его к постановке данной задачи. В качестве примера можно привести полученные Пуанкаре функции, которые он назвал функциями Фукса и функциями Клейна [163]. Следует отметить, что в тех случаях, когда Пуанкаре в своих курсах лекций излагал чужие теории, он давал соответствующую ссылку. В данном случае ссылки на Малляра не приводится, из чего следует, что, вероятно, у Малляра нет публикаций на данную тему. Кроме того, во всех известных нам публикациях, в том числе и во французских (см. обзорную часть данной работы), используется термин “сфера Пуанкаре”, имя Малляра при этом не упоминается. Из вышеизложенного можно заключить, что Малляр дал теорию вращения плоскости поляризации при прохождении линейно поляризованного света через стопу тонких линейных фазовых пластинок, оси двулучепреломления которых взаимно развернуты, а “некоторые предварительные рассуждения” Пуанкаре и есть, собственно, изложение метода комплексной плоскости и метода сферы Пуанкаре. Этот вопрос требует дальнейшего

рассмотрения, что связано с изысканием и изучением работ Малляра.

Отметим, что стиль изложения Пуанкаре чрезвычайно ясный и чёткий. Однако специфика записи лекций привела к тому, что в некоторых местах имеются пропуски слов, что может привести к неправильному пониманию текста. Недостающие слова приводятся нами в квадратных скобках. Кроме того, в тексте имеется ряд явных опечаток. Тем не менее, было решено привести перевод текста в том виде, каким он был в оригинале, а исправление опечаток дать в фигурных скобках. В фигурных скобках приводятся также необходимые комментарии. При переводе сохранена нумерация параграфов и рисунков. Перевод с французского выполнен Н. Г. Бондаренко под редакцией и с примечаниями автора обзора.

### ВРАЩАЮЩАЯСЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ. ТЕОРИЯ г. МАЛЛЯРА

155. Теория, которую дал Френель для вращательной способности, не является, строго говоря, физической теорией, а лишь установлением математического тождества.

Теория Эйри также ограничивается добавлением к уравнениям членов, необходимых для согласования их выводов с наблюдаемыми результатами.

Опыты Реуша с элементами {пластинками} из слюды подали идею другим теориям, в частности той, которую мы собираемся изложить, согласно г. Малляру.

Изложение этой теории требует достаточно длинных расчётов, которые мы собираемся упростить с помощью некоторых предварительных рассуждений.

Напомним сначала, в чём состоят эксперименты Реуша: Реуш складывал пластинки слюды, очень тонкие, с параллельными поверхностями, идентичные между собой, таким образом, что главное сечение {ориентация осей линейного двулучепреломления} одной пластинки составляло с главным сечением последующей угол  $45^\circ$  и  $60^\circ$ . Этот угол мог бы быть любым: эти два конкретных значения были выбраны единственно потому, что они соответствовали симметрии 3-го порядка. Система, полученная таким образом, обладает вращательной способностью {вращение плоскости поляризации} как кварцевая пластинка, перпендикулярная оси {вырезанная перпендикулярно оптической оси}.

Если падающее колебание линейно [поляризовано], то выходящее колебание в общем случае эллиптическое {эллиптически поляризовано}, но эллипс очень вытянут, тем сильнее, чем тоньше пластинки. Для очень тонких пластин эллипτικότητα поляризации очень слаба и явление приближается к явлению в кварце {т. е. к вращению плоскости поляризации}.

Итак, предположим, что мы будем иметь последовательность плоских пластин с параллельными торцами, сложенных друг с другом: мы возьмём за плоскость  $xy$  плоскость, параллельную плоскости пластин. Световая волна, [волновой фронт которой] параллелен этой плоскости, падая на систему пластин, не испытывает отклонения и [волновой фронт] постоянно остаётся параллельным этому направлению.

Пусть колебание [электромагнитного поля] происходит в плоскости [волнового фронта] волны

$$\begin{aligned}\xi &= A e^{\sqrt{-1}pt}, \\ \eta &= B e^{\sqrt{-1}pt}\end{aligned}$$

(по поводу этих мнимых {комплексных} см. пред. главу).  $A$  будет, вообще говоря, мнимой {комплексной} величиной

$$A = A_0 e^{\sqrt{-1}\varphi},$$

тоже самое

$$B = B_0 e^{\sqrt{-1}\psi},$$

$A_0$  и  $B_0$  — амплитуды колебаний;  $\varphi$ ,  $\psi$  — их фазы. Тогда

$$\begin{aligned}\xi &= A_0 \cos(pt + \varphi), \\ \eta &= B_0 \cos(pt + \psi).\end{aligned}$$

Отношение  $B/A$  также в общем случае будет комплексным, следовательно, мы положим

$$B/A = u + \sqrt{-1}v.$$

Значение этого отношения определяет форму эллипса и его ориентацию.

156. Способ представления колебаний.

{Здесь начинается изложение метода комплексной плоскости. Подробное описание этого метода с большим количеством иллюстраций приводится в [5].}

Мы будем представлять изменение этого эллипса с помощью перемещений конца комплексного вектора  $u + \sqrt{-1}v$ , то есть точки, имеющей абсциссу  $u$  и ординату  $v$  (рис. 41).

Если  $B/A$  — действительная величина, [то]  $v = 0$ , представляющая [состояние поляризации] точка  $Q$  находится на оси  $u$ : колебание линейно [поляризованное], поскольку  $\eta/\xi$  — действительное число, угол его направления по отношению к  $Ox$  определён через

$$B/A = \tan \theta = u.$$

Следовательно,

$$OQ = \tan \theta.$$

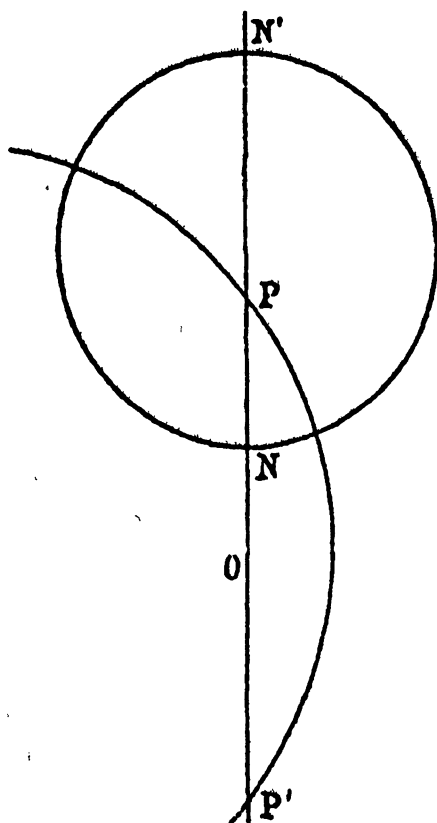


Рис. 41.

Если  $V/A$  чисто мнимая величина, две компоненты [электрического поля] имеют разность фаз  $\pi/2$ , колебание эллиптическое и его оси направлены по осям координат. Представляющая [состояние поляризации] точка  $N$  находится на оси  $v$ .  $ON$  представляет отношение осей эллипса  $V/A$ .

Если имеется  $OP = 1$ , точка  $P$  представляет циркулярное колебание [вектора электрического поля]  $V/A = \sqrt{-1}$ , как и точка  $P'$ , для которой  $OP' = 1$ , или  $V/A = -\sqrt{-1}$ . Первое колебание — правое {правоциркулярное}, второе — левое {левоциркулярное}.

Вообще говоря, точки, расположенные выше [оси]  $Ou$  ( $v > 0$ ), представляют правые {правоциркулярные} колебания, точки ниже [оси]  $Ou$  ( $v < 0$ ) — левые {левоциркулярные} колебания.

Предположим, что луч идёт поперёк кристаллической пластинки, с главными сечениями, ориентированными по осям координат  $\xi$  и  $\eta$ , распространение вдоль которых происходит с неравными скоростями; фазы [колебаний электрических полей параллельных этим осям] меняются неодинаково, модули  $A_0$  и  $B_0$  не меняются, но [отношение]  $V/A$  изменяется



и становится, например, равным

$$(B/A) e^{\sqrt{-1}\omega}.$$

Точка  $M'$ , которая представляет новое колебание, будет, следовательно, такова [что]

$$OM' = OM, \quad MOM = \omega$$

{здесь опечатка, следует читать  $\widehat{MOM}$ }.

Всё происходит так, как если бы плоскость повернулась на угол вокруг точки  $O$ , причём  $\omega$  является разностью фаз, внесённой кристаллической пластинкой.

Для лучей различного цвета, проходящих через ту же пластинку,  $n - n'$  { $n$  и  $n'$  — показатели преломления в медленной и быстрой осях линейного двулучепреломления} не зависит от длины волны, если мы пренебрегаем дисперсией; разница времён [запаздывание между светом прошедшим по медленной и быстрой осям], следовательно, одинакова для всех лучей. [Фаза]  $\omega$  равна  $2\pi$ , когда эта разность равна целому периоду:  $\omega$  связана обратным соотношением с периодом {то есть с длиной поляризационных биений} или обратным соотношением с длиной волны { $\omega = 2\pi l(n - n')/\lambda = 2\pi l/L_G$ , где  $\lambda$  — длина волны света,  $L_G = \lambda/(n - n')$  — длина поляризационных биений,  $l$  — толщина пластинки}.

157. Давайте найдём, в принятом нами способе представления, каким будет [геометрическое] место точек, соответствующих колебаниям, для которых дана либо ориентация осей [эллипса], либо отношение осей [эллипса].

Чтобы найти эти положения, мы будем опираться на следующую теорему: {эта теорема доказывает, что геометрические места точек на комплексной плоскости, для которых азимут или эллиптичность постоянны, — это круги. Подробное доказательство этой теоремы с большим количеством иллюстраций приводится в [5]}.

**Теорема.** Пусть комплексная величина

$$w = u + \sqrt{-1}v = (a + bt)/(c + dt),$$

где  $a, b, c, d$  — мнимые константы,  $t$  — действительная переменная. Когда  $t$  меняется от  $-\infty$  до  $\infty$ , точка [с координатами]  $(u, v)$  описывает окружность.

Обозначим через  $a_0, b_0, c_0, d_0$  величины, комплексно-сопряжённые с  $a, b, c, d$ :

$$w_0 = u - \sqrt{-1}v = (a_0 + b_0t)/(c_0 + d_0t).$$

Откуда

$$u^2 + v^2 = ww_0 = P_1/(c + dt)(c_0 + d_0t) = P_1/P_4,$$

$$\begin{aligned}u &= (w + w_0)/2 = P_2/P_4, \\v &= (w - w_0)/2\sqrt{-1} = P_3/P_4, \\1 &= P_4/P_4,\end{aligned}$$

где  $p_1, p_2, p_3, p_4$  {опечатка, следует читать  $P_1, P_2, P_3, P_4$ } — полиномы второй степени по  $t$ . Эти полиномы не могут быть независимыми, и мы будем иметь соотношение в виде уравнения

$$C_1(u^2 + v^2) + C_2u + C_3v + C_4 = 0,$$

которое представляет [уравнение] окружности.

Если это так, рассмотрим точки, которые представляют эллипсы с осями, направленными по  $Ox', Oy'$ , составляя угол  $\theta$  с осями координат.

Проекции колебаний на  $Ox'$  и  $Oy'$  будут:

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi \cos \theta + \eta \sin \theta = (A \cos \theta + B \sin \theta) e^{\sqrt{-1}pt}, \\ \eta' &= -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta = (-A \sin \theta + B \cos \theta) e^{\sqrt{-1}pt}.\end{aligned}$$

Пусть  $\tau$  — отношение осей

$$(-A \sin \theta + B \cos \theta)/(A \cos \theta + B \sin \theta) = \sqrt{-1} \tau$$

или

$$\begin{aligned}B/A &= u + \sqrt{-1}v, \\ (u + \sqrt{-1}v - \text{tang } \theta) / [1 + (u + \sqrt{-1}v) \text{tang } \theta] &= \sqrt{-1} \tau.\end{aligned}$$

Если мы имеем положение точек, для которых  $\theta = \text{const}$ ,  $\tau$  будет действительной переменной, связанной с  $u + \sqrt{-1}v$  гомографическим соотношением. Мы только что видели, что когда меняется от  $-\infty$  до  $\infty$  точка [с координатами]  $(u, v)$  описывает окружность. Эта окружность будет проходить через точки  $P$  и  $P'$ , определённые ранее (рис. 41). Действительно, эти точки представляют циркулярные колебания, оси которых имеют неопределённое направление.

Если мы положим  $\tau = \text{const}$ , то если мы зададимся формой эллипса и позволим изменяться  $\theta$ , то есть ориентации этого эллипса, [величина]  $\text{tang } \theta$  будет ещё одной действительной переменной, связанной с  $u + \sqrt{-1}v$  гомографическим соотношением. Точка [с координатами]  $(u, v)$  снова описывает окружность.

Если мы возьмём  $ON = \tau$ ,  $ON' = 1/\tau$ , окружность пройдёт через точки  $N$  и  $N'$ , эти точки соответствуют эллипсам с осями, направленными по осям координат: эллипс  $N$  равен эллипсу  $N'$ , но он повернут на  $90^\circ$ . Из соображений симметрии  $NN'$  должен быть диаметром. Так как, с другой стороны,

$$1 = ON, \quad ON' = \overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2,$$

то две окружности  $NN'$  и  $PP'$  пересекаются ортогонально.

158. Впоследствии нам будет удобно заменить это плоское представление на аналогичное представление на сфере; мы осуществим это преобразование с помощью стереографического проектирования, при этом плоскость  $(u, v)$  является плоскостью изображения и начала координат  $O$ , а  $uv$  — точка касания сферой этой плоскости. Такая проекция, как известно, сохраняет углы, и окружности проектируются в окружности.

Точке  $M$  на плоскости соответствует точка  $m$ , где прямая  $VM$  встречается со сферой. Мы условимся представлять эллипс  $M$  через точку  $m$  (рис. 42) {хорошие иллюстрации проекции комплексной плоскости на сферу Пуанкаре приводятся в [4]}.

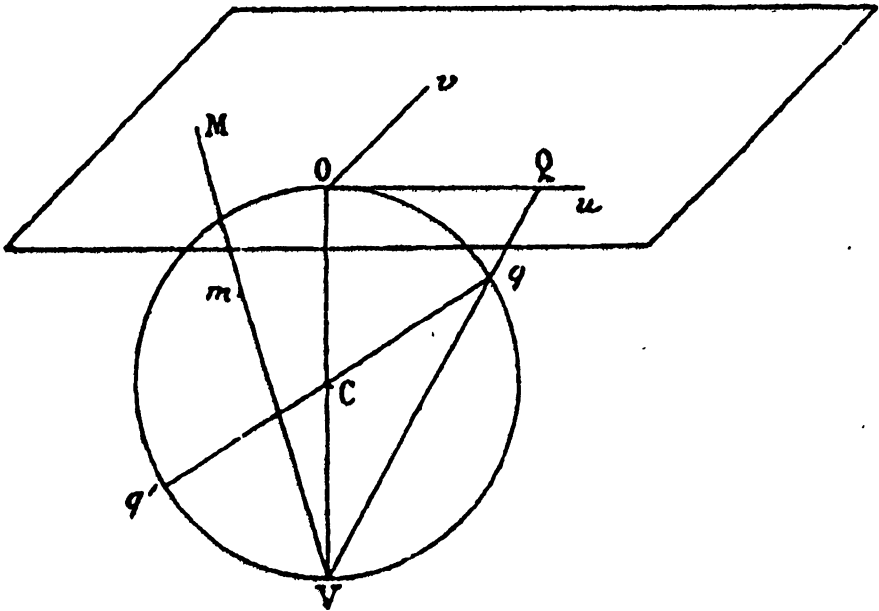


Рис. 42.

Ось  $u$  проектируется в большую окружность, проходящую через  $O$ , которую мы назовём экватором. Точки экватора будут, следовательно, представлять линейные колебания [линейную поляризацию].

Пусть  $Q$  — точка на оси  $u$ , а  $q$  — её проекция на сферу,

$$OQ = \operatorname{tang} \theta,$$

и если мы положим диаметр сферы равным 1, то

$$\begin{aligned} \theta &= \widehat{OVq}, \\ 2\theta &= \widehat{OCq}; \end{aligned}$$

угол  $O$  {опечатка, здесь по смыслу должно быть  $\theta$ } между осями эллипса и осями координат будет, следовательно, равен половине долготы точки  $q$ .

Две диаметрально противоположные точки имеют долготу, которая отличается на  $\pi$ . Они, следовательно, представляют линейные колебания, перпендикулярные друг другу {взаимно ортогональные линейные поляризации}.

Точки [принадлежащие] оси  $v$  проектируются на большую окружность, перпендикулярную экватору, которую мы назовём главным меридианом. Точка  $N$  проектируется в  $n$  (рис. 43)

$$\widehat{OCn} = 1 = \text{широта},$$

$$\widehat{OVn} = 1/2,$$

$$ON = \text{tang } 1/2.$$

Отношение осей эллипса, представленного точкой  $n$ , равно, следовательно, тангенсу половинной широты этой точки  $n$ .

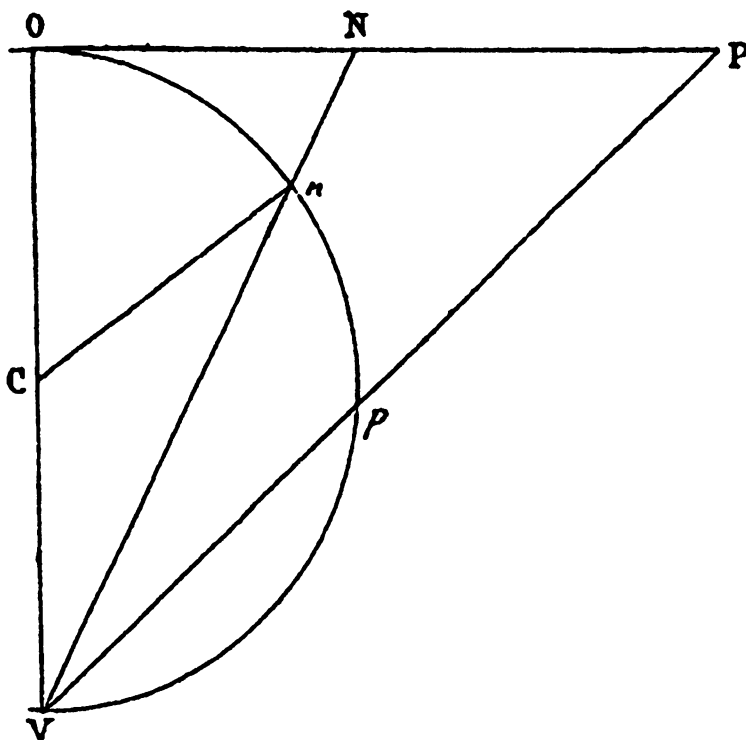


Рис. 43.

Для точки  $P$ ,  $OP = OV$ , поэтому  $\widehat{OV P} = 45^\circ$  и  $\widehat{OC P} = 90^\circ$ . В свою очередь, точка  $P$  проектируется в полюс  $p$  на экваторе {опечатка, здесь по смыслу должно быть — на главном меридиане}. Два полюса экватора {опечатка — главного меридиана} соответствуют циркулярным колебаниям, а различные точки главного меридиана распределяются в соответ-

ствии с осями координат. Эти эллипсы будут правыми в северной полусфере и левыми в южной.

Ориентация осей [эллипсов] зависит только от долготы. [Геометрическое] место точек, для которых  $\theta = \text{const}$ , — это окружности, проходящие через  $p$  и  $p'$ , то есть меридианы.

Форма эллипса зависит только от широты; [геометрические] места точек, соответствующих заданной форме [эллипса] — это параллели.

Предположим, что световой луч проходит через двулучепреломляющую пластинку, не имеющую, однако, вращательной способности. Если главные сечения пластинки направлены по осям, всё происходит как если бы [комплексная] плоскость вокруг точки  $O$  или сфера вокруг [оси]  $OV$  повернулась на угол  $\omega$ , точки  $O$  и  $V$  соответствуют главным сечениям, а азимут осей эллипса пропорционален долготе. Но точки  $O$  и  $V$  не играют никакой специальной роли, [поскольку] повернуть оси в плоскости  $xy$  означает просто изменить отсчёт долготы.

Рассмотрим пластинку, у которой главные сечения имеют любые направления: одно, например, соответствует точке  $q$ , другое — диаметрально противоположной точке  $q'$  на экваторе, при этом ось  $qq'$  будет играть ту же роль, что ранее [ось]  $OV$ . Результат будет таким же, как если бы сфера повернулась [на угол]  $\omega$  вокруг  $qq'$ . Прохождение [света] через пластинку соответствует, таким образом, вращению [сферы] вокруг оси, расположенной в плоскости экватора.

Если пластинка обладает вращательной способностью без двулучепреломления, как кварцевая пластинка, [вырезанная] перпендикулярно [оптической] оси, эллипс сохраняет свою форму, но его ориентация меняется, и всё происходит, как если бы сфера повернулась на некоторый угол вокруг [оси]  $pp'$ , перпендикулярной плоскости экватора.

Если два эффекта — двулучепреломление и вращательная способность — накладываются, два вращения сферы складываются, тогда их можно заменить одним вращением вокруг некоторой оси.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Poincare H. Theorie mathematique de la lumiere. V.2. — Paris: G. Carre, 1892. P. 275–285.
2. Шерклифф У. Поляризованный свет. — М.: Мир, 1965. 264 с.  
Shurcliff W. A. Polarized light. — Cambridge Massach.: Harvard Univ. Press, 1962. 207 p.
3. Shurcliff W. A., Ballard S. S. Polarized light. — Princeton NY: Van Norstad, 1964.
4. Горшков М. М. Эллипсометрия. — М.: Сов. радио, 1974. 199 с.
5. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. — М.: Мир, 1981. 583 с.

- Azzam R., Bashara N. *Ellipsometry and Polarized light*. — Amsterdam—NY—Oxford: North-Holland Publ. Comp., 1977.
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973.  
Born M., Wolf E. *Principles of optics*. — Oxford: Pergamon Press.
  7. Ramachandran G.N., Ramaseshan S. *Cristall Optics*. In *Handbuch der Physik*. Band 25/1. — Berlin: Sprinder Verlag, 1961. P.1-217.
  8. Физический словарь. Т.1-5. — М.: ОНТИ, 1937-1939.
  9. Физический энциклопедический словарь. Т.1-5. — М.: Сов. Энциклопедия, 1960-1966.
  10. Физический энциклопедический словарь. — М.: Сов. Энциклопедия, 1983.
  11. Физическая энциклопедия. Т.1-4. М.: Сов. Энциклопедия—Бол. Российская Энциклопедия, 1988-1994.
  12. Запасский В.С. Поляризация света. Сб: Физическая энциклопедия. Т.4. — М.: Бол. Российская Энциклопедия, 1994.
  13. Jerrard H. C. // *JOSA*. 1954. V. 44. N 8. P. 634-640.
  14. Azzam R. M., Bashara N. M. // *JOSA*. 1972. V. 62. N 2. P. 222-229.
  15. Azzam R. M., Bashara N. M. // *JOSA*. 1972. V. 62. N 3. P. 336-340.
  16. Azzam R. M., Bashara N. M. // *JOSA*. 1972. V. 62. N 11. P. 1252-1257.
  17. Hurwitz H., Jones R. C. // *JOSA*. 1941. V. 31. N 7. P. 493-499.
  18. Бокштейн М.Ф. // *ЖТФ*. 1948. Т.18. N 5. С. 673-678.
  19. Berry M. V. // *Proc. Royal Soc. London*. 1984. V. A392. N 1802. P. 45-57.
  20. Виницкий С. И., Дербов В. Л., Дубовик В. Н., Марковски Б. Л., Степановский Ю. П. // *УФН*. 1990. Т. 160. N 6. С. 1-49.
  21. Berry M. // *Phys. Today*. 1990. V. 43. N 12. P. 34-40.
  22. Anandan J. // *Nature*. 1992. V. 360. N 6402. P. 307-313.
  23. Клышко Д. Н. // *УФН*. 1993. Т. 163. N 11. С. 1-18.
  24. Бондарчук В. И., Давтян Л. С., Корнеев Д. А. // *УФН*. 1996. Т. 166. N 2. С. 185-194.
  25. Ишлинский А. Ю. *Механика гироскопических систем*. — М.: АН СССР, 1963. 480 с.
  26. Pockels L. *Lehrbuch der kristalloptik*. — Leipzig, 1906.
  27. Chaumont L. // *Compt. Rend.* 1913. Т. 156. P. 1604.
  28. Chaumont L. // *Ann. chim. et phys.* (9 ser.) 1915. V. 4. P. 101.
  29. Bouassi H. *Optique cristalline double refraction*. — Paris, 1925. 482 p.
  30. Skinner C. A. // *JOSA*. 1925. V. 10. P. 491-529.
  31. Becquerel J. // *Com. Phys. Lab. Univ. Leiden*. 1928. N 91C.
  32. Becquerel J. // *Com. Phys. Lab. Univ. Leiden*. 1930. N 211A.
  33. Wright F. E. // *JOSA*. 1930. V. 20. P. 529-564.
  34. Grillet L., Bizette H. // *Jorn. Phys. et le Radium*. 1930. V. 1. N 3. P. 99-120.
  35. Mathieu J. // *Jorn. Phys. et le Radium*. 1931. V. 2. N 6. P. 189-197.

36. Bruhat G., Grivet P. // *Jorn. Phys. et le Radium*. 1935. V.6. N1. P. 12-26.
37. Bjornstahl Y. // *Physicalische Zeitschrift*. 1939. V.40. N13. P. 437-443.
38. Bjornstahl Y. // *Zeitschrift Instrumentenkunde*. 1939. V.59. N11. P. 425-430.
39. Spellman O., Bjornstahl Y. // *Kolloid. Beich*. 1941. V.52. P. 403.
40. Perrin F. // *Jorn. Chem. Phys*. 1942. V. 10. N7. P. 415-427.
41. Destriau G., Proteau J. // *Jorn. Phys. et le Radium*. 1949. V. 10. N2. P. 53-55.
42. Ramachandran G.N., Ramaseshan S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1951. V. A41. N1. P. 32.
43. Ramachandran G.N., Ramaseshan S. // *JOSA*. 1952. V.42. N1. P. 49-56.
44. Ramachandran G.N., Ramaseshan S. // *Jorn. Ind. Instr. Sci*. 1955. V. 86. P. 95.
45. Walker M.J. // *Am. Jorn. Phys*. 1954. V. 22. N4. P. 170-174.
46. McMaster W.H. // *Am. Jorn. Phys*. 1954. V. 22. N6. P. 351-362.
47. Розенберг Г.В. // *УФН*. 1955. Т. 56. N1. С. 77-109.
48. Pancharatnam S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1955. V. A41. P. 130.
49. Pancharatnam S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1955. V. A42. P. 86.
50. Pancharatnam S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1955. V. A42. P. 235.
51. Pancharatnam S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1956. V. A44. N5. P. 247-262.
52. Pancharatnam S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1956. V. A44. N6. P. 398-417.
53. Pancharatnam S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1957. V. A45. P. 402.
54. Pancharatnam S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1957. V. A45. N1. P. 1.
55. Pancharatnam S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1957. V. A46. N1. P. 280.
56. Pancharatnam S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1958. V. A47. N4. P. 201-209.
57. Pancharatnam S. // *Proc. Ind. Acad. Sci*. 1958. V. A46. N1. P. 210-229.
58. Koester C.J. // *JOSA*. 1959. V. 49. N4. P. 405-409.
59. Takasaki H. // *JOSA*. 1961. V. 51. N10. P. 1146.
60. Takasaki H. // *JOSA*. 1962. V. 52. N6. P. 718-719.
61. Drude P. *Lehrbuch der Optik*. — Leipzig, 1906. 538 p.
62. Martin L. C. *An introduction to applied optics*. — London: I. Pitman & sons, 1930. V. 1. 324 p.; 1932. V. 2. 288 p.
63. Born M. *Optic*. — Berlin: Springer Verlag, 1933. 591 p.
64. Шустер А. *Введение в теоретическую оптику*. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.  
Shuster A. *An introduction to the theory of optics*. (third ed.) — London: Edvard Arnold and Co, 1928.
65. Поль Р.В. *Введение в оптику*. — М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. 484 с.
66. Ландсберг Г.С. *Оптика*. Втор. изд. — М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948. 631 с.

67. Szivessy G., Schweers C. // *Ann. der Physik*. 1929. V. 1. N 7. P. 891–947.
68. Szivessy G., Dierkesmann A. // *Ann. der Physik*. 1931. V. 11. N 8. P. 949–984.
69. Szivessy G., Munster C. // *Ann. der Physik*. 1934. V. 20. N 7. P. 703–736.
70. Jerrard H. C. // *JOSA*. 1948. V. 38. N 1. P. 35–59.
71. Marathay A. S. // *JOSA*. 1971. V. 61. N 10. P. 1363–1372.
72. Simon A., Ulrich R. // *Appl. Phys. Lett.* 1977. V. 31. N 10. P. 1363–1372.
73. Ulrich R., Simon A. // *Appl. Optics*. 1979. V. 18. N 13. P. 2241–2251.
74. Rashleigh S. C., Ulrich R. // *Appl. Phys. Lett.* 1979. V. 34. N 11. P. 768–770.
75. Gauthier F., Dubos J., Blaison S., Graindorge P. Attempt to draw a circular polarization conserving fiber. In *Fiber-Optics rotation sensors* / ed. Ezekiel S., Arditty H. J. — Berlin: Springer Verlag, 1982. P. 196–200.
76. Ferdinand P., Lesne J. L. Induced circular birefringence and ellipticity measurement in Faraday effect fiber ring interferometer. In *Fiber-Optics rotation sensors* / ed. Ezekiel S., Arditty H. J. — Berlin: Springer Verlag, 1982. P. 215–221.
77. Day G. W., Payne D. N., Barlow A. J., Ramсков-Hansen J. J. // *Jorn. of Lightwave Techn.* 1984. V. LT-2. N 1. P. 56–60.
78. Ulrich R. Polarization and depolarization in fiber-optic gyroscope. In *Fiber-Optics rotation sensors* / ed. Ezekiel S., Arditty H. J. — Berlin: Springer Verlag, 1982. P. 52–57.
79. Azzam R. M. // *JOSA*. 1979. V. 68. N 12. P. 1756–1757.
80. Cloude S. R. // *Optik*. 1986. V. 75. N 1. P. 26–36.
81. Galvani R., Caponi R., Cisterino F., Coppa G. // *Jorn. of Lightwave Techn.* 1987. V. LT-5. N 9. P. 1176–1182.
82. Малыкин Г. Б. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1989. Т. 32. N 8. С. 1020–1024.
83. Малыкин Г. Б., Степанов Д. П. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1990. Т. 33. N 2. С. 255–258.
84. Sekera Z., Nagaraia R., Dibble P. // *Rev. Sci. Instr.* 1963. V. 34. N 7. P. 764–768.
85. Вайнер Ю. Г., Хангильдин У. В. // *Оптика и спектроскопия*. 1976. Т. 41. N 2. С. 315–319.
86. Lefevre H. C. // *Electron. Lett.* 1980. V. 16. N 20. P. 778–780.
87. Ulrich R., Johnson M. // *Appl. Optics*. 1979. V. 18. N 11. P. 1857–1861.
88. Noe R. // *Electron. Lett.* 1986. V. 22. N 15. P. 772–773.
89. Johnson M. // *Appl. Optics*. 1979. V. 18. N 9. P. 1288–1289.
90. Алексеев Э. И., Базаров Е. Н., Израэлян В. Г. // *Квантовая электроника*. 1984. Т. 11. N 1. С. 171–173.
91. Itoh K., Saiton T., Ohtsuka Y. // *Jorn. of Lightwave Techn.* 1987. V. LT-5. N 7. P. 916–919.
92. Ulrich R. // *Appl. Phys. Lett.* 1979. V. 35. N 11. P. 840–849.



93. Tatam R. P., Pannell C. N., Jones J. D., Jackson D. A. // *Jorn. of Lightwave Techn.* 1987. V. LT-5. N 7. P. 980-985.
94. Goto K., Sueta T., Makimoto T. // *IEEE Journ. of Quantum Electr.* 1972. V. QE-8. N 6. P. 486-493.
95. Геликонов В. М., Гусовский Д. Д., Леонов В. И., Новиков М. А. // *Письма в ЖТФ.* 1987. Т. 13. N 13. С. 775-779.
96. Martinelli M. // *Optics Commun.* 1989. V. 72. N 6. P. 341-344.
97. Warbrick K. // *Electron. lett.* 1986. V. 22. N 13. P. 711-713.
98. Верестецкий В. В., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Квантовая электродинамика.* — М.: Наука, 1989. 723 с.
99. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля.* — М.: Наука, 1967. 460 с.
100. Гинзбург В. Л. *Теоретическая физика и астрофизика.* — М.: Наука, 1975. 414 с.
101. Железняков В. В. *Электромагнитные поля в космической плазме.* — М.: Наука.
102. Wolf E. // *Nuovo Chimento.* 1959. V. 13. N 6. P. 1165-1181.
103. Parrent G. V., Roman P. // *Nuovo Chimento.* 1959. V. 15. N 3. P. 370-388.
104. McMaster W. H. // *Rev. Mod. Phys.* 1961. V. 33. N 1. P. 8-28.
105. Биденхарн Л., Лаук Д. *Угловой момент в квантовой физике. Т. 2.* — М.: Мир, 1984. 647 с.  
Bidenharn L. C., Louck J. D. *Angular momentum in quantum physics.* — Massachusetts: Addison-Wesley, 1981.
106. Mandell L., Wolf E. *Optical coherence and quantum optics.* — N. Y.: Cambridge Univ. Press, 1995. 1165 p.
107. Бриллюэн Л. *Квантовая статистика.* — Харьков-Киев: ОНТИ, 1934. 510 с.  
Brillouin L. *Les statistiques quantiques et leurs applications.*
108. Beth A. // *Phys. Rev.* 1935. V. 48. N 5. P. 471.
109. Beth A. // *Phys. Rev.* 1936. V. 50. N 2. P. 115-125.
110. Запасский В. С., Коэлов Г. Г. // *Оптика и спектроскопия.* 1995. Т. 78. N 1. С. 100-104.
111. Геликонов В. М., Кучаева М. Н., Малыкин Г. Б. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34. N 6. С. 717-720.
112. Rashleigh S. C. // *Jorn. of Lightwave Techn.* 1983. V. LT-1. N 2. P. 312-331.
113. Poole C. D., Bergano N. S., Wagner N. E., Shulte H. J. // *Jorn. of Lightwave Techn.* 1988. V. 6. N 7. P. 1185-1190.
114. Tsubokava M., Ohashi M. // *Jorn. of Lightwave Techn.* 1990. V. 9. N 8. P. 948-951.
115. Santoro M., Poole C. D. // *Jorn. of Lightwave Techn.* 1994. V. 12. N 2. P. 288-293.

116. Малыкин Г. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37. N 2. С. 265–269.
117. Rodgoro A. J. Polarization properties of monomode optical fibers: the use of P. O. T. D. R. to determine spatial distribution. In *Fiber-Optics rotation sensors* / ed. Ezekiel S., Arditty H. J. — Berlin: Springer Verlag, 1982. P. 208–214.
118. Малыкин Г. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35. N 2. С. 189–199.
119. Малыкин Г. Б., Нефедов И. М., Позднякова В. И., Шерешевский И. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37. N 12. С. 1567–1575.
120. Smith R. B., Anderson C. O., Mitchel G. L. Numerical modeling of dual polarization interferometric gyros and sensors. In *Fiber-Optics rotation sensors* / ed. Ezekiel S., Arditty H. J. — Berlin: Springer Verlag, 1982.
121. Молчанов И. Я., Скроцкий Г. В. // *Квантовая электроника*. 1971. N 4. С. 2–26.
122. Алексеев Э. И., Базаров Е. Н., Израэлян В. Г. // *Квантовая электроника*. 1984. Т. 11. N 2. С. 397–400.
123. Рытов С. М. // *ДАН СССР*. 1938. Т. 18. N 4–5. С. 263–267.
124. Владимирский В. В. // *ДАН СССР*. 1941. Т. 31. N 3. С. 222–224.
125. Пермитин Г. В., Смирнов А. И. // *ЖЭТФ*. 1996. Т. 109. N 3. С. 736–751.
126. Харламов С. А. Частное сообщение.
127. Журавлев В. Ф. // *ПММ*. 1996. Т. 60. N 2. С. 323–326.
128. Ишлинский А. Ю. *Механика специальных гироскопических систем*. — Киев: АН УССР, 1952. 432 с.
129. Hannay J. H. // *Jorn. Phys. A*. 1985. V. 13. N 2. P. 221–230.
130. Ehrenberg W., Siday R. E. // *Proc. Royal Soc. London*. 1949. V. 62. N 349 B. P. 8–21.
131. Aharonov Y., Bohm D. // *Phys. Rev.* 1959. V. 115. N 3. P. 485–491.
132. Chambers R. G. // *Phys. Rev. lett.* 1960. V. 5. N 1. P. 3–5.
133. Berry M., Hannay J. H. // *Jorn. Phys. A*. 1988. V. 21. N 6. P. L325–L331.
134. Berry M. // *Nature*. 1987. V. 326. N 6110. P. 277–278.
135. Berry M. // *Jorn. Mod. Optic.* 1987. V. 34. N 11. P. 1400–1407.
136. Crane R. // *Appl. Optics*. 1969. V. 8. N 3. P. 538–540.
137. Haldane F. D. // *Optics lett.* 1986. V. 11. N 11. P. 730–732.
138. Chyba T. M., Wang L. J., Mandel L., Simon R. // *Optics lett.* 1988. V. 13. N 7. P. 562–564.
139. Simon R., Kimble H. J., Sudarshan E. C. // *Phys. Rev. lett.* 1988. V. 61. N 1. P. 19–22.
140. Bhandari R. // *Phys. lett.* 1988. V. A133. N 1–2. P. 1–3.
141. Bhandari R. // *Phys. lett.* 1989. V. A138. N 9. P. 469–473.
142. Bhandari R., Dasgupta T. // *Phys. lett.* 1990. V. A143. N 4–5. P. 170–175.

143. Hariharan P., Ciddor P. E. // *Optics Commun.* 1994. V. 110. N 1–2. P. 13–17.
144. Schmoltze H., Klein S., Dultz W. // *Phys. Rev. Lett.* 1994. V. 71. N 10. P. 1530–1533.
145. Tewaris S. P., Ashoka V. S., Ramana M. S. // *Optics Commun.* 1995. V. 120. N 5–6. P. 235–238.
146. Козел С. М., Листвин В. Н., Шаталин С. В., Юшкайтис Р. В. // *Оптика и спектроскопия.* 1986. Т. 61. N 6. С. 1295–1299.
147. Малыкин Г. Б. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34. N 2. С. 817–824.
148. Малыкин Г. Б. // *Оптика и спектроскопия.* 1996. Т. 81. N 3.
149. Малыкин Г. Б. // *Оптика и спектроскопия.* В печати.
150. Kugler M., Shtrikman S. // *Phys. Rev. D.* 1988. V. 37. N 4. P. 934–937.
151. Berry M. // *Proc. Royal Soc. London.* 1987. V. A414. N 1846. P. 31–46.
152. Klyshko // *Phys. Lett.* 1989. V. A140. N 1–2. P. 19–24.
153. Пуанкаре А. // *Наука и метод.* В кн. Пуанкаре “О науке”. — М.: Наука, 1983. С. 283–400.
154. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / пер. с французского Леонтович Е. и Майер А., под ред. Андропова А. А. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
155. Bendixon I. // *Acta matem.* 1901. V. 24. N 1. P. 1.
156. Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний. Тезисы докл. на 6-м съезде русских физиков. — М.-Л.: Гос. изд., 1928. С. 23–24.  
Андронов А. А. Собр. трудов. — М.: АН СССР, 1956. С. 32–33.
157. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. // *Теория колебаний.* 3-е изд. — М.: Наука, 1983.
158. Лоренц Г. А., Пуанкаре А., Эйнштейн А., Минковский Г. // *Принцип относительности* / под ред. Фредерикса В. К., Иваненко Д. Д. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.
159. *Принцип относительности.* Сборник работ по теории относительности / составитель Тяпкин А. А. — М.: Атомиздат, 1973. 331 с.
160. Логонов А. А. К работе А. Пуанкаре “О динамике электрона”. — М.: МГУ, 1988. 100 с.
161. Пуанкаре А. // *Наука и гипотеза.* В кн. Пуанкаре “О науке”. — М.: Наука, 1983. С. 5–152.
162. Пуанкаре А. Собрание трудов. Т. 3. — М.: Наука, 1974. 771 с.
163. Тяпкин А., Шибанов А. Пуанкаре. — М.: Мол. Гвардия, 1979.
164. Darboux G. D’Henri Poincare. In *H. Poincare Publiees.* V. 2. — Paris, 1916.
165. Swindell W. *Polarized light.* — Strousburg, 1975. P. 142–152.
166. *Grand Larousse Encyclopedique.* V. 13. — Paris, 1970.

167. Dictionary of scientific biography. V. 9. — N. Y.: Charles Scribner's Sons, 1974.

Институт прикладной физики  
РАН, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
10 июля 1996 г.

**APPLICATION OF THE POINCARÉ SPHERE TO POLARIZATION  
OPTICS, CLASSICAL AND QUANTUM MECHANICS**

*G. B. Malykin*

The paper contains an adapted popular-scientific description of the long-ago-invented (but still efficient) method of the so-called "Poincaré sphere" that has many potential applications in radiophysics, polarization optics, quantum electronics, etc. Although the method has been used sometimes in all three fields of physics, the major part of the radiophysical community is not familiar with the Poincaré sphere. Some exceptions, e. g., in the theory of the polarization transfer in an inhomogeneous scattering medium which we had been dealing with, prove the statement.

УДК 550.388.2:551.510.536

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЕ МЕТОДОМ РЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН НА ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

*Н. В. Бахметьева, В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов,  
В. Н. Бубукина, Ю. А. Игнатъев*

Приведены результаты исследований волновых движений на высотах нижней ионосферы новым методом, основанным на измерении скорости вертикального движения плазмы по изменению фазы сигнала, обратно рассеянного искусственно созданными периодическими неоднородностями электронной концентрации (ионосферными решётками). Метод позволяет исследовать процессы различных временных масштабов с периодом от нескольких десятков секунд до часов и более. На основе продолжительных наблюдений в течение 1990–1991 гг., проведённых вблизи Нижнего Новгорода, определены некоторые динамические и спектральные характеристики внутренних гравитационных волн.

### 1. В В Е Д Е Н И Е

Исследования внутренних гравитационных волн (ВГВ) как одной из важнейших составляющих динамики атмосферы проводятся в течение многих лет. Эти волны постоянно наблюдаются в верхней атмосфере и проявляются в нерегулярных изменениях ионосферных параметров — зональной и меридиональной компонентах скорости нейтрального ветра [1, 2], искажении формы метеорных следов и искусственных химических облаков [3, 4], атмосферной турбулентности, возмущениях электронной концентрации [5, 6] и т.д.

Исследованию ВГВ на высотах мезосферы и нижней термосферы различными методами посвящено огромное количество работ. Многие из них выполнены в рамках международных программ MAP, GLOBMET, DYANA и т.д. [7–9]. Изучаются влияние ВГВ на термический режим верхней атмосферы и атмосферную турбулентность, условия распространения этих волн и взаимодействие их между собой и атмосферными потоками, их скорости и направления распространения, энергетические и спектральные характеристики.

Среди методов, сравнительно давно используемых для исследования ВГВ, таких как метод вертикального зондирования в ВЧ диапазоне [2],

локация следов метеоров [1] и наблюдения за искусственными облаками [4], в последние годы важную роль стали играть методы, использующие излучение гидроксила для регистрации волн вблизи мезопаузы [10], радары некогерентного рассеяния [11], лидары [12] и MST-радары [13]. Последние имеют высокое пространственно-временное разрешение и позволяют проводить измерения в большом диапазоне высот.

В настоящей работе приведены некоторые результаты исследования ВГВ на основе измерений скоростей вертикальных движений  $V$  плазмы новым радиофизическим методом, основанным на измерении фазы сигнала, обратно рассеянного искусственными периодическими неоднородностями (ИПН) электронной концентрации, возникающими в ионосфере под действием мощных стоячих радиоволн ВЧ диапазона.

В работе приведены результаты определения некоторых характеристик ВГВ по измерениям  $V$  на высотах 60–120 км, проведённым в дневные часы с сентября 1990 г. по декабрь 1991 г. в загородной лаборатории НИРФИ вблизи г. Нижнего Новгорода (56,15°N, 44,3°E).

## 2. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Процесс образования искусственных периодических неоднородностей при воздействии на ионосферу мощного ВЧ радиоизлучения достаточно хорошо изучен и подробно описан в оригинальных работах и обзоре [14]. Методы измерений, основанные на явлении резонансного рассеяния пробных радиоволн от ИПН, базируются на измерениях таких параметров рассеянного сигнала, как его амплитуда и время релаксации после прекращения нагрева, что, в частности, позволяет определять плотность и температуру атмосферы, вертикальную компоненту скорости турбулентных движений. В свою очередь, скорость вертикальных движений плазмы  $V$  связана с изменением фазы обратно рассеянного сигнала соотношением [14]

$$V = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\Delta\phi}{\Delta t},$$

где  $\lambda$  — длина пробной волны, а  $\Delta\phi$  — изменение её фазы за время  $\Delta t$ .

Преимуществом метода является хорошее временное разрешение, которое фактически определяется периодом работы нагревного передатчика и может быть доведено до нескольких секунд, что позволяет исследовать процессы разной периодичности — от нескольких секунд до часов и более. В данной серии измерений временное разрешение составило 15 с. Разрешение по высоте определяется длиной зондирующего импульса ( $\Delta h = ct/2$ ) и для достаточно коротких импульсов, например, длительностью порядка 10 мкс, будет не более 1,5 км. В проведённых экспериментах величина  $\Delta h$  составляла 5–7 км.

Для создания ИПН использовался нагревный комплекс, излучавший в зенит радиоволны на частоте  $f = 5,545$  МГц с эффективной мощностью 20 МВт в течение 5 с. В качестве пробного сигнала в период релаксации ИПН в последующие 10 с использовался сигнал передатчика установки частичных отражений с длительностью импульса 50 (25) мкс и частотой повторения 50 Гц. Для регистрации фазы обратно рассеянного сигнала использовалась специализированная приёмно-регистрирующая аппаратура, которая позволяла вести запись амплитуды и фазы сигнала одновременно с шести высот. Наибольшее число измерений относится к высотам 90–120 км.

### 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СКОРОСТИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Результаты определения скоростей вертикальных движений подробно изложены в [15], где, в частности, исследовались сезонно-суточные вариации  $V$ . Получено, что среднемесячные значения  $V$  в дневные часы на высотах, меньших 90 км, составили около 1 м/с, возрастая до 5 м/с с увеличением высоты  $h$  до 120 км. На высотах, превышающих 90 км, в среднем преобладали движения вверх. На рис. 1 в качестве примера приведены высотные профили вертикальной скорости для трёх осенних месяцев 1991 г., которые дают представление о среднем характере изменений величины и направления  $V$  с высотой (положительные значения  $V$  означают движение вниз). Попутно отметим (это обсуждалось в [15]), что лишь в ноябре 1990 г. зарегистрированы преимущественно движения вниз с большим разбросом значений  $V$ .

В целом характер сезонно-суточных вариаций  $V$  оказался достаточно сложным. Спектральный анализ  $V$ , результаты которого частично приведены в [15, 16], показал, что временные вариации  $V$  в каждом из дней наблюдений в значительной степени могли быть обусловлены существованием в нижней ионосфере волновых движений различных масштабов. Остановимся более подробно на динамических и спектральных характеристиках  $V$  в дни, когда продолжительность непрерывных измерений была максимальна (до 6–7 ч).

Вначале проанализируем кривые суточного хода  $V$ . На рис. 2 в качестве примера приведены временные вариации усреднённых за минуту значений  $V$  для двух дней измерений: 27 февраля 1991 г. (на шести высотах) — рис. 2а и 15 марта того же года (на четырёх высотах) — рис. 2б, сглаженные методом скользящего среднего для исключения наиболее быстрых флуктуаций. Графики иллюстрируют основные особенности поведения  $V$ , характерные в целом для массива полученных данных, в частности, отчётливо видны волнообразные изменения  $V$  различных периодов

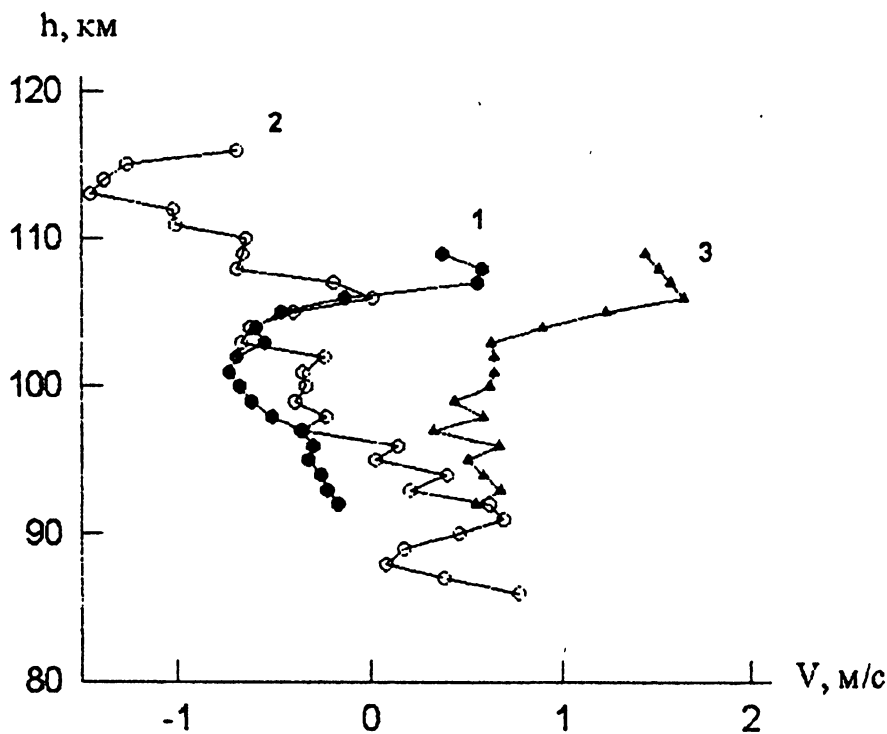


Рис. 1. Высотные профили вертикальной скорости для трёх месяцев 1991 г.: кривая 1 — сентябрь (12 дней), кривая 2 — октябрь (15 дней), кривая 3 — ноябрь (5 дней). Использовалось усреднение с весовыми коэффициентами, соответствующими количеству проведённых измерений. Профили сглажены по высоте с интервалом сглаживания 3 км.

на всех высотах. С ростом высоты волновые движения крупных масштабов проявляются более ярко. Как правило, модуль  $V$  растёт с высотой (см. рис. 2а). Более сложный характер имеют изменения  $V$  вблизи местного полудня, а точнее, в интервале 12–14 ч. Кривые временных вариаций  $V(t)$  как бы сближаются, разность значений  $V$  на соседних высотах существенно уменьшается. Так, 27 февраля 1991 г. эта разность для высот 117 и 97 км в 10–11 ч составила  $\approx 9$  м/с, причём направление скорости менялось с высотой от положительного (соответствует направлению вниз) на нижних высотах до отрицательного (вверх) на всех остальных, а к 14 ч вертикальные скорости на всех высотах имели значения, близкие к нулевым. Подобная картина почти всегда наблюдалась и в другие дни продолжительных измерений — 1 октября 1990 г., 15 марта 1991 г., за исключением 6 декабря 1991 г., когда движения с периодом в несколько часов имеют существенно меньшую амплитуду. После 14 ч характер высотного распределения  $V$  в целом восстанавливается. На рис. 2 хорошо видна волновая структура временных изменений  $V$  на всех высотах.



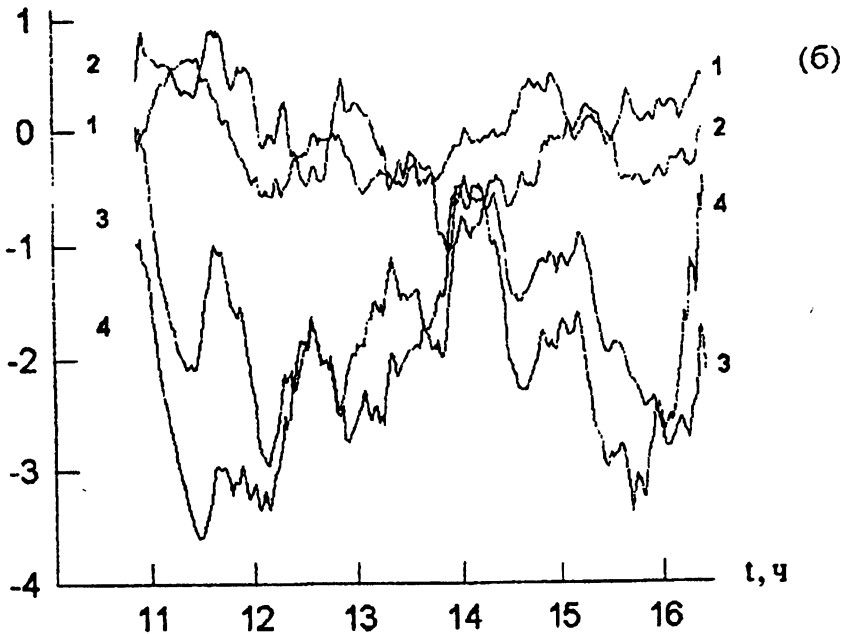
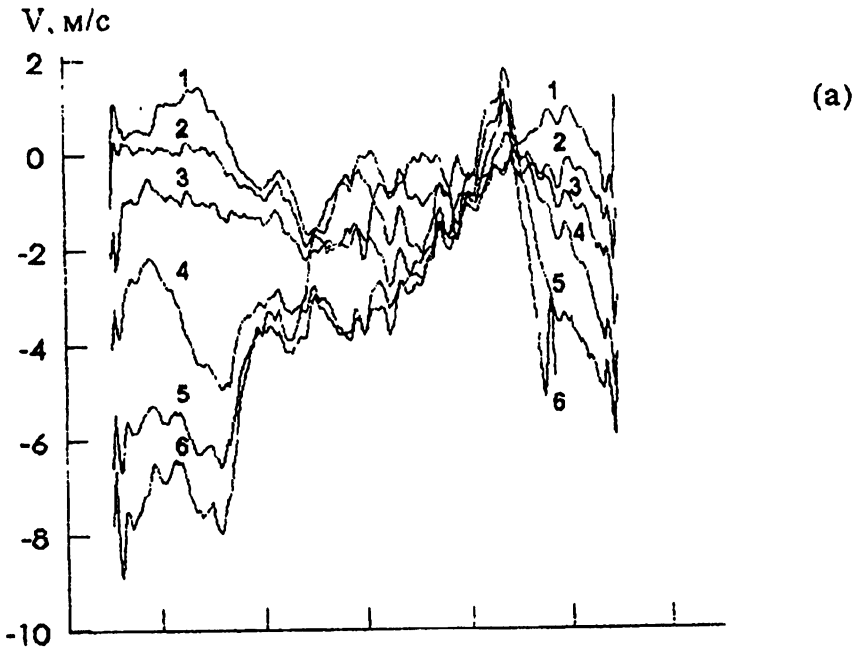


Рис. 2. Зависимость от времени значений вертикальной скорости для измерений 27 февраля 1991 г. (а) и 15 марта 1991 г. (б) на разных высотах. На рис. 2а кривые пронумерованы, начиная с высоты  $h = 97$  км (кривая 1) до  $h = 117$  км (кривая 6) с шагом  $\Delta h = 4$  км; на рис. 2б кривая 1 соответствует высоте  $h = 89$  км, кривая 2 —  $h = 94$  км, кривая 3 —  $h = 109$  км, кривая 4 —  $h = 114$  км.

Таким образом, в целом, в проведённых измерениях имело место увеличение модуля вертикальной скорости с высотой с преимущественным направлением вверх на высотах, превышающих 90 км.

Для более точного определения спектрального состава колебаний, вносящих вклад в динамику  $V$ , использовался спектральный анализ. Спектральная плотность мощности  $V$  (или частотный спектр) рассчитывалась методом БПФ по временной реализации  $V(t)$  по формуле (теорема Винера-Хинчина)

$$S_V(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T}^T V(t) \exp(-j2\pi\nu t) dt \right|^2,$$

где  $T$  — длительность реализации  $V(t)$ . Спектр сглаживался с помощью спектрального окна Ханна [17].

Для определения показателя степенного спектра на участках со степенной зависимостью использовался метод наименьших квадратов. Примеры рассчитанных таким образом спектров для шести высот в интервале 89–114 км 15 марта 1991 г. приведены на рис. 3. Спектры  $V$ , рассчитанные для остальных дней, имеют подобный вид.

Спектры мощности вертикальной скорости имеют следующие особенности. Как правило, спектр  $S_V(\nu)$  содержит два участка, на каждом из которых спектральная плотность может быть аппроксимирована степенным законом  $S_V(\nu) \propto \nu^{-p}$  с показателем  $p_1 \approx 0,5 - 1,0$  от  $\nu \approx 0$  до некоторой частоты  $\nu_*$  и показателем  $p \approx 2,2 - 4,7$  при  $\nu > \nu_*$ . Период, соответствующий частоте  $\nu_*$ , показан на рис. 3 вертикальным отрезком. Приведённые на рис. 3 спектры для удобства разнесены по вертикали, поэтому вертикальная ось не изображена.

Спектральный анализ показал, что временные вариации  $V$  содержат колебания различных периодов — от самых малых, составивших 5–10 м, до нескольких часов. В разные дни достоверно выделены периоды продолжительностью 5–10, 15, 20, 30–40, 60 м. Кроме того, наблюдаются интенсивные волновые движения с периодами 2, 2,5, 3,3 и 4,5 ч. К сожалению, не слишком большая продолжительность измерений не позволила напрямую выделить движения ещё больших периодов. Применение в дальнейшем специальных методов спектральной обработки записей небольшой продолжительности [18] позволит получить более полную информацию о спектрах вертикальной скорости.

Как отмечалось, особенностью спектров  $S_V(\nu)$  является резкий “обрыв” спектральной плотности на частотах  $\nu > \nu_*$ , как правило, хорошо заметный практически на всех высотах. Часто этот обрыв спектра сопровождается значительным увеличением  $S_V(\nu)$  вблизи частоты  $\nu_*$  со стороны меньших значений (кривые 1, 2, 3 на рис. 3). Кроме того, вблизи  $\nu_*$  может наблюдаться локальный минимум  $S_V(\nu)$  (те же кривые).

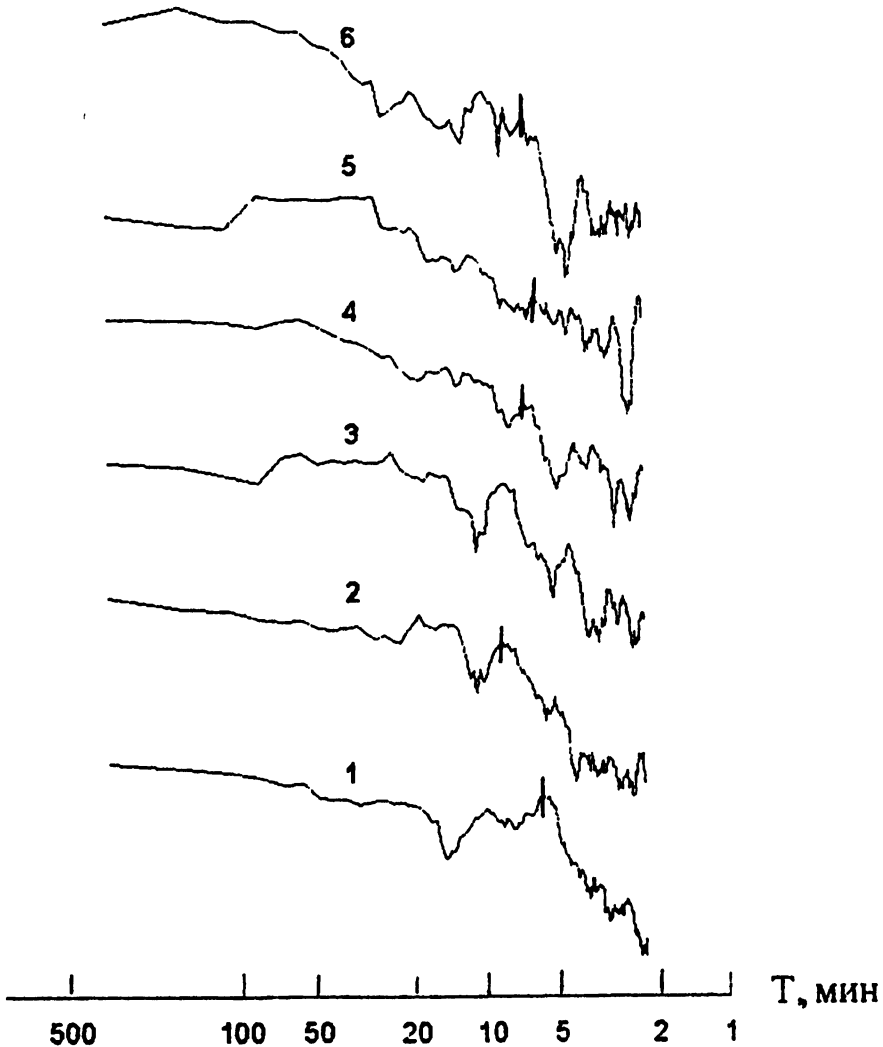


Рис. 3. Спектральная плотность мощности вертикальной скорости для шести высот за 15 марта 1991 г. Кривые пронумерованы, начиная с высоты  $h = 89$  км (кривая 1) до  $h = 114$  км (кривая 6) с шагом по высоте  $\Delta h = 5$  км. Вертикальным отрезком отмечено значение периода  $T^*$ , при котором происходит резкий обрыв спектра.

Во временных вариациях  $V$  практически всегда отчётливо видно запаздывание фазы волновых колебаний на меньших высотах (см. рис. 2), которое соответствует направленной сверху вниз вертикальной компоненте фазовой скорости порядка 60–100 м/с в разных сеансах наблюдений. Вертикальные длины волн колебаний, проявившихся в высотном профиле  $V$ , изменяются в интервале от 3–5 до 30–40 км.

На рис. 4 приведены кривые полиномиального сглаживания временных зависимостей  $V(t)$  в разные дни наблюдений на шести высотах. Такой подход позволяет сосредоточить внимание лишь на волнах больших периодов и проследить изменение характера таких движений с высотой.

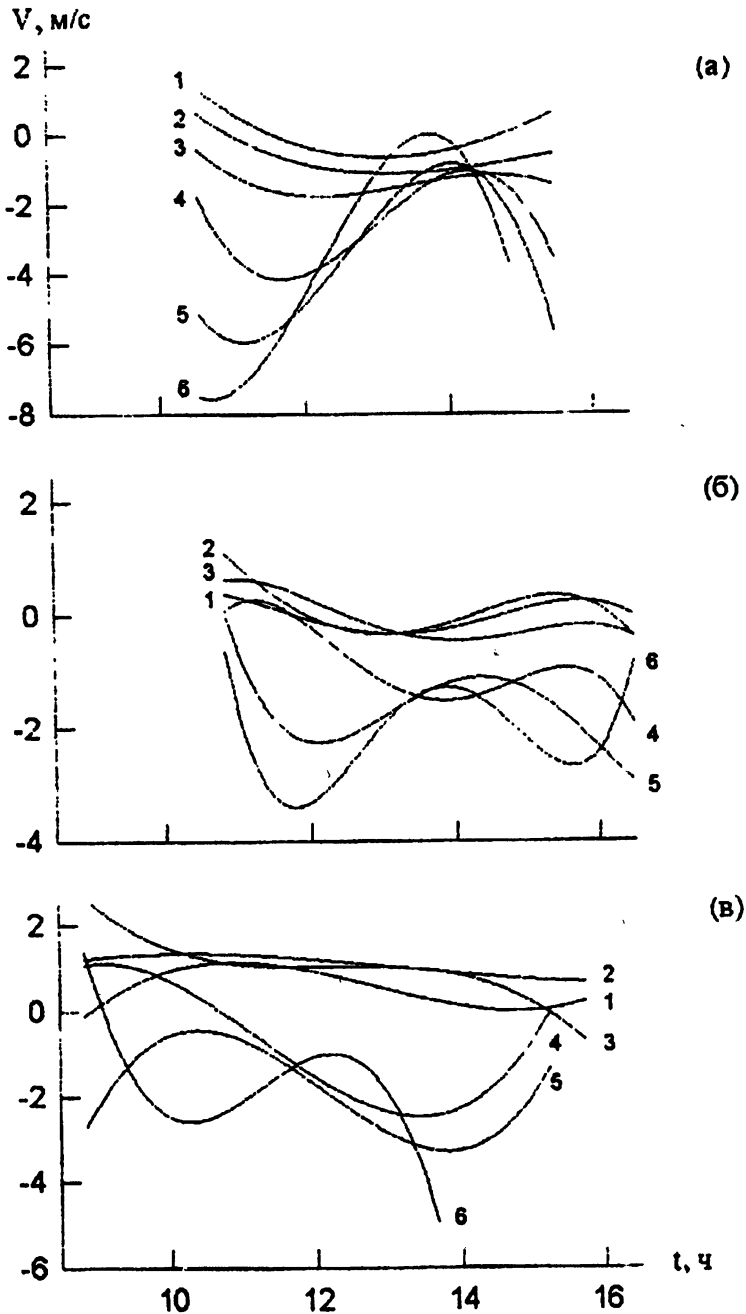


Рис. 4. Результаты полиномиального сглаживания минутных значений  $V(t)$ : (а) — за 27 февраля, (б) — 15 марта, (в) — 6 декабря 1991 г. (минутные точки не нанесены). Нумерация кривых на рис. 4а соответствует рис. 2а, на рис. 4б кривые пронумерованы, начиная с высоты  $h = 89$  км (кривая 1) с шагом  $\Delta h = 5$  км, на рис. 4в кривая 1 относится к  $h = 89$  км, шаг по высоте —  $\Delta h = 5$  км.

Если полагать, что определяющий вклад в вариации  $V$  вносят волновые движения, то из рис. 4 можно сделать вывод о том, что амплитуды волн с относительно большими периодами существенно растут с высотой. Так например, 27 февраля 1991 г. (рис. 4а) амплитуда волны с периодом около 6 ч при изменении высоты со 109 до 117 км увеличилась почти втрое. Кроме того, рис. 4б и 4в иллюстрируют, по-видимому, трансформацию волны с ростом высоты во вторую гармонику с увеличением (в среднем) амплитуды гармоники с высотой.

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ ВГВ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведённые методом резонансного рассеяния радиоволн на искусственных периодических неоднородностях электронной концентрации измерения скорости вертикальных движений плазмы на высотах 60–120 км показали следующее. В течение всего периода наблюдений во временном ходе  $V$  в любой момент времени регистрируются колебания вертикальной скорости во всём исследуемом интервале высот. Модуль  $V$ , как правило, увеличивается с высотой, скорости направлены преимущественно вверх на высотах более 90 км. В динамике и спектрах вертикальной скорости отчётливо проявляются волновые движения различных масштабов — от нескольких минут до нескольких часов, имеющие величину и направление фазовой скорости, характерные для ВГВ. В совокупности это позволяет предполагать, что описанные выше особенности динамических и спектральных характеристик вертикальной скорости обусловлены распространением внутренних гравитационных волн. Проанализируем результаты, приведённые в предыдущем параграфе, с этой точки зрения. Как отмечалось, периоды волн, полученные с помощью спектрального анализа  $V$ , полностью соответствуют периодам ВГВ, наблюдавшихся различными методами [7–9]. Что касается формы спектра, то результатов измерений частотных спектров ВГВ не так уж много (см., например, [19–21]). Тем не менее, отмечается, что многие из них описываются степенной функцией  $\sim \nu^p$ , однако показатель степени  $p$  варьируется. Так, по измерениям спектров зональной компоненты скорости горизонтального ветра в [19] получены значения  $\approx 0,47$ – $0,82$  для волн с периодами от 1 до 8 ч на высотах 90–100 км, причём  $p$  уменьшается с ростом высоты. Методом частичных отражений в Saskatoon ( $52^\circ\text{N}$ ,  $107^\circ\text{W}$ ; Канада) исследовались короткопериодные ВГВ ( $T \approx 5$ – $90$  мин) на основе измерений меридиональной и зональной компонент скорости нейтрального ветра [20] в диапазоне высот 52–118 км. Спектры обеих компонент ветра подобны, имеют наклон, близкий к 1. По результатам измерений ветра с помощью ВЧ радара в Adelaide ( $35^\circ\text{S}$ ,  $139^\circ\text{E}$ ; Австралия) получены суммарные спектры составляющих ветра на высотах  $\sim 70$ – $80$  км с показателем

степенного спектра  $p < 2$  для короткопериодной части спектра в интервале  $T \approx 10-100$  мин [21]. Спектры скорости вертикальных движений на высотах нижней ионосферы, подобные приведённым в данной работе, содержатся в [22]. И, наконец, спектры параметров искусственных ОНЧ сигналов, измеренных с помощью метода, основанного на эффекте Гетманцева [23, 24], и интерпретируемые как спектры ВГВ, для периодов, больших двух часов, дают степенную зависимость от частоты с показателем  $p \approx 2$ . Таким образом, полученные нами частотные спектры вертикальной скорости лежат в русле имеющихся в литературе сведений о спектрах ВГВ.

В интервале периодов, соответствующих среднemasштабным ВГВ ( $T \approx 5$  мин–2 ч), нами получены значения фазовой скорости  $V_\phi \approx 60-100$  м/с, практически не зависящие от периода (частоты) волны. Ранее такой результат был получен в [5] методом поляризационных биений.

Другой отмеченной нами особенностью спектров  $V$  является их “обрезание” или резкий обрыв на частоте  $\nu_*$  (соответствующий период —  $T_*$ ). Сопоставим  $\nu_*$  с величиной локальной наивысшей частоты обрезания спектра ВГВ, которой является частота Бранта–Вяйсяля

$$w_B^2 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{g}{C} \right)^2 \left( \gamma - 1 - \gamma \frac{dH}{dz} \right),$$

где  $H = \frac{kT}{mg}$  — приведённая высота однородной атмосферы,  $C$  — скорость звука,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\gamma$  — показатель адиабаты идеального газа [25].

Высотная зависимость периода обрезания спектра ( $T_*$ ) и периода Бранта–Вяйсяля ( $T_B$ )

$z$ , км	90	100	110	120
$T_*$ , мин.	5,5	8	8,2	9
$T_B$ , мин.	6,1	6,1	7,5	8,4

Значения  $T_*$  и  $T_B$  близки по величине. Таким образом, величину  $T_*$  можно интерпретировать как период, соответствующий частоте Бранта–Вяйсяля в спектре ВГВ. Как известно, ВГВ с периодами  $T < T_B$  существовать не могут.

Период обрезания спектра  $T_*$  полностью совпадает с  $T_B$  в случае, если пренебречь скоростью нейтрального ветра. В противном случае они отличаются на величину  $\Delta T = \frac{V_{гор} - U}{V_{гор}}$  [25], где  $V_{гор}$  — горизонтальная скорость ВГВ в направлении распространения,  $U$  — горизонтальная компонента ветра, параллельная  $V_{гор}$ . При  $V_{гор} = U$   $T_B = T_*$  и по разности этих времён можно оценивать  $U$  или  $V_{гор}$ .

Для того, чтобы определить другие характеристики волн, воспользуемся некоторыми соотношениями, вытекающими из дисперсионного уравнения для ВГВ, которое для изотермической несжимаемой атмосферы имеет вид [25]

$$k_z^2 = \left( \frac{\omega_B^2}{\omega^2} - 1 \right) k^2 - \frac{1}{4H^2} + \frac{\omega^2}{C^2}, \quad (1)$$

где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Ветвь ВГВ определяется частотами  $\omega \ll \omega_B$ . Наиболее простые выражения получаются из (1) для крупномасштабных (длинно-периодных) ВГВ, когда  $|k| \gg \frac{1}{2H}$ . В этом случае

$$k_z^2 \approx \left( \frac{\omega}{\omega_B} \right)^2 k^2, \quad (2)$$

откуда легко получается соотношение  $\lambda = \lambda_z \frac{T}{T_B}$ , где  $\lambda$  и  $\lambda_z$  — горизонтальная и вертикальная длины волн ВГВ. Значение  $\lambda_z$  может быть определено либо из высотного профиля  $V(h)$ , либо из соотношения  $\lambda_z = V_{\phi z} T$ , где  $V_{\phi z}$  — вертикальная составляющая фазовой скорости. Принимая  $V_{\phi z} = 80$  м/с,  $T = 10$  мин,  $T_B = 5$  мин, получим  $\lambda_z = 48$  км и  $\lambda = 96$  км. Следует заметить, что, хотя эти оценки и укладываются в интервал изменений  $\lambda$  для ВГВ, тем не менее определять горизонтальные компоненты  $\lambda$  групповой и фазовой скорости нужно методом пространственно разнесённого приёма. Кроме того, в (1) предполагается, что средняя скорость ветра равна нулю, хотя на самом деле это не так. При учёте среднего ветра со скоростью  $U$  в выражениях (1), (2) должна стоять частота  $\omega' = \omega - \vec{U} \vec{k}$ , что для  $U_z \ll U_{x,y}$  даёт  $\omega' = \omega - Uk$  [25]. В этом случае важным является соотношение между фазовой скоростью волны и скоростью среднего ветра. Волновые процессы наиболее крупных масштабов можно видеть на усреднённых за продолжительный период наблюдений высотных профилях  $V$  (см. рис. 1). На профилях  $V(h)$  для осенних месяцев 1990 г. видны колебания с периодом по высоте 10–30 км, которые могут быть связаны с существованием приливных волн [25].

За рамками статьи остался вопрос о быстрых флуктуациях вертикальной скорости плазмы на этих высотах с характерным временным масштабом меньше минуты, которые могут быть связаны с различными процессами в атмосфере. В качестве примера на рис. 5 приведён пятнадцатиминутный фрагмент записи  $V(t)$  для сеанса 13<sup>23</sup>–13<sup>38</sup> ч 15 марта 1991 г. и высоты 89 км, полученный с частотой регистрации каждые 15 с. Из рисунка видно, что присутствуют очень быстрые (с периодом 15 с колебания, на которые наложена интенсивная составляющая с периодом около 5 мин. Иногда наблюдаются почти монохроматические колебания  $V$ , которые, по-видимому, могут быть обусловлены режимом источника ВГВ

или какими-то другими причинами. Более подробно экспериментальные данные и обсуждение этого вопроса будут приведены в дальнейшем.

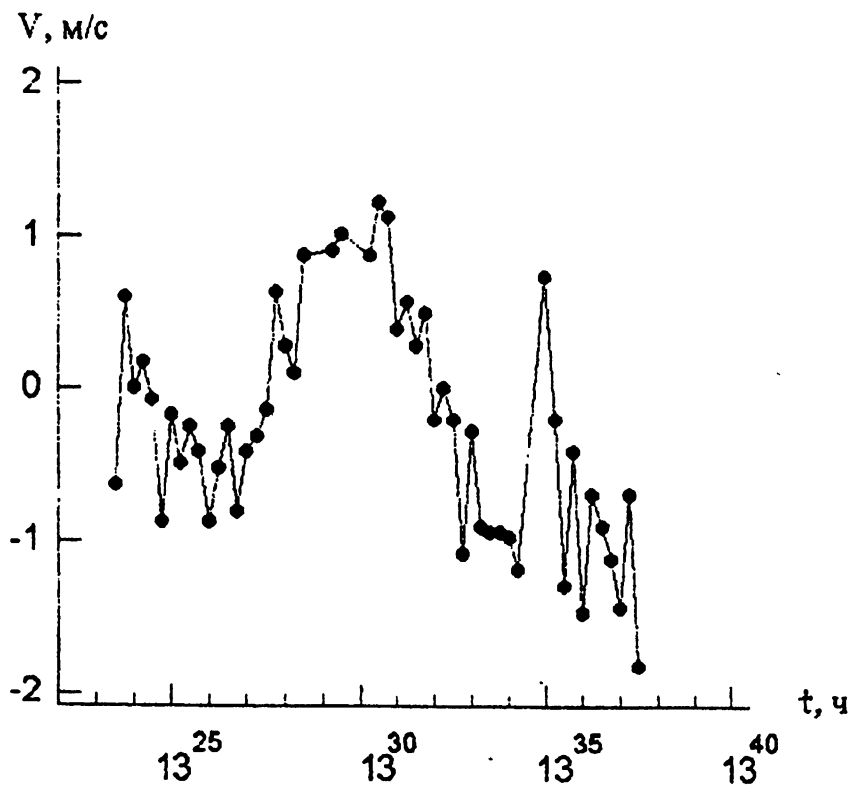


Рис. 5. Фрагмент записи  $V(t)$  для сеанса 13.23–13.38 15 марта 1991 г. на высоте 89 км; частота регистрации — каждые 15 сек.

## 5. В Ы В О Д Ы

Метод резонансного рассеяния радиоволн на искусственных неоднородностях ионосферной плазмы на высотах нижней ионосферы может успешно применяться для исследования динамических процессов в атмосфере. Обладающий высоким пространственно-временным разрешением, он позволяет исследовать процессы с периодами от нескольких секунд до часов и более в большом диапазоне высот.

Метод использован для исследования характеристик волновых движений в нижней ионосфере. Характеристики ВГВ, полученные по измерениям скорости вертикальных движений на высотах 90–120 км, в целом соответствуют сложившимся представлениям о распространении ВГВ. Амплитуда  $V$  в среднем растёт с высотой, значение направленной вниз фазовой скорости составляет 60–100 м/с, преобладают движения вверх.



Изучены спектры мощности скорости вертикальных движений на высотах 90–120 км, которые имеют степенную зависимость от частоты с показателем меньше единицы и частоту обрезания спектра, близкую к частоте Бранта–Вяйсяля, что позволяет интерпретировать их как спектры ВГВ. Метод позволяет получить высотную зависимость частоты Бранта–Вяйсяля, подробно исследовать высотный ход и динамику основных параметров ВГВ.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант № 96-05-65130).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Измерение ветра на высотах 90–100 км наземными методами. /Под ред. Ю. И. Портягина, К. Шпренгера. — Л.: Гидрометеиздат, 1978. — 343 с.
2. Hoffman P., Singer W., Keuer D. et al. //Z. Meteorol., 1990. V. 40. № 6. P. 405.
3. Макаров В. А., Сидоров В. В., Фахрутдинова А. Н. Исследование движений в широком интервале временных масштабов. — М.: Гидрометеиздат, 1983. — 128 с.
4. Widdel H.-U. //J. Atmos. Terr. Phys., 1987. V. 49. P. 723.
5. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. — М.: Мир, 1975. 532 с.
6. Дробжев В. И. — В кн.: Волновые возмущения в атмосфере. — Алма-Ата: Изд-во АН Казахской ССР, 1980. С. 33.
7. Кащеев Б. Л., Лысенко И. А. //Ионосферные исследования, 1989. № 47. С. 44.
8. Manson A. H., Meek C. E. Measurements of vertical motions by the Saskatoon MF radar (1983-1985): Relationship with horizontal winds and gravity waves // Handbook for MAP, 1989. V. 27. P. 339.
9. DYANA Draft Manuscripts. Part I, II, July 1992.
10. Семёнов А. И., Шефов Н. Н. // Ионосферные исследования, 1989. № 47. С. 24.
11. Rottger J., Hoppe U.-P., Hall C. EISCAT incoherent scatter radar facility in Tromso, Norway //Handbook for MAP, 1989. V. 27. P. 370.
12. Canin M. L., Hauchecorne A. //J. Geoph. Res., 1981. V. 86(C). № 10. P. 9715.
13. Rottger J. The MST radar technique //Handbook for MAP, 1984. V. 13. P. 187.
14. Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Гончаров Н. П., Толмачёва А. В. //Геомagnetизм и аэрономия, 1995. Т. 35. № 4. С. 64.
15. Бахметьева Н. В., Беликович В. В., Бенедиктов Е. А. и др. Сезонно-суточные вариации скорости вертикальных движений на высотах ме-

- зосферы и нижней термосферы вблизи Нижнего Новгорода // Геомагнетизм и аэрономия, 1996 (в печати).
16. Bakhmet'eva N. V., Belikovich V. V., Benediktov E. A. et al. // Изв. вузов. Радиофизика, 1996. V. 39. № 3. P. 330.
  17. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. — М.: Мир, 1982. — 428 с.
  18. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Том 1. — М.: Мир, 1983. — 311 с.
  19. Спизэкино А. — В сб.: Термосферная циркуляция / Под ред. У. Уэбба. — М.: Мир, 1975. С. 121.
  20. Manson A. H., Meek C. E., Gregory J. B. // J. Atmos. Terr. Phys., 1981. V. 43. № 1. P. 35.
  21. Tsuda T., Murayama Y., Nakamura N. et al. // J. Atmos. Terr. Phys., 1994. V. 56. № 5. P. 555.
  22. Manson A. H., Meek C. E. // Adv. Space Res., 1987. V. 7. № 10. P. 339.
  23. Рапопорт В. О., Митяков С. Н., Трахтенгерц В. Ю. // Геомагнетизм и аэрономия, 1995. Т. 35. № 2. С. 84.
  24. Митяков С. Н., Накаряков В. М., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. // Геомагнетизм и аэрономия, 1995. Т. 35. № 6. С. 169.
  25. Хайнс К. О. — В сб.: Термосферная циркуляция / Под ред. У. Уэбба. — М.: Мир, 1975. С. 85.

Нижегородский  
научно-исследовательский  
радиофизический институт,  
Россия

Поступила в редакцию  
30 июля 1996 г.

**THE INVESTIGATION OF THE WAVE MOTION IN THE LOWER  
IONOSPHERE BY RADIO WAVE RESONANCE SCATTERING BY THE  
ARTIFICIAL PERIODIC INHOMOGENEITIES**

*N. V. Bakhmet'eva, V. V. Belikovich, E. A. Benediktov, V. N. Bubukina,*  
*Yu. A. Ignat'ev*

The investigation results of wave motions at the low ionosphere heights by a new method are given. The method is based on the measurements of the vertical plasma motion velocities from phase variations of a signal backscattered by artificial periodic irregularities of the electron density ("the ionospheric array"). This method allows us to study processes of different periods: from some seconds to some hours and more. On the basis of the vertical velocity measurements during 1990-1991 near Nizhny Novgorod some dynamic and spectral characteristics of the internal gravity waves were obtained.

УДК 621.371

## ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ИНДЕКСА СРЕДНЕШИРОТНОГО F-РАССЕЯНИЯ

*Ф. И. Выборнов, Э. Е. Митякова, А. В. Разлин*

Представлены результаты анализа данных вертикального зондирования ионосферы на станции Зимёнки (г. Нижний Новгород) за период с 1964 по 1992 гг. По материалам январских ионограмм построены графики суточных индексов F-рассеяния слоя ионосферы. Получена зависимость усреднённого за месяц (январь) индекса F-рассеяния от солнечной активности. Обнаружен рост индекса F-рассеяния от времени. Предполагается техногенный характер этого роста.

Несмотря на более чем тридцатилетнюю историю исследования явления F-рассеяния, внимание и интерес к нему не ослабевают. Изучение появляемости F-рассеяния к настоящему моменту выполнено на основе анализа большого объёма статистического материала для различных фаз солнечной активности в разных географических точках Земли. Результаты исследований и обзоры по временному и пространственному распределению F-рассеяния хорошо известны [1–3]. Уже в первых работах, посвящённых исследованию данного явления, была замечена отрицательная корреляция частоты появляемости рассеянного сигнала и солнечной активности, сильная сезонная зависимость и отмечена максимальная появляемость F-рассеяния в ночное время суток (см., например, [2, 1]). Как правило, для анализа появляемости F-рассеяния использовались данные, не превышающие длительности одного цикла солнечной активности.

Особенностью данной работы является использование однородного ряда данных, полученных на станции импульсного вертикального зондирования НИРФИ (Зимёнки, Нижегородская область,  $\varphi = 56^\circ$ ,  $\lambda = 44^\circ$ ) за почти тридцатилетний (1964–1992 гг.) период наблюдений при неизменных параметрах аппаратуры и антенно-фидерных систем. Исследование поведения индекса F-рассеяния за интервалы времени, превышающие длительность цикла солнечной активности, позволяет, с одной стороны, осуществить долгосрочный прогноз появляемости рассеяния в F-слое ионосферы, а с другой, — уточнить физику процессов, связанных с этим явлением, и возможные факторы влияния.

Из-за большого объёма исходных данных в настоящей работе авторы ограничились исследованием ионограмм только зимнего периода. Данное ограничение корректно, т.к. известно, что на средних широтах наибольшая частота появляемости F-рассеяния приходится на зимние месяцы [1, 4].

Для анализа появляемости F-рассеяния\* была использована стандартная (четырёхбальная) шкала\*\* индексов [5].

При этом, анализировались оригинальные фотоплёнки ионограмм. Из числа рассматриваемых исключались дефектные кадры, кадры с сильным поглощением в F-слое и случаи сильного  $E_s$ . Для каждого анализируемого месяца число ионограмм составляло от 2-х до 2,8-х тысяч снимков. Для построения временных распределений проводилось суммирование всех индексов рассеяния за месяц с последующей нормировкой на число обработанных кадров данного месяца, а также суммировались все индексы рассеяния за фиксированный час внутри месяца с аналогичной нормировкой. Таким образом были получены ряды данных среднего индекса F-рассеяния для января месяца 1964–1992 гг. Данные за более ранние годы не соответствовали однородности ряда, т.к. антенно-фидерная система ионосферной станции Зимёнки в 1963 г. была модернизирована и до 1992 г. не менялась. Данные 1965 и 1977 гг. отсутствуют по техническим причинам.

На рис. 1 приведены суточные зависимости усреднённых за месяц индексов F-рассеяния для каждого рассмотренного года с 1964 по 1992 гг. Из графиков видно, что максимальные значения отмечались в ночные и вечерние часы (с 22 до 03 ч), а минимальные — в дневное время (09–15 ч). В большинстве случаев наблюдаются также дополнительные утренние (05–07 ч) и вечерние (19–21 ч) максимумы.

Для анализа временного хода за интервал более 2-х циклов солнечной активности были построены распределения нормированного индекса F-рассеяния (рис. 2а — среднесуточные значения, рис. 2б — средненочные). В нижней части этих графиков изображена кривая, характеризующая качественное изменение солнечной активности [6, 7].

Подтверждается (см., например, [8, 1]) более высокий средний индекс F-рассеяния в годы низкой солнечной активности. Как видно из графиков, кроме основных максимумов индексов F-рассеяния, которые соответствуют минимумам солнечной активности (1964, 1975, 1986 гг.), наблюдаются дополнительные максимумы, которые появляются в периоды наибольших изменений во временном ходе солнечной активности (1969, 1972, 1982, 1988, 1990 гг.).

Отличительной особенностью построенного ряда является наличие заметного повышения индекса от цикла к циклу.

Использование регрессионного анализа позволяет показать, что на

---

\*Для среднширотных станций, подобных данной, наиболее характерно частотное F-рассеяние.

\*\*Индекс 0 соответствует на ионограмме чёткому отражению сигнала, диффузность отсутствует; индекс 1 — слабое расплывание, ширина размытого следа отражения менее 0,25 МГц; индекс 2 — расплывание отражённого сигнала до 0,5 МГц; индекс 3 — сильное расплывание, более 0,5 МГц.

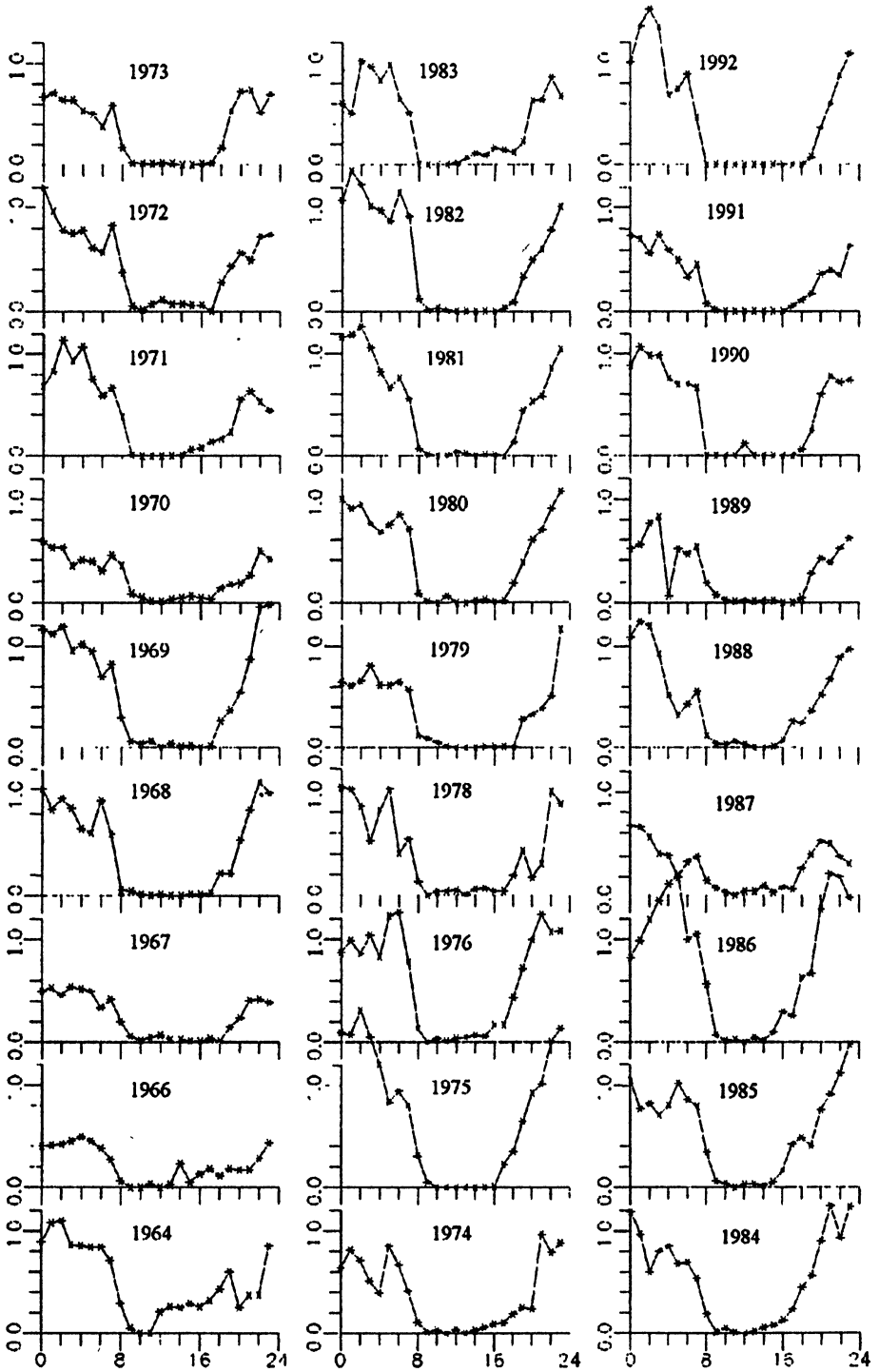


Рис. 1.

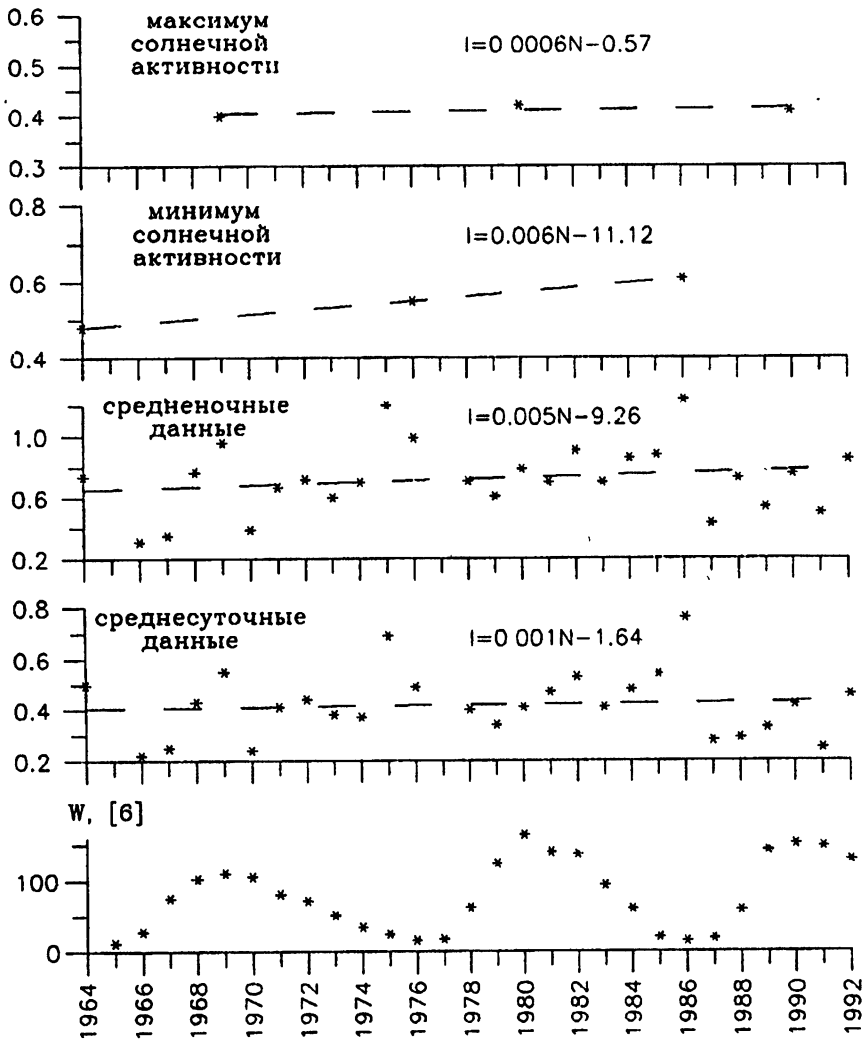


Рис. 2.

блюдается заметный рост среднего индекса F-рассеяния за интервал анализа 1964–1992 гг. При этом среднемесячный индекс за указанный интервал описывается регрессионным уравнением

$$I = 0,001 \times T - 1,64, \quad (1)$$

где  $I$  — нормированный среднеянварский индекс F-рассеяния,  $T$  — год с 1964 по 1992. Таким образом на интервале анализа среднее увеличение  $I$  составило примерно 10%. При этом наклон линии регрессии для средних индексов F-рассеяния в годы низкой солнечной активности явно больше, что соответствует примерно 15% росту среднего индекса за время с 1964 по 1992 гг. В годы высокой солнечной активности наличие тренда мало

заметно и рост среднего индекса за исследуемый период не превышает 5%. В случае ограничения анализа интервалом, равным 2 циклам солнечной активности (что более корректно), уравнение регрессии для 1964–1986 гг. принимает вид

$$I = 0,0064 \times T - 12,18. \quad (2)$$

При этом рост среднего индекса за интервал времени с 1964 по 1986 гг. доходит до 35%.

Сравнивая средние значения индекса F-рассеяния за 2 цикла солнечной активности 1964–1975 и 1975–1986 гг., имеем рост средних значений за цикл на 13,7% (среднесуточное значение в первом цикле 0,401, во втором — 0,46). Аналогично, сравнивая средние значения индекса за цикл только для ночных часов (19.00–07.00), получаем рост на 35% (средний индекс за первый цикл для указанных часов 0,644, за второй — 0,872). Для дневных часов, учитывая малую появляемость, отметим только качественный рост.

Причиной отмеченного роста появляемости F-рассеяния, по-видимому, учитывая отрицательную корреляцию с солнечной активностью, является заметное увеличение влияния антропогенных факторов\* на высотах F-слоя ионосферы. Аналогичный вывод был получен в [7] для высот порядка 80 км при анализе поглощения радиоволн за несколько циклов солнечной активности.

### Выводы

На основе обширного статистического материала подтверждены ранее хорошо известные факты о явлении F-рассеяния:

- отрицательная корреляция с солнечной активностью,
- сильная зависимость от времени суток.

Отмечен рост F-рассеяния и приведены конкретные значения среднеянварского индекса F-рассеяния за интервал времени 1964–1992 гг.

Возможной причиной обнаруженного увеличения интенсивности F-рассеяния может являться рост техногенного влияния на ионосферу Земли в указанный период.

Авторы благодарны В. В. Беликовичу за возможность использования фотоплёнок ионограмм и Н. А. Митякову за постоянное внимание к работе.

Данная работа выполнена при поддержке Государственного комитета РФ по высшему образованию, грант № 94-816-4053, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-02-03716.

\*Подробный анализ источников антропогенного воздействия приведён в работе [9, 10].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гершман Б. Н., Казимировский Э. С., Кокуров В. Д., Чернобровкина Н. А. Явление F-рассеяния в ионосфере. — М.: Наука, 1984. — 141 с.
2. Singleton D. G. // J. Atmos. Terr. Phys., 1962. V. 24. P. 871.
3. Bowman G. G. // J. Atmos. Terr. Phys., 1981. V. 43. P. 65.
4. Митякова Э. Е., Непомнящая Е. В., Юдович Л. А. — В сб.: Неоднородная структура ионосферы различных пространственных и временных масштабов. — М., 1989.
5. Руководство URSI по интерпретации и обработке ионограмм. — М.: Наука, 1977. С. 341.
6. Solar-Geophysical Data prompt reports, February 1992, № 570. Part II; November 1990, № 555. Part I.
7. Несторов Г., Панчева Д., Данилов А. Д. // Геомагнетизм и аэрономия, 1991. Т. 31. № 6. С. 1070.
8. Кокуров В. Д., Чернобровкина Н. А. — В кн.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, — М.: Наука, 1979. Вып. 47. С. 67.
9. Митяков Н. А., Рахлин А. В., Митякова Э. Е., Выборнов Ф. И. Препринт № 402. — Н. Новгород: НИРФИ, 1994.
10. Крупеня Н. Д., Митякова Э. М., Рахлин А. В. и др. — В сб.: Неоднородная структура ионосферы. Тез. докладов. — Н. Новгород—Абрау, 1991. С. 73.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт,  
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
15 февраля 1996 г.

**BEHAVIOUR PECULIARITIES OF THE INDEX OF MID LATITUDE  
F-SCATTERING**

*F. I. Vybornov, E. E. Mityakova, A. V. Rakhlin*

The results are presented for the data analysis of the vertical sounding of the ionosphere at Zimenki station (Nizhny Novgorod) for the period from 1964 to 1992. According to the data of January ionograms we developed diagrams of daily indices for F-scattering. A dependence has been obtained of the monthly (January) averaged index of F-scattering on the solar activity. An increase of F-scattering index is discussed as a function of time. A technogeneous character of this increase is supposed.



УДК 501.530.1

## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЁННЫХ УРАВНЕНИЙ КДВ-КЛАССА

*В. Ю. Белашов, С. Г. Тюнина*

Изучаются асимптотики и структура решений обобщённых уравнений КдВ-класса с произвольным показателем нелинейности, имеющих широкие приложения в физике ионосферной и магнитосферной плазмы, гидродинамике и аэродинамике. Уравнения КдВ класса обобщаются введением высшей дисперсионной поправки и членов, описывающих диссипацию и неустойчивость, обусловленных широким классом причин. С помощью асимптотического анализа и анализа решений в фазовом пространстве выделены различные классы решений солитонного и несолитонного типа.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются асимптотики и качественный характер решений обобщённых уравнений КдВ класса:

$$\partial_t u + 6u^p \partial_\eta u - \mu \partial_\eta^2 u + \beta \partial_\eta^3 u + \delta \partial_\eta^4 u + \gamma \partial_\eta^5 u = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) при  $\mu = \delta = \gamma = 0$  представляет собой известное уравнение КдВ, если  $\rho = 1$ , и модифицированное уравнение КдВ (МКдВ), если  $\rho = 2$ . Асимптотики уравнения (1) при  $\mu = \delta = 0$ ,  $\rho = 1$  впервые были исследованы в [1, 2], где было показано, что, в зависимости от знаков коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$ , могут иметь место решения солитонного типа с монотонными либо осциллирующими асимптотиками. Полное уравнение (1), включающее наряду с высшей дисперсионной поправкой члены, описывающие диссипацию ( $\mu \neq 0$ ) и неустойчивость ( $\delta \neq 0$ ), с произвольным показателем нелинейности не является точно интегрируемой системой, вследствие чего известные аналитические методы (например, метод обратной задачи рассеяния) к этому уравнению неприменимы. В связи с этим в настоящей работе уравнение (1) исследуется методами асимптотического и качественного анализа.

Отметим, что с физической точки зрения наиболее интересны случаи, когда в уравнении (1)  $\rho = 1, 2$ , приложения же с  $\rho > 2$  в настоящее время неизвестны. Однако в связи с тем, что уравнения семейства (1) с произвольным целым  $\rho > 0$  обнаруживают в значительной степени сходные математические свойства, в данной работе осуществляется общий подход

с выяснением зависимости параметров решений от величины показателя нелинейности.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Выполняя преобразование  $\xi = \eta - Vt$  и интегрируя (1) по  $\xi$ , получим

$$-Vu + \frac{6}{\rho+1} u^{\rho+1} - \mu \partial_{\xi} u + \beta \partial_{\xi}^2 u + \delta \partial_{\xi}^3 u + \gamma \partial_{\xi}^4 u = 0. \quad (2)$$

Учитывая, что  $\mu > 0$ ,  $\delta > 0$  (в соответствии с физическим смыслом соответствующих членов, описывающих диссипацию и неустойчивость) и полагая без потери общности  $\gamma > 0$  и  $\beta = \pm 1$ , после замены  $u = Vw$ ,  $\xi \rightarrow |V|^{-1/4} \xi$ , уравнение (2) может быть переписано в форме

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn}(V) \gamma \partial_{\xi}^4 w + \operatorname{sgn}(V) \delta |V|^{-1/4} \partial_{\xi}^3 w + \operatorname{sgn}(V) \beta |V|^{-1/2} \partial_{\xi}^2 w - \\ & - \operatorname{sgn}(V) \mu |V|^{-3/4} \partial_{\xi} w - w + \frac{6s}{\rho+1} |V|^{\rho-1} w^{\rho+1} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$s = \begin{cases} \operatorname{sgn}(V), & \text{чётные } \rho; \\ 1, & \text{нечётные } \rho. \end{cases}$$

В зависимости от знаков  $V$  и  $\beta$  в уравнении (3) могут быть выделены четыре случая:

а)  $V > 0$ ,  $\beta = 1$ :

$$\begin{aligned} & \gamma \partial_{\xi}^4 w + \delta |V|^{-1/4} \partial_{\xi}^3 w + |V|^{-1/2} \partial_{\xi}^2 w - \mu |V|^{-3/4} \partial_{\xi} w - \\ & - w + \frac{6s}{\rho+1} |V|^{\rho-1} w^{\rho+1} = 0, \end{aligned} \quad (4a)$$

б)  $V > 0$ ,  $\beta = -1$ :

$$\begin{aligned} & \gamma \partial_{\xi}^4 w + \delta |V|^{-1/4} \partial_{\xi}^3 w - |V|^{-1/2} \partial_{\xi}^2 w - \mu |V|^{-3/4} \partial_{\xi} w - \\ & - w + \frac{6s}{\rho+1} |V|^{\rho-1} w^{\rho+1} = 0, \end{aligned} \quad (4б)$$

в)  $V < 0$ ,  $\beta = 1$ :

$$\begin{aligned} & -\gamma \partial_{\xi}^4 w - \delta |V|^{-1/4} \partial_{\xi}^3 w - |V|^{-1/2} \partial_{\xi}^2 w + \mu |V|^{-3/4} \partial_{\xi} w - \\ & - w + \frac{6s}{\rho+1} |V|^{\rho-1} w^{\rho+1} = 0, \end{aligned} \quad (4в)$$

г)  $V < 0$ ,  $\beta = -1$ :

$$\begin{aligned} & -\gamma \partial_{\xi}^4 w - \delta |V|^{-1/4} \partial_{\xi}^3 w + |V|^{-1/2} \partial_{\xi}^2 w + \mu |V|^{-3/4} \partial_{\xi} w - \\ & -w + \frac{6s}{\rho + 1} |V|^{p-1} w^{p+1} = 0. \end{aligned} \quad (4г)$$

Однако, как можно видеть из уравнения (1), скорость волны  $V$  зависит от коэффициентов уравнения и ограничена следующими соотношениями:

$$V \begin{cases} < V_{\min}^{\text{ph}} = -\frac{1}{4\gamma} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\mu}{3\delta}\right)^{1/2}, & \beta = 1; \\ > V_{\min}^{\text{ph}} = -\frac{1}{4\gamma} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\mu}{3\delta}\right)^{1/2}, & \beta = -1. \end{cases} \quad (5а)$$

$$(5б)$$

Правые части неравенств (5) при  $\mu = \delta = 0$  соответствуют результатам, полученным в [2], а сравнение этих соотношений с (4а,г) приводит к противоречию в случае (а) и в случае (г) вне области

$$\left[ (\alpha - 1)/(4\mu) \right]^2 < 2\gamma < \left[ (\alpha + 1)/(4\mu) \right]^2, \quad \alpha = \sqrt{1 + 16\mu\delta}, \quad (6)$$

кроме того, следует отметить, что условие (6) имеет смысл только в случае  $\delta \neq 0$ , т.е. когда  $V^{\text{ph}}$ , в принципе, может быть неотрицательной в неравенстве (5б)\*. Следовательно, в этих случаях уравнения (4а,г) не имеют решений солитонного типа, даже если  $\mu = \delta = 0$ . Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случаев (б), (в) и (г) в области, определённой неравенством (6), с учётом замечания, сделанного выше.

Учитывая то обстоятельство, что изучение полных уравнений вида (4) весьма сложно, будем в дальнейшем исследовать роль различных членов и групп уравнений (4) по отдельности, используя методы качественного и асимптотического анализов.

### 3. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ

Предварительно отметим, что каждое из уравнений (4б,в,г) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1 = \dot{w}, & x_2 = \dot{x}_1, & x_3 = \dot{x}_2, \\ \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ - \end{array} \right\} \gamma \dot{x}_3 = \left\{ \begin{array}{c} - \\ + \\ + \end{array} \right\} \delta C x_3 \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \end{array} \right\} C^2 x_2 \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ - \end{array} \right\} \mu C^3 x_1 + \\ + w - \frac{6s C^{4(1-p)}}{\rho + 1} w^{p+1}, \end{cases} \quad (7)$$

\* Из необходимого условия существования экстремума  $V^{\text{ph}}$  при  $\beta = -1$  следует, что  $(2/3)\mu = \mu - \delta/(2\gamma)$ , неравенство (6) при этом имеет смысл необходимого условия реализуемости случая (г).

где точки означают производные по  $\xi$ , а знаки в скобках отвечают случаям (б), (в) и (г), соответственно,  $C = |V|^{-1/4}$ . При этом решения уравнения (7) будут устойчивыми, только если существуют особые траектории изображающей точки в фазовом пространстве  $(w, x_1, x_2, x_3)$  системы (7). Каждая из таких траекторий связана с положениями равновесия вблизи максимума солитоноподобного решения и на границах  $|\xi| = \infty$ . Полагая в качестве граничных условий

$$w = \partial_{\xi}^n w = 0, \quad n = 1, 2, 3 \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad (8)$$

можно из уравнений (7) определить количество и координаты особых точек:

$$w_1 = 0, \quad w_j = \sqrt[\rho]{\frac{\rho + 1}{6s C^4(1-\rho)}}, \quad (9)$$

где точки  $w_1 = 0$  и  $w_j$  отвечают соответственно  $|\xi| = \infty$  и точкам перегиба функции  $u(\xi)$ ,  $j = 2$  для нечётных и  $j = 2, 3$  для чётных  $\rho$ , при этом  $w_2 = -w_3$  в последнем случае. Рассматривая только действительные значения корней в (9), можно сразу заключить, используя теорему Штурма, что для нечётных  $\rho$  имеют место две особые точки, а для любых чётных  $\rho$  — три. При этом расстояние между особыми точками определяет амплитуду солитоноподобного решения уравнения (2). Кроме того, значение показателя нелинейности  $\rho$  определяет характер зависимости  $V = f(u)$ : для  $\rho > 1$  такая зависимость становится нелинейной (см. рис. 1) в отличие от известной линейной при  $\rho = 1$  (например, в случае уравнения КдВ). Рис. 1 также иллюстрирует тот факт, что для чётных  $\rho$  решения уравнения (2) могут иметь как положительную, так и отрицательную полярность  $u \geq 0$  для любого знака  $V$ .

Для исследования типов особых точек необходимо линеаризовать систему (7) в окрестности каждой из особых точек. Используя формулу Тейлора, из уравнений (7) получим

- для особой точки  $w_1 = 0$  (что соответствует  $u_1 = 0$  в уравнении (2) с учётом граничных условий (8)

$$\begin{cases} x_1 = \dot{w}, & x_2 = \dot{x}_1, & x_3 = \dot{x}_2, \\ \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ - \end{array} \right\} \gamma \dot{x}_3 = \left\{ \begin{array}{c} - \\ + \\ + \end{array} \right\} \delta C x_3 \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \end{array} \right\} C^2 x_2 \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ - \end{array} \right\} \mu C^3 x_1 + w; \end{cases} \quad (10a)$$

- для особой точки  $w_j$  (что соответствует  $u_j = \sqrt[\rho]{\frac{\rho+1}{6s}} V$  в уравнении (2)

$$\begin{cases} x_1 = \dot{w}, & x_2 = \dot{x}_1, & x_3 = \dot{x}_2, \\ \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ - \end{array} \right\} \gamma \dot{x}_3 = \left\{ \begin{array}{c} - \\ + \\ + \end{array} \right\} \delta C x_3 \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ - \end{array} \right\} C^2 x_2 \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ - \end{array} \right\} \mu C^3 x_1 - \rho w. \end{cases} \quad (106)$$

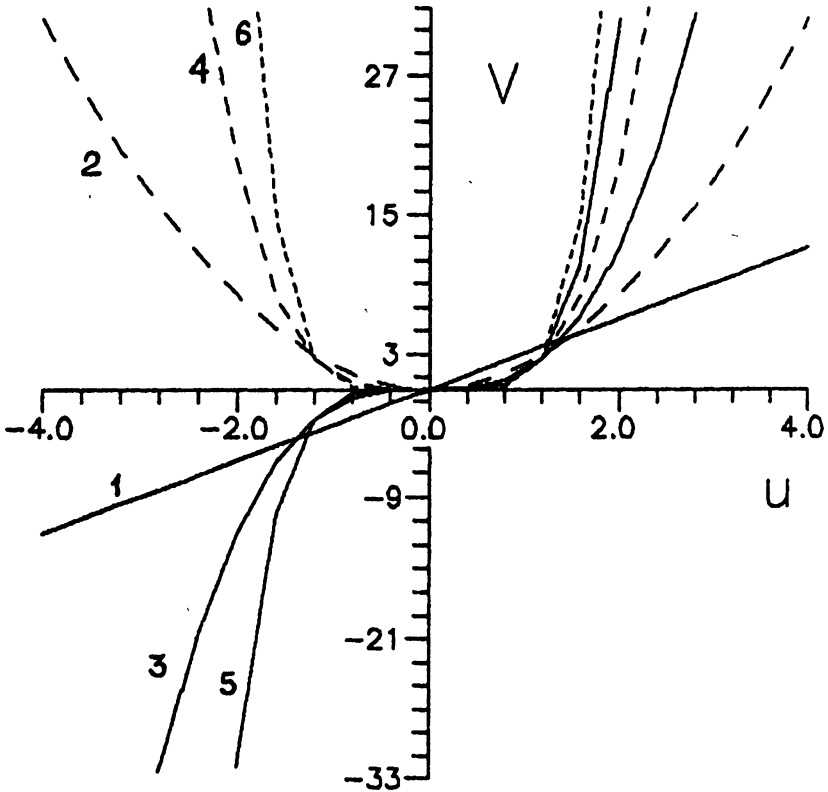


Рис. 1. Зависимость  $V = f(u)$  для уравнения (2) при различных значениях показателя нелинейности; номера кривых соответствуют  $\rho = 1, 2, \dots, 6$ .

Поскольку системы (10) суть четырёхмерные, будем исследовать их, используя метод разложения соответствующих канонических систем на подсистемы [3] (см. Приложение, п. 1). В этом случае можно рассматривать фазовые портреты линейных систем (10) как проекции особых точек и траекторий на две плоскости. Для упрощения рассмотрим по отдельности задачу для  $\mu = \delta = 0$  (семейство консервативных уравнений) и  $\beta = \gamma = 0$  (диссипативные уравнения с неустойчивостью).

### 3.1. Случай $\mu = \delta = 0$ (консервативные уравнения)

Пусть в основных уравнениях  $\mu = \delta = 0$ . В этом случае для особой точки  $w_1 = 0$  получим, что собственные значения матриц подсистем системы (10а) (см. Приложение, п. 1), отвечающих фазовым плоскостям  $P1(w, x_1)$  и  $P2(x_2, x_3)$ , определяются равенствами

$$\lambda_{1,2}^{(P1,P2)} = \pm(2\gamma)^{-1/2} \left[ \left( \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \right) C^2 \pm \sqrt{C^4 \left( \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right) 4\gamma} \right]^{1/2}. \quad (11)$$

При этом в случае (б)  $\lambda_1, \lambda_2$  действительны на фазовой плоскости  $P1$  и являются чисто мнимыми на фазовой плоскости  $P2$ , кроме того,  $\lambda_1 = -\lambda_2$  и в том, и в другом случае. В случае (в), с учётом условий (5), характеристические корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — комплексные и  $\lambda_1 = \lambda_2^*$  с положительной и отрицательной действительной частью соответственно на плоскости  $P1$  и  $P2$ . В случае (г), с учётом условий (5б), при  $\delta = 0$  все четыре корня — действительные и  $\lambda_1 = -\lambda_2$  на обеих плоскостях. Следовательно, в фазовом пространстве будут существовать особые точки  $w_1 = 0$  трёх типов: “седло-центр”, “устойчивый фокус-неустойчивый фокус” и “седло-седло” соответственно в случаях (б), (в) и (г).

Рассматривая аналогично матрицы подсистем, соответствующих системе (10б), получим собственные значения для особых точек  $w_j$  (9) в случаях (б), (в) и (г) для подсистем, отвечающих проекциям на фазовые плоскости  $P1(w, x_1)$  и  $P2(x_2, x_3)$ :

$$\lambda_{1,2}^{(P1,P2)} = \pm(2\gamma)^{-1/2} \left[ \left( \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \right) C^2 \pm \sqrt{C^4 \left( \begin{array}{c} - \\ + \\ + \end{array} \right) 4\gamma\rho} \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Из этих формул можно видеть, что характер особой точки зависит от значения показателя нелинейности  $\rho$ , который определяет скорость волны:  $V = 6s(\rho+1)^{-1}u^2$ . Тем не менее, условия (5), (6) и в этих случаях остаются справедливыми. Анализ последней формулы позволяет заключить следующее. Значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются комплексными и  $\lambda_1 = \lambda_2^*$  с положительными действительными частями на плоскости  $P1$  и отрицательными на плоскости  $P2$  — в случае (б) с учётом условия (5а). В случае (в)  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительны на плоскости  $P1$  и чисто мнимые на плоскости  $P2$ , причём  $\lambda_1 = -\lambda_2$  в обоих случаях. В случае (г) ситуация аналогична (в). Следовательно, в фазовом пространстве будут иметь место только особые точки  $w_j$  типов “устойчивый фокус-неустойчивый фокус” (б) и “седло-центр” (в) и (г) соответственно.

Для исследования глобальных фазовых портретов, включая особые траектории, отвечающие устойчивым решениям уравнений (7), использовались критерии Бендиксона и Дюлака [4, 5], а также рассчитывались первая и вторая ляпуновские величины [6]. Опуская математические выкладки ввиду их громоздкости, отметим, что эти исследования показали, что как в случае (б), так и в случаях (в) и (г), имеют место замкнутые траектории. При этом формулы (11) и (12) позволяют получить такие параметры кривых, как их направления и, следовательно, углы по отношению к осям координат на обеих плоскостях, а значит и построить глобальные фазовые портреты. Примеры таких фазовых портретов для случаев (б) и (в) при  $\rho = 1, 2$  показаны на рис. 2а, б и рис. 3а, б.

Используя значения характеристических корней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (11) для особых точек  $w_1 = 0$  с учётом условий (5) и граничных условий (8) можно

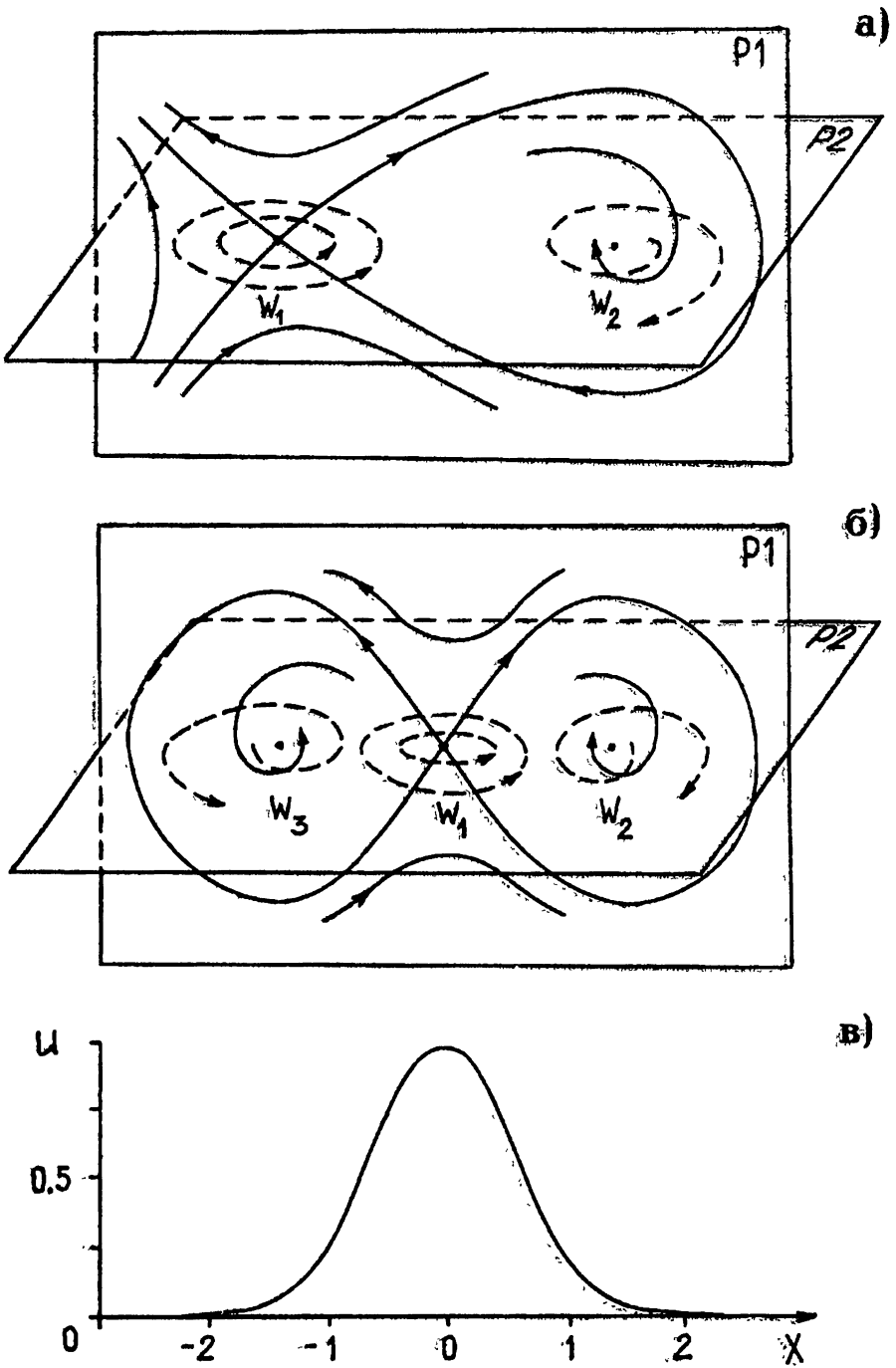


Рис. 2. Фазовые портреты решений уравнения (46) при  $\mu = \delta = 0$  для  $\rho = 1$  (а) и  $\rho = 2$  (б): сплошные и штриховые линии отвечают фазовым траекториям в плоскостях  $P_1$  и  $P_2$ , соответственно; и численные решения уравнения (1) при  $\mu = \delta = 0$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\beta = -1$  для  $\rho = 1$  (в).

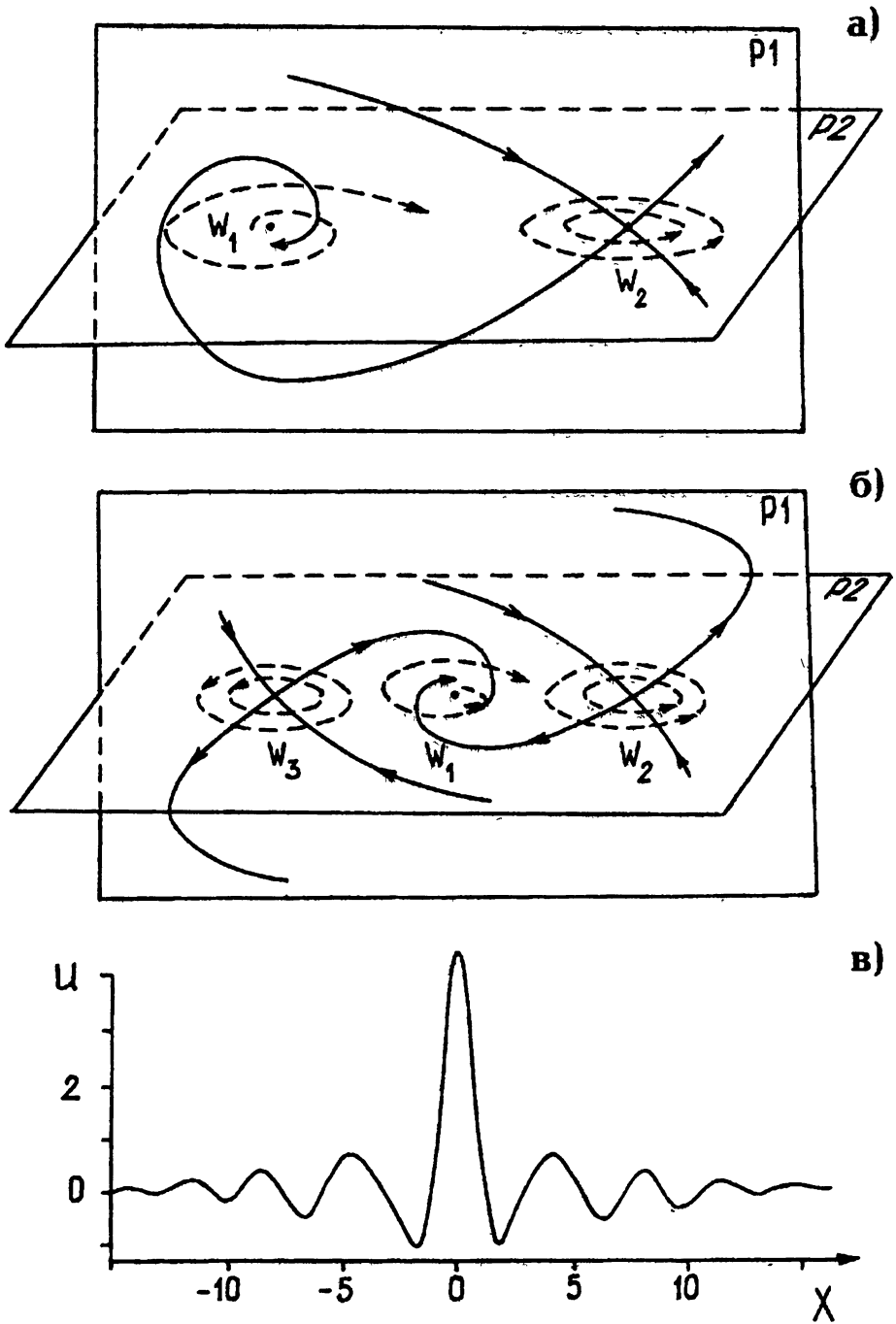


Рис. 3. Фазовые портреты решений уравнения (4в) для тех же самых параметров, что и на рис. 2а, б — (а) и (б), и численное решение уравнения (1) при  $\mu = \delta = 0$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 3,16$  для  $\rho = 1$  (в).



получить асимптотики решений уравнения (1) для случаев (б), (в) и (г) [2], а именно:

- для случаев (б) и (г)

$$w = A_1 \exp \left\{ (2\gamma)^{-1/2} \left[ C^2 + \sqrt{C^4 \pm 4\gamma} \right]^{1/2} \xi \right\} \quad (13a)$$

(верхний и нижний знаки относятся к случаям (б) и (г) соответственно);

- для случая (в)

$$w = A_2 \exp \left\{ (2C^{-1} \gamma^{1/2})^{-1} (2C^{-2} \gamma^{1/2} - 1)^{1/2} \xi \right\} \times \cos \left\{ (2C^{-1} \gamma^{1/2})^{-1} (2C^{-2} \gamma^{1/2} + 1)^{1/2} \xi + \Theta \right\}, \quad (13b)$$

где  $A_1$ ,  $A_2$  и  $\Theta$  — произвольные постоянные. Как можно видеть из выражений (13), в решениях уравнения (1) при  $\mu = \delta = 0$  в зависимости от знаков  $V$  и  $\beta$  могут иметь место солитоны как с монотонными, так и с осциллирующими асимптотиками. (Отметим, что при  $\beta = 0$  и любом значении  $\gamma > 0$  решение уравнения (2) с  $\mu = \delta = 0$  имеет вид  $w = (A_1 + A_2 \xi) \exp(\gamma^{-1/4} \xi)$  и, следовательно, также описывает солитон с монотонными асимптотиками [2]). При этом фазовые портреты, показанные на рис. 2а, б, отвечают солитонам с монотонными асимптотиками, а фазовые портреты, показанные на рис. 3а, б, — солитонам с осциллирующими асимптотиками. На рис. 2в, 3в показаны результаты численного интегрирования уравнения (1) при  $\mu = \delta = 0$  для начального условия  $u = u_0 \exp(-x^2/l^2)$ , что подтверждает результаты асимптотического анализа.

В заключение рассмотрим простой и наглядный случай линеаризованного уравнения КдВ с высшей дисперсионной поправкой, положив в уравнении (1)  $\rho = 0$ , что допустимо вдали от вершин солитонов. Выполнив в (1) для упрощения анализа масштабное преобразование  $u \rightarrow (1/6)u$ , получим вместо последнего уравнения в (10а) с учётом  $\mu = \delta = 0$

$$\gamma \dot{x}_3 \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \end{pmatrix} C^2 x_2 = 0.$$

Тогда для особой точки  $w_1 = 0$  собственные значения матриц подсистем, отвечающие фазовым плоскостям  $P1$  и  $P2$ , будут вместо (11) определяться равенствами

$$\lambda_{1,2}^{(P1)} = 0, \quad \lambda_{1,2}^{(P2)} = \pm C \left[ \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \end{pmatrix} \gamma \right]^{-1/2}$$

и, следовательно, в случаях (б) и (г) будет иметь место особая точка типа "седло-центр", а в случае (с) — "центр-центр"\*. Асимптотики решений при  $|\xi| = \infty$  будут определяться следующими равенствами:

в случаях (б) и (г) —

$$w = A \exp(C\gamma^{-1/2}\xi) + B,$$

в случае (в) —

$$w = A \cos(C\gamma^{-1/2}\xi + \Theta) + B$$

( $A$ ,  $B$  и  $\Theta$  — произвольные постоянные). Заметим, что в случае линейризованного уравнения КдВ с  $\beta = 0$  или  $\gamma = 0$  асимптотики при  $|\xi| = \infty$  есть константы.

### 3.2. Случай $\beta = \gamma = 0$ (диссипативные уравнения с неустойчивостью)

Положим теперь  $\beta = \gamma = 0$  в основных уравнениях. При этом, вместо систем (10а), (10б) из системы (7) для особых точек  $w_1 = 0$  и  $w_j$  получим

$$\begin{cases} x_1 = \dot{w}, & x_2 = \dot{x}_1, \\ \delta C \dot{x}_2 = \mu C^3 x_1 \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} w \end{cases} \quad (14a)$$

и

$$\begin{cases} x_1 = \dot{w}, & x_2 = \dot{x}_1, \\ \delta C \dot{x}_2 = \mu C^3 x_1 \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} \rho w. \end{cases} \quad (14б)$$

Знаки в скобках в системах (14) отвечают случаям  $V > 0$  и  $V < 0$ , что эквивалентно замене  $w_1 \leftrightarrow w_j$ , и поэтому мы можем исследовать системы только с верхними знаками (случай  $V > 0$  в уравнениях).

Поскольку системы (14) являются трёхмерными, будем также использовать при исследовании метод разложения соответствующих канонических систем, рассмотренный выше. При этом, разложение в обоих случаях приведёт к двумерной системе и одному уравнению (см. Приложение, п. 2). Такая факторизация позволяет получить собственные значения соответствующих систем с учётом соотношения значений коэффициентов  $\mu$ ,  $\delta$  и скорости  $V$ :

\* Вырождение особой точки "устойчивый фокус-неустойчивый фокус", соответствующей собственным значениям (11), в "центр-центр" есть следствие преобразования исходного уравнения  $u \rightarrow (1/6)u$ .

1) для  $\delta > (4/27)\mu^3 C^8$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (2\delta C)^{-1/3} Q_1^+, \\ \lambda_{2,3} &= -(16\delta C)^{-1/3} [Q_1^+ \pm i\sqrt{3} Q_1^-];\end{aligned}\quad (15)$$

2) для  $\delta = (4/27)\mu^3 C^8$

$$\lambda_1 = (\delta C/4)^{-1/3}, \quad \lambda_{2,3} = -(2\delta C)^{-1/3}; \quad (16)$$

3) для  $\delta < (4/27)\mu^3 C^8$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (\delta C/4)^{-1/3} \operatorname{Re}(Q^\pm), \\ \lambda_{2,3} &= -(2\delta C)^{-1/3} [\operatorname{Re}(Q^\pm) \mp \sqrt{3} |\operatorname{Im}(Q^\pm)|],\end{aligned}\quad (17)$$

где  $Q_1^\pm = Q^+ \pm Q^-$ ,

$$Q^\pm = \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 4\mu^3 C^8 / 27\delta} \right]^{1/9} \quad (18)$$

и  $Q^\pm$  действительно в случаях 1) и 2) и комплексно в случае 3). Для особой точки  $w_j$  формулы (15)–(17) также справедливы с учётом замены  $\delta \rightarrow \delta/\rho$  в формулах (15)–(17) и  $\delta \rightarrow \delta\rho^2$  в формуле (18), если знаки собственных значений  $\lambda_{1,2,3}$  сменить на обратные.

Как следует из (15)–(17), системы (14) имеют особые точки типа седла с координатами  $w_1$  и  $w_j$  для  $\delta \leq (4/27)\mu^3 C^8$  и седла-фокуса в обратном случае. Таким образом, имеет место грубое состояние равновесия трёхмерной системы. В обоих случаях при этом существуют двумерная сепаратрисная поверхность и две изолированные сепаратрисы по обе стороны от сепаратрисной поверхности. На сепаратрисной поверхности седла имеет место узел, а на сепаратрисной поверхности седла-фокуса — седло, все другие траектории, проходящие через достаточно малую окрестность седла или седла-фокуса, выходят из окрестности последних. Однако такой информации о локальном поведении решений недостаточно, чтобы построить глобальный фазовый портрет. Поэтому следует использовать тот факт, что при исследовании нелинейных систем направления сепаратрис соответствующих линеаризаций дают направления нелинейных сепаратрис в особой точке. Эти главные направления можно получить из линейного преобразования, связывающего линеаризованную систему с её канонической системой (см. Приложение, п. 2). На рис. 4а, б, рис. 5а, б показаны общие фазовые портреты для случаев  $\delta \leq (4/27)\mu^3 C^8$  и  $\delta > (4/27)\mu^3 C^8$  при  $\beta = \gamma = 0$  и  $\rho = 1, 2$ ;  $V > 0$ . Понятно, что фазовые портреты будут такими же и для  $\rho > 2$ , что следует из формул (15)–(18) с учётом упомянутых выше замен.

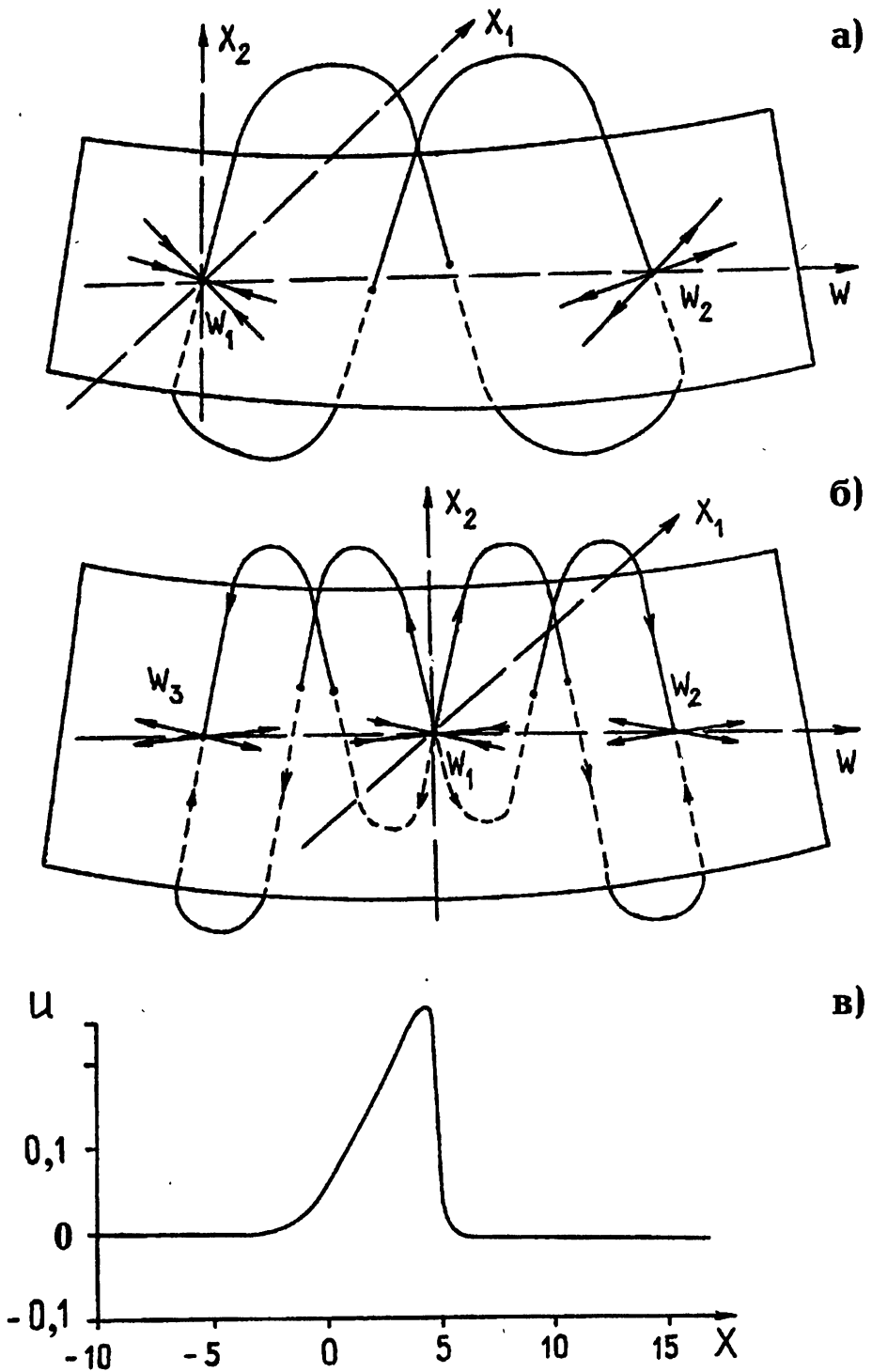


Рис. 4. Фазовые портреты решений уравнения (2) при  $\beta = \gamma = 0$  и  $V > 0$  для случая  $\delta \leq (4/27)\mu^3 C^8$  при  $\rho = 1$  (а) и  $\rho = 2$  (б), и соответствующее численное решение уравнения (1) для  $\mu = 0,1$ ,  $\delta = 1 \cdot 10^{-6}$  при  $t = 3$  (в).

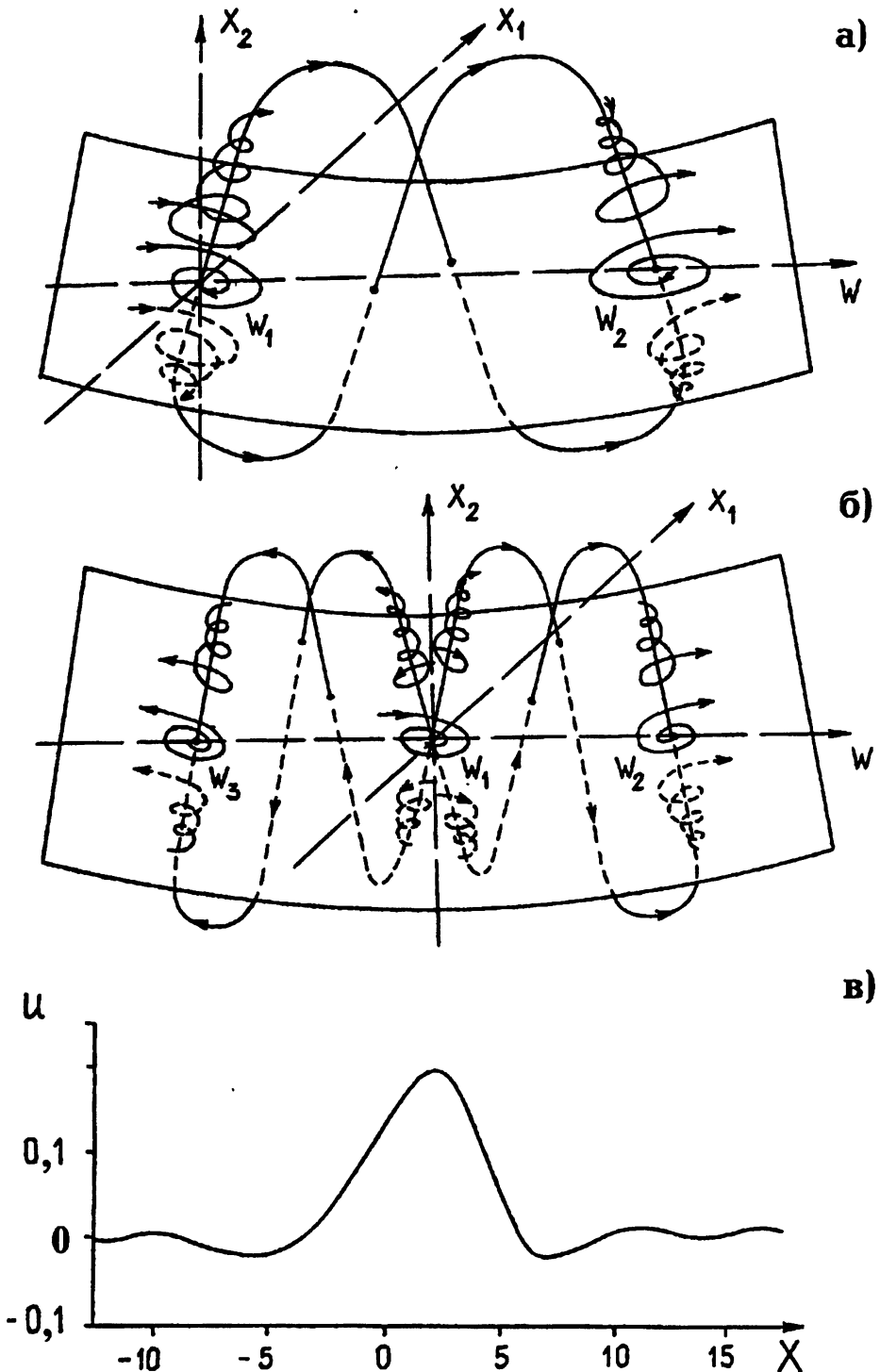


Рис. 5. То же, что на рис. 4а,б для случая  $\delta > (4/27)\mu^3 C^8$  — (а) и (б), и соответствующее численное решение уравнения (1) для  $\mu = 0,01$ ,  $\delta = 1$  при  $t = 3$  (в).

Используя значения  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (15)–(17) для особых точек  $w_1 = 0$  с учётом граничных условий (8), можно получить асимптотики решений уравнения (1) при  $\beta = \gamma = 0$ :

1) для  $\delta > (4/27)\mu^3 C^8$

$$w = A_1 \exp \left[ (2\delta C)^{-1/9} Q_1^+ \xi \right] + \exp \left[ -(16\delta C)^{-1/9} Q_1^+ \xi \right] \times \\ \times \left\{ A_2 \cos \left[ \sqrt{3} (16\delta C)^{-1/9} Q_1^- \xi + \Theta_1 \right] + A_3 \sin \left[ \sqrt{3} (16\delta C)^{-1/9} Q_1^- \xi + \Theta_2 \right] \right\},$$

2) для  $\delta = (4/27)\mu^3 C^8$

$$w = A_1 \exp \left[ (\delta C/4)^{-1/9} \xi \right] + A_2 (1 + A_3 \xi) \exp \left[ -(2\delta C/4)^{-1/9} \xi \right],$$

3) для  $\delta < (4/27)\mu^3 C^8$

$$w = A_1 \exp \left[ (\delta C/4)^{-1/9} \operatorname{Re}(Q^\pm) \xi \right] + \\ + A_2 \exp \left\{ (2\delta C)^{-1/9} \xi \left[ \operatorname{Re}(Q^\pm) - \sqrt{3} |\operatorname{Im}(Q^\pm)| \right] \right\} + \\ + A_3 \exp \left\{ -(2\delta C)^{-1/9} \xi \left[ \operatorname{Re}(Q^\pm) + \sqrt{3} |\operatorname{Im}(Q^\pm)| \right] \right\},$$

где  $A_1, A_2, A_3, \Theta_1, \Theta_2$  — произвольные постоянные. Из этих формул легко видеть, что решения уравнения (1) имеют осциллирующие асимптотики в случае 1) и экспоненциальные — в случаях 2) и 3). На рис. 4в, рис. 5в показаны численные решения уравнения (1), отвечающие случаям 3) и 1) соответственно, для начального условия  $u = u_0 \exp(-x^2/l^2)$ .

Рассматривая аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, линеаризованное уравнение с  $\beta = \gamma = 0$ , легко установить, что собственные значения соответствующих систем

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm C(\mu/\delta)^{1/2}$$

определяют при  $|\xi| = \infty$  асимптотики экспоненциального вида:

$$w = A \exp \left[ C(\mu/\delta)^{1/2} \xi \right].$$

В специальных же случаях, когда  $\mu = 0$  или  $\delta = 0$ , асимптотики, в чём легко убедиться, есть константы.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что нами рассмотрены специальные случаи, когда  $\mu = \delta = 0$  и  $\beta = \gamma = 0$  в уравнении (1), для других значений коэффициентов могут наблюдаться более сложные волновые структуры,

обусловленные наличием всех рассмотренных выше эффектов в их совокупности. Так, наши численные результаты и результаты, полученные численно в [7], показывают, что для  $\beta, \mu, \delta \neq 0$  в процессе временной эволюции в присутствии гауссовских случайных флуктуаций волнового поля для гармонических начальных условий и начальных условий в форме уединённого импульса также могут формироваться устойчивые волновые структуры солитонного типа. Более того, устойчивые солитонные структуры могут формироваться и при  $\gamma \neq 0$ . Однако аналитическое изучение таких случаев весьма сложно, хотя при этом также может использоваться рассмотренный выше подход. Отметим также, что полученные в настоящей работе результаты могут быть весьма полезны при изучении решений и интерпретации многомерных фазовых портретов более сложных неодномерных модельных уравнений (см., например, [2]).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Каждая из систем (10) может быть представлена в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (\text{П.1})$$

где  $\mathbf{x} = (w, x_1, x_2, x_3)$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (\text{П.2})$$

и  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  — коэффициенты при  $w, x_1, x_2, x_3$  в последних уравнениях систем (10) соответственно. Матрица  $\mathbf{A}$  имеет свою жорданову форму  $\mathbf{J}$ , а собственные значения  $\lambda$  матрицы  $\mathbf{A}$  определяют тип матрицы  $\mathbf{J}$ . Например, в окрестности особой точки  $w_1 = 0$  для  $\mu = \delta = 0$  в уравнении (46) собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы (П.2) действительны ( $\lambda_1 = -\lambda_2$ ), собственные значения  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  — мнимые ( $\lambda_3 = -\lambda_4$ ) и особая точка может быть определена как “устойчивый узел-центр” в четырёхмерном фазовом пространстве по аналогии с классификацией дву- и трёхмерных динамических систем.

Поскольку  $\det \mathbf{A} \neq 0$  и  $\lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), линейная система (П.1) и соответствующая каноническая система (которая может быть получена из (П.1), используя преобразование  $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$ , где  $\mathbf{M}$  — матрица преобразования)

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y}, \quad (\text{П.3})$$

где

$$\mathbf{J} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array} \right]$$

являются простыми. Матрица  $J$  состоит из двух жордановых ячеек второго порядка  $B$  и  $C$ , имеющих в общем случае форму  $\begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$ , где  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2$ ) определяются из выражений для корней характеристических уравнений, соответствующих последнему уравнению систем (10) с коэффициентами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ :  $\lambda_1 = \lambda_2^* = a_1 - ib_1$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4^* = a_2 - ib_2$ . Следовательно, система (П.3) может быть представлена как две двумерные системы, а именно:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

Поэтому фазовый портрет линейной системы (П.1) может быть рассмотрен в проекциях особой точки и пространственных фазовых траекторий на две плоскости.

Разложение любой системы типа (7), линеаризованной в окрестности соответствующих особых точек с координатами (9), на две подсистемы может быть выполнено аналогично. Однако необходимо учитывать, что для специальных случаев значений коэффициентов  $\alpha_i$  в (П.2), когда  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$  или  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4$ , жордановы ячейки  $B$  и  $C$  будут иметь другую форму и в этом случае рассмотренная выше факторизация невозможна. Однако в нашем случае, для уравнений типа (1), такая ситуация не имеет места.

2. Каждая из систем (14) может быть представлена в матричной форме (П.1), где  $x = (w, x_1, x_2)$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (\text{П.4})$$

и  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — коэффициенты при  $w, x_1, x_2$  соответственно в последних уравнениях систем (14). Приведём систему (П.1) к канонической форме (П.3) с

$$J = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad a, b, \lambda_3 \in \mathbb{R},$$

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = a - ib.$$

Тогда можно получить фазовый портрет системы (П.1) из фазового портрета канонической системы, используя преобразование  $z = My$ , где  $M$  представляет собой матрицу преобразования. Направления траекторий и их углы по отношению к осям в полюсах и седлах для канонической



системы известны. В координатной системе  $x_1, x_2, x_3$  оси  $y_1, y_2, y_3$  представляют собой прямые, проходящие через точку  $(0, 0, 0)$ , их векторы имеют направления  $m_1, m_2, m_3$  и формируют матрицу  $M$ . Собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  матрицы  $A$  могут быть получены из уравнения

$$Am_i = \lambda_i m_i, \quad i = 1, 2, 3$$

после вычисления векторов  $m_1, m_2, m_3$ , что позволяет получить направления сепаратрис для линеаризованной системы (П.1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-02-16589.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kawahara T. J. //Phys. Soc. Japan., 1972. V. 33. P. 260.
2. Карпман В. И., Белашов В. Ю. //Препринт № 25 (972). — М.: ИЗМИРАН, 1991.
3. Эрроусмит Д. К., Плейс К. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1986.
4. Bendixson I. //Acta Mathematica, 1901. V. 24. P. 1.
5. Dulac H. //Bull. Soc. Math. France, 1923. V. LI. P. 1.
6. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. — М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1949.
7. Kawahara T. //Phys. Rev. Lett., 1983. V. 51. P. 381.

Северо-Восточный комплексный  
НИИ ДВО РАН;  
Магаданский педагогический  
университет; Россия

Поступила в редакцию  
5 августа 1995 г.

#### QUALITATIVE ANALYSIS AND ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF KDV-CLASS GENERALIZED EQUATIONS

*V. Yu. Belashov, S. G. Tyunina*

We study asymptotics and the structure of solutions of the KdV-class equations with arbitrary nonlinearity power, generalized by introducing of the next order dispersive term and the terms describing dissipation and instability. Different classes of soliton and nonsoliton solutions were distinguished using the asymptotic analysis and the analysis of solutions in the phase space.

УДК 539.12.04

## РЕНТГЕНОВСКОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В УСЛОВИЯХ ТРЁХВОЛНОВОЙ ДИФРАКЦИИ

*Н. В. Шипов*

Показано, что радиационные потери на рентгеновское резонансное переходное параметрическое излучение в условиях трёхволновой дифракции удваиваются по сравнению с двухволновым случаем. Выявлены интервалы частот, запрещённых для излучения по всему конусу (за исключением двух симметричных точек на конусе). Это обстоятельство приводит к понижению максимума спектральной плотности, а также к асимметрии спектрального распределения. Частотная ширина максимума находится в хорошем согласии с последними экспериментальными данными.

Интенсивность рентгеновского резонансного переходного (параметрического) излучения находится интегрированием решений рентгенооптической задачи в соответствующей геометрии [1]. Другой подход основан на методе вычисления силы торможения частицы полем излучения:

$$W = \frac{e\vec{v}}{v(2\pi)^4} \iiint \vec{E}_0(\vec{k}_0, \omega) d^3k_0 d\omega,$$

где  $e$ ,  $\vec{v}$  — заряд и скорость частицы,  $\vec{E}_0(\vec{k}_0, \omega)$  — фурье-амплитуда поля в направлении волнового вектора  $\vec{k}_0$ , близком к  $\vec{v}$  [2]. Этот метод впервые применён и обоснован в [3]. Оба метода дают сходные результаты, а при переходе к случаю тонкого кристалла спектральные и угловые характеристики совпадают полностью [1, 2]. Однако отдельные экспериментальные спектры [4] оказываются более чем на порядок шире по сравнению с теоретическими [1, 2]. Излучение в условиях четырёхволновой (и выше) дифракции экспериментально наблюдалось в [5, 6]. Анализ этих геометрий возможен только численными методами [7]. Ввиду высокой спектральной плотности обсуждается возможность применения этого типа излучения в технических приложениях (ангиография, литография и др.) [8]. В связи с этим актуален дальнейший поиск оптимальных геометрий и кристаллов, а также выявление особенностей излучения в них. Многочисленные симметричные (вырожденные) геометрии многоволновой дифракции при втором подходе допускают аналитическое интегрирование, поскольку здесь не требуется решение граничной задачи.

Неоднородная система для фурье-амплитуд  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  в условиях трёхволновой компланарной дифракции, когда векторы  $\vec{k}_0$ ,  $\vec{k}_1 = \vec{k}_0 + \vec{\tau}_1$ ,

$\vec{k}_2 = \vec{k}_0 + \vec{\tau}_2$  лежат в плоскости  $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3$ , распадается по ортам поляризации  $\vec{\pi}$  и  $\vec{\sigma}$  ( $\vec{\sigma}$  ортогонален плоскости  $\vec{k}_0, \vec{\tau}_1$ , рис. 1):

$$\begin{cases} \left(1 + g_0 - \frac{k_0^2 c^2}{\omega^2}\right) E_{0s} + c_s g(\tau_1) E_{1s} + c_s g(\tau_3) E_{2s} = \frac{8\pi^2 i \theta \epsilon \nu p_s \delta(\omega - \vec{k} \vec{v})}{\omega}, \\ c_s g(\tau_1) E_{0s} + \left(1 + g_0 - \frac{k_1^2 c^2}{\omega^2}\right) E_{1s} + c_s g(\tau_2) E_{2s} = 0, \\ c_s g(\tau_3) E_{0s} + c_s g(\tau_2) E_{1s} + \left(1 + g_0 - \frac{k_2^2 c^2}{\omega^2}\right) E_{2s} = 0, \quad s = \pi, \sigma, \end{cases} \quad (1)$$

где  $c_\sigma = 1$ ,  $c_\pi = \cos 2\theta_B$ ,  $\theta_B = 60^\circ$ ,  $p_\sigma = \sin \phi$ ,  $p_\pi = \cos \phi$ ,  $\theta$  и  $\phi$  — полярный и азимутальный углы вектора  $\vec{k}_0$ ;  $g_0, g(\tau_1), g(\tau_2), g(\tau_3)$  — пространственные фурье-амплитуды поляризуемости. В centrosимметричных кристаллах Ge и Si они равны друг другу (и отличны от нуля) при  $h + k + \ell = 4n$ , где  $\vec{\tau} = \frac{2\pi}{a}(h, k, \ell)$ ,  $a$  — постоянная решётки.

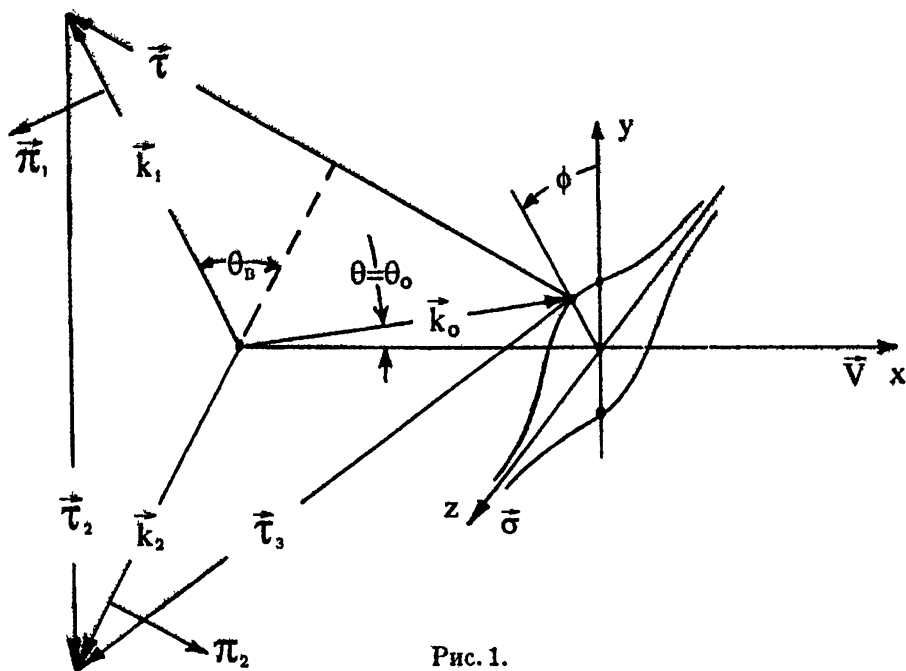


Рис. 1.

Считая лоренц-фактор электрона не малой величиной ( $\gamma^{-2} \lesssim |g|$ ), из условия достижения максимумов амплитуд  $E_0, E_1, E_2$  находим уравнение, определяющее полярный (азимутальный) угол излучения:

$$3\theta^2 \cos^2 \phi = \left[ \theta^2 - \nu - c_s^2 g^2 (z_0 + \theta^2)^{-1} \right]^2 - c_s^2 g^2 \left[ 1 + c_s g (z_0 + \theta^2)^{-1} \right]^2, \quad (2)$$

где  $\nu = 3(\omega - \omega_B)/\omega_B + \gamma^{-2}/2 + g'_0$ ,  $\omega_B = c\tau/2 \sin \theta_B$ ,  $z_0 = \gamma^{-2} - g'_0$ ,

$g_0 = g'_0 + ig''_0$ ,  $g(\tau) = g'(\tau) + ig''(\tau)$ ,  $g = g'(\tau) < 0$ . Поглощение считается слабым,  $g''_0 \ll |g'_0|$ , причём в случае одноатомного кристалла  $g''(\tau) < g''_0$ .

Вначале рассмотрим случай  $|\nu| \gtrsim \sqrt{|g|}$  немалых отклонений частоты  $\omega$  от брегговской частоты  $\omega_B$ . Из (2) находим два симметричных угла излучения:

$$\theta_0 = \pm \nu / \sqrt{3} \cos \phi \sim \sqrt{|g|},$$

где знаки  $\pm$  при  $\nu > 0$  отвечают положительным (отрицательным) значениям  $\cos \phi$ . Аналогично [2, 3], для дифференциальной по азимуту спектральной плотности излучения, находим

$$\frac{d^2 W_\sigma}{d\omega d\phi} = \begin{cases} e^2 g^2 p_s^2 \omega_B c_s^2 |\nu|^3 / \pi c^2 (3z_0 \cos^2 \phi + \nu^2)^2, & \theta_0 \geq 0; \\ 0, & \theta_0 < 0, \end{cases} \quad (3)$$

Нижняя кривая на рис. 2а иллюстрирует зависимость (3).

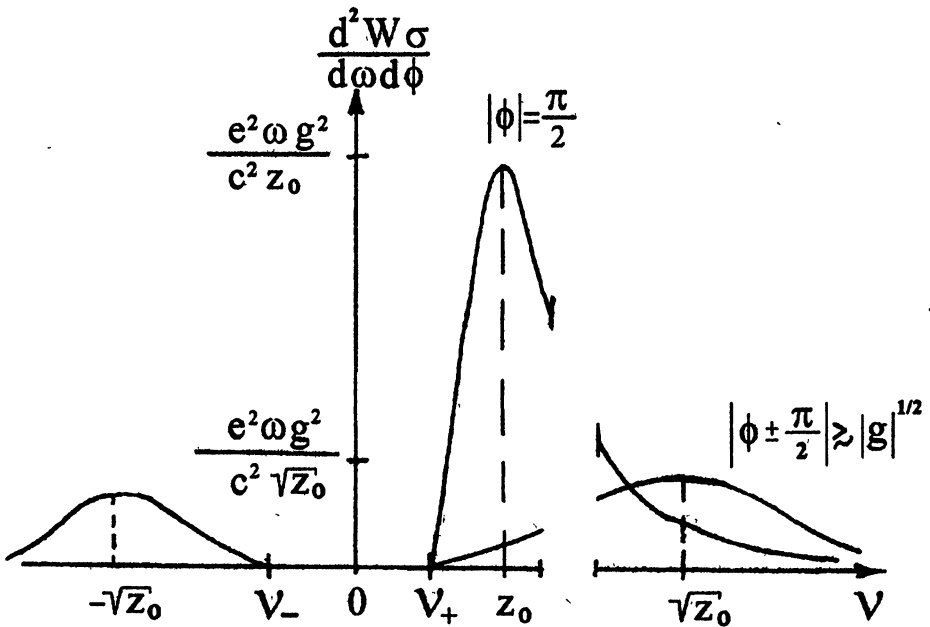


Рис. 2а.

Интегрированием (3) вычисляем спектральную плотность излучения:

$$dW_\sigma/d\omega = I \left(1 + \nu^2/3z_0\right)^{-1/2}, \quad I = e^2 g^2 \omega_B / c^2 \sqrt{3z_0}, \quad (4a)$$

$$dW_\pi/d\omega = I \nu^2 \left(1 + \nu^2/3z_0\right)^{-3/2} / 12z_0. \quad (4б)$$

Сплошные кривые на рис. 26 иллюстрируют зависимости (4а), (4б) и оказываются вдвое выше соответствующих спектральных распределений в двухволновом случае [2]. Причина этого понятна. Открытие второго канала излучения в условиях трёхволновой дифракции удваивает потери частицы.

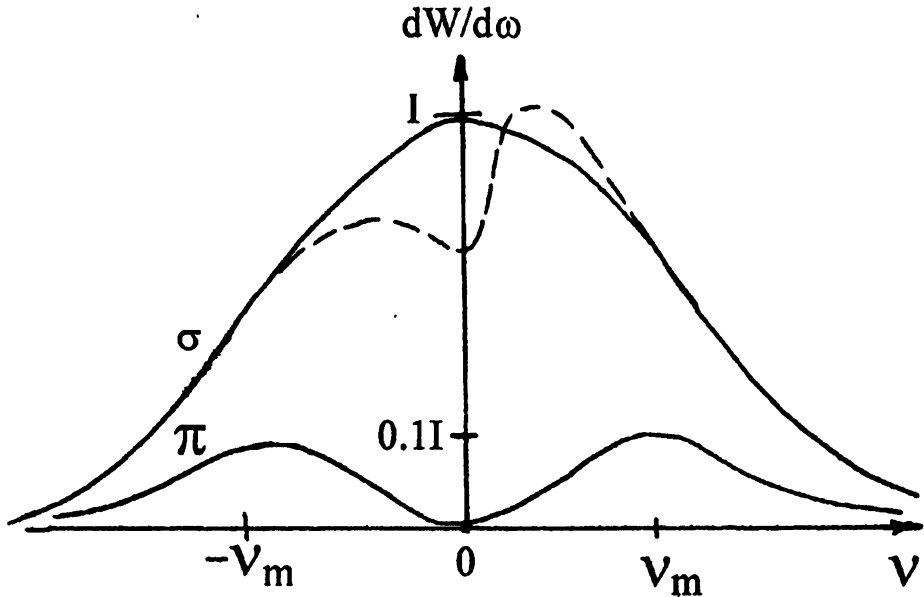


Рис. 26.

Далее рассмотрим излучение вблизи брегговской частоты  $\omega_B$ , когда частотная отстройка  $\nu$  мала,  $\nu \sim g$ . Для угла  $\theta_0$  излучения из (2) при условии  $|\cos \phi| \gg |g|$  получаем

$$\theta_0 = \pm \left[ \left( \nu + c_s^2 g^2 / z_0 \right)^2 - c_s^2 g^2 (1 + c_s g / z_0)^2 \right]^{1/2} / \sqrt{3} \cos \phi \sim |g|. \quad (5)$$

Из (5) следует существование интервала частот  $\nu_-^s \leq \nu \leq \nu_+^s$ , где  $\theta_0^s \leq 0$  и излучение невозможно по всему конусу (за исключением двух направлений с азимутами  $\phi = \pm \pi/2$ ). Границы запрещенной зоны равны для  $\sigma$ - поляризации

$$\nu_+^\sigma = -g - 2g^2/z_0, \quad \nu_-^\sigma = g < 0, \quad (6a)$$

а для  $\pi$ -поляризации

$$\nu_+^\pi = -g/2, \quad \nu_-^\pi = g/2 - g^2/2z_0. \quad (6b)$$

В указанной области частот  $\frac{d^2W}{d\omega d\phi} = 0$  (нижняя кривая на рис. 2а). Угол излучения для рассматриваемых частот  $\nu \sim |g|$  также оказывается ма-

лым,  $\theta_0 \sim |g|$ . Поэтому интенсивность излучения вне запрещённой зоны ( $\nu \leq \nu_-$  или  $\nu \geq \nu_+$ ) также мала,  $\frac{d^2W}{d\omega d\phi} \sim \frac{e^2 \omega_B g^3}{c^2}$ .

Излучение в точке на конусе с азимутом  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$  возможно только для  $\sigma$ -поляризации, поскольку  $p_\pi = 0$ . Уравнение (2) определяет в этом случае два угла излучения:  $\theta_3 = \frac{1}{2} \left[ \nu + g - z_0 + \sqrt{(\nu + g + z_0)^2 + 8g^2} \right]^{1/2} \sim |g|^{1/2}$  и  $\theta_4 = (\nu - g)^{1/2}$ . Угол  $\theta_4$  не даёт вклада в потери, так как  $E_0(\theta_4) = 0$ , а угол  $\theta_3$  определяет основной вклад:

$$\frac{d^2W_\sigma}{d\omega d\phi} = \begin{cases} e^2 \omega_B g^2 \theta_3^2 / \pi c^2 (z_0 + \theta_3^2) [(\nu + g + z_0)^2 + 8g^2]^{1/2}, & \nu \geq \nu_+^\sigma; \\ 0, & \nu < \nu_+^\sigma. \end{cases} \quad (7)$$

Максимум спектрального распределения (7) (верхняя кривая на рис. 2а) оказывается значительно более высоким, а его частотная ширина  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim z_0 \sim |g|$  практически на два порядка меньше, чем для других направлений на конусе. Это обстоятельство приводит к асимметрии спектрального распределения  $dW_\sigma/d\omega$  (пунктирная кривая на рис. 2б). С другой стороны, наличие запрещённой зоны (6) в условиях трёхволновой дифракции объясняет уменьшение спектральной плотности на брегговской частоте (пунктир на рис. 2б).

Экспериментальных спектров в многоволновом случае пока нет. Однако в двухволновом случае (используя эффект влияния К-края поглощения) спектральное распределение излучения исследовано (в отличие от [4]) с учётом конечной угловой апертуры коллиматора и спектрального разрешения детектора 20% [8]. В кристалле Ge для отражений (III) при энергии электронов  $E = 900$  МэВ,  $\theta_B = 9,25^\circ$ ,  $a = 5,65 \text{ \AA}$  для ширины  $\Delta\omega/\omega$  экспериментального спектрального распределения найдено  $1,2 \cdot 10^{-2}$  [8]. Из формул (4), которые справедливы также и в двухволновом случае, для частотной ширины спектрального распределения  $\frac{d(W_\sigma + W_\pi)}{d\omega}$  получаем  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq \frac{\sqrt{z_0}}{\text{tg } \theta_B} \simeq 10^{-2}$ .

В заключение приведём угловое распределение (получаемое интегрированием по частоте) резонансного переходного излучения в условиях трёхволновой дифракции:

$$\frac{d^2(W_\sigma + W_\pi)}{d\theta_y d\theta_z} = 2g^2 e^2 \omega_B^2 (\theta_z^2 + \theta_y^2/4) / 3\pi c^2 (z_0 + \theta_z^2 + \theta_y^2)^2, \quad (8)$$

где  $\theta_y = \theta \cos \phi$ ,  $\theta_z = \theta \sin \phi$  — углы отсчёта вектора  $\vec{k}_0$  в плоскости дифракции и в направлении  $z$ , перпендикулярном к плоскости дифракции.

Угловое распределение (8), как и в двухволновом случае [1], имеет симметричный двугорбый вид.

Наблюдаемое в кристалле AsGa [5] угловое распределение в условиях 4-лучевой дифракции имеет в целом двугорбый (однако несимметричный) вид. Численный расчёт [7] в условиях 4-лучевой дифракции также приводит к симметричному угловому распределению, а асимметрия углового распределения, наблюдаемая на эксперименте, может быть обусловлена отклонением экспериментальной плоскости сечения измерений от плоскости симметрии [7].

Отметим, что интенсивности излучения из тонкого образца кристалла толщины  $L$  в направлении  $k_1$  (или  $k_2$ ) отличаются от соответствующих характеристик (3), (4), (7), (8) дополнительным множителем  $L/2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Feranchuk I. D., Ivashin A. V. //J. Physique, 1985. V. 46. № 11. P. 1981.
2. Шипов Н. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1985. Т. 28. № 8. С. 1043.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982: С. 115.
4. Адищев Ю. Н., Мун В., Углов С. Р. — В кн.: Материалы XVII Все-союзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. — М.: Изд-во МГУ, 1988. С. 99.
5. Afanassenko V. P., Baryshevsky V. G., et al. //Phys. Lett., 1989. V. 141A. P. 311.
6. Афанасенко В. П., Барышевский В. Г., Зуевский Р. Ф. и др. //Письма в ЖЭТФ, 1990. Т. 51: С. 242.
7. Степанов С. А., Силенко А. Я., Ульяненко А. П., Дубовская И. Я. — В кн.: Тез. докл. XXVI междунар. конф. по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. — М.: Изд-во МГУ, 1996: С. 56.
8. Амосов К. Ю., Верзилов В. А., Внуков И. Е. и др. //Поверхность, 1995. Вып. 11: С. 81.

Московский государственный  
университет леса, Россия

Поступила в редакцию  
25 декабря 1995 г.

#### THREE-WAVE DIFFRACTION OF THE PARAMETRIC X-RAY RADIATION

*N. V. Shipov*

The intensity of the parametric X-Rays in the case of three-wave diffraction is two times larger than that in the case of two-wave diffraction. The frequency bands are found where the radiation is forbidden. That leads to asymmetry of spectral distribution and to decreasing maximum of spectral density of radiation.

УДК 621.371:526.2+551.526+528.811+551.501

## ДИНАМИКА ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ ВОДА – ВОЗДУХ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ТЕПЛОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ НА ЧАСТОТЕ 60 ГГц

*К. П. Гайкович, Р. В. Троицкий*

Выполнены исследования динамики тепло- и массопереноса через границу раздела вода–воздух на основе лабораторных радиометрических измерений временной зависимости теплового радиоизлучения водной среды на частоте 60 ГГц, связанной с турбулизацией воздуха над её поверхностью вентилятором. Восстановлена динамика температурного профиля в воде и в вязком подслое воздуха, а также потока тепла через границу раздела сред. Удалось определить составляющие потока, связанные с испарением и теплообменом, скорость испарения с единицы поверхности. Получено уравнение для определения толщины вязкого подслоя в воздухе по величине потока тепла; эта толщина в условиях эксперимента составила около 2 мм. Обнаружена зависимость процесса от наличия турбулентности в водной среде и предложены методы определения толщины термической плёнки. При отсутствии турбулентности в неустойчиво стратифицированной водной среде наблюдалось развитие периодического конвективного процесса с момента достижения критического значения числа Релея. Исследована зависимость теплообмена от наличия на поверхности воды нефтяной плёнки. Установлено, что при толщине плёнки 5 мкм скорость теплообмена уменьшается из-за наличия нефти примерно в 3 раза.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ [1–6] развита теория радиотеплового зондирования сред, основанная на совместном решении уравнений переноса теплового радиоизлучения и теплопроводности. Полученные соотношения позволяют по измерениям динамики яркостной температуры теплового радиоизлучения полупространства всего на одной длине волны и в фиксированном направлении определять эволюцию профиля температуры в среде и теплового потока через границу полупространства. Эти соотношения были успешно применены в исследованиях теплового режима грунта по излучению в сантиметровом диапазоне и пограничного слоя атмосферы — по измерениям динамики излучения в центре линии поглощения кислорода на 0,5 см [5, 6]. Однако в указанных случаях при интерпретации трудно разделить вклад в погрешность, связанный с неточным знанием параметров среды и их отклонениями от условий однородности и стационарности, при которых



справедлива теория, от вклада, обусловленного ошибками измерений яркостных температур.

Для водной среды, параметры которой постоянны и известны с очень высокой точностью, результаты развитой теории можно применять вполне обоснованно. Актуальность исследований теплового режима в поверхностном слое воды и воздуха сантиметрового масштаба связана с тем обстоятельством, что температурные градиенты в этом слое и испарение с поверхности определяют теплообмен между океаном и атмосферой, а применение контактных методов, особенно для измерений динамики в быстропротекающих процессах, затруднено и связано с внесением возмущений в параметры измеряемой среды.

Ранее многоволновые радиометрические измерения теплового излучения водной среды уже успешно применялись для восстановления стационарного глубинного температурного профиля в лабораторных условиях [3, 7], а также его динамики при прохождении внутренних волн [8] на основе решения некорректного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода для яркостной температуры методом А. Н. Тихонова. В принципе, аналогичный подход мог бы быть применён и для исследования динамики температурного режима, возникающей при нестационарных граничных условиях, однако упомянутый выше одноволновый метод с точки зрения решения задачи является корректным, а с точки зрения калибровки и компактности антенной и радиометрической систем — не только кардинально более простым, но и имеет хорошие перспективы применения в натуральных условиях.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Измерения водной среды проводились на измерительной установке, которая включала кювету с водой с размерами  $2 \times 1,5 \times 0,2$  м, радиометрическую систему на частоте 60 ГГц (в центре полосы поглощения кислорода), два игольчатых контактных датчика температуры, которые могли быть установлены на заданной глубине в толще воды и вентилятор, закреплённый совместно с рупором антенны. Номинальная чувствительность радиометра составляла 0,01 К при постоянной времени 1 с, но с учётом температурных флуктуаций фона её реальное значение составляло около 0,03 К. Ширина диаграммы направленности рупорно-скалярной антенны, расположенной на высоте 1 м над поверхностью воды, составляла  $5^\circ$ , т.е. пятно диаграммы на водной поверхности имело диаметр около 10 см. Калибровка измерений яркостной температуры ( $T_{\text{я}}$ ) проводилась по самой измеряемой водной среде при двух различающихся примерно на 5 К значениях температуры (однородное распределение температуры достигается перемешиванием). Постоянство и однородность фона, а также

его близость к измеряемым значениям температур приводит к практически полной компенсации коэффициента отражения от водной поверхности, а способ калибровки, когда эталонная яркостная температура полагается равной температуре воды, реализует условие  $R = 0$ . Это позволяло при измерениях достигнуть точности привязки  $T_x$  к показаниям термометра, сравнимой с флуктуационной чувствительностью радиометра.

Толщина скин-слоя формирования теплового радиоизлучения на 0,5 см составляет около 0,2 мм, и при резких градиентах температуры, наблюдающихся в термических плёнках, отличие яркостной температуры от поверхностной доходит до 0,2 К, что является весьма большой величиной при реализованной точности измерений и не позволяет при интерпретации считать яркостную температуру равной поверхностной.

В исходном состоянии в воде путём перемешивания создавалось однородное распределение температуры, а теплообмен с воздухом в спокойном состоянии не приводил к заметным на масштабе нескольких минут изменениям.

Идея состояла в исследовании динамики теплового режима, которая возникает при скачкообразном изменении теплопроводности воздуха над поверхностью воды при его турбулизации с помощью вентилятора. При включении обдува резко уменьшается толщина вязкого подслоя над водной поверхностью, в котором существует ламинарный режим, а перенос тепла и водяного пара, являющегося малой примесью, осуществляется через механизм молекулярной диффузии. Этот перенос определяется градиентами, соответственно, температуры и концентрации водяного пара между уровнями водной поверхности и верхней границей вязкого подслоя. Выше этой границы существует режим, определяемый уже турбулентной диффузией, коэффициент которой на несколько порядков больше, чем коэффициент диффузии в вязком подслое. Это позволяет считать, что весь перепад температуры и концентрации водяного пара между значениями этих величин у водной поверхности и комнатными значениями осуществляется именно в вязком подслое. Таким образом, модель для турбулизованной воздушной среды над поверхностью воды является двухслойной.

Резкое возрастание градиентов в этом слое при уменьшении его толщины из-за турбулизации воздуха приводит к возрастанию потока водяного пара (увеличению испарения) от практически нулевого исходного уровня, а следовательно, к соответствующему возрастанию потока тепла, связанного с испарением, а также к изменению и второй компоненты потока тепла, связанной с теплообменом. Результатом является быстрое охлаждение поверхностного слоя водной среды, и соответствующая этому охлаждению динамика яркостной температуры теплового радиоизлучения регистрируется чувствительным радиометром. Последующий анализ позволяет восстановить все детали тепло- и массообмена в системе. Оценки

показали, что влияние на теплообмен компоненты, связанной с ИК излучением, в лабораторных условиях пренебрежимо мало (в натуральных условиях это, вообще говоря, не так).

Основному анализу предшествовал пересчёт зарегистрированной радиометром с постоянной времени  $\tau = 1$  с динамики яркостной температуры  $T_p(t)$  к истинной динамике  $T_x(t)$ , поскольку в начальной фазе процесса скорость изменения яркостной температуры не мала по сравнению с постоянной времени интегрирования  $\tau$ . Соотношение между радиометрическим откликом  $T_p(t)$  и истинной динамикой яркостной температуры имеет вид

$$T_p(t) = \int_0^t T_x(\tau) e^{-\tau/\tau_0} d\tau. \quad (1)$$

Это уравнение путём дифференцирования по верхнему пределу легко обращается. Имеем

$$T_x(t) = T_p(t) + \tau \frac{\partial T_p}{\partial t}(t). \quad (2)$$

Максимальное отклонение  $T_x(t) - T_p(t) \sim 0,1$  К наблюдалось около  $t = 10$  с.

Далее, полученная временная зависимость  $T_x(t)$  использовалась для восстановления подповерхностного профиля температуры  $T(z, t)$  в однородном по температуропроводности  $a^2$  и коэффициенту поглощения теплового излучения  $\gamma$  полупространстве  $z \leq 0$  из соотношения, полученного путём совместного решения уравнений переноса излучения и теплопроводности [4-6]:

$$T(z, t) = \int_{-\infty}^t T_x(\tau) (-z) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} + \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^t T'_x(\tau) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}, \quad (3)$$

которое для  $z < 0$  можно взять по частям

$$T(z, t) = \int_{-\infty}^t T_x(\tau) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[ \frac{1}{\gamma} \left( \frac{z^2}{2a^2(t-\tau)} - 1 \right) - z \right] \frac{d\tau}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}}, \quad (4)$$

а для поверхностной температуры, где (4) несправедливо, имеет место

$$T_0(t) = T_x(t) + \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^t T'_x(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} =$$

$$= T_{\text{я}}(t) + \frac{1}{2\gamma a} \int_{-\infty}^t [T_{\text{я}}(t) - T_{\text{я}}(\tau)] \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}. \quad (5)$$

Тепловой поток через границу раздела сред определяется производной по времени от яркостной температуры [4–6]:

$$J(t) = -\frac{k}{a^2\gamma} \left( T'_{\text{я}}(t) + \gamma a \int_{-\infty}^t T'_{\text{я}}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right), \quad (6)$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности.

Для двухслойной по температуропроводности среды, такой как вязкий подслой в воздухе или термическая плёнка в водной среде, с учётом постоянства температуры на границе с турбулентной областью, профиль температуры определяется динамикой температуры поверхности из

$$T(z, t) - T(-l) = \frac{2}{l^2} \int_{-\infty}^t T_0(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \pi n a^2 \sin\left(\frac{\pi n(z+l)}{l}\right) \times \\ \times \exp\left[\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)\right] d\tau, \quad (7)$$

а из (7), как показано в [4, 6], следует выражение для яркостной температуры

$$T_{\text{я}}(t) - T(-l) = \int_{-\infty}^t T_0(\tau) \frac{2a^2\gamma}{l^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\pi n)^2 \frac{e^{-\gamma l} - (-1)^n}{(\pi n/l)^2 + \gamma^2} \times \\ \times \exp\left[\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)\right] d\tau. \quad (8)$$

Это уравнение, в отличие от случая однородной среды, не удаётся решить аналитически, но вполне возможно решать его численно как уравнение Вольтерра первого рода с переменным верхним пределом относительно  $T_0(t)$  и, подставляя эту величину в (7), определить профиль температуры  $T(z, t)$  и поток тепла  $J(t) = -k \frac{\partial T}{\partial z}(0, t)$  по наблюдаемой динамике  $T_{\text{я}}(t)$ .

Поток тепла  $J(t)$  в рамках рассматриваемой модели можно представить в виде суммы потока за счёт испарения и потока, связанного с молекулярной температуропроводностью в вязком подслое:

$$J(t) = J_q(t) + J_T(t) = -\tau \rho D_q \frac{dq}{dz}(0) - k \frac{dT}{dz}(0) = \\ = -\tau \rho D_q \frac{q_a - q(0)}{d} - \rho c_p a^2 \frac{T_a - T(0)}{d}, \quad (9)$$

где  $q$  — концентрация (удельная влажность) водяного пара, который является в данном случае малой примесью,  $r$  — удельная теплота парообразования,  $\rho$  — плотность воздуха,  $D_q$  — коэффициент диффузии водяного пара,  $c_p$  — удельная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении,  $d$  — толщина вязкого подслоя,  $q_a, T_a$  — значения концентрации и температуры в турбулентном слое воздуха выше вязкого подслоя. Величины  $D_q$  и  $a^2$  близки между собой и составляют соответственно 0,19 и 0,2 см<sup>2</sup>/с. Плотность воздуха  $\rho = \frac{1}{R_a} \frac{P}{T}$ , где  $P$  — давление,  $R_a$  — газовая постоянная воздуха.

Оценки показывают, что установление линейных профилей температуры и концентрации водяного пара в вязком подслое происходит за время около 0,2 с, что позволяет считать градиенты температуры и концентрации в этом слое постоянными. Согласно теории испарения [9] концентрация водяного пара у поверхности воды  $q(0)$  при наличии оттока отличается от насыщенной концентрации  $q_s$ , но может быть выражена через насыщенную концентрацию:

$$q(0) = q_s \left( 1 - \frac{J_q}{J_0} \right), \quad (10)$$

где  $J_0$  — максимальный при данной температуре поток тепла из-за испарения, который реализуется при испарении в вакуум:

$$J_0 = \frac{r \rho_w}{\eta} \sqrt{\frac{KT(0)}{2\pi m}} e^{-\frac{mr}{KT(0)}}, \quad (11)$$

где  $\eta$  — постоянная, близкая к единице,  $K$  — постоянная Больцмана,  $m$  — масса молекулы воды,  $\rho_w$  — плотность воды. Можно видеть, что все параметры в уравнении (9) зависят только от температуры поверхности воды, и, следовательно, по величине потока тепла  $J$  и температуре поверхности  $T(0)$  (т.е. по параметрам, определяемым из данных радиометрических измерений) можно в каждый момент времени определить толщину вязкого подслоя  $d$ . Это позволяет определить и компоненты потоков тепла за счёт испарения и теплопередачи.

Подставляя (10) в (9), имеем

$$J = b_1 \frac{q_s - q_a}{d + (b_1 q_s / J_0)} - b_2 \frac{T_a - T(0)}{d}, \quad (12)$$

где  $b_1 = r \rho D_q$ ,  $b_2 = \rho c_p a^2$  зависят от  $T(0)$ .

Из (12) получаем квадратное уравнение относительно толщины вязкого подслоя:

$$d^2 J + d \left[ J \frac{b_1 q_s}{J_0} - b_1 (q_s - q_a) + b_2 [T_a - T(0)] \right] + b_1 b_2 \frac{q_s}{J_0} [T_a - T(0)] = 0, \quad (13)$$

и, обозначая его коэффициенты при степенях неизвестной и свободный член как  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  соответственно, получаем искомое решение:

$$d_{1,2} = -\frac{c_2}{2c_1} \pm \frac{1}{2c_1} \sqrt{c_2^2 - 4c_1c_3}. \quad (14)$$

### 3. ИССЛЕДОВАНИЯ НЕТУРБУЛИЗОВАННОЙ ВОДНОЙ СРЕДЫ

На рис. 1 представлен пример динамики яркостной температуры и восстановленных параметров среды в рассматриваемом процессе. В момент  $t = 0$  включается вентилятор и начинается быстрое охлаждение поверхностного слоя воды. В рассматриваемом случае воздух был на 3 градуса теплее воды. Возникающие при этом потоки тепла за счёт испарения и за счёт теплопроводности имеют разные знаки, но влияние испарения существенно преобладает. До момента  $t = 100$  с динамика профиля температуры, восстановленного из (4), почти точно совпадает с результатами прямых измерений контактным датчиком, установленным на глубине 0,5 см. Далее контактный датчик отмечает развитие конвекции в неустойчиво стратифицированном поверхностном слое воды. Число Релея, определяющее условие начала развития конвекции, выражается через параметры среды [10]:

$$R = \frac{g \beta \Delta T (\Delta z)^3}{\nu a^2}, \quad (15)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta = \frac{1}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dT}$  ( $\rho_w$  — плотность воды),  $\Delta z$  — толщина слоя, на котором имеется перепад температуры  $\Delta T$ ,  $\nu$  — кинематическая вязкость.

При использовании параметров восстановленного из (4) профиля температуры в момент начала развития конвекции число Релея достигает критического значения  $R = 1708$  при наблюдаемом значении толщины слоя, в котором происходит перепад температуры  $\Delta z = 0,6$  см, что и объясняет развитие конвективного процесса. Ясно, что результаты восстановления после начала развития конвекции не соответствуют реальности, поскольку конвективный механизм переноса тепла не учитывается в уравнении теплопроводности, на основе которого получены соотношения (3)–(8). В момент  $t = 220$  с вентилятор был выключен и наблюдался процесс релаксации к исходному состоянию.

На рис. 2 представлен пример анализа двух последовательных циклов включения и выключения вентилятора. В первом цикле выключение производилось на 100-й секунде в самом начале развития конвекции, а во втором — на 60-й. На рис. 3 можно видеть восстановленную и измеренную датчиком на глубине 0,2 см динамику температуры. Отклонение в

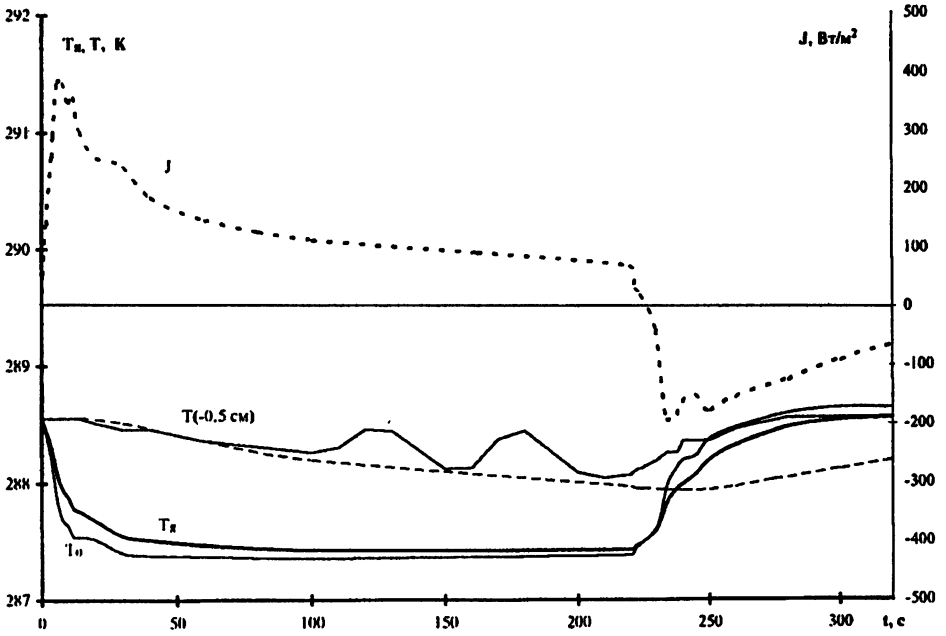


Рис. 1. Динамика теплового излучения и её анализ. Развитие конвекции.

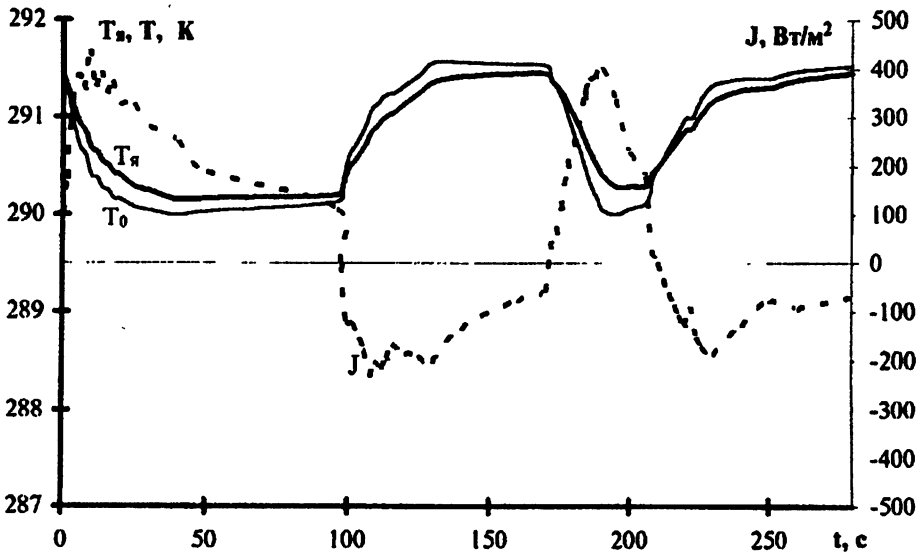


Рис. 2. Динамика излучения, температуры и теплового потока в двух циклах.

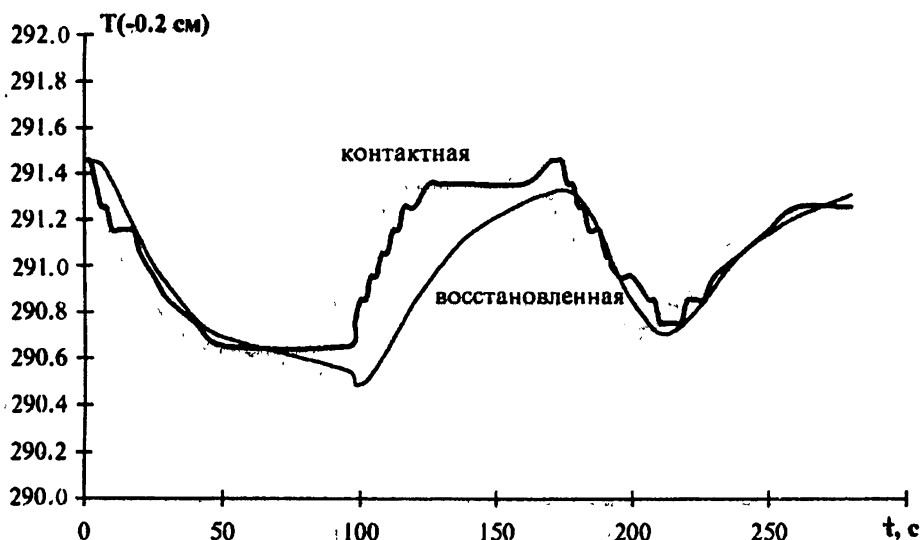


Рис. 3. Динамика восстановленной и измеренной контактным датчиком температуры.

восстановленном профиле в первом цикле заметно на стадии релаксации и связано с началом развития конвекции. Во втором цикле конвекция не успевает развиться и восстановление безупречно. Среднеквадратичное отклонение восстановленной температуры от измеренной контактным методом составляет  $0,07$  К, что даже лучше, чем точность контактного датчика (дискретность его отсчётов —  $0,1$  К). Зная граничное условие по температуре, можно восстановить и динамику профиля температуры в воздухе, который представляет собой двухслойную по температуропроводности среду из (7) (с учётом изменения направления оси  $z$  в данном случае). На рис. 4 представлено восстановленное температурное возмущение в двух циклах обдува и по обе стороны от границы раздела. Ясно видно, как охлаждение поверхности распространяется на более глубокие слои воды с запаздыванием по времени так же, как и в процессе релаксации, не сразу начинается их прогрев, в то время как в воздухе профиль температуры всё время близок к линейному. Это обстоятельство казалось бы позволяет ввести коэффициент теплообмена между водой и воздухом, который широко используется в прикладных задачах метеорологии и физики атмосферы, однако это возможно только для фиксированной толщины вязкого подслоя. Толщина же этого слоя, как известно [9], обратно пропорциональна числу Рейнольдса и, следовательно, может существенно меняться в зависимости от уровня турбулентности.

Рассмотрим теперь более подробно составляющие потока тепла и параметры вязкого подслоя в рассматриваемом процессе. Был выполнен сравнительный анализ двух случаев. В случае 1 исходная температура



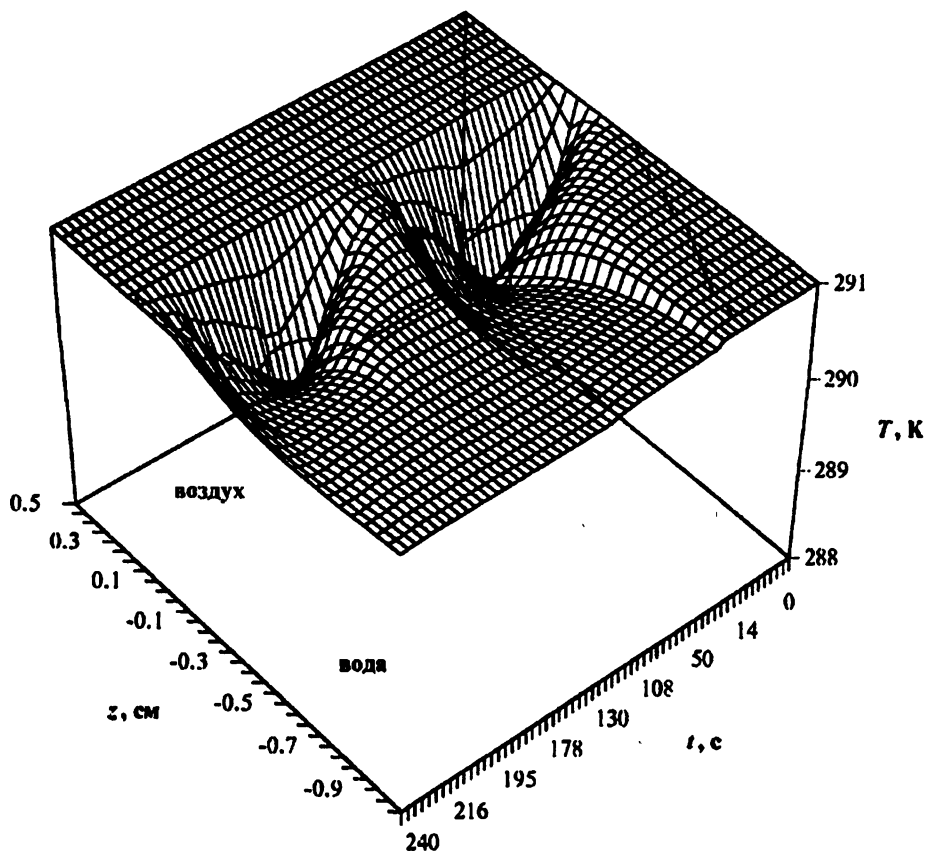


Рис. 4. Восстановленная динамика профиля температуры в двух циклах по обе стороны границы раздела вода – воздух.

воды и воздуха была одинакова, а в случае 2 вода была примерно на 3 градуса холоднее воздуха. На рис. 5, 6 можно видеть определённую из (14) толщину вязкого подслоя для каждого момента времени и динамику двух составляющих теплового потока. Несмотря на большое различие потоков, толщина вязкого подслоя в двух случаях почти совпадает, что указывает на разумность используемой модели теплообмена. В (14) было выбрано решение со знаком плюс перед радикалом, поскольку второе решение даёт значения толщины подслоя, на несколько порядков меньшие по величине и на порядок различающиеся для двух рассматриваемых случаев.

Вообще говоря, оба решения (14) имеют физический смысл. Понять этот смысл можно на основе исходного соотношения (12) для потока тепла, который представляет собой сумму потоков за счёт испарения (первое слагаемое) и теплопроводности (второе слагаемое). Пусть наше первое решение (со знаком плюс) даёт при подстановке наблюдаемое значе-

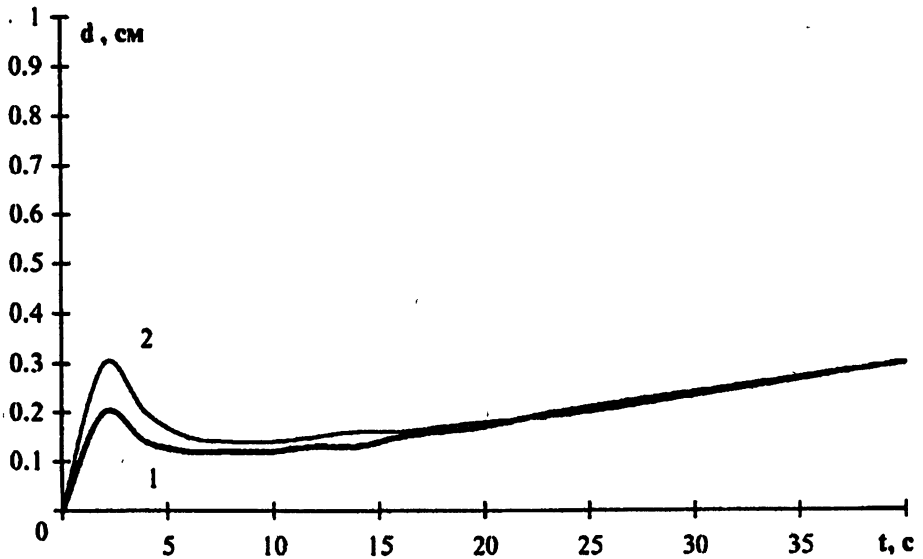


Рис. 5. Толщина вязкого подслоя, определённая по динамике теплового потока.

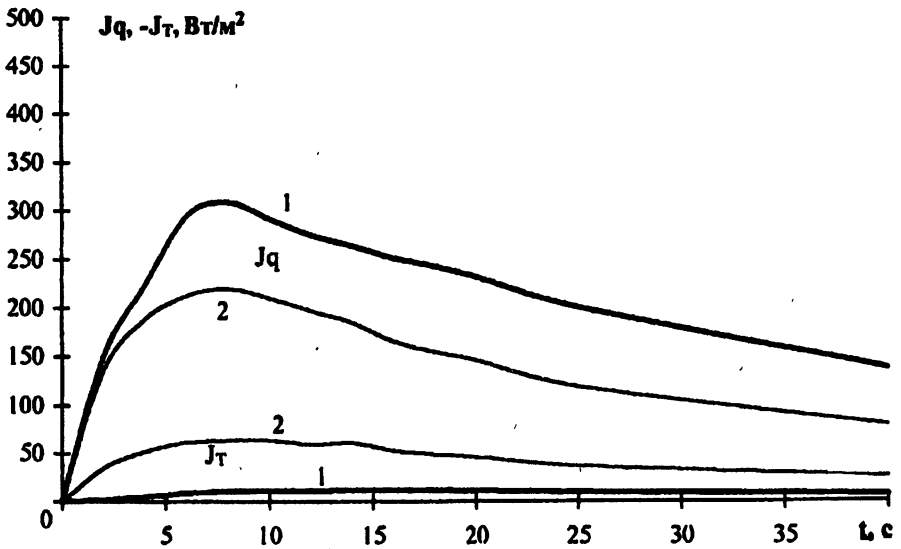


Рис. 6. Восстановленная динамика компонент теплового потока (1 — в исходном состоянии температуры воды и воздуха одинаковы, 2 — вода на 3 К холоднее).

ние суммарного потока тепла. Как будет меняться поток при уменьшении величины  $d$ ? Можно видеть, что поток сначала будет увеличиваться, поскольку исходное первое слагаемое больше по абсолютной величине, чем второе, которое вычитается, а вторым слагаемым в знаменателе выражения для потока, связанного с испарением, ещё можно пренебречь по сравнению с  $d$ . Однако при уменьшении величины  $d$  наступает момент, когда это второе слагаемое в знаменателе становится сравнимо и превышает величину  $d$ . Тогда поток тепла за счёт испарения перестаёт расти (приближается к предельной величине испарения в вакуум), но направленный в противоположную сторону поток тепла, связанный с теплопроводностью, будет неизменно возрастать. Это приведёт к тому, что суммарный поток, достигнув максимума, будет уменьшаться и снова при некотором (меньшем) значении  $d$  достигнет исходного уровня. Это значение  $d$  и является вторым решением (14), которое, как ясно из изложенного, физически осуществимо при более высоком уровне турбулентности, но только в случае, когда воздух теплее воды и компоненты потока имеют разные знаки. Таким образом, при охлаждении воды более тёплым воздухом существует определённый уровень турбулентности, при котором скорость охлаждения максимальна. Если этот уровень будет превышен, скорость охлаждения замедлится и при дальнейшем увеличении турбулентности знак потока может измениться и вода будет нагреваться.

Наблюдаемая в эксперименте динамика потоков тепла допускает простую физическую интерпретацию. После достижения максимума испарение начинает уменьшаться из-за уменьшения значения насыщенной концентрации водяного пара у поверхности, связанного с уменьшением температуры поверхности. Однако пока ещё неясно, как объяснить наблюдаемый эффект роста толщины вязкого подслоя со временем. Возможно, этот эффект связан с наличием небольшой горизонтальной составляющей теплового потока в вязком подслое воздуха, что не учитывается при анализе.

Поток за счёт теплопроводности в 1-м случае возрастает от нуля по мере охлаждения поверхности. Во 2-м случае этот поток составляет по абсолютной величине около четверти потока за счёт испарения и замедляет охлаждение воды. Поток тепла за счёт испарения легко пересчитать в скорость испарения с единицы поверхности:

$$I_q(t) = \frac{1}{r} J_q(t), \quad (16)$$

а динамику испарения можно представить как интеграл от этой величины:

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t I_q(t) dt. \quad (17)$$

На рис. 7 представлена динамика испарения  $Q(t)$  для двух рассмотренных выше случаев. Можно видеть, что испарение возрастает с ростом температуры воды.

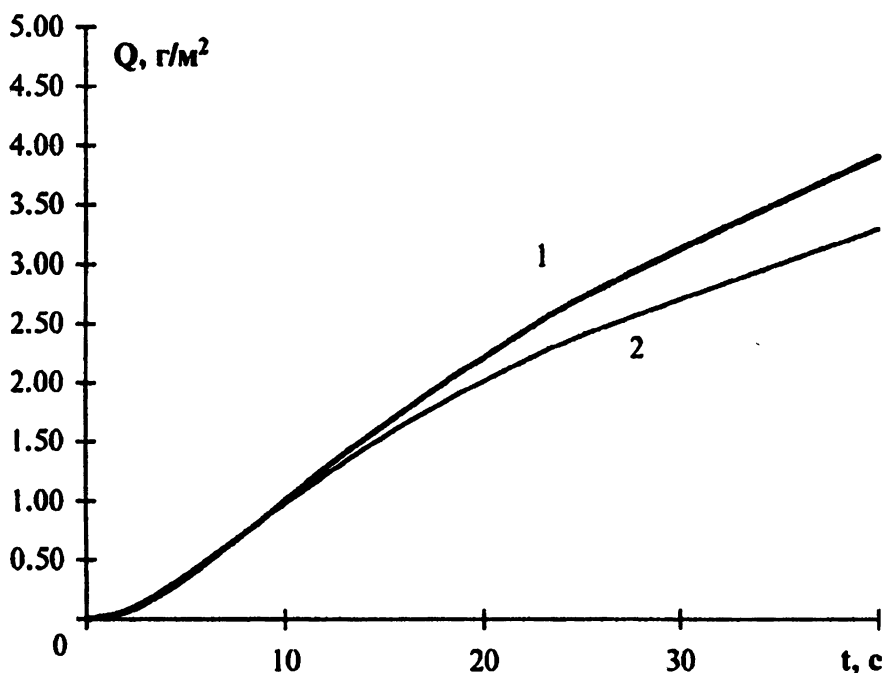


Рис. 7. Восстановленная динамика испарения (1 — исходные температуры воды и воздуха одинаковы, 2 — вода на 3 К холоднее).

#### 4. СЛУЧАЙ ТУРБУЛИЗОВАННОЙ ВОДНОЙ СРЕДЫ

Существенный практический интерес представляет случай, когда водная среда турбулизована, поскольку в океане такая ситуация имеет место практически всегда. Хорошо известно [11], что из-за влияния поверхностных сил в тонком поверхностном слое толщиной несколько миллиметров турбулентность отсутствует и перенос тепла осуществляется через механизм молекулярной теплопроводности, коэффициент которой на несколько порядков меньше, чем в турбулентном механизме. Условие непрерывности для потока тепла приводит к пропорциональному росту градиента температуры в ламинарном слое и возникновению основного перепада температуры порядка градуса именно в этом слое, называемом термической плёнкой. Ниже плёнки температуру можно считать постоянной. Ясно, что возможность дистанционного измерения распределения температуры в термической плёнке означает осуществимость исследования процесса теплообмена между океаном и атмосферой, что имеет

первостепенное значение для многих приложений метеорологии и физики атмосферы и океана.

На рис. 8 представлена динамика яркостных температур в цикле обдува для двух случаев: без турбулентности и при турбуликации водной среды путём быстрого перемешивания воды около дна кюветы. В момент  $t = 0$  вентилятор включался, а в момент  $t = 80$  с — выключался.

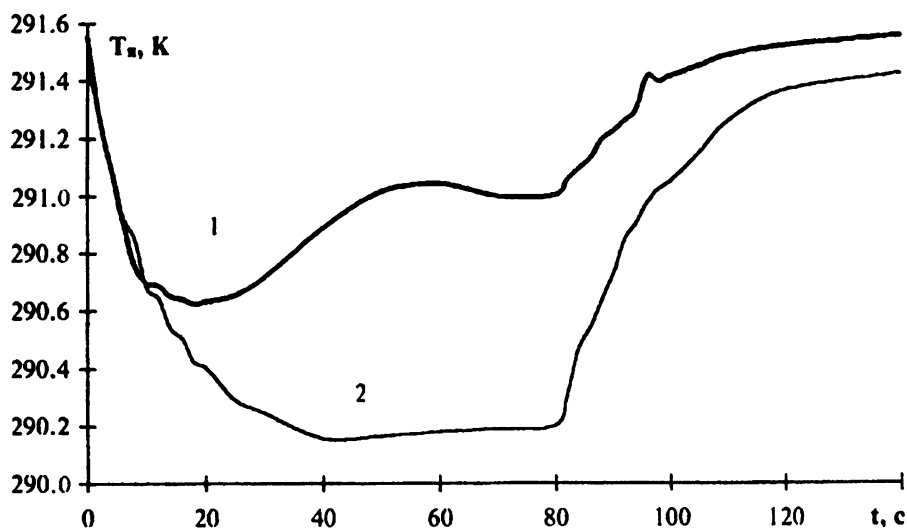


Рис. 8. Динамика яркостных температур для случаев турбулизованной (1) и нетурбулизованной (2) водных сред.

Можно видеть, что до момента  $t = 10$  с динамика яркостной температуры для этих двух случаев практически одинакова. Это легко объяснить: пока процесс охлаждения не дошёл до границы термической плёнки, температурное распределение эволюционирует практически одинаково. В последующие моменты времени охлаждение нетурбулизованной среды продолжается вглубь, а в турбулизованной температура на нижней границе термической плёнки поддерживается постоянной быстрым турбулентным теплообменом с более глубокими слоями, что приводит к установлению режима с квазистационарным потоком тепла и профилем, близким к линейному. Анализ теплообмена нетурбулизованной водной среды, как и выше, проводился на основе соотношений (4)–(6), а турбулизованной — на основе выражений (7)–(8), где свободным параметром являлась толщина термической плёнки  $d_T$ . В принципе, толщину плёнки можно приблизительно оценить по времени начала расхождения в наблюдаемой динамике яркостных температур — температурное возмущение от поверхности до глубины  $z$  доходит за характерное время [5]  $t^* = 3,5z^2/a^2 = 10$  с. Отсюда имеем  $z = d_T = 0,20$  см. Однако возможен и другой подход, основанный на том, что в обоих случаях толщина вязкого подслоя  $d$  в воз-

духе, которую можно определить на основе анализа потоков тепла, должна быть одинакова. Наиболее близкое соответствие получается при значении  $d_T = 0,18$  см, что согласуется с оценкой, полученной первым способом. Такой способ определения толщины термической плёнки, основанный на сравнении с нетурбулизованной средой, оказывается очень чувствительным — его точность, как следует из численного анализа, составляет примерно 0,02 см.

На рис. 9 можно видеть динамику потока тепла, рассчитанную для нетурбулентной среды и двумя способами для турбулентной в предположении, что турбулентность отсутствует (т.е.  $d_T = 0$ ), и по формулам для двухслойной по температуропроводности среды с определённым выше значением толщины термической плёнки. Видно, что потоки тепла для турбулизованной и нетурбулизованной сред близки до момента выключения вентилятора. Процесс релаксации для турбулизованной среды идёт значительно быстрее, поскольку тонкий слой термической плёнки прогревается очень быстро.

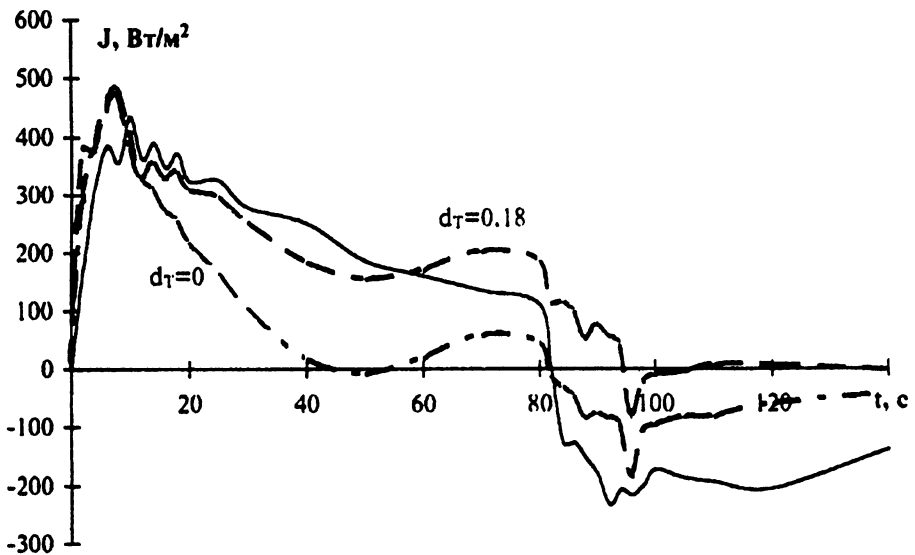


Рис. 9. Динамика теплового потока, восстановленная для нетурбулизованной (сплошная) и турбулизованной (пунктир) воды, а также для турбулизованной из уравнения для однородной среды (штрих-пунктир).

На рис. 10 представлена динамика восстановленного профиля температуры в термической плёнке. Видно, что в этом тонком слое воды вариации температуры на поверхности быстро распространяются на всю толщу и почти всюду профиль температуры близок к линейному. На основе полученных результатов можно судить о характерных временах установления и релаксации термической плёнки, которые можно считать правильными и для реальных условий.

В термической плёнке, в отличие от нетурбулизованной среды, не развивается конвективная неустойчивость. Поскольку профиль температуры практически линейный, легко вычислить из (15) динамику числа Релея. Максимальное его значение составляет около 80 и очень далеко от критического значения.

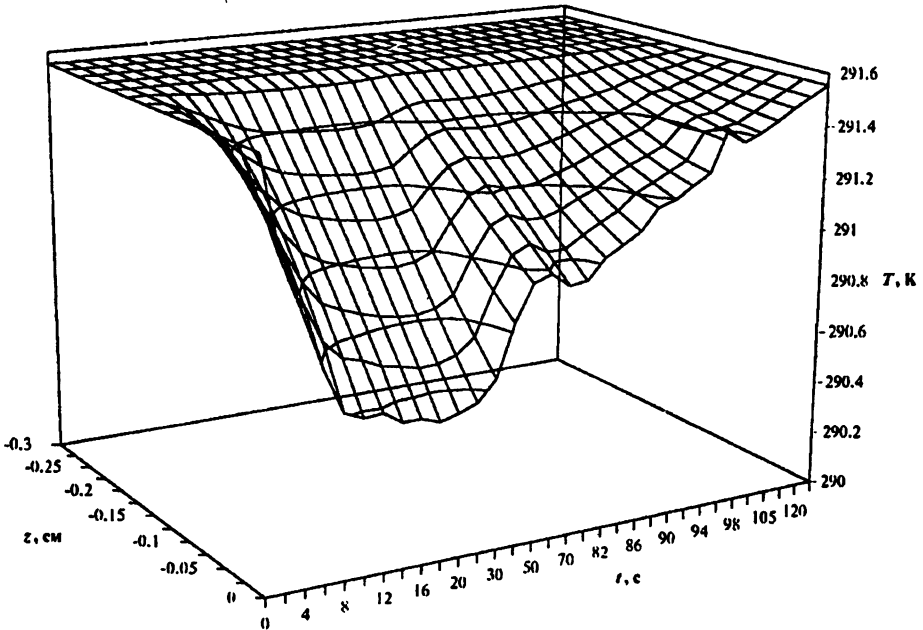


Рис. 10. Динамика профиля температуры в термической плёнке турбулизованной водной среды.

## 5. ВЛИЯНИЕ НА ТЕПЛО- И МАССООБМЕН НЕФТЯНОЙ ПЛЁНКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ

Были проведены исследования влияния плёнки нефтепродуктов на поверхности воды на процесс теплообмена. Как и в описанных выше экспериментах, в момент  $t = 0$  включался вентилятор и регистрировалась динамика яркостной температуры (при этом турбулентность воздуха не приводила к движению плёнки на поверхности). Плёнка нефтепродуктов является совершенно прозрачной для радиоизлучения, поэтому описанные выше методы определения температуры в водной среде и потока тепла через поверхность могут применяться точно так же.

При толщине плёнки несколько миллиметров обдув поверхности не изменял существенно температуру поверхности и не наблюдалось заметной динамики яркостной температуры на временных интервалах в несколько

минут, что является следствием отсутствия испарения и затруднения теплообмена. Однако при плёнках толщиной несколько микрон испарение хотя и уменьшалось, но не прекращалось совсем, причём на глаз не было заметно разрывов в плёнке. На рис. 11а сравниваются результаты измерений динамики яркостных температур для чистой воды и при наличии плёнки со средней толщиной 3 и 5 мкм, а на рис. 11б — соответствующие результаты рассчитанной по этим данным динамики потока тепла. Можно видеть, как наличие плёнки уменьшает скорость теплообмена (примерно в 2 и 3 раза соответственно).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты лабораторных исследований позволили разработать методы дистанционного контроля сред, основанные на результатах совместного решения уравнений переноса теплового излучения и теплопроводности, и получить интересные данные о динамике тепло- и массообмена в поверхностном слое воды и воздуха. Так, удалось разработать алгоритмы восстановления динамики профилей температуры в поверхностном слое воды, в том числе, в термической плёнке турбулизованной водной среды, и вязком подслое воздуха. Также разработаны методы восстановления динамики компонент теплового потока через границу раздела, связанных с теплопроводностью и испарением, динамики испарения воды, исследовано влияние на эти процессы наличия плёнки нефтепродуктов на поверхности. Предложены методы определения толщины вязкого подслоя в воздухе и термической плёнки в воде. Получены оценки ряда параметров сред при динамике, связанной с установлением турбулентного режима в воздухе над поверхностью воды.

Разработанные методы могут быть использованы и для аналогичных измерений в натуральных условиях, поскольку в центре линии атмосферного кислорода на длине волны 0,5 см в атмосфере условия измерений близки к лабораторным (температура фона близка к измеряемой и почти изотропна). Создавая путём перемешивания воды в пятне диаграммы и его окрестности однородное распределение температуры, можно проводить исследования в открытой воде, в первую очередь, быстрые вариации, связанные с вариациями скорости ветра. Однако интересны также измерения, связанные с динамикой солнечного освещения, влиянием выхолаживания за счёт теплового ИК излучения, суточными вариациями температуры и т.д., причём не только в водной среде, но и в грунте.

Исследования выполнялись при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант № 96 – 02 – 16514 – а, а также гранта Минобразования России № 95 – 0 – 8.1 – 71.



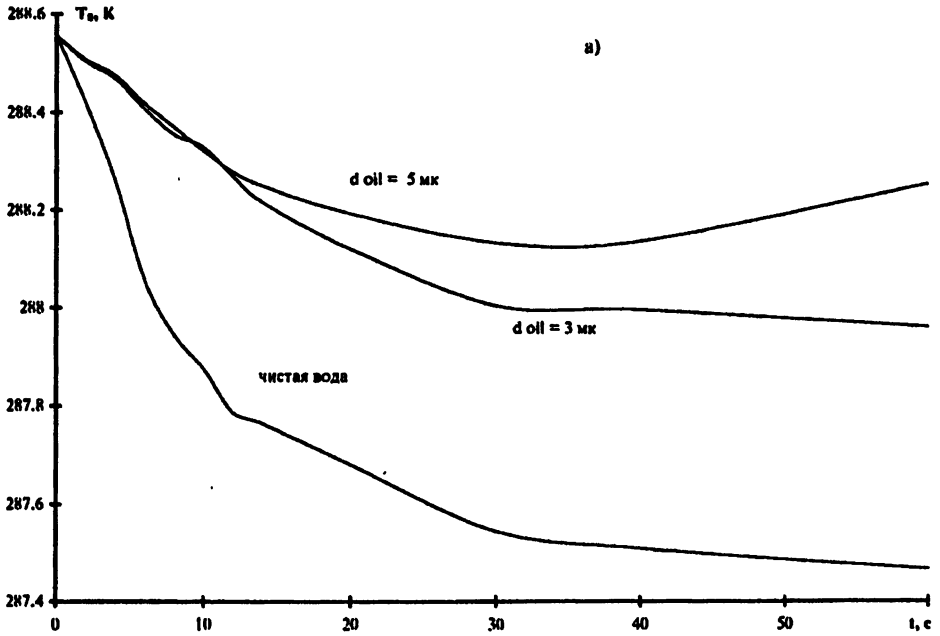


Рис. 11а. Динамика яркостных температур для случаев чистой воды и воды, покрытой плёнкой нефтепродуктов.

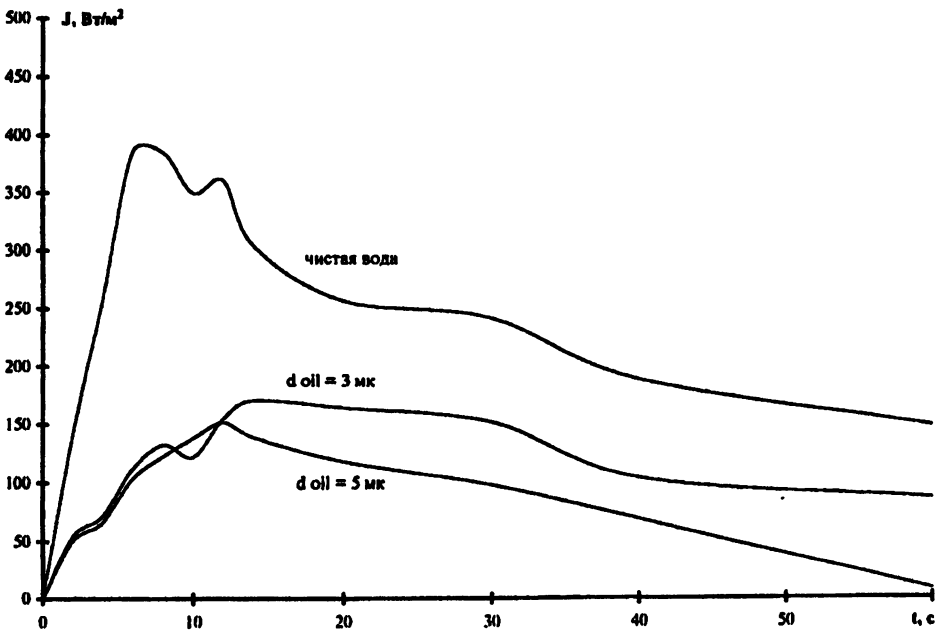


Рис. 11б. Динамика потоков тепла, восстановленная по данным рис. 11а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гайкович К. П., Резник А. Н. //Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 33. № 11. С. 1343.
2. Гайкович К. П. //Исследование Земли из Космоса, 1990. № 6. С. 71.
3. Gaikovich K. P., Reznik A. N., Troitskii R. V. // 11-th Annual Int. Symp. on Geosci. and Remote Sensing (IGARSS-91), Helsinki. — University of Technologi, Espoo, Finland, 1991. V. 3. P. 1195.
4. Гайкович К. П. //Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. № 1. С. 16.
5. Гайкович К. П. //Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. № 10. С. 912.
6. Gaikovich K. P. //IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, 1994. V. 32. № 4. P. 885.
7. Гайкович К. П., Резник А. Н., Сумин М. И., Троицкий Р. В. // Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1987. Т. 23. № 7. С. 761.
8. Гайкович К. П., Резник А. Н., Троицкий Р. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. № 3-4. С. 216.
9. Хргиан А. Х. Физика атмосферы. — М.: ГИФМЛ, 1958. 476 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц В. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988. 736 с.
11. Фёдоров К. Н., Гинзбург А. И. Приповерхностный слой океана. — Л.: Гидрометеиздат, 1988. 304 с.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт,  
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
18 декабря 1995 г.

**DYNAMICS OF THE TEMPERATURE PROFILE, HEAT AND  
MASS TRANSFER THROUGH AIR-WATER INTERFACE BY  
MEASUREMENTS OF THERMAL RADIO EMISSION AT THE  
FREQUENCY OF 60 GHz**

*K. P. Gaikovich, R. V. Troitsky*

On the basis of laboratory measurements of radio brightness evolution of water at 60 GHz the dynamics of the temperature profile (both in the water and in the air) and the heat flux through water-air interface have been determined as well as the viscosity sublayer depth in the process of air turbulization. Two components of the heat flux related with evaporation and thermal conductivity have been distinguished, which made possible to determine also the evaporation rate. The influence of turbulence in water, which leads to thermal film formation has been investigated. It appears possible to retrieve the depth of thermal films and temperature profiles inside them. In the unstable stratified water without turbulence the convection at the critical value of the Rayleigh number has been observed. It was found that critical value of the Rayleigh number could't be achieved in the turbulent water. The influence of oil spills on the heat exchange has been investigated as well.

УДК 621.382:532.59

## ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ СВОБОДНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

*Р. А. Браже*

Показано, что в полупроводниках с градиентом концентрации свободных носителей заряда могут распространяться внутренние волны, аналогичные внутренним гравитационным волнам в океане. В отличие от последних, наблюдаемых на инфразвуковых частотах, рассматриваемые волны возбуждаются в СВЧ диапазоне, что открывает интересные возможности для создания новых типов электронных приборов. В нелинейном режиме такие волны принимают вид солитонов, описываемых уравнением Кортевега-де-Вриза.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Допустим, что полупроводниковый образец находится в постоянном однородном электрическом поле, в результате чего в нем создан градиент концентрации носителей заряда (рис. 1). Если с помощью внешнего источника вызвать локальное возмущение равновесной концентрации носителей, то, вследствие нарушения баланса дрейфового и диффузионного токов, это возмущение может распространяться в полупроводнике аналогично внутренним гравитационным волнам в стратифицированной среде [1]. Так, например, если носителями заряда являются электроны, перемещение их некоторого числа в область меньшей концентрации приводит к появлению эффективного отрицательного заряда, который под действием приложенного электрического поля возвращается к равновесному положению, "проскакивая" его по инерции. Это, в свою очередь, приводит к появлению эффективного положительного заряда, его выталкиванию в обратную сторону и т.д.

Введём предположения, обеспечивающие возбуждение таких волн и облегчающие их анализ:

1. Полупроводник монополярный, для определённости  $n$ -типа.
2. Электроны проводимости возбуждаются термически и ведут себя как свободные носители заряда с постоянной изотропной эффективной массой  $m^*$ , образуя идеальный одноатомный электронный газ.
3. Электронный газ невырожден и подчиняется статистике Максвелла-Больцмана.

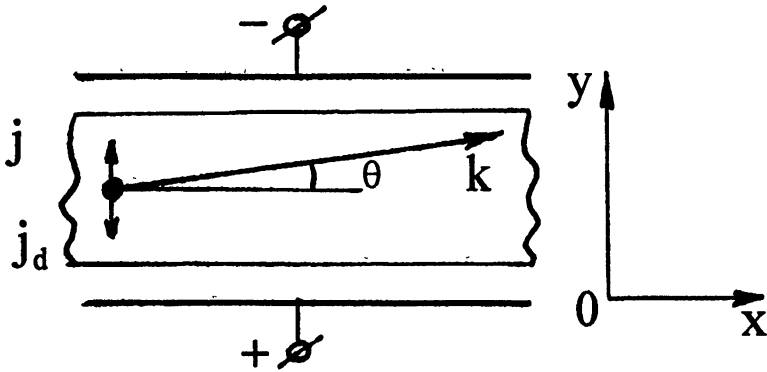


Рис. 1.

4. За период колебаний возмущение не успевает релаксировать, но диффундирует на расстояние, превышающее длину волны возмущения, так что частота возмущений  $\omega$  удовлетворяет условию

$$\omega_c \ll \omega \ll \omega_d, \quad (1.1)$$

$$\omega_c = \frac{en_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}, \quad \omega_d = \frac{c_0^2}{D}, \quad D = \frac{\mu kT}{e}, \quad (1.2)$$

где  $\omega_c$  — частота максвелловской релаксации, обусловленной проводимостью среды,  $\omega_d$  — диффузионная частота электронов,  $c_0$  — скорость распространения волны возмущения,  $D$  — коэффициент диффузии. Смысл остальных обозначений ясен из контекста.

5. Так как время жизни носителей заряда  $\tau$  обычно значительно превышает время максвелловской релаксации  $\tau_c$ , то из (1.1) автоматически следует, что режим бесстолкновительный:  $\omega \gg 1/\tau$ .

6. Электроны располагаются вблизи дна зоны проводимости и имеют близкие значения энергии и скоростей. Распределение электронов по скоростям не учитывается, что позволяет воспользоваться гидродинамическим приближением.

## 2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Исходная система уравнений, описывающих поведение электронного газа в рамках принятой выше модели, включает уравнения движения

$$n \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = n \frac{e \vec{E}}{m^*} - \frac{\nabla p}{m^*}, \quad (2.1)$$

непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\vec{v}) = 0 \quad (2.2)$$

и состояния среды

$$p = p_0 \left( \frac{n}{n_0} \right)^\alpha. \quad (2.3)$$

Здесь  $n$  — концентрация носителей заряда (электронов),  $\vec{v}$  — их скорость,  $p$  — кинетическое давление электронного газа,  $\vec{E}$  — напряжённость приложенного электрического поля,  $\alpha$  — показатель политропы. Линеаризуем (2.1)–(2.3) для малых возмущений основного состояния с  $\langle \vec{v}_0 \rangle = 0$ ,  $n_0$ ,  $p_0$ , положив

$$n = n_0 + n_1, \quad n_1 \ll n_0; \quad p = p_0 + p_1, \quad p_1 \ll p_0,$$

и запишем их в координатах  $xOy$ , опустив индекс “1”:

$$n_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{m^*} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.4a)$$

$$n_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{1}{m^*} \frac{\partial p}{\partial y} + n \frac{eE}{m^*} = 0, \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v_y \frac{\partial n_0}{\partial y} + n_0 \nabla \vec{v} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_y \frac{\partial p_0}{\partial y} = \alpha \frac{p_0}{n_0} \left( \frac{\partial n}{\partial t} - v_y \frac{\partial n_0}{\partial y} \right). \quad (2.6)$$

В гидростатическом равновесии ( $\partial/\partial t = 0$ ,  $n = n_0$ ,  $p = p_0$ ) (2.4b) принимает вид

$$\frac{\partial p_0}{\partial y} = -n_0 e E. \quad (2.7)$$

Дифференцируя (2.4b) по  $t$  и выражая  $\partial n/\partial t$  из (2.6), с учётом (2.7), получаем

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N_e^2 \right) v_y + \frac{1}{n_0 m^*} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{eE/m^*}{c_s^2} \right) p = 0, \quad (2.8)$$

$$N_e^2 = \alpha \frac{eE}{m^*} - \frac{(eE/m^*)^2}{c_s^2} = \frac{(eE/m^*)^2}{c_s^2} (\alpha - 1), \quad (2.9)$$

$$\alpha = -\frac{1}{n_0} \frac{\partial n_0}{\partial y} = \alpha \frac{eE/m^*}{c_s^2} = \frac{eE}{kT}, \quad (2.10)$$

$$c_s = \sqrt{\alpha \frac{p_0}{n_0 m^*}} = \sqrt{\alpha \frac{kT}{m^*}}. \quad (2.11)$$

Величина  $N_e$  является электронным аналогом частоты плавучести Брента-Вяйсяля для внутренних гравитационных волн,  $\alpha$  — параметр стратификации среды, обусловленной градиентом концентрации носителей заряда в электрическом поле,  $c_s$  — скорость электронного звука.

Переходя в уравнениях (2.4а), (2.6), (2.8), с учётом (2.5) и (2.7), к новым переменным

$$V_x = (n_0/n_{0m})^{1/2}v_x, \quad V_y = (n_0/n_{0m})^{1/2}v_y, \quad P = (n_0/n_{0m})^{1/2}p$$

и рассматривая распространение малых возмущений скорости и давления в виде плоских волн

$$V_y = A_V \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)],$$

$$P = A_P \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)],$$

эти уравнения можно переписать в виде

$$\omega V_x - \frac{k_x P}{n_{0m} m^*} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\omega}{n_{0m} c_s^2} P - k_x V_x - (k_y - i\Gamma_e) V_y = 0, \quad (2.13)$$

$$(N_e^2 - \omega^2) V_y + \frac{\omega}{n_{0m} m^*} (k_y + i\Gamma_e) P = 0, \quad (2.14)$$

$$\Gamma_e = -\frac{\alpha}{2} + \frac{eE/m^*}{c_s^2} = \frac{eE/m^*}{2c_s^2} (2 - \varkappa), \quad (2.15)$$

где  $n_{0m}$  — максимальное значение равновесной концентрации носителей заряда в электрическом поле,  $\Gamma_e$  — электронный аналог коэффициента Эккарта [2].

Приравнявая нулю определитель из коэффициентов при соответствующих переменных в уравнениях (2.12)–(2.14), получаем дисперсионное уравнение

$$k_y^2 = \frac{N_e^2 - \omega^2}{\omega^2} k_x^2 + \frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{N_e^2 + c_s^2 \Gamma_e^2}{c_s^2}, \quad (2.16)$$

аналогичное дисперсионному уравнению для внутренних гравитационных волн в атмосфере [2] и внутренних центробежных волн в вихревых потоках жидкости или газа [3].

На рис. 2 представлены определяемые уравнением (2.16) дисперсионные характеристики исследуемых волн. Рассмотрим возникающие здесь моды колебаний.

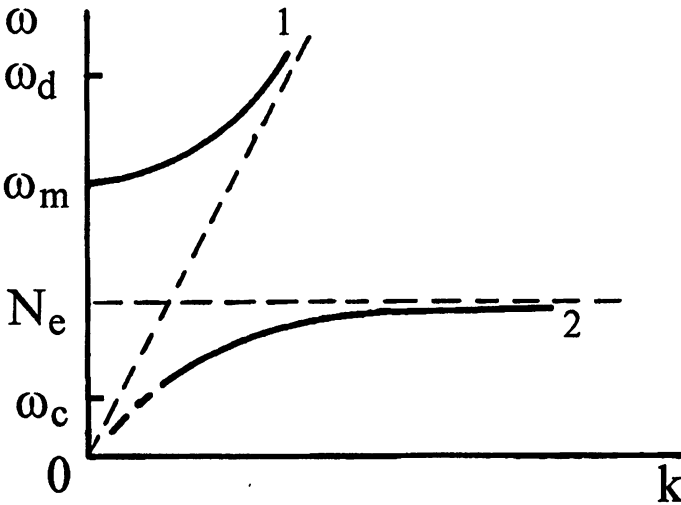


Рис. 2.

1. Электронно-звуковые волны (ветвь 1). В области высоких частот ( $\omega \gg N_e$ ) уравнение (2.16) становится аналогичным дисперсионному уравнению для ленгмюровских волн в изотропной плазме [4]:

$$\omega = \omega_m \sqrt{1 + k^2 c_s^2 / \omega_m^2}, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad (2.17)$$

$$\omega_m = (N_e^2 + c_s^2 \Gamma_e^2)^{1/2} = \frac{\alpha e E / m^*}{2 c_s^2}, \quad (2.18)$$

где минимальная частота  $\omega_m$  таких волн играет роль плазменной частоты электронов, а  $c_s$  — их тепловой скорости. В отличие от ленгмюровских волн пространственная дисперсия электронно-звуковых волн обусловлена не распределением электронов по скоростям, а наличием электрического поля. При  $E = 0$  дисперсия отсутствует и (2.17) принимает вид  $\omega = kc_s$ , характерный для звуковых волн в изотропной бездисперсионной среде.

2. Внутренние волны свободных носителей заряда (ВВСНЗ, ветвь 2). При  $\omega \leq N_e$  (2.16) сводится к уравнению

$$\omega = N_e \cos \theta \left[ 1 + \frac{N_e^2 - \omega^2}{c_s^2 k^2} + \left( \frac{\Gamma_e}{k} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad \cos \theta = k_x / k. \quad (2.19)$$

Рассмотрим теперь два характерных режима распространения ВВСНЗ.

а) Короткие волны ( $k \gg \Gamma_e$ ,  $\omega \rightarrow N_e$ ). Уравнение (2.19) упрощается:

$$\omega = N_e \cos \theta,$$

и становится аналогичным дисперсионному уравнению для коротких гравитационных волн [1]. Подобно последним, короткие ВВЧЗ возможны лишь при  $\omega \leq N_e$  и "выбирают" направление своего распространения в зависимости от соотношения между частотой колебаний и электронной частотой Брента-Вяйсяля.

б) Длинные волны ( $k \ll \Gamma_e$ ,  $\omega \ll N_e$ ). В этом режиме уравнение (2.19) при подстановке в него (2.9), (2.10), (2.15) приводится к виду

$$\omega = N_e \cos \theta \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \frac{\alpha}{k} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.20)$$

Правую часть уравнения (2.20) можно разложить в ряд по степеням малого параметра  $2k/\alpha$  и, ограничившись первыми двумя членами разложения, представить это уравнение в форме

$$\omega = c_0 k - \beta k^3, \quad (2.21)$$

$$c_0 = \frac{2}{\alpha} N_e \cos \theta; \quad \beta = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\alpha} \right)^3 N_e \cos \theta,$$

где  $c_0$  — фазовая скорость линейной ВВЧЗ, а  $\beta$  — параметр дисперсии.

Известно [1, 5], что дисперсионному уравнению (2.21) отвечает эволюционное уравнение Кортевега-де Вриза:

$$\Delta n_t + c_0(1 + \Delta n/n_0)\Delta n_x + \beta \Delta n_{xxx} = 0, \quad (2.22)$$

где  $\Delta n \ll n_0$  — малое возмущение концентрации носителей заряда, зависящее от времени и координаты. Для переменной  $\Delta n$  нелинейный член записывается в наиболее простом виде.

Уравнение (2.22) допускает односолитонное решение вида

$$\Delta n = \Delta n_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x - Vt}{L}, \quad (2.23)$$

$$L = \left( \frac{12\beta n_0}{c_0 \Delta n_0} \right)^{1/2}, \quad V = c_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{\Delta n_0}{n_0} \right),$$

где  $L$  — ширина солитона,  $\Delta n_0$  — его амплитуда,  $V$  — скорость распространения.

Следует отметить, что длинные ВВЧЗ в некотором смысле аналогичны ионно-звуковым волнам в бесстолкновительной плазме (неизотермическому звуку), так как уравнение (2.20) легко привести к виду

$$\omega = \frac{kc_0}{\sqrt{1 + k^2(2/\alpha)^2}}. \quad (2.24)$$



В уравнении (2.24)  $c_0$  играет роль скорости ионного звука, а  $2/\alpha$  — дебаевского радиуса экранирования. Но природа ионно-звуковых волн и ВВСНЗ совершенно различна. Если первые представляют собой процесс распространения колебаний ионов, то во вторых колеблются электроны, а их скорость распространения зависит от направления. Как следует из (2.9), (2.10), (2.21),

$$c_0 = 2c_s(\sqrt{\alpha - 1}/\alpha) \cos \theta. \quad (2.25)$$

В изотермических условиях ( $\alpha = 1$ ) ВВСНЗ невозможны.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Из условия (1.1) вытекает, что возбуждение ВВСНЗ облегчается в случае, когда  $\omega_c$  возможно меньше, а  $\omega_d$  возможно больше. Согласно (1.2), (2.11), (2.25),

$$\omega_d = 4 \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{e}{\mu m^*},$$

откуда следует, что в качестве среды для ВВСНЗ лучше использовать полупроводники с малой подвижностью носителей заряда и малой эффективной массой, а частоту возбуждения выбирать так, чтобы процесс был адиабатическим ( $\alpha = \gamma$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты, равный для электронного газа 5/3). Из этих соображений рассмотрим для оценочных расчётов сульфид кадмия CdS ( $\mu = 0,035 \text{ м}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $m^* = 0,204$ ,  $\epsilon \approx 9$ , положим  $n_0 \sim 10^{22} \text{ м}^{-3}$ ). Тогда  $\omega_d \approx 3,9 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_c \approx 7,0 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ .

Из (2.9), (2.11) получаем

$$N_e = \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \frac{e E}{\sqrt{m^* k T}}.$$

Для CdS при  $\alpha = \gamma = 5/3$ ,  $T = 300 \text{ К}$ ,  $E \sim 10^6 \text{ В/м}$  (величина, близкая к пробойному значению)  $N_e \approx 2,3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ .

Из (2.11), (2.18)

$$\omega_m = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \frac{e E}{\sqrt{m^* k T}}.$$

При указанных выше условиях  $\omega_m \approx 5,6 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ .

Таким образом, ВВСНЗ в CdS можно наблюдать до частот  $f = N_e/(2\pi) \approx 3,6 \cdot 10^{11} \text{ Гц}$ , что соответствует электромагнитному излучению с длиной волны в вакууме  $\lambda \approx 0,8 \text{ мм}$ .

Согласно (2.25) скорость распространения линейных ВВСНЗ в CdS при этом не превышает значения  $c_{0\text{max}} \approx 1,9 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ . В солитонном режиме, при  $\Delta n_0/n_0 \sim 0,1$ , используя (2.23), получаем  $V \approx 2,0 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ ,  $L \approx 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

Приведённые оценки позволяют надеяться, что ВВСНЗ наряду с электромагнитными и акустическими волнами найдут широкое применение в радиоэлектронике.

Работа была поддержана индивидуальным грантом Международного научного фонда Дж.Сороса (1993 г.) и Фондом поддержки российских физиков (1993 г.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
2. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. — М.: Мир, 1978.
3. Браже Р. А. Вихревые и солитонные явления в атмосферном электричестве. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1993.
4. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высшая школа, 1978. — 407 с.
5. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973. — 176 с.

Ульяновский государственный  
технический университет, Россия

Поступила в редакцию  
12 сентября 1995 г.

#### CHARGE CARRIERS INTERNAL WAVES IN SEMICONDUCTORS

*R. A. Brazhe*

It is shown, that the internal waves can propagate in semiconductors with the gradient of charged carriers. These waves are similar to the internal gravity waves in the ocean but differ from the last, and are visible in infrasonic frequencies. This opens interesting possibilities for a new electron device development. In the nonlinear schedule these waves take the form of solitons being described by the Korteweg-de Vries equation.

УДК 621.396:621.391.82

# ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ РАЗДЕЛИТЕЛЬ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ В КАНАЛАХ РАДИОСВЯЗИ.

## 1. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*С. А. Метелёв, Ю. В. Шишкин*

Предложен оптимальный алгоритм разделения сигналов с угловой манипуляцией и помех любого типа, основанный на пространственно-временной обработке сигналов. Методом численного моделирования исследованы основные характеристики такого разделителя (сепаратора) для разных типов антенн с двумя и тремя ветвями разнесения: зависимости эффективности разделения от углового разнеса источников сигнала и помех, от мощности принимаемых сигналов, от параметров сепаратора, от типов помех и сигналов и т.д. Показано, что рассматриваемое адаптивное приёмное устройство способно эффективно бороться с помехами в идеальном канале связи.

### 1.1. ВВЕДЕНИЕ

В условиях высокой насыщенности эфира станционными помехами качество радиоприёма обычных средств связи значительно снижается вплоть до его полного подавления. Борьба с такими помехами традиционными методами частотной селекции не всегда эффективна и требует постоянного контроля помеховой обстановки. Особенно актуальна эта проблема в присутствии преднамеренных помех. Одним из наиболее эффективных способов борьбы с внешними помехами, а в ряде случаев единственно возможным, является метод пространственно-временной обработки сигналов (ПВОС), обеспечивающий компенсацию помех от радиостанций, разнесённых по пространству или по поляризации излучения с источником полезного сигнала [1]. В настоящее время разработан ряд алгоритмов ПВОС, осуществляющих компенсацию помех с использованием одного или нескольких известных признаков-различий полезного сигнала и помехи: мощности, углов. прихода, поляризации, частотных спектров, временной структуры. Отсутствие такой априорной информации не позволяет построить алгоритма пространственной компенсации помехи, поскольку нельзя указать, какой из компонентов входной смеси является помехой.

Для решения этой, казалось бы, нерешаемой проблемы предложен метод пространственной сепарации (разделения) сигналов, обеспечивающий выделение на двух или более выходах приёмного устройства ПВОС

различных составляющих сигнально-помеховой смеси [2]. Применение метода сепарации сигнала и помех предполагает наличие специального устройства обнаружения выхода, на котором выделяется оценка сигнала (либо его функция возлагается на человека-оператора), что определяет как специфику, так и степень эффективности его использования в различных каналах связи.

Выделение оценок сигнала и помех на разных выходах в подобных устройствах осуществляется за счёт реализации пространственно-корреляционных различий этих колебаний. Один из известных методов сепарации сигналов основан на спектральном разложении корреляционной матрицы входных колебаний и выделении проекций вектора принимаемых колебаний на собственные вектора матрицы [2]. Однако, как следует из результатов расчёта, приведённых в [2], использование данного алгоритма в условиях, когда сигнал и помехи имеют уровни одного порядка, оказывается неэффективным. Кроме того, выполнение операций проекции вектора на собственные направления матрицы в реальном масштабе времени весьма затруднительно, т. к. помимо самой проекции необходимо ещё производить оценку элементов матрицы и вычислять её собственные вектора.

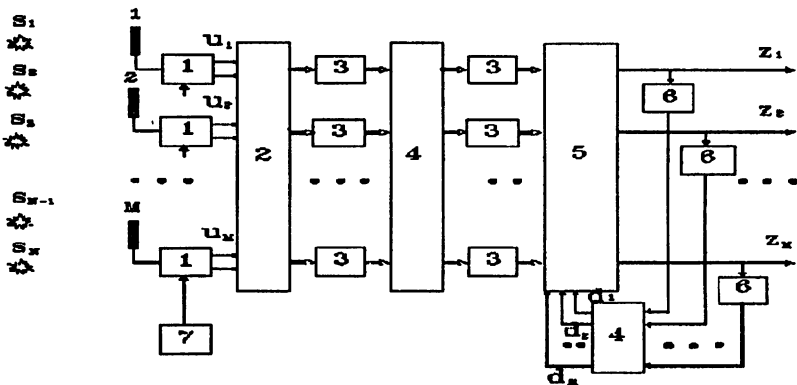
Существует другой подход к построению пространственных сепараторов, основанный на применении в них обратной связи, при которой оценка одного колебания используется для выделения другого и наоборот. Первой схемой указанного класса является компенсатор, описанный в [3]. Предложенное устройство обеспечивает увеличение степени разделения двух принимаемых сигналов с ортогональной поляризацией. Схема этого устройства построена на двух корреляционных компенсаторах. Выход одного компенсатора, подключённого основным входом к одной из ветвей разнесения (ВР), используется в качестве опорного входа другого компенсатора, который, в свою очередь, своим основным входом подключён к другой ВР и наоборот. Данное устройство устойчиво лишь при условии, что произведение модулей весовых коэффициентов, формируемых в корреляционных компенсаторах, меньше единицы, что соответствует случаю, когда в каждой из ВР компенсируется меньшее колебание. Очевидно, что такая схема неработоспособна в замирающих каналах, где текущее отношение амплитуд сигнала и помехи в ВР может быть произвольным.

В данной работе проведено исследование устройства сепарации сигналов и помех с угловой манипуляцией в квазистационарных каналах связи. При этом рассматривались два типа приёмных адаптивных антенных систем (ААС). Одна из них состояла из идентичных антенных элементов, разнесённых в пространстве — традиционный вариант построения ААС для КВ-УКВ радиодиапазонов. Для более низкочастотных каналов связи, вследствие большой длины радиоволны, применение пространственного разнеса приёмных антенн сталкивается с чисто техническими пробле-

мами и, поэтому, для таких каналов связи предлагается использование приёмной антенной системы из совмещённых в пространстве элементов с различными диаграммами направленности (ДН). Таковыми являются магнитные рамки, обладающие ДН типа "восьмёрка" и электрический вибратор с изотропной ДН.

## 1.2. ПРИНЦИП РАБОТЫ ОПТИМАЛЬНОГО СЕПАРАТОРА СИГНАЛОВ С УГЛОВОЙ МАНИПУЛЯЦИЕЙ

Блок-схема  $M$ -канального адаптивного приёмного устройства с сепаратором сигнала и помех приведена на рис. 1. Число выходных каналов сепаратора равно числу входных каналов; предполагается, что число источников сигналов  $N \leq M$ .



1 — линейные схемы усиления-преобразования сигналов (радиоприёмные устройства (РПУ)), 2 — аналого-цифровой преобразователь (АЦП), 3 — процедуры автоматической регулировки усиления (АРУ), 4 — ортогональное преобразование сигналов Грама-Шмитта (ОРТ), 5 —  $M$  процедур Уидроу-Хопфа, 6 — ограничители выходных сигналов (ОГР), 7 — общие гетеродины (ОГ).

Рис. 1.

Выходное напряжение с  $m$ -го антенного элемента после усиления и переноса на необходимую промежуточную частоту преобразуется в цифровую форму в аналого-цифровом преобразователе (АЦП) с выделением синфазных ( $c$ ) и квадратурных ( $s$ ) составляющих  $u_m^c(k)$  и  $u_m^s(k)$  для  $k$ -го отсчёта. Эти компоненты суммируются с весами  $W_{m,n}^r(k)$  и  $W_{m,n}^i(k)$  для формирования  $n$ -го выхода сепаратора сигналов. Вектор комплексных амплитуд выходных сигналов сепаратора  $\mathbf{z}$  для  $k$ -го момента времени может быть записан в следующем виде:  $\mathbf{z}(k) = \mathbf{W}(k)\mathbf{u}(k)$ , где  $W_{m,n} = W_{m,n}^r + iW_{m,n}^i$  — элемент матрицы комплексных весовых коэффициентов,  $u_m = u_m^c + iu_m^s$  — элемент вектора комплексных амплитуд

входных сигналов. Вычисление весов осуществляет адаптивный процессор, на который поступают входные и выходные сигналы в оцифрованном виде. В адаптивном процессоре реализован алгоритм вычисления весов, включающий в себя три основные идеи.

Алгоритм Уидроу–Хопфа обеспечивает формирование вектора оптимальных весовых коэффициентов из вектора принимаемых колебаний по критерию минимума среднего квадрата ошибки при оценке некоторого одномерного эталонного сигнала, коррелированного с принимаемым сигналом и некоррелированного с помехами [1]. При этом для вычисления текущего значения вектора весовых коэффициентов достаточно знания предыдущих значений этого вектора, выборки входных данных и значения эталонного сигнала. Для обеспечения динамических характеристик этого алгоритма требуется осуществить выравнивание мощностей входных процессов и их ортогонализацию. Эта процедура выполняется в предварительном ортогонализаторе антенных колебаний с последующим выравниванием мощностей выходных некоррелированных в ветвях разнесения процессов при помощи систем автоматической регулировки усиления (АРУ). Такая обработка реализует процедуру Грама–Шмитта с нормировкой среднего квадрата некоррелированных остатков. При этом достигается стабилизация инерционности фильтров низкой частоты блока формирования весов для любого амплитудно–фазового распределения сигнала и помех в ветвях разнесения.

Формирование эталонных сигналов для принимаемых сигналов с частотной манипуляцией осуществляется при помощи процедур жёсткого ограничения выходных сигналов, причём эталонным сигналом для первой схемы Уидроу–Хопфа является просто выходной сигнал первого канала  $z_1$ , прошедший через жёсткий ограничитель  $d_1 = z_1/|z_1|$ , в то время как эталонный сигнал для второй схемы Уидроу–Хопфа  $d_2$  формируется в виде выходного сигнала дополнительного корреляционного компенсатора, на основной канал которого поступает жёсткоограниченный сигнал второго выхода, а на опорный канал — первый эталонный сигнал  $d_1$ . Способ формирования эталонного сигнала для  $i$ -го канала аналогичен алгоритму формирования  $d_2$  — из выходного сигнала  $i$ -го канала, пропущенного через жёсткий ограничитель, вычитаются все  $d_j$ ,  $j < i$  при помощи  $i-1$  дополнительных компенсаторов. Такая обработка также реализует процедуру ортогонализации Грама–Шмитта, но уже для эталонных сигналов. В результате эталонные сигналы каналов являются некоррелированными процессами и, следовательно, на выходах устройства сепарации сигналов будут выделяться некоррелированные между собой сигнал и помехи. Для сигналов с фазовой манипуляцией (ФТ, ОФТ, ДОФТ) эталонные сигналы формируются аналогичным вышеописанному способом с добавочным включением в схему обработки комплексного сопряжения сигналов с ограничителей.

Блок-схема разработанного алгоритма, приведённая на рис. 1, включает в себя, таким образом, следующие частные алгоритмы:

- алгоритм предварительного ортогонального преобразования вектора входных колебаний с нормированием полученных выходных процессов,
- алгоритм МСКО оценки эталонного колебания (алгоритм Уидроу-Хопфа),
- алгоритм формирования эталонных сигналов,
- алгоритм работы систем АРУ.

Аналитическое исследование алгоритма в целом сталкивается с серьёзными затруднениями, обусловленными нелинейным способом формирования эталонных сигналов. Поэтому его исследование было осуществлено путём численного моделирования на компьютере типа IBM PC.

### 1.3. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ПРОГРАММЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

Для исследования алгоритма сепарации была создана программа имитационного моделирования процесса обработки, включающая в себя следующие основные блоки:

- формирование входных сигналов,
- алгоритм выделения сигналов из входной смеси,
- вычисление отношения *сигнал/(помеха + шум)* (ОСПШ) для выходных сигналов,
- визуализация осциллограмм и спектров колебаний в различных точках схемы обработки,
- регистрация результатов обработки (ОСПШ) в выходные файлы данных.

#### 1.3.1. Входные сигналы

При разработке программы предполагалось, что на вход адаптивного алгоритма (рис. 1) поступают усиленные антенные сигналы, преобразованные в приёмнике к нулевой частоте в виде синфазной и квадратурной компонент, прошедших через узкополосный фильтр (полоса пропускания фильтра согласована с полосой сигналов).

Таким образом, амплитудный спектр комплексного ЧТ сигнала имел квазисимметричный вид относительно нулевой частоты. Комплексный сигнал от одного источника может быть представлен в следующем виде:

$$s_n(k) = A_n \cdot e^{-i \cdot 2\pi f_n k},$$

где  $f_n = \Delta F_n \cdot b_n(k)$  — поднесущие частоты ЧТ сигнала, изменяющиеся по случайному закону  $b_n(k) = \pm 1$  с частотой манипуляции  $B_n$ ,  $k$  — дискретное время.

Параметрами процессов являлись их мощность  $S_n = A_n \cdot A_n^*$ , девиация частот  $2\Delta F_n$  и информационная скорость  $B_n$ . Типичные величины параметров при моделировании в единицах частоты дискретизации составляли  $B_n = 0,05$ ,  $\Delta F_n = 0,1 \div 0,2$ .

Входные сигналы представлялись в виде суммы этих колебаний с учётом диаграмм направленности антенн:

$$u_m(k) = \sum_{n=1}^N s_n(k) \cdot D_m(\alpha_n) + n_m(k),$$

где  $D_m(\alpha_n)$  — диаграммы направленности антенн,  $\alpha_n$  — азимуты источников,  $n_m(k)$  — некоррелированные шумы каналов приёмника с единичной мощностью, рэлеевским законом распределения амплитуд и равномерным распределением фаз. Вместо входных ЧТ сигналов в программе можно было сформировать ФТ сигналы, монохроматические сигналы или шумоподобные сигналы в полосе приёма, сформированные так же, как и  $n_m(k)$ , но коррелированные в ветвях разнесения.

### 1.3.2. Алгоритм сепарации

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 1. Входные смеси поступали вначале на схемы АРУ, реализующие нормирование сигналов:

$$v_m(k) = u_m(k) / \sqrt{|u_m(k)|},$$

где среднее значение модуля входного процесса находилось путём экспоненциального усреднения:

$$\sqrt{|u_m(k)|} = (1 - \beta)\sqrt{|u_m(k-1)|} + \beta \cdot |u_m(k)|.$$

Величина  $\beta$  определяла инерционность АРУ ( $0 < \beta < 1$ ). После АРУ сигналы ортогонализировались при помощи автокомпенсаторов — минимизаторов выходной мощности (МВМ). Уровни выходных сигналов МВМ вновь стабилизировались схемами АРУ. После нормирования сигналы обрабатывались  $M$  процедурами Уидроу-Хопфа с  $M$  разными эталонными сигналами. Процедура формирования эталонных сигналов описана выше и ясна из рис. 1. Как показали результаты сравнительных испытаний, ортогонализация входных колебаний может быть осуществлена не только при помощи МВМ, но и другим корреляционным ортогонализатором. Смена ортогонализаторов не изменила результатов обработки сигналов (выходные ОСПШ сепаратора) с точностью до второго знака после запятой. Однако в данном алгоритме был выбран МВМ, характеризующийся минимальным числом вычислительных операций.



### 1.3.3. Оценка эффективности алгоритма сепарации (вычисление отношения сигнал/(помеха + шум))

Выходной процесс по любому из каналов может быть представлен в виде

$$z_m(k) = \sum_{n=1}^N L_{m,n} \cdot s_n(k) + \sum_{j=1}^M K_{m,j} \cdot n_j(k),$$

где  $L_{m,n}, K_{m,j}$  — неизвестные величины.

Необходимо оценить отношение мощности одного из сигналов к суммарной мощности других сигналов и мощности шума — именно эта величина определяет качество приёма:

$$(\text{ОСПШ})_{m,n} = \frac{L_{m,n}^2 \cdot S_n}{\sum_{j \neq n}^N L_{m,j}^2 \cdot S_j + \sum_{j=1}^M K_{m,j}^2} = \frac{L_{m,n}^2 \cdot S_n}{Z_m - L_{m,n}^2 \cdot S_n},$$

$(\text{ОСПШ})_{m,n}$  — отношение мощности  $n$ -го сигнала в  $m$ -ом выходе сепаратора к суммарной мощности остальных сигналов и шумов приёмника.

Предполагая некоррелированность составляющих выходной смеси ОСПШ можно вычислить при помощи следующей формулы:

$$(\text{ОСПШ})_{m,n} = 10 \cdot \log \left| \frac{R_{m,n}^2}{S_n \cdot Z_m - R_{m,n}^2} \right|, \text{ [дБ]}$$

$R_{m,n} = \overline{z_m(k) \cdot s_n(k)}$  — ненормированный коэффициент корреляции  $m$ -го выходного сигнала с  $n$ -м сигналом от первого источника,  $Z_m$  — мощность выходного процесса в одном из каналов.

### 1.3.4. Визуальный контроль

Как уже отмечалось выше, характеристики сепаратора детально исследовались для двух вариантов построения ААС, наиболее интересных с точки зрения практических приложений: двухэлементной антенны с вертикальными электрическими вибраторами, разнесёнными в пространстве, обладающими изотропной ДН, и трёхэлементной ААС, состоящей из двух скрещённых горизонтальных магнитных рамок и вертикального электрического вибратора ( $D_1(\alpha) = \cos(\alpha)$ ,  $D_2(\alpha) = \sin(\alpha)$ ,  $D_3(\alpha) = 1$  — диаграммы направленности элементов). В первом варианте ААС пространственные различия источников проявляются в неравенстве разницы фаз антенных колебаний, во втором варианте — в неравенстве отношений амплитуд, наводимых на различные антенные элементы.

Процесс обработки в программе осуществляется по “непрерывным” сигналам (с учётом дискретизации), а вычисление ОСПШ для контроля за динамикой процесса настройки осуществлялось последовательно по отрезкам определённой длительности (например, 256 отсчётов). На экране

дисплея выводились осциллограммы входных сигналов и их спектры (верхние три панели), аналогичные графики для выходных сигналов сепаратора (три панели ниже верхних), которые обновлялись для каждого последующего интервала анализа. В нижней части монитора представлялись текущие (ОСПШ)<sub>m,n</sub>, m, n = 1, 2, 3 для трёх сигналов, вычисленные в каждом из трёх выходов сепаратора (справа), и матрица (ОСПШ)<sub>m,n</sub> из усреднённых элементов по интервалу 300–1000 бит (слева). При этом имелась возможность наблюдать процесс настройки сепаратора в каждом из каналов и эффективность разделения. Параметры задачи приведены в верхнем левом углу. Примерный вид процесса визуального вывода приведён на рис. 2.

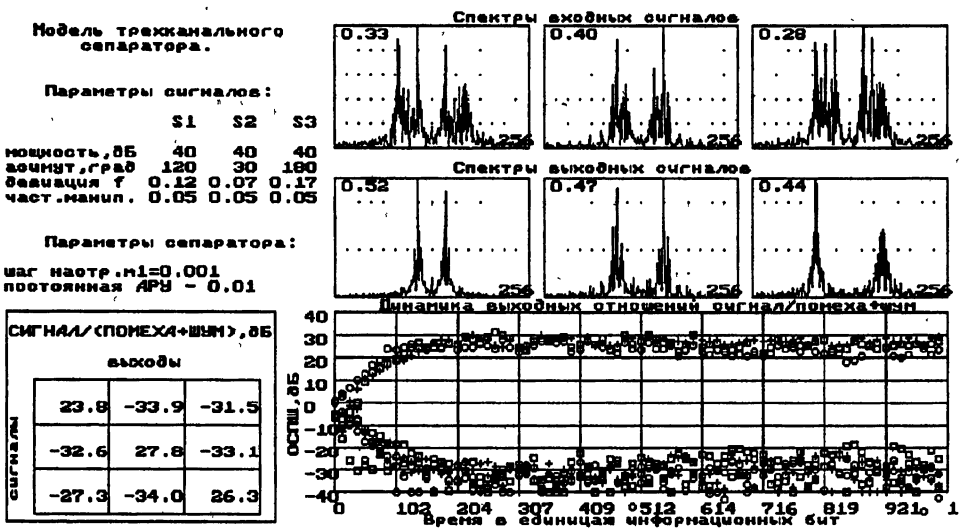


Рис. 2. Пример регистрации процесса обработки сигнально-помеховых смесей программой трёхканального сепаратора при фиксированных параметрах входных ЧТ сигналов.

### 1.3.5. Регистрация результатов обработки

Процесс обработки заканчивался после настройки сепаратора. Время настройки определялось параметром  $\mu$  (шаг настройки весовых коэффициентов алгоритма Уидроу-Хопфа), для  $\mu = 0,001$  характерное время настройки составляло 100–200 информационных посылок.

В этом случае обработка прерывалась после 1000 информационных посылок тогда, когда достигался стационарный уровень выходных ОСПШ. Значения ОСПШ усреднялись на интервале стационарности и записывались в файл данных. После этого изменялся исследуемый параметр задачи (например, мощность одного из сигналов) и обработка начиналась вновь с нулевыми начальными условиями для весовых коэффициентов.

Выходные файлы данных использовались при построении соответствующих зависимостей при помощи пакетов прикладных программ (Grapher и т.п.).

Таким образом были исследованы основные зависимости ОСПШ от мощности входных сигналов, от азимутального разнеса источников и др.

## 1.4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Более доступные для восприятия результаты получаются при исследовании двухканального сепаратора (две рамки или два разнесённых в пространстве вибратора), когда один из сигналов считается полезным, а второй — помехой. Поэтому вначале исследовались характеристики такого сепаратора, из которых можно было сделать главные выводы об эффективности разделения сигнала и помех, а затем проводились аналогичные испытания 3-канального сепаратора.

### 1.4.1. Зависимость эффективности сепаратора от азимутального разнеса источников сигнала и помехи

При исследовании этой зависимости азимут одного из источников сигналов и его мощность были постоянны ( $\alpha_1 = 0$ ,  $S_1 = 40$  дБ), мощность второго сигнала (помехи) являлась параметром, а его азимутальный угол  $\alpha_2$  изменялся от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  с шагом  $0,5^\circ$  вблизи особенностей и  $5^\circ$  вдали от них.

На рис. 3а видно резкое снижение  $(\text{ОСПШ})_{1,1}$  вблизи  $\alpha_2 = 0^\circ$  и  $\alpha_2 = 180^\circ$ , т.е. при близости азимута источника помехи с азимутом источника сигнала и с зеркальным к нему направлением. При изменении мощности помехи от 10 до 40 дБ угловая зависимость сохраняла свой вид. На этом же графике приведена соответствующая зависимость  $(\text{ОСПШ})_{2,1}$ , которая демонстрирует полное подавление сигнала на втором выходе, везде кроме особенностей. Рис. 3б демонстрирует изменение этой зависимости при варьировании мощности полезного сигнала (мощность помехи = 40 дБ). Видно, что с увеличением мощности сигнала кривые поднимаются, а поражённые зоны сужаются.

Подключение третьего канала приводит к исчезновению зеркального минимума, вследствие появления дополнительного, опорного, колебания, относительно которого фазы сигналов от рамок, наводимых из симметричных угловых квадрантов, различаются.

На рис. 4а приводятся угловые зависимости, демонстрирующие эффективность работы трёхканального сепаратора в присутствии двух помех, расположенных на азимутах  $0^\circ$  и  $135^\circ$  при изменении азимута источника полезного сигнала. Мощность помех  $S_2 = S_3 = 40$  дБ, мощность сигнала

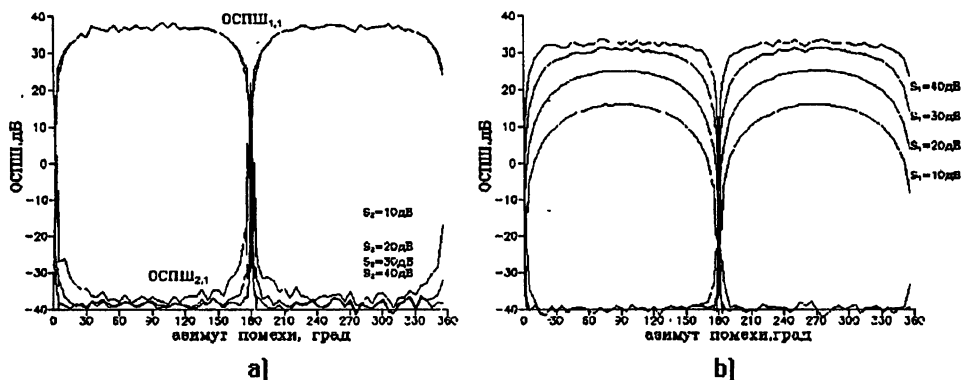


Рис. 3. Зависимость выходного отношения сигнал/(помеха + шум) на выходах двухканального сепаратора от азимута источника помехового сигнала при различных уровнях помехи (а) и сигнала (б) на входе.

$S_1 = 40$  дБ — верхняя кривая, и  $S_1 = 20$  дБ — нижняя кривая. Наблюдается отсутствие зеркальных минимумов (провалы ОСПШ существуют лишь вблизи азимутов помех) и уменьшение углового разрешения при уменьшении мощности сигнала.

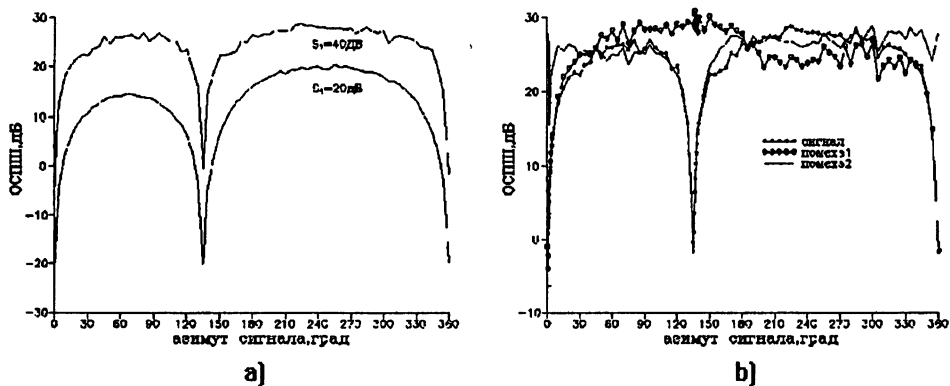


Рис. 4. Зависимость выходного отношения сигнал/(помеха + шум) для сигнала (а) и для помех (б) от азимута источника полезного сигнала на выходах 3-канального сепаратора.

Рис. 4б показывает поведение ОСПШ на разных выходах для всех трёх сигналов от азимута первого сигнала (точнее, здесь приведены ОСПШ для каждого выхода только для одного из трёх сигналов, остальные два “чужих” сигнала подавлены до уровня ниже  $-40$  дБ). Отметим отсутствие влияния совпадения азимутов двух сигналов на эффективность выделения третьего сигнала.

Величину углового раствора  $\Delta\alpha$ , в котором ОСПШ  $< 10$  дБ можно назвать угловым разрешением сепаратора. Она является важной харак-

теристикой компенсаторов помех, показывающей их избирательность по пространству. На рис. 5 (нижняя кривая — двухканальный сепаратор) построена зависимость  $\Delta\alpha(S_1)$ , демонстрирующая определяющее влияние уровня полезного сигнала на входе на угловое разрешение компенсаторов.

Поведение углового разрешения для 3-канального сепаратора при изменении уровня полезного сигнала показана на верхней кривой рис. 5. Видно, что угловое разрешение повышается при увеличении входной мощности сигнала также, как и для двухканального варианта сепаратора, однако сравнение зависимостей показывает, что 3-канальный сепаратор (с антенной системой из неидентичных элементов) обладает примерно вдвое худшим разрешением.

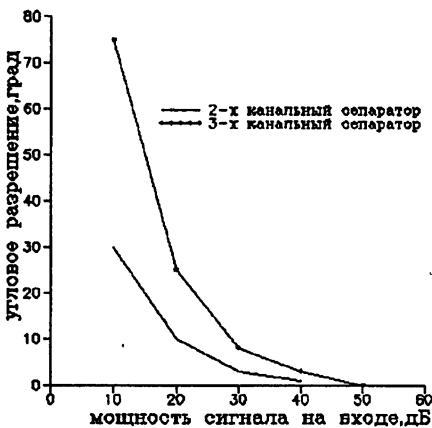


Рис. 5. Зависимость углового разрешения 2-канального и 3-канального сепараторов от мощности полезного сигнала на входе.

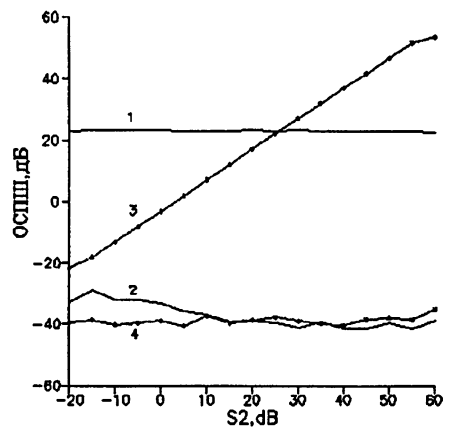


Рис. 6. Зависимость выходных ОСПШ 2-канального сепаратора от мощности одного из входных сигналов.

#### 1.4.2. Энергетические характеристики сепаратора

Второй важнейшей характеристикой сепаратора является зависимость эффективности разделения от соотношения уровней сигнала и помехи на входе адаптивного устройства. Для исследования этой зависимости углы прихода сигналов выбирались вдали от особенностей, мощность одного из сигналов фиксировалась  $S_1 = 20$  дБ, мощность второго сигнала менялась от сеанса к сеансу. После настройки сепаратора вычислялись его выходные характеристики. Результаты обработки приведены на рис. 6 (2-канальный сепаратор). Первый из этих графиков демонстрирует устойчивый уровень  $(ОСПШ)_1$ , не зависящий от уровня  $S_2$  на входе (кривая 1) и полное подавление этого сигнала на втором (помеховом) выходе (кривая 2). Кривая 3 показывает линейное нарастание уровня второго сигнала на выходе сепаратора при увеличении его уровня на входе,

в то время как на противоположном выходе сохраняется его сильное подавление (4). Полученные зависимости говорят о практически идеальной развязке (разделении) сигналов в 2-канальном варианте и о его линейной характеристике  $U_{\text{ВЫХ}}$  ( $U_{\text{ВХ}}$ ).

Заметим, что на первом выходе сепаратора всегда выделяется наиболее мощный сигнал из входной смеси, поэтому при  $S_1 > S_2$  на рис. 6 приводятся  $(\text{ОСПШ})_{1,1}(S_2)$  (сигнальным является первый выход), при  $S_1 < S_2$  к верхней кривой рис. 6 пристыковываются данные  $(\text{ОСПШ})_{2,1}(S_2)$ , т.к. сигнал выделяется на втором выходе. Аналогичный приём использован при построении других зависимостей на рис. 6 и нижеприведённых графиках — переброс сигналов из канала в канал устраняется по неким внешним к задаче признакам. Это свойство сепаратора: выделять на первом выходе мощный сигнал, — проявляется только при его настройке с нулевыми начальными условиями. При плавных изменениях соотношения мощностей сигналов на входе таких перебросов не происходит — сепаратор обладает очень важным свойством гистерезиса (см. ниже).

Несколько другие зависимости получены для 3-канального сепаратора (рис. 7). На рис. 7а показана зависимость  $(\text{ОСПШ})_1$  от мощности второго сигнала  $S_2$  (первой помехи). На графике приведены 4 кривые для четырёх уровней мощности третьего сигнала  $S_3$ . Мощность полезного сигнала на входе составляла 40 дБ. Видно, что при близости уровня сигнала и уровня наиболее мощной из помех наблюдается заметное снижение  $(\text{ОСПШ})_1$ . При  $S_2 > S_1$  величина  $(\text{ОСПШ})_1$  несколько возрастает. Если же  $S_3 = S_1$  (нижняя кривая на рис. 7а), то  $(\text{ОСПШ})_1$  практически не зависит от  $S_2$  и никогда не достигает своего максимально возможного уровня.

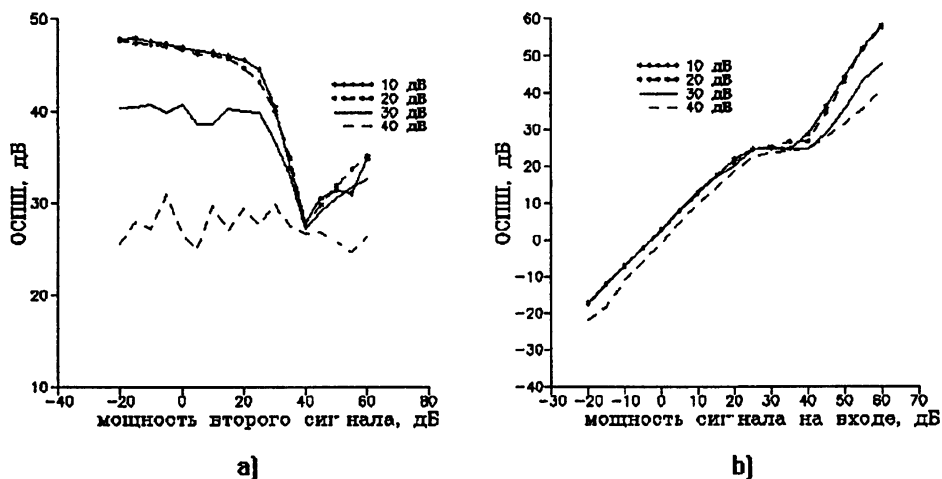


Рис. 7. Зависимость ОСПШ для 3-канального сепаратора от мощности одной из помех (а) и от мощности сигнала (б).

Зависимость  $(\text{ОСПШ})_1(S_1)$  приведена на рис. 7б ( $S_2 = 40$  дБ,  $S_3$  — пара-

метр). В ней также наблюдается особенность — при приближении уровня сигнала к величине  $S_1 = 25$  дБ линейная прямая выходит на плато, которое простирается до величины, равной уровню наиболее сильной помехи ( $S_2$ ).

Итак, при достаточно хороших характеристиках 3-канального устройства сепарации сигналов, имеются определённые особенности. Такое поведение энергетических характеристик не вполне понятно, хотя, по видимому, связано с плохой обусловленностью корреляционной матрицы входных процессов при близости уровней сигналов. В таких условиях алгоритм сепарации Хакета [2] полностью неработоспособен. Данный алгоритм не теряет своей работоспособности, но несколько снижает свою эффективность.

### 1.4.3. Динамические характеристики

Несомненный интерес представляют данные о времени настройки сепаратора. Время настройки определяется фактически минимальным временем, необходимым для отыскания декорреляции между входными процессами, и шагом настройки.

Процесс достижения стационарного состояния сепаратора иногда сопровождался релаксационными колебаниями уровней выходных сигналов с периодом, близким к времени настройки. При этом наблюдались однаты осцилляции ОСПШ при стремлении к стационарным значениям.

При исследовании времени настройки  $t$  от шага настройки  $\mu$  было найдено, что эта зависимость подчиняется закону  $t \approx 10/\mu$ , т.е. динамические характеристики сепаратора напрямую определяются шагом настройки (рис. 8). Желание уменьшить время настройки, однако, сталкивается с противоречием — при малых  $t$  не достигается максимальное ОСПШ. На рис. 8 приведена зависимость ОСПШ( $\mu$ ), из которой следует, что за ускорение настройки приходится расплачиваться снижением ОСПШ (зависимость снималась при  $S_1 = S_2 = 40$  дБ). Это происходит вследствие чрезмерно грубого шага настройки, в результате чего система проскакивает мимо оптимальных весовых коэффициентов.

Изменение мощностей входных сигналов с сохранением их равенства не приводит к изменению времени настройки, однако если уменьшить мощность одного из них, то  $t$  возрастает (например, при  $S_1 = 20$  дБ,  $S_2 = 40$  дБ время возрастает примерно в 1,5 раза). Наиболее оптимальным шагом настройки из этих измерений следует считать  $\mu = 0,001$ . При этом ОСПШ близко к максимальному уровню, а время настройки достаточно невелико — 150–200 бит.

Динамические характеристики 3-канального сепаратора проиллюстрированы на рис. 9, на котором построены времена настройки по разным каналам сепаратора в зависимости от мощности одного из сигналов

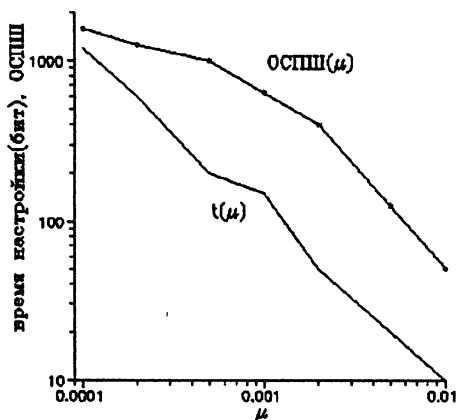


Рис. 8. Зависимость времени настройки и выходного ОСПШ 2-канального сепаратора от шага настройки.

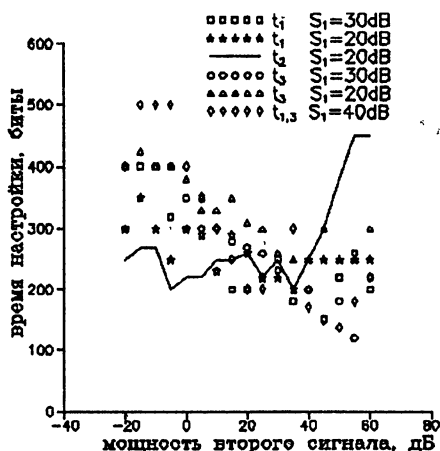


Рис. 9. Зависимость времени настройки 3-канального сепаратора от мощности помехи.

( $S_1 = 20, 30$  и  $40$  дБ — параметр,  $S_2$  — варьировалась,  $S_3 = 40$  дБ). Времена настройки в первом и третьем каналах  $t_1, t_3$  (значки на графике) при увеличении мощности  $S_2$  падали от 400 до 200–250 бит, в то время как время настройки  $t_2$  (кривая) было практически неизменно до тех пор, пока второй сигнал не превысил уровень первого и третьего сигналов. После этого  $t_2$  возрастает с 200 до 400 бит. Эти данные снимались при шаге настройки  $\mu = 0,001$ .

С временем настройки тесно связан вопрос о работе компенсатора в изменяющейся сигнально-помеховой обстановке (СПО). Было проведено исследование эффективности выделения сигнала в случае работы прерывистой помехи — включающегося и выключающегося ЧТ сигнала с периодом  $T$ . При периодах  $T$ , превышающих время настройки, сепаратор успевает настраиваться на новую СПО, при этом происходят перебросы сигнала из канала в канал (если помеха мощнее сигнала) и определённое время каждый раз теряется на настройку. Такое поведение сепаратора иллюстрирует рис. 10, на котором приведены зависимости ОСПШ от времени (номер отрезка времени, на которых вычислялось новое ОСПШ) в присутствии прерывистой помехи (2-канальный сепаратор). Уровень помехи — 40 дБ, сигнала — 30 дБ, период on-off помехи — 300 бит. Видно, что при включении помехи происходит переброс сигнала из первого канала во второй с установлением нового квазистационарного состояния. Выключение помехи сопровождается обратным процессом. Шаг настройки при этом составлял  $\mu = 0,001$ .

В том случае, когда  $T$  меньше времени настройки, то устройство по-



стоянно находится в переходном состоянии и свои функции не выполняет — стационарное состояние не достигается.

Такие характеристики сепаратор имеет при фиксированном шаге настройки  $\mu$ . Однако ясно, что рациональнее было бы сделать его переменным: вдали от точки настройки с минимальной СКО шаг может быть больше, вблизи — меньше. Критерий близости к точке настройки для сепаратора достаточно прост — степень коррелированности выходных процессов. Введя такую параметризацию шага настройки,

$$\mu = \gamma \frac{\overline{z_1(t)z_2(t)}}{Z_1^{1/2} \cdot Z_2^{1/2}},$$

удалось уменьшить время настройки на порядок (до 10–20 бит) с сохранением выходных ОСПШ ( $\gamma$  — коэффициент пропорциональности).

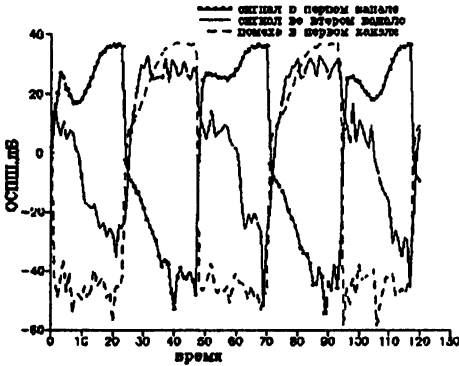


Рис. 10. Поведение ОСПШ для 2-канального сепаратора в присутствии прерывистой помехи.

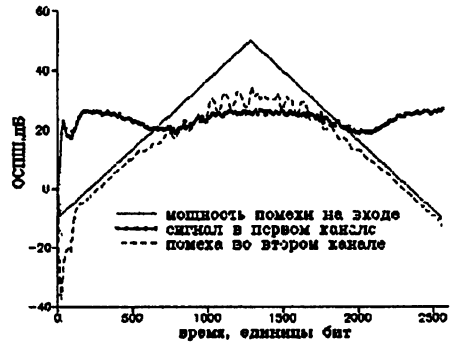


Рис. 11. Поведение ОСПШ для 2-канального сепаратора в присутствии помехи с изменяющейся мощностью.

Плавное изменение СПО — изменение азимута помехи или сигнала, или их мощности, например при движении источников, не приводит к срыву работы сепаратора. При изменении мощности сигналов и смене их соотношения на обратное переброта из канала в канал не происходит, т.к. сепаратор обладает достаточно глубоким гистерезисом в зависимости сигнал/помеха на первом (втором) выходе сепаратора от входного отношения помеха/сигнал. Такое свойство сепаратора демонстрирует рис. 11, на котором представлено поведение во времени сигнала на первом выходе и помехи на втором выходе при плавном изменении мощности помехи на входе (вариант 2-канального сепаратора).

При исследовании этой зависимости уровень сигнала составлял 20 дБ, уровень помехи на входе в децибеллах изменялся по пилообразному закону от 10 до 50 дБ и обратно. Видно, что на первом канале после настройки

начинает выделяться сигнал и он остаётся там, несмотря на то, что помеха в определённый момент времени начинает превышать его уровень. Обратная картина наблюдается в том случае, когда пилообразное изменение мощности помехи начинается с максимального её значения. В этом случае сигнал начинает выделяться во втором канале и остаётся там независимо от уровня помехи.

### 1.4.3. Замечание о структурных помехах

Приведённые выше результаты получены для смесей ЧТ сигналов с различающимися частотами  $f_n = \Delta F_n \cdot b_n(k)$ , произвольными информационными скоростями  $B_n$  и случайными последовательностями нулей и единиц  $b_n$ . Структурная помеха характеризуется совпадением всех параметров с параметрами сигнала за исключением закона модуляции. В том случае, если модулирующая последовательность является чисто случайной, то коэффициент корреляции помехи с сигналом при достаточно большом интервале усреднения становится равным 0,5, т. е. помеха и сигнал являются частично коррелированными колебаниями. В этих условиях корреляционные методы ПВОС, основанные на исходной посылке о декоррелированности сигнала и помех, перестают работать и численное моделирование для такой помехи показало снижение эффективности разделения сигнала и помех на 20 дБ.

Если же информационная последовательность помехи является ортогональной к информационной последовательности сигнала (коэффициент корреляции равен 0), то эффективность разделения сигнала и такой структурной помехи высока и количественные результаты совпадают с вышеприведёнными характеристиками.

## 1.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается оптимальный алгоритм разделения сигналов с угловой манипуляцией и помех для квазистационарных каналов связи. Исследование алгоритма осуществлено методом численного моделирования. В результате расчётов было установлено:

1) алгоритм по критерию МСКО обеспечивает когерентное сложение сигналов и подавление помех,

2) эффективность алгоритма сепарации не зависит от типа ААС и является достаточно высокой для антенных систем, состоящих как из идентичных элементов, разнесённых в пространстве, так и из антенных элементов с различными ДН с общим фазовым центром,

3) угловое разрешение сепаратора зависит только от отношения мощности полезного сигнала к мощности шумов приёмника и близко к потенциально достижимой величине (с априорной информацией об азимутах сигнала и помех),

4) выходное отношение сигнал/(помеха + шум) слабо зависит от уровня помех на входе и линейно возрастает с ростом мощности сигнала,

5) динамические характеристики сепаратора инвариантны к сигнально-помеховой обстановке и регулируются шагом настройки процедур Уидроу-Хопфа. Параметризация шага настройки коэффициентом корреляции выходных процессов позволяет уменьшить время настройки сепаратора на порядок (до 10 информационных посылок),

6) сепаратор обладает глубоким гистерезисом, что обеспечивает удержание сигнала и помех на выходах устройства при флуктуациях уровней входных колебаний,

7) специальные эксперименты с использованием вместо второго (третьего) ЧТ сигнала сигналов другого типа (монокроматического, шумоподобного, АМ и др.) показали возможность подавления и таких помех,

8) исследования сепаратора для ФТ сигналов, отличающегося от схемы, приведённой на рис. 1, только дополнительным блоком комплексного сопряжения сигналов с ограничителей в части формирования эталонных сигналов, показали результаты, аналогичные соответствующим характеристикам сепаратора ЧТ сигналов.

Таким образом, проведённые численные эксперименты демонстрируют хорошие потенциальные возможности разработанного алгоритма для компенсации помех в каналах связи. Разработанный сепаратор позволяет компенсировать синусоидальные, шумоподобные и структурные помехи (в том числе, с совпадающими параметрами с параметрами полезного сигнала, но с другой информационной последовательностью) и выделять очищенный сигнал на одном из выходов устройства. Задача различения сигнального выхода должна решаться специальным устройством идентификации сигнала и в данной работе не рассматривалась.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. — М.: Радио и связь, 1986. - 448 с.
2. Hacket C. M. //IEEE Trans., 1981. V. AES-17. № 2. P. 234.
3. Пат. № 4105977 США. Адаптивный компенсатор помеховых сигналов. /Р. С. Фиттинд, Г. Х. Песинджер. — Заявлено 10.03.77; Оpubл. 8.08.78. Бюл. № 2, Т. 973.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт,  
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
16 февраля 1996 г.

**OPTIMAL SPATIAL SEPARATOR OF SIGNALS AND NOISES IN RADIO COMMUNICATION CHANNELS 1. NUMERICAL MODELLING**

*S. A. Metelev, Yu. V. Shishkin*

An optimal algorithm is suggested for separation of signals with angular manipulation and noises of any type, based on space-time procession of signals. The basic characteristics of such separator have been studied by the method of numerical modelling for different types of antennas with two and three branches of spacing: dependences of the separation efficiency on the angular spacing of the signal sources and noises, on the power of the signal received, on the separator parameters, on the types of noises and signals, etc. It is shown, that the considered adaptive application of the devices can effectively suppress noises in the ideal communication channel.