

**МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XL N 12

Нижний Новгород

1997

Содержание

Выборнов Ф.И., Митякова Э.Е., Рахлин А.В., Крупеня Н.Д. Анализ появляемости перемещающихся ионосферных возмущений типа "серп" на средних широтах.....	1455
Зиничева М.Б., Наумов А.П. Физические аспекты модели распространения сантиметровых и миллиметровых радиоволн на наклонных трассах в земной атмосфере.....	1463
Куликов Ю.Ю., Рыскин В.Г. О прозрачности полярной атмосферы для миллиметровой радиоастрономии	1479
Ошарин А.М. Об одной особенности ослабления электромагнитных волн сферической частицей в поглощающей среде.....	1489
Дорофеев И.А. Сила притяжения между твёрдыми телами с различными температурами.....	1495
Рыскин Н.М. Численное моделирование клистрода на основе гидродинамических уравнений	1511
Бочков Г.Н., Горохов К.В. Эффективная биспектральная шумовая температура	1526
Трифонов А.П., Парфёнов В.И., Мишин Д.В. Оptимальный приём сигнала с неизвестной длительностью на фоне белого шума	1531
Вировлянский А.Л., Окомелькова И.А. Лучевой подход для расчёта сглаженного по угловым и пространственным масштабам локального спектра поля в волноводе.....	1542
Информация. Содержание т. 40 журнала "Изв. вузов. Радиофизика" за 1997 год.....	1555

УДК 52-853

АНАЛИЗ ПОЯВЛЯЕМОСТИ ПЕРЕМЕЩАЮЩИХСЯ ИОНОСФЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ТИПА “СЕРП” НА СРЕДНИХ ШИРОТАХ

Ф. И. Выборнов, Э. Е. Митякова, А. В. Рахлин, Н. Д. Крупеня

Представлены результаты анализа данных вертикального зондирования ионосферы на станции Зимёнки (г. Нижний Новгород). По материалам январских и июльских ионограмм построены графики зависимости числа отмеченных возмущений типа “серп” от времени суток для интервала лет с 1966 по 1992 год. Проведено сравнение с рассеянием в F-слое ионосферы за тот же период. Отмечается наличие тренда во временных рядах исследуемого явления.

В настоящее время теоретически и экспериментально обоснована концепция волновой природы среднеширотных неоднородностей электронной концентрации [1]. Существует система представлений о свойствах волновых возмущений в ионосфере средних широт.

Типичным проявлением волновых возмущений в ионосфере являются “перемещающиеся” возмущения (ПИВ). Это название объединяет многообразные формы неоднородностей электронной концентрации, которые проявляют себя на ионограммах вертикального зондирования, записях действующих высот и некоторых специально применяемых для изучения ПИВ методах наблюдений аномалий.

Анализу поведения ПИВ, их морфологии, связи с другими геофизическими явлениями посвящено большое количество статей, диссертаций, монографий [2–4].

Методы, применяющиеся для исследования ПИВ многообразны. Наиболее распространённым способом изучения ПИВ является снятие высотно-частотной характеристики на ионосферных станциях. Начало возмущения сопровождается петлеобразным искажением ионограммы в районе критических частот F-области, затем происходит перегиб, который смещается в низкочастотную часть. Это — так называемые серпообразные возмущения. Анализу появляемости подобных возмущений посвящено наше сообщение.

Особенность данных исследований заключается в том, что в нашем распоряжении были данные о появляемости серпообразных ПИВ за период с 1966 по 1992 годы, причём на одной и той же станции Зимёнки (вблизи г. Нижний Новгород, $\varphi = 56^\circ$ и $\lambda = 44^\circ$) с неизменными параметрами аппаратуры. Поэтому статистический материал, представленный нами, отличается полнотой и достоверностью.

Анализ появляемости ПИВов позволил построить графики суточного хода для января (рис. 1а) и июля (рис. 1б) для указанных лет.

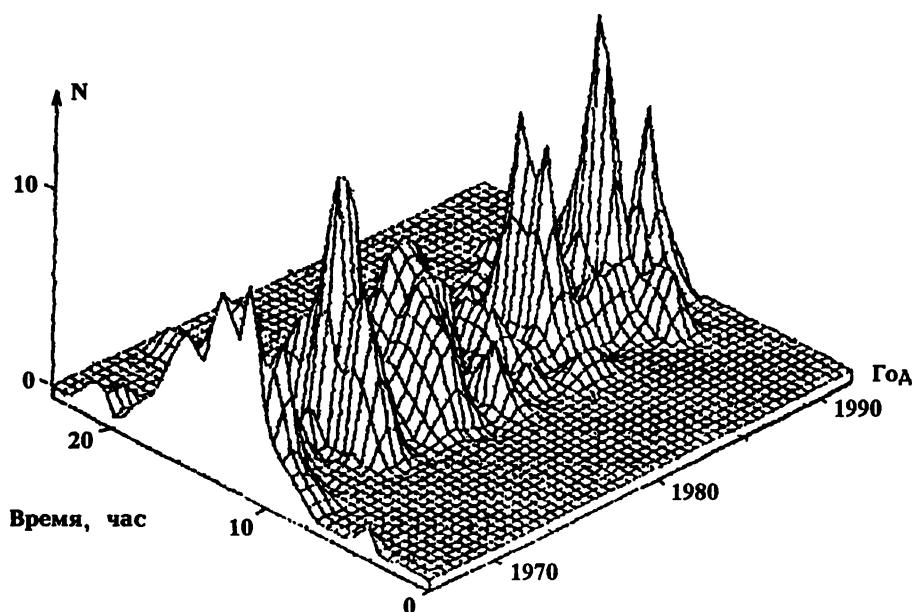


Рис. 1а. Суточный ход появляемости ПИВов для января за период 1966–1992 гг.

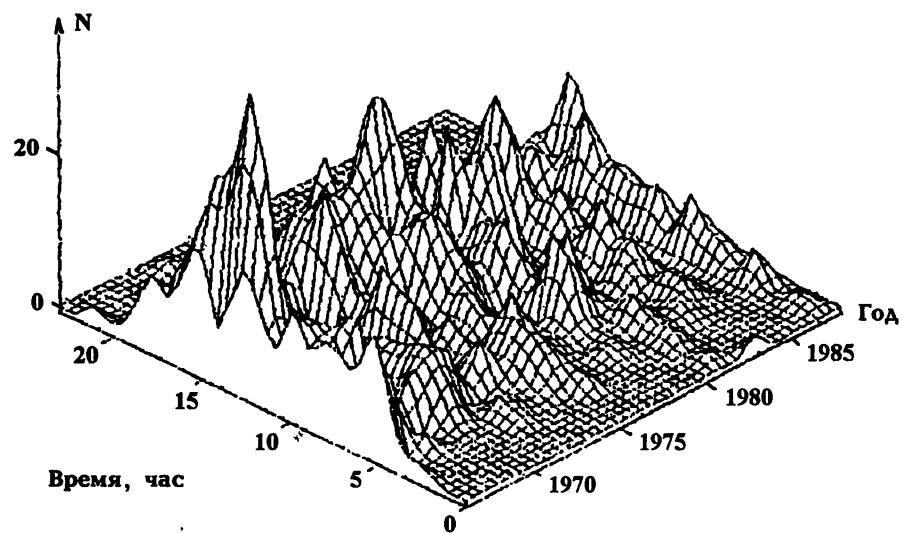


Рис. 1б. Суточный ход появляемости ПИВов для июля за период 1966–1992 гг.

При этом максимум наблюдаемых случаев в зимнее и летнее время

(см. рис. 2) приходился на околополуденное время (12 и 16 часов, соответственно).



Рис. 2.

Серпообразные ПИВы наблюдались зимой с 6 до 19 часов и летом с 3 до 21 часа, что, по-видимому, связано с освещённостью ионосферы на высотах F-слоя. Ход кривой графиков достаточно хорошо совпадает с ходом критических частот для соответствующих месяцев.

В ряде работ (см., например, [5]) также отмечалось появление серпообразных ПИВов в светлое время суток.

Одновременно с исследованием появляемости серпообразных ПИВов мы анализировали поведение F-spread в те же интервалы времени. Результаты этих исследований подробно изложены в работе [6].

На рис. 3а и рис. 3б мы предлагаем для сравнения суточный ход появляемости F-spread для января и июля, соответственно, для того же интервала лет.

Даже наглядное сравнение результатов обработки данных, представленных на рис. 1 и рис. 3 говорит о том, что явление F-spread и серпообразные ПИВы проявляются существенно по-разному.

Современные представления как о явлении F-spread (см., например, [7] и цитируемую там литературу), так и о перемещающихся ионосферных возмущениях (см. [8] и позднее [9]) сводятся к многолучёвости отражённых КВ сигналов, обусловленной неоднородной структурой ионосферной

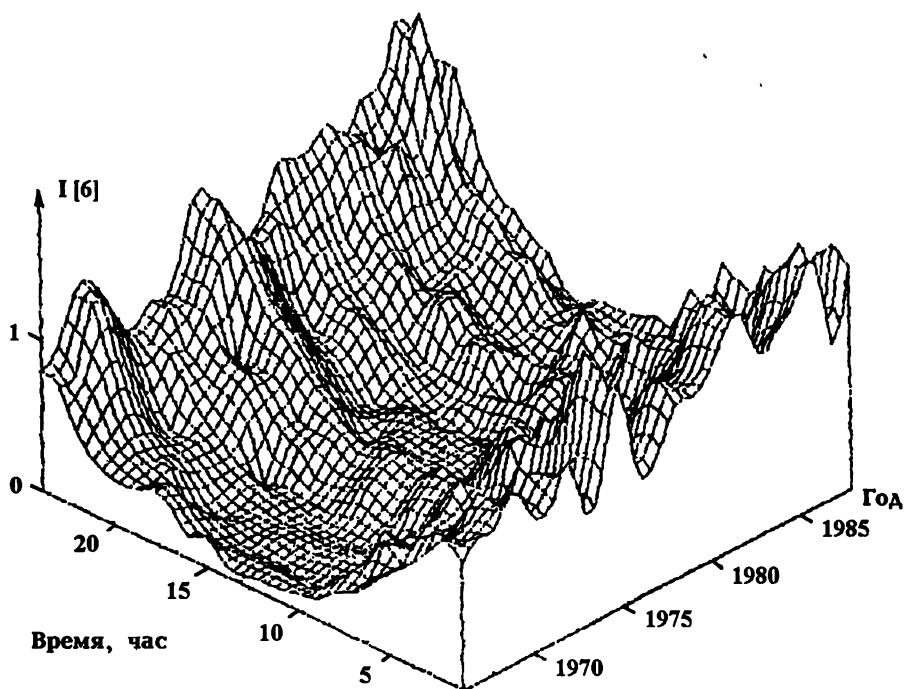


Рис. 3а.

Суточный ход появляемости F-spread для января за период 1966–1992 гг.

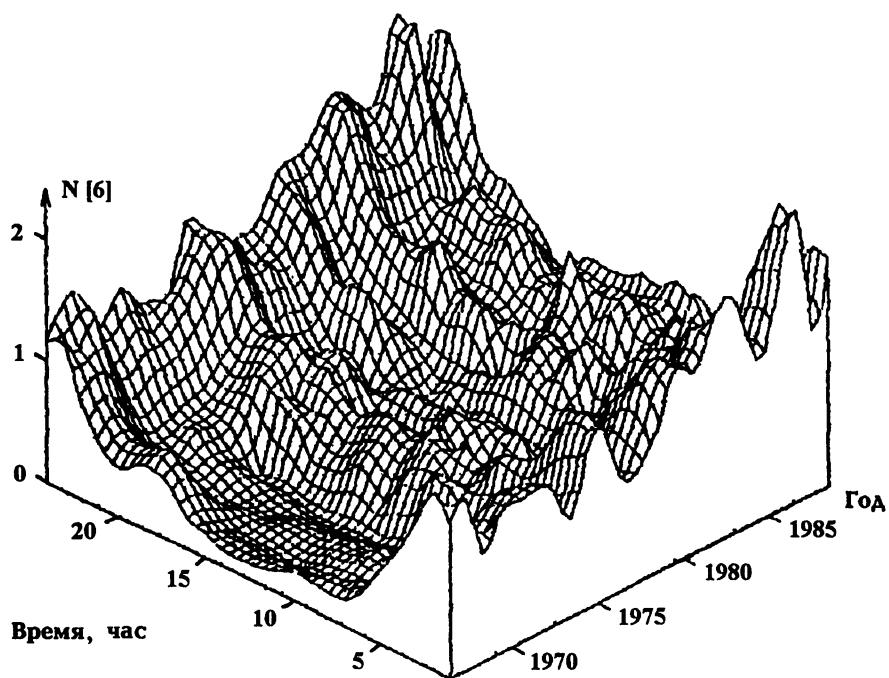


Рис. 3б. Суточный ход появляемости F-spread для июля за период 1966–1992 гг.

плазмы (с размерами в несколько десятков–сотен километров), отличаясь условиями, в которых данная многолучевость проявляется.

Данное замечание очень важно для выяснения взаимосвязи перемещающихся ионосферных возмущений типа “серп” и F-рассеяния в среднеширотной ионосфере.

Известно [3], что волнообразные изменения действующей высоты отражения на фиксированной частоте приводят к появлению сопутствующих отражений, что является предвестником появления диффузности на ионограммах [10, 11] и, по-видимому, свидетельствует о единой природе неоднородностей их вызывающих.

Работ, посвящённых анализу синхронных наблюдений ионосферных возмущений типа “серп” и диффузности F-слоя ионосферы, нами не обнаружено. Мало того, если в [12] среднеширотное F-рассеяние характеризуется как типично ночное явление, то в [5, 13] отмечалось, что среднеширотные ПИВы серпообразного типа достаточно часто наблюдаются днём.

При этом, возмущения типа “серп” наблюдались, как правило, на одиночных ионограммах, редко — на соседних (при интервале между снятием соседних ионограмм в 15 минут). Это позволяет утверждать, что времена 10–20 минут являются наиболее характерными для рассматриваемых событий.

Построенные временные ряды общего числа наблюдаемых перемещающихся возмущений для каждого года (отдельно для января и июля) за интервал времени с 1966 по 1992 год (рис. 4) позволяют утверждать, что максимальная частота событий наблюдается при спаде или росте кривой активности Солнца (на рис. 4 нижняя кривая).

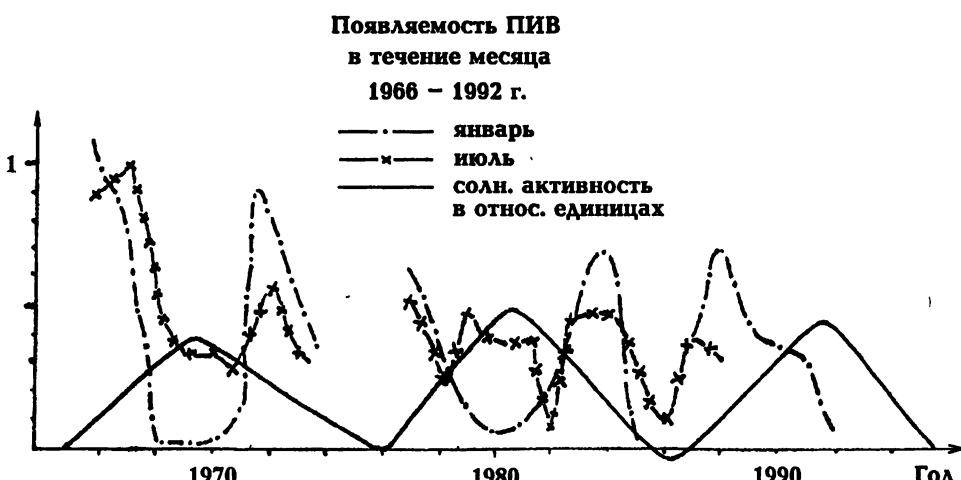


Рис. 4.

На рис. 1 и 3 хорошо прослеживается цикличность с временами 2–6 лет, причём, максимумы в проявляемости F-рассеяния и числе серповидных ПИВов, как правило, не совпадают. Интересно, что примерно такие же периоды обнаружены в активности Солнца [14]. При этом, в работе [15] показано, что 4–6-летний пик чисел Вольфа появляется в эпохи максимумов векового цикла (здесь это 1940–1980 гг.). Двухлетний период потока излучения Солнца на волне 10,7 см отмечался в работе [16]. По-видимому, для анализируемых явлений (ПИВы серповидной структуры и явление F-рассеяния) существенно значимыми являются не только одиннадцатилетний цикл солнечной активности, но и его более короткие периоды.

Общее число ПИВов, наблюдаемое в июле, более чем в три раза превышает количество наблюдавшихся возмущений в январе за один и тот же интервал времени. Хорошо заметна общая тенденция к снижению в целом числа ПИВов от года к году (в среднем в полтора раза для зимнего месяца и более чем в три раза для летнего месяца) за рассматриваемый интервал времени. Явно выражена цикличность в количестве ПИВов, особенно для января месяца с периодом 4–6 лет.

Синхронное рассмотрение данных о числе ПИВов типа "серп" и индексе F-рассеяния позволяет утверждать, что наибольшее их число приходится на интервалы времени с наименьшей проявляемостью диффузности на ионограммах.

Выявленные особенности в проявляемости ПИВов позволяют по-другому интерпретировать результаты специального эксперимента по воздействию на ионосферу мощным высокочастотным излучением в феврале 1986 и январе 1987 годов [17], когда в дневное время после длительной (несколько часов) работы нагревного стенда "Сура" с эффективной мощностью 150 МВт в околополуденное время наблюдались ионограммы с крупномасштабными возмущениями (см. рис. 5), которые охватывали диапазон частот от 6 до 9 МГц и высот от 250 до 500 км.

По-видимому, прохождение ПИВов через область ионосферы, возмущённую мощным ВЧ излучением, инициировало многократное усиление неоднородной структуры ионосферы всевозможных масштабов (от сотен метров до десятков–сотен километров), что и привело к сильным возмущениям на ионограммах.

По нашему мнению, причинами выявленного снижения числа ПИВов за исследуемый интервал может быть как общий рост активности Солнца, так и изменения в ионосфере, вызванные ростом техногенного воздействия человека на ионосферу, что согласуется с [18].

Авторы благодарны Алимову В. А. за полезные обсуждения и Беликовичу В. В. за возможность использования фотоплёнок ионограмм.

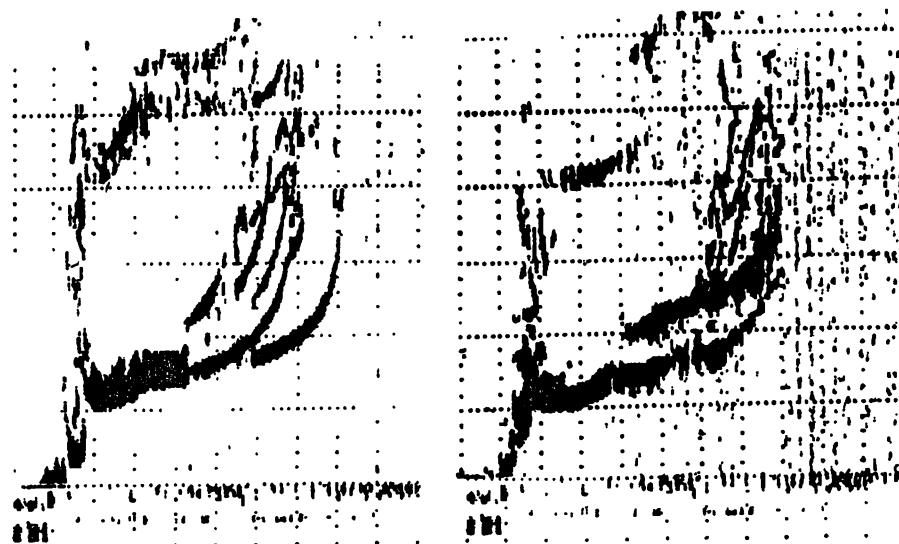


Рис. 5. Пример крупномасштабного возмущения ионосферы после длительного воздействия мощным КВ излучением. Ионограмма снята сразу после прекращения воздействия.

Данная работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, гранты № 97-02-31003, № 96-02-18632 и 95-02-03716.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дробжев В. И. Экспериментальные доказательства теории внутренних гравитационных волн. — В сб.: Волновые возмущения в атмосфере. — Алма-Ата, 1980. С. 25.
2. Гершман Б. Н., Григорьев Г. И. // Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1968. Т. 11. № 1. С. 5.
3. Heisler L. H. // J. Atmos. Terr. Phys., 1963. V. 25. P. 71.
4. Шарадзе З. С. Докторская диссертация. — Тбилиси, 1990.
5. Дробжев В. И., Яковец А. Ф. // Phys. Solariterr., 1977. № 6. P. 45.
6. Выборнов Ф. И., Митякова Э. М., Рахлин А. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1997. Т. 40. № 3. С. 322.
7. Выборнов Ф. И. Кандидатская диссертация. — Н. Новгород: НИРФИ, 1996. 132 с.
8. Lobb R. J., Titheridge J. E. // J. Atmosph. Terr. Phys., 1977. V. 39. № 2. P. 129.

9. Крашенинников И. В., Лянной Б. В. Обратная задача вертикального радиозондирования при наличии сильного волнового возмущения ионосферы. — В сб.: Динамика ионосферы. — Алма-Ата, 1991. С. 50.
10. Джапаридзе Г. А. и др. //Геомагнетизм и аэрономия, 1989. Т. 29. № 3. С. 340.
11. Шарадзе З. С. и др. //Геомагнетизм и аэрономия, 1986. Т. 26. № 3. С. 396.
12. Гершман Б. Н., Казимировский Э. С., Кокуров В. Д., Чернобровкина Н. А. Явление F-рассеяния в ионосфере. — М.: Наука, 1984. 141 с.
13. Чернобровкина Н. А. Дальнейшее изучение наклонных отражений на ст. Иркутск. — В сб.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. Вып. 13. — Иркутск, 1970. С. 73.
14. Чистяков В. Ф. //Солнечные данные, 1987. С. 91.
15. Мордвинов В. И. — В сб.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. Вып. 83. — Иркутск, 1986. С. 134.
16. Robin R. W. //Cycles, 1984. V. 35. № 6. P. 157.
17. Выборнов Ф. И., Митякова Э. Е., Раухлин А. В. Отклик ионосферы на возмущение мощной радиоволной. //Препринт № 376. — Н. Новгород: НИРФИ, 1993. 27 с.
18. Митяков Н. А., Раухлин А. В., Митякова Э. Е., Выборнов Ф. И. Возмущения ионосферы, обусловленные ростом технического потенциала человечества. //Препринт № 402. — Н. Новгород: НИРФИ, 1994.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
30 июля 1997 г.

THE ANALYSIS OF APPEARANCE OF MOVING IONOSPHERIC DISTURBANCES OF “SICKLE” TYPE AT MID LATITUDES

F. I. Vybornov, E. E. Mityakova, A. V. Rakhlin, N. D. Krupenya

The results are presented for the analysis of the ionosphere vertical sounding data at Zimenki station (Nizhny Novgorod). Over the results of January and July ionograms, the diagrams have been built for the dependence of a number of recorded disturbances of the “sickle” type on the day time for the interval of years from 1966 to 1992. A comparison is made with the scattering in F-layer of the ionosphere for the same period of time. The presence of a trend in time series of the phenomenon investigated is registered.

УДК 537.52.77: 502.614.7

**ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ САНТИМЕТРОВЫХ И
МИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН НА НАКЛОННЫХ
ТРАССАХ В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ ***

М. Б. Зиничева, А. П. Наумов

Изложены физические аспекты построения компьютерной модели распространения сантиметровых и миллиметровых радиоволн на наклонных трассах в земной атмосфере, которая позволяет рассчитывать интегральное ослабление в диапазоне частот 3–100 ГГц, время группового запаздывания сигнала, рефракцию радиоволн и яркостную температуру атмосферы для определённых регионов на основе стандартных моделей атмосферы и оптимальной статистической экстраполяции приземных метеоэлементов.

В последнее время возрос интерес к разработке моделей распространения радиоволн различных диапазонов, включая создание соответствующих компьютерных моделей [2–4]. Отмеченная тенденция коснулась и сантиметровых–миллиметровых радиоволн. Задачи, которые ставятся создателями подобных моделей, вообще говоря, различаются между собой. Некоторые модели предназначены для расчёта только одной характеристики — ослабления, хотя в них используется обширный банк исходных метеоданных, и выходные данные включают статистику ослабления [4]. Не менее важным, по нашему мнению, является и создание моделей, позволяющих рассчитывать более широкий набор средних и текущих радиохарактеристик для определённых регионов земного шара на основе стандартных моделей атмосферы и оптимальной статистической экстраполяции ряда приземных метеоэлементов.

Компьютерная модель каждого физического явления (процесса) содержит физическую основу и программный продукт. Физические аспекты модели заключаются в установлении входных и выходных параметров, в выборе (или разработке) наиболее адекватных алгоритмов расчёта физических величин. В данной работе излагается одна из версий именно такой модели распространения микрорадиоволн, которая реализована в НИРФИ в виде пакета программ на языке ФОРТРАН. Внимание в статье акцентируется на физических аспектах построения этой модели.

*Результаты данной работы частично были доложены на XVIII Всероссийской конференции по распространению радиоволн (Санкт-Петербург, 17–19 сентября 1996 г.) [1]

1. Постановка задачи. Программа для расчёта на ПЭВМ характеристик распространения СВЧ-КВЧ радиоволн в спутниковых линиях связи (наклонные трассы) в различных естественных геофизических условиях получила название LED. Поскольку характеристики распространения микрорадиоволн в существенной степени определяются метеорологическими условиями — давлением, температурой, влажностью, наличием гидрообразований в атмосфере, то программа для расчёта радиохарактеристик на ПЭВМ должна содержать соответствующий банк данных.

В программе LED расчёты радиохарактеристик выполняются:

- для высотных профилей метеоэлементов в умеренных широтах Европейской территории России (ЕТР), которые получаются путём оптимальной статистической экстраполяции текущих приземных значений метеоэлементов (модель 1, М1);

- для усреднённых стандартных моделей атмосферы: 15° с.ш. — годовая модель; $30, 45, 60, 75^\circ$ с.ш. — среднесезонные (зимние и летние) модели [5] (модель 2, М2). Указанные модели безоблачной атмосферы дополнены характеристиками гидрообразований (см. раздел 2).

С помощью программы LED вычисляются:

- интегральное ослабление Γ радиоволн в диапазоне частот 3–100 ГГц на трассах, проходящих под углами места $5\text{--}90^\circ$ для ясной атмосферы и при наличии гидрообразований (дымок, туманов, облаков, дождей);
- время группового запаздывания сигнала Δt_{gr} ;
- рефракция радиоволн R ;
- яркостная температура атмосферы T_x , которая является характеристикой помеховой обстановки на трассе.

Структурная схема компьютерной радиомодели атмосферы имеет обычный для подобных моделей вид (см. рис. 1).

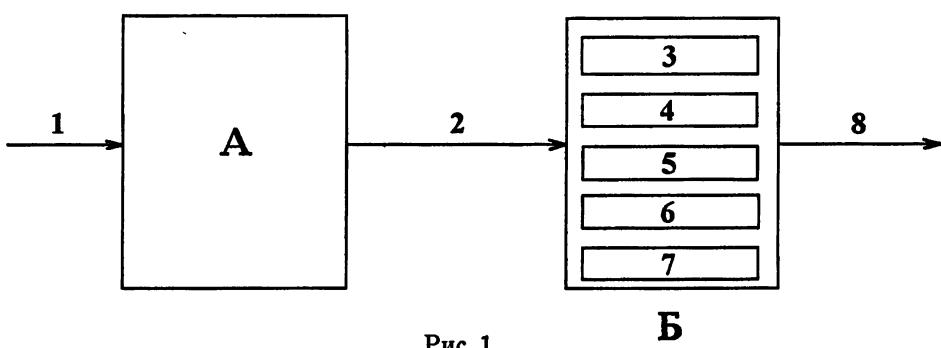


Рис. 1.

Блок А представляет собой модель среды распространения, блок Б содержит алгоритмы расчёта радиохарактеристик, 1 — входные данные радиомодели, 2 — сформированные на основе банка данных А параметры

тры среды для расчёта радиохарактеристик на конкретных трассах, 3 — подпрограмма расчёта коэффициентов молекулярного поглощения, 4 — соответствующая подпрограмма расчёта коэффициента преломления радиоволн, 5 — подпрограмма расчётов коэффициентов ослабления радиоволн в туманах, дымках, облаках, дождях, 6 — блок расчёта суммарного коэффициента ослабления, 7 — подпрограмма расчёта интегральных радиохарактеристик, 8 — выходные данные.

Входные данные вводятся с терминала по запросу в процессе функционирования программы. Значения выходных данных выводятся на экран монитора.

2. Входные параметры модели и банк метеорологических данных. Общими входными данными радиомодели являются: несущая частота сигнала, признак поляризации радиоволн, угол места трассы, высота расположения приёмника, сведения о наилучшии и параметрах гидрообразований в атмосфере (метеорологическая дальность видимости дымки или тумана, формы и толщины облаков, интенсивность дождей). Кроме того, для модели 1 задаются приземные значения температуры, давления и удельной влажности, а для модели 2 — географическая широта и сезон.

В модели 1 высотные профили метеоэлементов (температуры и удельной влажности) задаются соотношениями оптимальной статистической экстраполяции [6]:

$$f^\circ(h) = \bar{f}(h) + r_{ff}(h, h_0) \frac{\sigma_f(h)}{\sigma_f(h_0)} [f(h_0) - \bar{f}(h_0)]. \quad (1)$$

В (1) черта сверху обозначает использование средних значений, $f(h_0)$ — текущие значения метеоэлементов на начальной высоте трассы h_0 . Среднеквадратичная погрешность статистической экстраполяции (1) метеоэлемента $f^\circ(h)$ на высоте h составляет:

$$\sigma_f^\circ = \sigma_f(h) \sqrt{1 - [r_{ff}(h, h_0)]^2}. \quad (2)$$

В (1), (2) $\sigma_f(h)$ — среднеквадратичные климатические вариации метеоэлементов, r_{ff} — коэффициенты корреляции.

Средние значения и среднеквадратичные отклонения метеоэлементов, также как и высотные зависимости их коэффициентов корреляции залагавременно рассчитывались по результатам аэрологического зондирования атмосферы в умеренных широтах ЕТР. При расчёте этих величин объём метеоданных выбирался, с одной стороны, из условия существенного уменьшения статистической зависимости результатов, а с другой — из условия необходимости исключения нестационарности процесса при возможном влиянии долгопериодических изменений климата. Интервал

временной корреляции (по уровню 0,7) для влажности и температуры составляет $\sim 20\text{--}30$ часов [7]. Второму условию удовлетворяет выборка данных, получаемых в течение 3–4 лет. По этим причинам сезонная выборка аэрологических данных в настоящей работе составляла ~ 100 реализаций. Погрешности коэффициентов корреляции σ_r , из-за ограниченности объема выборки связаны с истинными значениями оцениваемых выборочных коэффициентов корреляции r и с объемом выборки M соотношением [8]:

$$\sigma_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{M - 1}}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что для значений $r \geq 0,85$, которые и представляют наибольший практический интерес, реализуются малые погрешности $\sigma_r \leq 0,03$.

В метеорологической литературе в качестве критерия независимости реализаций часто используется уровень более низкой корреляции (практически $r \sim 0$). В этом случае временной интервал выборки составляет $\sim 1,5\text{--}3$ суток [7]. Из анализа структурных функций $D_X(t)$ следует, что характерное время t_0 , при котором прекращается рост $D_X(t)$, составляет $\sim 4\text{--}5$ суток [9]. Использование подобных временных масштабов оправдано, в первую очередь, в задачах прогноза погоды. Выборки метеоданных с интервалами $\sim 1\text{--}2$ суток приводят к близким статистическим связям радиохарактеристик по сравнению с аналогичными расчётом для указанных выше больших временных интервалов. Атмосферное давление в модели 1 вычисляется по барометрической формуле реальной атмосферы.

В моделях [5] высотные зависимости температуры и давления представлены в виде таблиц до высот ~ 110 км. В программе LED использовались соответствующие зависимости до высот ~ 30 км. Высотная зависимость влажности, представленная в [5] в виде табличной функции до высот $H \approx 8\text{--}10$ км, дополнялась экспоненциальными высотными профилями удельной влажности до уровня $h = 16$ км, а далее удельная влажность считалась постоянной до высот h_Φ фотодиссоциации водяного пара:

$$q(h) = \begin{cases} q_H \exp[-\alpha(h - H)], & H < h \leq 16 \text{ км} \\ q_{16}, & 16 \text{ км} < h \leq h_\Phi \end{cases} \quad (4)$$

В (4) параметр α принимался равным $0,32 \text{ км}^{-1}$.

В банк метеорологических данных также входят модели гидрообразований — дымок, туманов, облаков и дождей. В качестве модели тумана и дымки в программе используется однородный по высоте, протяжённый (включающий протяжённость наклонной трассы) слой с водностью W , связанной с метеорологической дальностью видимости S_m соотношением:

$$W = aS_m^{-b}. \quad (5)$$

В [10] на основе анализа ряда экспериментальных результатов сделан вывод об отсутствии в настоящее время единого мнения о значениях коэффициентов a и b в зависимости (5). В последнее время (см. [10, 11]) чаще используются значения $a = 0,0118$ и $b = -1,15$, величина S_m в (5) выражается в км, W — в г/м³. В модели используются указанные коэффициенты. Высота слоя тумана и дымки полагается равной 0,25 км.

В программе задействованы модели четырёх форм облаков: слоистых (St) и слоисто-кучевых (Sc), слоисто-дождевых (Ns) и кучевых мощных (Cu cong). Нижние высоты облаков первых трёх форм, зависимости их водности от температуры нижней границы брались в соответствии с данными, приведёнными в [12]. Толщины этих облаков составляют соответственно 0,7 км (St, Sc) и 1,5 км (Ns). Водность облаков Cu cong в интервале температур их нижней границы $-10^\circ\text{C} \leq t_{\text{нг}} \leq 20^\circ\text{C}$ вычисляется по данным номограммы [13], которая представлена в программе в виде аппроксимационных формул. Толщина облаков этого типа изменяется в пределах 0,5–6,5 км.

Дождь упрощённо моделируется слоем с высотой H_d и характеризуется интенсивностью I (в программе $I \leq 150$ мм/ч), которая является параметром задачи. Для определения высоты дождя H_d использовались те же алгоритмы, которые были использованы и в [4]. Существуют модели дождя и более детально учитывающие его пространственную структуру (обзор таких моделей выполнен, в частности, в [10]). Подобная детализация, с одной стороны, усложняет модели, а с другой, даже она не учитывает ряд специфических факторов, которые могут оказаться существенными при количественном определении характеристик распространения радиоволн (см., например, [14, 15]). Использованная в работе упрощённая модель дождя, по нашему мнению, является всё же достаточной для оценок его влияния на распространение радиоволн и даёт представление, по крайней мере, о верхних пределах соответствующих эффектов.

3. Алгоритмы расчёта радиохарактеристик. При построении модели использовались как общепринятые (для расчёта коэффициентов преломления радиоволн и интегральных характеристик), так и дискутируемые в настоящее время алгоритмы. В последнем случае внимание акцентировалось на физическом обосновании использования соответствующих формул. К дискутируемым вопросам до сих пор относятся выражения для коэффициентов молекулярного поглощения основных атмосферных газов, зависимость ослабления радиоволн от интенсивности дождей, выбор параметров релаксационных моделей диэлектрических свойств воды, которые необходимы для описания радиохарактеристик гидрометеоров, и т.п. Кратко остановимся на перечисленных проблемах.

К проблемам описания молекулярного поглощения, которое полностью определяет ослабление микрорадиоволн в ясной атмосфере, относится устранение расхождения между теорией и экспериментом в окнах про-

зрачности основных газовых компонентов — водяного пара и кислорода, включая описание нелинейной зависимости поглощения влажным воздухом от плотности водяного пара. В последнее время к этой проблеме добавилось и описание поглощения в полосе O_2 , центрированной к длине волны $\lambda = 5$ мм (частота 60 ГГц), которая включает более сорока перекрывающихся при давлениях $P \geq 100$ мм рт. ст. спектральных линий. Этому обстоятельству способствовали тщательные экспериментальные исследования [16] поглощения O_2 в лабораторных условиях в диапазоне частот 49–67 ГГц с шагом по частоте 0,1 ГГц при давлениях 57–760 мм рт.ст. в температурном интервале 279–327 К.

Общее ослабление радиоволн по трассе в программе LED вычисляется путём интегрирования суммарного коэффициента ослабления радиоволн по высоте h :

$$\Gamma = \int_{h_0}^H \frac{\gamma(h)dh}{\sqrt{1 - (n_0 r_0 / nr)^2 \sin^2 \theta}}, \quad [\text{дБ}]. \quad (6)$$

В (6) коэффициент ослабления радиоволн рассчитывается по формуле :

$$\gamma = \gamma_{\text{вп}} + \gamma_{O_2} + \gamma_{\text{об,т}} + \gamma_{\text{д}}, \quad (7)$$

где $\gamma_{\text{вп}}$ — коэффициент поглощения водяного пара, γ_{O_2} — коэффициент поглощения молекулярного кислорода, $\gamma_{\text{об,т}}$ — коэффициент ослабления радиоволн дымками, туманами и облаками, $\gamma_{\text{д}}$ — коэффициент ослабления радиоволн дождём, θ — зенитный угол трассы, n — показатель преломления, $n_0 = n(h = 0)$, радиус Земли $r_0 = 6370$ км, текущий радиус $r = r_0 + h$.

Первоначально существовавшее расхождение между теорией и экспериментом в окнах прозрачности водяного пара, которое достигало 2–3 раз, не было устранено полностью, хотя и было уменьшено путём использования кинетического уравнения вместо формы линии Van Флека–Вайскопфа и уточнённых из эксперимента ширин спектральных линий [17]. Из-за отсутствия удовлетворительной количественной теории молекулярного поглощения [18] для практических расчётов поглощения и излучения радиоволн атмосферным водяным паром используются численные модели, содержащие эмпирические поправки. К настоящему времени наиболее широкое распространение получили модели [3, 19], которые учитывают уверенно регистрируемый в экспериментах последнего времени компонент поглощения, обладающий квадратичной зависимостью от давления (плотности) водяного пара и сильной отрицательной зависимостью от температуры.

Следует отметить, что в экспериментальных исследованиях поглащающих свойств водяного пара, проводившихся в конце 60-х годов и в первой половине 70-х годов не всегда выявлялась нелинейная зависимость атмосферного поглощения от плотности ρ паров H_2O . Однако уже в первом

лабораторном эксперименте [20] (рабочие частоты $\nu \sim 18\text{--}40$ ГГц) нелинейная зависимость поглощения влажным воздухом от ρ была зарегистрирована и количественно оценена. Здесь мы не касаемся природы этой нелинейной зависимости* и при её описании целиком исходим из экспериментальных результатов [20–24].

Один из использованных в модели алгоритмов расчёта коэффициента поглощения водяного пара $\gamma_{\text{вл}}$ приведён в [18]. В данной модели он подвергся минимальной ревизии: полуширины спектральных линий водяного пара в целях единообразия их описания с [25] при текущих атмосферных условиях вычислялись по формуле:

$$(\Delta\nu/c)_i = 0,33 \cdot 10^{-4} [\Delta\nu_{f_i}^0 P(300/T)^{0,7} + \Delta\nu_{g_i}^0 e(300/T)^{0,9}], \quad [\text{см}^{-1}]. \quad (8)$$

В (8) для линии $5_{-1} - 6_{-5}$ ($i = 1$) — $\Delta\nu_{f_1}^0 = 3,73$ МГц/мм рт. ст. и $\Delta\nu_{g_1}^0 = 17,8$ МГц/мм рт. ст., и для линии $2_2 - 3_{-2}$ ($i = 2$) — $\Delta\nu_{f_2}^0 = 3,90$ МГц/мм рт. ст. и $\Delta\nu_{g_2}^0 = 20,5$ МГц/мм рт. ст.

Достоинство алгоритма [18, 19] состоит в том, что он содержит полное описание минимального количества линий (всего двух). В нём использована форма линии по кинетическому уравнению, которая представляется в настоящее время наиболее обоснованной с физической точки зрения для изолированных спектральных линий, и коэффициенты аппроксимационных нерезонансных членов, описывающих линейное и нелинейное по влажности поглощение, скорректированы на экспериментальные данные. Область применимости алгоритма [18, 19] для $\gamma_{\text{вл}}$: $\lambda \geq 0,15$ см (частоты $\nu \leq 200$ ГГц). Модель [3] построена на базе экспериментальных данных [21, 26, 27], полученных в 80-х годах.

Некоторые используемые аппроксимации коэффициентов поглощения H_2O противоречат физическим представлениям о динамике квантовых переходов в микроволновом диапазоне. Так, теории поглощения H_2O , развитые в [28, 29], с помощью которых устраняется расхождение между теоретическими и экспериментальными коэффициентами в окнах прозрачности, основаны на учёте длительности молекулярных соударений в рамках классических представлений. Однако в радиодиапазоне молекулярные соударения имеют диабатический характер и в процессе одного соударения происходит большое количество квантовых переходов. В итоге молекулярные соударения характеризуются эффективным временем соударений, которое меньше кинетического на несколько порядков, т.е. в число раз происходящих квантовых переходов. Учёт же эффективного времени соударений не устраивает существующего расхождения между теорией и измерениями поглощения в окнах прозрачности.

В подходах к построению полуэмпирических моделей поглощения водяного пара, которые развиваются в последнее время, проявляется тен-

* В настоящее время существуют альтернативные взгляды на данную проблему.

денция учёта в качестве базовых экспериментальных данных только тех измерений, которые проводились при надёжно контролируемых параметрах атмосферы. В [25] была предложена иная эмпирическая формула для избыточного (по отношению к вычисленному теоретически традиционным способом) поглощения в атмосферных парах воды, предназначенная для компенсации несоответствия между теоретическими и экспериментальными данными в широкой спектральной области $\nu \leq 3000$ ГГц, простирающаяся почти до центра вращательной полосы H_2O . Впоследствии [30] алгоритм [25] был уточнён с учётом выполненных в НИРФИ новых лабораторных [24, 31] и полевых измерений.

В соответствии с [30]:

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{вп}} &= \gamma_T + \gamma_{\text{изб}}, \\ \gamma_T &= A \sum_{i=1}^{14} (SF_i) + B\nu^2 e(P_c + 5e)(300/T)^3, \\ S &= S^0 e(300/T)^{3.5} \exp[\tilde{b}(1 - (300/T))], \quad [\text{см}^{-2}] \\ \gamma_{\text{изб}} &= C\nu^2 e P_c (300/T)^3 + D(\nu^2/(\nu + 330)) e^2 (300/T)^{12}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) γ_T — теоретический коэффициент поглощения, вычисляемый приближённым образом, $\gamma_{\text{изб}}$ — избыточное поглощение (эмпирическая поправка), ν — частота в ГГц. Конкретный вид F и численные значения коэффициентов A, B, C, D определяются тем, какую форму спектральной линии использовать при описании вращательного спектра H_2O . Выше уже шла речь о предпочтительности формы линии по кинетическому уравнению. С другой стороны, сдвиг резонансной частоты наиболее длинноволновой линии водяного пара $5_{-1} - 6_{-5}$, который экспериментально наблюдался в [20], удовлетворительно воспроизведится контуром Ван Флека–Вайскопфа и не описывается контуром по кинетическому уравнению*. Это обстоятельство предопределило выбор автором [25, 30] в качестве структурного фактора формы линии Ван Флека–Вайскопфа. Такое несоответствие принятого в [25, 30] описания спектра H_2O общим теоретическим воззрениям на форму спектральной линии допущено лишь для формального согласования всех выбранных в качестве опорных при построении полуэмпирической модели H_2O экспериментальных данных. Хотя сам по себе факт использования для этой цели формы линии Ван Флека–Вайскопфа можно рассматривать в качестве фактора, привлекающего более пристальное внимание к прежде всего экспериментальным результатам [20] и даже, возможно, стимулирующего их пересмотр.

*Сдвиги резонансных частот вращательных спектров не интерпретируются в рамках диабатических молекулярных соударений, которые имеют место в микроволновом диапазоне. Г. Либе [3] при построении полуэмпирической модели молекулярного поглощения H_2O не принимал во внимание результаты [20], считая их или устаревшими, или содержащими систематические ошибки.

Для описания спектра H_2O с формой линии по Ван Флеку–Вайскопфу:

$$F_i = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\nu}{\nu_i} \right)^2 \left[\frac{\Delta\nu_i}{(\nu - \nu_i)^2 + \Delta\nu_i^2} + \frac{\Delta\nu_i}{(\nu + \nu_i)^2 + \Delta\nu_i^2} \right], \quad (10)$$

полуширина $\Delta\nu_i$ описывается формулой (8), $A = 0,130 \cdot 10^8$; $B = 0,6 \cdot 10^{-9}$; $C = (0,3 \pm 0,03) \cdot 10^{-8}$; $D = (0,65 \pm 0,13) \cdot 10^{-4}$.

Сопоставление расчётов коэффициентов поглощения водяного пара по формулам [18, 19] и (9), (10) при стандартных атмосферных условиях свидетельствует, как и следовало ожидать, о заметном расхождении результатов в области резонанса $\lambda \sim 1,35$ см и об их не очень существенной ($\leq 0,1$ дБ/км) для практических целей разнице вне этой спектральной области. Однако отмеченная разница становится ощутимой при расчётах интегрального ослабления на наклонных трассах, особенно для малых углов места $\varphi \leq 10^\circ$ (см. раздел 4). Сравнение ряда моделей молекулярного поглощения водяного пара, выполненное в [32], показало, что на данном этапе нельзя отдать предпочтение (если речь идёт об относительных точностях $\gamma_{\text{вп}} \sim 1\text{--}2\%$) в целом какой-то одной модели — в определённых спектральных областях и в определённых регионах более близкими между собой оказываются одни модели, а при других условиях — другие. По этой причине в программе LED использованы описания $\gamma_{\text{вп}}$ как согласно [18, 19], так и согласно [25, 30]. При использованных описаниях приняты во внимание результаты экспериментальных исследований [33] об отсутствии аномалий в атмосферном поглощении, о стабильности вращательного спектра мономерных молекул H_2O в области насыщения (в условиях тумана и т.п.), а также пренебрежимом влиянии больших водных кластеров и коротковолновой солнечной радиации на поглащающие свойства водяного пара.

Расчёты поглощения сантиметровых и миллиметровых радиоволн в молекулярном кислороде выполняются на основе теорий как простого суммирования спектральных линий O_2 (с учётом нерезонансного поглощения, обусловленного возмущёнными при соударениях диагональными матричными элементами магнитного дипольного момента), так и теорий, учитывающих интерференционные эффекты между спектральными линиями в полосе их перекрытия, центрированной к длине волны $\lambda \approx 5$ мм. Одной из первых теорий, которая учитывала перекрытие спектральных линий O_2 и была доведена до количественных соотношений, являлась теория Розенкранца [34]. Недавно была предложена модель J -диффузии [35], в которой также учитывается интерференция спектральных линий O_2 .

Сравнение коэффициентов поглощения O_2 по модели суммирования отдельных линий [17, 18] и интерференционным моделям [34, 35] с экспериментальными результатами [16] на частотах 59–63 ГГц выполнено в [36]. Получено, что в частотной области высокого поглощения экспериментальные данные лучше всего согласуются с моделью МРМ–93 (Microwave

Propagation Model-93 и модель [34], скорректированная по данным [16]). Модель J -диффузии неплохо описывает поглощение O_2 на частотах до $\nu \approx 61$ ГГц, но характеризуется более быстрым спаданием поглощения на других частотах. Модель суммирования при выбранных параметрах уширения спектральных линий O_2 является неудовлетворительной в рассматриваемом диапазоне, но близка к результатам, которые получаются с помощью других моделей на низких частотах ($\nu \leq 50$ ГГц), а также в области $\nu \sim 70\text{--}100$ ГГц и предпочтительнее в высокочастотном крыле поглощения. На основании изложенного для модели LED было выбрано синтезированное описание поглощения O_2 : использовалась модель МРМ-93 в области $\nu < 67$ ГГц и модель суммирования спектральных линий на более высоких частотах. На частоте $\nu = 67$ ГГц эти две модели дают практически совпадающие результаты.

Коэффициент ослабления таких гидрообразований как дымки, туманы и облака, которые характеризуются преобладанием мелких капель, определяется поглощением радиоволн и описывается рэлеевским приближением теории Ми:

$$\gamma_{06,t} = 10 \lg \tilde{\epsilon} (9\pi/5)(W/\lambda) \frac{\epsilon_2}{(\epsilon_1 + 2)^2 + \epsilon_2^2}, \quad [\text{дБ/км}]. \quad (11)$$

В (11) длина волны λ выражена в см, ϵ_1 и ϵ_2 — соответственно действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости воды, $\tilde{\epsilon}$ — основание натурального логарифма.

В связи с тем, что в настоящее время не удается построить строго квантовую теорию электродинамических свойств жидкой фазы воды, которая позволила бы получать расчётные значения ϵ_1 и ϵ_2 с достаточно высокой степенью точности, то создаются и совершенствуются полуэмпирические модели соответствующих параметров в релаксационной модели Дебая или модели Коула-Коула. Подробный обзор аппроксимационных формул 7 эмпирических моделей диэлектрических свойств воды выполнен в [37]. В соответствии с цитированной работой мы использовали для статической постоянной $\epsilon_0(T)$ и релаксационной длины волны $\lambda_s(T)$ следующие соотношения в рамках дебаевской релаксационной модели:

$$\begin{aligned} \epsilon_0(T) = & 87,74 - 0,4008(T - 273,15) + 9,398 \cdot 10^{-4}(T - 273,15)^2 + \\ & + 1,4 \cdot 10^{-6}(T - 273,15)^3, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\lambda_s(T) = 3,0[1,11 - 3,82 \cdot 10^{-2}(T - 273,15) + 6,938 \cdot 10^{-4}(T - 273,15)^2 + \\ + 5,096 \cdot 10^{-6}(T - 273,15)^3].$$

“Оптическая” постоянная диэлектрической проницаемости полагалась равной $\epsilon_\infty(T) = 4,9$ в рассмотренном интервале температур. Согласно [37], неопределенность в значении $\epsilon_\infty(T)$ достигает $\sim 20\%$.

Коэффициент ослабления радиоволн в дождях вычисляется по формуле, которая обычно используется в аналогичных расчётах:

$$\gamma_D = k_D I^\beta, \text{ [дБ/км]} \quad (13)$$

где интенсивность дождя выражена в мм/ч, а коэффициенты k_D и показатели степени β определяются соотношениями [10]:

$$k_D = [k_H + k_v + P_n(k_H - k_v) \cos^2 \varphi]/2, \quad (14)$$

$$\beta = [k_H \beta_H + k_v \beta_v + P_n(k_H \beta_H - k_v \beta_v) \cos^2 \varphi]/2k_D,$$

В (14) $P_n = -1$ для вертикальной, $P_n = +1$ для горизонтальной и $P_n = 0$ для круговой поляризации, φ — угол места трассы, индексы v относятся к вертикальной, а H — к горизонтальной поляризациям. Коэффициенты k_v , β_v , k_H , β_H приведены в [10, 38]. О порядках этих величин на характерных частотах диапазона можно судить по данным табл. 1.

Таблица 1

Параметры для расчёта коэффициентов ослабления радиоволн в дождях.

$\nu, \text{ ГГц}$	k_v	β_v	k_H	β_H
10	$8,87 \cdot 10^{-3}$	1,264	$1,01 \cdot 10^{-2}$	1,276
50	$4,79 \cdot 10^{-1}$	0,868	$5,36 \cdot 10^{-1}$	0,873
100	1,06	0,744	1,12	0,743

По поводу расчётной формулы (13) заметим, что в последнее время в ряде экспериментальных работ (см., например, [15]) отмечалась неоднозначная связь между интенсивностью дождя и ослаблением сантиметровых–миллиметровых радиоволн (“гистерезисный” эффект), которая интерпретируется как проявление гравитационной и горизонтальной сепарации капель. Во время выпадения слабых продолжительных дождей встречаются и ситуации, когда на отдельных стадиях дождя связь между γ_D и I оказывается случайной, не подчиняющейся определённому закону. Изложенные обстоятельства пока не учитываются в существующих моделях распространения радиоволн. Поэтому в разделе 2 статьи нами и сделано замечание об оценочном характере влияния дождя.

Остальные использованные алгоритмы для расчёта радиохарактеристик имеют общепринятый вид. Так, при расчёте времени группового запаздывания сигнала приведённый показатель преломления атмосферных газов вычисляется по формуле [39]:

$$N_A = (n - 1)10^6 = K_1 P_e/T + K_2 e/T + K_3 e/T^2, \quad (15)$$

а приведённый показатель преломления жидкокапельной фракции облаков выражается через набег фазы сигнала $d\Psi/dl$:

$$N_{\text{обл}} = c/\omega \cdot d\Psi/dl, \quad (16)$$

где

$$\frac{d\Psi}{dl} = \frac{3\pi}{10\rho_{\text{в}}\lambda} W \frac{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_1 + 2) + \varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1 + 2)^2 + \varepsilon_2^2},$$

$\rho_{\text{в}}$ — плотность воды.

Расчёты вертикальной рефракции радиоволны выполняются по соотношению, являющемуся следствием теоремы Лапласа на углах места $\varphi \geq 40^\circ$, и по полной интегральной формуле на углах $\varphi < 40^\circ$ [40].

Яркостная температура атмосферы вычисляется без учёта рассеяния радиоволн на гидрометеорах и поэтому соответствующие значения рассматриваются как оценочные величины сверху.

4. Примеры расчёта радиохарактеристик. Рассмотрим два примера: один относится к модели 1, а другой — к модели 2. Частоты сигналов в обоих случаях выбраны в относительных окнах прозрачности атмосферы.

Таблица 2

Входные данные	Выходные данные
Пример 1	
M1; $T_0 = 283$ К, $P_0 = 760$ мм рт.ст. $q_0 = 5$ г/кг, сезон лето, $\nu = 37,5$ ГГц, $\varphi = 90^\circ$, Облако N_s	$\Gamma_1 = 0,95$ дБ, $\Gamma_2 = 0,96$ дБ, $\Delta t_{\text{гр}} = 7,4 \cdot 10^{-15}$ мкс, $T_{\text{я1}} = 53,4$ К, $T_{\text{я2}} = 54,4$ К
Пример 2	
M2; 60° с.ш., лето, $\nu = 100$ ГГц, $\varphi = 10^\circ$, безоблачная атмосфера	$\Gamma_1 = 7,9$ дБ, $\Gamma_2 = 9,2$ дБ, $\Delta t_{\text{гр}} = 4,5 \cdot 10^{-14}$ мкс, $R = 6'9''$, $T_{\text{я1}} = 234,8$ К, $T_{\text{я2}} = 247,0$ К

В таблице 2 Γ_1 — значения ослабления при описании поглощающих свойств водяного пара, согласно [19], Γ_2 — значения ослабления при описании поглощающих свойств водяного пара, согласно [30], $T_{\text{я1}}$ и $T_{\text{я2}}$ — яркостные температуры, соответствующие Γ_1 и Γ_2 .

О достоверности результатов можно судить, например, по сравнению значений интегрального ослабления радиоволн, которые приведены в качестве выходных данных рассматриваемой модели, с аналогичными величинами, которые оцениваются по физическим методикам. Последние достаточно надёжно апробированы экспериментально.

Так, в примере 1 имеем интегральное молекулярное поглощение [41]:

$$\gamma_{\text{H}_2\text{O}}(h=0) \cdot H_{\text{H}_2\text{O}} + \gamma_{\text{O}_2}(h=0) \cdot H_{\text{O}_2} \approx 0,3 \text{ дБ}, \quad (17)$$

а ослабление радиоволн в облаках с учётом данных рис. 2 (8.3.5.4) [12] оценивается

$$\Gamma_{\text{обл}} \approx \gamma_{\text{обл}} H_{\text{обл}} \approx 0,6 \text{ дБ}.$$

Суммарное значение $\Gamma \approx 0,9$ дБ хорошо согласуется со значением, приведённым в табл. 2.

5. Ограничения модели. В изложенной компьютерной модели вычисляются регулярные составляющие радиохарактеристик для сферически-слоистой атмосферы. Модели облачных образований [12] согласовывались с вертикальной температурной стратификацией атмосферных моделей [5]. Как следствие этого согласования в некоторых моделях [5] допускается присутствие не всех из перечисленных в разд. 2 форм облаков. Так, полагается, что в летней модели 45° с.ш. и зимней модели 30° с.ш. присутствуют облака только типа Cu cong, а в модели 60° с.ш. (зима) — облака первых трёх форм (St, Sc, Ns). Также считается, что в зимней модели 75° с.ш. облака практически отсутствуют из-за вымерзания влаги.

В реализованной программе не учитывается поглощение радиоволн малыми газовыми составляющими атмосферы, некоторые из которых в естественных условиях (например, озон) дают определённый вклад в интегральное ослабление в узких областях резонансов. Однако этот вклад становится несущественным, если приём сигналов осуществляется более широкополосной аппаратурой ($\delta\nu \geq 100$ МГц).

Выше отмечалось, что яркостная температура атмосферы вычисляется без учёта рассеяния радиоволн на гидрометеорах.

Расчёты для M1 выполняются для расположения приёмника на поверхности Земли. Расчёты для M2 выполняются для расположения приёмных устройств на поверхности Земли и в приподнятом варианте (высоты $H_P \leq 10$ км).

В заключение — о тенденциях развития моделей распространения радиоволн. Уже краткий перечень ограничений в исходных моделях среды распространения и алгоритмах расчёта характеристик свидетельствует о необходимости расширения условий применения моделей распространения радиоволн. Это расширение должно коснуться условий распространения не только на наклонных трассах, но и в приземном слое, учёта дополнительных погодных факторов (снегопадов, града и т.п.), совершенствования моделей облачных образований и дождей, развития физических представлений о влиянии естественных и антропогенных возмущений на характеристики распространения, включения в модель учёта флуктуационных явлений и т.д.

Авторы глубоко признательны В. А. Алимову за постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зиничева М. Б., Наумов А. П. — В сб.: Тезисы докладов ХУШ Все-российской конференции по распространению радиоволн. — М.: ИРЭ РАН, 1996. Т. 2. С. 449.
2. Макаров Г. И., Новиков В. В., Рыбачек С. Т. Распространение радиоволн в волноводном канале Земля–ионосфера и в ионосфере. — М.: Наука, 1993. - 151 с.
3. Liebe H.J. //Int. J. Infrared and Millimeter Waves, 1989. V.10. № 6. P.631.
4. Пожидаев В. Н., Динтельманн Ф. //Радиотехника и электроника, 1994. Т. 39. № 8–9. С. 1233.
5. U.S.Standard Atmosphere Supplements, 1966.
6. Гандин Л. С. — В сб.: Труды ГГО, 1960. Вып. 114. С. 75.
7. Татарская М. С. — В сб.: Труды ГГО, 1973. Вып. 308. С. 110.
8. Статистическая структура метеорологических полей /Под ред. Л. С. Гандина, В. И. Захариева, Р. Целнаи. — Будапешт, 1976. - 365 с.
9. Гайкович К. П. — В сб.: Тезисы докладов III Всесоюзной конференции по перспективным методам планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов. Ч. II — М.: МЭИ, 1988. С. 87.
10. Пожидаев В. Н. Докторская диссертация. — М.: ИРЭ РАН, 1989. - 367 с.
11. Бартенева О. Д., Полякова Е. А. //Изв. АН СССР. ФАО, 1965. Т. 1. № 2. С. 193.
12. Облака и облачная атмосфера. — Справочник /Под ред. И. П. Мазина, А. Х. Хргиана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1989. - 647 с.
13. Войт Ф. Я., Мазин И. П. //Изв. АН СССР. ФАО, 1972. Т. 8. № 11. С. 1166.
14. Zhevakin S.A. — In: Proc. of Int. Symp. "Physics and Engineering of Millimeter and Submillimeter Waves". — Kharkov: IRE NASU, 1994. V. 3. P. 610.
15. Катков В. Ю., Свердлов Б. А., Фуршев Н. И. //Радиотехника и электроника, 1996. Т. 41. № 2. С. 171; Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1997. Т. 40. № 5. С. 626.
16. Liebe H. J., Rozenkranz P. W., Hufford G. A. //J. Quant. Spectr. Rad. Transfer, 1992. V. 48. P. 629.
17. Жевакин С. А., Наумов А. П. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1967. Т. 10. № 9–10. С. 1213.

18. Наумов А. П. — В сб.: Труды I-ой Всесоюзной школы-симпозиума по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. — М.: ИРЭ АН СССР, 1983. С. 21.
19. Борин В. П., Наумов А. П. //Радиотехника и электроника, 1979. Т. 24. № 1. С. 44.
20. Becker G. E., Autler S. H. //Phys. Rev., 1946. V. 70. № 5. P. 300.
21. Liebe H. J. //Frequenz, 1987. V. 41. № 1–2. P. 31.
22. Furashov N. I., Katkov V. Yu. //ICAP 89. IEE Conf. Publ., 1989. № 301. P. 310.
23. Bauer A., Godon M. //J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer, 1991. V. 46. № 3. P. 221.
24. Furashov N. I., Katkov V. Yu. — In: Abstract of II-nd Inter. Conf. on Millimeter Wave and Far-Infrared Technology. — China, 1992. P. 398.
25. Катков В. Ю. — В сб.: Тезисы докладов III Всесоюзной школы по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. — Харьков: ИРЭ АН УССР, 1989. С. 28.
26. Furashov N. I., Katkov V. Yu., Ryadov V. Ya. //Int. J. Infrared and Millimeter Waves, 1984. V. 5. № 7. P. 971.
27. Furashov N. I., Katkov V. Yu. //Int. J. Infrared and Millimeter Waves, 1985. V. 6. № 8. P. 751.
28. Титов С. В., Калмыков Ю. П. //Радиотехника и электроника, 1989. Т. 33. № 1. С. 13.
29. Yasmin K., Armstrong R. L. // Appl. Optics, 1990. V. 29. № 13. P. 1979.
30. Катков В. Ю. Кандидатская диссертация. — Н. Новгород: НИРФИ, 1995. - 177 с.
31. Свердлов Б. А., Фурашов Н. И. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1991. Т. 34. № 1. С. 3.
32. Snider J. B. — In: Microwave Radiometry and Remote Sensing of the Environment /Ed. D. Solimini. — Netherlands: Utrecht, 1995. P. 13.
33. Катков В. Ю., Фурашов Н. И. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1996. Т. 39. № 4. С. 483.
34. Rosenkranz P. W. //IEEE Trans. on Antennas and Propag., 1975. V. AP-23. № 4. P. 498.
35. Титов С. В., Калмыков Ю. П. //Радиотехника и электроника, 1991. Т. 36. № 12. С. 2281.
36. Гайкович К. П., Зиничева М. Б., Китай Ш. Д., Маркина Н. Н., Наумов А. П., Троицкий А. В. — В сб.: Физика микроволн. — Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996. Т. 1. С. 143.
37. Шарков Е. А. //Исследование Земли из космоса, 1995. № 6. С. 18.
38. Пожидаев В. Н., Соколов А. В. //Препринт ИРЭ АН СССР, 1987. № 1(460). - 66 с.
39. Бин Б. Р., Даттон Е. Дж. Радиометеорология. — Л.: Гидрометеоиздат, 1971. - 363 с.

40. Колосов М. А., Шабельников А. В. Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры и Марса. — М.: Советское радио, 1976. - 220 с.
41. Наумов А. П., Зиничева М. Б. //Радиотехника и электроника, 1980. Т. 25. № 5. С. 919.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
1 августа 1997 г.

**THE PHYSICAL ASPECTS OF THE CENTIMETER AND MILLIMETER
RADIO WAVE PROPAGATION MODEL ALONG INCLINED PATHS IN
THE EARTH'S ATMOSPHERE**

M. B. Zinicheva, A. P. Naumov

The physical aspects of the centimeter and millimeter radio wave propagation along inclined paths in the earth's atmosphere model development are presented.

The model allows us to compute the value of integral attenuation in the 3–100 GHz frequency range, signal group time delay, radio wave refraction and radio brightness for certain areas on the basis of standard atmosphere models and optimal statistical extrapolation of the nearground meteoelement values.

УДК 52-77.

О ПРОЗРАЧНОСТИ ПОЛЯРНОЙ АТМОСФЕРЫ ДЛЯ МИЛЛИМЕТРОВОЙ РАДИОАСТРОНОМИИ

Ю. Ю. Куликов, В. Г. Рыскин

Обсуждается обнаруженное расхождение между экспериментальными и расчётыми значениями ослабления в водяном паре, которое наблюдается при достаточно низких (порядка -30°C) температурах в тропосфере. Отмечена высокая корреляция избыточного ослабления с квадратичной компонентой влажности тропосферы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поиски районов Земли с высокой прозрачностью атмосферы для целей миллиметровой и субмиллиметровой астрономии привели к идеи использования внутренконтинентальной части Антарктиды как места, наиболее удобного для построения здесь радиотелескопов [1–4]. По данным авторов работ [1, 5] среднемесячные значения количества “осажденной воды” W зимой не превышают 0,2 мм для станции Восток ($78,5^{\circ}$ ю.ш., высота над уровнем моря 3500 м) и 0,3 мм для станции “Амундсен–Скотт” (Южный полюс, высота над уровнем моря 2800 м), а минимальные значения W достигали 0,11 мм. Расчёты атмосферного ослабления [1] свидетельствуют, что в этих условиях становятся прозрачными не только коротковолновые миллиметровые, но и обычно труднодоступные субмиллиметровые “окна” на 460 и 360 мкм. Это обстоятельство должно быть весьма благоприятным, в частности, для исследования с поверхности Земли спектра и мелкомасштабной анизотропии излучения космического фона. Настоящая статья преследует цель обратить внимание на несоответствие реальной прозрачности полярной атмосферы (в условиях низких значений температуры и влажности) прогностическим расчётам.

Данные о прозрачности атмосферы на частоте 100 ГГц (длина волны 3 мм) были получены во время комплексного исследования озонаового слоя в Арктике в рамках международной экспедиции на о. Хейса (Земля Франца–Иосифа, $80,5^{\circ}$ с.ш.) в период с октября 1988 года по март 1989 года.

2. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

В микроволновых наблюдениях прозрачности полярной атмосферы был использован гетеродинный анализатор спектра диапазона

Ю. Ю. Куликов, В. Г. Рыскин

1479

частот 80–120 ГГц с шумовой температурой 5000 К при однополосном режиме приёма. Антеннной спектрометра является длинный конический рупор, который обеспечивает на частоте 100 ГГц ширину главного лепестка диаграммы направленности (на уровне 3 дБ) около 3°. Подробное описание принципов построения спектральной аппаратуры миллиметрового диапазона длин волн содержится в работе [6].

Характеристикой прозрачности атмосферы является её оптическая толщина в направлении зенита. В измерениях оптической толщины по собственному радиоизлучению атмосферы был использован метод вариации зенитного расстояния, известный в отечественной литературе как метод "разрезов" [7]. Он основан на сравнении эффективных температур излучения двух участков атмосферы при наблюдениях под разными углами места относительно излучения некоторой опорной области. Специальное коммутирующее устройство, расположенное перед неподвижной рупорной антенной спектрометра, позволяет последовательно регистрировать сигналы α_0 , α_1 и α_2 , пропорциональные соответственно эффективным температурам излучения "чёрного" тела, находящегося при температуре окружающего воздуха T_0 , и атмосферы в направлении зенитных углов θ_1 и θ_2 . В приближении изотермической модели атмосферы можно получить выражение для оптической толщины атмосферы τ в направлении зенита:

$$\tau = \frac{1}{\sec \theta_1 - \sec \theta_2} \ln \frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}. \quad (1)$$

Анализ используемого приближения, а также сопоставление с результатами измерений ослабления с помощью абсолютной калибровки позволяют определить погрешность метода "разрезов," которая не превышает 10%.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Прежде, чем обсуждать зависимость полного вертикального ослабления от температуры и влажности, остановимся кратко на общей характеристике прозрачности атмосферы в районе о. Хейса. Частыми событиями зимнего периода на архипелаге Земля Франца-Иосифа являются низовые метели. Низовые метели характеризуются малой вертикальной протяжённостью (десятка метров) и достаточной неоднородностью переносимой снежной массы. "Плотные" снежные образования, по-видимому, приводят к росту атмосферного ослабления. В качестве примера на рис. 1 приведена запись, сделанная с 18 по 20 ноября 1988 года, на которой отмечены два эпизода ослабления, по времени совпадающие с низовыми метелями, поглощение во время которых возрастало более, чем в 1,5 раза по сравнению с фоновым.

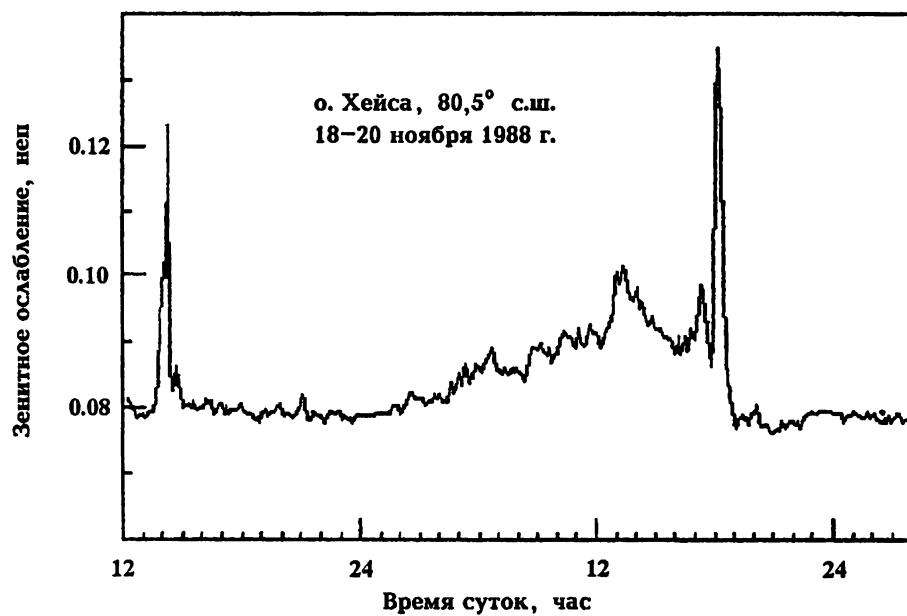


Рис. 1.

Иногда отмечались случаи “просветления” атмосферы, которые, по-видимому, следует связывать с эффектом рассеяния на ледяных иглах и инее, наличие которых регистрировалось в это время метеослужбой (см. рис. 2).

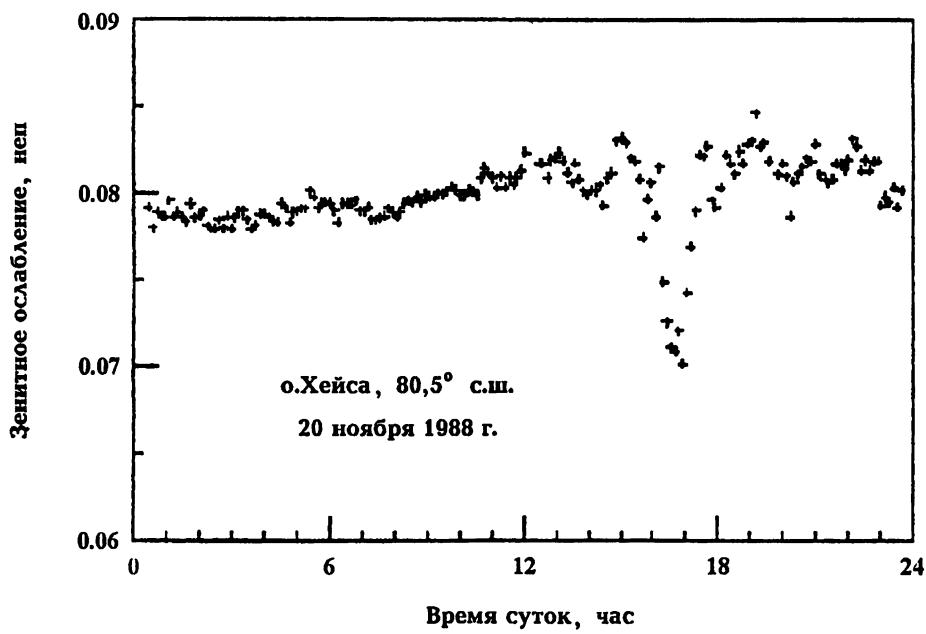


Рис. 2.

Отметим, что для полярных околополюсных районов характерными и продолжительными по времени являются осадки (при ясном небе) в виде ледяных кристаллов. Наличие ледяных кристаллов может существенным образом повлиять на ослабление (в виде рассеяния) миллиметровых волн и тем самым ухудшить качество радиоастрономических наблюдений. К числу интересных надо отнести и результат, полученный 19 октября 1988 года, который приведён на рис. 3.

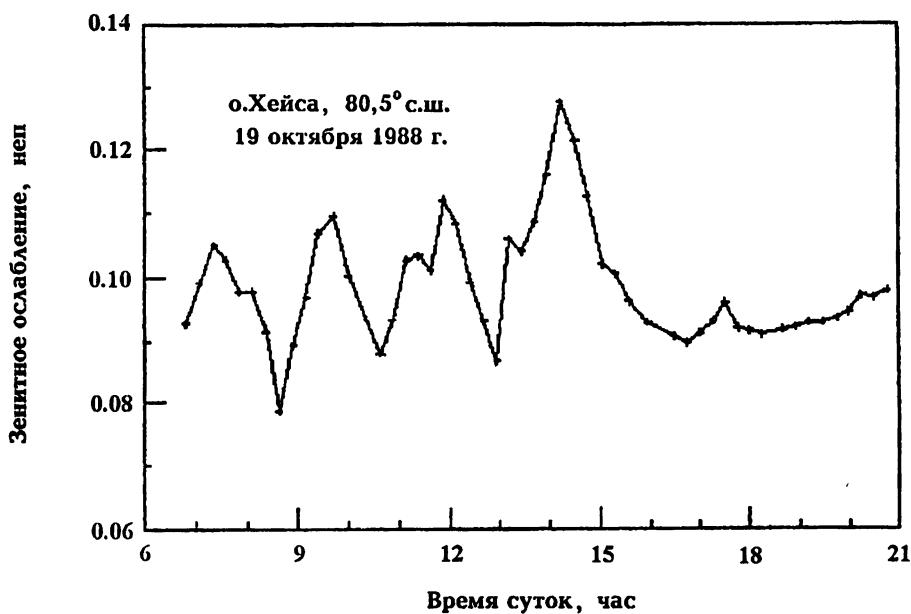


Рис. 3.

Видно, что в течение ~ 12 часов в атмосфере имели место колебания проэзрачности с периодом около 3 часов.

Для анализа связи между τ и W из всего массива данных наших наблюдений были отобраны усреднённые в течение часа результаты измерения атмосферного ослабления, привязанные по времени к моменту запуска аэрологического зонда (тип A – 22 – VII). Запуски зондов проводились три раза в сутки. Аэрологические данные содержали высотные профили температуры, влажности и давления. Максимальная высота полёта зонда находилась в пределах 25–30 км, однако выше 10 км количество водяного пара, как правило, составляло менее 10% от его общего содержания в атмосфере Земли (см. рис. 4).

Поэтому для вычисления количества осаждённой влаги W интегрирование по высоте ограничивалось десятью километрами. Характерным для зимней арктической тропосферы является наличие приземной инверсии как для влажности, так и для температуры (см. рис. 4 и 5).

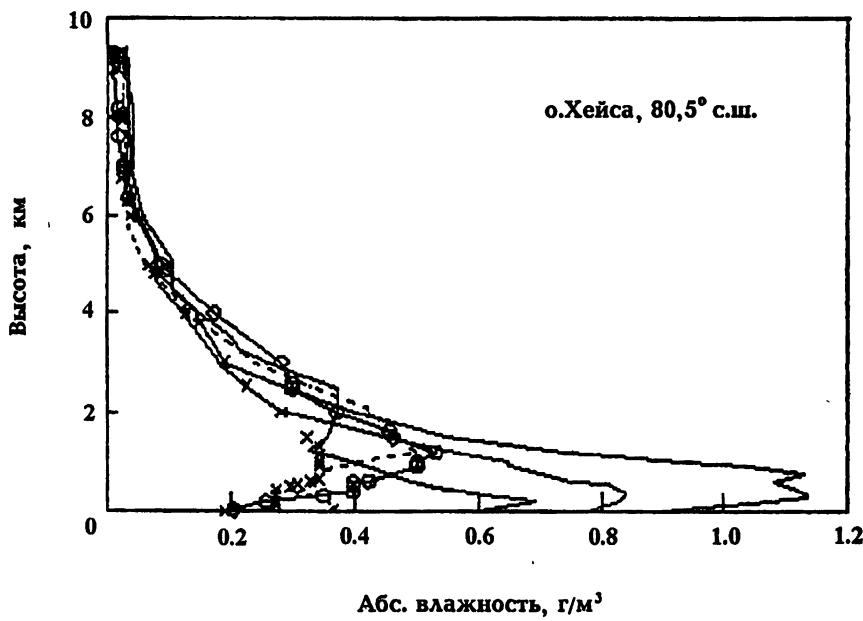


Рис. 4.

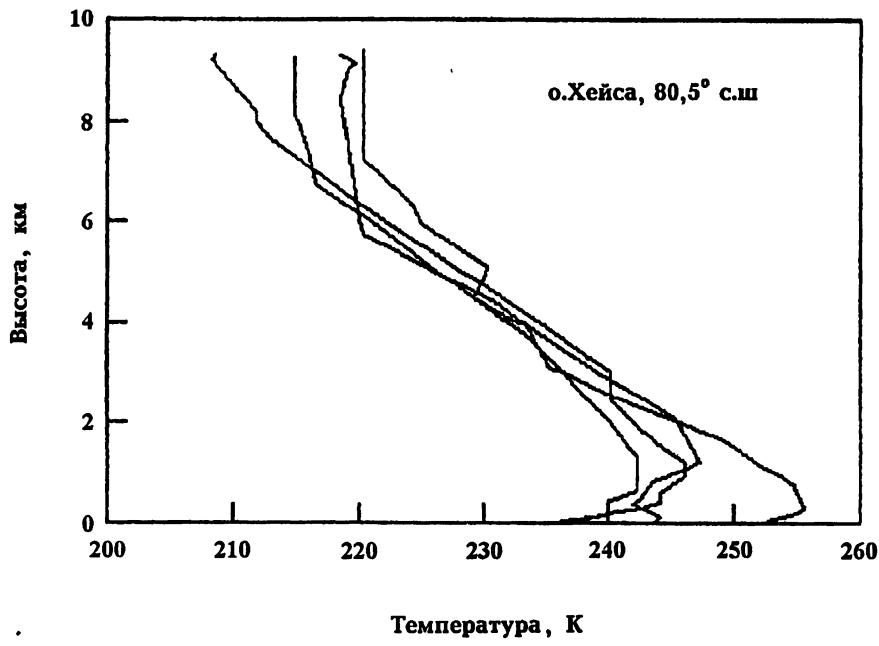


Рис. 5.

Нетрудно заметить, основная масса водяного пара заключена в слое 0–3 км. Как показывает расчёт, этот слой в значительной степени определяет прозрачность атмосферы как в миллиметровых, так и в субмиллиметровых “окнах.” Поэтому для характеристики условий измерений

в дальнейшем мы использовали величину средней температуры нижней тропосфера $T_{ср}$, которую рассчитывали по данным аэрологического зондирования в интервале высот 0–3 км. На рис. 6 представлены результаты измерений оптической толщины τ на частоте 100 ГГц и влагосодержания тропосферы W за весь период наблюдений.

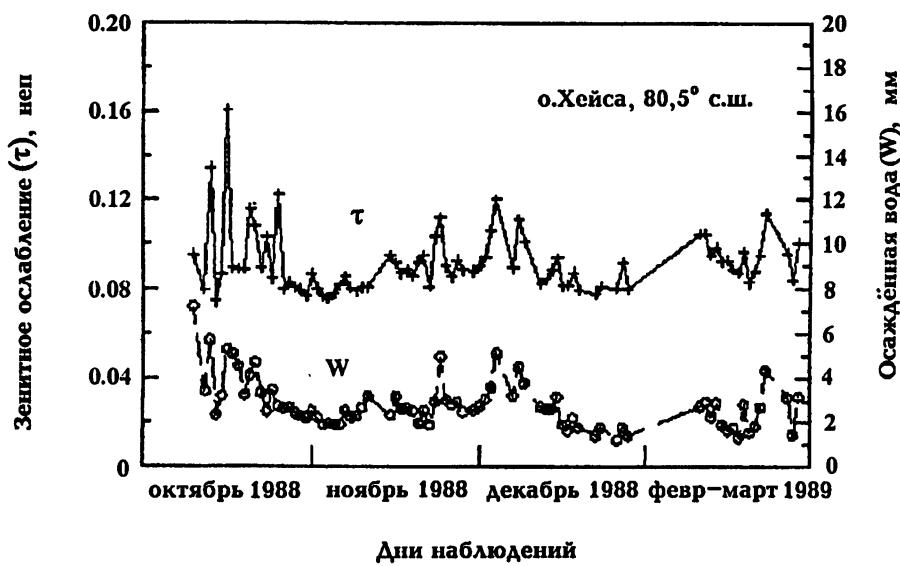


Рис. 6.

При обработке данных наблюдений нами было отмечено, что по мере уменьшения температуры и влажности тропосфера появляется расхождение между экспериментом и расчётом не только квантовомеханическим [8], но и полуэмпирическим расчётом Либе [9].

Наша частота зондирования 100 ГГц находилась в "окне" прозрачности атмосферы, расположенному между мультиплетом вращательных переходов молекулярного кислорода, частоты которого концентрируются в интервале 49–70 ГГц, и одиночным переходом O_2 на частоте 118750 МГц. Поэтому зенитное ослабление τ в этом "окне" определяется, в основном, кислородом (τ_K) и водяным паром (τ_V). Раздельное определение τ_K и τ_V обычно выполняется методом вариации влажности, так как изменения оптической толщины, связанной с кислородом, обычно малы из-за постоянства содержания O_2 в атмосфере Земли. Этот метод имеет существенный недостаток — он даёт значительный разброс в определении τ_K . Поэтому для отдельного исследования зависимости τ_V от температуры из экспериментальных значений полного вертикального ослабления τ был вычен вклад, обусловленный поглощением в кислороде τ_K , рассчитанный для каждого дня по данным аэрологического зондирования. В расчёте использовано полуэмпирическое выражение для коэффициента поглощения

сухого воздуха, в котором учитывался вклад 44 резонансных линий кислорода [9]. В качестве формы линии была взята известная формула Van Флека-Вайскопфа, модифицированная Розенкранцем [10]. После вычитания сухой компоненты оставшаяся часть оптической толщины τ_B была нормирована на полное влагосодержание тропосферы W , выраженное в миллиметрах осаждённой влаги, которое также вычислялось по результатам аэрологического зондирования для каждого дня наблюдений по формуле:

$$W = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{10} \rho(z) dz , \quad (2)$$

где $\rho(z)$ — высотный профиль абсолютной влажности, z — высота над уровнем моря, ρ_0 — плотность воды при 20°C.

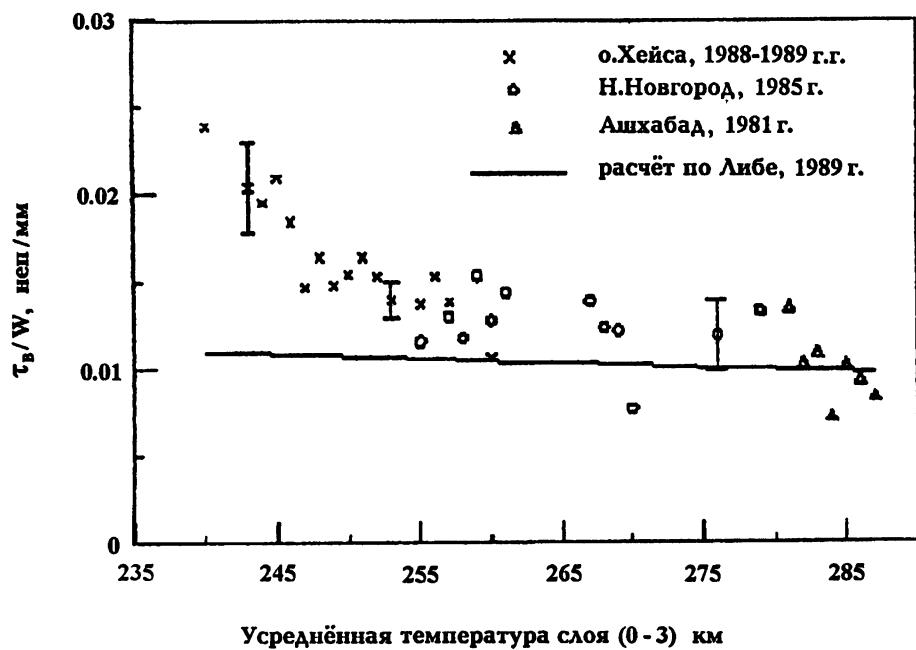


Рис. 7.

На рис. 7 отображена зависимость τ_B/W от средней температуры нижней тропосферы T_{cp} . Там же приведены результаты расчёта этой же величины по Либе [9]. Согласно [9] коэффициент поглощения водяного пара α_B представлен в виде суммы резонансного поглощения α_{Bp} и поглощения континуума α_{Bk} :

$$\alpha_B = \alpha_{Bp} + \alpha_{Bk} . \quad (3)$$

Вычисление α_{Bp} сводится к суммированию вклада 30 наиболее сильных резонансных линий H_2O в диапазоне частот до 1000 ГГц. Второй член

суммы связан с попыткой согласовать результаты расчёта с экспериментом. Он учитывает вклад крыльев далёких (свыше 1 ТГц) линий водяного пара и записывается в полуэмпирической форме в виде суммы линейного и квадратичного от влажности слагаемых:

$$\alpha_{VK} = a(T)n\rho + b(T)\rho^2 , \quad (4)$$

где ρ — абсолютная влажность, n — плотность сухого воздуха, $a(T)$ — коэффициент уширения, обусловленный соударениями молекул мономеров водяного пара с другими молекулами воздуха, $b(T)$ — коэффициент самоуширения мономеров. Согласно [9] коэффициент $a(T)$ пропорционален T^{-3} , а $b(T) \propto T^{-10.5}$. Следует отметить, что квадратичную зависимость от абсолютной влажности имеет и коэффициент поглощения димеров водяного пара. Кроме того, некоторые авторы, в частности [11], утверждают, что поглощения димеров и мономеров, обусловленные самоуширением, обладают одинаковой температурной зависимостью, в результате чего трудно отделить один механизм поглощения от другого. Поэтому в дальнейшем, представляя нерезонансное ослабление в водяном паре в виде суммы линейного и квадратичного членов, мы не будем разделять димерный и самоуширительный механизмы поглощения. Это означает, что коэффициент $b(T)$ включает в себя оба эти механизма.

Обратимся снова к рис. 7, который дополнен обработанными подобным же образом данными для более тёплой тропосферы ($T_{cp} = 260-285$ К). Эти данные получены нами при измерении зенитного ослабления на частоте ~ 100 ГГц зимой в Нижнем Новгороде и осенью в Ашхабаде. Легко заметить, что при достаточно холодной тропосфере ($T_{cp} < 260$ К) температурная зависимость экспериментальных точек значительно круче, чем у расчётной кривой. Естественно предположить, что разница между экспериментом и теорией связана с квадратичной по влажности компонентой ослабления, которая, как отмечалось ранее, имеет более сильную зависимость от температуры, чем линейная. Далее разницу между измеренными значениями τ_B и рассчитанным поглощением мономеров (без самоуширения) будем называть избыточным (или аномальным) ослаблением $\Delta\tau_B$ и полагать, что оно обусловлено квадратичной по влажности компонентой поглощения водяного пара. Построив зависимость избыточного ослабления от $\int \rho^2(z)dz$, мы получили довольно высокий коэффициент взаимной корреляции для этих величин — порядка 0,9. Можно предположить, что при достаточно низких температурах образуются сложные комплексы из молекул водяного пара — кластеры, поглощением в которых, возможно, объясняется более сильная обратная температурная зависимость ослабления, чем следует из расчёта.

Подобные результаты получены при измерениях прозрачности атмосферы [12] на американской антарктической станции Мак Мердо (78° ю.ш.,

расположена на уровне моря) на частоте 278 ГГц. Авторы этой работы отметили, что при достижении температуры нижней тропосферы -30° — -40° С (при этом $W < 0,5$ мм) имеет место значительное (в 2–3 раза) превышение экспериментальных результатов над теоретическими. Отметим, что в недавно опубликованной работе [13] данный эффект не обнаружен. Имея большой массив данных измерений прозрачности атмосферы на частоте 225 ГГц, полученный на антарктической станции "Амундсен-Скотт," авторы этой работы использовали другую процедуру обработки для разделения сухой τ_k и влажной τ_b частей атмосферного ослабления — метод вариации влажности. Как было отмечено ранее, этот метод часто даёт ошибочные результаты в оценке сухой компоненты τ_k . Авторы признают, что полученная ими величина τ_k на порядок выше расчётной. Кроме того, при обсуждении результатов вместо средней температуры тропосферы — основного поглощающего слоя — была использована температура приземного воздуха, что недостаточно корректно в условиях сильных инверсий, весьма типичных для зимнего периода. По-видимому, эти обстоятельства не позволили авторам [13] обнаружить температурный ход, обсуждаемый нами, который, если взглянуть на рис. 4 цитируемой статьи, оказался замаскированным довольно сильным (более 100%) разбросом точек в области предельно низких температур.

4. ВЫВОДЫ

Результаты настоящей работы наряду с данными [12] позволяют сделать вывод, что при достаточно низких температурах, когда влагосодержание атмосферы становится ничтожно малым, зависимость ослабления в водяном паре от влажности становится нелинейной, вследствие чего прозрачность атмосферы в "окнах" субмиллиметрового диапазона длин волн, определяемая главным образом водяным паром, ухудшается по сравнению с ранее сделанными оценками [1]. В частности, для $W = 0,2$ мм при температуре тропосферы порядка -30° С следует ожидать, что атмосферное пропускание в "окнах" ~ 460 и ~ 345 мкм вместо 80% окажется равным 50%, а в "окнах" ~ 295 , 225 и 200 мкм вместо 30% — 10%. Это обстоятельство следует учитывать при проектировании радиотелескопов субмиллиметрового диапазона длин волн в полярных районах Земли.

Работа завершена при поддержке гранта РФФИ (№96-05-64701).

ЛИТЕРАТУРА

- Бурова Л. П., Громов В. Д., Лукьянчикова Н. И., Шоломицкий Г. П. //Письма в Астрон. журн., 1986. Т. 12. С. 811.

2. Danese L., Partridge R. B. // *Astrophys. J.*, 1989. V. 342. P. 463.
3. Dragovan M., Stark A. A., Pernic R., Pomerantz M. // *Appl. Opt.*, 1990. V. 29. P. 463.
4. Масленников К. Л. // *Вестник РАН*, 1995. Т. 65. С. 235.
5. Smyth L. K., Jackson B. V. // *Appl. Opt.*, 1977. V. 16. P. 2041.
6. Воронов В. Н., Демкин В. М., Куликов Ю. Ю., Рыскин В. Г., Юрков В. М. // *Изв. ВУЗов. Радиофизика*, 1986. Т. 29. С. 1403.
7. Кисляков А. Г. // *Радиотехника и электроника*, 1968. Т. 7. С. 1161.
8. Жевакин С. А., Наумов А. П. // *Изв. ВУЗов. Радиофизика*, 1967. Т. 10. С. 1213.
9. Liebe H. J. // *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*, 1989. V. 10. P. 631.
10. Rosenkranz P. W. // *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.*, 1988. V. 39. P. 287.
11. Bohlander R. A., McMillan R. W., Gallagher J. J. // *Proc. IEEE*, 1985. V. 73. P. 49.
12. Emmons L. K., de Zafra R. L. // *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*, 1990. V. 11. P. 469.
13. Chamberlin R. A., Bally J. // *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*, 1995. V. 16. P. 907.

Институт прикладной физики
РАН, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
9 апреля 1997 г.

ON THE TRANSPARENCY OF POLAR ATMOSPHERE FOR MILLIMETER RADIOASTRONOMY

Yu. Yu. Kulikov, B. G. Ryskin

The observed discrepancy between the measured and calculated water vapour attenuations at very low (-30°C) temperatures of the troposphere is discussed. A high correlation of added attenuation and square component of the tropospheric humidity is registered.

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ОСЛАБЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕЙ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

A. M. Ошарин

Рассмотрено ослабление плоской электромагнитной волны однородной сферической частицей в поглощающей среде. Для частного случая непоглощающей сферической полости в среде с поглощением получены соотношения между величинами мнимой и действительной частей комплексного показателя преломления среды, которые приводят к отрицательным значениям ослабления в рэлеевском приближении. Приводится пример отрицательного ослабления, обусловленного малым пузырьком воздуха в воде в диапазоне сантиметровых волн.

Процесс рассеяния плоской электромагнитной волны сферической частицей в поглощающей среде обладает целым рядом специфических особенностей, причиной появления которых является то обстоятельство, что при наличии поглощения не только сама эта частица, но и окружающая её среда принимает участие в формировании характеристик рассеяния [1, 2]. В отличие от традиционной теории Ми, где окружающая частицу среда считается прозрачной, учёт поглощения приводит к тому, что некоторые понятия теории Ми должны быть скорректированы [2]. Одним из наиболее интересных, на наш взгляд, отличий теории Ми для поглощающей среды от традиционной, является допустимость отрицательных значений ослабления, обусловленного частицей. Это обстоятельство было отмечено ранее [1, 2], однако ни в одной из вышеупомянутых работ анализу особенностей отрицательного ослабления не было уделено должного внимания. В настоящей работе мы попытались частично заполнить этот пробел. Определив ослабление как разность регистрируемой приёмником мощности в отсутствии и при наличии частицы между источником и детектором, помещённым в дальнюю зону частицы, а сечение ослабления как затенение площади апертуры приёмника из-за присутствия частицы, авторы [2] получили следующее выражение для сечения ослабления в поглощающей среде:

$$C_{\text{ext}} = 2\pi \operatorname{Re} \left[\sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{a_l + b_l}{k^2} \right) \right]. \quad (1)$$

Коэффициенты a_l , b_l , входящие в (1), имеют следующий вид:

$$a_l = \frac{n_1 \Psi_l(\rho_1) \Psi'_l(\rho) - n \Psi'_l(\rho_1) \Psi_l(\rho)}{n_1 \Psi_l(\rho_1) \xi'_l(\rho) - n \Psi'_l(\rho_1) \xi_l(\rho)}, \quad (2)$$

$$b_l = \frac{n \Psi_l(\rho_1) \Psi'_l(\rho) - n_1 \Psi'_l(\rho_1) \Psi_l(\rho)}{n \Psi_l(\rho_1) \xi'_l(\rho) - n_1 \Psi'_l(\rho_1) \xi_l(\rho)}, \quad (3)$$

где $\rho = kR$, $\rho_1 = k_1 R$, $k = 2\pi n/\lambda$, $k_1 = 2\pi n_1/\lambda$, где λ — длина волны падающего излучения в вакууме, R — радиус сферической частицы, n и n_1 — комплексные показатели преломления вещества среды и частицы. Нетрудно видеть, что выражения для коэффициентов a_l , b_l , входящих в (1), формально совпадают с выражениями для коэффициентов теории Ми: они одинаково выражаются через функции Рикатти–Бесселя и диэлектрическую проницаемость вещества среды и шара. Однако в отличие от теории Ми показатель преломления окружающей среды, входящий в эти выражения, здесь является комплексной величиной: $n = n' + in''$. Для непоглощающей среды волновое число k в окружающей частицу среде становится действительным и его можно вынести из-под знака реальной части в (1), получив тем самым известное выражение для сечения ослабления из теории Ми.

Рассмотрим теперь поведение (1) в рэлеевском пределе. С использованием разложения функций Рикатти–Бесселя при условии $|\rho| \ll 1$, $|\rho_1| \ll 1$ из (1) получаем:

$$k_{\text{ext}} = \frac{6\pi}{\lambda} \text{Im} \left[n \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right) \right], \quad (4)$$

где $k_{\text{ext}} = C_{\text{ext}} / \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)$, $m = n_1/n$. Найдём теперь условия, при которых $k_{\text{ext}} < 0$ для частного случая сферической непоглощающей полости в поглощающей среде. Поскольку в этом случае $n'_1 = 1$, $n''_1 = 0$ мы имеем $m = 1/n$ и следовательно,

$$k_{\text{ext}} = \frac{6\pi}{\lambda} \left[n' \text{Im} \left(\frac{1 - n^2}{1 + 2n^2} \right) + n'' \text{Re} \left(\frac{1 - n^2}{1 + 2n^2} \right) \right]. \quad (5)$$

Переписав (5) в виде

$$k_{\text{ext}} = -\frac{12\pi n''}{\lambda |1 + 2n^2|^2} \left[n'^4 + \left(\frac{5 + 4n''^2}{2} \right) n'^2 + \left(\frac{2n''^4 + n''^2 - 1}{2} \right) \right], \quad (6)$$

замечаем, что знак k_{ext} определяется знаком величины в квадратных скобках. Обозначив $x = n'^2$, $b = \frac{5 + 4n''^2}{2}$, $c = \frac{2n''^4 + n''^2 - 1}{2}$ и принимая во внимание, что $k_{\text{ext}} < 0$ при $y = x^2 + bx + c > 0$, легко найти условия,

связывающие действительную и мнимую части комплексного показателя преломления окружающей среды, при которых это справедливо. Корни квадратного трёхчлена y равны: $x_1 = -\left(n''^2 + \frac{5}{4}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{32n''^2 + 33}$ и $x_2 = -\left(n''^2 + \frac{5}{4}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{32n''^2 + 33}$. Поскольку физически реализуемые значения действительной части показателя преломления должны быть неотрицательны, из $y > 0$ вытекает, что случай отрицательного коэффициента ослабления ($k_{ext} < 0$) соответствует значениям $n' > \sqrt{x_2}$ при $0 \leq n'' \leq 1/\sqrt{2}$ и любому значению $n' \geq 0$ при $n'' > 1/\sqrt{2}$. Заметим также, что при условии равенства нулю знаменателя выражения (4) k_{ext} обращается в бесконечность, что соответствует резонансу ослабления. Приравнивая нулю мнимую и действительную части в условии резонанса $1 + 2n^2 = 0$, находим: $n' = 0$, $n'' = 1/\sqrt{2}$. Эти значения для мнимой и действительной частей показателя преломления среды распространения, реализующие условие резонанса, были получены ранее [3] при анализе поверхностных мод в малых частицах.

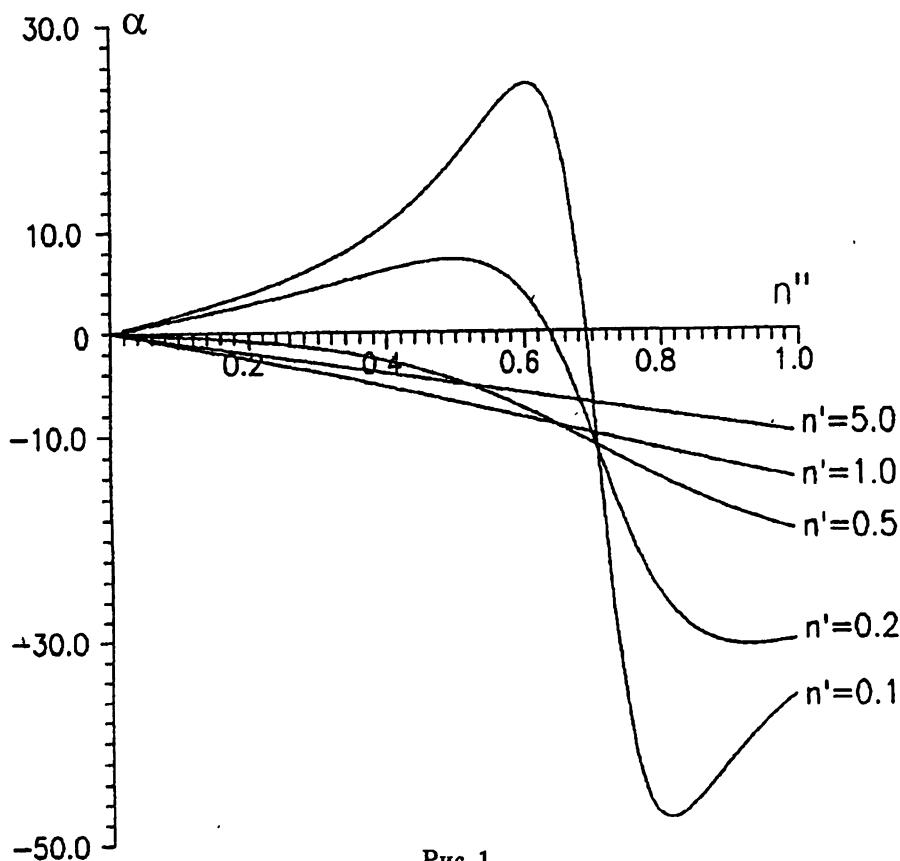


Рис. 1.

На рис. 1 изображено поведение безразмерной величины α в зависимости

сти от показателя поглощения n' в среде. Значения n' заданы в качестве параметра.

Нетрудно видеть, что максимальный эффект имеет место в окрестности резонанса, однако в действительности реализовать этот случай невозможно, поскольку он наблюдается в режиме чисто затухающего поля: при $n' \approx 0$ волна в среде практически не распространяется. Опираясь на полученные результаты, приведём пример отрицательного ослабления в реальной физической среде. Пусть рассмотренная сферическая полость является пузырьком воздуха с диаметром $D = 1$ мм в воде. На рис. 2 изображена частотная зависимость коэффициента ослабления для этого случая в диапазоне СВЧ при температуре воды $t = 20^\circ\text{C}$.

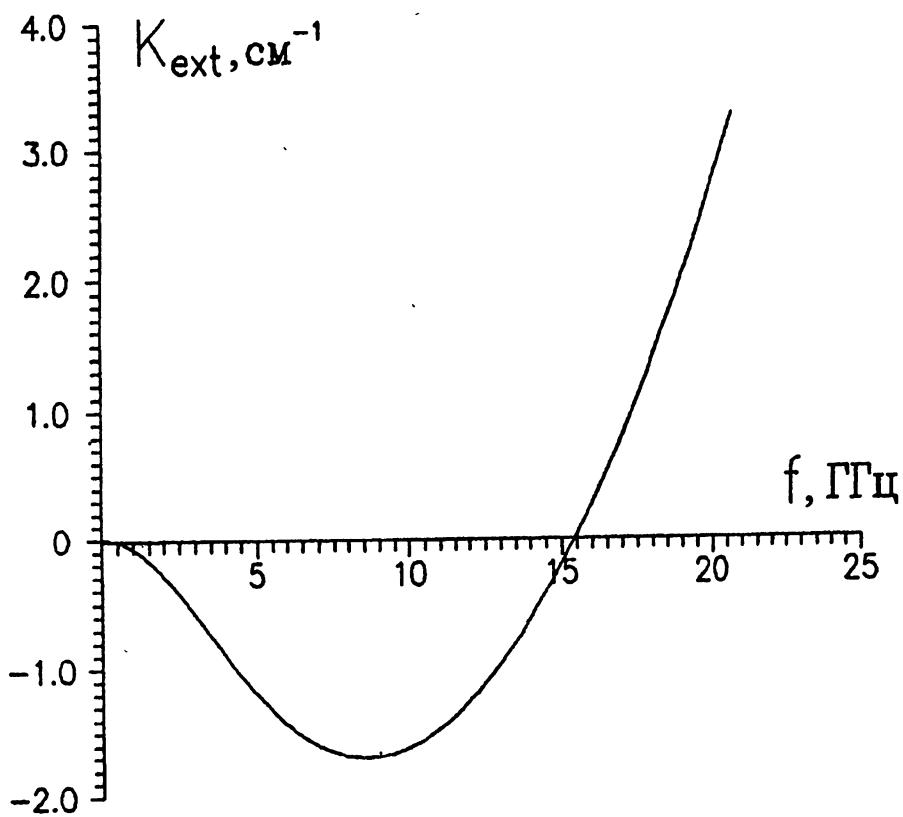


Рис. 2.

Как и следовало ожидать, в том диапазоне частот, где выполняются как условия применимости рассмотренного нами рэлеевского приближения, так и полученные выше ограничения на соотношение между мнимой и действительной частями показателя преломления среды, имеет место отрицательное ослабление. С ростом частоты условия выполнимости

приближения Рэлея нарушаются, и ослабление становится положительной величиной. Этот случай в данной статье не анализировался и приведён здесь лишь в качестве иллюстрации поведения ослабления при больших значениях параметра размера частицы.

Остановимся, в заключение, на физическом смысле отрицательного ослабления. С точки зрения подхода, принятого в [2], отрицательные значения ослабления, обусловленные частицей, означают, что приёмник при наличии слабо поглощающей частицы в сильно поглощающей среде получает больше энергии, нежели в её отсутствии. Поскольку окружающая среда сама по себе поглощает энергию, суммарное ослабление, складывающееся из поглощения в среде и из ослабления, вносимого присутствием частицы, разумеется, остаётся положительным. Другими словами, приёмник в этом случае всегда регистрирует меньше энергии, нежели в ситуации, когда нет ни среды, ни частицы, и волна распространяется в вакууме.

Проведённое в данной статье рассмотрение, как уже было сказано, ограничено рэлеевским пределом и, разумеется, не претендует на полноту. Анализ ослабления для произвольных размеров сферической частицы и при произвольных значениях комплексного показателя преломления вещества частицы выполнить аналитически практически невозможно. Результаты численного анализа мы надеемся представить в последующих публикациях.

Автор выражает благодарность А. П. Наумову за внимательное прочтение статьи и сделанные замечания.

Работа была выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 96-02-16519-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mundy W. C., Roux J. A. and Smith A. M. //J. Opt. Soc. Am., 1974. V. 64. № 12. P. 1593.
2. Bohren C. F., Gilra D. P. //J. Coll. Interface Sci., 1979. V. 72. № 2. P. 215.
3. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. — М., 1986.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н.Новгород

Поступила в редакцию
15 ноября 1996 г.

**ON THE SPECIFIC FEATURE OF THE ELECTROMAGNETIC WAVE
EXTINCTION BY A SPHERICAL PARTICLE IN AN ABSORBING
MEDIUM***A. M. Osharin*

The extinction of a plane electromagnetic wave by an homogeneous spherical particle is concidered. For the specific case of a nonabsorbing particle in the absorbing medium the relations have been obtained between the imaginary and real parts of the complex refractive index, which leads to the negative extinction values in the Rayleigh limit. An example of negative extinction by a small air bubble in water in the centimeter wavelength region is given.

УДК 06.1

СИЛА ПРИТЯЖЕНИЯ МЕЖДУ ТВЁРДЫМИ ТЕЛАМИ С РАЗЛИЧНЫМИ ТЕМПЕРАТУРАМИ

И. А. Дорофеев

Методами флуктуационной электродинамики на основе теории молекулярных сил сцепления получено выражение для плотности силы притяжения между двумя поглощающими средами с разной температурой и разделёнными прозрачным плоскопараллельным слоем. Спектральная плотность силы вычислялась как проекция тензора напряжений на внешнюю нормаль к поверхности тела. Средние квадратичные характеристики флуктуационного поля тел определялись с использованием обобщённого закона Кирхгофа и функции Грина соответствующей регулярной задачи. Получены варианты решения в зависимости от соотношения температур взаимодействующих тел. Показано, что при равенстве температур тел из найденного выражения следует формула для силы притяжения в равновесном случае.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория сил взаимодействия между двумя атомами, у которых нет постоянного дипольного момента, разработана авторами [1, 2]. Существование сил притяжения между нейтральными частицами приводит к возникновению подобных сил и между двумя телами, разделёнными очень маленьким промежутком. В работе [3] была предложена макроскопическая теория молекулярных сил притяжения между твёрдыми телами, разделёнными вакуумным зазором, или средой без поглощения. Основная идея этой теории состоит в том, что взаимодействие тел осуществляется посредством флуктуационного электромагнитного поля, которое всегда имеется внутри всякой поглощающей среды и выходит за его пределы в виде теплового излучения и ближнего квазистационарного поля. Автором теории рассмотрено взаимодействие тел в виде двух сред, заполняющих полупространства с плоскопараллельными границами, разделёнными некоторым расстоянием, и проведён расчёт спектральной плотности силы сцепления путём решения неоднородной краевой задачи с соответствующими граничными условиями и с распределёнными в двух средах сторонними случайнymi источниками. Решение обладает полной общностью, будучи применимо к любым средам при любых температурах, кроме того, в предельном случае разреженных сред получаются известные законы взаимодействия для отдельных атомов. Тот же самый результат

И. А. Дорофеев

1495

получен в монографии [4] на основе использования обобщённой формулы Кирхгофа, комплексной леммы Лоренца и известной функции Грина регулярной дифракционной задачи для точечного источника, расположенного в плоском прозрачном зазоре между двумя поглощающими однородными и изотропными средами. В работе [5] изложена общая теория сил Вандер-Ваальса, построенная с использованием методов квантовой теории поля. Результаты этой теории могут быть применены для определения сил, действующих между двумя твёрдыми телами, разделёнными поглощающей прослойкой, причём полученные в работе [3] формулы лишь незначительно видоизменяются. Любопытно, что в зависимости от соотношения между диэлектрическими проницаемостями всех трёх сред возможно как притяжение, так и отталкивание. Отметим, что в упомянутых работах рассматривалась равновесная ситуация, когда температура всех сред, участвующих в силовом взаимодействии, одинакова.

Первые экспериментальные измерения силы притяжения между двумя плоскопараллельными пластинами, разделёнными промежутком порядка 10^3 \AA [6], находились в удовлетворительном согласии с созданной теорией. Дальнейшая проверка выводов теории, осуществлённая в экспериментах различными авторами [7–9], также показала удовлетворительное качественное и количественное совпадение теории и эксперимента.

В настоящее время, в связи с развитием методов зондовой микроскопии и физики микроконтактов, изучение взаимодействия твёрдых тел посредством тепловых флуктуационных полей получает новый смысл и стимул. В частности, широкое использование зондовых микроскопов для исследования и локальной модификации свойств поверхности конденсированных сред [10, 11] привело к возникновению задач, в которых необходимо рассматривать пондеромоторное взаимодействие и обмен энергией между иглой и образцом, находящимися при разных температурах.

В данной работе путём вычисления спектральной компоненты максвелловского тензора натяжений получено выражение для плотности силы притяжения между двумя произвольными поглощающими средами, которые разделены прозрачным плоскопараллельным слоем и нагреты до разных температур. Рассмотрены предельные варианты, когда температура одной среды много больше другой, а также показано, что при равенстве температур выражение для силы тождественно совпадает с формулами для равновесного случая.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Электродинамическая теория тепловых флуктуаций даёт способ детального выяснения структуры и свойств флуктуационных электромагнитных полей нагретых тел. К ним, например, можно отнести спектральные интенсивности электрической и магнитной энергии, вектора Пойн-

тинга, максвелловских напряжений. Необходимые статистические средние от билинейных форм, т.е. различные функции корреляции или спектральные интенсивности флуктуаций, можно найти, решая обычную краевую задачу электродинамики и используя электродинамическую флуктуационно-диссипативную теорему (ФДТ) для корреляционных функций случайных токов, распределённых по всему объёму поглощающей среды.

Вторые моменты спектральных амплитуд флуктуационного поля можно найти иным способом, используя их связь с тепловыми потерями дифракционного поля точечных источников из формул, обобщающих классическое уравнение Кирхгофа [4]

$$\pm \overline{A_{\ell 1}(\vec{r}_1)B_{\ell 2}^*(\vec{r}_2)} = \frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) Q_{AB^*}(\vec{\ell}_1, \vec{r}_1; \vec{\ell}_2, \vec{r}_2), \quad (1)$$

где $A_{\ell 1}$ и $B_{\ell 2}$ — выбранные две из шести компонент напряжённостей \vec{E} , \vec{H} теплового поля по направлениям ориентации $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ точечных источников, $\Theta(\omega, T) = (\hbar\omega/2)\text{cth}(\hbar\omega/2kT)$ — средняя энергия осциллятора при температуре T , Q_{AB^*} — смешанные тепловые потери в рассматриваемом теле дифракционного поля точечных источников, помещённых в точки \vec{r}_1 и \vec{r}_2 . Знак плюс соответствует двум электрическим или двум магнитным компонентам, знак минус — электрической и магнитной. Звездочка означает комплексное сопряжение. Очевидно, что нахождение функции Грина регулярной задачи в ряде случаев может быть более простым процессом.

Зная вторые моменты спектральных амплитуд флуктуационного поля между двумя телами, плотность силы, действующей на тела, находится путём интегрирования по всем частотам спектральной компоненты проекции максвелловского тензора напряжений на направление единичной нормали к выбранной поверхности. Спектральная плотность этого тензора по положительным частотам в некоторой точке \vec{r} , равна

$$T_{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \left\{ 2\overline{E_{\alpha}(\omega, \vec{r})D_{\beta}^*(\omega, \vec{r})} - \overline{\vec{E}(\omega, \vec{r})\vec{D}^*(\omega, \vec{r})} \delta_{\alpha\beta} + \text{k.c.} \right\} + \\ + \frac{1}{8\pi} \left\{ 2\overline{H_{\alpha}(\omega, \vec{r})B_{\beta}^*(\omega, \vec{r})} - \overline{\vec{H}(\omega, \vec{r})\vec{B}^*(\omega, \vec{r})} \delta_{\alpha\beta} + \text{k.c.} \right\} \quad (2)$$

где для вещественных стационарных полей используется разложение

$$\overline{\vec{E}}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\vec{E}}(\omega, \vec{r}) \exp(i\omega t) d\omega$$

и аналогично для поля \vec{H} и индукций \vec{D} и \vec{B} .

Найдём плотность силы, действующей между двумя поглощающими однородными и изотропными средами с различными температурами

(рис. 1). Положим, что полупространство $z < 0$ заполнено средой с проницаемостями ϵ_1, μ_1 , полупространство $z > l$ — средой с проницаемостями ϵ_2, μ_2 , а промежуток между ними занят прозрачной средой с вещественными проницаемостями ϵ, μ .

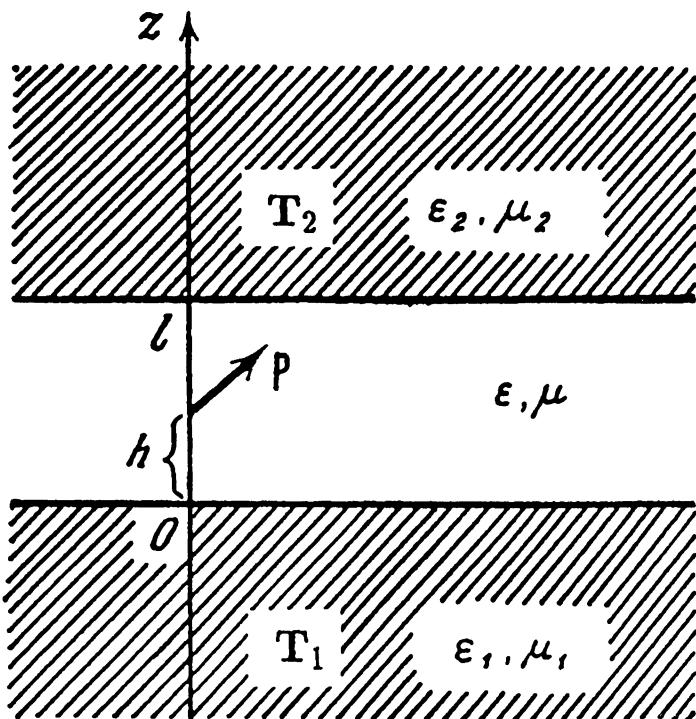


Рис. 1.

Спектральную плотность силы вычислим как zz -компоненту максвелловского тензора напряжений (2) на поверхности $z = 0$. Будем считать, что две статистически независимые системы сторонних случайных источников флуктуационных полей находятся в двух термостатах, температуры которых T_1 и T_2 поддерживаются постоянными. Используя теорему взаимности и принцип суперпозиции полей, составим необходимые квадратичные комбинации компонент векторов флуктуационного поля. Затем, после усреднения по равновесным ансамблям случайных токов и применения электродинамической ФДТ получим средние квадратичные характеристики флуктуационного поля, выраженные через тепловые потери дифракционных полей в каждой из сред, создаваемых помещёнными в зазоре на некотором расстоянии h от нижней среды и нужным образом ориентированными точечными диполями \vec{P} . Таким образом, умножая потери $Q^{(1)}$ в первой среде на $\Theta(\omega, T_1)$, во второй — $Q^{(2)}$ на $\Theta(\omega, T_2)$,

имеем

$$\begin{aligned} \overline{|E_z(\vec{r}')|^2} &= \frac{2}{\pi} \left\{ \Theta(\omega, T_1) Q_{ee^*}^{(1)}(\ell_z; \vec{r}') + \Theta(\omega, T_2) Q_{ee^*}^{(2)}(\ell_z; \vec{r}') \right\} \\ \overline{|H_z(\vec{r}')|^2} &= \frac{2}{\pi} \left\{ \Theta(\omega, T_1) Q_{mm^*}^{(1)}(\ell_z; \vec{r}') + \Theta(\omega, T_2) Q_{mm^*}^{(2)}(\ell_z; \vec{r}') \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где энчаки ee^* и mm^* означают, что необходимо найти потери регулярных полей, создаваемых электрическими и магнитными точечными диполями, соответственно.

Аналогично нужно найти другие среднеквадратичные значения компонент флукуационного поля по осям ox , oy и, используя (2), составить искомое выражение для спектральной плотности силы $\tilde{F}_\omega = T_\omega^{zz}$. Дальнейшее интегрирование по положительным частотам приведёт к решению задачи.

3. РЕШЕНИЕ

3.1. Решение регулярной задачи

Потери дифракционного поля \vec{E}_0 и \vec{H}_0 точечных диполей в полупространствах $z < 0$ и $z > l$ вычислим как поток энергии в поглощающие среды, т. е. как интеграл от вектора Пойнтинга по плоскостям $z = 0$ и $z = l$, соответственно. Например,

$$Q^{(1)} = -\frac{c}{16\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ [\vec{E}_0, \vec{H}_0^*]_z + \text{к.с.} \right\}_{z=0}. \quad (4)$$

Для этой цели определим поле диполя во всех трёх средах. Общий подход к решению уравнений Максвелла в неоднородной среде при заданных источниках можно найти в [12]. Решение краевой задачи о поле диполя в зазоре между двумя полупространствами получено в [4]. Нас будет интересовать дифракционное поле в поглощающих средах 1 и 2, поэтому найдём полное решение этой задачи, распространяя вывод на случай трёх областей с соответствующими граничными условиями на плоскостях $z = 0$ и $z = l$. Решение получим по аналогии с решением задачи о диполе над проводящей землёй [13, 14], определяя во всех трёх средах вектор Герца $\vec{\Pi}$. Вектор Герца связан обычными соотношениями со скалярным и векторным потенциалами

$$\varphi = -\frac{1}{\epsilon\mu} \operatorname{div} \vec{\Pi}, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}$$

Используя условие Лоренца и выражения для полей через потенциалы φ и \vec{A} , получим связь между \vec{E}_0 , \vec{H}_0 и $\vec{\Pi}$. Например, в поглощающих средах будем иметь

$$\vec{E}_0^{(j)} = \frac{1}{\epsilon_j \mu_j} \left\{ \text{grad}(\text{div} \vec{\Pi}^{(j)}) + k_j^2 \vec{\Pi}^{(j)} \right\} \quad (5)$$

$$\vec{H}_0^{(j)} = \frac{i k_0}{\mu_j} \text{rot} \vec{\Pi}^{(j)},$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме, $k_j^2 = k_0^2 \epsilon_j \mu_j$, $j = 1, 2$ и считается, что $\Pi \sim e^{i\omega t}$. По аналогичным формулам вычисляется поле в зазоре, где $k^2 = k_0^2 \epsilon \mu$.

Уравнениям Максвелла в поглощающих средах и зазоре можно удовлетворить, если найден вектор Герца во всех трёх средах. В нашем случае для определения декартовых компонент вектора Герца в зазоре и поглощающих средах необходимо решить уравнения

$$\Delta \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} = -4\pi \mu \vec{p} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (6)$$

$$\Delta \vec{\Pi}^{(j)} + k_j^2 \vec{\Pi}^{(j)} = 0, \quad (j = 1, 2).$$

При этом, если единичный диполь с моментом $\vec{p} = (0, 0, p_z)$ ориентирован по оси oz , то уравнения удовлетворяются, если $\vec{\Pi} = (0, 0, \Pi_z)$. В случае горизонтальной ориентации диполя по осям ox или oy для исключения противоречия в граничных условиях, как показано в [13], необходимо считать, что индуцируется вертикальная составляющая вектора Герца, т. е. $\vec{\Pi} = (\Pi_x, 0, \tilde{\Pi}_z)$ и $\vec{\Pi} = (\Pi_y, 0, \tilde{\Pi}_z)$. Физически это связано с влиянием сред 1 и 2. Иными словами, дополнительное поле $\tilde{\Pi}$ порождается вторичными источниками в средах 1 и 2, и является решением однородных уравнений (6). Уравнения (6) необходимо дополнить граничными условиями, выражающими равенство тангенциальных составляющих дифракционного поля на границах $z = 0$ и $z = l$. Для z -ориентированного диполя, когда $\vec{\Pi} = (0, 0, \Pi_z)$, имеем

$$\frac{\Pi_z}{\mu} = \frac{\Pi_z^{(j)}}{\mu_j}; \quad \frac{1}{\epsilon \mu} \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_j \mu_j} \frac{\partial \Pi_z^{(j)}}{\partial z}$$

Для x -ориентированного диполя, когда $\Pi = (\Pi_x, 0, \tilde{\Pi}_z)$:

$$\Pi_x = \Pi_x^{(j)}; \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} = \frac{1}{\mu_j} \frac{\partial \Pi_x^{(j)}}{\partial z}; \quad \frac{\tilde{\Pi}_z}{\mu} = \frac{\tilde{\Pi}_z^{(j)}}{\mu_j}$$

$$\frac{1}{\varepsilon \mu} \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}_z}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} \right) = \frac{1}{\varepsilon_j \mu_j} \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}_z^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_x^{(j)}}{\partial x} \right), \quad (j=1,2) \quad (7)$$

Аналогичные условия на границе получаются для y -ориентированного диполя.

Учитывая вид уравнений (6), решение будем искать следующим образом. В зазоре между поглощающими средами положим: $\Pi_z = p_z \Pi_v$; $\tilde{\Pi}_z = p_x \cos \varphi \tilde{\Pi}_v$; $\tilde{\Pi}_z = p_y \sin \varphi \tilde{\Pi}_v$; $\Pi_x = p_x \Pi_h$; $\Pi_y = p_y \Pi_h$, где

$$\begin{aligned} \Pi_v &= \mu \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-q|z-h|} \frac{\lambda d\lambda}{q} + \int_0^\infty J_0(\lambda r) [G_- e^{-qz} + G_+ e^{qz}] d\lambda; \\ \Pi_h &= \mu \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-q|z-h|} \frac{\lambda d\lambda}{q} + \int_0^\infty J_0(\lambda r) [F_- e^{-qz} + F_+ e^{qz}] d\lambda; \\ \tilde{\Pi}_v &= \int_0^\infty J_1(\lambda r) [H_- e^{-qz} + H_+ e^{qz}] d\lambda; \end{aligned}$$

В поглощающих средах: $\Pi_z^{(j)} = p_z \Pi_v^{(j)}$; $\tilde{\Pi}_z^{(j)} = p_x \cos \varphi \tilde{\Pi}_v^{(j)}$; $\tilde{\Pi}_z^{(j)} = p_y \sin \varphi \tilde{\Pi}_v^{(j)}$; $\Pi_x^{(j)} = p_x \Pi_h^{(j)}$; $\Pi_y^{(j)} = p_y \Pi_h^{(j)}$, где

$$\begin{aligned} \Pi_v^{(1)} &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) G_1 e^{q_1 z} d\lambda; \quad \Pi_h^{(1)} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) F_1 e^{q_1 z} d\lambda; \\ \tilde{\Pi}_v^{(1)} &= \int_0^\infty J_1(\lambda r) H_1 e^{q_1 z} d\lambda; \\ \Pi_v^{(2)} &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) G_2 e^{-q_2(z-l)} d\lambda; \quad \Pi_h^{(2)} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) F_2 e^{-q_2(z-l)} d\lambda; \\ \tilde{\Pi}_v^{(2)} &= \int_0^\infty J_1(\lambda r) H_2 e^{-q_2(z-l)} d\lambda, \end{aligned}$$

где J_n — бесселева функция порядка n , $q = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, $q_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}$ ($j=1, 2$). Из граничных условий (7) получим уравнения для определения коэффициентов G_\pm , F_\pm , H_\pm , G_j , F_j , H_j , ($j=1, 2$)

$$\begin{aligned} G_1 &= \alpha_1 \left(\mu \frac{\lambda}{q} e^{-qh} + G_+ + G_- \right); \quad G_2 = \alpha_2 \left(\mu \frac{\lambda}{q} e^{-q(l-h)} + G_+ e^{ql} + G_- e^{-ql} \right); \\ G_1 &= \frac{\gamma_1}{\beta_1} \left(\mu \frac{\lambda}{q} e^{-qh} + G_+ - G_- \right); \quad G_2 = \frac{\gamma_2}{\beta_2} \left(G_+ e^{ql} - G_- e^{-ql} - \mu \frac{\lambda}{q} e^{-q(l-h)} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \mu \frac{\lambda}{q} e^{-qh} + F_+ + F_-; & F_2 &= \mu \frac{\lambda}{q} e^{-q(l-h)} + F_+ e^{ql} + F_- e^{-ql}; \\
 F_1 &= \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(\mu \frac{\lambda}{q} e^{-qh} + F_+ - F_- \right); & F_2 &= \frac{\alpha_2}{\beta_2} \left(\mu \frac{\lambda}{q} e^{-q(l-h)} - F_+ e^{ql} + F_- e^{-ql} \right); \\
 H_1 &= \alpha_1 (H_+ + H_-); & H_2 &= \alpha_2 (H_+ e^{ql} + H_- e^{-ql}); \\
 \lambda F_1 - q_1 H_1 &= \gamma_1 [\lambda (\mu \frac{\lambda}{q} e^{-qh} + & \lambda F_2 + q_2 H_2 &= \gamma_2 [\lambda (\mu \frac{\lambda}{q} e^{-q(l-h)} + \\
 + F_+ + F_-) + q(H_- - H_+)]; & + F_+ e^{ql} + F_- e^{-ql}) + q(H_- e^{-ql} - H_+ e^{ql})];
 \end{aligned}$$

где

$$\beta_j = \frac{q_j}{q}, \quad \gamma_j = \frac{\kappa_j^2}{\kappa^2} = \frac{\varepsilon_j \mu_j}{\varepsilon \mu} = \alpha_j \tilde{\alpha}_j, \quad \alpha_j = \frac{\mu_j}{\mu}, \quad \tilde{\alpha}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon}, \quad (j = 1, 2).$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{aligned}
 G_1 &= 2\mu_1 \frac{\lambda}{q} \left[\operatorname{ch}(ql - qh) + \frac{\beta_2}{\tilde{\alpha}_2} \operatorname{sh}(ql - qh) \right] \tilde{D}^{-1}; \\
 G_2 &= 2\mu_2 \frac{\lambda}{q} \left[\operatorname{ch}(qh) + \frac{\beta_1}{\tilde{\alpha}_1} \operatorname{sh}(qh) \right] \tilde{D}^{-1}; \\
 F_1 &= 2\mu \frac{\lambda}{q} \left[\operatorname{ch}(ql - qh) + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \operatorname{sh}(ql - qh) \right] D^{-1}; \\
 F_2 &= 2\mu \frac{\lambda}{q} \left[\operatorname{ch}(qh) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \operatorname{sh}(qh) \right] D^{-1}; \\
 H_1 &= \alpha_1 \frac{\lambda}{q} \left\{ F_1 \left(\frac{1 - \gamma_1}{\gamma_1} \right) \left[\operatorname{ch}(ql) + \frac{\beta_2}{\tilde{\alpha}_2} \operatorname{sh}(ql) \right] - F_2 \left(\frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2} \right) \right\} \tilde{D}^{-1}; \\
 H_2 &= \alpha_2 \frac{\lambda}{q} \left\{ F_1 \left(\frac{1 - \gamma_1}{\gamma_1} \right) - F_2 \left(\frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2} \right) \left[\operatorname{ch}(ql) + \frac{\beta_1}{\tilde{\alpha}_1} \operatorname{sh}(ql) \right] \right\} \tilde{D}^{-1},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 D &= \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \operatorname{ch}(ql) + \left(1 + \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right) \operatorname{sh}(ql); \\
 \tilde{D} &= \left(\frac{\beta_1}{\tilde{\alpha}_1} + \frac{\beta_2}{\tilde{\alpha}_2} \right) \operatorname{ch}(ql) + \left(1 + \frac{\beta_1 \beta_2}{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2} \right) \operatorname{sh}(ql).
 \end{aligned}$$

Нахождение полей удобнее проводить в цилиндрической системе координат, в которой компоненты вектора Герца связаны с декартовыми следующим образом

$$\begin{aligned}
 \Pi_r &= (p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi) \Pi_h \\
 \Pi_\varphi &= (p_y \cos \varphi - p_x \sin \varphi) \Pi_h \\
 \Pi_z &= p_z \Pi_v + (p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi) \tilde{\Pi}_v
 \end{aligned}$$

Вычисление потерь по формуле (4), в процессе которого использовались рекуррентные соотношения между функциями Бесселя и свойства дельта-функции, приводит к следующему результату для случая $h = 0$

$$\begin{aligned} Q_z^{(1)} &= \frac{1}{\omega \varepsilon} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{|q|^2} \left\{ \frac{q_1}{\tilde{\alpha}_1} \frac{|\operatorname{ch}(ql) + (\beta_2/\tilde{\alpha}_2)\operatorname{sh}(ql)|^2}{|\tilde{D}|^2} \right\}; \\ Q_z^{(2)} &= \frac{1}{\omega \varepsilon} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{|q|^2} \left\{ \frac{q_2}{\tilde{\alpha}_2} \frac{1}{|\tilde{D}|^2} \right\}; \\ Q_x^{(1)} &= \frac{1}{2\omega \varepsilon} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{iq} \left\{ q^2 \frac{\beta_1}{\tilde{\alpha}_1} \frac{|\operatorname{sh}(ql) + (\beta_2/\tilde{\alpha}_2)\operatorname{ch}(ql)|^2}{|\tilde{D}|^2} - \right. \\ &\quad \left. - \kappa^2 \frac{\beta_1^*}{\alpha_1^*} \frac{|\operatorname{ch}(ql) + (\beta_2/\alpha_2)\operatorname{sh}(ql)|^2}{|D|^2} \right\}; \\ Q_x^{(2)} &= \frac{1}{2\omega \varepsilon} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{iq} \left\{ q^2 \frac{\beta_2}{\tilde{\alpha}_2} \frac{|\beta_1|^2}{|\tilde{\alpha}_1|^2} \frac{1}{|\tilde{D}|^2} - \kappa^2 \frac{\beta_2^*}{\alpha_2^*} \frac{1}{|D|^2} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что $Q_y^{(1)} = Q_x^{(1)}$ и $Q_y^{(2)} = Q_x^{(2)}$. Естественно, что в предельном случае $l \rightarrow \infty$ легко получить соответствующие формулы для потерь поля диполя над проводящей поверхностью.

Вычисление потерь в поглощающих средах дифракционного поля точечного диполя, ориентированного по различным осям, завершает регулярную часть задачи.

3.2. Решение флюктуационной задачи

С помощью полученных выражений (8) и формул (3) найдём среднеквадратичные значения компонент электрической напряжённости теплового поля на границе $z = 0$. Для получения нужной формы решения необходимо использовать тот факт, что при интегрировании по вещественной переменной λ , переменная q принимает либо чисто мнимые, либо чисто вещественные значения. В итоге имеем

$$\begin{aligned} \overline{|E_z|^2} &= -\frac{2\Theta(\omega, T_1)}{\pi\omega\varepsilon} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{iq} \left\{ \frac{[\operatorname{ch}(ql) + (\beta_2/\tilde{\alpha}_2)\operatorname{sh}(ql)]}{\tilde{D}} \right\} + \\ &\quad + \frac{2[\Theta(\omega, T_1) - \Theta(\omega, T_2)]}{\pi\omega\varepsilon} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{iq^*} \left\{ \frac{\beta_2}{\tilde{\alpha}_2} |\tilde{D}|^{-2} \right\}; \end{aligned}$$

$$\overline{|E_x|^2} = \overline{|E_y|^2} = -\frac{\Theta(\omega, T_1)}{\pi\omega\varepsilon} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{i} \left\{ \frac{\kappa^2 [\operatorname{ch}(ql) + (\beta_2/\alpha_2)\operatorname{sh}(ql)]}{q} \right\} -$$

$$\left. -q \frac{\beta_1}{\tilde{\alpha}_1} \frac{[\operatorname{sh}(ql) + (\beta_2/\tilde{\alpha}_2)\operatorname{ch}(ql)]}{\tilde{D}} \right\} + \frac{[\Theta(\omega, T_1) - \Theta(\omega, T_2)]}{\pi\omega\varepsilon} \times \\ \times \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{i} \left\{ \frac{\kappa^2 \beta_2^*}{q\alpha_2^*} |D|^{-2} - q \frac{\beta_2}{\tilde{\alpha}_2} \frac{|\beta_1|^2}{|\tilde{\alpha}_1|^2} |\tilde{D}|^{-2} \right\}.$$

Перестановка в этих формулах D с \tilde{D} , $\tilde{\alpha}_j$ с α_j ($j=1, 2$) и наоборот даст среднеквадратичные значения компонент магнитной напряжённости флуктуационного поля. Заметим, что в случае $T_1 = T_2$ получаются выражения в точности совпадающие с соответствующими выражениями из равновесной задачи [3, 4].

Располагая выражениями для среднеквадратичных значений компонент флуктуационного поля, можно по (2) найти спектральную плотность силы, действующей на нижнюю среду

$$\tilde{F}_\omega = T_\omega^{zz} = -\frac{\Theta(\omega, T_1)}{2\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\Delta}{D} + \frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{D}} \right) + \\ + \frac{[\Theta(\omega, T_2) - \Theta(\omega, T_1)]}{2\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\delta_1}{|D|^2} + \frac{\tilde{\delta}_1}{|\tilde{D}|^2} \right), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \operatorname{sh}(ql) + \left(1 + \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} \right) \operatorname{ch}(ql); \\ \tilde{\Delta} &= \left(\frac{\beta_1}{\tilde{\alpha}_1} + \frac{\beta_2}{\tilde{\alpha}_2} \right) \operatorname{sh}(ql) + \left(1 + \frac{\beta_1\beta_2}{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2} \right) \operatorname{ch}(ql); \\ \delta_1 &= \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{q}{q^*} - \frac{|\beta_1|^2}{|\alpha_1|^2} \right); \quad \tilde{\delta}_1 = \frac{\beta_2}{\tilde{\alpha}_2} \left(\frac{q}{q^*} - \frac{|\beta_1|^2}{|\tilde{\alpha}_1|^2} \right). \end{aligned}$$

Для того, чтобы представить (9) в нескольких эквивалентных формах, используем следующие равенства, доказательство которых не вызывает каких-либо затруднений

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\Delta}{D} \right) &= -\operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\delta_1}{|D|^2} + \frac{\delta_2}{|D|^2} \right), \\ \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{D}} \right) &= -\operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\tilde{\delta}_1}{|\tilde{D}|^2} + \frac{\tilde{\delta}_2}{|\tilde{D}|^2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\delta_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{q}{q^*} - \frac{|\beta_2|^2}{|\alpha_2|^2} \right); \quad \tilde{\delta}_2 = \frac{\beta_1}{\tilde{\alpha}_1} \left(\frac{q}{q^*} - \frac{|\beta_2|^2}{|\tilde{\alpha}_2|^2} \right). \quad (10)$$

В результате преобразований выражения (9) с учётом (10) получим следующие эквивалентные выражения для плотности спектральной силы

$$\begin{aligned}\tilde{F}_\omega &= \frac{\Theta(\omega, T_1)}{2\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\delta_2}{|D|^2} + \frac{\tilde{\delta}_2}{|\tilde{D}|^2} \right) + \\ &\quad + \frac{\Theta(\omega, T_2)}{2\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\delta_1}{|D|^2} + \frac{\tilde{\delta}_1}{|\tilde{D}|^2} \right); \\ \tilde{F}_\omega &= -\frac{\Theta(\omega, T_2)}{2\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\Delta}{D} + \frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{D}} \right) + \\ &\quad + \frac{[\Theta(\omega, T_1) - \Theta(\omega, T_2)]}{2\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\delta_2}{|D|^2} + \frac{\tilde{\delta}_2}{|\tilde{D}|^2} \right); \\ \tilde{F}_\omega &= -\frac{[\Theta(\omega, T_1) + \Theta(\omega, T_2)]}{4\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\Delta}{D} + \frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{D}} \right) + \\ &\quad + \frac{[\Theta(\omega, T_2) - \Theta(\omega, T_1)]}{4\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{|D|^2} + \frac{\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2}{|\tilde{D}|^2} \right);\end{aligned}$$

Откуда видно, что для одинаковых материалов мы будем иметь

$$\tilde{F}_\omega = -\frac{[\Theta(\omega, T_1) + \Theta(\omega, T_2)]}{4\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left(\frac{\Delta}{D} + \frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{D}} \right) \quad (11)$$

Из всех приведённых формул следует выражение для спектральной плотности силы притяжения в равновесном случае, когда $T_1 = T_2$. В (11) выделим спектральную плотность давления, обусловленного только радиационными модами флуктуационного электромагнитного поля ($0 < \lambda < k$)

$$P_\omega = \frac{[\Theta(\omega, T_1) + \Theta(\omega, T_2)]}{2\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} = \frac{[\Theta(\omega, T_1) + \Theta(\omega, T_2)] k^3}{6\pi^2\omega},$$

которое компенсируется таким же давлением на противоположную сторону тела. В результате получим спектральную силу сцепления, зависящую только от расстояния между телами

$$\begin{aligned}F_\omega(l) &= -\frac{[\Theta(\omega, T_1) + \Theta(\omega, T_2)]}{2\pi^2\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{q\lambda d\lambda}{i} \left\{ \left[\frac{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)} e^{2ql} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(\tilde{\alpha}_1 + \beta_1)(\tilde{\alpha}_2 + \beta_2)}{(\tilde{\alpha}_1 - \beta_1)(\tilde{\alpha}_2 - \beta_2)} e^{2ql} - 1 \right]^{-1} \right\}\end{aligned}$$

Интегрирование этого выражения по положительным частотам даст искомую формулу для силы притяжения между двумя телами с различными температурами. Одновременно проведём замену переменных в этом выражении, полагая $q = \imath k p$, $q_j = \imath k s_j$ ($\operatorname{Re} q_j > 0$), где $s_j = \sqrt{(\alpha_j \tilde{\alpha}_j - 1) + p^2}$, ($j=1, 2$). В результате получим

$$\begin{aligned} F = & \frac{\hbar}{4\pi^2 c^3} \operatorname{Re} \int_0^\infty \int p^2 \omega^3 \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\hbar\omega}{2kT_1} \right) + \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar\omega}{2kT_2} \right) \right] \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{(\alpha_1 p + s_1)(\alpha_2 p + s_2)}{(\alpha_1 p - s_1)(\alpha_2 p - s_2)} e^{2\imath kpl} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{(\tilde{\alpha}_1 p + s_1)(\tilde{\alpha}_2 p + s_2)}{(\tilde{\alpha}_1 p - s_1)(\tilde{\alpha}_2 p - s_2)} e^{2\imath kpl} - 1 \right]^{-1} \right\} dp d\omega, \end{aligned} \quad (10)$$

где интегрирование по переменной p производится по действительной оси от 1 до нуля и далее по мнимой от нуля до $-\infty$. Отметим, что сила находится как проекция тензора напряжений на единичную внешнюю нормаль \vec{n} к поверхности $z=0$ или на внешнюю нормаль \vec{n}' к поверхности $z=1$, поэтому силы, приложенные к этим поверхностям, очевидно, должны отличаться знаком: $\vec{F}_{z=0} = -\vec{F}_{z=1}$.

Комплексный интеграл (12) приводится к удобной для вычислений форме изменением путей интегрирования в плоскостях комплексных переменных ω и p так, как это проделано в [3]. А именно: чтобы по p велось интегрирование только по вещественным (от 1 до ∞), а по ω — только по чисто мнимым значениям (от 0 до $-\infty$). Тогда показатель в экспонентах будет всегда вещественным. В нашем случае необходимо иметь в виду, что $\varepsilon(\omega)$ является аналитической функцией в нижней полуплоскости комплексной переменной $\omega = \omega' + i\omega''$, поскольку мы используем разложение по $\exp(i\omega t)$. Поэтому нужно учесть, что функции $\operatorname{cth}(\hbar\omega/2kT_1)$ и $\operatorname{cth}(\hbar\omega/2kT_2)$ имеют бесконечное множество полюсов на мнимой оси и равных, соответственно,

$$\omega_n = -\imath\xi_n = -\imath\frac{2\pi k T_1}{\hbar} n, \quad \omega_m = -\imath\xi_m = -\imath\frac{2\pi k T_2}{\hbar} m,$$

где n и m — целые числа. При смещении пути интегрирования по ω на мнимую ось надо обходить эти полюсы по полуокружности.

Для удобства сравнения с равновесным случаем будем считать оба тела одинаковыми, немагнитными, а промежуток между ними — вакуумом. Тогда получим:

$$F = \frac{k T_1}{2\pi c^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty p^2 \xi_n^3 \left\{ \left[\left(\frac{s_n + p}{s_n - p} \right)^2 e^{2p\xi_n l/c} - 1 \right]^{-1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \left[\left(\frac{s_n + \varepsilon_n p}{s_n - \varepsilon_n p} \right)^2 e^{2p\xi_n l/c} - 1 \right]^{-1} \right\} dp + \\
 & + \frac{kT_2}{2\pi c^3} \sum_{m=0}^{\infty} \int_1^{\infty} p^2 \xi_m^3 \left\{ \left[\left(\frac{s_m + p}{s_m - p} \right)^2 e^{2p\xi_m l/c} - 1 \right]^{-1} + \right. \\
 & \left. + \left[\left(\frac{s_m + \varepsilon_m p}{s_m - \varepsilon_m p} \right)^2 e^{2p\xi_m l/c} - 1 \right]^{-1} \right\} dp,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где $\varepsilon_n = \varepsilon(\imath\xi_n)$, $\varepsilon_m = \varepsilon(\imath\xi_m)$ — значения диэлектрических проницаемостей на мнимой оси, $s_n = \sqrt{\varepsilon_n - 1 + p^2}$, $s_m = \sqrt{\varepsilon_m - 1 + p^2}$. Штрих у суммы означает, что члены с $n = 0$ и $m = 0$ должны быть взяты с половинным весом.

По формуле (13) можно вычислять силу F при любых расстояниях и любом соотношении температур T_1 и T_2 . При $T_1 = T_2$ формула (13) полностью совпадает с результатом, впервые полученным в [3]. Анализ выражения для силы притяжения основывается на том, что основную роль в суммах играют те члены, для которых $\xi_n \sim c/l$ и $\xi_m \sim c/l$, или члены с номерами $n \sim c\hbar/lkT_1$ и $m \sim c\hbar/lkT_2$. Случаи $lkT/c\hbar \ll 1$ и $lkT/c\hbar \gg 1$, когда $T_1 = T_2 = T$, подробно разобраны в [3, 5]. Из них следует, что на малых расстояниях температура тел вообще не играет никакой роли, и $F \sim l^{-3}$, если $l \ll c\hbar/kT$ и $l \ll \lambda_0$, где λ_0 — характерная длина волн в спектре поглощения рассматриваемого тела. В случае, когда $l \ll c\hbar/kT$, но $l \gg \lambda_0$, будем иметь $F \sim l^{-4}$. В частности, для металлов — $F = \hbar c \pi^2 / 240 l^4$ и не зависит от рода металлов. При $l \gg c\hbar/kT$ имеем $F \simeq kT(\varepsilon_0 - 1)^2 / 8\pi l^3(\varepsilon_0 + 1)^2$, зависящую от статических значений диэлектрической проницаемости материала ε_0 .

В случае, когда $T_1 \neq T_2$, соотношения могут быть более разнообразными:

$$\begin{aligned}
 l \ll \frac{c\hbar}{kT_1}, l \ll \frac{c\hbar}{kT_2}, l \ll \lambda_0, \quad F \simeq \frac{\hbar}{8\pi^2 l^3} \int_0^{\infty} \left[\frac{\varepsilon(\imath\xi) - 1}{\varepsilon(\imath\xi) + 1} \right]^2 d\xi; \\
 l \ll \frac{c\hbar}{kT_1}, l \ll \frac{c\hbar}{kT_2}, l \gg \lambda_0, \quad F \simeq \frac{\pi^2 \hbar c}{240 l^4}; \\
 l \gg \frac{c\hbar}{kT_1}, l \gg \frac{c\hbar}{kT_2}, \quad F \simeq \frac{k(T_1 + T_2)}{16\pi l^3} \left(\frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 1} \right)^2; \\
 l \gg \frac{c\hbar}{kT_1}, l \ll \frac{c\hbar}{kT_2}, l \ll \lambda_0, \quad F \simeq \frac{\hbar}{16\pi^2 l^3} \int_0^{\infty} \left[\frac{\varepsilon(\imath\xi) - 1}{\varepsilon(\imath\xi) + 1} \right]^2 d\xi + \frac{kT_1}{16\pi l^3} \left(\frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 1} \right)^2; \\
 l \gg \frac{c\hbar}{kT_1}, l \ll \frac{c\hbar}{kT_2}, l \gg \lambda_0, \quad F \simeq \frac{kT_1}{16\pi l^3} \left(\frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 1} \right)^2 + \frac{\pi^2 \hbar c}{480 l^4}.
 \end{aligned}$$

Оценку порядка величины силы притяжения проведём для расстояний

$l = 10 \div 100 \text{ \AA}$. В этом случае $l \ll \hbar c / kT_{1,2}$ и $l \ll \lambda_0$ для $T_{1,2} = 300 \div 2000 \text{ K}$, поэтому $F \simeq \hbar \bar{\omega} / 8\pi^2 l^3$, где $\bar{\omega}$ — характерная частота в спектре поглощения тел. Для оценки положим $\bar{\omega} \sim 10^{14} \text{ c}^{-1}$, тогда $F \sim 10^2 \div 10^4 \text{ н/м}^2$, что значительно (на много порядков) меньше как порогов разрушения, так и пределов текучести твёрдых тел.

Как показано в [5] силу взаимодействия между двумя телами с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 , разделёнными щелью ширины l с поглощающей средой $\epsilon_3 = \epsilon'_3 + i\epsilon''_3$, можно получить из выражения для силы взаимодействия двух тел, разделённых вакуумом, если умножить каждый член сумм (13) при $T_1 = T_2$ на $\epsilon_3^{3/2}$ и заменить во всех членах ϵ_1 и ϵ_2 , соответственно, на ϵ_1/ϵ_3 и ϵ_2/ϵ_3 , а l — на $l\sqrt{\epsilon_3}$. По видимому, это можно сделать лишь в равновесном случае, так как при выводе тензора напряжений в поглощающей среде авторы [5] использовали факт постоянства химического потенциала по толщине плёнки, заполняющей зазор между телами, чего не может быть при наличии градиента температур.

Отметим, что в равновесном случае сила может быть найдена как производная по координате от Ван-дер-Ваальсовой части свободной энергии рассматриваемой системы [15, 16]. Сама свободная энергия при этом может быть получена путём суммирования по модам, что в общем случае поглощающих сред требовало серьёзного обоснования [17, 18]. Этот вопрос освещён от элементарной задачи для осциллятора с затуханием, до систем, описываемых комплексными диэлектрическими функциями $\epsilon(\omega)$. При таком подходе к решению задачи аддитивность энергии доказывается с помощью математического принципа аргумента, а окончательное выражение для свободной энергии систем с диссипацией зависит лишь от поведения $\epsilon(\omega)$ на минимуме оси частот $\omega = i\xi$, где, как известно, $\epsilon(\omega)$ — вещественна. Естественно, что выражения для силы, полученные разными методами — тождественны.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нашей работе получено выражение для силы притяжения между двумя телами, температура которых в общем случае может быть различной. Решение основано на нахождении тепловых потерь поля точечного диполя, расположенного в зазоре между телами и использовании обобщённого закона Кирхгофа. Путём преобразования комплексных интегралов получены различные формы выражения для спектральной плотности силы. Рассмотрены варианты решения в зависимости от соотношения между температурами тел. Показано, что при равенстве температур из полученного выражения для силы сцепления между двумя телами получается формула, соответствующая равновесному случаю.

Автор признателен А. Н. Малахову за обсуждение некоторых вопросов в постановке задачи, Н. Н. Салашенко и В. Е. Семёнову за обсуждение результатов работы и возможности их применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. London F. //Z.Physik, 1930. V. 60. P. 491.
2. Casimir H. B. G., Polder D. //Phys. Rev., 1948. V. 73. P. 360.
3. Лифшиц Е. М. //ЖЭТФ, 1955. Т. 29. С. 94.
4. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
5. Дэялошинский И. Е., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. //УФН, 1961. Т. 73. С. 381.
6. Абрикосова И. И., Дерягин Б. В. //ДАН СССР, 1953. Т. 90. С. 1055.
7. Tabor D., F.R.S. and Winterton R. H. S. //Proc. Roy. Soc. A., 1969. V. 312. P. 435.
8. Rowler G. C., Overbeek J. T. G. //Trans. Faraday Soc., 1971. V. 67. P. 2127.
9. Coakley C. J., Tabor D. //J. Phys. D, 1978. V. 11. P. L77.
10. Scanning Tunneling Microscopy I, II, III /Ed. by H. J. Guntherodt, R. Weisendanger — Berlin: Heidelberg, 1992.
11. Владимириов Г. Г., Грязев А. А. //Вестник СбПГУ, 1993. № 4. С. 24.
12. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Изд. АН СССР, 1948.
13. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. — М.: Изд. Иностр. Лит., 1950.
14. Стреттон Д. А. Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948.
15. van Kampen N. G., Nijboer B. R. A., Schram K. //Phys. Lett., 1968. V. 26A. P. 307.
16. Ninham B. W., Parsegian V. A., Weiss G. H. //J. Statistical Phys., 1970. V. 2. P. 323.
17. Бараш Ю. С., Гинзбург В. Л. //Письма в ЖЭТФ, 1972. Т. 15. С. 567.
18. Бараш Ю. С., Гинзбург В. Л. //УФН, 1975. Т. 116. С. 5.

Институт физики микроструктур
РАН, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию
20 июня 1997 г.

THE ATTRACTIVE FORCE BETWEEN SOLIDS WITH DIFFERENT TEMPERATURES*I. A. Dorofeyev*

The expression for the density of attractive force between two absorbing semi-infinite solids divided by a plane-parallel nonabsorbing layer has been obtained by the methods of fluctuating electrodynamics on the basis of the Van der Waals force theory. The spectral density of force has been calculated as the Maxwellian stress tensor projection on the outer normal to the solid surface. The mean square characteristics of the solid fluctuating field have been determined by using generalized Kirchhoff's law and Green's function of a corresponding regular problem. Various variants of the solution have been obtained depending on temperatures of the solids. The formula for equilibrium case has been shown to be followed from the expression obtained if the solids have equal temperatures.

УДК 621.385.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛИСТРОДА НА ОСНОВЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

H. M. Рыскин

Представлены результаты исследования клистрода-усилителя дециметрового диапазона, сочетающего принципы действия тетрода и пролётного клистрона. Для численного моделирования разработан метод, основанный на гидродинамической модели электронного потока, что позволяет обойти трудности, связанные с вычислением начальных фаз электронов. Выяснено влияние различных факторов на КПД прибора. В частности, исследована возможность повышения КПД при использовании матричного автоэмиссионного катода.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы вновь вырос интерес к приборам со статическим управлением электронным потоком, или приборам с модуляцией эмиссии (см., например, [1]). Среди подобных приборов привлекает внимание клистрод — мощный усилитель, сочетающий принципы действия тетрода и пролётного клистрона [1–5]. В настоящее время клистроды нашли применение в системах телевещания дециметрового диапазона [2]. Работы последних лет [4, 5] направлены на разработку клистродов, которые могли бы использоваться в качестве источников сигнала в линейных ускорителях космического базирования, поскольку при столь же высоком уровне мощности и КПД, что и у современных многорезонаторных пролётных клистронов, клистроды обладают значительно меньшими размерами и массой.

При численном моделировании нелинейных процессов в клистроде (и вообще в приборах с модуляцией эмиссии) традиционными методами крупных частиц возникают трудности, связанные с вычислением начальных фаз крупных частиц, при которых ток на входе в пространство дрейфа соответствует закону эмиссии. Причём, если для клистрода с плоским катодом, можно пользоваться законом "3/2", то для клистрода, описанного в [4, 5], который имел пушку более сложной конструкции, этот закон оказывается уже неприменимым. Таким образом, задачу об определении начальных фаз частиц приходится решать заново для каждой конкретной модели.

H. M. Рыскин

1511

Необходимость в использовании метода крупных частиц, как известно, связана с тем, что оптимальные режимы работы приборов с динамическим управлением электронным потоком как правило характеризуются обгоном одних электронов другими, так что для описания их движения требуется переход к переменным Лагранжа. В то же время, в приборах со статическим управлением электронным потоком начальная модуляция по скорости отсутствует, следовательно, можно ожидать, что обгон происходит не будет, и допустимо описание в переменных Эйлера (так называемое гидродинамическое приближение). Обгон может произойти лишь на достаточном расстоянии после прохождения выходного зазора, где электронный поток приобретает сильную модуляцию по скорости. Это подтверждается и результатами расчётов по методу крупных частиц [3]. Использование гидродинамических уравнений представляется весьма выгодным, так как позволит без труда моделировать процессы при произвольном законе эмиссии, поскольку плотность заряда на входе в пространство дрейфа можно задавать в явном виде, как функцию времени.

Интерес к приборам с модуляцией эмиссии в значительной степени обусловлен созданием матричных автоэмиссионных катодов (МАЭК) и возникновением нового направления — вакуумной микроэлектроники [1]. Поэтому представляет интерес исследование прибора, аналогичного клистроду, но на основе МАЭК. Анализ показывает [1, 6], что при автоэлектронной эмиссии, когда плотность тока определяется законом Фаулера–Нордгейма, можно получить более высокие значения гармоник тока, чем при термоэмиссии, подчиняющейся закону "3/2". Следовательно, применение МАЭК позволит увеличить КПД прибора. Среди других преимуществ можно указать возможность продвижения в область более высоких частот.

В настоящей работе изложены результаты моделирования нелинейных процессов в клистроде с различными законами эмиссии (в частности, с законом Фаулера–Нордгейма) на основе гидродинамических уравнений.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим цилиндрический электронный поток радиуса r , движущийся вдоль оси трубы дрейфа с идеально проводящими стенками. Поток будем считать сфокусированным достаточно сильным продольным магнитным полем, так что движение электронов можно полагать одномерным. Тогда, если не учитывать тепловой разброс скоростей электронов и

релятивистские эффекты, поток можно описать уравнениями движения и непрерывности

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -(E_{sc} + E), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) все переменные являются безразмерными: скорость электронной жидкости v нормирована на своё невозмущённое значение v_0 , плотность пространственного заряда ρ — на среднюю за период плотность заряда ρ_{av} , поле пространственного заряда E_{sc} и высокочастотное поле резонатора E — на $mv_0\omega_p/e$, время t — на ω_p^{-1} , а координата x — на v_0/ω_p , где $\omega_p = (e\rho_{av}/\epsilon_0 m)^{1/2}$ — плазменная частота.

Для нахождения E_{sc} используем хорошо апробированное в электронике приближённое соотношение, полученное в предположении, что силы кулоновского отталкивания между двумя сечениями электронного потока экспоненциально спадают с расстоянием [7]:

$$E_{sc}(x) = \frac{1}{2} \int (\rho(x') - 1) \exp[-k_\perp |x - x'|] \operatorname{sign}(x - x') dx', \quad (3)$$

где $k_\perp = \alpha v_0 / r\omega_p$, ($1 \leq \alpha \leq 2$), sign — знаковая функция. В соотношении (3) предполагается, что статический пространственный заряд скомпенсирован неподвижным фоном положительных ионов, плотность которых полагается равной средней плотности ρ_{av} . Значение параметра α зависит от степени заполнения трубы дрейфа электронным потоком. Очевидно, что аналогичное соотношение можно записать и для потоков других конфигураций. Разумеется, параметр k_\perp при этом должен быть соответствующим образом модифицирован.

Поле $E(x, t)$ найдём при помощи нестационарной теории возбуждения резонаторов [8], в соответствии с которой представим поле в виде

$$E = \operatorname{Re} [A(t) E_s(x) \exp i(\omega_s t + \Psi(t))],$$

где $E_s(x)$ — собственная функция s -го (рабочего) типа колебаний, ω_s — собственная частота, $A(t)$ и $\Psi(t)$ — медленно меняющиеся по сравнению с $\exp(i\omega_s t)$ безразмерные амплитуда и фаза. Введём функцию

$$V_s(x) = - \int_{x_1}^{x_2} E_s(x') dx'$$

и отнормируем её таким образом, чтобы $V_s(x_1) - V_s(x_2) = 1/2$, где x_1 и x_2 — начальная и конечная координаты зазора (напомним, что при выбранной нами нормировке переменных ускоряющее напряжение $V_0 = 1/2$). Тогда после ряда несложных преобразований можно получить следующие уравнения:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\omega_s A}{2Q_L} - \frac{\omega_s K I_a}{2}, \quad (4)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\omega_s K I_r}{2}, \quad (5)$$

где Q_L — нагруженная добротность, K — волновое сопротивление резонатора, $I_{a,r}$ — амплитуды активной и реактивной составляющей на ведённого в резонаторе тока, определяемые как

$$\begin{aligned} I_a &= -\frac{1}{\pi d} \int_0^{2\pi} d\omega_s t \int_{x_1}^{x_2} j(x, t) E_s(x) \cos(\omega_s t + \Psi) dx, \\ I_r &= -\frac{1}{\pi d} \int_0^{2\pi} d\omega_s t \int_{x_1}^{x_2} j(x, t) E_s(x) \sin(\omega_s t + \Psi) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $d = x_2 - x_1$ — длина зазора, j — плотность конвекционного тока. Токи $I_{a,r}$ нормированы на $I_{av} = \rho_{av} v_0 S_\perp$, где S_\perp — площадь поперечного сечения потока, а K — на V_0/I_{av} .

Очевидно, что активная и реактивная мощности определяются соотношениями $P_{a,r} = AI_{a,r}/2$, причём при выбранной нормировке электронный КПД $\eta = -P_a$.

Функция $E_s(x)$ может иметь самый различный вид в зависимости от геометрии резонатора. Например, в работе [5] $E_s(x)$ аппроксимировалась треугольной функцией. С другой стороны, для клистрода, описанного в [2], судя по всему, можно приближённо считать $E_s(x) = \text{const}$. В дальнейшем это предположение использовалось в большинстве расчётов. Однако, разработанный алгоритм, разумеется, допускает моделирование при любой форме $E_s(x)$.

Уравнения (1) и (2) следует дополнить граничными условиями. В случае, когда для тока эмиссии можно пользоваться законом "3/2", $I = aV^{3/2}$, где $a = \text{const}$, $V = V_m \sin(\omega_0 t)$ — напряжение входного сигнала, имеем [1]:

$$I(t) = \begin{cases} I_m (\sin \omega_0 t)^{3/2}, & 0 < \omega_0 t < \pi, \\ 0, & \pi < \omega_0 t < 2\pi, \end{cases}$$

где $I_m = aV_m$. Нетрудно найти, что $I_m \approx 3.5944 I_{av}$. Будем считать также, что скоростная модуляция на входе в пространство дрейфа отсутствует,

тогда граничные условия имеют вид

$$v(x=0, t) = 1, \quad (7)$$

$$\rho(x=0, t) = \begin{cases} \rho_m (\sin \omega_0 t)^{3/2}, & 0 < \omega_0 t < \pi, \\ 0, & \pi < \omega_0 t < 2\pi, \end{cases} \quad (8)$$

где $\rho_m = 3.5944$.

Нетрудно заметить, что при выбранной нами нормировке все геометрические размеры остаются неизменными при постоянном первенстве пучка $P = I_{av}/V_0$ (так как нормируются на $\omega_p/v_0 \sim \sqrt{P}$). Коэффициент $\omega_s K$ в правой части (4), (5) также не изменяется, так как пропорционален $I_{av}/\omega_p V_0 \sim \sqrt{P}$. Таким образом, КПД клистрода должен оставаться постоянным при постоянном первенстве, что согласуется с экспериментальными данными [2].

Типичные результаты численного моделирования, выполненного по описанной методике, приведены на рис. 1. Они дают качественное представление об основных особенностях физических процессов, протекающих при взаимодействии электронного сгустка с электромагнитным полем в зазоре резонатора.

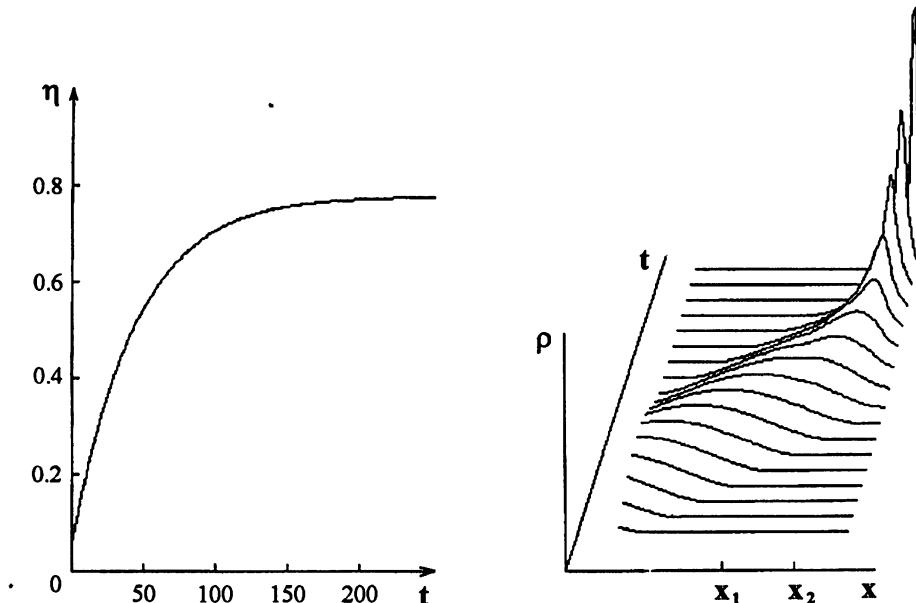


Рис. 1.

На рис. 1 а изображена зависимость $\eta(t)$, иллюстрирующая процесс установления колебаний в выходном резонаторе. На рис. 1 б представлена пространственно-временная динамика плотности заряда в течение одного

периода колебаний в установившемся режиме. Зазор резонатора расположен в области $x_1 \leq x \leq x_2$.

Более подробно математическая модель и используемые численные методы описаны в работе [9].

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛИСТРОДА С ТЕРМОЭМИССИОННЫМ КАТОДОМ

Полученные на основе описанного алгоритма результаты численных экспериментов достаточно хорошо согласуются как с основными представлениями о физических процессах в клистроде, так и с приведёнными в литературе данными теоретических и экспериментальных исследований. На рис. 2 приведены зависимости амплитуды наведённого тока $I = (I_a^2 + I_r^2)^{1/2}$ от угла пролёта в зазоре $\varphi_0 = \omega_0 d$.

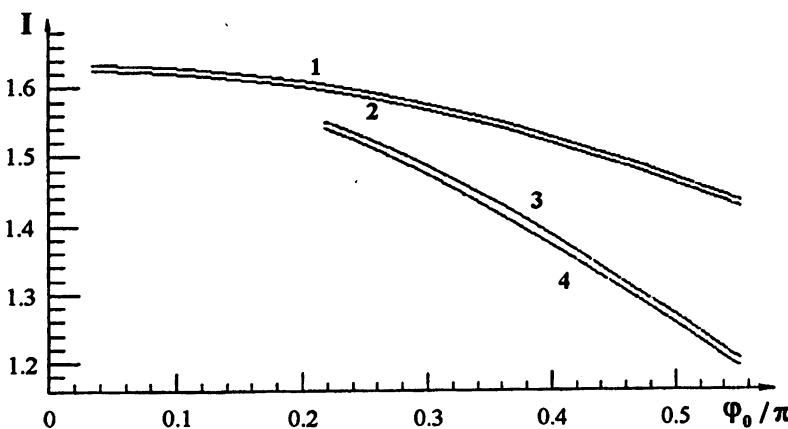


Рис. 2.

Рисунку соответствуют следующие значения параметров: нагруженная добротность $Q_L = 175$, частота сигнала $\omega_0 = 7.0$, $\omega_s = \omega_0$, $\varphi_0 = \pi/4$, угол пролёта в пространстве сетка–зазор $\varphi_1 = \pi/2$, $k_\perp = 10.0$. Эти значения примерно соответствуют параметрам клистрода, приведённым в работах [2, 3]. На них мы главным образом ориентировались при моделировании.

Как известно из теории возбуждения высокочастотного зазора заданным током [10], амплитуда I с ростом φ_0 должна падать пропорционально коэффициенту эффективности модуляции

$$M = \frac{\sin(\varphi_0/2)}{\varphi_0/2}$$

(кривая 1). Результаты расчётов (кривая 2) хорошо согласуются с теорией. В то же время, кривые 3 и 4, являющиеся результатами решения самосогласованной задачи, достаточно сильно различаются при реальных значениях φ_0 . Это говорит об ограниченности теории, основанной на формулах возбуждения резонатора заданным током и о возможности её применения лишь для грубых оценок.

При численном моделировании нелинейных процессов в клистроде важным является вопрос о роли сил пространственного заряда, поскольку их вычисление занимает значительную долю машинного времени. Кривая 3 на рис. 2 рассчитана по кинематической теории, а кривая 4 — с учётом сил пространственного заряда. Видно, что расхождение между ними весьма незначительно. Это можно объяснить при помощи следующих простых оценок: согласно линейной теории волн пространственного заряда (см., например, [11]), в электронном потоке с начальной модуляцией только по плотности гармоника тока зависит от продольной координаты пропорционально $\cos(\omega_q x/v_0)$, где ω_q — редуцированная плазменная частота. Нетрудно показать, что при данных значениях углов пролёта φ_0 , φ_1 эта величина очень близка к единице. Таким образом, при проведении большинства расчётов можно с успехом пользоваться кинематической теорией, что приводит к существенной экономии машинного времени.

Для получения оптимальных значений выходной мощности и КПД необходимо, чтобы амплитуда колебаний эффективного напряжения на зазоре резонатора равнялась ускоряющему напряжению V_0 , то есть, чтобы $MA = 1$. Поэтому при изменении φ_0 всякий раз определялось оптимальное значение волнового сопротивления K_{opt} так, чтобы $MA = 1$. Если I падает пропорционально M , то, как следует из формул (4) и (5), K должно расти как M^{-2} . Этой зависимости соответствует кривая 1 на рис. 3. Как и в предыдущем случае, теоретические значения K_{opt} (кривая 1) хорошо согласуются с полученными при расчёте возбуждения резонатора заданным током (кривая 2), а результаты решения самосогласованной задачи (кривая 3) существенно отличаются.

Аналогичные расчёты, проведённые при других значениях ω_s , показывают, что характеристики взаимодействия ухудшаются с ростом частоты (вернее, с ростом отношения частоты сигнала к плазменной частоте): значения I и η (для данного значения φ_0) уменьшаются, а K_{opt} — увеличивается, хотя это ухудшение и незначительно. Так, при увеличении ω_s до 14.0 КПД падает приблизительно на 3%.

В предыдущих численных экспериментах частота входного сигнала ω_0 полагалась в точности равной собственной частоте выходного резо-

натора ω_0 . Зависимость КПД от расстройки между этими частотами $\Delta\omega = \omega_s - \omega_0$ приведена на рис. 4 ($Q_L = 175$, $\varphi_0 = \pi/4$). Относительная ширина полосы усиления близка к холодной полосе пропускания резонатора $1/Q_L \approx 0.0057$.

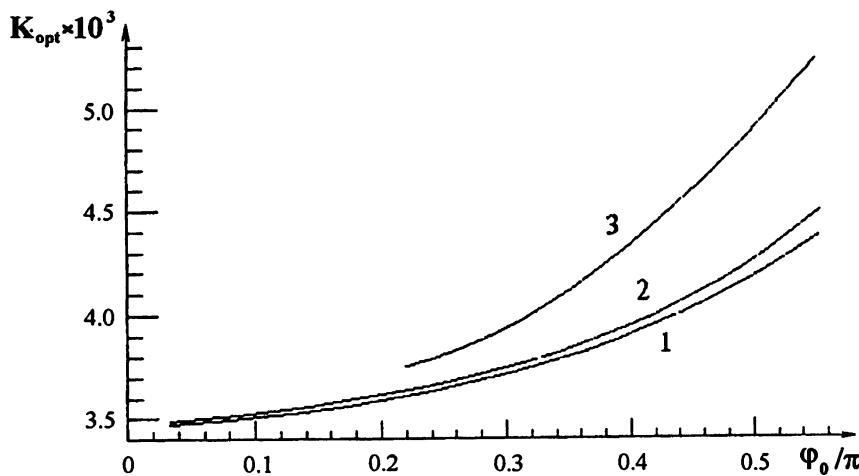


Рис. 3.

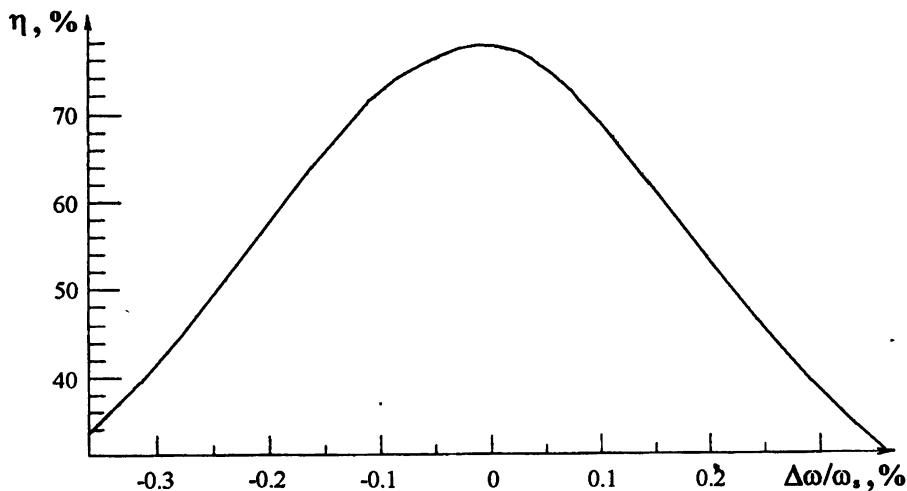


Рис. 4.

Описанные выше результаты получены при значении $Q_L = 175$. На вопрос, как изменится КПД взаимодействия при изменении Q_L , можно легко ответить, анализируя уравнения (4), (5). Видно, что амплитуда установившихся колебаний $A_{st} = Q_L K I_a$. Следовательно, для того чтобы значения A_{st} и η оставались оптимальными, необходимо изменить K_{opt}

так, чтобы произведение $Q_L K_{\text{opt}}$ оставалось постоянным. Этот вывод полностью подтверждается численными расчётами.

В статье [5] был предложен способ повышения КПД клистрода за счёт укорочения электронного сгустка (так называемый усилитель класса С). В этом случае ток эмиссии по-прежнему определяется законом "3/2", но теперь уже $V = -V_b + V_m \sin(\omega_0 t)$, где V_b — напряжение смещения. При этом фазовая ширина сгустка равна $\theta = \pi - \arcsin(V_b/V_m)$. Результаты проверки этой гипотезы приведены на рис. 5 в виде зависимостей КПД и выходной мощности от V_b/V_m (соответственно, кривые 1 и 2).

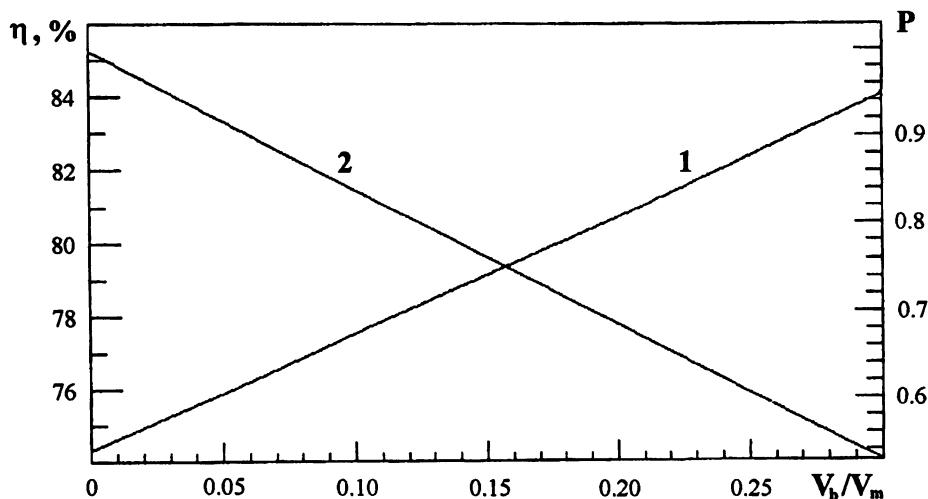


Рис. 5.

Видно, что укорочение сгустка действительно приводит к некоторому увеличению КПД. Однако при этом резко падает выходная мощность за счёт уменьшения среднего тока I_{av} . Так, при $V_b/V_m = 0.3$ достигается повышение КПД на 10%, однако мощность при этом падает почти в два раза. В целом такой способ увеличения КПД представляется малоперспективным.

Выше рассматривалась простейшая аппроксимация $E_s(x)$ прямоугольной функцией

$$E_s(x) = \begin{cases} 1/2d, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x < x_1, \quad x > x_2. \end{cases}$$

Исследуем влияние непрямоугольной формы $E_s(x)$ на процесс взаимодействия. Будем считать, что резонатор симметричен относительно плос-

кости $x = x_1 + d/2$ и рассмотрим $E_s(x)$ в виде трапеции

$$E_s(x) = \begin{cases} x/[2\Delta x(d - \Delta x)], & x_1 < x < x_1 + \Delta x, \\ 1/[2(d - \Delta x)], & x_1 + \Delta x < x < x_2 - \Delta x, \\ (d - x)/[2\Delta x(d - \Delta x)], & x_2 - \Delta x < x < x_2, \\ 0, & x < x_1, \quad x > x_2. \end{cases}$$

Результаты моделирования, приведённые на рис. 6 в виде зависимостей K_{opt} , I и η от $\Delta\varphi = \omega_0\Delta x$ (соответственно, кривые 1–3), показывают, что эффективность взаимодействия монотонно падает с ростом $\Delta\varphi$.

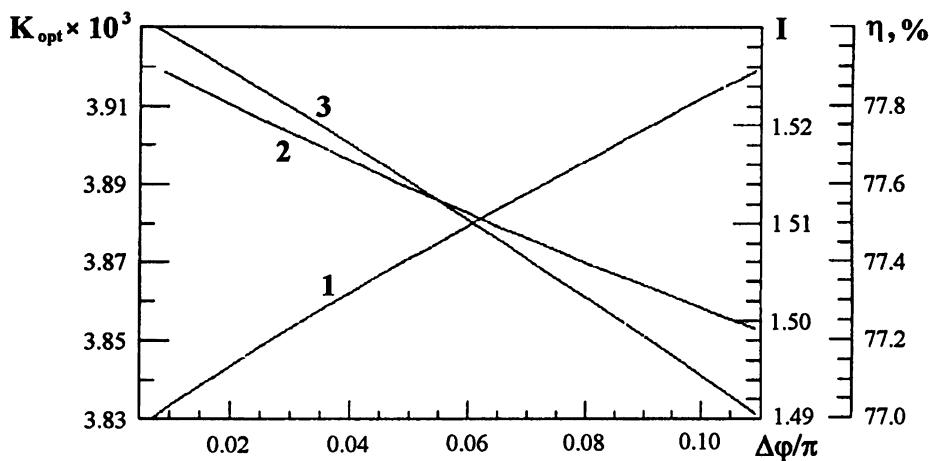


Рис. 6.

Все вычисления проводились при $\omega_0 = 7.0$ и $\varphi_0 = \pi/4$. В связи с уменьшением I каждый раз определялось новое значение K_{opt} такое, чтобы поддерживалось $MA = 1$.

4. КЛИСТРОД С АВТОЭМИССИОННЫМ КАТОДОМ

Применение матричных автоэмиссионных катодов в приборах типа клистрода, усилителях и умножителях частоты, было предложено в [12], где приведены оценки выходной мощности и КПД прибора, позволяющие судить о перспективности подобных приборов. Некоторые результаты численного моделирования на основе описанного в данной работе метода изложены в работе [13]. В целом они подтверждают большую эффективность клистрода с МАЭК по сравнению с традиционным прибором, хотя сделанные в [12] оценки являются чрезмерно оптимистичными.

В случае автоэмиссионного катода зависимость тока эмиссии от напряжения на сетке определяется законом Фаулера–Нордгейма (см., например, [1, 14]):

$$I = aV^2 \exp(-b/V), \quad (9)$$

где $V(t) = V_b + V_m \sin(\omega_0 t)$, V_b — напряжение смещения, a и b — величины, зависящие от геометрии устройства и работы выхода. Ток I будем, как и прежде, нормировать на средний ток I_{av} , а напряжение V — на V_b . Тогда нетрудно заметить, что постоянная a , которая пропорциональна эффективной площади катода, сократится и характеристики эмиссии будут определяться единственной безразмерной величиной $b' = b/V_b$. Для типичных МАЭК характерны значения $5 < b' < 15$ [14].

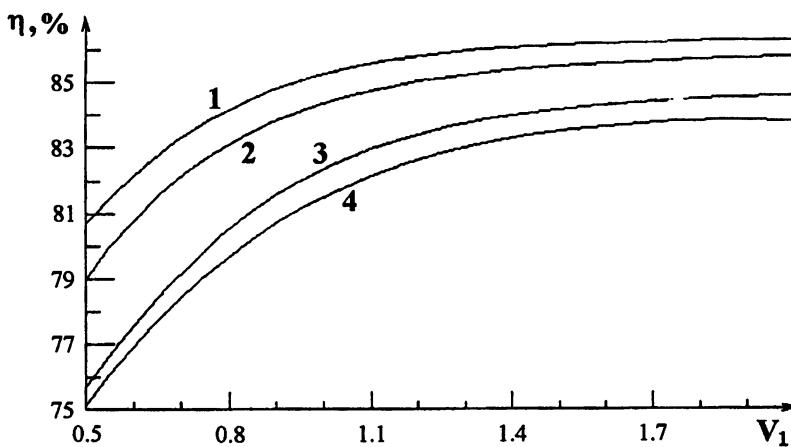


Рис. 7.

На рис. 7 приведены зависимости КПД при $K = K_{opt}$ от безразмерной амплитуды входного сигнала $V_1 = V_m/V_b$ при $b' = 12.0, 10.0$ и 8.0 (соответственно, кривые 1–3). Остальные параметры принимают следующие значения: $\omega_s = 7.0$, $Q_L = 175$, $\varphi_0 = \pi/4$. Кроме того, на этом рисунке представлена аналогичная зависимость для $b' = 8.0$ с учётом пространственного заряда (кривая 4). Видно, что и в данном случае влияние этого фактора весьма невелико. Предельные значения КПД оказываются весьма высокими, однако следует заметить, что для их достижения необходимы достаточно большие значения V_m (одного порядка с V_b). Разработка катодов с требуемыми характеристиками интенсивно ведётся в последнее время, что позволяет надеяться на прогресс в этом направлении [15].

Выше при расчётах предполагалось, что сгусток, форма которого определяется законом (9), поступает в пространство дрейфа, имея

скорость, определяемую высоким напряжением V_0 (в нашей нормировке эта скорость равна единице). Однако, если по конструктивным причинам ускоряющий электрод (анод) не может быть расположен близко к МАЭК, это предположение теряет справедливость. Рассмотрим ситуацию, когда перед пространством дрейфа в области $0 < x < x_a$ расположен ускоряющий промежуток. Будем считать, что $V_0 \sim 10-30$ кВ, $V_b \sim 100-300$ В, следовательно, в начале ускоряющего промежутка ($x = 0$) сгусток имеет безразмерную скорость $v_1 = (V_b/V_0)^{1/2} \sim 0.1$. Под началом ускоряющего промежутка будем понимать некоторую плоскость, расположенную вблизи электрода, выполняющую функцию сетки, за которой электрическое поле можно считать однородным. Далее сгусток ускоряется в пространстве до плоскости анода, имеющей координату $x = x_a$, до скорости $v = 1$, после чего дрейфует в пространстве анод-резонатор ($x_a < x < x_1$) без изменения скорости.

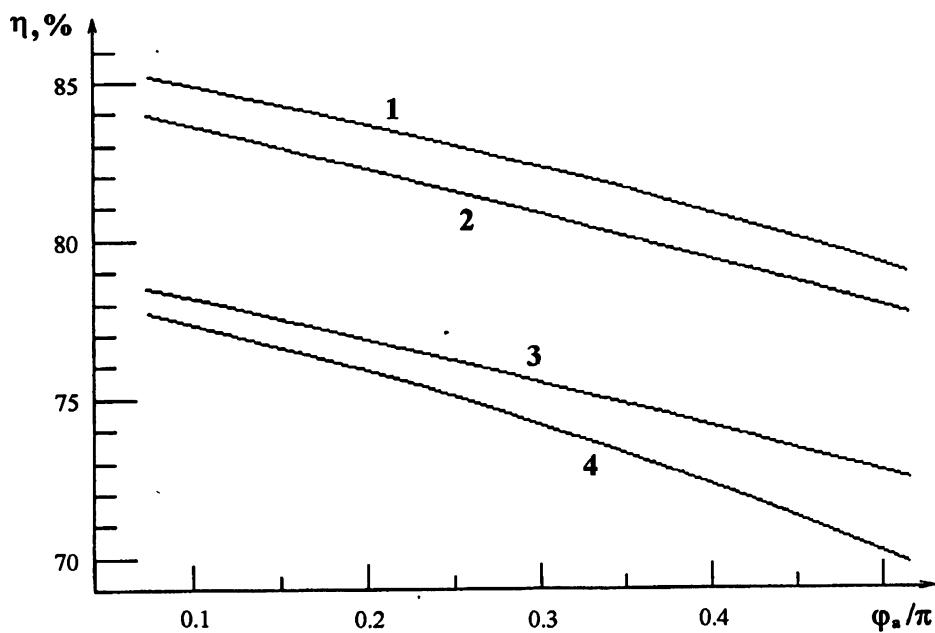


Рис. 8.

Результаты численного моделирования приведены на рис. 8 в виде зависимостей КПД от угла пролёта в ускоряющем промежутке $\varphi_a = \omega_0 x_a$ при $\varphi_1 = \omega_0 x_1 = \pi/2$ для $V_1 = 2.0, 1.0$ и 0.5 (соответственно, кривые 1–3). Видно, что наличие ускоряющего участка оказывает разгруппировывающее воздействие и может привести к снижению КПД на величину до 5–6%. Падение КПД с ростом φ_a происходит практически линейно, сле-

довательно, при больших φ_1 этот эффект будет проявляться ещё сильнее (до 10% при $\varphi_1 = \pi$).

Кривая 4 на рис. 8 соответствует $V_1 = 0.5$ при учёте пространственного заряда. Видно, что в данном случае КПД падает быстрее и имеется сильное расхождение с кривой, рассчитанной по кинематической теории. Это легко объяснить тем, что разгруппировывающее действие сил пространственного заряда определяется теперь величиной $\cos(\omega_q x/\bar{v})$ [11], где

$$\bar{v} = \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} v(x) dx.$$

Грубо говоря, для малых скоростей плаэменная длина волны значительно меньше и пространственный заряд действует сильнее, так что его учёт становится необходимым.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в настоящей работе результаты численных экспериментов свидетельствуют о принципиальной возможности применения подхода, основанного на гидродинамических уравнениях для моделирования нелинейных процессов в клистродах, а также позволяют ответить на ряд важных вопросов, которые ранее практически не обсуждались в литературе. Использование гидродинамического описания представляется весьма выгодным, так как при этом отпадает необходимость вычисления начальных фаз электронов, что является достаточно трудоёмкой задачей, с которой, в частности, так и не смогли до конца справиться авторы работы [5], несмотря на все имевшиеся в их распоряжении вычислительные средства. Другое важное преимущество предлагаемого подхода состоит в том, что он не накладывает никаких ограничений на спектральный состав входного сигнала, что существенно при изучении усиления многочастотных сигналов. Подобные методы, по-видимому, можно распространить и на другие приборы с модуляцией эмиссии со средним (порядка 2π) углом пролёта, которые представляют интерес для вакуумной микроэлектроники [16].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-16546).

Автор благодарен Д. И. Трубецкову, А. Г. Рожневу и Д. В. Соколову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исаев В. А., Соколов Д. В., Трубецков Д. И. //Радиотехника и электроника, 1990. Т. 35. № 11. С. 2241.
2. Priest D. H., Shrader M. B. //Proc. IEEE, 1982. V. 70. № 11. P. 1318.
3. Shrader M., Priest D., Gaiser B. //Tech. Digest of Int. Electron Device Meet., 1985. P. 342.
4. Priest D. H., Shrader M. B. //IEEE Trans. El. Dev., 1991. V. ED-38. № 10. P. 2205.
5. Nguen K., Warren G. D., Ludeking L., Goplen B. //IEEE Trans. El. Dev., 1991. V. ED-38. № 10. P. 2212.
6. Charbonnier F. M., Barbour J. P., Garrett L. F., Dyke W. P. //Proc. IEEE, 1963. V. 51. № 7. P. 991.
7. Роу Дж. Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот. — М.: Сов. радио, 1969. — 616 с.
8. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. — М.: Сов. радио, 1973. — 400 с.
9. Рыскин Н. М. //Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я зимняя школа-семинар. Кн. 1, Ч. II. — Саратов: Изд-во ГУНП “Колледж”, 1996. С. 189.
10. Шевчик В. Н. Основы электроники сверхвысоких частот. — М.: Сов. радио, 1959. — 307 с.
11. Шевчик В. Н., Шведов Г. Н., Соболева А. В. Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1962. — 336 с.
12. Yokoo K., Shimawaki H., Ono S. //Techn. Digest of VI Int. Vacuum Microelectronics Conf., 1993. P. 153.
13. Ryskin N. M. //Electron. Lett., 1996. V. 32. № 3. P. 195.
14. Spindt C. A., Brodie I., Humphrey L., Westerberg E. R. //J. Appl. Phys., 1976. V. 47. № 12. P. 5248.
15. Spindt C. A., Holland C. E., Schwoebel P. R., Brodie I. //Techn. Digest of IX Int. Vacuum Microelectronics Conf., 1996. P. 638.
16. Galdetskiy A. V., Solntsev V. A., Stepanchuk V. V. //J. Vacuum Sci. Technol. B, 1995. V. 13. № 2. P. 585.

Колледж прикладных наук,
Саратовский государственный
университет, г. Саратов

Поступила в редакцию
30 июня 1997 г.

**NUMERICAL MODELLING OF OXYGEN ON THE BASIS OF
HYDRODYNAMIC EQUATIONS**

N. M. Ryskin

The investigation results are presented for klystrod-amplifier of the decimeter range, which combines the principles of action of the tetrode and the transit klystron. A method has been developed for the numerical modelling, which is based on a hydrodynamic model of the electron flux that permits us to avoid difficulties connected with calculation of initial electron phases. An effect of different factors on the efficiency of the device has been found out. In particular, a possibility is investigated for the efficiency increase in using the matrix autoemission cathode.

УДК 621.391

ЭФФЕКТИВНАЯ БИСПЕКТРАЛЬНАЯ ШУМОВАЯ ТЕМПЕРАТУРА

Г. Н. Бочков, К. В. Горохов

В работе анализируются физические пределы чувствительности биспектральных приёмников (биспектров-анализаторов), обусловленные фоновым уровнем биспектра их собственных тепловых шумов. Потенциальная чувствительность биспектрального приёмника в сравнении со спектральным аналогом характеризуется введённым в работе параметром — эффективной биспектральной температурой. Показано, что для приёмников с квазилинейным входным усилителем эта температура существенно ниже реальной температуры, определяющей спектральный фон.

В настоящее время растёт количество работ, посвящённых вопросам анализа и измерения многовременных корреляционных функций и их преобразований Фурье — полиспектров или спектров высших порядков (СВП) [1] случайных сигналов различной физической природы. Основная группа работ содержит материалы по измерению, воспроизведению, интерпретации простейшего из СВП-спектра 3-го порядка (биспектра) и его использованию в задачах физики плазмы, оптики, акустики, технической и медицинской диагностики (см. обзоры [2, 3] и библиографию там же). Авторами [4] (см. также [5, 6]) было предложено использовать высокоинформационные полиспектрально организованные сигналы для передачи сообщений.

При разработке физических приборов нового поколения — полиспектров-анализаторов (полиспектральных приёмников), выделяющих содержащуюся в СВП информацию, на первый план выдвигаются вопросы точности измерений СВП [7]. В частности, так же как и при спектральных измерениях, здесь неизбежно возникает задача определения и достижения предельной чувствительности анализаторов СВП, которая до настоящего времени в литературе не обсуждалась.

В данной работе физические пределы чувствительности биспектрального приёмника (биспектра-анализатора), обусловленные фоновым уровнем биспектра его собственных тепловых шумов, анализируются в сравнении с потенциальной чувствительностью спектрального приёмника и характеризуются введённым в работе параметром — эффективной биспектральной температурой.

Для спектрального приёмника фоновый уровень задаётся спектром мощности естественного теплового шума и определяется широко извест-

ной линейной флюктуационно-диссипационной теоремой (ФДТ) Каллена-Велтона (и в классическом варианте — формулой Найквиста). Рецепты для расчёта естественных уровней СВП дают обобщённая нелинейная ФДТ [8–10] и нелинейные флюктуационно-диссипационные соотношения, вытекающие из ФДТ. В частности, биспектр естественных шумов, как мешающий фон биспектрального приёмника, может быть определён на основе квадратичной ФДТ Ефремова-Стратоновича [11, 12].

Одним из основных источников шума в приёмнике является его входной усилитель. В свою очередь, минимальный уровень собственного шума усилителя определяется естественным шумом и нелинейностью входной цепи. Для безынерционного усилителя, вольт-амперная характеристика (ВАХ) входного элемента которого имеет вид:

$$U = R_1 J + \frac{1}{2} R_2 J^2 + \dots, \quad (1)$$

линейная ФДТ определяет спектр мощности

$$P_N(f) = 2k\Theta R_1, \quad (2)$$

а квадратичная ФДТ — биспектр

$$B_N(f_1, f_2) = 6(k\Theta)^2 R_2, \quad (3)$$

эффективной флюктуационной ЭДС на входе усилителя. В (2, 3) k — постоянная Больцмана, Θ — абсолютная температура входных цепей приёмника.

Пусть на входе приёмника присутствует $J_s(t)$ — сигнальная составляющая полного тока. Тогда, при известном линейном коэффициенте преобразования входного тока, коэффициенте нелинейности $\eta = R_2 J / R_1 \ll 1$, ширине полосы Π спектрального окна и площади окна Π^2 , заданных для отдельных каналов биспектрального приёмников, на их выходах сформируются в пределе неограниченного времени измерения T следующие оценки соответствующих характеристик входного сигнала:

$$\hat{P}_S^J(\Pi; f) = P_S^J(\Pi; f) + P_N(f)/R_1^2, \quad (4)$$

$$\hat{B}_S^J(\Pi; f_1, f_2) = B_S^J(\Pi; f_1, f_2) + B_N(f_1, f_2)/R_1^3, \quad (5)$$

где $P_S^J(\Pi; f)$ и $B_S^J(\Pi; f_1, f_2)$ — слаженные спектр и биспектр сигнала.

Ясно, что, если ВАХ и температура известны сколь угодно точно, то можно применить компенсационные методы спектрального и биспектрального приёмов, исключающие на основе формул (2), (3) из оценок (4), (5) шумовые вклады. Однако, более реалистичными являются ситуации неполной априорной информации о физических характеристиках приёмного канала (а также их изменчивости), при которых компенсационные методы

работают неэффективно, а адаптивные методы не позволяют достичь потенциальных пределов точности.

С другой стороны, как следует из (3), для линейного усилителя ($R_2 \rightarrow 0$) естественный биспектральный фон исчезающе мал даже при высоких температурах и биспектральный метод приёма информационных сигналов выступает в асимптотике $T \rightarrow \infty$ как "метод тёплого поля", не требующий никаких компенсаций.

Для того, чтобы охарактеризовать биспектральный фон в более реалистических ситуациях, когда входной усилитель имеет определённый коэффициент нелинейности $\eta \neq 0$, необходимо сравнить его с биспектром некоторого эталонного сигнала. В качестве такого сигнала естественно выбрать простейший сигнал, имеющий элементарный базовый биспектробраз, а именно — биспектрально связанный триплет

$$J_S(t) = \sum_{n=1}^3 2A_n \cos(2\pi F_n t + \varphi_n), \quad (6)$$

где $F_3 = F_1 + F_2$, и попарно независимые равномерно распределённые в $[0, 2\pi]$ случайные фазы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ связаны соотношением $\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \Psi$; Ψ — детерминированная бифаза триплета. Биспектр $B_S^J(\Pi; f_1, f_2)$ сигнала (6) представляет собой одиночный пик в точке (F_1, F_2) базовой области $f_1 \geq f_2 \geq 0$ биспектральной плоскости. Амплитуда и фаза биспектра в этой точке равны [6]:

$$\left| B_S^J(\Pi; F_1, F_2) \right| = \frac{1 + \delta(F_1 - F_2)}{\Pi^2} A_1 A_2 A_3, \quad (7)$$

$$\arg B_S^J(\Pi; F_1, F_2) = \Psi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3, \quad (8)$$

где $\delta(z) = \{1 \text{ при } z = 0; 0 \text{ при } z \neq 0\}$.

Сопоставим величины отношений "сигнал-шум"

$$(S/N)_P = R_1^2 P_S^J(\Pi; F) / P_N(F), \quad (9)$$

$$= P_S / (4k\Theta\Pi), \quad (10)$$

$$(S/N)_B = R_1^2 \left[|B_S^J(\Pi; F_1, F_2)| / B_N(F_1, F_2) \right]^{2/3}, \quad (11)$$

приведённых ко входу спектрального и биспектрального приёмников, соответственно. В (10) $P_S = \Pi P_S^J(\Pi; F) R_1 = 2A^2 R_1$ — мощность гармонической составляющей, являющейся базовым (эталонным) сигналом спектрального приёмника и имеющей амплитуду $2A$ и частоту F . Используя (3), (7), отношение "сигнал-шум" (11) для биспектрального приёмника нетрудно выразить через величину мощности на входе приёмника — $P_S = 6A^2 R_1$, характеризующей триплет (6) при $A_1 = A_2 = A_3 = A$ и $F_1 \neq F_2$, и представить в аналогичном формуле (10) виде:

$$(S/N)_B = P_S / (4k\Theta_{eff}\Pi). \quad (12)$$

В (12) величина

$$\Theta_{\text{eff}} = 3(4.5k\Theta\Pi R_2^2/R_1^3)^{1/3}\Theta \quad (13)$$

имеет смысл потенциальной эффективной шумовой температуры биспектрального приёмника. Этот параметр показывает до какой величины должна быть снижена температура входных цепей приёмника, чтобы при спектральном методе приёма получить такое же отношение "сигнал-шум" на выходе приёмника, как при биспектральном методе приёма сигнала той же мощности. С другой стороны величина Θ_{eff} при заданном разрешении по частоте Π определит уровень мощности минимально обнаружимого (по критерию $S/N \sim 1$) биспектрального триплета (6) в сравнении с мощностью минимально обнаружимой уединённой спектральной компоненты. Для квазилинейных усилителей Θ_{eff} принимает значения существенно более низкие, чем реальная температура Θ . Так, при $\Theta = 300$ К, $\Pi = 1$ Hz, $R_1 = 50 \Omega$ и $R_2 = 50 \Omega/\text{A}$ (коэффициент нелинейности $\eta = 0,1\%$ при $J = 1$ mA) вычисления эффективной температуры (13) дают $\Theta_{\text{eff}} \simeq 10^{-5}$ K.

Низкие уровни эффективной биспектральной температуры указывают на то, что при приёме и анализе искусственных биспектрально организованных сигналов [6] даже в условиях высоких температур входных цепей приёмника нет необходимости применять в биспектральном приёмнике сложные компенсационные процедуры. Эти же оценки демонстрируют также то, что при легко выполнимом измерении спектра тепловых шумов измерить фундаментальный биспектральный шумовой фон даже в условиях высоких температур цепей весьма сложно. Но именно эти экстремальные особенности природы естественных спектральных характеристик высших порядков, делают легко наблюдаемыми искусственные полиспектральные структуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-02-18027а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
2. Никиас Х. Л., Рагувер М. Р. //ТИИЭР, 1987. Т. 75. № 7. С. 5.
3. Mendel J. M. //Proc.IEEE, 1991. V. 79. № 3. P. 278.
4. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Марков Г. А. — В сб.: Тезисы докладов Международной конференции "100-летие начала использования электромагнитных волн для передачи сообщений и зарождения радиотехники". Ч. II. — Москва. 1995. С. 62.

5. Bochkov G.N., Gorokhov K.V., Dubkov A.A., Zheltov S.N., Markov G.A., Rezvov A.V. — In: Proc. 7th Vilnius Conf. "Fluctuation Phenomenon in Physical Systems". — Vilnius: Vilnius Univ. Press, 1994. P. 243.
6. Бочков Г. Н., Горохов К. В. //Письма в ЖТФ, 1995. Т. 21. Вып. 16. С. 27.
7. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Коннов И. Р. //Письма в ЖТФ, 1994. Т. 20. Вып. 8. С. 35.
8. Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. А. //ЖЭТФ, 1977. Т. 72. С. 238.
9. Бочков Г. Н. Флуктуации в неравновесных радиофизических системах. — Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1981.
10. Стратонович Р. Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. — М.: Наука, 1985.
11. Ефремов Г. Ф. //ЖЭТФ, 1968. Т. 55. С. 2322.
12. Стратонович Р. Л. //Вест. МГУ. Сер. физ. астр., 1967. № 4. С. 84.

Нижегородский государственный
университет, г.Н.Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
28 апреля 1997г.

EFFICIENT NOISE BISPECTRAL TEMPERATURE

G. N. Bochkov, K. V. Gorokhov

The physical limits of sensitivity caused by the background level of an own thermal noise are discussed for a bispectral receiver (bispectral analyzer). The bispectral receiver potential sensitivity in comparision with a spectral one is characterized by the efficient bispectral temperature defined in the work. It is shown, that for receivers with quasi-linear input amplifiers this temperature is efficiently lower than the real temperature, which determinates the spectral background level.

УДК 621.391

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЁМ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

А. П. Трифонов, В. И. Парфёнов, Д. В. Мишин

Получен алгоритм оптимального (байесовского) обнаружения и измерения длительности прямоугольного импульса, наблюдаемого на фоне белого гауссовского шума. В результате моделирования на ЭВМ синтезированных алгоритмов определены потенциальные характеристики приёма.

В В Е Д Е Н И Е

Задача приёма прямоугольного видеоимпульса с неизвестной длительностью на фоне гауссовского белого шума рассмотрена в [1, 2 и др.]. Показано, что полезный сигнал в этом случае является разрывным по неизвестному параметру, выполнен синтез максимально правдоподобных (МП) обнаружителя и измерителя длительности импульса. Найдены точные выражения для характеристик приёма такого сигнала. Однако известно [2–4], что применение байесовского подхода в задачах обработки сигнала может обеспечить более высокую эффективность, чем МП алгоритмы. Так, например, в [3] рассмотрен байесовский алгоритм приёма импульсного сигнала со случайными временем прихода и амплитудой, и показана его достаточно высокая эффективность. В связи с этим представляет интерес задача синтеза и анализа характеристик байесовских обнаружителя и измерителя длительности импульса. Ниже показано, что в рамках байесовского подхода [2–4] можно получить простые алгоритмы и обнаружения сигнала с неизвестной длительностью, и оценивания его длительности.

1. ОБНАРУЖЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

Рассмотрим задачу обнаружения прямоугольного импульса

$$s(t, \tau_0) = \begin{cases} a, & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0, & t < 0, t > \tau_0, \end{cases} \quad (1)$$

А. П. Трифонов, В. И. Парфёнов, Д. В. Мишин

наблюдаемого в течение интервала времени $[0; T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь длительность импульса $\tau \in [T_1; T_2]$ предполагается случайной величиной с априорной плотностью вероятности $W(\tau)$, причём $T_2 \leq T$. Реализация наблюдаемых данных при этом записывается в виде $x(t) = \gamma_0 s(t, \tau_0) + n(t)$. Индекс “0” здесь и далее означает истинное значение соответствующего параметра. Параметр γ_0 — дискретный и принимает два значения: $\gamma_0 = 0$ (в наблюдаемой реализации сигнал отсутствует) и $\gamma_0 = 1$ (в наблюдаемой реализации сигнал присутствует). Априорные вероятности отсутствия и наличия сигнала известны и равны $p_0 = P(\gamma_0 = 0)$ и $p_1 = P(\gamma_0 = 1) = 1 - p_0$. По наблюдаемой реализации $x(t)$ необходимо оптимальным образом решить, какое значение принимает параметр γ , т. е. определить, присутствует сигнал или нет.

Логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) в этом случае будет зависеть от двух параметров γ и τ и в соответствии с [1] может быть записан в виде

$$L(\gamma, \tau) = \frac{2\gamma a}{N_0} \int_0^\tau \left[x(t) - \frac{a}{2} \right] dt. \quad (2)$$

Оценка дискретного параметра γ в соответствии с алгоритмом максимального правдоподобия (МП) может быть найдена как

$$\hat{\gamma} = \arg \sup_{\gamma} \sup_{\tau} L(\gamma, \tau).$$

Учитывая, что $L(\gamma = 0, \tau) = 0$, получаем, что МП алгоритм обнаружения импульса (1) заключается в сравнении с нулевым порогом величины абсолютного максимума логарифма ФОП

$$\sup_{\tau} L(\tau) \stackrel{\hat{\gamma}=1}{\underset{\hat{\gamma}=0}{\gtrless}} 0, \quad (3)$$

где

$$L(\tau) = L(\gamma = 1, \tau). \quad (4)$$

Заметим, что вместо алгоритма (3) можно использовать обобщённый МП алгоритм обнаружения [1], основанный на сравнении величины абсолютного максимума логарифма ФОП с некоторым порогом c

$$\sup_{\tau} L(\tau) \stackrel{\hat{\gamma}=1}{\underset{\hat{\gamma}=0}{\gtrless}} c. \quad (5)$$

Порог c в (5) может выбираться, исходя из различных критериев оптимальности.

На рис. 1 штриховой линией выделена структурная схема МП обнаружителя прямоугольного импульса с неизвестной длительностью, где обозначено: 1 — интегратор на интервале времени $[0; t]$, 2 — пиковый детектор, определяющий наибольшее значение сигнала, 3 — пороговое устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала пикового детектора с порогом s и выносящее решение о наличии сигнала на входе обнаружителя, если порог превышен, и решение об отсутствии сигнала, если порог не превышен. Структурная схема МП обнаружителя является одноканальной по неизвестному параметру s , и, следовательно, достаточно легко реализуема аппаратурно, что является достаточно редким исключением в задаче обнаружения сигнала с неизвестным параметром [1].

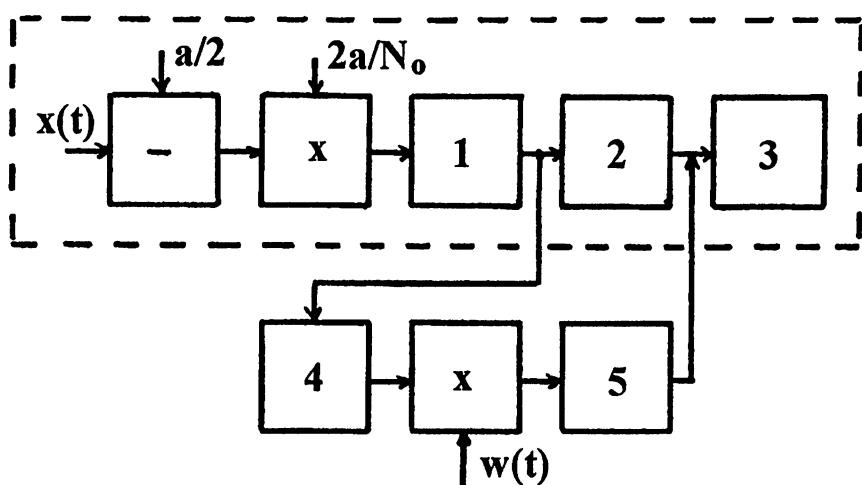


Рис. 1.

Качество обнаружения будем характеризовать средней вероятностью ошибки [1]

$$P_e = p_0\alpha + p_1\beta, \quad (6)$$

где α — вероятность ошибки 1-го рода (ложной тревоги), $\beta = \int_{T_1}^{T_2} \beta(\tau)W(\tau) d\tau$ — безусловная вероятность ошибки 2-го рода (пропуска сигнала), а $\beta(\tau_0)$ — условная вероятность пропуска сигнала с длительностью τ_0 . В [1] найдены точные выражения для вероятностей ошибок

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - u - \eta_1 z/2)^2}{2\eta_1} \right] \cdot$$

$$\times \left\{ \Phi \left[\frac{z}{2} \sqrt{1 - \eta_1} + \frac{x}{\sqrt{1 - \eta_1}} \right] - \exp(-xz) \Phi \left[\frac{z}{2} \sqrt{1 - \eta_1} - \frac{x}{\sqrt{1 - \eta_1}} \right] \right\} dx,$$

$$\beta(\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_0}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(x + \eta_0 z/2)^2 + u^2 - \eta_0 uz}{2\eta_0} \right] \left\{ \exp \left(\frac{ux}{\eta_0} \right) \times \right.$$
(7)

$$\times \Phi \left[u \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 \eta_1}} + x \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_0(\eta_0 - \eta_1)}} \right] - \exp \left(-\frac{ux}{\eta_0} \right) \Phi \left[u \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 \eta_1}} - \right.$$

$$\left. - x \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_0(\eta_0 - \eta_1)}} \right] \left\{ \Phi \left[\frac{z}{2} \sqrt{1 - \eta_0} + \frac{x}{\sqrt{1 - \eta_0}} \right] - \exp(-xz) \times \right.$$

$$\left. \times \Phi \left[\frac{z}{2} \sqrt{1 - \eta_0} - \frac{x}{\sqrt{1 - \eta_0}} \right] \right\} dx, \quad (8)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ — интеграл вероятности, $z^2 = 2a^2T_2/N_0$ —

максимальное отношение сигнал/шум, $\eta_0 = \tau_0/T_2$, $\eta_1 = T_1/T_2$, $u = c/z$ — нормированный порог обнаружения. В качестве критерия оптимальности выберем критерий минимума средней вероятности ошибки (6) и будем находить порог c , исходя из этого критерия. Очевидно, получаемый таким образом порог $c^* = \arg \inf P_e(c)$ будет зависеть от z и p_0 . Назовём такой порог оптимальным, а соответствующий алгоритм обнаружения — МП обнаружителем с оптимизированным порогом.

Хорошо известно [1–3 и др.], что при байесовском подходе оптимальным правилом обнаружения сигнала является правило, обеспечивающее минимум среднего риска. Рассмотрим возможность применения классического байесовского подхода к обнаружению импульса (1) с неизвестной длительностью. Для синтеза байесовского алгоритма используем простую функцию потерь, у которой стоимости правильных решений принимаются нулевыми, а стоимости ошибок первого и второго рода одинаковыми, что соответствует критерию идеального наблюдателя. Тогда оптимальный (байесовский) алгоритм обнаружения импульса (1) при априорной плотности вероятности длительности $W(\tau)$ заключается в формировании величины

$$I = \int_{T_1}^{T_2} \exp[L(\tau)] W(\tau) d\tau \quad (9)$$

и сравнении её с порогом p_0/p_1 . Из сопоставления обобщённого МП алгоритма обнаружения (5) и байесовского алгоритма обнаружения (8) следует, что порог c в алгоритме (5) может быть выбран таким же, как для байесовского, т. е. равным $\ln(p_0/p_1)$.

В большинстве случаев байесовские обнаружители (БО) сигналов с не-

известными параметрами достаточно сложно реализуемы практически. Обычно БО являются многоканальными, причём для полностью оптимальной реализации число каналов должно быть бесконечным [1]. Как следует из (8), одно из немногих исключений, наряду с обнаружением сигнала с неизвестным моментом появления [3] — это БО прямоугольного импульса с неизвестной длительностью. Структурная схема такого обнаружителя приведена на рис. 1, из которого необходимо исключить блок 2. На этом рисунке блок 4 — это нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой, блок 5 — интегратор на интервале времени $[T_1; T_2]$, а пороговое устройство 3 осуществляет сравнение выходного сигнала интегратора 5 с порогом p_0/p_1 и выносит решение о наличии сигнала, если порог превышен, и решение об отсутствии сигнала, если порог не превышен. Из рис. 1 следует, что схема БО является одноканальной, однако она несколько сложнее схемы МП обнаружителя.

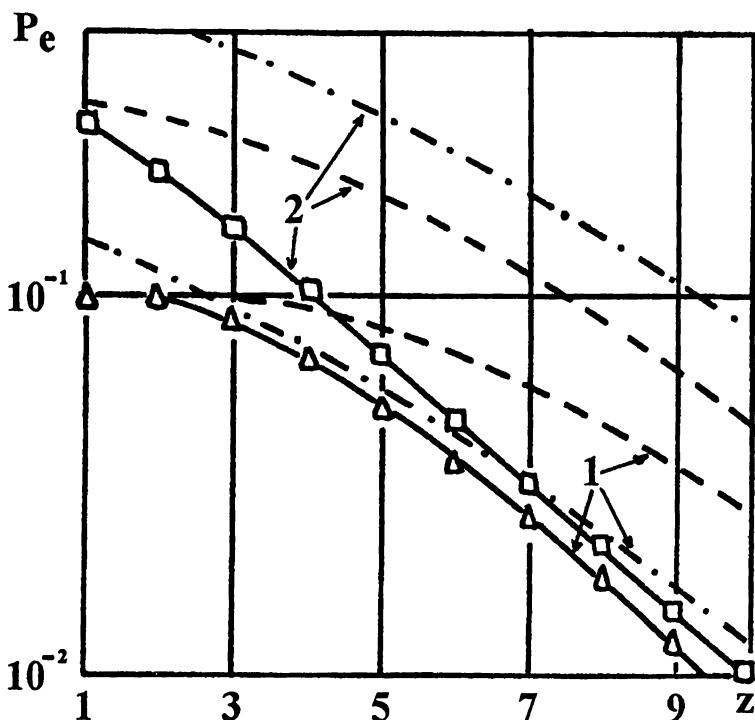


Рис. 2.

Рассмотрим характеристики МП обнаружителя импульса (1). На рис. 2 представлены зависимости средней вероятности ошибки P_e (6) от отношения сигнал/шум z для $\eta_1 = 0,1$ и априорной плотности вероятности неизвестной длительности

$$W(\tau) = \frac{1}{T_2 - T_1} \begin{cases} 1, & T_1 \leq \tau \leq T_2, \\ 0, & \tau < T_1, \tau > T_2, \end{cases} \quad (10)$$

Сплошные линии на рис. 2 соответствуют оптимальному порогу обнаружения $c = c^*$, штриховые — порогу $c = \ln(p_0/p_1)$, а штрих-пунктирные — порогу $c = 0$. Кривые 1 построены для $p_0 = 0.1$, кривые 2 — $p_0 = 0.7$. Анализ рис. 2 свидетельствует о целесообразности использования МП обнаружителя с оптимизированным порогом, особенно при малых значениях p_0 и не очень малых значениях z . Отметим, что исследование БО (8) затруднительно, и найти аналитически его характеристики не удается.

2. ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВИДЕОИМПУЛЬСА

Рассмотрим теперь задачу оценки длительности импульса (1), полагая, что $p_1 = 1$. Алгоритм максимального правдоподобия оценки длительности [2] состоит в поиске положения $\hat{\tau}$, абсолютного (наибольшего) максимума функционала $L(\tau)$ (4): $\hat{\tau} = \arg \sup L(\tau)$. Следовательно, структура МП алгоритма оценивания не зависит от априорной плотности вероятности параметра τ . Структурная схема МП измерителя длительности

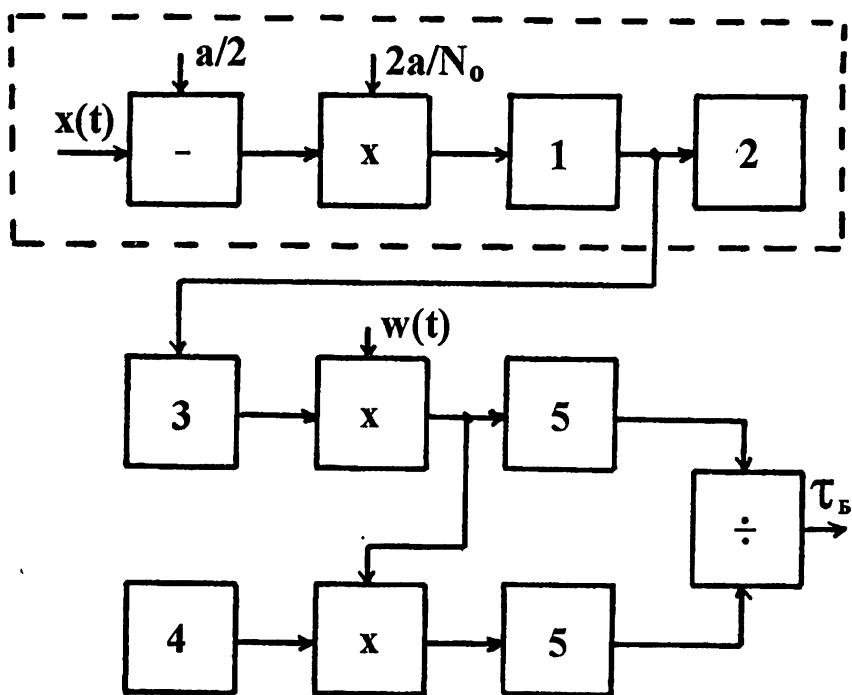


Рис. 3.

выделена на рис. 3 штриховой линией, где обозначено: 1 — интегратор на интервале времени $[0; t]$, 2 — устройство поиска положения абсолютного максимума сигнала на интервале $[T_1, T_2]$, являющегося оценкой МП $\hat{\tau}$.

Точность оценки будем характеризовать безусловным рассеянием (средним квадратом ошибки) оценки длительности

$$V(\hat{\tau}) = \int_{T_1}^{T_2} V(\hat{\tau}|\tau) W(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где $V(\hat{\tau}|\tau_0)$ — условное рассеяние МП оценки длительности сигнала (1). В [2] найдено точное выражение для условного рассеяния оценки длительности

$$V(\hat{\tau}|\tau_0) = T_2^2 \left[(1 - \eta_0)^2 - 2I_2(\eta_0) + 2\eta_0 I_1(\eta_0) \right],$$

$$I_k(\eta_0) = \int_{\eta_1}^1 \eta^{k-1} F(\eta) d\eta, \quad F(\eta) = \begin{cases} P_1(\eta), & \eta_1 \leq \eta < \eta_0, \\ 1 - P_2(\eta), & \eta_0 \leq \eta \leq 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_k(\eta) = & \sqrt{\frac{2}{\pi |\eta - \eta_0|}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi |\eta_k - \eta|}} \exp \left[-\frac{(x_1 + z|\eta_k - \eta|/2)^2}{2|\eta_k - \eta|} \right] + \right. \\ & + z \exp(-zx_1) \Phi \left[\frac{z}{2} \sqrt{|\eta_k - \eta|} - \frac{x_1}{|\eta_k - \eta|} \right] \left. \right\} \operatorname{sh} \left(\frac{x_1 x_2}{|\eta - \eta_0|} \right) \times \\ & \times \exp \left[-\frac{(x_2 + z|\eta - \eta_0|/2)^2 + x_1^2 - zx_1|\eta - \eta_0|}{2|\eta - \eta_0|} \right] \left\{ \Phi \left[\frac{z}{2} \sqrt{|\eta_{3-k} - \eta_0|} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{x_2}{\sqrt{|\eta_{3-k} - \eta_0|}} \right] - \exp(-zx_2) \Phi \left[\frac{z}{2} \sqrt{|\eta_{3-k} - \eta_0|} - \frac{x_2}{\sqrt{|\eta_{3-k} - \eta_0|}} \right] \right\} dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

где $\eta_k = T_k/T_2$, $k = 1, 2$, $\eta = \tau/T_2$.

Байесовский алгоритм оценивания при квадратичной функции потерь минимизирует средний квадрат ошибки (рассеяние) оценки. Байесовская оценка длительности в рассматриваемых условиях определяется как [4]

$$\tau_B = \int_{T_1}^{T_2} \tau W(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau / \int_{T_1}^{T_2} W(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau. \quad (12)$$

Структурная схема байесовского алгоритма оценивания длительности изображена на рис. 3, из которого следует исключить блок 2. Остальные блоки обозначены: 3 — нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой, 4 — генератор линейно изменяющегося напряжения, 5 — интеграторы на интервале времени $[T_1; T_2]$. Очевидно, что аппаратурная реализация байесовского измерителя длительности несколько сложнее МП измерителя. Тем не менее, как и при оценивании момента появления импульса [3], блок-схема байесовского измерителя длительности является одноканальной по оцениваемому параметру. Это существенно облегчает аппаратурную реализацию байесовского алгоритма оценки.

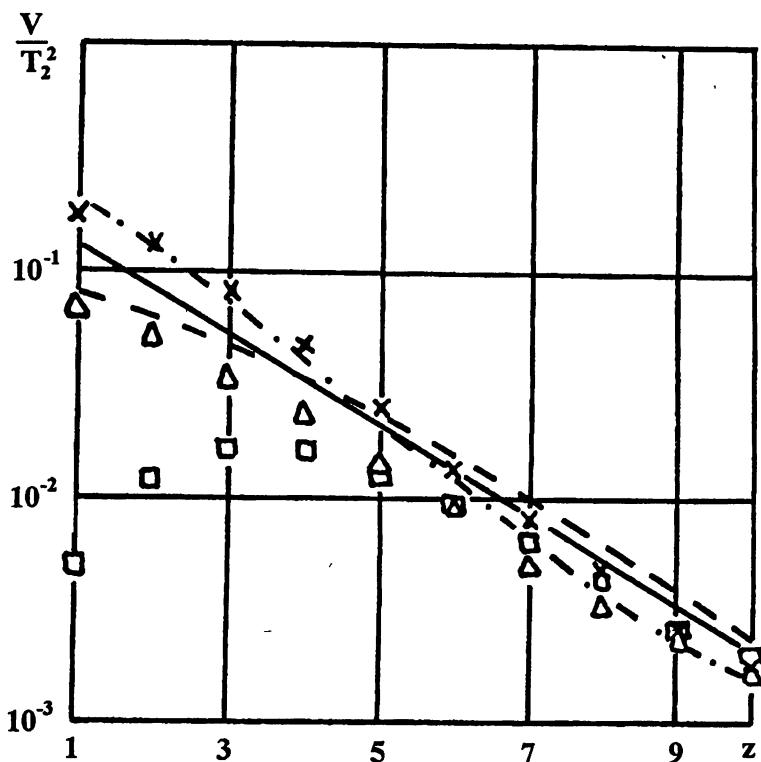


Рис. 4.

На рис. 4 приведены зависимости условного и безусловного рассеяний оценок МП длительности импульса от отношения сигнал/шум z для $\eta_1 = 0,1$ и априорной плотности вероятности (9). Сплошной линией показано безусловное рассеяние оценки МП, рассчитанное по формуле (10), штриховой — условное рассеяние оценки МП $V(\hat{\tau}|\tau_0)$, рассчитанное по формуле (11) при $\eta_0 = (\eta_1 + 1)/2$, и штрих-пунктирной — условное рассеяние оценки (11) при $\eta_0 = \eta_1$. Следует отметить, что теоретический анализ байесовского измерителя, как и байесовского обнаружителя осуществить не удается. В связи с этим исследование эффективности байесовских алгоритмов обнаружения и оценки было выполнено методами статистического моделирования на ЭВМ.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Представим логарифм ФОП $L(\eta)$ (4) в виде $L(\eta) = S(\eta, \eta_0) + N(\eta)$, где $\eta = \tau/T_2$. Здесь $S(\eta, \eta_0) = \langle L(\eta) \rangle = z^2 [\gamma_0 \min(\eta, \eta_0) - \eta/2]$, $N(\eta) = 2a \int_0^\tau n(t) dt/N_0$ — винеровский процесс с нулевым средним значением и дисперсией $z^2\eta$. При моделировании вырабатывались отсчеты функции

$N(\eta)$ с шагом $\Delta\eta$. На основе сформированных дискретных отсчётов реализации этого процесса аппроксимировались ступенчатыми функциями с максимальной относительной среднеквадратичной погрешностью $\epsilon = 0,1$. Согласно [5] винеровский процесс $N(\eta)$ представлялся через дискретные отсчёты как $N(n\Delta\eta) = z\epsilon\sqrt{\eta_1}\sum_{k=0}^n X[k]$, где $X[k]$ — гауссовские независимые случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией. Таким образом, дискретные отсчёты логарифма ФОП (4) формировались с шагом $\Delta\eta = \eta_1\epsilon^2$ в виде

$$L[n\Delta\eta] = \eta_1 z^2 \epsilon^2 [\gamma_0 \min(n, n_0) - n/2] + z\epsilon\sqrt{\eta_1}\sum_{k=0}^n X[k],$$

где $n_0 = \text{ent}(\eta_0/\eta_1\epsilon^2)$, $\text{ent}(.)$ — целая часть числа. На основе дискретных отсчётов логарифма ФОП (4) вырабатывались величины (8) и (12)

$$I = \frac{\eta_1\epsilon^2}{1 - \eta_1} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L(n\Delta\eta)], \quad (13)$$

$$\tau_B = T_2 \left(\sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} n \exp[L(n\Delta\eta)] \right) / \left(\sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L(n\Delta\eta)] \right), \quad (14)$$

где $n_{\min} = \text{ent}(1/\epsilon^2)$, $n_{\max} = \text{ent}(1/\eta_1\epsilon^2)$.

Моделирование БО осуществлялось следующим образом. Формировалась величина (13) при $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0 = 1$ и сравнивалась с порогом p_0/p_1 . Если при $\gamma_0 = 0$ порог был превышен, то фиксировалась ошибка ложной тревоги. Если при $\gamma_0 = 1$ выполнялось условие $I < p_0/p_1$, то фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала использовались относительные частоты появления соответствующих ошибок. При моделировании байесовского алгоритма оценивания формировалась величина (14), которая является байесовской оценкой длительности импульса (1). Причём, истинное значение нормированной длительности $\eta_0 = \tau_0/T_2$ в каждом испытании выбиралось либо фиксированным (на краю или в центре априорного интервала $[\eta_1; 1]$) при определении условных характеристик, либо случайнym, распределённым равномерно на интервале $[\eta_1; 1]$ — при определении безусловных характеристик. В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого значения z . Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений средней вероятности ошибки P_e и условного и безусловного рассеяний не более, чем на 15% при $P_e > 10^{-3}$, $V(\hat{\tau})/T_2^2 > 10^{-3}$.

Результаты моделирования приведены на рис. 2 и рис. 4. На рис. 2 нанесены экспериментальные значения средней вероятности ошибки БО, которые изображены треугольниками для $p_0 = 0,1$ и квадратиками для

$p_0 = 0,7$. Сравнение экспериментальных значений со сплошными кривыми на рис. 2 свидетельствует о практически полном совпадении характеристик обнаружения БО и МП обнаружителя с оптимизированным порогом. Это позволяет рекомендовать формулы (6) и (7) для расчёта средней вероятности ошибки при использовании БО: $P_{eB} \simeq \inf P_e(c)$.

На рис. 4 нанесены экспериментальные значения условного и безусловного рассеяний байесовской оценки длительности, которые обозначены: треугольниками — безусловное рассеяние байесовской оценки длительности, квадратиками — условное рассеяние байесовской оценки при $\eta_0 = (\eta_1 + 1)/2$ и крестиками — условное рассеяние при $\eta_0 = \eta_1$. Результаты моделирования байесовского измерителя и сравнение их с теоретическими формулами для характеристик МП измерителя показывают, что условное рассеяние байесовской оценки при $\eta_0 = (\eta_1 + 1)/2$ меньше условного рассеяния оценки МП. Однако, если $\eta_0 = \eta_1$, то при малых z условное рассеяние байесовской оценки меньше, а при больших z — больше условного рассеяния оценки МП. Кроме того, с ростом параметра η_1 величины этих условных рассеяний уменьшаются. Безусловное рассеяние байесовской оценки длительности меньше рассеяния МП оценки при всех значениях отношения сигнал/шум. В частности, $\chi = V(\tau_B)/V(\hat{\tau}) \simeq 0,7$ при $z \gtrsim 5$, что совпадает с аналогичным соотношением, полученным в [6]. Если же отношение сигнал/шум z мало ($z \lesssim 1$), то $\chi = V(\tau_B)/V(\hat{\tau}) \simeq 0,4$. Причём полученные значения χ практически не зависят от η_1 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При одинаковом объёме априорной информации и равномерном априорном распределении неизвестной длительности характеристики байесовского и максимально-правдоподобного алгоритмов обнаружения практически совпадают. Следовательно, вместо относительно сложного байесовского обнаружителя можно использовать более простой максимально-правдоподобный обнаружитель с оптимизированным порогом, так как средние вероятности ошибок для этих двух алгоритмов практически одинаковы. При оценке длительности прямоугольного импульса, если не требуется очень высокая точность оценки, возможно применение максимально-правдоподобного измерителя, более просто реализуемого аппаратурно. Если же необходимо обеспечить предельно достижимую точность оценки, то целесообразно использовать байесовский измеритель. Приведённые результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трифонов А. П. Теория обнаружения сигналов. — М.: Радио и связь, 1984. С. 12.
2. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
3. Ванжа А. В., Силаев А. М. // Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 12. С. 1257.
4. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. 296 с.
5. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1971. 326 с.
6. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979. 528 с.

Воронежский государственный
университет

Поступила в редакцию
13 июня 1997 г.

**THE OPTIMAL RECEIVING OF A SIGNAL WITH UNKNOWN
DURATION AT THE BACKGROUND OF WHITE NOISE**

A. P. Trifonov, V. I. Parfenov, D. V. Mishin

The algorithm of the optimal (bayesian) detection and estimation of a rectangular pulse duration at the background of white noise is obtained. Potential characteristics of receiving are derived considering the results of computer modelling.

УДК 534.222.1

**ЛУЧЕВОЙ ПОДХОД ДЛЯ РАСЧЁТА
СГЛАЖЕННОГО ПО УГЛОВЫМ
И ПРОСТРАНСТВЕННЫМ МАСШТАБАМ
ЛОКАЛЬНОГО СПЕКТРА ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ**

A. Л. Вироевлянский, И. А. Окомелькова

Предложены простые соотношения для приближённого вычисления сглаженного локального спектра (функции Вигнера) поля в многомодовом волноводе. Несмотря на то, что используемый подход является лучевым, он применим не только в регулярных точках волновода, но и на каустиках. Для случая плоскослоистого волновода показано, что точность полученной приближённой формулы повышается с увеличением масштабов сглаживания. Таким образом, точность расчёта сглаженных характеристик поля может быть повышена за счёт потери информации о мелких деталях волновой картины.

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то, что метод геометрической оптики позволяет рассчитывать тонкую интерференционную структуру поля, при анализе распространения волн в многомодовых волноводах (например, коротких радиоволн в ионосфере или звуковых волн в океане) часто ограничиваются грубым расчётом интенсивности поля путём некогерентного суммирования лучей [1, 2]. Дело здесь не только в упрощении вычислений. Расчёт мелких деталей волновой картины (знания которых на практике часто и не требуется) в условиях типичной для волноводных задач многолучёвости затруднён как неизбежными неточностями математической модели среды, так и погрешностями, обусловленными приближённым характером геометрической оптики. Некогерентное суммирование лучей даёт представление об усреднённом по пространственным координатам распределении интенсивности поля в волноводе, причём зависимость полученного результата от малых вариаций параметров задачи слабее, чем результата вычислений с учётом фаз лучей.

Объём вычислений можно заметно сократить, если некогерентное сложение лучей дополнить явным пространственным усреднением [3]. Когда размер области, по которой проводится усреднение, становится очень большим, средняя интенсивность поля выражается простой формулой [1].

В нашей работе речь также идёт о расчёте усреднённых величин, но объектом исследования здесь является не интенсивность, а так называемый локальный спектр (функция Вигнера) поля, характеризующий

пространственно-угловую структуру последнего. Показано, что сглаженный по достаточно большим угловым и пространственным масштабам локальный спектр может быть легко вычислен в рамках лучевого подхода. Обоснование этого утверждения с несколькою других позиций дано в работе [4].

Несмотря на использование лучевого подхода, в рамках нашего формализма каустики не являются особыми точками. Этот момент детально исследован применительно к случаю плоскослоистого волновода. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрен конкретный пример.

2. СГЛАЖЕННАЯ ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА

Рассмотрим скалярное волновое поле u , возбуждаемое точечным тональным источником в рефракционном плоскослоистом волноводе. Введём цилиндрическую систему координат (r, ϑ, z) с осью z , проходящей через источник и совпадающей с направлением изменения показателя преломления n . Это направление далее будем называть вертикальным. Комплексная амплитуда поля задаётся уравнением Гельмгольца, которое в силу цилиндрической симметрии задачи не зависит от азимутального угла ϑ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 n^2(r, z) u = -2 \frac{\delta(r)}{r} \delta(z - z_0),$$

где k — волновое число в среде с $n = 1$.

Локальный спектр поля по координате z определим как функцию Вигнера [5]

$$W(z, p, r) = \frac{k}{2\pi} \int u(r, z + \rho/2) u^*(r, z - \rho/2) e^{-ikp\rho} d\rho. \quad (1)$$

Параметр p (в квантовой механике это импульс) можно трактовать как $n(r, z) \sin \theta$, где θ — угол скольжения плоской волны, вклад которой в суммарное волновое поле в точке (r, z) задаёт интеграл (1). Таким образом, зависимость функции Вигнера от p описывает угловую структуру поля в данной точке.

Для описания локального спектра поля, усреднённого по угловым и пространственным масштабам, введём в рассмотрение сглаженную функцию Вигнера

$$\overline{W}(z, p, r) = \frac{1}{2\pi \Delta z \Delta p} \int \exp \left\{ -\frac{(z - z')^2}{2\Delta z^2} - \frac{(p - p')^2}{2\Delta p^2} \right\} W(z', p', r) dz' dp', \quad (2)$$

где масштабы усреднения по вертикальной координате z и углу задаются, соответственно, параметрами Δz и Δp . Интеграл по p' вычисляется в явном виде, и мы получаем

$$\begin{aligned} \bar{W}(z, p, r) = & \frac{k}{(2\pi)^{3/2} \Delta z} \int u(r, z' + \rho/2) u^*(r, z' - \rho/2) \times \\ & \times \exp \left\{ -ik\rho p - \frac{k^2 \Delta p^2 \rho^2}{2} - \frac{(z - z')^2}{2 \Delta z^2} \right\} d\rho dz'. \end{aligned} \quad (3)$$

3. РАСЧЁТ СГЛАЖЕННОЙ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

В приближении геометрической оптики комплексная амплитуда поля есть сумма вкладов приходящих в точку наблюдения лучей

$$u = \sum_l B_l e^{ik\psi_l}, \quad (4)$$

где l — индекс, нумерующий принимаемые лучи, а B_l , ψ_l — амплитуды и эйконалы этих лучей, соответственно.

Рассматривая эйконал как функцию координат r и z , отметим следующее приближённое равенство, справедливое при малых ρ :

$$\psi_l(z + \rho/2, r) - \psi_l(z - \rho/2, r) = \frac{\partial \psi_l(z, r)}{\partial z} = n(z) \rho \sin \theta_l, \quad (5)$$

где θ_l — угол скольжения, под которым l -й луч приходит в точку наблюдения (r, z) .

Подставим соотношение (4) в (3) и рассмотрим ситуацию, когда масштабы сглаживания достаточно велики для того, чтобы (i) можно было пренебречь членами, представляющими произведение вкладов разных лучей, и (ii) можно было бы использовать приближение (5). Условие (i) обеспечивается выбором достаточно большого масштаба пространственного усреднения Δz , а условие (ii) — выбором большого масштаба сглаживания по углу Δp (согласно (3) чем больше Δp , тем меньше интервал изменения ρ). Пренебрегая зависимостью амплитуды луча от ρ , после вычисления гауссова интеграла по этой переменной, находим

$$\bar{W}(z, p, r) = \frac{1}{2\pi \Delta z \Delta p} \sum_l \int B_l^2 \exp \left\{ -\frac{(n \sin \theta_l - p)^2}{\Delta p^2} - \frac{(z - z')^2}{2 \Delta z^2} \right\} dz'. \quad (6)$$

Подставим сюда явное выражение для амплитуды луча в цилиндрически симметричном волноводе [1, 6]

$$B^2 = \frac{n_0 \cos \chi}{nr \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cos \theta}, \quad (7)$$

где n_0 — показатель преломления вблизи источника, χ — угол выхода луча. При вычислении производной в знаменателе вертикальная координата луча z на фиксированной дистанции r рассматривается как функция угла выхода χ . Пользуясь данной функцией, перейдём от интегрирования по z к интегрированию по χ (угол скольжения θ рассматриваем как функцию χ). При этом

$$\bar{W}(z, p, r) = \frac{n_0}{2\pi r \Delta z \Delta p} \sum_l \int \frac{\cos \chi}{n \cos \theta} \exp \left\{ -\frac{(n \sin \theta_l - p)^2}{\Delta p^2} - \frac{(z_l - z)^2}{2\Delta z^2} \right\} d\chi. \quad (8)$$

В плоскослоистом волноводе с $n = n(z)$ согласно закону Снеллиуса вдоль траектории любого луча имеет место равенство [6, 1] $n_0 \cos \chi = n \cos \theta$ и соотношение (8) переходит в

$$\bar{W}(z, p, r) = \frac{1}{2\pi r \Delta z \Delta p} \sum_l \int \exp \left\{ -\frac{(n \sin \theta_l - p)^2}{\Delta p^2} - \frac{(z_l - z)^2}{2\Delta z^2} \right\} d\chi. \quad (9)$$

В (8) и (9) индекс l нумерует уже не отдельные лучи, а конгруэнции лучей, по углам выходов которых ведётся интегрирование. Лучи, принадлежащие одной конгруэнции, имеют сходную "топологию", то есть одинаковые количества верхних и нижних точек заворота, а также одинаковые знаки углов скольжения в начале и в конце траектории.

На основе данной формулы можно сравнительно просто выполнить численный расчёт слаженной функции Вигнера. Для этого с помощью лучевой программы достаточно рассчитать траектории $N >> 1$ лучей, выходящих под углами χ_j , которые с малым шагом $\chi_{j+1} - \chi_j = \delta\chi$ ($j = 1, \dots, N - 1$) покрывают весь интервал углов выходов волн, удерживаемых волноводом. Координаты данных лучей и углы их скольжения на заданной дистанции r обозначим через z_j и θ_j . Тогда в соответствии с формулой (9) получаем

$$\bar{W}(z, p, r) = \frac{\delta\chi}{2\pi^2 r \Delta z \Delta p} \sum_j \exp \left\{ -\frac{(n(z_j) \sin \theta_j - p)^2}{2\Delta p^2} - \frac{(z - z_j)^2}{2\Delta z^2} \right\}. \quad (10)$$

Столь же простая формула получается из (8) для переменного по трассе волновода. Хотя данная процедура предполагает использование лучевых программ, она не требует решения задачи прицеливания, то есть определения лучей, попадающих в заданную точку пространства. По этой причине слаженный локальный спектр рассчитать проще, чем, например, обычную интенсивность поля.

Другим важным достоинством предложенной процедуры является отсутствие в ней деления на производную координаты луча по углу выхода. Обращение в нуль данной производной в геометрической оптике приводит

к обращению амплитуды поля в бесконечность на каустиках [1, 6]. У нас этот член, присутствующий в (7), исчез в процессе замены переменных при переходе от (6) к (8) и (9).

Тем не менее, поскольку соотношения (8), (9) и (10) получены на основе лучевой теории, остаётся сомнение в возможности их использования в окрестностях каустик. Чтобы глубже разобраться в этом вопросе необходимо выйти за пределы приближения геометрической оптики. Это сделано в следующем разделе, где детально исследован случай плоскослоистого волновода.

4. СГЛАЖЕННАЯ ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА В ПРИБЛИЖЕНИИ ВКБ

Известно, что решение уравнения Гельмгольца в плоскослоистом волноводе можно получить при рассмотрении волн, выходящих из источника с последовательным учётом их рефракции в среде и отражений на границах. Подробное описание данного формализма изложено в [7] (см. также [1, 6]). Найденное таким образом решение в приближении ВКБ может быть записано в виде:

$$u(r, z) = \sum_l \int A_l(a, z, r) e^{i\Psi_l(a, z) + ikar} da, \quad (11)$$

где

$$A_l(a, z, r) = \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} \frac{\sqrt{ae^{i\pi/4}}}{\sqrt{(n^2(z_0) - a^2)(n^2(z) - a^2)}}, \quad (12)$$

$$\Psi_l(a, z) = k [\alpha J(z_0, a) + k N I(a) + \beta J(z, a)] + N\pi + (\alpha + \beta)\frac{\pi}{4}, \quad (13)$$

$$J(z, a) = \int_{z_{\min}}^z \sqrt{n^2(z) - a^2}, \quad I(z, a) = 2 \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sqrt{n^2(z) - a^2}.$$

Фигурирующие в этих формулах величины имеют простой физический смысл. Поле $u(r, z)$ представлено здесь как суперпозиция квазиплоских волн с амплитудами A_l и фазами Ψ_l , причём каждой волне отвечает своя конгруэнция лучей. Определённую соотношением (13) функцию $\Psi_l(a, z)$ можно трактовать как фазу луча с траекторией $r = R_l(z, a)$, где лучевой параметр a связан с текущим углом скольжения θ на горизонте z законом Снеллиуса $a = n(z) \cos \theta$, а явное выражение для функции $R_l(z, a)$ имеет вид:

$$R_l(z, a) = \alpha D(z_0, a) + N D(a) + \beta D(z, a).$$

Функции

$$D(z, a) = a \int_{z_{\min}}^z \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - a^2}},$$

и

$$D(a) = 2\mathcal{D}(z_{\max}, a)$$

имеют смысл смещения по горизонтали луча при переходе от точки заворота z_{\min} до горизонта z и длины цикла луча, соответственно [1, 6]. Их связь с введёнными ранее функциями $I(a)$ и $J(z, a)$ даётся соотношениями

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -\mathcal{D}(z, a), \quad \frac{\partial I}{\partial a} = -D(a). \quad (14)$$

Параметры α и β (равные 1 или -1), задающие знаки угла выхода из источника и прихода в точку наблюдения, а также N , задающий число полных циклов траектории, определяют "топологию" луча. Параметр l , указывающий тип топологии, нумерует возможные комбинации этих трёх величин. Отметим полученные с учётом (14) следующие полезные формулы, которые будут использованы далее

$$\frac{\partial \Psi_l}{\partial z} = k\beta \sqrt{n^2(z) - a^2} = kn \sin \theta_l, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial a} = -kR(z, a), \quad (15)$$

где θ_l — угол прихода луча в точку (r, z) .

Интегрирование в (11) ведётся в интервале значений a , удовлетворяющих условию $\max(n(z), n(z_0)) < a < n_{\max}$, где n_{\max} — максимальное значение показателя преломления в волноводе. Данная формула описывает компоненту поля, формируемую распространяющимися модами и играющую основную роль на больших удалениях от источника.

Поскольку выражение (11) получено в рамках приближения ВКБ, амплитуды квазиплоских волн A_l , заданные (12), в точках заворота обращаются в бесконечность. Поэтому представление поля (11) в некотором смысле уступает даже обычному лучевому представлению поля, которое применимо и в точках заворота лучей (вдали от точек заворота лучевое представление может быть получено из (11) путём вычисления фигурирующих там интегралов методом стационарной фазы [7]). Вместе с тем (11) имеет важное для нас преимущество перед лучевым представлением: оно может быть использовано для описания поля на каустиках, которые в поле точечного источника, как известно [6], не совпадают с точками заворота. С помощью (11), в частности, можно получить известное асимптотическое выражение для поля в окрестности каустики через функции Эйри. Соответствующая процедура изложена, например, в [6].

Подставляя (11)–(13) в (3), получаем следующее представление для функции Вигнера

$$\begin{aligned} \overline{W}(z, p, r) = & \frac{k}{(2\pi)^{3/2} \Delta z} \sum_{l_1, l_2} \int A_{l_1}(a_1, z', r) A_{l_2}(a_2, z', r) \times \\ & \times \exp \{i\Psi_{l_1}(a_1, z' + \rho/2) - i\Psi_{l_2}(a_2, z' - \rho/2) + ik(a_1 - a_2)r\} \times \end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ -ik\rho p - \frac{k^2 \Delta p^2 \rho^2}{2} - \frac{(z - z')^2}{2\Delta z^2} \right\} d\rho dz' da_1 da_2.$$

Упростим это выражение, сделав следующие дополнительные приближения, условия применимости которых обсуждаются ниже. Пренебрежём вкладами всех слагаемых с $l_1 \neq l_2$, перейдём к новым переменным интегрирования

$$\mu = a_1 - a_2, \quad a = (a_1 + a_2)/2,$$

и, полагая величины μ и ρ малыми, с учётом (15) выполним преобразование

$$\begin{aligned} \Psi_l(a_1, z + \rho/2) - \Psi_l(a_2, z - \rho/2) &= \Psi_l(a + \mu/2, z + \rho/2) - \Psi_l(a - \mu/2, z - \rho/2) = \\ &= -k\mu R_l(z, a) + kn\rho \sin \theta_l. \end{aligned} \quad (16)$$

Величины μ и ρ можно считать тем более малыми, чем больше масштабы сглаживания Δp и Δz . Остановимся на этом подробнее. Реальный интервал интегрирования по ρ фактически определяется слагаемым в показателе экспоненты, содержащим Δp . Интервал изменения μ оценить тоже несложно. Для этого на интервале интегрирования по z' (порядка Δz) фазу $\Psi_l(a, z')$ с учётом (15) приближённо заменим плоской волной $kn \sin \theta(z - z') + \text{const}$, где θ связано с a соотношением $a = n(z) \cos \theta$. Интегрирование по z' ограничивает реальный масштаб изменения разности углов θ , отвечающих a_1 и a_2 , а, стало быть, и область изменения параметра μ . На основании сказанного для характерных масштабов изменения μ и ρ получаем следующие оценки:

$$\delta\mu \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{k \Delta z} \operatorname{tg} \theta, \quad \delta\rho \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{k \Delta p}. \quad (17)$$

При выполнении этих оценок в качестве масштаба функции $e^{-x^2/2}$ мы принимали ширину равновеликого прямоугольника $\delta x = \sqrt{2\pi}$.

После сделанных упрощений выражение для сглаженной функции Вигнера сводится к

$$\begin{aligned} \overline{W}(z, r) &= \frac{1}{\Delta z \Delta p} \sum_l \int \delta(r - kR_l(z', a)) A_l^2(a, z', r) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(n \sin \theta_l - p)^2}{2\Delta p^2} - \frac{(z - z')^2}{2\Delta z^2} \right\} dz' da. \end{aligned}$$

Фигурирующая здесь δ -функция “выкальвает” вклад лучевой траектории, соединяющей источник с точкой (r, z') . Обозначив через χ угол выхода

этого луча из источника, с учётом соотношения $a = n(z_0) \cos \chi$ перейдём от интегрирования по a к интегрированию по χ . Подставляя вместо амплитуды A_l её явное выражение из (12) и принимая во внимание соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{ctg} \theta, \quad \sqrt{n^2(z) - a^2} = n(z) \sin \theta_l,$$

вновь приходим к (9).

Теперь обсудим использованные приближения. Пренебрежение слагаемыми с $l_1 \neq l_2$ основано на том, что их фазы являются сильно осциллирующими функциями от z' , и данное приближение эквивалентно первому из тех, которые были сделаны при выводе формулы (9) в разд. 3 в рамках "чистой" геометрической оптики.

Ключевым моментом в рассматриваемом здесь выводе формулы (9) является использование соотношения (16), которое, с одной стороны, приводит к тому, что слаженная функция Вигнера выражается через вклады лучей, но, с другой стороны, оно не нарушается на каустиках. Это видно из того, что "ответственные за каустики" слагаемые, содержащие первую производную функции R_l по a (пропорциональную производной по χ), в (16) сокращаются, как и другие слагаемые второго порядка малости по ρ и μ . В качестве оценки погрешности (16) примем сумму слагаемых третьего порядка малости $\delta\Psi = \delta\Psi_1 + \delta\Psi_2 + \delta\Psi_3 + \delta\Psi_4$, где

$$\begin{aligned}\delta\Psi_1 &= \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial a^3} \mu^3, & \delta\Psi_2 &= \frac{1}{12} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial a^2 \partial z} \mu^2 \rho, \\ \delta\Psi_3 &= \frac{1}{12} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial a \partial z^2} \mu \rho^2, & \delta\Psi_4 &= \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} \rho^3.\end{aligned}\quad (18)$$

Для применимости (9) величина $|\delta\Psi|$ должна быть существенно меньше π . Приведём явные выражения для фигурирующих в (18) производных (для $\beta = 1$), которые получены с помощью формул (14) и (15):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \Psi}{\partial a^3} &= -k \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} \simeq -kN \frac{\partial^2 D}{\partial a^2} \simeq -k \frac{r}{D} \frac{\partial^2 D}{\partial a^2}, \\ \frac{\partial^3 \Psi}{\partial a^2 \partial z} &= -k \frac{n^2}{(n^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{k}{n \sin^3 \theta}, \\ \frac{\partial^3 \Psi}{\partial a \partial z^2} &= k \frac{ann'}{(n^2 - a^2)^{3/2}} = k \frac{n' \cos \theta}{n \sin^3 \theta}, \\ \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} &= \frac{k nn''(n^2 - a^2) - (n')^2 a^2}{2(n^2 - a^2)^3} = \frac{k}{2} \frac{n'' \sin^2 \theta - (n')^2 \cos^2 \theta}{n \sin^3 \theta}.\end{aligned}$$

Штрих здесь означает производную по z . Подставляя эти выражения в (18) и принимая оценки (17) за максимальные значения μ и ρ , видим, что первые отброшенные в (16) члены пропорциональны k^{-2} , то есть рассматриваемое нами приближение как и обычная геометрическая оптика является высокочастотным. Принципиально новым моментом здесь является

то обстоятельство, что отброшенные члены обратно пропорциональны масштабам сглаживания. В результате появляется малый параметр задачи, величиной которого мы сами можем управлять.

В следующем разделе сказанное проиллюстрируем на примере волновода, широко используемого в подводной акустике для моделирования дальнего распространения звука в глубоком море.

5. СГЛАЖЕННАЯ ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА В КАНОНИЧЕСКОМ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим так называемый канонический профиль показателя преломления или профиль Манка, выраженный соотношением [1]

$$n(z) = \frac{1}{1 + \epsilon \left(\exp\left(-\frac{2(z-z_a)}{B}\right) + \frac{2(z-z_a)}{B} - 1 \right)},$$

где $c_0 = 1,5$ км, $z_a = 1$ км, $B = 1$ км, $\epsilon = 0,0057$. Координата z растёт с глубиной. На горизонте $z = 0$ находится мягкая граница (поверхность жидкости). Предполагается также, что на глубине $z_b = 5$ км находится поглощающее дно. Данный волновод удерживает лучи, пересекающие ось канала (горизонт $z = z_a$) под углами скольжения, не превышающими $\theta_{cr} = \arccos(n(z_b)/n(z_a)) = 0,27$.

Будем считать, что точечный источник, возбуждающий поле, работает на несущей частоте $f = 100$ Гц. В качестве масштабов сглаживания выберем $\Delta z = 0,1$ км и $\Delta p = 0,5$. Выбранное значение Δp столь велико, что сглаживание по p' в (2) при $p = 0$ (это значение использовалось при численных расчётах) фактически отвечает усреднению по всему интервалу углов скольжения лучей, удерживаемых волноводом. Функция \bar{W} реально будет зависеть лишь от z и r и с точностью до константы совпадать с интенсивностью поля, сглаженной по глубине. Последнее утверждение основано на хорошо известном свойстве функции Вигнера [5], непосредственно следующем из определения (1): после интегрирования по p в бесконечных пределах функция Вигнера переходит в интенсивность поля $|u|^2$.

Воспользуемся (18) и последующими соотношениями для оценки отброшенных в (16) слагаемых. При этом фигурирующие в (18) μ и ρ заменим на $\delta\mu$ и $\delta\rho$ из (17). Принимая во внимание реальные значения параметров задачи и учитывая, что углы скольжения захваченных волноводом волн малы, заменим n на 1, $\cos\theta$ тоже на 1, а $\sin\theta$ на θ . Используя символы δD и δa для обозначения интервалов изменения длин цикла и лучевых параметров захваченных лучей, символ D_0 для обозначения типичной длины цикла, получаем

$$\delta\Psi_1 \sim \frac{0,7}{k^2 \Delta z^3} \frac{r}{D_0} \frac{\delta D}{\delta a^2} \theta^3, \quad \delta\Psi_2 \sim \frac{1,3}{k^2 \Delta z^2 \Delta p \theta},$$

$$\delta\Psi_3 \sim \frac{1,3}{k^2 \Delta z \Delta p^2} \frac{n'}{\theta^2}, \quad \delta\Psi_4 \sim \frac{0,3}{k^2 \Delta p^3} \frac{(n')^2}{\theta^3}. \quad (19)$$

Для оценок мы используем следующие значения фигурирующих в данных формулах величин: $n' = 0,05$, $D_0 = 50$ км, $\delta D = 15$ км, $\delta a = 0,04$, $k = 420$ 1/км, $r = 200$ км. Поскольку главный интерес для нас представляют окрестности каустик, а углы скольжения в окрестностях каустик в данном волноводе обычно заметно меньше θ_{cr} , то в качестве оценки θ мы выберем $\theta = \theta_{cr}/6$. В результате получаем: $\delta\Psi_1 = 0,01$, $\delta\Psi_2 = 0,03$, $\delta\Psi_3 = 0,008$, $\delta\Psi_4 = 0,0004$.

Напомним, что использованное при выводе оценок (19) представление поля (11) не годится для описания поля в точке заворота луча, где $\theta = 0$. Поэтому обращение в бесконечность некоторых из величин $\delta\Psi$ при $\theta = 0$ вовсе не означает неприменимости формул (8) и (9).

Итак, оценки показывают, что при выбранных значениях Δz и Δp соотношение (10) может быть использовано в рассматриваемом волноводе для вычисления интенсивности поля, сглаженной по вертикальной координате. Это утверждение подтверждается результатами представленных на рис. 1 расчётов, выполненных для случая, когда точечный источник, возбуждающий поле, находится на глубине 0,6 км, а приём осуществляется на глубине 0,8 км.

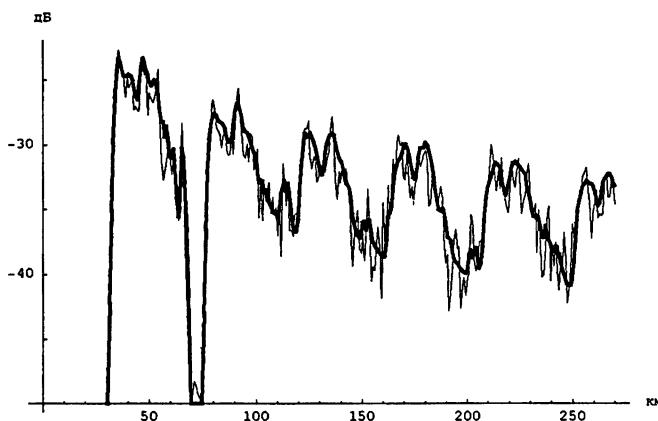


Рис. 1.

Жирная кривая показывает зависимость сглаженной интенсивности, найденной по приближённой формуле (10), от дистанции. Тонкая кривая рассчитана по исходной формуле (3) с вычислением комплексной амплитуды поля $u(r, z)$ с помощью модовой программы (это практически точный способ вычисления поля). На рис. 2 для сравнения приведены зависимости несглаженной интенсивности поля от горизонтальной координаты, рассчитанные для тех же глубин источника и горизонта приёма по модовой (жирная кривая) и лучевой (тонкая кривая) программам. Кривые на

рис. 2 гораздо более “изрезаны”. Для того, чтобы их детали можно было лучше рассмотреть, диапазон дистанций на рис. 2 немного уменьшен по сравнению с рис. 1.

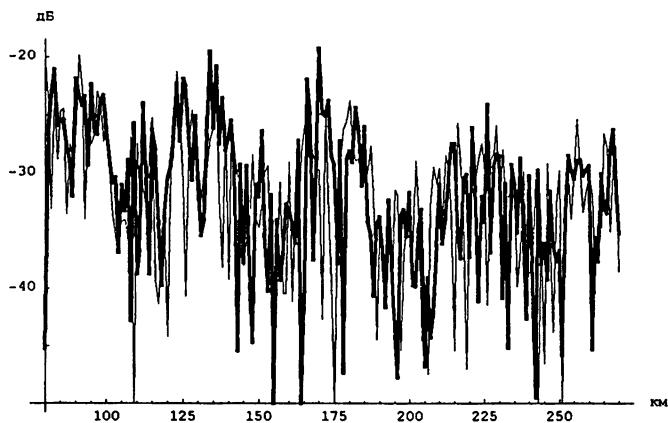


Рис. 2.

Как видим, расчёт сглаженной интенсивности поля в рамках лучевого подхода гораздо меньше отличается от точного результата, чем в случае, когда сопоставляются несглаженные интенсивности.

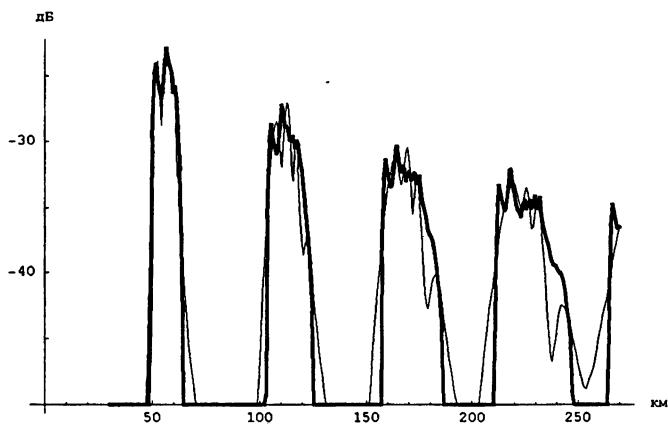


Рис. 3.

Аналогичный вывод может быть сделан и на основе рис. 3 и 4, где показаны точно такие же зависимости, рассчитанные для случая, когда глубина источника равна 0,1 км, а глубина горизонта приёма составляет 0,3 км. При столь малой глубине источника в волноводе образуются так называемые зоны конвергенции [1], то есть зоны повышенной интенсивности поля. На рис. 3 отчётливо видны первые четыре зоны и начало пятой (на рис. 4 из-за ограничения диапазона дистанций первая зона не

показана). Как и в предыдущем случае жирные кривые показывают результаты расчётов в рамках лучевых подходов, а тонкие кривые — результаты точных расчётов с помощью модовой программы.

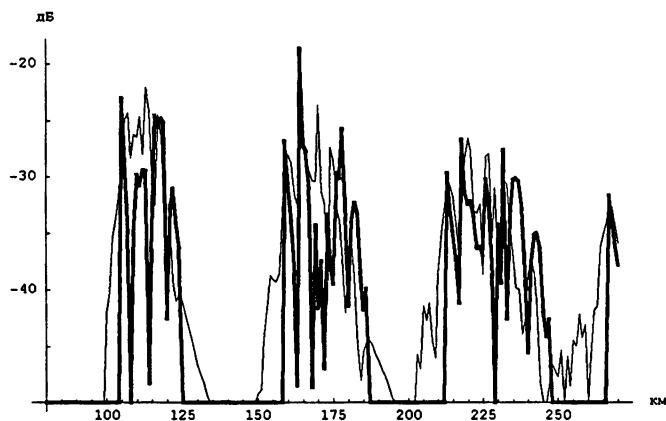


Рис. 4.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках обсуждаемого здесь подхода упрощение вычисления характеристик поля достигается ценой потери информации о мелких деталях интерференционной структуры. Предлагаемая процедура включает расчёт траекторий веера лучей, вышедших из источника под заданными углами, однако решения задачи "прицеливания", то есть отыскания лучей, приходящих в заданную точку волновода, здесь не требуется.

Используемое нами приближение, как и обычная геометрическая оптика, является высокочастотным. Вместе с тем оценки (18), (19) показывают, что недостаточная для применимости геометрической оптики малость длины волны может быть "компенсирована" выбором больших масштабов сглаживания Δz и Δp . Это утверждение (здесь оно обосновано для плоскослоистого волновода, но в работе [4] приведены аргументы, применимые и в более общем случае) проиллюстрировано на конкретном примере. Тем не менее ясно, что на очень низких частотах для достижения приемлемой точности придётся усреднять по столь большим масштабам, что полученный результат уже не будет представлять практического интереса.

Достоинством предлагаемого в данной работе подхода является то обстоятельство, что будучи лучевым, он, однако, применим не только в регулярных точках волновода, но и на каустиках. Вместе с тем отметим, что вопросы о границах применимости подхода и выборе оптимальных

масштабов сглаживания требуют дальнейшего исследования, особенно, применительно к случаю переменного по трассе волновода.

ЛИТЕРАТУРА

- Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
- Jensen F. B., Kuperman W. A., Porter M. B., Schmidt H. Computational ocean acoustics. — New York: American Institute of Physics, 1994.
- Пискарев А. Л. //Акуст. журн., 1989. Т. 35. № 4. С. 724.
- Вировлянский А. Л. Лучевой подход для описания характеристик сглаженного волнового поля //Препринт № 305. — Н. Новгород: ИПФ АН СССР, 1992.
- Татарский В. И. //УФН, 1983. Т. 139. № 4. С. 587.
- Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
- Распространение волн и подводная акустика /Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. С. Палладакиса. — М.: Мир, 1980.

Институт прикладной физики
РАН, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию
11 августа 1997 г.

THE RAY APPROACH FOR CALCULATION OF A LOCAL SPECTRUM SMOOTHED OVER ANGULAR AND SPATIAL SCALES IN A WAVEGUIDE

A. L. Virovlyansky, I. A. Okomel'kova

Simple relations used for the approximate calculation of the smoothed local spectrum (the Wigner's function) in a multimode waveguide are considered. Despite our approach is based on the ray theory, it can be applied not only at the waveguide regular points but at caustics as well. It is shown, that in the case of a range independent waveguide our approximate formula becomes more accurate, with the increase of the scale smoothing. Thus, the accuracy of calculation of the smoothed field characteristics can be improved by sacrificing the information on small details of the wave picture.