

**МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XL N 11

Нижний Новгород

1997

С о д е р ж а н и е

- Алимов В. А., Рахлин А. В., Выборнов Ф. И.** Модель взаимодействия ДКМВ-ДМВ радиоволн с сильно неоднородной среднеширотной ионосферой.....1323
- Лапин В. Г., Тамойкин В. В.** Рассеяние электромагнитных волн на крупномасштабных неоднородностях в брэгговском резонаторе.....1342
- Рапопорт В. О., Митяков Н. А., Зиничев В. А., Белова Н. И., Сазонов Ю. А.** Исследование малых вариаций параметров тропосферы методом радиоакустического зондирования.....1355
- Вакс В. Л., Вдовин В. Ф., Кисляков А. Г., Лапкин И. В., Савельев Д. В., Шкелев Е. И.** Обнаружение теллурической линии $N_2O J=3 \rightarrow 4$1365
- Попереченко Б. А., Сапожников Б. Д., Белов Ю. И., Черникова С. О.** Исследование модели угловых смещений радиосои 64-метровых радиотелескопов ТНА-1500 (Россия).....1370
- Боташев А. М., Жеканис Г. В., Майорова Е. К., Мингалиев М. Г.** Влияние и учет неустановленных элементов главного зеркала антенны РАТАН-600 при определении плотностей потоков дискретных радиоисточников.....1378
- Бочков Г. Н., Горохов К. В.** Биспектрально организованные сигналы для параллельных систем передачи информации с коррекцией амплитудно-фазовых искажений.....1388
- Мальцев А. А., Польшин О. В., Силаев А. М.** Оценивание параметров кусочно-полиномиального тренда среднего значения стохастического временного ряда.....1405

Островский М. А. Полиномиальное оценивание плотностей вероятности	1416
Бирюков М. Н. Характеристики знаковых и ранговых алгоритмов обнаружения с фиксированными объемами выборок в шуме и потоке импульсных помех с произвольными законами распределений	1433
Валентюк А. Н., Лаптинский В. Н. Итерационная процедура анализа линейных динамических стохастических систем с флуктуирующими параметрами	1448

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С.Я.БРАУДЕ, С.Н.ВЛАСОВ, А.В.ГАПОНОВ-ГРЕХОВ,
В.Л.ГИНЗБУРГ (главный редактор),
Л.М.ЕРУХИМОВ (зам.главного редактора),
В.В.ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В.А.ЗВЕРЕВ, Ю.Л.КЛИМОНТОВИЧ,
А.Н.КОНДРАТЕНКО, Ю.В.КРАВЦОВ, В.Н.КРАСИЛЬНИКОВ,
А.Н.МАЛАХОВ, В.В.НИКОЛЬСКИЙ, В.Ю.ПЕТРУНЬКИН,
М.И.РАБИНОВИЧ, А.И.САИЧЕВ, А.А.СЕМЕНОВ, С.А.ТАГЕР,
В.И.ТАЛАНОВ, В.В.ТАМОЙКИН, Д.И.ТРУБЕЦКОВ,
В.И.ТУРЧИН, В.П.УРЯДОВ, Г.И.ФРЕЙДМАН, А.В.ЯКИМОВ

Ответственный секретарь редакции **О.А.ШЕЙНЕР**
 Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.
 Усл.печ.л. 11,55. Усл.кр.-отг. 11,55. Уч.-изд.л. 13,90.
 Тираж 270 экз. Заказ №400/с. Цена 15000 р.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,
 ул.Большая Печёрская, 25,
 Научно-исследовательский радиофизический институт,
 редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика".
 Телефон 36-01-71, e-mail rfj@nirfi.sci-nnov.ru

Отпечатано с готового набора в типографии НОКГС ООП
 603600, Нижний Новгород, ул.Ошарская, 64

© "Известия высших учебных заведений.
 Радиофизика", 1997

УДК 537.876.23

МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДКМВ–ДМВ РАДИОВОЛН С СИЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДНЕШИРОТНОЙ ИОНОСФЕРОЙ

В. А. Алимов, А. В. Разлин, Ф. И. Выборнов

С использованием модифицированного метода рефракционного рассеяния радиоволн построена модель распространения ДКМВ–ДМВ радиоволн в сильно неоднородной среднеширотной ионосфере. Модель устанавливает связь основных статистических характеристик радиоволн с параметрами турбулентности верхней ионосферы. Рассмотрены различные аспекты теории рефракционного рассеяния радиоволн применительно к исследованиям амплитудных и фазовых флуктуаций ДКМВ–ДМВ радиоволн при распространении их в трёхмерной случайно–неоднородной ионосфере с произвольным распределением электронной концентрации.

Модель взаимодействия радиоволн с окружающей средой предполагает установление закономерностей между основными статистическими характеристиками распространения радиоволн и параметрами неоднородной структуры среды. Наиболее адекватной моделью сильно неоднородной среднеширотной ионосферы является модель ионосферы во время существования в ней явления F-spread. Поэтому интересующая нас физико–математическая модель взаимодействия ДКМВ–ДМВ радиоволн с сильно неоднородной среднеширотной ионосферой фактически сводится к модели распространения ДКМВ–ДМВ радиоволн в условиях среднеширотного F-spread. Надёжно установлено, что отличительной особенностью состояния среднеширотной ионосферы во время F-spread является наличие развитой структуры с размерами неоднородностей электронной концентрации от нескольких десятков метров до сотен–тысяч километров. Это подтверждается результатами прямых экспериментальных исследований явления среднеширотного F-spread (см., например, обзорную работу [1] и [2–6]). Вместе с тем вопрос о детальной структуре неоднородной ионосферы в условиях F-spread в настоящее время остаётся открытым. Поэтому при построении модели распространения ДКМВ–ДМВ радиоволн в условиях среднеширотного F-spread необходимо было разработать и применить такой метод расчётов статистических характеристик ДКМВ–ДМВ радиоволн при распространении их в неоднородной среде, который был бы пригоден для случая, в известной степени, произвольного трёхмерного распределения электронной концентрации в ионосфере со случайными неоднородностями. Таким методом является модифицированный метод рефракционного рассеяния радиоволн (PPP). Этот метод

был разработан в 1995–97 гг. в ходе исследований по гранту РФФИ 95-02-03716 [7–12]. Изложению основ этого метода и применению его для построения модели распространения ДКМВ–ДМВ радиоволн в сильно неоднородной среднеширотной ионосфере и посвящена настоящая работа.

1. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕФРАКЦИОННОГО РАССЕЙЯНИЯ РАДИОВОЛН

В последнее время был достигнут определённый прогресс в разработке и использовании для радиофизических приложений метода рефракционного рассеяния радиоволн. Этот метод заключается в расчётах статистических характеристик распространения радиоволн в толстом слое с сильными (средний квадрат флуктуационного набега фазы в слое $\overline{s_0^2}$ много больше единицы) крупномасштабными (внешний масштаб турбулентности L_0 много больше характерного размера зоны Френеля F для данной трассы) флуктуациями показателя преломления с помощью соответствующих вычислений этих характеристик при дифракции излучения в свободном пространстве за эквивалентным фазовым экраном (средний квадрат набега фазы на экране $\overline{s_0^2}$, внешний масштаб неоднородностей на экране L_0). Метод PPP был развит Букером для расчётов пространственных характеристик флуктуаций интенсивности радиоволн (см. [13] и цитированную там литературу). В [14, 15] этот метод был использован для расчётов флуктуаций частотной корреляции радиоволн, а в [16] был рассмотрен вопрос о пределах применимости метода PPP. Во всех этих работах среднее пространственное распределение электронной концентрации в ионосфере ограничивалось приближением в форме слоистой структуры по высоте. Сейчас мы на примере явления среднеширотного F-spread рассмотрим основы модифицированного метода PPP — метода расчёта статистических характеристик радиоволн в среде с крупномасштабными неоднородностями и средним распределением диэлектрической проницаемости среды в виде произвольной трёхмерной функции пространственных координат [7].

Из многолетних исследований статистических характеристик КВ сигналов при их распространении на трассах различной протяжённости хорошо известно, что в общем случае рассеяние коротких радиоволн в ионосфере является случайным нестационарным процессом. Соответственно, пространственно–временное распределение электронной концентрации в ионосфере $N(\vec{r}, t)$, ответственное за это явление, представляет собой также случайный нестационарный по пространству и времени процесс. При этом средние и корреляционные статистические характеристики электронной концентрации ионосферы и ионосферного распространения КВ сигналов в явной форме зависят от времени и пространственного распо-

ложения точки наблюдения.*

В то же время при описании статистических характеристик исследуемых процессов на отдельных, ограниченных, интервалах времени и в локальных областях ионосферы их, как известно [17], можно считать стационарными. Несколько условно неоднородное распределение электронной концентрации в ионосфере можно записать в виде (см. также [20, 29]):

$$N(\vec{r}, t) = N_{\text{к}}(\vec{r}, t) + N_{\text{см}}(\vec{r}, t) + N_{\text{м}}(\vec{r}, t). \quad (1)$$

Здесь $N_{\text{к}}$, $N_{\text{см}}$, $N_{\text{м}}(\vec{r}, t)$ описывают пространственно-временное поведение соответственно крупномасштабных (с размерами $l \simeq (10 \div 10^3)$ км), среднемасштабных ($l \simeq (10^{-1} \div 10)$ км) и мелкомасштабных ($l \simeq (10^{-4} \div 10^{-1})$ км) неоднородностей ионосферы. При этом для типичных условий наблюдений, например, среднеширотного F-spread на интервале времени $T_{\text{см}}$ в десятки минут ($T_{\text{см}} \simeq 20$ мин. [21]) зависимость $N_{\text{к}}(\vec{r}, t)$ можно считать регулярной неоднородной функцией $N_{\text{к}}(\vec{r}, t) \simeq N_{\text{к}}(\vec{r})$, а функцию $N_{\text{см}}(\vec{r}, t)$, определяющую рассеяние коротких радиоволн в ионосфере, — случайным локально-стационарным процессом с внешним масштабом турбулентности $L_0 \simeq 10$ км и показателем спектра $p \gtrsim 2$. А при наблюдении за КВ сигналами на интервалах $T_{\text{м}}$ в единицы минут ($T_{\text{м}} \simeq (1 \div 2)$ мин. [2]) зависимость $N_{\text{к}}(\vec{r}, t) + N_{\text{см}}(\vec{r}, t)$ можно считать регулярной неоднородной функцией, а функцию $N_{\text{м}}(\vec{r}, t)$ — случайным локально-стационарным процессом с внешним масштабом турбулентности $L_0 \simeq 1$ км и показателем спектра $p \gtrsim 2$.

Таким образом, можно говорить о медленных и быстрых флуктуациях отражённых от ионосферы КВ сигналов во время F-spread. В первом случае распространение коротких радиоволн описывается (без учёта поляризационных эффектов) волновым уравнением

$$\Delta E + k_0^2[\bar{\epsilon}_{\text{к}}(\vec{r}) + \Delta\epsilon_{\text{см}}(\vec{r})]E = 0, \quad (2)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — волновое число (λ_0 — длина волны излучения), $\bar{\epsilon}_{\text{к}}$, $\Delta\epsilon_{\text{см}}$ — соответственно среднее и флуктуационное значения диэлектрической проницаемости в ионосфере, непосредственно связанные с функциями $N_{\text{к}}(\vec{r})$, $N_{\text{см}}(\vec{r})$ известными соотношениями [22].

Во втором случае

$$\Delta E + k_0^2[\bar{\epsilon}_{\text{к}}(\vec{r}) + \bar{\epsilon}_{\text{см}}(\vec{r}) + \Delta\epsilon_{\text{м}}(\vec{r})]E = 0. \quad (3)$$

Здесь флуктуационное значение диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon_{\text{м}}(\vec{r})$ определяется поведением функции $N_{\text{м}}(\vec{r})$.

*В частном (предельном) случае развитой ионосферной турбулентности, когда $N(\vec{r}, t)$ — случайный стационарный процесс с внешним масштабом турбулентности L_0 порядка масштаба приведённой высоты однородной атмосферы, явление F-spread в ионосфере адекватно описывается в работах [18–20].

Решения уравнений (2), (3), с учётом известных результатов исследований распространения радиоволн в средах с крупномасштабной неоднородной структурой [23], целесообразно искать в виде

$$E = \sum_{i=1}^N E_i, \quad (4)$$

где N — число лучей в регулярно неоднородной ионосфере, приходящих после отражения коротких радиоволн в точку наблюдения, E_i — поле сигнала в отдельном i -м луче.

Для описания флуктуационного поля сигнала на локальных интервалах стационарности удобно ввести функцию [24]:

$$f_i(\vec{r}) = \frac{E_i(\vec{r}) - \overline{E}_i(\vec{r})}{E_{0i}(\vec{r})}, \quad (5)$$

где $E_{0i}(\vec{r})$ — поле i -го сигнала в регулярно неоднородной среде, $\overline{E}_i(\vec{r})$ — среднее значение поля i -го сигнала.

Отсюда

$$E_i = E_{0i} f_i + \overline{E}_i. \quad (6)$$

Здесь поле сигнала в невозмущённом луче E_{0i} , так же как и многолучевая структура принимаемых сигналов, определяется путём решения соответствующих волновых уравнений методами геометрической оптики (см. [23], а также конкретные численные расчёты пространственного распределения отражённых КВ сигналов в условиях F-spread [25, 26]).

Для описания флуктуаций принимаемого КВ излучения в отдельных лучах целесообразно воспользоваться известным методом фазового экрана [24, 27]. При этом пространственная корреляционная функция флуктуаций поля принимаемого сигнала в отдельном луче имеет вид [24, 27]:

$$\Gamma_{E_i}(\xi, \eta, 0) = E_{0i} E_{0i}^* \exp\{-\overline{s_{0i}^2}[1 - \rho_i(\xi, \eta)]\} + \overline{E}_i \overline{E}_i^*. \quad (7)$$

Здесь ξ, η — пространственное разнесение точек наблюдения для i -го луча в плоскости, перпендикулярной этому лучу, $\overline{s_{0i}^2}$, $\rho_i(\xi, \eta)$ — соответственно средний квадрат и коэффициент пространственной корреляции флуктуаций фазы волны в отражённом КВ сигнале для данного i -го луча на выходе ионосферного слоя, \overline{E}_i — среднее поле i -го луча [24, 27]:

$$\overline{E}_i = E_{0i} \exp(-\overline{s_{0i}^2}/2).$$

Следует, однако, иметь в виду, что величины $\overline{s_{0i}^2}$ могут быть различными не только для отдельных лучей, но и при описании медленных и быстрых флуктуаций принимаемых КВ сигналов (см. выше). В первом случае

величина $\overline{s_{0i}^2} = \overline{s_{0cmi}^2}$ определяется флуктуациями среднемасштабных неоднородностей электронной концентрации $N_{cm}(\vec{r}, t)$ ионосферы, во втором $\overline{s_{0i}^2} = \overline{s_{0mi}^2}$ — мелкомасштабными неоднородностями $N_m(\vec{r}, t)$.

Из экспериментальных исследований быстрых флуктуаций КВ сигналов во время среднеширотного F-spread известно, что зеркальная компонента в отдельном i -м луче принимаемого отражённого излучения, как правило, сравнима с флуктуационной [2]. Другими словами (см. (7) и [24, 27]):

$$\frac{1 - \overline{E_i E_i^*}}{\overline{E_i E_i^*}} = \exp(\overline{s_{0mi}^2}) - 1 \lesssim 1.$$

Отсюда находим, что $\sqrt{\overline{s_{0mi}^2}} \lesssim 1$, т.е. быстрые фазовые флуктуации отражённых от ионосферы КВ сигналов в отдельных лучах во время среднеширотного F-spread можно считать слабыми.

В отличие от быстрых флуктуаций медленные фазовые флуктуации в отдельных пространственных компонентах принимаемого отражённого КВ сигнала, как правило, сильные и могут, вообще говоря, играть существенную роль в стохастической модели явления F-spread в ионосфере. Так, например, частотная корреляция медленных флуктуаций принимаемого КВ излучения, которая определяет среднюю форму отражённого КВ сигнала [18, 31], в рамках нашей модели будет иметь вид (в случае отсутствия корреляции флуктуаций между отдельными лучами, см. (4)–(6) и [14]):

$$\overline{E_{\omega_i} E_{\omega_2}^*} \simeq \sum_{i=1}^N E_{0\omega_1 i} E_{0\omega_2 i}^* R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}, \quad (8)$$

где частотная корреляционная функция флуктуаций поля в i -м луче имеет вид [14]

$$R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*} \simeq \exp \left\{ -\frac{(\varphi_{\omega_2} - \varphi_{\omega_1})_{i}^2}{2} \right\} \frac{1 + i\delta D_{1i}}{1 + (\delta D_{1i})^2}. \quad (9)$$

Здесь $\overline{(\varphi_{\omega_2} - \varphi_{\omega_1})_{i}^2}$ — средний квадрат флуктуаций разности фаз отражённых радиоволн в i -м луче на частотах ω_2 и ω_1 на выходе ионосферного слоя, $\delta = (\omega_2 - \omega_1)/(\omega_2 + \omega_1)$ — относительное разнесение частот ($\delta \ll 1$), $D_{1i} = 2cr_i/(\omega_0 l_{E_i}^2)$ — волновой параметр, $\omega_0 = (\omega_2 + \omega_1)/2$ — средняя частота, r_i — расстояние от выхода ионосферного слоя до точки наблюдения, проходимое волной в свободном пространстве вдоль траектории i -го луча.

Заметим что, явление искусственного F-spread в ионосфере может быть описано как распространение коротких радиоволн в среде с крупномасштабными искусственными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Без учёта поляризационных эффектов соответствующее

волновое уравнение имеет вид (ср. (2)):

$$\Delta E + k_0^2[\bar{\epsilon}(\vec{r}, E_b(\vec{r})) + \Delta\epsilon(\vec{r}, E_b(\vec{r}))]E = 0, \quad (10)$$

где $E_b(\vec{r})$ — пространственное распределение поля волны накачки, определяющее изменения в структуре диэлектрической проницаемости ионосферы при нагреве её мощным КВ радиоизлучением [22]. Как и в условиях естественного F-spread, распределение электронной концентрации модифицированной F-области ионосферы является случайным локально стационарным по пространству и времени процессом, допускающим многолучевое распространение коротких радиоволн (решение уравнения (10) в виде многолучевой структуры, см. также [7]). Принципиальное отличие явления искусственного F-spread определяется лишь спецификой как средних, так и флуктуационных характеристик диэлектрической проницаемости искусственно модифицированной ионосферы (см.(10) и [9]).

Итак, в модифицированном методе РРР основой для расчёта статистических характеристик радиоволн служат фазовые флуктуации их при распространении в неоднородном слое. Поэтому сейчас мы рассмотрим вопрос о фазовых флуктуациях коротких радиоволн.

2. ФАЗОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ИОНОСФЕРЕ

Основным параметром, характеризующим возмущения отражённого КВ сигнала, вносимые случайными неоднородностями ионосферной плазмы, является средний квадрат флуктуаций фазы радиоволны s^2 . В теории рефракционного рассеяния радиоволн выражение для величины s^2 , с учётом [7, 30], имеет вид*

$$\overline{s^2} = 2k_0^2 \int_0^{l_{\text{отр}}} d\Gamma_\epsilon(0, 0, l) \int_{l/2}^{l_{\text{отр}}-l/2} \frac{d\bar{l}}{\sqrt{\bar{\epsilon}(\bar{l} - l/2)\bar{\epsilon}(\bar{l} + l/2)}}, \quad (11)$$

где $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число (λ — длина волны излучения), $\Gamma_\epsilon(0, 0, l)$ — корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости окружающей ионосферной плазмы, $\bar{\epsilon}(\bar{l})$ — лучевой профиль средней диэлектрической проницаемости ионосферы, $l_{\text{отр}}$ — длина пути вдоль луча до точки отражения радиоволны.

Для случая толстого слоя с неоднородностями, когда длина пути $l_{\text{отр}}$ много больше внешнего масштаба l_0 ионосферной турбулентности, соотношение (11) можно записать в следующем приближённом виде:

$$\overline{s^2} \simeq 2k_0^2 \Gamma_\epsilon(0, 0, 0) l_0 L_{\text{офф}}(l_0), \quad (12)$$

*Здесь и ниже анализ проводится для каждого луча отражённого многолучевого КВ сигнала отдельно.

где

$$l_0 = \frac{1}{\Gamma_z(0, 0, 0)} \int_0^{\infty} \Gamma_z(0, 0, l) dl \quad (13)$$

характерный продольный (вдоль направления распространения радиоволн) масштаб ионосферной турбулентности,

$$L_{\text{эфф}}(l_0) = \int_{l_0/2}^{l_{\text{отр}}} \frac{d\bar{l}}{\sqrt{\bar{\epsilon}(\bar{l} - l_0/2)\bar{\epsilon}(\bar{l} + l_0/2)}} \quad (14)$$

эффективная длина отражающей области ионосферы.

В случае линейного профиля ($\bar{\epsilon}(\bar{l}) = 1 - \frac{\bar{l}}{L}$; L^{-1} — градиент средней диэлектрической проницаемости ионосферы в области отражения сигнала) (см. также [7])

$$L_{\text{эфф}}(l_0) \simeq L \ln \left(\frac{4L}{l_0} \right). \quad (15)$$

Остановимся теперь более подробно на вопросе о частотной корреляции фазовых флуктуаций коротких радиоволн в сильно неоднородной ионосфере.

Пусть радиоволны с частотами ω_1 и ω_2 падают на ионосферный слой с произвольным трёхмерно-неоднородным распределением электронной концентрации плазмы. Тогда для флуктуационных набегов фаз волн, отражённых от этого слоя с неоднородностями, можно записать следующее выражение [27]:

$$\varphi_{1,2} \simeq k_{1,2} \int_0^{l_{\text{отр}1,2}} dl \frac{\Delta \epsilon_{01,2}[\vec{r}_{01,2}(l)]}{\sqrt{\bar{\epsilon}_{1,2}[\vec{r}_{01,2}(l)]}}, \quad (16)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число (ω — частота излучения, c — скорость света), $\Delta \epsilon$ и $\bar{\epsilon}$ — флуктуация и среднее значение диэлектрической проницаемости ионосферной плазмы [7], $\vec{r}_0(l)$ — уравнение луча в трёхмерно-неоднородной “невозмущённой” ионосфере (при отсутствии в ней случайных неоднородностей электронной концентрации, см. [7]), $l_{\text{отр}}$ — длина пути, проходимого радиоволной вдоль данного луча до точки отражения, индексы 1 и 2 относятся к сигналам с частотами ω_1 и ω_2 соответственно. Интегрирование в (16) ведётся вдоль “невозмущённого” луча [27].

Следует заметить, что траектории лучей в среде с произвольным трёхмерным распределением крупномасштабных неоднородностей электронной концентрации могут быть определены с помощью стандартных методов геометрической оптики [23, 33]. Далее мы будем считать уравнение интересующего нас луча в “невозмущённой” ионосфере известным. Пусть, для определённости, это уравнение задано в декартовой системе

координат, т.е. известны зависимости $x_{01,2}(z)$ и $y_{01,2}(z)$. Тогда соотношение (16) можно переписать в виде

$$\varphi_{1,2} \simeq k_{1,2} \int_0^{z_{отр1,2}} dz \frac{\Delta \varepsilon_{1,2}[x_{01,2}(z), y_{01,2}(z), z]}{\sqrt{\varepsilon_{1,2}[x_{01,2}(z), y_{01,2}(z), z]}} \sqrt{1 + [x'_{01,2}(z)]^2 + [y'_{01,2}(z)]^2}. \quad (17)$$

При вычислениях частотной корреляции фазовых флуктуаций отражённых коротких радиоволн можно применить спектральный подход, разработанный в [14]. Используя соотношение (17) и следуя, в основном, [14], в результате довольно громоздких, но несложных преобразований получаем следующее выражение для частотной дисперсии фазовых флуктуаций радиоволн, отражённых от толстого ионосферного слоя с неоднородностями (толщина неоднородного слоя $z_{отр}$ много больше характерного внешнего масштаба ионосферной турбулентности L_0):

$$\overline{(\varphi_2 - \varphi_1)^2} \simeq 2\pi^2 k_0^2 \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}) |f_0(\kappa_x K_z + \kappa_y M_z + \kappa_z)|^2 (\vec{\kappa} \vec{A})^2 d\vec{\kappa}, \quad (18)$$

где k_0 — волновое число на средней частоте $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\Phi_\varepsilon(\vec{\kappa})$ — спектр неоднородностей диэлектрической проницаемости ионосферной плазмы [27], $\vec{\kappa}(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$ — волновые числа случайных неоднородностей ионосферы, $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ — компоненты среднего пространственного смещения (расхождения) радиоволн разной частоты в неоднородной ионосфере: $A_x = \overline{\Delta x} = 2\Delta z K_z + 2\omega_0 \delta K_\omega$, $A_y = \overline{\Delta y} = 2\Delta z M_z + 2\omega_0 \delta M_\omega$, $A_z = \overline{\Delta z} = 2\Delta z$ ($2\Delta z = 2\omega_0 \delta z'_{отр,\omega} = z_{отр2} - z_{отр1}$ — пространственное расхождение лучей разной частоты по вертикали в обла-

сти отражения), $K_{z,\omega} = \frac{1}{z_{отр}} \int_0^{z_{отр}} x'_{0z,\omega}(z) dz$, $M_{z,\omega} = \frac{1}{z_{отр}} \int_0^{z_{отр}} y'_{0z,\omega}(z) dz$,

$\delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0}$ — относительное разнесение радиоволн по частоте

($\delta \ll 1$), $f_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sqrt{1 + [x'_{0z}(z)]^2 + [y'_{0z}(z)]^2}}{\sqrt{\varepsilon_0(x_0(z), y_0(z), z)}} \exp(-ikz)$ — спектр

“невозмущённого” распределения диэлектрической проницаемости ионосферы.

Выражение (18) может быть использовано, в общем случае с применением численных методов, для расчёта частотной дисперсии фазовых флуктуаций коротких радиоволн, отражённых от сильно неоднородной ионосферной плазмы.* Причём следует заметить, что, вообще говоря,

*Для отдельных простейших типов траекторий лучей в [8] найдены аналитические решения, позволившие получить простые оценки частотной корреляции флуктуаций коротких радиоволн.

соотношение (18) применимо для расчётов частотной дисперсии фазовых флуктуаций коротких радиоволн и в случае "невозмущённых" траекторий лучей сложной формы (например, типа петли, см. [26]). При этом лишь необходимо помнить, что соотношение (18) непосредственно справедливо для соответствующих расчётов на однозначных участках сложной траектории и для случая полного обратного отражения радиоволн. Поэтому вначале необходимо разделить сложную траекторию на отдельные участки с однозначными траекторными зависимостями, провести для них соответствующие вычисления с применением соотношения (18), а затем осуществить суммирование полученных результатов для отдельных участков сложной траектории.

3. АМПЛИТУДНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ РАДИОВОЛН ПРИ ТРАНСИОНОСФЕРНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛН

Амплитудные флуктуации коротких радиоволн в условиях среднеширотного F-spread достаточно подробно рассмотрены в [7]. Но наиболее полно возможности модифицированного метода РРР при расчёте амплитудных статистических характеристик радиоволн в сильно неоднородной среде проявились в [10] при анализе амплитудных флуктуаций высокочастотных радиоволн за фазовым экраном. Поэтому теперь мы перейдём к анализу транссионферного распространения высокочастотных радиоволн и вначале рассмотрим некоторые аспекты теории рефракционного рассеяния радиоволн применительно к исследованиям распределения флуктуаций интенсивности радиоволн за случайным фазовым экраном.

Исходным соотношением при рассмотрении вопроса о флуктуациях плоской волны при дифракции её на случайном фазовом экране является выражение для поля принимаемого сигнала [27]*

$$E(z) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x) \exp\left(-i\frac{k}{2z}x^2\right) dx, \quad (19)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число (λ — длина волны), z — расстояние от экрана до точки наблюдения ($\sqrt{\frac{z}{k}} = F$ — параметр Френеля [13]), $E_0(x) = \exp[is(x)]$ — поле волны на экране, $s(x)$ — фазовый набег волны на экране. Флуктуации $s(x)$ предполагаются нормальными со среднеквадратичным значением $\sqrt{s_0^2} \gg 1$ и нормированной корреляционной функцией $\rho_s(x)$ ($x = x_2 - x_1$ — расстояние между точками наблюдения на

*Вопрос о флуктуациях интенсивности радиоволн мы будем рассматривать на примере дифракции излучения на одномерном фазовом экране.

экране). Функцию $\rho_s(x)$ будем считать дифференцируемой с характерными пространственными масштабами флуктуаций фазы на экране $L_2 = [-\rho_s''(0)]^{-1/2}$ и $L_4 = [\rho_s''''(0)]^{-1/4}$ (см. также [34, 35]).

Мы будем рассматривать случай развитой турбулентной структуры флуктуаций фазы волны на экране, когда выполняются следующие неравенства:

$$L_4 \gg F \gg L_{2E} = L_2 / \sqrt{s_0^2}. \quad (20)$$

Эти неравенства, вообще говоря, соответствуют случаю рефракционного рассеяния радиоволн с резко выраженным фокусирующим эффектом неоднородностей фазового экрана (см., например, численные расчёты индекса флуктуаций интенсивности в работе [32]).

Следует отметить также известное равенство [34, 35]:

$$L_4^2 = F_\Phi^2 \sqrt{s_0^2}, \quad (21)$$

которое справедливо для точки наблюдения, расположенной в фокальной плоскости за фазовым экраном ($F_\Phi = \sqrt{\frac{z_\Phi}{k}}$).

Расчёты функции распределения амплитудных флуктуаций за одномерным экраном выполнены в [10]. В результате показано, что распределение флуктуаций интенсивности радиоволн за случайным фазовым экраном может быть описано следующим выражением (при $\alpha_0 = \frac{z}{z_\Phi} \lesssim 1$):

$$P(I) = \begin{cases} P_1(I) & \text{при } 0 \leq I \lesssim I_1 = \frac{L_{2E} L_4}{F^2}, \\ P_2(I) & \text{при } I_1 \lesssim I \lesssim I_2 = \frac{L_4^2}{F^2}, \\ P_3(I) & \text{при } I \gtrsim I_3 = \frac{L_2 L_4}{F^2}. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь

$$P_1(I) = \begin{cases} \exp(-I) & \text{для } \alpha_0 \simeq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha_0} \exp\left[-\frac{(I-1)^2}{2\alpha_0^2}\right] & \text{для } \alpha_0 \ll 1, \end{cases}$$

$$P_2(I) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\exp[-(\frac{1}{2\alpha_0^2})]}{\alpha_0} \cdot I^{-3}, \quad (23)$$

$$P_3(I) = I^{-2} \cdot (2\pi s_0^2)^{-1/2} \cdot \exp(-I^2/2s_0^2).$$

Функция распределения $P(I)$ получена в форме кусочной аппроксимации, отдельные составляющие которой между собой сшиваются, в целом,

достаточно хорошо. Хотя области значений I вблизи I_1 и в интервале $I_2 \div I_3$ являются переходными, в которых, строго говоря, указанные аппроксимации $P(I)$ не работают.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в ближней зоне распределение флуктуаций интенсивности радиоволн описывается, в основном, нормальным распределением. Более точное распределение флуктуаций интенсивности может быть и иным, но в рамках рассмотренных приближений нормальное распределение является хорошей аппроксимацией реального распределения. Здесь может быть проведена аналогия с нормальным распределением флуктуаций амплитуды для слабых флуктуаций радиоволн, когда многие реальные распределения флуктуаций удовлетворительно аппроксимируются нормальным распределением (см., например, [27, 37, 38]). Это обстоятельство следует учитывать при интерпретации результатов экспериментальных исследований статистики сигналов.

Выражения (22), (23) могут быть использованы для вычислений соответствующих моментов распределения флуктуаций интенсивности радиоволн за случайным фазовым экраном. Мы ограничимся анализом второго момента, широко известного как индекс мерцаний [27]:

$$S_4^2 = \bar{I}^2 - 1 = \int_0^{\infty} P(I) I^2 dI - 1. \quad (24)$$

Поведение этого параметра исследовалось во многих работах (см. библиографию в обзорных работах [39, 40]) на основании прямых вычислений величины S_4^2 с использованием соотношения (19).

Подставляя (22), (23) в соотношение (24), находим (при $\alpha_0 \ll 1$ и $\alpha_0 \simeq 1$ соответственно)

$$S_4^2 \simeq \alpha_0^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\exp(-\frac{1}{2\alpha_0^2})}{\alpha_0} \cdot \ln\left(\frac{L_4}{L_{2E}}\right) + \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{L_2}{\alpha_0 L_4}\right) \right], \quad (25)$$

$$S_4^2 \simeq 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \ln\left(\frac{L_4}{L_{2E}}\right) + \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{L_2}{L_4}\right) \right]. \quad (26)$$

Здесь $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

Соотношения (25), (26) находятся в хорошем соответствии с выражениями, полученными в результате прямых вычислений индекса мерцаний в [34]. Соотношение (25) не представляет большого интереса, поскольку основной вклад, вносимый в величину S_4^2 , здесь даёт первое слагаемое, равное $\alpha_0^2 \ll 1$. Соотношение (26) заслуживает более подробного анализа.

При наблюдениях за флуктуациями интенсивности в фокальной плоскости фазового экрана ($\alpha_0 \simeq 1$) при рефракционном рассеянии радиоволн

возможен известный эффект усиления мерцаний радиоволн, который учитывается вторым слагаемым в соотношении (26):

$$F_{\Phi} = \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \ln \left(\frac{L_4}{L_2} \sqrt{s_0^2} \right). \quad (27)$$

Оценки величины F_{Φ} с учётом некоторых характерных корреляционных функций флуктуаций фазы радиоволн $\rho_s(x)$, присущих турбулентной структуре (с показателем спектра p) окружающей околоземной среды распространения радиоволн [32], приведены в [10].

В условиях сильной турбулентности (при $p = 2$), как показали проведённые нами расчёты величины F_{Φ} [10], фокусирующий эффект фазового экрана отсутствует. Это объясняется следующим обстоятельством. В рассмотренных случаях необходимое условие фокусировки (21) реализуется уже при малых значениях величины $\overline{s_0^2} \lesssim 1$, так что при больших значениях величины среднеквадратичного набега фазы $\sqrt{s_0^2} \gg 1$, характерного для ракурсного рассеяния радиоволн, точка наблюдения находится во френгоферовой зоне $\left(\alpha_0 = \frac{z}{z_{\Phi}} \gg 1 \right)$, когда, как известно, имеет место релеевское распределение флуктуаций амплитуд радиоволн за фазовым экраном и гауссовское поведение спектра флуктуаций интенсивности принимаемого излучения (см., например, [27, 34]). В этих условиях, как легко показать, характерно значительное уширение спектра амплитудных флуктуаций как в области высоких, так и низких спектральных частот. Но при этом, естественно, какие-либо особенности, присущие фокусирующему эффекту фазового экрана, в поведении спектра интенсивности в условиях развитой турбулентности ($p = 2$) не проявляются (см. численные расчёты [32]).

Итак, рефракционное рассеяние радиоволн, как правило, характеризуется резко выраженным эффектом случайных фокусировок интенсивности излучения за фазовым экраном. Но в условиях сильно развитой турбулентности среды распространения радиоволн этот эффект может и отсутствовать.

В заключение кратко остановимся на вопросе о распределении флуктуаций интенсивности радиоволн за двумерным фазовым экраном. При этом, следуя [41], будем считать фокусирующие свойства линзовых крупномасштабных неоднородностей экрана полностью некоррелированными по координатным осям \vec{x} и \vec{y} . Тогда для функции распределения флуктуаций интенсивности радиоволн за двумерным фазовым экраном (при

$\alpha_0 \leq 1$) справедливо следующее выражение [10]:*

$$P_g(I) = \begin{cases} P_{1g}(I) & \text{при } 0 \leq I \lesssim I_1 = \frac{(L_2 E L_4)^2}{F^4}, \\ P_{2g}(I) & \text{при } I_1 \lesssim I \lesssim I_2 = \frac{L_4^4}{F^4}, \\ P_{3g}(I) & \text{при } I \gtrsim I_3 = \frac{(L_2 L_4)^2}{F^4}, \end{cases} \quad (28)$$

где

$$P_{1g}(I) \simeq \begin{cases} \exp(-I) & \text{для } \alpha_0 \simeq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_0}} \exp\left[-\frac{(I-1)^2}{2\alpha_0^2}\right] & \text{для } \alpha_0 \ll 1, \end{cases}$$

$$P_{2g}(I) \simeq \frac{4}{\pi\alpha_0^2} \exp(-\alpha_0^{-2}) I^{-3}, \quad (29)$$

$$P_{3g}(I) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi s_0^2}} I^{-5/2} \cdot \exp\left(-\frac{2I}{s_0^2}\right).$$

Используя формулы (28), (29), находим следующее соотношение для индекса мерцаний радиоволн в наиболее интересном случае, когда точка наблюдения находится в области случайных фокусировок за двумерным фазовым экраном (при $\alpha_0 \simeq 1$):

$$S_4^2 \simeq 1 + \frac{8}{\pi e} \ln\left(\frac{L_4}{L_2 E}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[1 - \Phi\left(2\frac{L_2}{L_4}\right)\right]. \quad (30)$$

Это соотношение находится в хорошем соответствии с подобным выражением, полученным в результате прямых вычислений индекса мерцаний в [43]. Видно, что за двумерным фазовым экраном эффект случайных фокусировок излучения сильными крупномасштабными неоднородностями среды распространения выражен более отчётливо по сравнению со случаем рефракционного рассеяния радиоволн на одномерном экране (ср. (26) и (30)).

В заключение заметим, что полученные выражения для индекса мерцаний радиоволн справедливы для случая мерцаний точечного радиоисточника. В случае протяжённого источника метод РРР позволяет получить выражение для индекса и радиуса пространственной корреляции флуктуаций излучения источника конечных угловых размеров при распространении его через многослойную среду с флуктуациями показателя преломления [12]. При этом принципиальным является последовательный

*Геометрооптическое приближение для плотности вероятности флуктуаций интенсивности за двумерным фазовым экраном, учитывающее корреляцию фокусирующих свойств хаотических линз по разным осям, содержится в [42].

расчёт фазовых флуктуаций радиоволн в слое с крупномасштабными неоднородностями (см. [12] и ниже). Не останавливаясь подробно на самих расчётах, приведём окончательное выражение для индекса мерцаний S_4^2 излучения протяжённого источника с гауссовым распределением яркости (θ_0 — угловой размер источника) на выходе n -го слоя случайно неоднородной среды [12]:

$$S_4^2 = \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} + \frac{\sum_{j=i}^n z_j^2}{z_i^2} \right] \frac{\theta_0^2}{\theta_{кр_i}^2} \right\}^{-1}. \quad (31)$$

Здесь $\theta_{кр_i} = \frac{l_E}{2z_i}$ — эффективный угловой размер неоднородностей в i -м слое, z_i — удвоенная толщина i -го слоя, l_E — характерный пространственный масштаб неоднородностей в турбулентной структуре показателя преломления i -го слоя [12].

Анализ соотношения (31) показывает, что при определённых условиях индекс мерцаний радиоизлучения протяжённого источника в толстом слое с неоднородностями может заметно уменьшаться (подробнее см. [12]).

4. АМПЛИТУДНЫЕ И ФАЗОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ МЕТРОВЫХ И ДЕЦИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН

Флуктуационные явления при трансионосферном распространении метровых–дециметровых радиоволн в условиях среднеширотного F-spread, как правило, незначительны [8]. Но и для таких высокочастотных радиоволн метод РРР оказывается весьма полезным, например, при исследованиях спектральных характеристик турбулентности верхней ионосферы с помощью радиопросвечивания её МВ–ДМВ сигналами бортовых передатчиков орбитальных ИСЗ [11].

Рассмотрим следующую задачу. Пусть сигнал, прошедший под углом θ ионосферный слой с неоднородностями толщиной L (θ — угол между волновым вектором \vec{k} и магнитным полем \vec{H}_0 , направленным вдоль оси \vec{z}), принимается в точке наблюдения, расположенной на расстоянии z от него и смещённой относительно плоскости L -оболочки на азимутальный угол φ . Необходимо определить спектральные характеристики фазовых и амплитудных флуктуаций радиоволн в точке наблюдения.

Задачу будем решать с помощью метода фазового экрана. Исходными соотношениями в этом случае являются выражения для флуктуационного набега фазы волны в ионосферном слое с неоднородностями (ср. [45])

$$\varphi(x, y, z) \simeq \frac{k_0}{2 \cos \theta} \int_0^L \Delta \varepsilon(x(z), y(z), z) dz \quad (32)$$

и, соответственно, для пространственной функции корреляции флуктуаций фазы волны на выходе ионосферного слоя (ср. [45])

$$\Gamma_{\varphi}(\xi, \eta) \simeq \frac{k_0^2}{2 \cos^2 \theta} \int_0^L d\zeta \int_{\zeta/2}^{L-\zeta/2} dz \Gamma'_e(\zeta \operatorname{tg} \theta \cos \varphi + \xi, \zeta \operatorname{tg} \theta \sin \varphi + \eta, \zeta, z). \quad (33)$$

Здесь $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число (λ — длина волны), $\Delta\epsilon$ — флуктуационная часть диэлектрической проницаемости ионосферы, ξ, η, ζ — относительное смещение точек разнесения по координатным осям $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ соответственно. Корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости ионосферы $\Gamma'_e(\xi, \eta, \zeta, z)$ учитывает неоднородное распределение флуктуаций электронной концентрации плазмы по высоте z

$$\Gamma'_e(\xi, \eta, \zeta, z) = \overline{(\Delta\epsilon)^2(z)} \cdot \Gamma_e(\xi, \eta, \zeta),$$

где $\Gamma_e(\xi, \eta, \zeta)$ — нормированная корреляционная функция.

В дальнейшем мы будем характеризовать неоднородный ионосферный слой эффективной толщиной L , так что соотношение (33) может быть записано в следующем виде:

$$\Gamma_{\varphi}(\xi, \eta) \simeq \frac{k_0^2 L \overline{(\Delta\epsilon)_0^2}}{2 \cos^2 \theta} \int_0^L d\zeta (1 - \zeta/L) \Gamma_e(\zeta \operatorname{tg} \theta \cos \varphi + \xi, \zeta \operatorname{tg} \theta \sin \varphi + \eta, \zeta). \quad (34)$$

Соответственно, для двумерного спектра фазовых флуктуаций принимаемых радиоволн имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi}(\kappa_x, \kappa_y) &\simeq \frac{k_0^2 L \overline{(\Delta\epsilon)_0^2}}{2 \cos^2 \theta} \int_0^L d\zeta (1 - \zeta/L) \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_z \Phi_e(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) \times \\ &\times \exp\{i[\kappa_x \operatorname{tg} \theta \cos \varphi + \kappa_y \operatorname{tg} \theta \sin \varphi + \kappa_z] \zeta\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда, в случае толстого слоя с неоднородностями ($L > l_{0||}$) получаем (ср. [46])

$$\Phi_{\varphi}(\kappa_x, \kappa_y) \simeq \frac{k_0^2 L \overline{(\Delta\epsilon)_0^2}}{2 \cos^2 \theta} \Phi_e[\kappa_x, \kappa_y, -\operatorname{tg} \theta (\cos \varphi \kappa_x + \sin \varphi \kappa_y)]. \quad (36)$$

Для тонкого слоя ($L < l_{0||}$) из соотношения (35) следует

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi}(\kappa_x, \kappa_y) &\simeq \frac{k_0^2 L \overline{(\Delta\epsilon)_0^2}}{2 \cos^2 \theta} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_z \Phi_e(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) \int_0^L d\zeta (1 - \zeta/L) \times \\ &\times \exp\{i[\kappa_x \operatorname{tg} \theta \cos \varphi + \kappa_y \operatorname{tg} \theta \sin \varphi] \zeta\}. \end{aligned} \quad (37)$$

В экспериментах по просвечиванию ионосферы сигналами орбитальных ИСЗ измеряется одномерный спектр фазовых или амплитудных* флуктуаций [47]

$$\Phi_{A,\varphi}(\kappa_y) \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_x \dot{\Phi}_{\varphi}(\kappa_x, \kappa_y). \quad (38)$$

Полученные соотношения (35)–(38) позволяют определять основные параметры спектра неоднородностей верхней ионосферы, а также толщину тонкого ионосферного слоя по измерениям спектральных характеристик амплитудных и фазовых флуктуаций сигналов орбитальных ИСЗ [11].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, метод рефракционного рассеяния радиоволн позволяет построить модель распространения ДКМВ–ДМВ радиоволн в сильно неоднородной среднеширотной ионосфере, которая устанавливает связь основных статистических характеристик радиоволн (индексов амплитудных флуктуаций, функций пространственной и частотной корреляции флуктуаций и др.) с параметрами среды распространения (интенсивностью и спектральными характеристиками неоднородностей электронной концентрации ионосферы и т.п.). С помощью метода рефракционного рассеяния радиоволн получен целый ряд новых, интересных результатов, касающихся оценок основных параметров ДКМВ–ДМВ радиоволн при ионосферном распространении их в условиях среднеширотного F-spread, а также при трансionoсферном распространении высокочастотных радиоволн на трассах космической связи [7–12]. Вместе с тем, следует заметить, что в связи с отсутствием достоверной информации о пространственном распределении электронной концентрации в ионосфере в области больших масштабов неоднородностей (с размерами $l \geq 10$ км) в условиях F-spread, построенная модель распространения ДКМВ–ДМВ радиоволн в сильно неоднородной среднеширотной ионосфере страдает очевидным недостатком — известной общностью в представлении картины распространения высокочастотных радиоволн. Именно этот недостаток в настоящее время не позволяет воссоздать детальную картину распространения ДКМВ–ДМВ радиоволн в сильно неоднородной ионосфере. И именно этот недостаток модели распространения высокочастотных радиоволн в условиях развитой неоднородной структуры среднеширотной

*Следует заметить, что соотношение (38) справедливо при описании амплитудного спектра принимаемого излучения только в случае слабых флуктуаций амплитуды (но не фазы) сигналов.

ионосферы ставит в качестве ближайшей, и одной из важнейших, задачи современных радиофизических исследований — исследование влияния крупномасштабных неоднородностей ионосферы на распространение высокочастотных радиоволн с целью построения детальной картины распространения ДКМВ–ДМВ радиоволн в сильно неоднородной ионосферной плазме.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 95-02-03716).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bowman G. G. //J. Geom. and Geoelect., 1990. V. 42. № 2. P. 109.
2. Алимов В. А., Выборнов Ф. И., Ерухимов Л. М. и др. //Изв. вузов. Радиофизика, 1994. Т. 37. № 11. С. 1447.
3. Алимов В. А., Выборнов Ф. И., Рахлин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 10. С. 1064.
4. Алимов В. А., Выборнов Ф. И., Рахлин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1996. Т. 39. № 5. С. 564.
5. Алимов В. А. и др. //Изв. вузов. Радиофизика, 1997. Т. 40. № 6. С. 688.
6. Выборнов Ф. И. Кандидатская диссертация. — Н. Новгород: НИРФИ, 1996.
7. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. //Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 12. С. 1227.
8. Алимов В. А., Рахлин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 9. С. 926.
9. Алимов В. А., Рахлин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1996. Т. 39. № 7. С. 876.
10. Алимов В. А., Рахлин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1996. Т. 39. № 9. С. 1114.
11. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. и др. //Изв. вузов. Радиофизика, 1997. Т. 40. № 4. С. 446.
12. Алимов В. А., Рахлин А. В. //Изв. вузов. Радиофизика, 1997. Т. 40. № 5. С. 586.
13. Booker H. G. //Indian Radio Space Phys., 1986. V. 15. № 5–6. P. 197.
14. Алимов В. А. //Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 9. С. 893.
15. Алимов В. А. //Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 10. С. 1012.
16. Алимов В. А. //Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 11. С. 1118.
17. Алимов В. А. //Изв. вузов. Радиофизика, 1974. Т. 17. № 9. С. 1399.
18. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. и др. //Изв. вузов. Радиофизика, 1968. Т. 11. № 2. С. 268.

19. Алимов В. А., Ерухимов Л. М., Пыркова Т. С. //Геомagnetизм и аэрономия, 1971. Т. 11. № 5. С. 790.
20. Booker Н. G. et al. //J. Atm. Terr. Phys., 1986. V. 48. № 4. P. 327.
21. Bowman G. G. et al. //J. Atm. Terr. Phys., 1988. V. 50. № 9. P. 797.
22. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
23. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
24. Денисов Н. Г. //Изв. вузов. Радиофизика, 1961. Т. 4. № 4. С. 630.
25. Иванов В. Б., Рудых С. А. //Геомagnetизм и аэрономия, 1989. Т. 29. № 3. С. 516.
26. Калихман А. Д. //Геомagnetизм и аэрономия, 1991. Т. 31. № 1. С. 126.
27. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
28. Meehan D. H. //J. Atm. Terr. Phys., 1990. V. 52. № 9. P. 771.
29. Гершман Б. Н., Казимировский Э. С., Кокоуров В. Д., Чернобровкина Н. А. Явление F-рассеяния в ионосфере. — М.: Наука, 1984.
30. Денисов Н. Г., Ерухимов Л. М. //Геом. и аэрономия, 1966. Т. 6. № 4. С. 696.
31. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. //В сб.: Ионосферные исследования, 1972. № 21. С. 33.
32. Booker Н. G., Majidihi G. //J. Atm. Terr. Phys., 1981. V. 43. № 11. P. 1199.
33. Кравцов Ю. А., Фейзулин Э. Н., Виноградов А. Г. Прохождение радиоволн через атмосферу Земли. — М.: Радио и связь, 1983.
34. Buckley R. //Austr. J. of Phys., 1971. V. 24. № 3. P. 351.
35. Шишов В. И. //Изв. вузов. Радиофизика, 1971. Т. 14. № 1. С. 85.
36. Salpeter E. E. //Astroph. J., 1967. V. 147. № 2. P. 433.
37. Денисов Н. Г., Татарский В. И. //Изв. вузов. Радиофизика, 1963. Т. 6. № 3. С. 488.
38. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. //Изв. вузов. Радиофизика, 1973. Т. 16. № 10. С. 1540.
39. Якушкин И. Г. //Изв. вузов. Радиофизика, 1985. Т. 28. № 5. С. 535.
40. Rino C. L. //Radio Sci., 1982. V. 17. № 4. P. 855.
41. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. //Изв. вузов. Радиофизика, 1975. Т. 18. № 7. С. 948.
42. Гурбатов С. И., Малахов А. Н., Сагчев А. Н. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. Ч. 1. — М.: Наука, 1990.
43. Buckley R. //Austr. J. of Phys., 1971. V. 24. № 3. P. 373.
44. Алимов В. А. //Изв. вузов. Радиофизика, 1982. Т. 25. № 6. С. 619.
45. Алимов В. А. //Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 7. С. 653.
46. Rino C. L., Fremouw E. J. //J. Atm. Terr. Phys., 1977. V. 39. № 8. P. 859.
47. Fremouw E. J. et al. //Radio Sci., 1985. V. 30. № 4. P. 923.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
21 июля 1997 г.

**A MODEL OF INTERACTION BETWEEN DECAMETER - DECIMETRIC
RADIO WAVES AND STRONGLY INHOMOGENEOUS MID-LATITUDE
IONOSPHERE**

V. A. Alimov, A. V. Rakhlin, F. I. Vybornov

A model has been built for the propagation of decameter-decimeter radio waves in strongly inhomogeneous mid-latitude ionosphere using a modified method of radio wave refraction scattering. The model states a relation between the basic statistical radio wave characteristics and the turbulence parameters of the upper ionosphere. Different aspects of the theory of the refraction radio wave scattering have been considered, which are applied to the investigation of amplitude and phase fluctuations of decameter-decimeter radio waves at their propagation in three-dimensional randomly inhomogeneous ionosphere with an arbitrary distribution of the electron density.

УДК 550.388.2

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КРУПНОМАСШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ В БРЭГГОВСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

В. Г. Лапин, В. В. Тамойкин

Исследуется однократное рассеяние плоской электромагнитной волны на случайных неоднородностях в плоском периодически неоднородном слое с отражающей задней границей. Показано, что в условиях, когда падающая волна удовлетворяет условию возбуждения основной моды брэгговского резонатора и её поле в глубине слоя велико, средний угловой спектр обратнорассеянного поля на выходе из резонатора имеет узкий максимум с пиковым значением, пропорциональным экспоненте от учетверённой оптической толщины периодической структуры. Этот максимум соответствует условию возбуждения основной моды брэгговского резонатора рассеянным полем. Другие спектральные максимумы имеют малую амплитуду и интенсивность. Подобный характер рассеяния имеет место, если характерный поперечный слою размер случайных неоднородностей больше масштаба рассеяния на периодической структуре.

В работе [1] нами исследовано рассеяние электромагнитных волн на случайных неоднородностях в периодически неоднородной среде с безотражательными границами. При этом обнаружено, что в случае, когда периодически неоднородный слой является согласующей системой для падающей волны, а неоднородности сильно вытянуты в направлении, ортогональном границам слоя, угловой спектр рассеянного поля имеет вид двух резких максимумов вблизи конической поверхности ракурсных углов. Интенсивность рассеянного поля пропорциональна квадрату оптической толщины периодической решётки.

В настоящей работе показано, что в случае периодически неоднородного слоя с отражающей задней границей возможен режим рассеяния, с экспоненциальной зависимостью интенсивности рассеянной волны от оптической толщины решётки. Исследованы также корреляционные свойства рассеянного поля и роль конечности размера неоднородностей в поперечном слою направлении.

Качественно, спектр рассеянного поля подобен полученному в [4] при анализе рассеяния волны, поляризованной в плоскости падения, на случайных неоднородностях, расположенных в области плазменного резонанса плавно-неоднородной изотропной плазмы. В частности, в этих случаях отсутствует рассеянное поле, распространяющееся в плоскости падения волны. Оба эти случая соответствуют рассеянию из "закрытых"

областей пространства, в которых имеются большие значения волновых полей. Такие особые случаи рассеяния могут быть полезны для интерпретации физических экспериментов и, возможно, для пространственно удалённой диагностики. Кроме того, в случае частично отражающей границы рассмотренная система представляет собой брэгговский фильтр со случайными дефектами изготовления. Брэгговские фильтры широко используются в электронике СВЧ и микроэлектронике [5,6]. Рассмотренные эффекты в частности позволяют сделать вывод о том, что с уменьшением полосы пропускания фильтра (с ростом оптической толщины решётки) необходимо сильно увеличивать точность изготовления, чтобы потери из-за рассеяния оставались малы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Допустим, что в периодически неоднородном слое $0 \leq z \leq L$ изотропной среды с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0(z) = \epsilon_{00} \times [1 - 2m \cos(2k_n z)] > 0$, ($\epsilon_{00}, m = \text{const}$) присутствуют малые хаотические неоднородности $\epsilon_1(\vec{r})$ ($|\epsilon_1| \ll |\epsilon_0|$), причём $\langle \epsilon_1 \rangle = 0$.

Предположим, что на слой под углом θ_0 к нормали падает плоская монохроматическая волна ТМ поляризации: $\vec{H}_0 = \vec{e}_y \times \exp[i(-\omega t + k_0(z \cos \theta_0 + x \sin \theta_0))]$. В этом случае из системы Максвелла в работе [1] получены следующие уравнения для комплексных амплитуд магнитного поля падающей волны $H(z)$ и фурье-компонент $\vec{\Phi}$ возмущённого поля \vec{H}_1 :

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon_0}{dz} \frac{dH}{dz} + k_0^2 (\epsilon_0 - \sin^2 \theta_0) H = 0, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \Phi_{y'}}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon_0}{dz} \frac{d\Phi_{y'}}{dz} + (k_0^2 \epsilon_0 - q^2) \Phi_{y'} = P_{y'}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \Phi_z}{dz^2} + (k_0^2 \epsilon_0 - q^2) \Phi_z = P_z, \quad (3)$$

$$P_{y'} \equiv \frac{q_1}{q \epsilon_{00}} \frac{df}{dz} \frac{dH}{dz} - \left[k_0^2 \cos^2 \theta_0 \frac{q_1}{q} + \frac{q_0 q}{\epsilon_{00}} \right] f H,$$

$$P_z \equiv -\frac{i q_2}{\epsilon_0} f \frac{dH}{dz}, \quad f \equiv f(q_1, q_0, q_2, z),$$

где фурье-компоненты $\vec{\Phi}$, f определены формулами

$$\{\vec{\Phi}, f\}(q_1, q_2, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\vec{H}_1, \epsilon_1\} e^{-i(q_1 x + q_2 y)} dx dy$$

и обозначено: $q_0^2 \equiv k_0^2 \sin^2 \theta_0$, q_0 — поперечная составляющая волнового вектора падающей волны, $q = (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$ — аналогичная величина для рассеянного поля.

При получении (2), (3) введена новая система координат $\{x', y'\}$, таких, что ось OX' направлена вдоль вектора $\vec{q} = q_1 \vec{e}_x + q_2 \vec{e}_y$ ($\vec{e}_{\{x,y\}}$ — орты осей OX и OY). При этом $\Phi_{y'} = q_1/q \Phi_y - q_2/q \Phi_x$ — составляющая магнитного поля, ортогональная плоскости распространения данной фурье-компоненты (TM -волна), а $\Phi_{x'} = q_1/q \Phi_x + q_2/q \Phi_y$ — составляющая поля, лежащая в плоскости распространения и параллельная границам слоя, которая совместно с Φ_z описывает волну TE поляризации. Заметим также, что компонента электрического поля TE -волны может быть выражена через поле Φ_z (здесь и далее предполагаем $\epsilon_{00} = 1$): $E_{1y'} = k_0/q \Phi_z$, поэтому определять поле $\Phi_{x'}$ нет необходимости.

В дальнейшем мы будем предполагать, что амплитуда периодической модуляции диэлектрической проницаемости $\epsilon_0(z)$ мала:

$$m \ll \cos^2 \theta_0 \quad (4)$$

и будем использовать решения для TE волн в периодически неоднородной среде, изученные в работах [2],[3] и для TM волн, полученные в работе [7]. Найдём решение уравнения (1) для падающей волны в слое, на границах которого выполняются условия: на $z = 0$ — безотражательное граничное условие, от границы $z = L$ волны отражаются с комплексным коэффициентом отражения \hat{r}_0 . Магнитное поле невозмущённой волны запишется в виде

$$H(z) = A(z) \exp(ik \cos(\theta_0)z) + B(z) \exp(-ik \cos(\theta_0)z),$$

$$A(z) = e^{-i\Delta k_0 z} \frac{g_0 \cos(g_0(z-L)) + i(\Delta k_0 + \gamma_0 \hat{R}_0) \sin(g_0(z-L))}{g_0 \cos(g_0 L) - i(\Delta k_0 + \gamma \hat{R}_0) \sin(g_0 L)}, \quad (5)$$

$$B(z) = e^{i\Delta k_0 z} \frac{\gamma_0 \hat{R}_0 \cos(g_0(z-L)) - i(\gamma + i\Delta k_0 \hat{R}_0) \sin(g_0(z-L))}{g_0 \cos(g_0 L) - i(\Delta k_0 + \gamma \hat{R}_0) \sin(g_0 L)},$$

$$\Delta k_0 \equiv k_0 \cos \theta_0 - k_n, \quad g_0 \equiv \sqrt{\Delta k_0^2 - \gamma_0^2}, \quad \hat{R}_0 = \hat{r}_0 e^{i2k_n L},$$

здесь $|\Delta k_0| \ll k_n$, т.е. решение справедливо вблизи первого брэгговского резонанса, $\gamma_0 \equiv mk_0 \cos(2\theta_0)/(4 \cos \theta_0)$ — величина, обратная масштабу многократного рассеяния падающей волны TM поляризации на периодической структуре (для волны TE -поляризации получим такое же решение без множителя $\cos(2\theta_0)$ в величине γ_0). В дальнейшем мы не будем рассматривать случай углов падения, близких $\pi/4$, поскольку в случае $\gamma_0 \rightarrow 0$ или больших расстройек $\gamma_0^2 L/|\Delta k_0| \ll 1$ периодическая структура несущественна. В случае решётки большой оптической толщины τ ($\tau \equiv \gamma_0 L \gg 1$) вблизи резонанса решение качественно иное, чем в однородном слое. Отметим, что при выполнении условия

$$\Delta k_0 = 0; \quad i\hat{r}_0 \exp(i2k_n L) = 1$$

знаменатели в выражении (5) малы ($\sim \exp(-\tau)$) и поэтому имеем

$$A = \exp(\gamma_0 z), \quad B = -i \exp(\gamma_0 z),$$

то есть поле вблизи отражающей границы $z = L$ экспоненциально велико по сравнению с амплитудой падающей на слой волны. Это соответствует возбуждению основной моды брэгговского резонатора.

Общие решения уравнений (2)–(3) для полей $\Phi_{\{y',z\}}$ получены в работе [1]. Предполагая, что граничное условие для рассеянных полей при $z = 0$ — безотражательное, а на границе $z = L$ происходит отражение с коэффициентом \hat{r}_0 , для поля на выходе из слоя ($z \simeq 0$) будем иметь

$$\Phi_z(z) = \frac{1}{W_z} \left\{ \int_0^L \Phi_{1z} P_z dz + \frac{\hat{R}_0 \int_0^L \Phi_{2z} P_z dz}{\cos(g_y L) + (\Delta k - \hat{R}_0 \gamma_y) i \sin(g_y L) / g_y} \right\} e^{-ik_n z}, \quad (6)$$

где линейно независимые решения однородных уравнений Φ_{1z} , Φ_{2z} и вронскиан W_z определяются формулами

$$\begin{aligned} \Phi_{1z} &= \exp(ik_n z) \left[\cos(g_z(z-L)) + \frac{i\Delta k}{g_z} \sin(g_z(z-L)) \right] + \\ &+ \exp(-ik_n z) \frac{i\gamma_z}{g_z} \sin(g_z(z-L)), \\ \Phi_{2z} &= \exp(ik_n z) \frac{i\gamma_z}{g_z} \sin(g_z z) + \\ &+ \exp(-ik_n z) \left[\frac{i\Delta k}{g_z} \sin(g_z z) - \cos(g_z z) \right], \\ W_z &= i2k_n \left[\cos(g_z L) - \frac{i\Delta k}{g_z} \sin(g_z L) \right], \quad \Delta k \equiv \sqrt{k_0^2 - q^2} - k_n, \\ |\Delta k| &\ll k_n, \quad g_z \equiv \sqrt{\Delta k^2 - \gamma_z^2}, \quad \gamma_z \equiv \frac{mk_0^2}{4\sqrt{k_0^2 - q^2}}. \end{aligned}$$

Точно такое же решение с заменой индекса z на индекс y' можно записать для поля $\Phi_{y'}$ рассеянной TM -компоненты. Единственное отличие состоит в том, что коэффициент $\gamma_{y'}$ в этом случае содержит множитель $1 - 2q^2/k_0^2$:

$$\gamma_{y'} = \frac{mk_0(1 - 2q^2/k_0^2)}{4\sqrt{1 - q^2/k_0^2}}$$

(зависимость поляризации $P_{y'}$ от поля H естественно тоже другая, чем для P_z).

Это решение, так же как для падающей волны, справедливо вблизи первого брэгговского резонанса, т.е. описывает возмущенное поле в узкой области поперечных волновых векторов вблизи точного резонанса.

Следовательно, мы вынуждены рассматривать рассеяние только на крупномасштабных неоднородностях, имеющих узкий спектр. Кроме того, будем предполагать $m^4 \ll (|\epsilon_1|^2)$. При этом приближённый характер решений для периодически неоднородного слоя не скажется на поле, рассеянном на случайных неоднородностях.

2. РАССЕЯНИЕ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

Рассмотрим случай вытянутых неоднородностей $\epsilon_1(\vec{r}) = \epsilon_1(x, y)$, кроме того будем предполагать, что неоднородности являются статистически однородными: $\langle \epsilon_1(\vec{r}) \epsilon_1^*(\vec{r}') \rangle = \Psi_\epsilon(\vec{r} - \vec{r}')$. При этом $\langle f(\vec{q}) f^*(\vec{q}') \rangle = F_0^2(\vec{q}) \delta(\vec{q} - \vec{q}')$, где $F_0^2(\vec{q})$ — Фурье-сопряжённая с функцией Ψ_ϵ . В этом случае, согласно (6), рассеянное поле также является статистически однородным по координатам $\{x, y\}$, поскольку $\langle \Phi_{\{x, y'\}}(\vec{q}) \Phi_{\{x, y'\}}^*(\vec{q}') \rangle = \Phi_{0\{x, y'\}}^2(\vec{q}) \delta(\vec{q} - \vec{q}')$, где $\Phi_{0\{x, y'\}}^2$ — средние угловые спектры соответствующих компонент рассеянного поля. Следовательно, средний угловой спектр какой-либо компоненты поля равен среднему квадрату модуля соответствующей компоненты Фурье. Аналогичные спектры для электрического поля найдём, воспользовавшись соотношениями:

$$E_{1qx'} = \frac{k_0}{q} \Phi_x, \quad E_{1qy'} = -\frac{i}{k_0} \frac{d}{dz} \Phi_{y'} + \frac{iq_1 f}{qk_0} \frac{dH}{dz}. \quad (7)$$

Ограничимся исследованием случая $\Delta k_0 = 0$, $iR_\sigma = 1$, когда поле падающей волны достигает наибольших значений внутри слоя.

При вычислении поля Φ_x предполагаем для простоты, что коэффициент отражения этой компоненты от границы $z = L$ также равен \hat{r}_σ , как и в случае падающей TM -волны. Далее получим

$$\int_0^L \Phi_{2z} P_z dz = \frac{q_2 k_0 \cos \theta_0 f}{(g_z^2 + \gamma_0^2)} \left\{ [\gamma_0 - \gamma_z + i\Delta k] [1 - e^\tau \cos(g_z L)] - e^\tau \left(g_z + \frac{\gamma_0(\gamma_z - i\Delta k)}{g_z} \right) \sin(g_z L) \right\}, \quad (8)$$

$$\int_0^L \Phi_{1z} P_z dz = \frac{q_2 k_0 \cos \theta_0 f}{(g_z^2 + \gamma_0^2)} \left\{ [\Delta k + i(\gamma_0 - \gamma_z)] [1 - e^{-\tau} \cos(g_z L)] - e^{-\tau} \left(\frac{\gamma_0(\Delta k - i\gamma_z)}{g_z} - ig_z \right) \sin(g_z L) \right\}.$$

Основной вклад в рассеянное поле даёт второй член в фигурных скобках в выражении (6). При $\Delta k = 0$ этот член содержит экспоненциально малый знаменатель ($\sim \exp(-\gamma_z L)$), соответствующий условию возбуждения

основной моды брэгговского резонатора рассеянным полем. Вне этой экспоненциально узкой $\Delta k \leq \exp(-\gamma_z L)$ области поле $\Phi_z(0)$ экспоненциально мало и вклад других максимумов в интенсивность пренебрежимо мал. Полагая $\Delta k = 0$ в выражении (8) и разлагая знаменатель в выражении (6), получим

$$\Phi_z(0) = e^{-ik_n z} \frac{q_2}{\gamma_*} \frac{f \exp(\gamma_* L)}{[1 + i \exp(2\gamma_z L)(X_0 - X)]},$$

$$\gamma_* \equiv \gamma_0 + \gamma_z \simeq \frac{mk_0}{2} \cos \theta_0, \quad (9)$$

$$X \equiv \frac{q^2}{4\gamma_z k_n}, \quad X_0 \equiv \frac{q_0^2}{4\gamma_z k_n}.$$

В соответствии с этим средний угловой спектр этой компоненты рассеянного поля имеет вид

$$\Phi_{0z}^2(0) = \frac{q_2^2}{\gamma_*^2} \frac{F_0^2 \exp(2\gamma_* L)}{[1 + \exp(4\gamma_z L)(X_0 - X)^2]}, \quad (10)$$

то есть сосредоточен в конусе ракурсных углов $q = q_0$. Для гауссовой функции корреляции неоднородностей

$$F_0^2 = \langle |\varepsilon_1|^2 \rangle l^2 / (4\pi) \exp[-l^2((q_1 - k_0 \sin \theta_0)^2 + q_2^2)/4],$$

l — горизонтальный радиус корреляции. Далее рассматривается случай крупномасштабных неоднородностей $k_0 l \gg 1$, соответствующий узкому спектру неоднородностей, что соответствует области применимости полученных решений.

При вычислении поля $\Phi_{y'}$, естественно ожидать, что наибольший вклад даст второй член выражения, аналогичного (6), содержащий при $\Delta k = 0$ экспоненциально малый знаменатель. Однако легко заметить, что, если положить $df/dz = 0$ в поляризационном члене $P_{y'}$, при $\Delta k = 0$ будем иметь

$$\Phi_{2y'}(z) P_{y'}(z) \sim \exp[(\gamma_0 - \gamma_{y'})z] \simeq 1,$$

то есть числитель главного члена не содержит экспоненциально большого множителя, как в случае поля Φ_z . Учёт того, что df/dz отлична от нуля на границах неоднородного слоя, приводит к следующему выражению для рассеянного поля при $z = 0$:

$$\Phi_{y'} = \frac{i q_1 f \exp[(\gamma_0 + \gamma_{y'})L]}{q_2 [1 + i \exp(2\gamma_{y'} L) (q_0^2 - q^2) / (4\gamma_{y'} k_n)]}.$$

Это поле обусловлено рассеянием на скачке случайных неоднородностей, в области большого поля (при $z = L$). Несмотря на значительную величину, этот член в $1/m$ раз меньше поля Φ_z и далее не рассматривается.

Таким образом, основная мода резонатора полем $\Phi_{y'}$ возбуждается неэффективно. Другие максимумы этого поля связаны с минимумом вронскиана $W_{y'}$, стоящего в знаменателе. Эти спектральные максимумы достигаются при условии

$$\gamma_{y'} L \sqrt{\Delta k^2 - \gamma_{y'}} \simeq \pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

и имеют пиковое значение $\Phi_{y'} \sim \exp(\gamma_0 L)$ и характерную ширину (см. [1]) $\Delta q \sim \sqrt{k_n \gamma_0 (\gamma_0 L)^{-3}}$. Как будет видно далее, эти значения значительно меньше по амплитуде и по интенсивности (в $\gamma_0^3 L^3$ раз), чем для рассеянного поля Φ_z . Поэтому можно считать, что TM -компонента рассеянного поля пренебрежимо мала.

Спектры полей ($E_x = q_1/q E_{x'} - q_2/q E_{y'}$, $E_y = q_2/q E_{x'} + q_1/q E_{y'}$, $|\vec{E}_\tau| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$) просто выражаются через аналогичные величины в штрихованной системе координат. Поскольку имеет место (7), а поле $\Phi_{y'}$ пренебрежимо мало, по сравнению с Φ_z , выражения для средних спектров электрических полей на выходе из слоя запишем в виде

$$E_{0x}^2 = \frac{k_0^2 q_2^2}{q^4} \Phi_{0z}^2(0), \quad E_{0y}^2 = \frac{k_0^2 q_1^2}{q^4} \Phi_{0z}^2(0), \quad (11)$$

$$E_{0\tau}^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 = \frac{k_0^2 q_2^2}{\gamma_z^2 q^2} \frac{F_0^2 \exp(2\gamma_z L)}{[1 + \exp(4\gamma_z L)](X_0 - X)^2}. \quad (12)$$

2.1. Случай нормального падения

Прежде всего проанализируем полученные выражения для нормального падения волны на слой. В этой ситуации выражения (11) упрощаются:

$$E_{0x}^2 = \frac{4}{\pi} \sin^4 \phi \mathcal{L}(X), \quad E_{0y}^2 = \frac{1}{\pi} \sin^2(2\phi) \mathcal{L}(X),$$

$$E_{0\tau}^2 = \frac{4}{\pi} \sin^2 \phi \mathcal{L}(X), \quad (13)$$

$$\mathcal{L}(X) \equiv \frac{(|\varepsilon_1|^2)^2 \exp(mk_0 L) \exp[-m(k_n l)^2 X/4]}{4m^2 [1 + \exp(mk_0 L)] X^2},$$

где ϕ — угол вектора \vec{q} с направлением оси OX .

Средние интенсивности $\langle |E_x|^2 \rangle$, $\langle |E_y|^2 \rangle$, $\langle |E_\tau|^2 \rangle$ определяются интегралами по $q dq d\phi = mk_n^2 d\phi dX/2$ от соответствующих средних спектров. При

этом получим

$$D \equiv \frac{mk_n^2}{2} \int_0^\infty \mathcal{L}(X) dX = \frac{\langle |\varepsilon_1|^2 \rangle \alpha \exp(mk_0 L)}{2m^2} \operatorname{Re} \left\{ ie^{i\alpha} E_1(i\alpha) \right\}, \quad (14)$$

$$\alpha \equiv \frac{m(k_n l)^2}{4 \exp(mk_0 L/2)},$$

где $E_1(z)$ — интегральная показательная функция [8], а параметр α характеризует отношение спектральной ширины основной моды брэгговского резонатора к ширине спектра случайных неоднородностей. В результате интегрирования по углу ϕ имеем

$$\langle |E_x|^2 \rangle = 3D, \quad \langle |E_y|^2 \rangle = D, \quad \langle |E_z|^2 \rangle = 4D, \quad (15)$$

то есть “средний” угол ψ между осью OX и плоскостью поляризации рассеянного излучения на выходе из слоя равен

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\langle |E_y|^2 \rangle}{\langle |E_x|^2 \rangle}} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Этот угол является эффективным углом поворота плоскости поляризации волны в результате рассеяния, поскольку плоскость поляризации падающей волны проходит через ось OX .

Величина средней интенсивности в зависимости от параметров определяется функцией D . В случае неоднородностей не очень большого масштаба, когда $\alpha \ll 1$, получим

$$D \approx \frac{\langle \pi |\varepsilon_1|^2 \rangle \alpha \exp(mk_0 L)}{4m^2} = \frac{\langle \pi |\varepsilon_1|^2 \rangle (k_n l)^2 \exp(mk_0 L/2)}{4m}. \quad (16)$$

Видим, что в этой области параметров интенсивность обратнорассеянного поля растёт с увеличением масштаба неоднородностей. В обратном предельном случае ($\alpha \gg 1$), используя асимптотическое разложение функции $E_1(i\alpha)$, будем иметь

$$D = \frac{\langle |\varepsilon_1|^2 \rangle \exp(mk_0 L)}{2m^2} \left\{ 1 - \frac{2}{\alpha^2} \right\}, \quad (17)$$

то есть интенсивность рассеянного поля в этой области параметров слабо зависит от масштаба неоднородностей (аналогичная особенность ранее отмечалась в работе [9] при изучении влияния области отражения на рассеяние радиоволн в линейном слое изотропной плазмы).

Заметим, что выражения для интенсивностей рассеянного поля пропорциональны экспоненте от учетверённой оптической толщины решётки

$\tau = mk_0L/4 = \gamma_0L$ и квадрату масштаба многократного рассеяния ($L_p \sim \gamma_0^{-1}$). Эти множители имеют большую величину, а их появление связано, во-первых, с экспоненциально большими величинами полей падающей и рассеянной волн в брэгговском резонаторе, а во-вторых, с тем, что рассеянное поле накапливается когерентно в области большого поля, масштаб которой равен масштабу многократного рассеяния.

Оценим радиус поперечной корреляции рассеянного поля на выходе из слоя (при $z = 0$). Корреляционные функции компонент рассеянного поля могут быть получены из (13) интегрированием по $dq_1 dq_2$ с весом $\exp(i\vec{q}\vec{\rho})$:

$$\begin{aligned} \Psi_\tau(\vec{\rho}) &\equiv \langle E_\tau(x + \rho \cos \eta, y + \rho \sin \eta) E_\tau^*(x, y) \rangle = \\ &= 4 \int_0^\infty \mathcal{L}(X) q dq \int_{(2\pi)} \sin^2 \phi e^{iq\rho \cos(\phi-\eta)} d\phi = \\ &= 8\pi \int_0^\infty \mathcal{L}(X) [\sin^2 \eta J_0(q\rho) + \cos(2\eta) J_1(q\rho)/(q\rho)] q dq \simeq \\ &\simeq 2\langle |E_\tau|^2 \rangle \left[\sin^2 \eta J_0\left(\frac{\rho}{\rho_{\text{кор}}}\right) + \cos(2\eta) \frac{\cos(2\eta)\rho_{\text{кор}}}{\rho} J_1\left(\frac{\rho}{\rho_{\text{кор}}}\right) \right], \quad (18) \\ \rho_{\text{кор}} &\equiv \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\gamma_0 k_n}} e^{\gamma L}, \end{aligned}$$

где оценка последнего интеграла получена при $\alpha \ll 1$, с учётом того, что функция $q\mathcal{L}(X)$ имеет острый максимум.

Полученное выражение показывает, что радиус поперечной корреляции рассеянного поля в $e^{\gamma L}$ раз больше радиуса Френеля, вычисленного для масштаба рассеяния.

2.2. Рассеяние волны при наклонном падении

Если $\theta_0 \neq 0$, знаменатели в выражениях (11) для спектров рассеянных полей приводят к изотропному спектральному распределению вблизи конической поверхности ракурсных углов $q = q_0$, причём ширина спектра $\Delta q \sim q_0^{-1}$. В то же время функция $F_0(q_1, q_2)$ выделяет в спектре область $q_1 \simeq q_0, q_2 \simeq 0$ с характерной шириной $\Delta q_{\{1,2\}} \sim l^{-1}$. Эти соображения приводят к заключению, что пиковые значения спектральных максимумов и интенсивности компонент, содержащие множители q_2^2 и q_2^4 , будут убывать с увеличением угла падения. Причём медленнее будут убывать интенсивности $\langle |E_x|^2 \rangle$ и $\langle |E_\tau|^2 \rangle$, в выражение для которых входит множитель q_2^2 . Для вычисления этих интенсивностей необходимо оценить

интеграл

$$\int_0^{\infty} \int_{(2\pi)} \frac{q_1^2 q_2^2 \exp[-l^2((q_1 - q_0)^2 + q_2^2)/4]}{q^4 (1 + \exp(4\gamma_z L)(X - X_0)^2)} q dq d\phi =$$

$$= \int_0^{\infty} \int_{(2\pi)} \sin^2 \phi \cos^2 \phi \frac{\exp[-l^2((q - q_0)^2 + 4q_0 q \sin^2(\phi/2))/4]}{1 + \exp(4\gamma_z L)(X - X_0)^2} q dq d\phi. \quad (19)$$

Считая выполненными условия (заметим, что при этом θ_0 может быть мал)

$$\frac{q_0^2 \exp(4\gamma_z L)}{2\gamma_z k_n} \gg 1, \quad lq_0 \gg 1, \quad (20)$$

этот интеграл можно представить в виде произведения двух однократных I_ϕ и I_q , которые нетрудно вычислить:

$$I_\phi = \int_{(2\pi)} \sin^2 \phi \cos^2 \phi e^{-l^2 q_0^2 \sin^2(\phi/2)} d\phi \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2 e^{-l^2 q_0^2 \phi^2/4} d\phi = \frac{4\sqrt{\pi}}{(lq_0)^3}, \quad (21)$$

$$I_q = \int_0^{\infty} \frac{e^{-l^2(q-q_0)^2}}{1 + \exp(4\gamma_z L)(X - X_0)^2} q dq \simeq 4\gamma_z k_n e^{-2\gamma_z L} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\beta^2 \eta^2)}{1 + \eta^2} d\eta,$$

$$\beta = \frac{l\gamma_z k_n}{q_0 \exp(2\gamma_z L)}.$$

Заметим, что в случае нормального падения интеграл, аналогичный I_ϕ , был порядка единицы. При $\beta \ll 1$ интеграл I_q имеет значение того же порядка, что и аналогичный интеграл при нормальном падении:

$$I_q = 2\pi\gamma_z k_n e^{-2\gamma_z L}.$$

Следовательно, интенсивность рассеяния волны при наклонном падении уменьшится в $(k_0 l \sin \theta_0)^3$ раз по сравнению с (16):

$$\langle |E_\tau|^2 \rangle \simeq \frac{2\sqrt{\pi} \langle |\varepsilon_1|^2 \rangle}{k_0 l \sin^3 \theta_0 \cos^2 \theta_0} e^{2\gamma_0 L}, \quad \beta \ll 1. \quad (22)$$

Здесь необходимо отметить, что $\cos \theta_0$ не может принимать очень малых значений, поскольку необходимо выполнение условия малости амплитуды периодической структуры (4).

В обратном предельном случае $\beta \gg 1$, когда характерная спектральная полоса брэгговского резонатора больше ширины спектра неоднородностей, интенсивность рассеянного поля также сильно уменьшается по сравнению с аналогичным случаем (17) при нормальном падении:

$$\langle |E_\tau|^2 \rangle = \frac{8 \langle |\varepsilon_1|^2 \rangle \exp(2\gamma_* L)}{m^2 (q_0 l)^2 \cos^2 \theta_0}, \quad \beta \gg 1.$$

Таким образом, описанные эффекты наиболее ярко проявляются в случае нормального падения и поэтому подробнее случай наклонного падения волны на слой обсуждать не будем.

3. РАССЕЯНИЕ НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

Выясним особенности исследованного рассеяния в случае неоднородностей, зависящих от координаты z . Как и прежде будем предполагать, что имеется статистическая однородность, т.е. корреляционная функция зависит от разности своих аргументов, а конкретно, будем считать её гауссовой с масштабом корреляции l_z вдоль оси OZ . При этом остаются в силе соображения относительно статистической однородности рассеянного поля, отмеченные в начале предыдущего пункта. Следовательно, и в этом случае можно для вычисления среднего углового спектра Φ_{0z}^2 рассеянного поля Φ_z взять среднее от квадрата модуля соответствующих фурье-компонент, как это делалось ранее. Однако, в случае неоднородностей, зависящих от z , функция $f = f(q_1 - q_0, q_2, z)$, входящая множителями в поляризационные члены $P_{\{z, y'\}}$, тоже зависит от z и поэтому невозможно вычислить интегралы, входящие в выражение (6). Тем не менее, средний квадрат модуля фурье-компонент рассеянного поля (спектр) определяется двойными интегралами по переменным z_1 и z_2 , в которых случайные множители при усреднении дадут

$$\langle f(q_1 - q_0, q_2, z_1) f^*(q_1 - q_0, q_2, z_2) \rangle = F_0(q) \exp \left[-\frac{(z_1 - z_2)^2}{l_z^2} \right],$$

где F_0 — спектр неоднородностей, введённый ранее, а экспоненциальный множитель является следствием гауссовой функции корреляции. Таким образом, учёт конечности масштаба l_z требует от нас вместо расчёта попарных произведений интегралов вида $\int_0^L P_q(z) \Phi_{q, \{1,2\}}(z) dz$ для $q = y'$ или $q = z$, что делалось в предыдущем пункте, вычислять двойные интегралы вида

$$\int_0^L \int_0^L P_q(z_1) \Phi_{q, \{1,2\}}(z_1) P_q^*(z_2) \Phi_{q, \{1,2\}}^*(z_2) \times \exp \left[-\frac{(z_1 - z_2)^2}{l_z^2} \right] dz_1 dz_2.$$

Учитывая громоздкость входящих сюда функций, это исследование в общем виде представляется крайне утомительным. Для упрощения мы воспользуемся тем, что ширина полосы главного спектрального максимума определяется знаменателем второго члена в фигурных скобках выражения (6). Поэтому в числителе этого единственного существенного члена, т.е. в подынтегральных функциях, можно сразу положить $\Delta k_0 = \Delta k = 0$. Такой

упрощённый подход позволит выяснить максимальные значения l_z , при которых проявляется роль ограниченности неоднородностей (при очень значительном ослаблении рассмотренных эффектов за формирование рассеянного поля могут стать ответственными другие члены и упрощённый подход будет некорректным).

Например, для TE -компоненты рассеянного поля при этом получим

$$\Phi_z(0) = e^{-ik_n z} \frac{q_2 \int_0^L f(z) \exp(\gamma_* z) dz}{1 + i(X_0 - X) \exp(2\gamma_z L)}$$

Поэтому в выражение для среднего спектра Φ_{0z}^2 войдёт интеграл $J_z = \int_0^L \int_0^L (f(z_1) f^*(z_2)) \exp[\gamma_*(z_1 + z_2)] dz_1 dz_2$, который нетрудно вычислить, переходя к переменным интегрирования: $\xi = z_1 - z_2$, $\eta = z_1 + z_2$:

$$J_z = \frac{\sqrt{\pi} l_z F_0(q)}{2\gamma_*} e^{(\gamma_* l_z)^2 / 4} \times \left\{ e^{2\gamma_* L} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{L}{l_z} + \frac{\gamma_* l_z}{2} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\gamma_* l_z}{2} \right) \right] + \operatorname{erf} \left(\frac{\gamma_* l_z}{2} - \frac{L}{l_z} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\gamma_* l_z}{2} \right) \right\}, \quad (23)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ — интеграл вероятностей. Очевидно, что в случае $l_z \rightarrow \infty$ имеем $J_z \simeq \exp(2\gamma_* L) / \gamma_*^2$. Это значение интеграла соответствует ситуации, рассмотренной в предыдущем разделе. Значение интеграла не меняется существенно до тех пор, пока $\gamma_* l_z \geq 1$. При $\gamma_* l_z \ll 1$, т.е. когда размер неоднородностей становится меньше масштаба многократного рассеяния на периодической структуре, значение интеграла заметно убывает: $J_z \sim \gamma_* l_z \exp(2\gamma_* L) / \gamma_*^2$. Таким образом, рассмотренные эффекты рассеяния проявляются для неоднородностей с радиусом корреляции в поперечном слое направлении, превышающим масштаб многократного рассеяния. Причём, в случае сильной решётки радиус корреляции может быть существенно меньше толщины слоя, т.е. неоднородности не обязательно должны быть цилиндрическими.

Качественно полученный критерий можно пояснить следующим образом. Рассмотренные эффекты рассеяния обусловлены наличием больших полей падающей и рассеянных волн в брэгговском резонаторе. Характерный масштаб области большого поля порядка масштаба многократного рассеяния на периодической структуре. Следовательно, влияние конечного размера неоднородностей будет существенно, если этот размер меньше области, в которой формируется рассеянное поле, т.е. меньше масштаба многократного рассеяния.

Данные исследования поддержаны грантом РФФИ 95-02-05001.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лалин В. Г. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1997. Т. 40. № 10. С. 1230.
2. Лалин В. Г., Тамойкин В. В. — В сб.: Труды III Суздальского симпозиума УРСИ по модификации ионосферы мощными радиоволнами. — М.: ИЗМИРАН, 1991. С. 54.
3. Лалин В. Г. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1989. Т. 32. № 9. С. 1144.
4. Lapin V. G. The book of abstracts of international simposium "The world of electromagnetic" (AMEREM'96), Albuquerque, New Mexico, USA, 1996. P. 17.
5. Денисов Г. Г., Резников М. Г. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1982. Т. 25. № 5. С. 562.
6. Пасхин В. М., Сандлер М. С., Свешников Б. В. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1983. Т. 26. № 1. С. 103.
7. Гусев В. Д., Гольнский С. М. — В сб.: Труды III Суздальского симпозиума УРСИ по модификации ионосферы мощными радиоволнами. — М.: ИЗМИРАН, 1991. С. 125.
8. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979г.
9. Денисов Н. Г. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1960. Т. 3. № 2. С. 208.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
21 июля 1997 г.

**ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING ON LARGE-SCALE
INHOMOGENEITIES IN BRAGG RESONATOR**

V. G. Lapin, V. V. Tamojkin

Plane electromagnetic wave scattering by casual inhomogeneities is investigated in a plane periodically non-uniform layer with a reflecting far border. It is shown, that in a case, when the incident wave satisfies the condition of the main Bragg resonator mode excitation and its field is large in the layer depth, the average angular back scattered field spectrum on an exit from the resonator has a narrow maximum with the peak value, proportional to an exponent from four optical thickness of the periodic structure. This maximum corresponds to the condition of the main Bragg resonator mode excitation by the scattered field. Other spectral maxima have small amplitude and intensity. The similar scattering character takes place, if the casual inhomogeneities size in the direction perpendicular to the layer boundary exceeds the multiple scattering scale on a periodic structure.

УДК 523.4-852+537.874

ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ ВАРИАЦИЙ ПАРАМЕТРОВ ТРОПОСФЕРЫ МЕТОДОМ РАДИОАКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

*В. О. Рапопорт, Н. А. Митяков, В. А. Зиничев, Н. И. Белова,
Ю. А. Сазонов*

Рассматривается методика, основанная на исследовании вариаций амплитуды и фазы сигналов радиоакустического зондирования (РАЗ) атмосферы, для диагностики динамических и волновых процессов в тропосфере.

Приводятся экспериментальные данные о вариациях фазы сигнала РАЗ от скана к скану для дневного и ночного сеансов. Вариации фазы сигнала с характерными временами более 40 минут скорее всего связаны с прохождением внутренних гравитационных волн (ВГВ) через область зондирования. Сопоставление экспериментальных данных с результатами компьютерного моделирования распространения ВГВ показывают достаточно хорошее соответствие экспериментальных и расчётных данных.

Для исследования динамических процессов в атмосфере (возбуждение и распространение внутренних гравитационных волн, медленное изменение температурных профилей и возникновение конвекции по достижении критического значения градиента температуры, атмосферная турбулентность) необходимо проведение измерений малых вариаций температуры и ветра в атмосфере. В настоящее время метод радиоакустического зондирования используется, в основном, для измерения усреднённых температурных профилей [1-4]. Большое внимание уделяется учёту роли ветра и атмосферной турбулентности на параметры акустического зеркала [5-10]. В то же время метод РАЗ может быть с успехом использован для исследования динамических процессов с малыми вариациями температуры и ветра в тропосфере. Допплеровский сдвиг частоты радиосигнала, рассеянного назад звуковым путем, определяется температурой атмосферы и продольной (вдоль луча) скоростью ветра. Использование фазовых методов анализа сигнала РАЗ позволяет регистрировать изменения доплеровской частоты с точностью до одного миллигерца, т.е. измерять вариации скорости продольной составляющей скорости ветра с точностью до нескольких см/сек и с разрешением по высоте порядка длины акустического импульса.

В настоящей статье рассмотрена методика измерения малых вариаций параметров атмосферы методом РАЗ и приведены первые результаты использования такой методики. При этом использовались данные

наблюдений, проведённых в период май–август 1995 г. на установке РАЗ, расположенной в 25 км к востоку от Нижнего Новгорода.

Основные параметры используемой установки РАЗ [3, 4]: акустическая частота могла изменяться в пределах 40–45 Гц, излучаемая акустическая мощность — 400 Вт, акустический излучатель имеет вертикальную диаграмму направленности шириной $45^\circ \times 45^\circ$. Использовалась двухпозиционная схема радиолокатора с разносом передающей и приёмной радиантенн на 110 м в направлении север–юг, при этом акустическая антенна располагалась в середине базы. Радиочастота выбиралась в диапазоне 18–20 МГц, импульсная мощность радиопередатчика составляла 1000 Вт, ширина диаграммы направленности передающей и приёмной антенн равна $36^\circ \times 60^\circ$.

Длительность акустического импульса составляла 1–1,5 секунды, т.е. относительная ширина спектра импульса — 1,5–2%. Интервал измеряемых температур при посылке единичного импульса составлял $\Delta T = 2T \frac{\Delta F}{F} \simeq 9^\circ - 12^\circ$. Необходимый для снятия температурного профиля интервал температур может составлять 40°K . Для обеспечения измерений во всём интервале температур работа проводилась циклами с переключением частот акустического излучателя в пределах 2–3 Гц с шагом 0,5 Гц.

Радиопередатчик излучал импульсы длительностью 6–8 мкс со скважностью около 5. Сразу же после окончания импульса передатчика открывался вход приёмника на время порядка 30 мкс, что обеспечивало приём радиосигналов с высот до 5 км. Полоса пропускания приёмника составляла 300 Гц. Для компенсации уходов и выделения доплеровской частоты использовался второй вспомогательный когерентный приёмник, на вход которого подавался сигнал с возбуждителя передатчика. Сигналы с частотой, равной доплеровскому смещению частоты радиосигнала $F_d = 40 - 45$ Гц, поступали на АЦП. Частота съёма данных (тактовая частота АЦП) выбиралась равной 38 или 19 отсчётам в секунду, в результате чего, принимаемый сигнал гетеродинировался на частоты 2–7 Гц. Осциллограмма сигнала РАЗ для каждого скана в этом случае представляет собой квазисинусоидальный сигнал, фаза которого определяется высотой и скоростью распространения акустического импульса, а период — температурой и продольной компонентой ветра на данной высоте. Удобной формой представления результатов эксперимента является яркостная запись сигнала в плоскости высота–время. Если использовать высококонтрастную запись, то переходы от белого тона к чёрному будут соответствовать переходам через нуль амплитуды квазисинусоидального сигнала. На плоскости высота–время будут наблюдаться почти горизонтальные полосы (“зёбровая” структура). Интервал между двумя соседними чёрными полосами на записи соответствует изменению фазы

сигнала на 2π . Скорость изменения фазы по вертикали определяется гетеродинированной доплеровской частотой сигнала РАЗ и характеризует зависимость температуры и продольной компоненты ветра от высоты. Изменения фазы сигнала по горизонтальной оси характеризуют временные вариации этих параметров.

Примеры такой записи приведены на рис. 1.

Рассмотрим более подробно рис. 1а (дневной сеанс). Здесь представлена запись сигнала при зондировании на акустической частоте 42 Гц. Аналогичные записи были получены для частот 41, 41,5, 42,5 и 43 Гц, однако сигнал на частоте 42 Гц имел большую интенсивность в интервале высот 0,3–2 км. Использование в сеансе нескольких акустических частот позволяет, в принципе, получить данные в более широком интервале высот, однако ухудшает временное разрешение. В дневном сеансе морфологически можно выделить три типа “зубровых” структур:

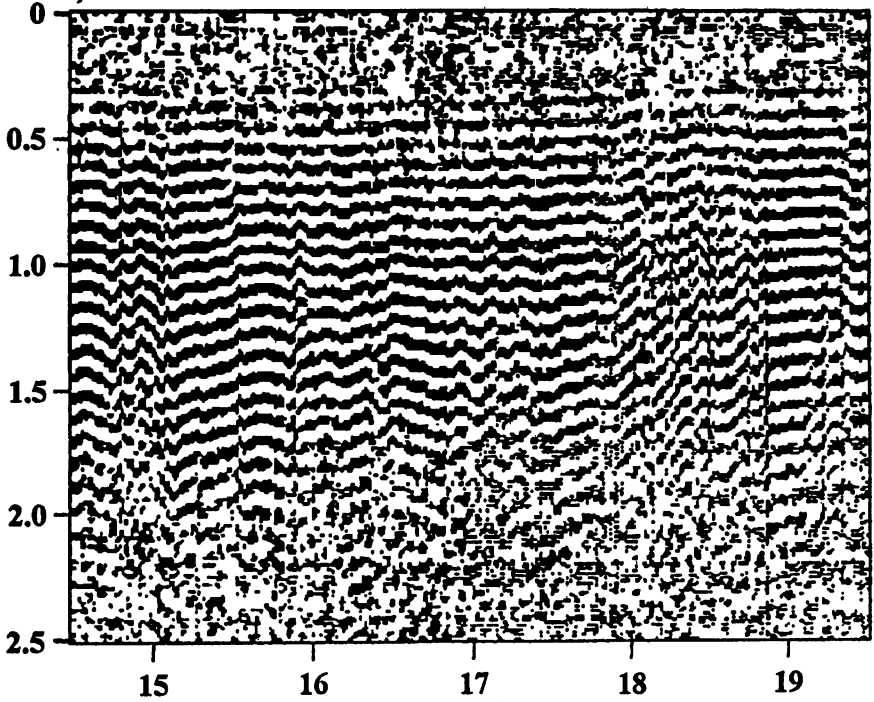
1. Медленные (за 30–60 минут) изменения фазы на 2π , например, интервал 15.00–15.40 LT. На таких участках изменения фазы (наклон “зубровой” структуры) могут плавно меняться с высотой.
2. Быстрые (почти скачкообразные) изменения фазы на величину $\leq \pi$ (например, интервал высот 0,7–1,2 км около 15.35 LT). Обращает на себя внимание то, что ниже 0,7 км и выше 1,2 км разрывы фазы в это время отсутствуют.
3. Быстрые, квазихаотические изменения фазы (например, 18.00–18.40 LT). Такие изменения фазы как бы накапливаются с высотой и в конце концов приводят к пропаданию сигнала РАЗ.

Временные флуктуации сигнала характеризуются корреляционными функциями (см. рис. 2, где \circ — автокорреляционная функция сигнала, усреднённого по интервалу высот 0,9–1,3 км; — — кросскорреляционная функция для интервалов высот 0,9–1,3 км и 1,8–2,2 км; - - — кросскорреляционная функция для интервалов высот 0,9–1,3 км и 0,5–0,9 км). Для построения корреляционных функций интенсивность сигнала усреднялась в интервале высот 0,4 км. Автокорреляционная функция строилась для интервала высот 0,9–1,3 км, где интенсивность сигнала была максимальной. Для построения кросскорреляционных функций использовались соседние участки высот (1,8–2,2 км и 0,5–0,9 км).

Функции корреляции для дневного сеанса (рис. 2а) имеют немонотонный характер с минимумом при $\tau \simeq 20$ мин. и максимумом при $\tau \simeq 40$ мин. Временной сдвиг между функциями авто- и кросскорреляции отсутствует. Для низких высот (штриховая кривая на рис. 2а) значение функции кросскорреляции при $\tau = 0$ существенно больше, чем для больших высот (сплошная кривая). Соответствующие значения коэффициентов корреляции примерно равны 0,7 и 0,3. Поведение функции корреляции при $\tau > 60$ мин. могли быть связаны с шумами.

Высота, км

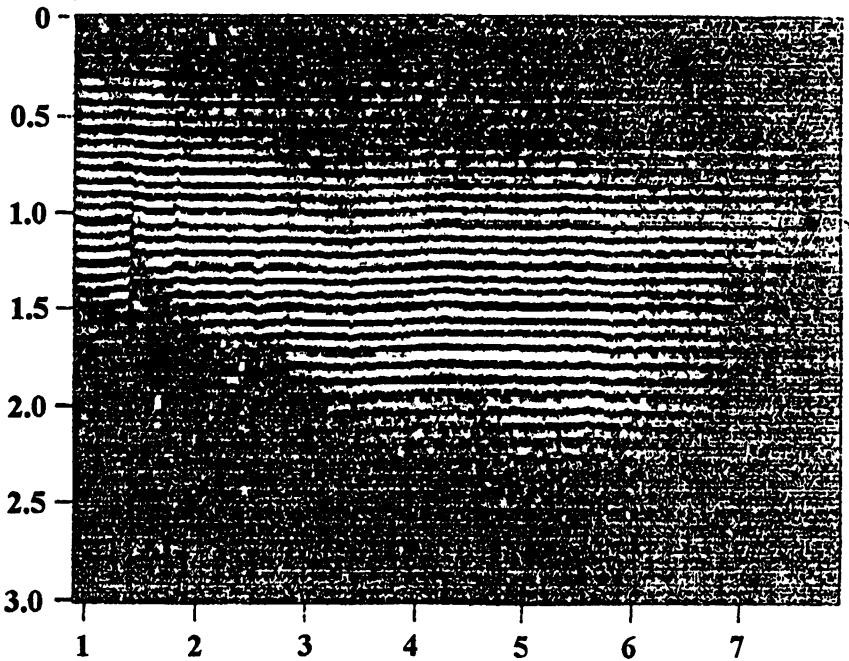
а)



Высота, км

Местное время, ч

б)



Местное время, ч

Рис. 1. Примеры регистрации сигнала РАЗ: а) 18 мая 1995 г. (дневной сеанс), б) 26 июля 1995 г. (ночной сеанс).

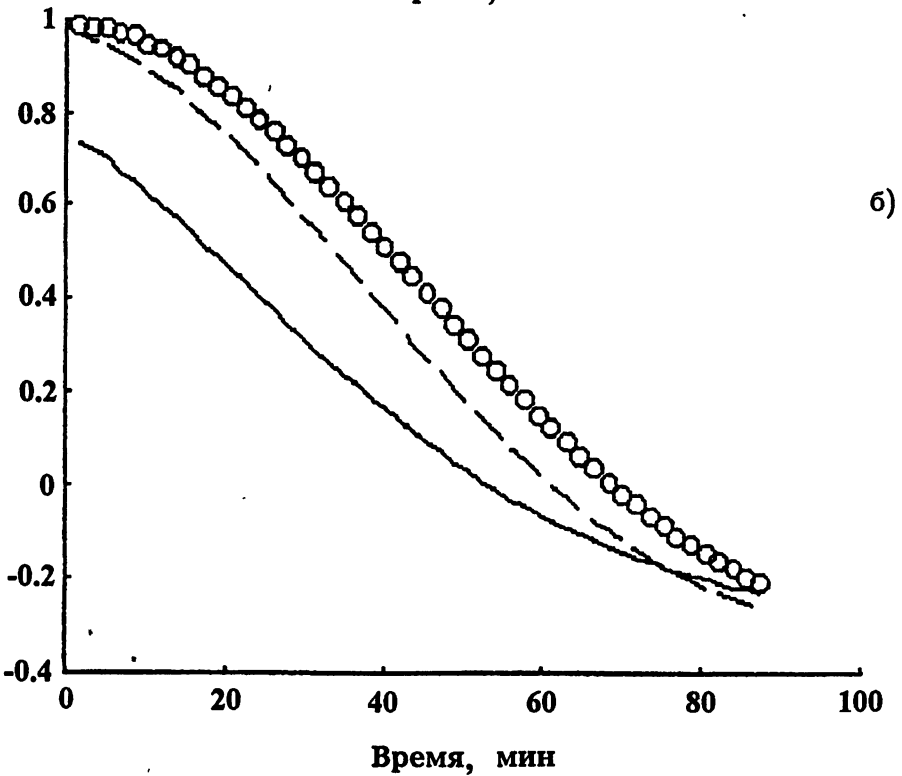
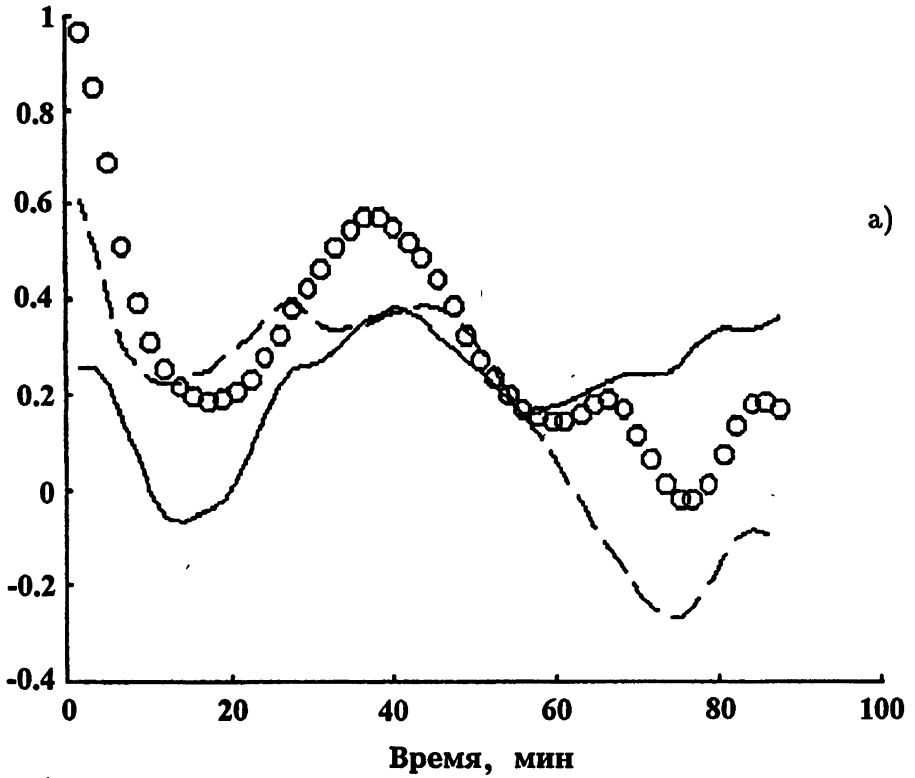


Рис. 2. Авто- и кросскорреляционные функции сигнала РАЗ для дневного (а) и ночного (б) сеансов.

Изменения фазы сигнала в ночном сеансе (рис. 16) носят значительно более плавный характер. Тем не менее в интервале времени 01.20–01.45 ЛТ наблюдались резкие изменения фазы, увеличивающиеся с высотой. На высотах больше 1,8 км “зёбровая” структура пропадала до 02.30 ЛТ.

Корреляционные функции для ночного сеанса (рис. 26) монотонно убывают с переходом через 0 на $\tau \simeq 60$ мин. Значения коэффициентов кросс-корреляции при $\tau = 0$ существенно выше, чем в дневное время и равны 0,7–1 для различных интервалов высот.

Обсуждение результатов. Наличие максимума корреляционных функций на $\tau \sim 40$ мин. для дневного сеанса свидетельствует о том, что в сигнале РАЗ имеются выделенные временные масштабы, которые, в принципе, могут быть объяснены распространением внутренних гравитационных волн. Флуктуации фазы с такими же временными масштабами хорошо видны на рис. 1а. На этом же рисунке видны участки с более быстрыми флуктуациями фазы с периодом 3–7 минут. Амплитуда медленных и быстрых флуктуаций фазы возрастает с ростом высоты. В нашем эксперименте время между двумя соседними посылками акустического импульса на частоте 42 Гц составляло 1,5 минуты, поэтому периоды изменения сигнала, меньшие трёх минут, не разрешались. Если предположить, что флуктуации сигнала определяются распространением ВГВ, то можно смоделировать различные типы фазовых флуктуаций и сопоставить их с экспериментом. Известно (см., например, [5]), что фаза сигнала РАЗ в плоскостной атмосфере для распространения звука под малыми углами к вертикали (к оси z) определяется выражением:

$$\Phi = k_a \int_0^z (\tau(z) - \tau(z')) dz' + k_a z, \quad (1)$$

где k_a — волновое число звука, $\tau = \frac{\Delta T}{2T} + \frac{v_z}{c_s}$, v_z — вертикальная компонента скорости ветра, c_s — скорость звука, T — температура на поверхности Земли, $T + \Delta T$ — температура на высоте z .

Рассмотрим случай распространения ВГВ в атмосфере с постоянными градиентами температуры и ветра. Будем считать, что структура ВГВ по вертикали представляет собой стоячую волну. Тогда

$$\tau = \frac{dz}{dz} z + a \sin(\kappa \cdot z) \cdot \cos(k_x \cdot x - \Omega \cdot t), \quad (2)$$

где a — относительная амплитуда ВГВ, κ и k_x — вертикальная и горизонтальная компоненты волнового вектора, Ω — частота ВГВ. Поскольку измерения проводятся при фиксированном x , будем полагать в дальнейшем $k_x \cdot x = 0$.

Для такой модели зависимость фазы сигнала РАЗ от высоты и от времени приобретает вид

$$\Phi = Kz + k_a \left[\frac{z^2}{2} \frac{d\tau}{dz} - az \sin(\kappa z) \cos(\Omega t) + \frac{a}{\kappa} \cos(\kappa z) \cos(\Omega t) - \frac{a}{\kappa} \cos(\Omega t) \right]. \quad (3)$$

Слагаемое Kz в этом выражении является следствием гетеродинирования сигнала и отражает технические особенности методики эксперимента.

Высота, км

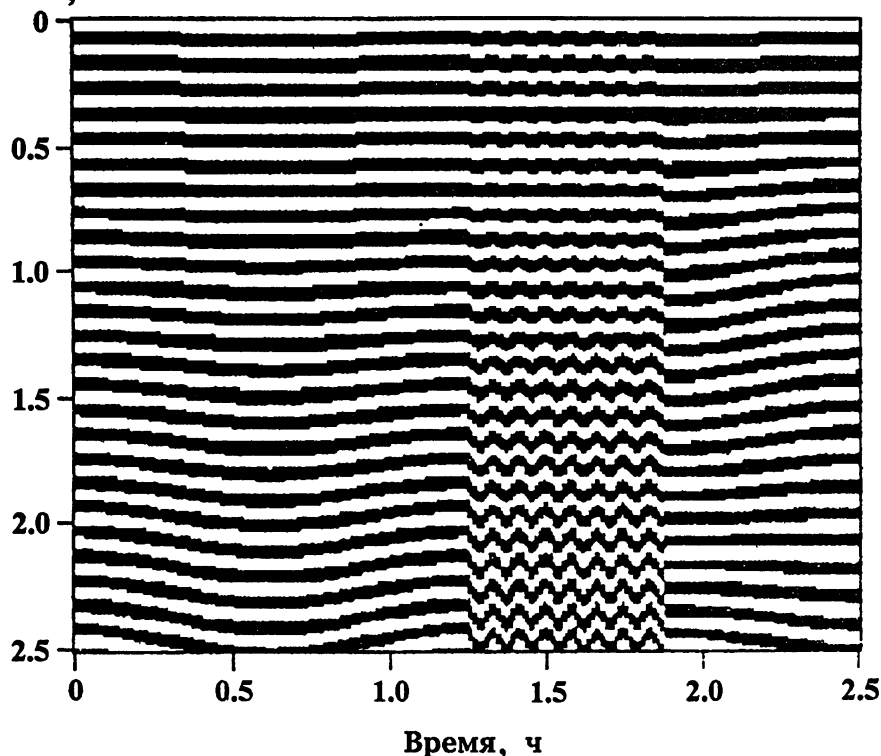


Рис. 3. Результат компьютерного моделирования сигнала РАЗ при прохождении ВГВ (параметры ВГВ указаны в тексте).

На рис. 3 приведены результаты компьютерного моделирования "зубровой" структуры сигнала. Относительный градиент температуры в невозмущенной атмосфере выбирался равным $\frac{d\tau}{dz} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$. Для первых трёх интервалов времени параметры ВГВ приведены в таблице.

t [час]	0 - 1:15	1:15 - 1:50	1:50 - 2:30
Ω [1/час]	5,03	75,4	5,03
κ [1/км]	0,75	0,75	1,75
a	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$

Поведение “зёбровой” структуры качественно отражает структуру, полученную в дневном сеансе (рис. 1а).

Поведение сигнала РАЗ в ночном сеансе (рис. 1б) более спокойное по сравнению с дневным. Это видно и по характеру функции корреляции (рис. 2б). Обращает на себя внимание более высокая корреляция сигналов на разных высотах. Переход функции автокорреляции через 0 на $t = 65$ минут означает наличие квазиосцилляторного процесса с периодом больше двух часов.

На рис. 4 приведены температурные профили для дневного (рис. 4а) и ночного (рис. 4б) сеансов. Для вычисления температуры использовалась методика, основанная на измерении периодов сигнала РАЗ [1]. Разумеется, высотное разрешение при этом по-прежнему определяется длительностью акустического импульса и составляет 0,3 км. На рис. 4а различными значками обозначены величины температуры, относящиеся к различным моментам времени. Наклон прямой определяет средний градиент температуры и составляет 8,5 град./км. Согласно [11], такой градиент температуры соответствует частоте Брента-Вяйсъяля, равной $5,7 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ (период ВГВ больше 20 минут). Разброс точек на рисунке выходит за рамки ошибок эксперимента. Поскольку расчёт температуры проводился в предположении отсутствия вертикальной скорости ветра, разброс точек скорее всего связан с наличием вертикальной компоненты ветра, которая может изменяться по высоте и по времени.

Профиль температуры в ночном сеансе (рис. 4б) не является типичным. Градиент температуры до высоты 1,7 км практически отсутствует, а выше наблюдается резкое уменьшение частоты сигнала РАЗ, которое могло бы соответствовать градиенту температуры порядка 30 град./км. Очевидно, что такой градиент привёл бы к развитию конвективной неустойчивости. Поэтому резкое изменение частоты сигнала РАЗ выше 1,7 км, связанное с уменьшением скорости звука, можно интерпретировать образованием слоя, в котором существенную роль играют процессы конденсации пара и испарения водяных капель.

В заключение отметим, что методика, основанная на исследовании вариаций сигнала РАЗ на плоскости высота-время, является достаточно чувствительным способом изучения динамических и волновых процессов в тропосфере. Исследования волновых процессов во многом выиграют, если дополнить эксперимент независимыми измерениями вертикальной и горизонтальной скорости ветра. Чтобы получить сведения о горизонтальной скорости распространения ВГВ необходимо проводить измерения в разнесённых пунктах. Измерение реальных температурных профилей позволит более точно определить значение частоты Брента-Вяйсъяля. Для измерения скорости ветра можно использовать либо метод СТ-радаров, либо методику, основанную на определении положения пятна сигнала РАЗ.

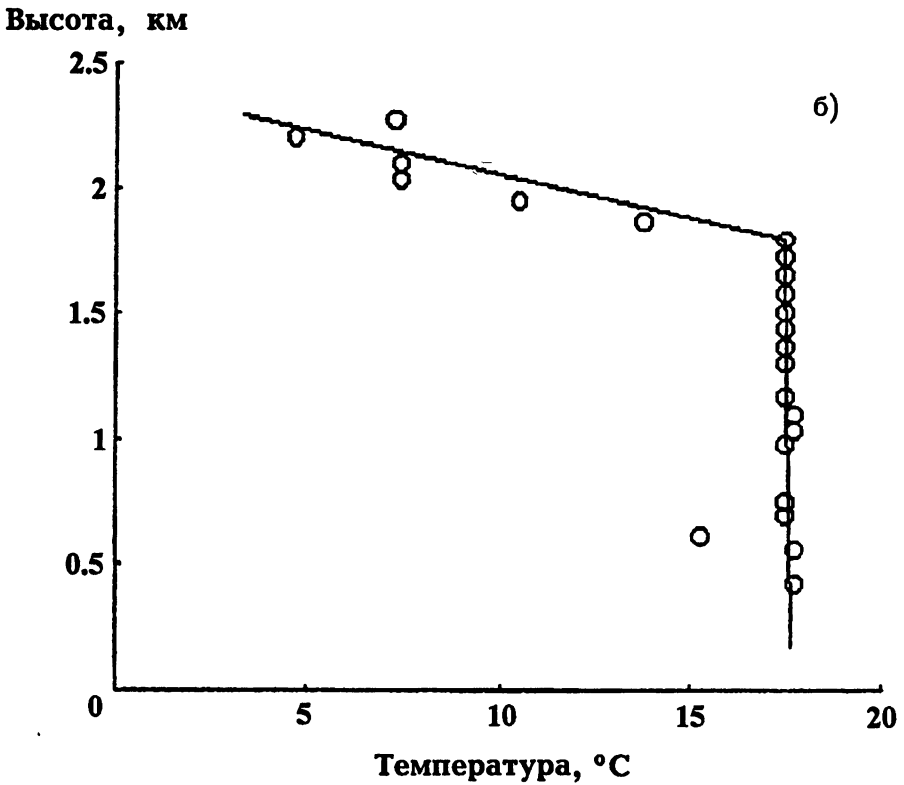
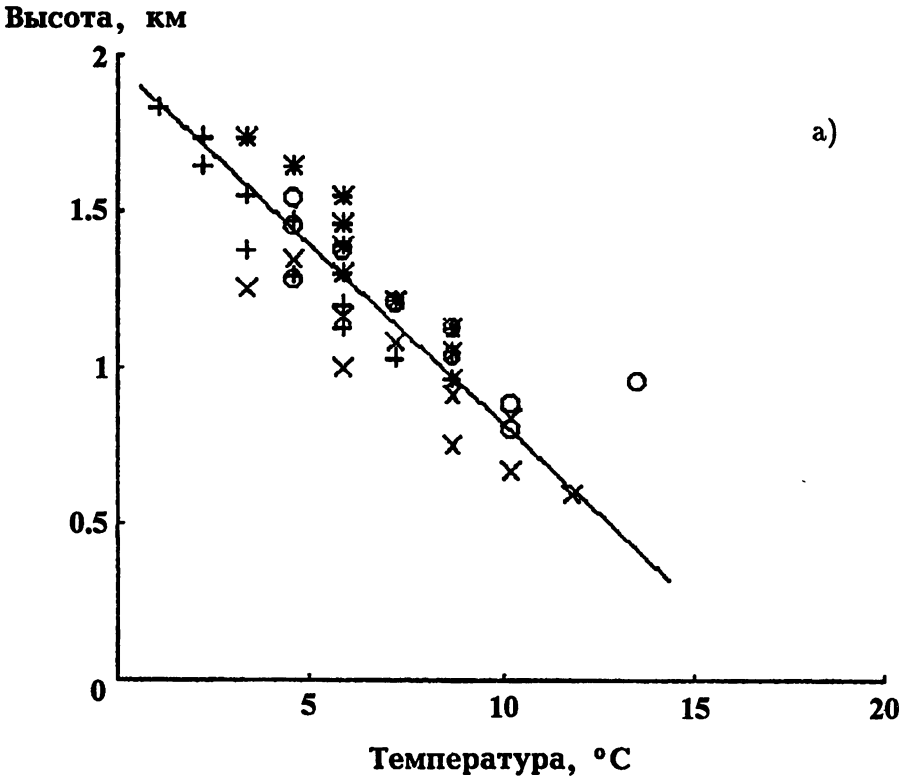


Рис. 4. Температурные профили для дневного (а) и ночного (б) сеансов.

Работа поддержана Российским Фондом фундаментальных исследований (гранты 96.02.18632 и 96.02.18634) и грантом Американского Акустического общества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каллистратова М. А., Кон А. И. Радиоакустическое зондирование атмосферы. — М.: Наука, 1985.
2. Matuura N., Masuda Y., Inuki H., Kato S., Fukao S., Sato T. and Tsuda T. //Nature, 1986. № 323. P. 426.
3. Зиничев В. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю., Фабрикант А. Л. и Федосеев Ю. Г. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1991. Т. 34. № 3. С. 234.
4. Fabrikant A. L. et al. //Int. J. Remote Sens., 1994. V. 15. № 2. P. 347.
5. Рапопорт В. О., Митяков Н. А., Зиничев В. А., Белова Н. И. //Изв. ВУЗов. Радиофизика (в печати).
6. Фабрикант А. Л. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1988. Т. 31. № 10. С. 1160.
7. Masuda Y. //Radio Sci., 1988. V. 23. № 4. P. 647.
8. Masuda Y., Awaka J., Okamoto K., Tsuda T., Fukao S., and Kato S. //Radio Sci., 1990. V. 25. № 5. P. 975.
9. Takahashi K., Masuda Y., Matuura N., Kato S., Fukao S., Tsuda T., and Sato T. //J. Acoust. Am., 1988. V. 88. № 3. P. 1061.
10. Lataitis R. J. //Radio Sci., 1992. V. 27. № 3. P. 369.
11. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. — М.: Мир, 1978. — 532 с.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
14 мая 1997 г.

INVESTIGATION OF SMALL PARAMETER VARIATIONS OF THE TROPOSPHERE BY THE METHOD OF RADIOACOUSTIC SOUNDING

V. O. Rapoport, N. A. Mityakov, V. A. Zinicheva, N. I. Belova, Yu. A. Sazonov

A method is considered based on the investigation of variations of the signal amplitude and phase of the radioacoustic sounding (RAS) of the atmosphere for the diagnostics of dynamic and wave processes in the troposphere. The experimental data are presented on variations of RAS signal phase from scan to scan for day and night seances. Variations of the signal phase with the characteristic times of more than 40 min are likely associated with passing of internal gravity waves (IGW) through the sounding region. A comparison between the experimental data and the results of computer modelling of IGW propagation shows a rather good agreement of experimental and calculational data.

УДК 523.4-852

ОБНАРУЖЕНИЕ ТЕЛЛУРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ N_2O $J=3 \rightarrow 4$

*В. Л. Вакс, В. Ф. Вдовин, А. Г. Кисляков, И. В. Лапкин,
Д. В. Савельев, Е. И. Шкелев*

Закись азота является относительно стабильной малой составляющей и содержит основную часть связанного азота земной атмосферы. Распад N_2O в стратосфере приводит к образованию соединений азота, служащих стоками озона. Этим определяется интерес к сведениям о полном содержании и высотном распределении закиси азота. Между тем данные о плотности этой примеси в стратосфере на высотах $h > 35$ км практически отсутствуют. Контактные измерения показывают резкое уменьшение концентрации N_2O при $h \geq 20$ км вследствие фотодиссоциации газа.

Наблюдения теллурических линий N_2O , в принципе, могут быть эффективным методом оценки её содержания в верхней атмосфере, однако такие измерения затруднены, с одной стороны, низкой интенсивностью линий, а с другой — относительно высоким уровнем нерезонансного атмосферного излучения, на фоне которого приходится их наблюдать. Необходима разработка адекватной методики измерений. В настоящей работе приводятся результаты наблюдений линии N_2O $J=3 \rightarrow 4$, а также кратко описана использовавшаяся методика.

В наблюдениях использовался спектро радиометр 3^X -миллиметрового диапазона длин волн [1, 2] с последовательно-параллельным анализом спектра. Основной задачей считалось обнаружение излучения закиси азота, сосредоточенной в области $h > 20$ км, поэтому был применён 30-канальный фильтровый анализатор с частотным разрешением 2 МГц. Характеристики спектрометра были улучшены благодаря использованию нового преобразователя частоты. Шумовая температура системы в период наблюдений (март 1997 г.) составляла ~ 1500 К (DSB).

Оптическая толщина атмосферы измерялась путём сравнения радиоизлучения атмосферы в двух направлениях (зенитные расстояния $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 \simeq 83^\circ$) с излучением "чёрного тела" при температуре приземного слоя воздуха T_0 . Каждая разность $\Delta T_i = T_0 - T_{ai}$ (T_{ai} — температура излучения атмосферы в i -том направлении), измеренная в канале шириной 2 МГц, калибровалась по аналогичным разностям, зафиксированным в канале шириной 1 ГГц, с целью ослабления влияния флуктуаций радиоизлучения атмосферы на результаты измерений. Можно показать [3], что приращение оптической толщины атмосферы, измеренное в узком канале,

над измеренным в широком канале равно

$$\delta\Gamma_\nu = \frac{(q_\nu - 1)}{k_2(q_\nu \xi'' \sec \theta - \xi')}, \quad (1)$$

где $q_\nu = \Delta T_1 / \Delta T_2$, k_2 — коэффициент передачи приёмника в канале, настроенном на линию N_2O ; * а величины ξ' и ξ'' определяются соотношением

$$\xi^{(i)} \simeq \frac{T_{\text{лин}}}{T_{\text{ср}} + \delta T \exp(\gamma_2^{(i)})}. \quad (2)$$

В выражении (2) $T_{\text{лин}}$ — эффективная температура в области формирования линии, $T_{\text{ср}} = T_0 - \delta T$ — средняя температура атмосферы и $\gamma_2^{(i)}$ — нерезонансная оптическая толщина атмосферы на частоте канала, настроенного на линию, в i -том направлении. Формулы (1), (2) получены в предположении, что градиент нерезонансной оптической толщины на интервале $\Delta\nu \sim 3$ ГГц (удвоенная промежуточная частота) достаточно мал. Измерения показали (см. рис. 1), что это предположение справедливо. При ясной погоде в марте ($T_0 \sim 0$ С) указанный градиент составляет $\sim 0,0036$ неп/ГГц. Из рис. 1 видно, что минимальная оптическая толщина приходится на $\nu \sim 96$ ГГц, где смыкаются крылья линий поглощения в атмосферном O_2 .

Уравнение (1) показывает, что результаты измерений в сильной степени зависят от нормированного коэффициента передачи k_2 канала, настроенного на линию. Для оценки его величины использовались результаты измерений нерезонансной оптической толщины атмосферы в канале шириной ~ 1 ГГц и в перестраиваемом канале с полосой пропускания частот ~ 18 МГц. Измеренная температура излучения изотермичной атмосферы равна

$$T_a^{(i)} = k_1[1 - \exp(-\gamma_1^{(i)})]T_0 + k_2[1 - \exp(-\gamma_2^{(i)})]T_0.$$

Составив разности $\Delta T^{(i)} = (k_1 + k_2)T_0 - T_a^{(i)}$, находим их отношение

$$q_n = \frac{\Delta T'}{\Delta T''} = \exp[\Gamma_1(\sec \theta' - \sec \theta'')] \frac{1 + \exp(-\Delta\Gamma \sec \theta')}{1 + \exp(-\Delta\Gamma \sec \theta'')}, \quad (3)$$

где $\Delta\Gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1$. Учитывая, что $\Delta\Gamma \sec \theta^{(i)} \ll 1$, можно перейти от (3) к выражению

$$\Gamma_{\text{ном}} = \frac{\ln q_n}{\sec \theta' - \sec \theta''} \simeq \Gamma_1 + \frac{\Delta\Gamma}{a},$$

где $a = 1 + k_1/k_2$, а затем найти разность

$$\Gamma_{\text{ном}} - \Gamma_{\text{ср}} = \Delta\Gamma \frac{k_1 - k_2}{2}, \quad (4)$$

*Зеркальный канал в приёмнике не подавлялся.

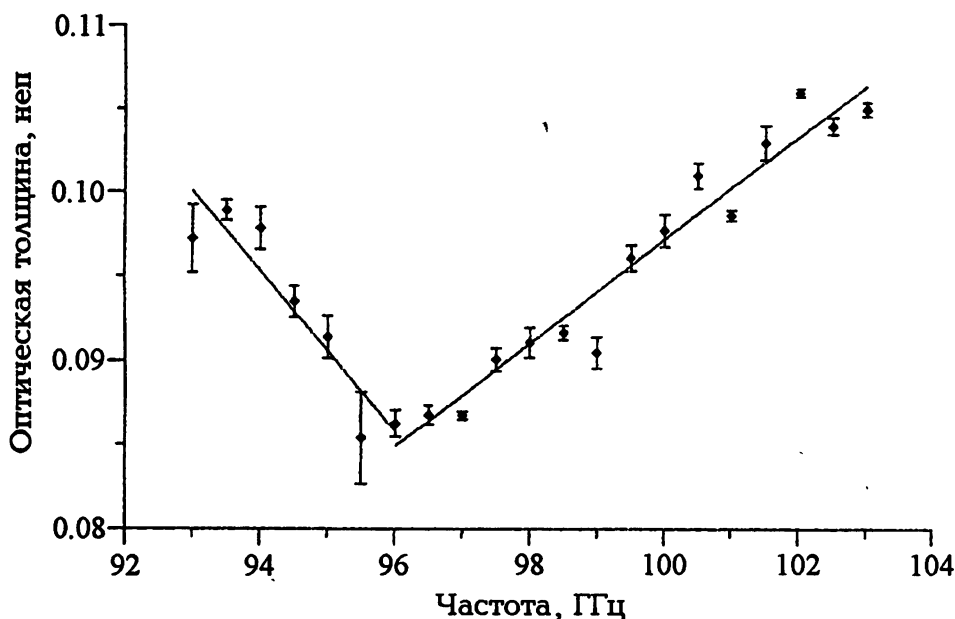


Рис. 1. Спектр “нерезонансной” оптической толщины атмосферы в диапазоне частот 93–103 ГГц. Линии аппроксимируют соответствующие части спектра (рассчитаны методом наименьших средних квадратов).

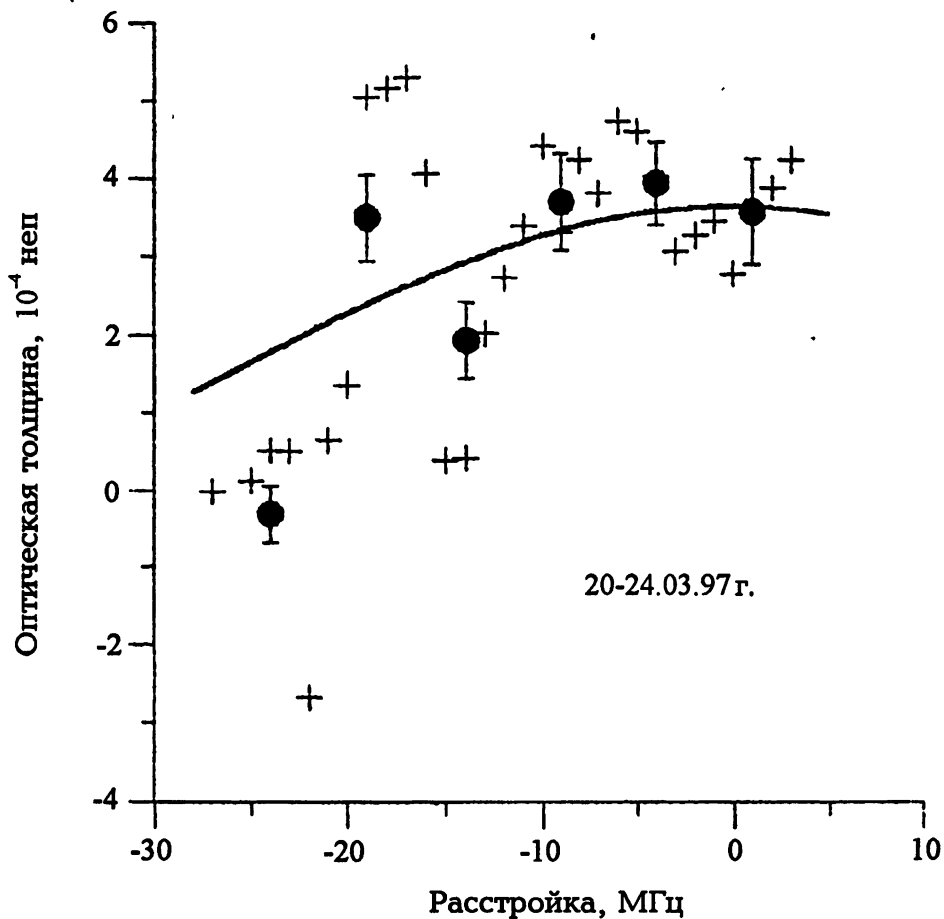
где $\Gamma_{\text{ср}} = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$. В наблюдениях получено, что $\Gamma_{\text{изм}} - \Gamma_{\text{ср}} \simeq \simeq -2 \cdot 10^{-3}$ неп. Пользуясь указанным выше измеренным значением $\Delta\Gamma$ и решая уравнение (4) совместно с уравнением $k_1 + k_2 = 1$, получаем $k_2 \simeq 0,7$.

На рис. 2 представлен усреднённый спектр вершины линии N_2O , измеренный в период 20–24.03.97 г., вместе с аппроксимирующей кривой. Крестики представляют данные измерений в узких каналах, а точки — результат их осреднения на интервале 5 МГц. За период 11–27.03.97 г. было получено 3 подобных спектра, все они дали сходные результаты. В табл. 1 суммированы данные всех наблюдений, скорректированные в соответствии с формулами (1), (2) и результатом определения коэффициента k_2 . При оценке декрементов оптической толщины в линии закиси азота из измеренной величины $\delta\Gamma$, вычиталось приращение нерезонансной оптической толщины на интервале 25 МГц, величина которого оценивается в $\sim 8 \cdot 10^{-5}$ неп (в соответствии с данными рис. 1).

Среднее за весь период наблюдений значение декремента оптической толщины в линии при расстройке от её центра на ~ 25 МГц составляет

$$\Delta\Gamma_{\text{н}} = (1,88 \pm 0,37) \cdot 10^{-4} \text{ неп.} \quad (5)$$

Это значение декремента в пределах ошибки измерений (2σ) удовлетворительно согласуется с результатом расчётов по данным контактных

Рис. 2. Спектр вершины линии N_2O .

Т а б л и ц а 1

Результаты наблюдений радиоизлучения N_2O

Дата	11.03.97	20-24.03.97	26-27.03.97	10-11.04.97
Оптическая толщина, 0,0001 неп	$2,3 \pm 0,65$	$2,17 \pm 0,61$	$1,65 \pm 0,58$	$1,4 \pm 0,41$

измерений содержания N_2O в атмосфере с учётом того, что эти данные обрываются при $h \simeq 30$ км [4], а также с учётом сведений о переменности концентрации закиси азота в стратосфере средних широт. Подробное обсуждение результатов моделирования радиоизлучения N_2O и геофизических аспектов оценки её содержания выходит за рамки настоящей работы.

Предполагается повторить этот эксперимент после улучшения параметров приёмника и оснащения его широкополосным фильтровым анализатором. Авторы признательны В. А. Канакову и С. А. Пелюшенко, способствовавшим успешному выполнению этой работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No 96-02-16988а) и МОПО РФ (грант по программе "Фундаментальные проблемы охраны окружающей среды и экологии человека").

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкелев Е. И., Кисляков А. Г., Савельев Д. В. // Приборы и техника эксперимента, 1995. № 6. С. 132.
2. Вакс В. Л., Канаков В. А., Кисляков А. Г., Пелюшенко С. А., Ракуть И. В., Савельев Д. В., Шкелев Е. И. // Вестник ВВО АТН России, 1997. № 3.
3. Кисляков А. Г., Савельев Д. В., Шкелев Е. И. // Радиотехника и электроника, 1997. Т. 43. № 9.
4. The Stratosphere 1981. Theory & Measurements. WMO Global Ozone Research & Monitoring Project. Rept. No.11, 1981.

Государственный университет,
Институт физики микроструктур

РАН,

Институт прикладной физики

РАН,

г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию

22 мая 1997 г.

DETECTION OF TELLURIC LINE N_2O $J=3 \rightarrow 4$

*V. L. Vaks, V. F. Vdovin, A. G. Kislyakov, I. V. Lapkin, D. V. Savel'ev,
E. I. Shkelev*

УДК 520.27

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ УГЛОВЫХ СМЕЩЕНИЙ РАДИООСИ 64-МЕТРОВЫХ РАДИОТЕЛЕСКОПОВ ТНА-1500 (РОССИЯ)

Б. А. Попереченко, Б. Д. Сапожников, Ю. И. Белов, С. О. Черникова

Для эталонирования систематических угловых поправок в системе наведения 64-метровых радиотелескопов ТНА-1500 разработана соответствующая модель, учитывающая технические характеристики механизмов, конструкций и приборов углового контроля радиотелескопов. Для определения структуры экспериментального спектра систематических поправок, получаемого по данным комплексного радиометрического углового эталонирования радиооси, используется алгоритм аппроксимации по критерию наименьших квадратов для набора функций, который следует из разработанной модели поправок.

Особенностью работы крупных следящих радиотелескопов является наличие значительных систематических угловых смещений радиооси, в основном, вследствие влияния переменных гравитационных воздействий и ограниченной точности начальной регулировки механизмов вращения и несущих конструкций радиотелескопов, а также их приборов углового контроля. Такие смещения радиооси могут достигать величин порядка 10 угл. мин., в то время как ширина луча радиотелескопа составляет в коротковолновой части диапазона менее 1 угл. мин., и точность ориентировки луча должна быть не хуже примерно 5 угл. сек.

Существует ряд методов и аппаратурных решений для компенсации указанных переменных угловых смещений радиооси радиотелескопа при его слежении за объектами в пределах полусферы. Например, используются различные адаптивные схемы, которые способны в темпе времени компенсировать угловые смещения радиооси без разделения их в процессе компенсации на случайные и систематические составляющие.

Для реализации таких схем требуется специальная оптикоэлектронная аппаратура, контролирующая отклонения элементов механизмов и конструкций радиотелескопа от теоретического положения и определяющая истинное положение радиооси радиотелескопа [1, 2]. Однако, указанная оптикоэлектронная контрольная аппаратура является элементом снижения общей надёжности радиотелескопа, особенно, при неблагоприятных погодных условиях (интенсивные осадки), что на территории России может оказаться существенным.

Принципиально существует другой путь для коррекции положения радиооси, использующий радиопеленгование наблюдаемого объекта при его

угловом сопровождении. Однако, этот путь непригоден при слежении за слабо излучающими объектами, когда для обнаружения радиосигнала требуется достаточно длительное его накопление.

Еще один путь компенсации угловых смещений радиооси основан на их разделении на систематическую и случайную составляющие [3]. При этом случайная составляющая остаётся неучтенной, а систематическая составляющая, имеющая определённую специфику для конкретных радиотелескопов, по результатам эталонирования вводится как поправка к расчётным программным целеуказаниям для слежения радиотелескопа. Этот путь несколько увеличивает общую погрешность углового сопровождения радиотелескопа, но аппаратурно проще и дешевле и позволяет реализовать достаточно высокую общую угловую точность и надёжность.

Для эталонирования систематических угловых поправок в системе наведения 64-метровых радиотелескопов ТНА-1500 [4, 5] разработана соответствующая модель, учитывающая специфические технические характеристики их механизмов, конструкций и приборов углового контроля. Эта модель определяет структуру пространственного спектра систематических угловых поправок (зависящего от угловых координат, в отличие от временной зависимости). Состав поправок и привязка их к конкретным факторам представлены в табл. 1, включая паразитные составляющие, выявленные по данным натурных геодезических исследований. Эта модель во многом аналогична известным данным [3], однако имеет свои особенности.

Параметры спектра систематических поправок определяются двумя путями. Первый из них представляет собой эталонирование парциальных составляющих спектра поправок геодезическими методами. Второй путь — это комплексная радиометрическая юстировка радиооси в полусфере по нескольким радиоастрономическим источникам в течение 1–2 суток.

Оба вида эталонирования производятся в период минимальных внешних теплорадиационных и ветровых воздействий на радиотелескоп (пасмурная маловетренная погода), что контролируется автоматической метеостанцией (АМС).

Совместная обработка данных парциального и комплексного эталонирования позволяет за счёт избыточности данных уточнить модель систематических поправок, повысить достоверность её параметров и оценить реальную погрешность методов и аппаратуры, используемых при геодезических и радиометрических измерениях.

Для определения структуры экспериментального спектра систематических поправок, получаемого по данным комплексного радиометрического углового эталонирования радиооси (см. рис. 1 а,б — остаточные тестовые данные по источникам 3С273, 3С454.3, 3С84, 4С55.16, после предва-

Т а б л и ц а 1

1. Отклонение осей вращения по азимуту (АЗ, α), углу места (УМ, β) и оси зеркальной системы (ЗС) относительно теоретических положений.
2. Отклонения оси УМ от теоретического направления по АЗ при вращении по АЗ.
3. Весовые и другие отклонения базы отсчёта УМ устройства съёма угловых координат (УСУК).
4. Погрешности угловых датчиков (гармонический спектр) и их привязки.
5. Весовые деформации подвески рефлектора на опорно-поворотном устройстве (ОПУ).
6. Весовые деформации рефлектора.
7. Весовые деформации подвески контррефлектора и облучателя.
8. Весовые деформации контррефлектора.
9. Динамические погрешности электроприводов АЗ и УМ (ветровые и управляющие воздействия, в т.ч. скачки при дискретном управлении по скорости).
10. Радиорефракция (средняя, регулярная переменная, флюктуационная).
11. Деформации ОПУ и ЗС от ветротепловых, теплорадиационных и ветросиловых квазистационарных воздействий.

рительной юстировки*), использовался алгоритм аппроксимации по критерию наименьших квадратов [6] для набора функций, который следует из вышеприведённой модели поправок:

$$\Delta\alpha = \sum_n a_{1n} \cos n(\alpha + \phi_1) \cdot \operatorname{tg} \beta + \sum_n a_{2n} \cos n(\alpha + \phi_2) + \frac{a_3}{\cos \beta} + a_4 \operatorname{tg} \beta, \quad (1a)$$

$$\Delta\beta = \sum_n b_{1n} \cdot \cos n(\alpha + \xi_1) + \sum_n b_{2n} \cdot \cos n(\beta + \xi_2) + b_3 \cdot \beta. \quad (16)$$

Предварительно проведённый корреляционный анализ тестовых данных юстировки по радиоисточникам показал, что в Фурье-спектре угловых погрешностей существуют заметные высшие гармоники угловых погрешностей УСУК, $n > 3-4$ (рис. 2 а,б), не учтённые в первоначальной модели поправок. По данным этого анализа уточняется структура спектра угловых погрешностей перед процедурой аппроксимации для определения амплитуд составляющих. В частности, для поправок по углу места учтена не только первая, но и вторая гармоника от азимутального угла (см. ниже). При этом важно выбрать минимальный набор аппроксимирующих функций при использовании ограниченного числа наблюдав-

*В обрабатываемых данных были введены систематические поправки (постоянные сдвиги по азимуту и углу места, поправки на отклонение азимутальной оси от вертикали и неперпендикулярность её угломестной оси, измеренные ранее, но изменившиеся с течением времени при эксплуатации антенны).

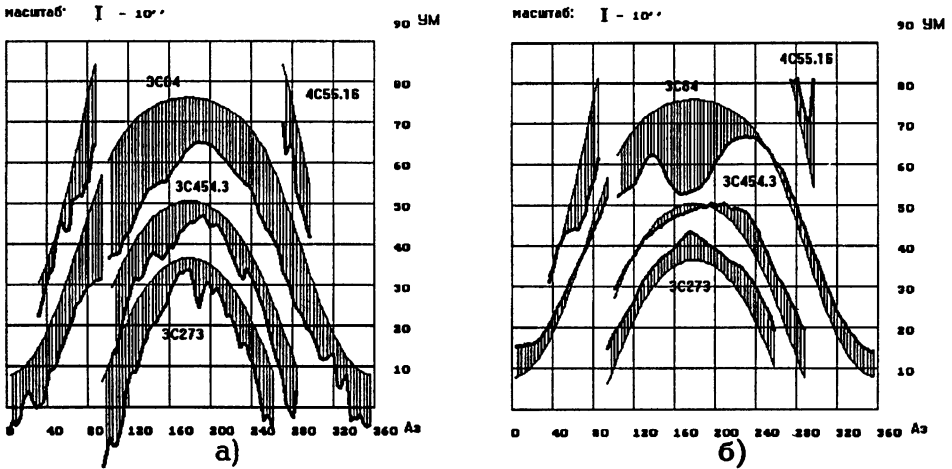


Рис. 1. Разбюстировка по углу места (а) и по азимуту (б) 64-м радиотелескопа.

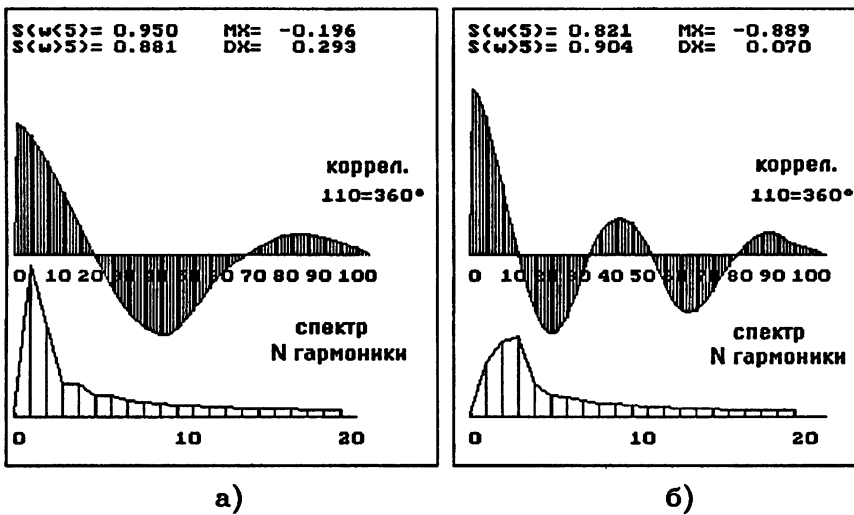


Рис. 2. Автокорреляционная функция и спектр мощности разбюстировки по азимуту (а) и углу места (б) 64-м радиотелескопа.

шихся источников, т.к. неортогональность аппроксимирующих функций ведёт к быстрому уменьшению определителя системы нормальных уравнений с ростом числа функций [6] и, как следствие, к “раскачиванию” амплитуд гармоник. Особенно этот эффект заметен при выборе аппроксимирующих функций для поправок по углу места и зависящих от угла места, для которых область определения экспериментальных данных меньше 360 град., в отличие от функций азимута. Для иллюстрации ниже приведены три набора амплитуд гармоник поправок по углу места в угл. мин.

(см. также рис. 3 для наборов $\Delta_2\beta$ и $\Delta_4\beta$).

$$\begin{aligned} \Delta_1\beta = & -2,42 - 0,12 \sin \alpha + 0,0045 \cos \alpha + 0,04 \sin 2\alpha + \\ & + 0,27 \cos 2\alpha + 1,09 \sin \beta + 1,48 \cos \beta, \end{aligned} \quad (2a)$$

с.к.о. = 0,161 угл. мин.,

$$\begin{aligned} \Delta_2\beta = & -3,73 - 0,12 \sin \alpha + 0,016 \cos \alpha + 0,04 \sin 2\alpha + \\ & + 0,27 \cos 2\alpha + 0,00046\beta + 2,70 \cos \beta, \end{aligned} \quad (2б)$$

с.к.о. = 0,144 угл. мин.,

$$\begin{aligned} \Delta_3\beta = & -1,10 - 0,12 \sin \alpha + 0,0041 \cos \alpha + 0,04 \sin 2\alpha + \\ & + 0,27 \cos 2\alpha + 0,50 \sin 2\beta + 0,16 \cos 2\beta, \end{aligned} \quad (2в)$$

с.к.о. = 0,156 угл. мин.

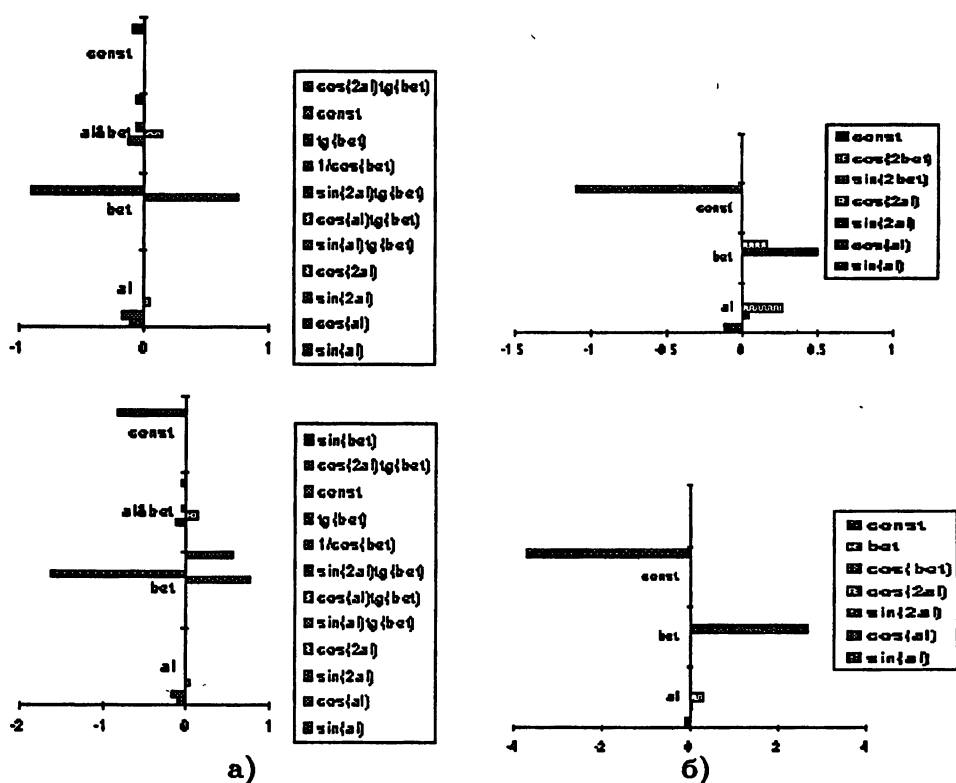


Рис. 3. Набор коэффициентов при функциях аппроксимации регулярной разъёстрировки по азимуту (а) и по углу места (б).

Итерационный характер (последовательное введение дополнительных поправок и и одновременная оценка с.к.о.) комплексного эталонирования и отработки модели угловых отклонений радиооси вносит свои особенности в расчёт параметров спектра парциальных угловых поправок. Дело в том,

что на заключительных этапах итераций амплитуды поправок оказываются соизмеримыми с уровнем “шума” или остаточных случайных угловых отклонений. Это приводит к неустойчивости этой части результатов и выражается в том, что в составе спектра при последних итерациях аппроксимации появляются пары членов, имеющих сходную пространственную структуру и значительные амплитуды с противоположными знаками (“резонанс”). В таких случаях один из членов, образующих “резонанс”, должен быть исключён (см. как иллюстрацию рис. 3а, где исключение “лишнего” $\sin \beta$ резко изменило амплитуды ряда составляющих спектра). При этом не наблюдается существенного увеличения остаточного СКО, а последние итерации спектра упрощаются и становятся более равномерными. Следуя данному принципу отбора, были выбраны гармоники по азимуту: не выше второй — для поправок по азимуту и углу места (3), и только вторая гармоника по углу места — для поправок по углу места (2в) (в угл. мин.):

$$\begin{aligned} \Delta \alpha = & 0,1491 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - 0,1343 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - 0,0532 \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \\ & - 0,0584 \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - 0,1875 \cos \alpha - 0,1136 \sin \alpha + 0,0450 \cos 2\alpha + \\ & + 0,7985 / \cos \beta - 0,9363 \operatorname{tg} \beta - 0,1346. \end{aligned} \quad (3)$$

Помимо пространственного спектра угловых погрешностей, при эталонировании радиооси может возникнуть временной спектр случайных составляющих угловых отклонений. Составляющие временного спектра могут быть разделены на медленные — с характерным периодом ~ 1 суток, средние — с периодом около 5 часов и быстрые — с характерным периодом $< 0,5-1$ час.

За период быстрых отклонений радиотелескоп при угловых юстировках по радиоастрономическим источникам поворачивается не более чем на 15 градусов. Таким образом, осредняя данные комплексного радиометрического эталонирования на интервале углов 15–20 градусов, можно исключить эту временную составляющую из обработки при определении пространственного спектра систематических поправок, оценив её СКО и получив подтверждение её допустимости. В частности, фильтрация с окном 20 град. уменьшает СКО поправок на 20%.

Медленная и средняя составляющие временного спектра угловых отклонений в пасмурную маловетренную погоду оказываются малосущественными. При отклонении погодных условий от требуемых во время эталонирования радиооси имеется возможность учесть дополнительные угловые отклонения, возникающие вследствие воздействия Солнца и ветра, по данным АМС с использованием специальной модели, разработанной на основе данных натурных исследований тепловых и ветровых деформаций радиотелескопа [7].

Эффективность описанной методики для определения параметров мо-

дели (спектра) систематических угловых отклонений радиооси крупных радиотелескопов сантиметрового диапазона и для выделения и оценки случайных составляющих угловых погрешностей предварительно проведена при экспериментальной проверке в натуральных условиях на волне 5,1 см на радиотелескопе ТНА-1500. При этом достигнута остаточная СКО около 8 угл. сек. В этой величине ещё значительную часть составляет погрешность аппаратуры пеленгования и неучтённые климатические влияния.

Полная автоматизация процесса пеленгования нескольких источников в полусфере на временных интервалах 1-2 суток, использование более коротких длин волн (1,35 и 3,6 см) и учёт климатических условий с помощью АМС и соответствующей модели позволят на основе рассмотренной методики снизить остаточную погрешность эталонирования систематических погрешностей до необходимого уровня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попереченко Б. А., Дулькин А. И., Суетенко А. В., Кисленков Г. В., Корсакова Н. А. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. общетехн. 1970. Вып. 5. С. 71.
2. Hayashi T., Kurafuji Ya. // Mitsubishi Electric Advance. Dec. 1985. № 33. P. 22.
3. Meeks M. L., Ball J. A., Hull A. V. // IEEE Trans. on AP-16, 1968. № 6. P. 746.
4. Богомолов А. Ф., Попереченко Б. А., Соколов А. Г. — В сб.: Антенны /Под ред. А. А. Пистолькорса. — Радиосвязь, 1982. Вып. 30. С. 3.
5. Попереченко Б. А., Гиппиус А. А., Клюев О. Л., Севрюков Б. Н., Лычкин В. П., Терехов В. М., Баранов В. Е. — В сб.: Антенны /Под ред. А. А. Пистолькорса. — Радиосвязь, 1982. Вып. 30. С. 27.
6. Хемминг Р. В. Численные методы. — М.: Наука, 1972. С. 232.
7. Головенков Л. П., Жидков А. А., Жуков В. Г., Попереченко Б. А., Соловьев А. В., Тулумджан С. Е. — В сб.: Вопросы атомной науки и техники. Сер. Проектирование и строительство. — М.: ЦНИИ-Атоминформ, 1983. Вып. 3(16). С. 34.

ОКБ Московского
энергетического института,
Москва;
Научно-исследовательский
радиофизический институт,
Н. Новгород; Россия

Поступила в редакцию
8 апреля 1997 г.

**INVESTIGATION OF A MODEL OF RADIO AXIS ANGULAR SHIFTINGS
OF THE 64-METER RADIOTELESCOPES TNA-1500 (RUSSIA)**

B. A. Poperechenko, B. D. Sapozhnikov, Yu. I. Belov, S. O. Chernikova

For standardization of systematic angular corrections in the system of direction of 64-meter radiotelescopes TNA-1500, a corresponding model has been developed, which takes into account the technical characteristics of mechanisms, constructions and devices of the radiotelescope angular control.

To define the structure of the experimental spectrum of systematic errors obtained over the data of complex radiometric angular standardization of the radio axis, we used the approximation algorithm over the criterion of the least squares for a set of functions, which follows from the developed model of corrections.

УДК 520.272.2

ВЛИЯНИЕ И УЧЁТ НЕУСТАНОВЛЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГЛАВНОГО ЗЕРКАЛА АНТЕННЫ РАТАН-600 ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТЕЙ ПОТОКОВ ДИСКРЕТНЫХ РАДИОИСТОЧНИКОВ

А. М. Боташев, Г. В. Жеканис, Е. К. Майорова, М. Г. Мингалиев

В данной работе описывается методика учёта неустановленных элементов главного зеркала антенны РАТАН-600 при определении плотностей потоков дискретных радиоисточников с использованием архива нового поколения АСУ антенной. Рассмотрены примеры пересчёта антенных температур некоторых радиоисточников с учётом невыставленных элементов Северного сектора антенны.

Расчёты показывают, что учёт таких элементов повышает точность определения плотностей потоков исследуемых объектов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Естественным желанием любого экспериментатора является получение значений измеряемых величин как можно с большей точностью. Повышение точности определения плотностей потоков в радиоастрономии, кроме повышения точности определения физических параметров исследуемых объектов, позволяет ставить новые типы задач, например, такие как исследование переменности на разных временных масштабах. Напомним вкратце основные факторы, ограничивающие точность определения плотностей потоков:

- точность установки элементов главного зеркала антенны;
- точность установки вторичного зеркала в расчётный фокус;
- отношение “сигнал/шум”;
- стабильность приёмной системы (усиление приёмников, калибровочных сигналов и т.д.);
- точность методов обработки наблюдений, к примеру, в нашем случае — точность выделения уровня “нуля” и аппроксимация кривой прохождения гауссианой;
- поглощение в атмосфере;
- внешние помехи.

Чаще всего бывает очень трудно или практически невозможно разделить вклад каждого из вышеуказанных факторов. Их вклад в разных частотных диапазонах обычно неодинаков, поэтому выписанная здесь очерёдность не отражает степени их важности. Однако, как бы не было трудно разделить вклад разных факторов, уменьшение влияния любого из них приводит к улучшению результирующей точности. Проблемам исследования влияния установки главного зеркала радиотелескопа РАТАН-600 и посвящена настоящая работа.

Модернизация в 1988–1994 годах автоматизированной системы управления (АСУ) главным отражателем радиотелескопа РАТАН-600, появление в обсерватории вычислительной техники с достаточно высоким быстродействием, оснащённой скоростными носителями информации большой ёмкости, создание развитой локальной вычислительной сети позволили решить проблему сбора и архивизации расписаний наблюдений и результатов установки антенны, а также достаточно быстрого и независимого использования данных, поступающих от АСУ антенной радиотелескопа пользователями обсерватории [1].

На сегодня сформировались три крупные области использования архива АСУ антенной:

- повышение достоверности проводимых на радиотелескопе научных экспериментов, за счёт учёта ошибок, обусловленных установкой главного зеркала;
- анализ технического состояния радиотелескопа в разнообразных направлениях: от организационных до тонких технических структур;
- совершенствование эргономики инструмента по отношению ко всем его пользователям и службам.

2. НАБЛЮДЕНИЯ И ОБРАБОТКА

Для исследования влияния невыставленных щитов на антенную температуру наблюдаемых источников было выбрано несколько мощных переменных точечных радиоисточников из двух сетов наблюдений.

Наблюдения проводились на шести длинах волн в диапазоне 31, 13, 7,6, 3,9, 2,7 и 1,38 см на Северном секторе радиотелескопа РАТАН-600 в период с 15 по 27 сентября (1-й сет) и с 6 по 30 декабря (2-й сет) 1996 года. Использовался комплекс широкополосных радиометров сплошного спектра [2], установленный на первом облучателе. Горизонтальное размещение входных рупоров вдоль фокальной линии вторичного зеркала позволяет получить отклик на прохождение источника на всех длинах волн за несколько минут, благодаря вращению Земли при неподвижной диаграмме направленности антенны.

Обработка проводилась в пакете программ *fgf* – версия 2.3 в оболочке X-window под ОС UNIX [3]. Анализ параметров источников проводился методом гаусс-анализа [4]. Статистические расчёты проведены с помощью математического пакета программ *MicroCal Origin* версия 3.0, под операционной системой *Windows 95*.

В настоящей работе приведены расчёты только для двух длин волн: 2,7 и 7,6 см. Выбор именно этих длин волн обусловлен тем, что на этих длинах волн наилучшее отношение “сигнал/шум”, а также эти каналы менее подвержены внешним помехам (автомобильные, промышленные и др.).

3. МЕТОДИКА УЧЁТА ВЫПАВШИХ ЭЛЕМЕНТОВ ГЛАВНОГО ЗЕРКАЛА АНТЕННЫ

Как известно, уравнение антенного сглаживания, связывающее антенную и яркостную температуру источника в случае, когда угловые размеры источника много меньше ширины диаграммы направленности антенны, приводит к следующему соотношению антенной температуры T_a и плотности потока P наблюдаемого источника [5]:

$$T_a = \frac{PS_{\text{эфф}}}{2k},$$

где $S_{\text{эфф}}$ — эффективная площадь антенны, а k — постоянная Больцмана.

Эффективная площадь антенны, в свою очередь, связана с телесным углом антенны Ω_a известным соотношением

$$S_{\text{эфф}} = \frac{\lambda^2}{\Omega_a} = \frac{\lambda^2}{\int_{4\pi} A d\Omega},$$

где A — диаграмма направленности антенны (ДН), λ — длина волны.

Следствием невыставления отдельных щитов будет изменение формы ДН, приводящее к увеличению её боковых лепестков и снижению максимума сигнала, а также энергетические потери, связанные с рассеиванием энергии на невыставленных щитах.

Для оценки снижения T_a наблюдаемого источника при невыставлении отдельных щитов в заданное положение применялся энергетический подход.

Оценивалось изменение эффективной площади, которую можно представить в следующем виде [6]:

$$S_{\text{эфф}} = S_a \cdot \eta_{\text{п}} \cdot \eta_a,$$

где S_a — геометрическая площадь раскрытия апертуры главного зеркала, $\eta_{\text{п}}$ — коэффициент перископической системы антенны, η_a — апертурный коэффициент использования.

Коэффициенты η_{π} и η_{α} определяются из следующих соотношений:

$$\eta_{\pi} = \frac{\int_{S_a} |E_a|^2 dS_a}{\int_{S_b} |E_b|^2 dS_b}, \quad \eta_{\alpha} = \frac{\left| \int_{S_a} E_a dS_a \right|^2}{S_a \cdot \int_{S_b} |E_b|^2 dS_b},$$

где S_b — геометрическая площадь раскрыва апертуры вторичного зеркала, E_a — распределение поля на раскрыве главного зеркала, E_b — распределение поля на раскрыве вторичного зеркала.

Рассчитывался коэффициент $K_{\text{кор}}$, учитывающий изменения эффективной площади при невыставлении отдельных щитов:

$$K_{\text{кор}} = \frac{S_{\text{эфф}}}{S_{\text{эфф}}^*},$$

где $S_{\text{эфф}}$ — эффективная площадь антенны с невыставленными щитами, $S_{\text{эфф}}^*$ — эффективная площадь антенны, когда все щиты выставлены в заданное положение.

Учёт влияния неустановленных элементов главного зеркала на значение измеряемой антенной температуры исследуемых источников радиоизлучения проводился по следующей методике. Для каждого источника из архива АСУ антенной берутся номера неустановленных элементов главного зеркала на данную дату наблюдения. Номер элемента указывает его положение на раскрыве антенны. При расчёте $S_{\text{эфф}}$ распределение поля на апертуре главного зеркала E_a в направлении выпавших щитов принималось равным нулю. В остальных направлениях E_a рассчитывалось из распределения поля на раскрыве вторичного зеркала E_b в приближении дифракции Френеля. Далее по методике, описанной выше, рассчитывался $K_{\text{кор}}$. Умножая $K_{\text{кор}}$ на антенную температуру источника T_a , получаем исправленную антенную температуру T_a^* источника. В табл.1 приведён пример пересчёта антенных температур для источника 0149+218.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

С введением в эксплуатацию нового поколения АСУ РАТАН-600 и новой программы регистрации наблюдений [7] реализована точность единичного измерения плотности потока наблюдаемых объектов на коротких волнах, например, на 2,7 см порядка 1,5–2%, что является улучшением точности таких измерений примерно в два раза.

Достижение такой высокой точности измерения плотностей потоков позволяет реализовывать на радиотелескопе задачи определения мгновенных спектров точечных объектов на новом качественном уровне [8]:

Т а б л и ц а 1

Дата	Отказавшие элементы	$K_{\text{кор}}$	$T_a[\text{MK}]$ $\lambda = 2,7 \text{ см}$	$T_a^*[\text{MK}]$ $\lambda = 2,7 \text{ см}$	$T_a[\text{MK}]$ $\lambda = 7,6 \text{ см}$	$T_a^*[\text{MK}]$ $\lambda = 7,6 \text{ см}$
15.09.96	624а,597г,700и	0,969	426,74	440,39	476,64	491,89
16.09.96	624а,597г,700и	0,969	403,06	415,96	480,84	496,22
17.09.96	700и	0,995	—	—	490,28	492,74
18.09.96	700и	0,995	423,35	425,48	490,72	493,19
19.09.96	0	1	436,86	436,86	487,37	487,37
20.09.96	549и,626	0,978	428,66	438,30	486,92	497,87
21.09.96	493а,626	0,983	430,55	438,00	471,16	479,31
23.09.96	626	0,988	432,01	437,26	477,79	483,59
24.09.96	497,501и,626	0,978	427,29	436,90	455,85	466,10
25.09.96	497,626	0,983	429,35	436,78	471,08	479,23
26.09.96	497,624и,626	0,971	413,67	426,03	458,25	471,94
27.09.96	497,626	0,983	422,24	429,54	447,52	455,26
$\bar{T}_a[\text{MK}]$	—	—	424,89	432,86	474,54	482,89
$\sigma[\text{MK}]$	—	—	9,39	7,60	14,30	13,14
$\sigma_{T_a}[\text{MK}]$	—	—	2,83	2,29	4,13	3,79
$\Delta\sigma_{T_a}[\%]$	—	—	0,67	0,53	0,87	0,79

- исследование долговременной переменности радиоисточников;
- исследование кратковременной переменности радиоисточников (на масштабах дней).

Основной результат данной работы представлен в табл. 2 (результаты первого сета наблюдений) и табл. 3 (результаты второго сета наблюдений). В этих таблицах: *первая колонка* — название источника, *вторая колонка* — длина волны (длина волны, помеченная звездочкой, соответствует строке с исправленными значениями параметров), *третья колонка* — антенная температура на соответствующей длине волны, *четвёртая колонка* — среднеквадратичная ошибка σ единичного измерения, определённая по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (T_{a_k} - \bar{T}_a)^2}{N - 1}},$$

пятая колонка — среднеквадратичная ошибка среднего арифметического σ_{T_a} , определяемая как

$$\sigma_{T_a} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

шестая колонка — нормированная среднеквадратичная ошибка среднего

Т а б л и ц а 2

Источник	λ [см]	T_a [мК]	σ [мК]	σ_{T_a} [мК]	$\Delta\sigma_{T_a}$ [%]	N
0134+328	2,7	796,32	12,99	3,92	0,49	11
	2,7*	809,08	12,52	3,78	0,47	11
	7,6	3005,79	58,10	18,37	0,61	10
	7,6*	3058,72	54,06	17,09	0,56	10
0149+218	2,7	424,89	9,39	2,83	0,67	11
	2,7*	432,86	7,60	2,29	0,53	11
	7,6	474,54	14,30	4,13	0,87	12
	7,6*	482,89	13,14	3,79	0,79	12
0333+321	2,7	460,48	15,94	6,02	1,31	7
	2,7*	470,35	14,96	5,65	1,20	7
	7,6	794,99	14,31	4,31	0,54	11
	7,6*	808,77	13,76	4,15	0,51	11
0518+165	2,7	635,22	13,56	5,13	0,81	7
	2,7*	645,55	10,85	4,10	0,64	7
	7,6	1387,15	34,75	14,19	1,02	6
	7,6*	1406,17	33,13	13,52	0,96	6
0923+392	2,7	4355,20	157,20	49,71	1,14	10
	2,7*	4420,16	149,60	47,31	1,07	10
	7,6	3934,00	84,85	28,28	0,72	9
	7,6*	3989,47	83,01	27,67	0,69	9
1308+326	2,7	1053,09	32,17	10,17	0,97	10
	2,7*	1068,38	26,90	8,51	0,80	10
	7,6	1325,17	46,78	14,79	1,12	10
	7,6*	1344,33	38,43	12,15	0,90	10
1611+343	2,7	1371,39	36,09	11,41	0,83	10
	2,7*	1387,69	31,53	9,97	0,72	10
	7,6	1574,56	37,26	11,78	0,75	10
	7,6*	1593,34	34,40	10,88	0,68	10
2105+420	2,7	1998,04	35,32	10,20	0,51	12
	2,7*	2029,72	27,22	7,86	0,39	12
	7,6	2231,91	62,89	18,15	0,81	12
	7,6*	2267,18	53,54	15,45	0,68	12

Т а б л и ц а 3

Источник	λ [см]	T_a [мК]	σ [мК]	σ_{T_a} [мК]	$\Delta\sigma_{T_a}$ [%]	N
0134+328	2,7	822,53	29,29	6,55	0,80	20
	2,7*	834,07	22,90	5,12	0,61	20
	7,6	2940,12	92,77	21,87	0,74	18
	7,6*	2975,89	82,70	19,49	0,65	18
0149+218	2,7	422,97	17,02	3,90	0,92	19
	2,7*	428,77	15,47	3,55	0,83	19
	7,6	448,78	11,62	2,74	0,61	18
	7,6*	453,85	9,93	2,34	0,52	18
0218+357	2,7	445,10	12,96	4,32	0,97	9
	2,7*	449,84	9,58	3,19	0,71	9
	7,6	614,71	8,90	2,81	0,46	10
	7,6*	620,68	8,39	2,65	0,43	10
0518+165	2,7	671,93	18,37	4,91	0,73	14
	2,7*	676,80	17,07	4,56	0,67	14
	7,6	1295,32	45,30	12,11	0,93	14
	7,6*	1304,74	44,38	11,86	0,91	14
1308+326	2,7	1000,73	39,82	9,96	0,99	16
	2,7*	1020,71	38,39	9,60	0,94	16
	7,6	1299,94	37,86	9,47	0,73	16
	7,6*	1321,70	34,06	8,51	0,64	16

арифметического $\Delta\sigma_{T_a}$, выраженная в процентах, т.е.

$$\Delta\sigma_{T_a} = \frac{\sigma_{T_a}}{T_a} \cdot 100\%,$$

седьмая колонка — количество наблюдений N данного источника.

Анализ таблиц 2 и 3 показывает, что в обоих сетях наблюдений для каждого наблюдавшегося объекта и на обеих длинах волн происходит повышение точности измерений, т.е. происходит уменьшение как абсолютного значения ошибки единичного измерения σ , так и его нормированного значения σ_{T_a} . Следует отметить, что в рассмотренных здесь примерах количество отказов (неустановленных элементов) в одном наблюдении не превышало трёх элементов. Можно ожидать, что описанный метод будет более эффективным при большем количестве неустановленных элементов. Такая ситуация может иметь место при резких перепадах температуры окружающей среды. В настоящее время при анализе материала в программах прецизионных измерений не используются результаты, полученные при количестве отказов 5–7 элементов. Использование данного

метода в таких программах позволит повысить эффективность использования антенного времени.

Нами также подсчитан коэффициент корреляции $R_{\text{сог}}$ между антенной температурой T_a и поправочным коэффициентом $K_{\text{сог}}$, для обоих сетов наблюдений.

Сентябрь 1996 г.

Т а б л и ц а 4

Источник	$R_{\text{сог.}}$ ($\lambda = 2,7$ см)	N	$R_{\text{сог.}}$ ($\lambda = 7,6$ см)	N
0134+328	0,77	9	0,83	9
0149+218	0,74	10	0,78	9
0333+321	0,62	6	0,69	9
0518+165	0,80	6	0,79	6
0923+392	0,67	8	0,82	6
1308+326	0,69	9	0,86	9
1611+343	0,82	8	0,92	7
2105+420	0,72	11	0,82	11

Декабрь 1996 г.

Т а б л и ц а 5

Источник	$R_{\text{сог.}}$ ($\lambda = 2,7$ см)	N	$R_{\text{сог.}}$ ($\lambda = 7,6$ см)	N
0134+328	0,82	16	0,73	14
0149+218	0,64	15	0,83	14
0218+357	0,85	9	0,85	7
0518+165	0,82	10	0,66	8
1308+326	0,80	11	0,81	13

При расчёте коэффициента корреляции в некоторых случаях рассматривались не все записи. Изъятие двух-трёх записей существенно повышает коэффициент корреляции, что можно объяснить менее значительным вкладом исследуемого нами эффекта в ошибку измерений по сравнению с вкладом других факторов, перечисленных во введении.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, наличие обратной связи в новой АСУ, а именно, информация о положении элементов главного отражателя и учёт неустановленных щитов при обработке наблюдательного материала, позволяет уже на этапе обработки наблюдений уменьшить вклад ошибок измерения плотностей потоков, обусловленных установкой главного зеркала [8].

В дальнейшем планируется автоматизация этого процесса, т.е. написание программ, выполняющих автоматическую выборку нужных параметров антенны из архива АСУ антенной, расчёт $K_{\text{сog}}$ и подключение их к служебным параметрам, хранимым в архиве совместно с исходными файлами наблюдений.

Приведённые в настоящей работе примеры наблюдений объектов взяты из программы исследования переменности внегалактических радиосточников, которая проводится при частичной поддержке INTAS (грант № 90-4010) и Нидерландской организации научных исследований (NWO).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубчин Г. С., Жеканис Г. В., Фурса В. И. Система управления главным отражателем радиотелескопа РАТАН-600 третьего поколения. — В сб.: Тезисы докладов XXVI радиоастрономической конференции, г. С.-Петербург, 1995. С. 402.
2. Нижельский Н. А. // В сб.: Отчеты САО-1995. — Изд-во САО, 1996. С. 57.
3. Верховданов О. В. Итеративная первичная графическая обработка одномерных векторов данных в оболочке X-window под ОС UNIX на РАТАН-600. // Препринт САО РАН. — Н.-Архыз, 1995. № 106. С. 1.
4. Иванов Л. Н. Алгоритм оптимального автоматического гаусс-анализа наблюдательных данных. // Известия САО. Сер. Астрофиз. иссл., 1979. № 11. С. 213.
5. Есепкина Н. А., Корольков Д. В., Парийский Ю. Н. Радиометры и радиотелескопы. — Наука, 1973.
6. Майорова Е. К. Кандидатская диссертация. — Ст. Зеленчукская: САО, 1985.
7. Черненко В. Н. Автоматизированный комплекс сбора и управления радиометрами непрерывного спектра на РАТАН-600. // Препринт САО, 1996. № 113Т. С. 1.
8. Жеканис Г. В., Боташев А. М., Мингалиев М. Г. Первый опыт эксплуатации нового поколения АСУ РАТАН-600. — В сб.: Тезисы докладов XXVI радиоастрономической конференции, г. С.-Петербург, 1995. С. 374.

Специальная астрофизическая
обсерватория РАН, пос. Нижний
Архыз, Карачаево-Черкесия

Поступила в редакцию
4 июля 1997 г.

**THE CONTROL OF UNSETTLED ELEMENTS OF THE MAIN
REFLECTOR OF THE RATAN-600 RADIO TELESCOPE**

A. M. Botashev, G. V. Zhekanis, E. K. Majorova, M. G. Mingaliev

Methodics are described for the account of unsettled elements of the RATAN-600 main mirror in the flux density measurements using the data from a new generation archive of the Telescope Control System. Examples of recalculation of the antenna temperatures for some radio sources assuming unsettled elements of the North sector of the main reflector are considered.

It is shown, that the account of such elements increases an accuracy of the flux density measurements of discrete radio sources.

УДК 621.391

БИСПЕКТРАЛЬНО ОРГАНИЗОВАННЫЕ СИГНАЛЫ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ С КОРРЕКЦИЕЙ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ИСКАЖЕНИЙ

Г. Н. Бочков, К. В. Горохов

Излагается метод синтеза квазидетерминированных биспектрально организованных сигналов для целей калибровки, имитации, зондирования, а также параллельной передачи больших информационных массивов. В качестве элементарной структурной единицы сложного информационного сигнала выбран биспектральный триплет, образованный тройкой взаимосфазированных квазимонохроматических компонент. Особенностью и преимуществом предлагаемого метода является стабильность биспектральных характеристик генерируемого сигнала. Найдены параметры трёх базовых семейств биспектрально организованных сигналов. Проиллюстрированы возможности цифрового синтеза тестовых и информационных сигналов. Рассмотрен способ компенсации линейных амплитудно-фазовых искажений биспектрально организованного сигнала и приведён пример реконструкции его информационной структуры в условиях сильных искажений при многолучевом распространении.

1. ВВЕДЕНИЕ

Биспектральный (полиспектральный) анализ в физике и технике становится методом получения принципиально новой информации об объектах и средах в задачах нелинейной спектроскопии, диагностики и идентификации, существенно дополняющим спектрально-корреляционный подход к решению подобных задач [1, 2]. Биспектральные анализаторы открывают класс нового поколения приборов для самых различных приложений в акустике, радиофизике и оптике.

При использовании анализаторов биспектра принципиально важны тестовые калибровочные измерения и оценка их точности. Для этой цели необходимо решение задачи синтеза специальных биспектрально организованных сигналов (БОС), имеющих заданные биспектральные характеристики. В результате создания биспектральных синтезаторов появляется, кроме того, возможность использования БОС для целей имитации, зондирования, а также параллельной передачи больших информационных массивов (изображений, рельефов и т.д.) [3-6].

Предложенные в [7, 8] аналоговые методы синтеза БОС связаны с формированием случайных процессов с изменяющимися во времени амплитудами и/или фазами взаимосвязанных спектральных составляющих,

порождаемых нелинейными преобразованиями исходных шумовых сигналов. При этом принципиальные трудности синтеза заключаются в обеспечении стационарности и строгой определённости статистических характеристик задающих генераторов исходных шумов [7]. В работе [9] нами предложен метод биспектрального синтеза эталонных и информационных БОС на основе элементарных базовых сигналов, представляющих собой биспектрально связанные тройки монохроматических компонент. Особенностью и преимуществом этого метода является стабильность биспектральных характеристик синтезированного квазидетерминированного сигнала, обеспечиваемая высокой стабильностью, гармонической связанностью и взаимосфазированностью составляющих элементарных триплетов.

Настоящая работа посвящена развитию метода синтеза квазидетерминированных БОС. Постановка задачи синтеза биспектрально организованных сигналов обсуждается в разд. 2. В разд. 3, где излагается способ синтеза квазидетерминированных БОС, сформулированы условия, позволяющие осуществить поиск параметров синтеза для трёх базовых семейств БОС. Результаты поиска вариантов синтеза БОС, оптимальных в классе регулярных решёток частот составляющих, и пример их реализации представлены в разд. 4. В разд. 5 рассмотрен способ эффективной компенсации линейных амплитудно-фазовых искажений биспектрально организованного сигнала и приведён пример реконструкции его информационной структуры в условиях сильных искажений при многолучевом распространении. В заключении суммируются основные полученные результаты.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

По аналогии со спектральной плотностью мощности

$$S_2(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle X_T(f) X_T^*(f) \rangle \quad (1)$$

биспектр случайного процесса $x(t)$ с ограниченной средней мощностью можно определить как

$$B(f_1, f_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle X_T(f_1) X_T(f_2) X_T^*(f_1 + f_2) \rangle, \quad (2)$$

где $X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau [x(\tau) - \langle x(\tau) \rangle] \exp(-i2\pi f\tau)$, “звёздочка” — комплексное сопряжение. Для стационарных случайных процессов формулы (1) и (2), как показано в [10], эквивалентны широко известным определениям спектра мощности и биспектра через преобразования Фурье корреляционных функций 2-го и 3-го порядков [1, 2].

В широком смысле задача синтеза БОС может быть сформулирована как задача синтеза такого сигнала $x(t)$, биспектр которого в базовой области $f_1 \geq f_2 \geq 0$ биспектральной плоскости тождествен (или почти тождествен) некоторой комплексной функции $B_0(f_1, f_2)$, задаваемой парой поверхностей $b_0(f_1, f_2) = |B_0(f_1, f_2)|$ и $\Psi_0(f_1, f_2) = \arg\{B_0(f_1, f_2)\}$ (или $\text{Re}\{B_0(f_1, f_2)\}$ и $\text{Im}\{B_0(f_1, f_2)\}$).

Вместе с тем, столь общая постановка задачи синтеза для широкой области приложений не является конструктивной, т.к. не учитывает возможностей проведения последующего анализа синтезированного сигнала и восстановления содержащейся в его биспектре информации. Поясним это, ориентируясь на широкий класс методов цифрового биспектрального анализа [1], которые базируются на использовании алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) и при осуществлении анализа в полосе частот от 0 до F_{\max} с шагом $\Pi = F_{\max}/M$ обеспечивают вычисление* $[M^2/4]$ отсчётов биспектральной оценки в декартовой сетке частот $\{(n\Pi, m\Pi) \mid m \leq n \leq M - m, 1 \leq m \leq [M/2]\}$. Получаемые при этом отсчёты $\hat{S}_3(n\Pi, m\Pi)$ при условии, что анализируемый процесс обладает соответствующим эргодическим свойством, с ростом времени наблюдения стремятся к величинам

$$B_W(n\Pi, m\Pi) = \langle \hat{S}_3(n\Pi, m\Pi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 W(n\Pi - f_1, m\Pi - f_2) S_3(f_1, f_2). \quad (3)$$

В (3) функция биспектрального окна $W(f_1, f_2)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 df_2 W(f_1, f_2) = \Pi_0^2 W(0, 0) = 1, \quad (4)$$

где Π_0 — эквивалентная ширина биспектрального окна.

Совокупность отсчётов сглаженного биспектра (3) при заданном биспектральном окне $W(f_1, f_2)$ и шаге анализа в частотной области Π , будем называть *биспектр-образом* сигнала $x(t)$.

Как видим, даже если результатом решения задачи синтеза будет сигнал с требуемым биспектром $B_0(f_1, f_2)$, результатом анализа этого сигнала, вообще говоря, могут быть различные биспектр-образы в зависимости от выбранных разрешения и формы биспектрального окна.

Исходя из этого, целесообразно сузить задачу синтеза БОС и сформулировать её как задачу синтеза сигнала с определённым биспектр-образом $\{B_W(n\Pi, m\Pi)\}$. Причём, если не ограничиваться сигналами с биспектр-образами какого-либо узкого класса, указанная задача подразу-

*Здесь и далее [...] — целая часть числа.

мекает синтез сигналов с независимо задаваемыми отсчётами биспектр-образа $B_W(n\Pi, m\Pi)$.

Естественным подходом к решению этой задачи является формирование сигнала

$$x(t) = \sum_{m=1}^{[M/2]} \sum_{n=m}^{M-m} g_{n,m}(t) \quad (5)$$

в виде суммы некоторых элементарных сигналов $g_{n,m}(t)$, каждый из которых отвечает за образование соответствующего отсчёта биспектр-образа $B_W(n\Pi, m\Pi)$. При этом, для обеспечения независимости образуемых отсчётов биспектр-образа суммарного сигнала элементарные сигналы должны быть взаимонезависимы и их собственные биспектр-образы $\{B_W^{n,m}(n\Pi, m\Pi)\}$ должны удовлетворять соотношению

$$B_W^{n,m}(n_1\Pi, m_1\Pi) = \begin{cases} B_W(n\Pi, m\Pi), & \text{при } (n_1, m_1) = (n, m); \\ 0, & \text{при } (n_1, m_1) \neq (n, m). \end{cases} \quad (6)$$

Этот подход к решению задачи синтеза сигналов с заданными биспектральными свойствами используется в изложенном ниже способе синтеза квазидетерминированных БОС.

3. СПОСОБ СИНТЕЗА КВАЗИДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ БОС

Как следует из определения (2), биспектр случайного процесса $x(t)$ описывает статистическую зависимость троек спектральных компонент на гармонически связанных частотах f_1 , f_2 и $f_3 = f_1 + f_2$. Поэтому в основе принципа действия любого синтезатора БОС лежит некоторый способ, обеспечивающий требуемую степень биспектральной связанности триплетов спектральных составляющих генерируемого сигнала.

Основная идея способа синтеза квазидетерминированного БОС [9] заключается в том, что в качестве отдельных его элементов, образующих соответствующие отсчёты биспектр-образа, используются биспектрально связанные триплеты

$$g_{n,m}(t) = \sum_{k=1}^3 2A_{(n,m),k} \cos(2\pi F_{(n,m),k}t + \varphi_{(n,m),k}), \quad (7)$$

где $F_{(n,m),3} = F_{(n,m),1} + F_{(n,m),2}$, $\varphi_{(n,m),1}$, $\varphi_{(n,m),2}$ — независимые равномерно распределённые в $[0, 2\pi]$ случайные фазы, $\varphi_{(n,m),3} = \varphi_{(n,m),1} + \varphi_{(n,m),2} - \Psi_{(n,m)}$, $\Psi_{(n,m)}$ — бифаза (n, m) -го триплета.

Структура биспектра $S_3(f_1, f_2)$ (несглаженный биспектр-образ) синтезируемого сигнала $x(t)$ представляет собой совокупность N пиков в точках $(F_{(n,m),1}, F_{(n,m),2})$ биспектральной плоскости. Эти точки должны быть

расположены достаточно близко к соответствующим отсчётным точкам $(n\Pi, m\Pi)$, так чтобы

$$W(n_1\Pi - F_{(n,m),1}, m_1\Pi - F_{(n,m),2}) \simeq \begin{cases} W(0,0), & \text{при } (n_1, m_1) = (n, m); \\ 0, & \text{при } (n_1, m_1) \neq (n, m). \end{cases} \quad (8)$$

Интенсивности и фазы биспектр-образа в этих точках являются двумя независимыми спектральными параметрами соответствующих триплетов (7):

$$|B(n\Pi, m\Pi)| = \frac{1 + \delta(n - m)}{\Pi_0^2} A_{(n,m),1} A_{(n,m),2} A_{(n,m),3}, \quad (9)$$

$$\arg B(n\Pi, m\Pi) = \Psi(n, m) = \varphi_{(n,m),1} + \varphi_{(n,m),2} - \varphi_{(n,m),3}, \quad (10)$$

где $\delta(z) = \{1 \text{ при } z = 0; 0 \text{ при } z \neq 0\}$.

Несвязанность составляющих, относящихся к различным триплетам, и, следовательно, однозначность биспектр-образа БОС в целом обеспечивает *принцип запрета*: любая тройка частот составляющих различных триплетов не должна образовывать гармонически связанную тройку частот, т.е.

$$F_{(n_1, m_1), i} + F_{(n_2, m_2), j} \begin{cases} = F_{(n_3, m_3), k}, & \text{при } (n_1, m_1) = (n_2, m_2) = (n_3, m_3) \\ & \text{и } i = 1, j = 2, k = 3; \\ \neq F_{(n_3, m_3), k}, & \text{при других комбинациях.} \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, квазидетерминированный БОС содержит $[M^2/4]$ биспектрально связанных триплетов, для формирования которых необходимо, в общем случае, до $k_M = 3 [M^2/4]$ гармонических составляющих.

В [9] был предложен способ организации триплетов синтезируемого сигнала (см. формулу (12) ниже), который обеспечивает существенное уменьшение полного числа гармонических составляющих и предполагает использование двух групп *опорных* составляющих. Первая из них включает составляющие на частотах $F_{(n,m),1} = F_{n,1}$, каждая из которых является общей для триплетов, отвечающих элементам $B_W(n\Pi, m\Pi)$ биспектр-образа с одинаковыми значениями индекса n . А каждая из компонент второй группы составляющих на частотах $F_{(n,m),2} = F_{m,2}$ является общей для триплетов, соответствующих элементам $B_W(n\Pi, m\Pi)$ с одинаковыми значениями индекса m . При этом для каждого триплета $g_{(n,m)}(t)$ БОС независимой — *информативной* — составляющей является составляющая на суммарной частоте $F_{(n,m),3} = F_{n,1} + F_{m,2}$.

Данный способ выбора частот не является единственным. Выбирая в качестве информативной одну из трёх групп составляющих на частотах $F_{(n,m),3}$, $F_{(n,m),1}$ или $F_{(n,m),2}$ (при $F_{(n,m),3} \geq F_{(n,m),1} \geq F_{(n,m),2}$), получаем один из трёх базовых способов выбора частот:

— ВЧ-БОС:

$$\begin{cases} F_{(n,m),1} = F_{n,1} = n\Pi + \Delta_{n,1} & (1 \leq n \leq M-1), \\ F_{(n,m),2} = F_{m,2} = m\Pi + \Delta_{m,2} & (1 \leq m \leq [M/2]), \\ F_{(n,m),3} = F_{n,1} + F_{m,2} & (1 \leq m \leq [m/2], m \leq n \leq M-m), \end{cases} \quad (12)$$

— СЧ-БОС:

$$\begin{cases} F_{(n,m),1} = F_{l,3} - F_{m,2} & (1 \leq m \leq [M/2], 2m \leq l \leq M), \\ F_{(n,m),2} = F_{m,2} = m\Pi + \Delta_{m,2} & (1 \leq m \leq [M/2]), \\ F_{(n,m),3} = F_{l,3} = l\Pi + \Delta_{l,3} & (l = n+m, 2 \leq l \leq M), \end{cases} \quad (13)$$

— НЧ-БОС:

$$\begin{cases} F_{(n,m),1} = F_{n,1} = n\Pi + \Delta_{n,1} & (1 \leq n \leq M-1), \\ F_{(n,m),2} = F_{l,3} - F_{n,1} & (2 \leq l \leq M, [l/2] \leq n \leq l-1), \\ F_{(n,m),3} = F_{l,3} = l\Pi + \Delta_{l,3} & (l = n+m, 2 \leq l \leq M), \end{cases} \quad (14)$$

где смещения $\Delta_{k,i}$ выбираются так, чтобы, с одной стороны, удовлетворить условиям однозначности биспектр-образа (11), а с другой — обеспечить для выбранного окна $W(f_1, f_2)$ требуемую точность выполнения условия (8).

В (12)–(14) сокращения “ВЧ-БОС”, “СЧ-БОС” и “НЧ-БОС” соответствуют терминам “высокочастотный БОС”, “среднечастотный БОС” и “низкочастотный БОС”. С одной стороны, введение этих терминов для обозначения различных способов выбора частот (12)–(14) и соответствующих им БОС оправдано тем, что они характеризуют какая именно из составляющих каждого триплета выбрана в качестве информативной (самая высокочастотная, среднечастотная или самая низкочастотная). С другой стороны, в силу того, что именно информативные составляющие БОС дают основной вклад в его суммарную мощность, термины “ВЧ-БОС”, “СЧ-БОС” и “НЧ-БОС” характеризуют соответствующие случаи распределения мощности БОС по занимаемой полосе частот (см. рис. 16, г, д, ниже).

При цифровой реализации синтеза квазидетерминированного БОС целесообразно использовать следующую последовательность операций.

1) Для заданного биспектр-образа $B(n\Pi, m\Pi)$, согласно (9), (10), определить амплитуды и фазы k_M составляющих БОС в частотной области $X(f)$, где:

— для ВЧ-БОС $k_M = (M-1) + [M/2] + [M^2/4]$ и

$$\begin{aligned} X(f) = & \sum_{n=1}^{M-1} A_{n,1} \exp(i\varphi_{n,1}) \delta(f - F_{n,1}) + \sum_{m=1}^{[M/2]} A_{m,2} \exp(i\varphi_{m,2}) \delta(f - F_{m,2}) + \\ & + \sum_{m=1}^{[M/2]} \sum_{n=m}^{M-m} A_{(n,m),3} \exp(i\varphi_{(n,m),3}) \delta(f - F_{(n,m),3}); \end{aligned} \quad (15)$$

— для СЧ-БОС $k_M = (M - 1) + [M/2] + [M^2/4]$ и

$$X(f) = \sum_{l=2}^M A_{l,3} \exp(i\varphi_{l,3}) \delta(f - F_{l,3}) + \sum_{m=1}^{[M/2]} A_{m,2} \exp(i\varphi_{m,2}) \delta(f - F_{m,2}) + \sum_{m=1}^{[M/2]} \sum_{l=2m}^M A_{(l-m,m),1} \exp(i\varphi_{(l-m,m),1}) \delta(f - F_{(l-m,m),1}); \quad (16)$$

— для НЧ-БОС $k_M = 2(M - 1) + [M^2/4]$ и

$$X(f) = \sum_{n=1}^{M-1} A_{n,1} \exp(i\varphi_{n,1}) \delta(f - F_{n,1}) + \sum_{l=2}^M A_{l,3} \exp(i\varphi_{l,3}) \delta(f - F_{l,3}) + \sum_{l=2}^M \sum_{n=[l/2]}^{l-1} A_{(n,l-n),2} \exp(i\varphi_{(n,l-n),2}) \delta(f - F_{(n,l-n),2}). \quad (17)$$

При этом, как следует из (9), (10), амплитуды и фазы опорных составляющих, в общем случае, произвольны и могут быть получены с помощью датчика случайных чисел.

2) Посредством обратного дискретного преобразования Фурье вычислить требуемую реализацию БОС $x(t)$ во временной области. Отметим, что для выполнения этой операции с использованием алгоритмов БПФ все частоты $F_{(n,m),i}$ должны быть кратны заданной частоте f_0 .

Синтез БОС, у которых частоты составляющих кратны некоторой заданной частоте f_0 , целесообразно осуществлять как при цифровой, так и при аналоговой реализации биспектрсинтезаторов. Это обусловлено тем, что синтезируемый сигнал при этом является периодическим и в результате анализа его биспектра на периоде $T = 1/f_0$, содержащем всю информацию о каждом из $[M^2/4]$ элементов БОС, заданный биспектр-образ сигнала может быть восстановлен безошибочно.

4. БОС, ОПТИМАЛЬНЫЕ В КЛАССЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЁТОК ЧАСТОТ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Поиск конкретных наборов частот (12)–(14), удовлетворяющих условиям (8), (11), осуществлялся в классе регулярных решёток целочисленных частот $\{TF_{(n,m),i} | i = 1, 2, 3\}$, для которых смещения в (12)–(14) имеют вид

$$T\Delta_{k,i} = ks_i + d_i, \quad (18)$$

где s_i и d_i — целочисленные константы.

В качестве биспектрального окна в (8) использовалось идеальное шестиугольное окно

$$W(f_1, f_2) = \frac{Q^2}{3\Pi^2} \lambda_{2\Pi/Q}(f_1) \lambda_{2\Pi/Q}(f_2) \lambda_{2\Pi/Q}(f_1 + f_2), \quad (19)$$

аппроксимирующее окна широкого класса биспектральных оценок [1], сводимых к узкополосной фильтрации троек спектральных компонент на гармонически связанных частотах и последующему их перемножению. В (19) $\lambda_{\Pi}(z) = \{1 \text{ при } |z| \leq \Pi/2; 0 \text{ при } |z| > \Pi/2\}$, а Q — параметр, определяющий степень близости узкополосных фильтров к идеальным. Чем ближе форма частотных характеристик эффективных узкополосных фильтров применяемого биспектрального анализатора к идеальной прямоугольной, тем ближе может быть параметр Q к минимальному значению 2. Условие (8) для окна (19) даёт неравенства

$$\begin{aligned} |F_{(n,m),1} - n\Pi| &\leq \Pi/Q, \\ |F_{(n,m),2} - m\Pi| &\leq \Pi/Q, \\ |F_{(n,m),3} - (n+m)\Pi| &\leq \Pi/Q, \end{aligned} \quad (20)$$

которые определяют требуемую степень малости смещений $\Delta_{k,i}$ в (12)–(14) по сравнению с шагом Π .

В результате численного поиска для каждого из способов выбора частот триплетов (12)–(14) были найдены семейства целочисленных частот, для которых максимальный период БОС T минимален. Смещения $\Delta_{k,i}$, при которых соответствующие семейства БОС имеют для заданных M и Q минимальные базы

$$T\Pi = (2[M/2] - 1)Q \quad (\text{ВЧ-БОС}), \quad (21)$$

$$T\Pi = (M + [M/2] - 3)Q \quad (\text{СЧ-БОС}), \quad (22)$$

$$T\Pi = (2M - 3)Q \quad (\text{НЧ-БОС}), \quad (23)$$

приведены в табл. 1, 2 и 3. Как следует из (20) и (21)–(23), выбор параметра Q должен осуществляться на основе разрешения противоречия между требованиями повышения точности передачи биспектр-образа и снижения длительности периода БОС.

Возможности реализованного на базе ЭВМ синтезатора БОС иллюстрируются рис. 1а–э. На рис. 1а–е сопоставляются реализации и вычисленные с разрешением Π спектры мощности $P(f)$ трёх типов БОС (ВЧ-БОС, СЧ-БОС и НЧ-БОС), имеющих одинаковые биспектр-образы. Модуль биспектра каждого из тестовых БОС содержит два базовых биспектр-образа (см. рис. 1ж): “пик” — биспектр-образ триплета (2) и “пьедестал” — биспектр-образ суммы триплетов, имитирующих негауссов шум с постоянным биспектром в заданной области частот. Бифазы тех же самых БОС представляют определённую информационную структуру (см. рис. 1з).

Т а б л и ц а 1

Параметры вариантов квазидетерминированных ВЧ-БОС
с минимальной базой $T\Pi = (2[M/2] - 1)Q$

N	$T\Delta_{n,1}$	$T\Delta_{m,2}$	Примечание
1	$-2n + 2[M/2] + 1$	$2m - 2$	
2	$2[M/2] - 1$	$-2m + 1$	
3	$2[M/2] - 1$	$-m - [M/2] + 1$	
4	$[M/2]$	$m - 2[M/2]$	
5	$[M/2] + 1$	$-3m + [M/2] + 1$	$[M/2] \bmod 3 \neq 2$
6	$2[M/2] - 2$	$-2m + 1$	$M \bmod 2 \neq 1$
7	$2n - 2[M/2] - 1$	$-2m + 2$	
8	$-2[M/2] + 1$	$2m - 1$	
9	$-2[M/2] + 1$	$m + [M/2] - 1$	
10	$-[M/2]$	$-m + 2[M/2]$	
11	$-[M/2] - 1$	$3m - [M/2] - 1$	$[M/2] \bmod 3 \neq 2$
12	$-2[M/2] + 2$	$2m - 1$	$M \bmod 2 \neq 1$

Т а б л и ц а 2

Параметры вариантов квазидетерминированных СЧ-БОС
с минимальной базой $T\Pi = (M + [M/2] - 3)Q$

N	$T\Delta_{l,3}$	$T\Delta_{m,2}$	Примечание
1	$-l + M$	$m + M - 3$	
2	$-l + M - 1$	$m + M - 4$	$M \bmod 2 \neq 0$
3	$l - M$	$-m - M + 3$	
4	$l - M + 1$	$-m - M + 4$	$M \bmod 2 \neq 0$

Т а б л и ц а 3

Параметры вариантов квазидетерминированных НЧ-БОС
с минимальной базой $T\Pi = (2M - 3)Q$

N	$T\Delta_{l,3}$	$T\Delta_{n,1}$	Примечание
1	$-2l + 2M$	$2M - 3$	
2	$-2l + 2M - 1$	$2M - 4$	
3	$-2l + 2M - 2$	$2M - 5$	
4	$2l - 2M$	$-2M + 3$	
5	$2l - 2M + 1$	$-2M + 4$	
6	$2l - 2M + 2$	$-2M + 5$	

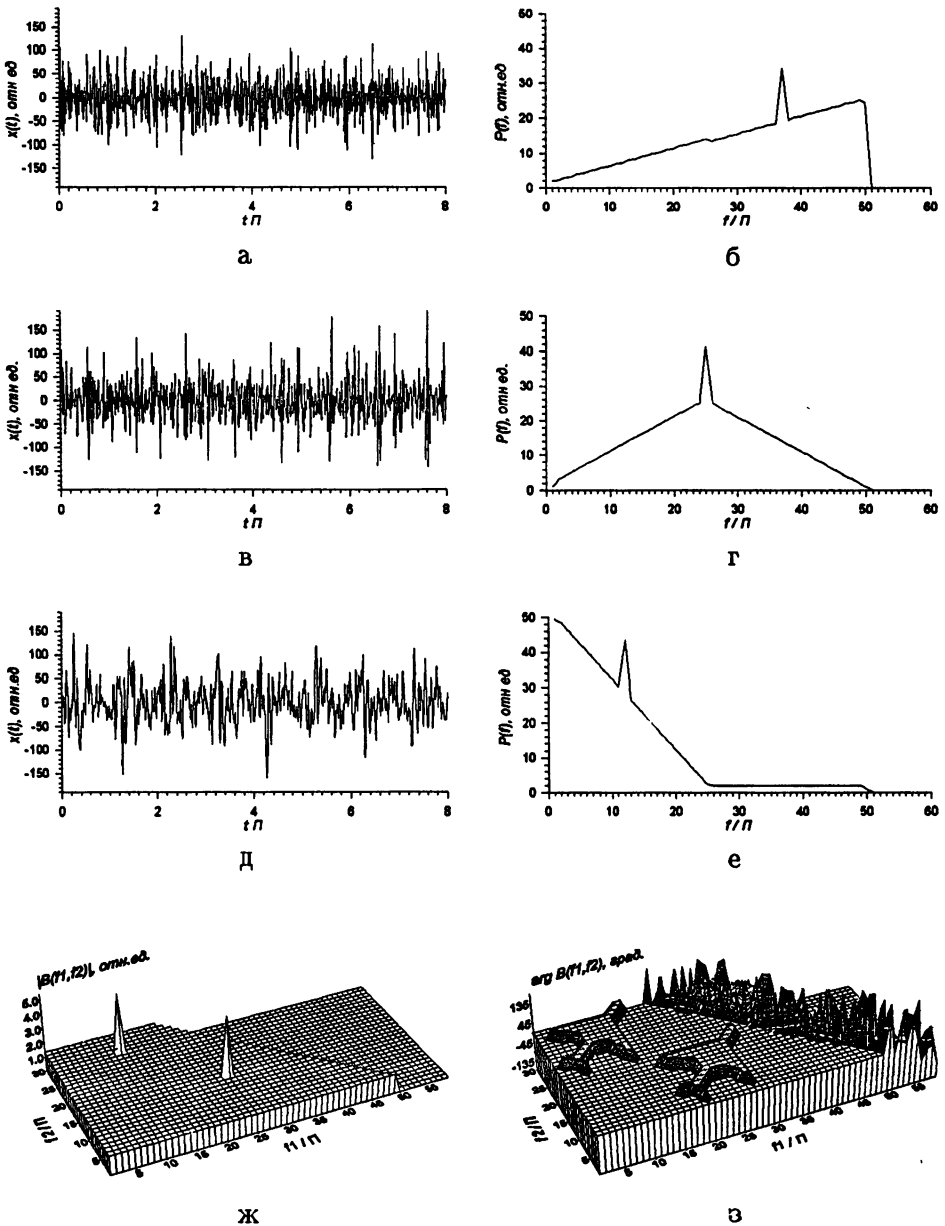


Рис. 1. Результаты синтеза и анализа трёх тестовых биспектрально-организованных сигналов с идентичными биспектр-образами: фрагменты реализаций и спектры мощности ВЧ-БОС (а, б), СЧ-БОС (в, г) и НЧ-БОС (д, е); восстановленные модуль (ж) и фаза (з) биспектр-образа приведены для ВЧ-БОС, для СЧ-БОС и НЧ-БОС результаты восстановления биспектр-образа полностью идентичны. Вне базовой области $(f_1 + f_2)/\pi \leq 50$ бифаза (з) не определена, т.к. модуль биспектр-образа (ж) вне этой области равен нулю.

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БОС ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ В КАНАЛАХ С АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫМИ ИСКАЖЕНИЯМИ И МНОГОЛУЧЕВОСТЬЮ

В качестве примера одного из перспективных применений БОС рассмотрим возможность использования их для параллельной передачи больших информационных массивов в условиях сильных амплитудно-фазовых искажений, имеющих место, например, при многолучевом распространении сигнала.

Ограничимся здесь только такими ситуациями, когда свойства многолучевого канала меняются со временем достаточно медленно так, что за время передачи сигнала канал можно считать стационарным каналом с постоянными параметрами.

Как известно, искажение сигнала $x(t)$ в канале с постоянными параметрами математически можно представить в виде

$$y(t) = \int_{-\infty}^t d\tau x(\tau)h(t-\tau) + n(t), \quad (24)$$

где $h(t)$ — неизвестный импульсный отклик канала, $n(t)$ — шум на выходе канала, который обычно предполагается гауссовым. Если $h(t) = \sum_i h_i \delta(t - t_i)$, то (24) будет описывать искажения сигнала в канале с дискретной многолучевоcтью. На основании определения биспектра (2), используя (24) в спектральном представлении

$$Y(f) = H(f)X(f) + N(f) \quad (25)$$

и учитывая то обстоятельство, что биспектр гауссова шума равен нулю [1], нетрудно получить формулу

$$S_3^y(f_1, f_2) = H(f_1)H(f_2)H^*(f_1 + f_2) \cdot S_3^x(f_1, f_2), \quad (26)$$

описывающую искажение биспектра передаваемого сигнала.

Очевидно, что отсчёты биспектр-образа $B_W^y(n\Pi, m\Pi)$, фиксируемые на принимающей стороне, с точностью до флуктуаций, определяемых неполным подавлением влияния гауссова шума, и возможных искажений, обусловленных конечностью разрешения и особенностями биспектральной организации передаваемого сигнала, удовлетворяют соотношению, аналогичному (26):

$$B_W^y(n\Pi, m\Pi) = H(n\Pi)H(m\Pi)H^*((n+m)\Pi) \cdot B_W^x(n\Pi, m\Pi). \quad (27)$$

Рассмотрим сначала задачу зондирования канала сигналом с полностью известным на принимающей стороне биспектр-образом. Для восстановления амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) $|H(f)|$ и фазово-частотной характеристики (ФЧХ) $\arg H(f)$ канала по биспектр-образу принятого сигнала можно использовать известные из литературы

[1, 2, 11–13] методы реконструкции сигналов по биспектрам. Среди этих методов наиболее простыми с вычислительной точки зрения являются рекуррентные методы.

Применительно к рассматриваемой задаче, рекуррентные процедуры реконструкции основаны на следующем из (27) соотношении:

$$H^*(n\Pi) = \frac{B_W^y((n-k)\Pi, k\Pi)}{H((n-k)\Pi) H(k\Pi) B_W^z((n-k)\Pi, k\Pi)}, \quad 1 \leq k < [n/2]. \quad (28)$$

Как видим, восстановление n -го отсчёта частотной характеристики по отсчётам с меньшими номерами можно выполнить $[n/2]$ различными способами. Вследствие этого возможны различные рекуррентные процедуры вычисления отсчётов характеристики $H(f)$ [11–13]. Усредняя по результатам всех $[n/2]$ возможных способов вычисления n -го отсчёта в (28), можно получить следующее соотношение:

$$H^*(n\Pi) = \frac{1}{[n/2]} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{B_W^y((n-k)\Pi, k\Pi)}{H((n-k)\Pi) H(k\Pi) B_W^z((n-k)\Pi, k\Pi)}, \quad 2 \leq n \leq M. \quad (29)$$

Реконструкция на базе (29) требует задания значения для 1-го отсчёта — $H(\Pi)$. Из (27) можно получить соотношение [13]

$$|H(\Pi)|^6 = \frac{|B_W^y(\Pi, \Pi)|^3}{|B_W^z(\Pi, \Pi)|^3} \cdot \frac{|B_W^y(3\Pi, \Pi)|}{|B_W^z(3\Pi, \Pi)|} \cdot \frac{|B_W^y(2\Pi, \Pi)|}{|B_W^z(2\Pi, \Pi)|} \cdot \frac{|B_W^z(2\Pi, 2\Pi)|}{|B_W^y(2\Pi, 2\Pi)|}, \quad (30)$$

определяющее $|H(\Pi)|$.

Что касается значения фазы $\arg\{H(\Pi)\}$, то не существует способа её однозначного определения по биспектрам, а отсчёты ФЧХ канала $\arg\{H(n\Pi)\}$, как показано в [11], могут быть восстановлены лишь с точностью до неизвестного линейного по частоте слагаемого ($n \cdot \arg\{H(\Pi)\}$). Это ограничение является следствием того, что биспектр любого сигнала, как известно, инвариантен к произвольному линейному фазовому сдвигу ($2\pi f\tau$) спектральных компонент сигнала или, что то же самое, — не изменяется при задержке сигнала в целом на некоторое время τ . Таким образом, восстановление по биспектру импульсной характеристики канала и переданного сигнала возможно лишь с точностью до неизвестного времени задержки, что не влияет, впрочем, на качество реконструкции формы сигнала. При этом значение фазы $\arg\{H(\Pi)\}$ можно выбрать произвольно, для простоты — $\arg\{H(\Pi)\} = 0$.

Изложенный способ позволяет использовать для зондирования каналов сигналы, синтез которых описан выше. Для каналов с достаточно медленно меняющимися параметрами, зондирование биспектрально организованным сигналом позволяет исследовать динамику изменения характеристик канала во времени.

Вместе с тем, более интересным является то, что применение БОС решает задачу передачи информации в искажающих каналах на основе одновременного осуществления одним и тем же сигналом передачи информационного массива и зондирования канала. Последнее позволяет провести на принимающей стороне эффективную коррекцию амплитудно-фазовых искажений и восстановление переданных информационных структур сигнала. Причём, важно, что для зондирования канала можно использовать сравнительно малую тестовую часть биспектр-образа сигнала, а основную его часть — в качестве информационной. Эта возможность основана на том, что информация о канале содержится в биспектре принимаемого сигнала в избыточном виде.

Действительно, если для зондирования канала использовать только M_0 тестовых линий биспектр-образа передаваемого БОС $\{B_{W}^x(n\Pi, m\Pi) | 1 \leq m \leq M_0, m \leq n \leq M - m\}$, то остальные его элементы $\{B_{W}^x(n\Pi, m\Pi) | M_0 + 1 \leq m \leq [M/2], m \leq n \leq M - m\}$ можно использовать для передачи информации. При этом, исключив из (29) неизвестные (на принимающей стороне) информационные отсчёты биспектр-образа передаваемого БОС, для определения КЧХ канала имеем

$$H^*(n\Pi) = \frac{1}{K_n(M_0)} \sum_{k=1}^{K_n(M_0)} \frac{B_W^y((n-k)\Pi, k\Pi)}{H((n-k)\Pi) H(k\Pi) B_W^x((n-k)\Pi, k\Pi)}, \quad (31)$$

$$2 \leq n \leq M.$$

где $K_n(M_0) = \min\{M_0, [n/2]\}$. А восстановление переданного биспектр-образа с использованием вычисленных отсчётов $H(n\Pi)$ можно осуществить по формуле

$$\hat{B}_W^x(n\Pi, m\Pi) = \frac{B_W^y(n\Pi, m\Pi)}{H(n\Pi) H(m\Pi) H^*((n+m)\Pi)}. \quad (32)$$

Отметим, что в отличие от биспектра спектр мощности переданного сигнала можно восстановить с использованием соотношения $\hat{P}^x(n\Pi) = P^y(n\Pi)/|H(n\Pi)|^2$ только тогда, когда шум $n(t)$ в (24) пренебрежимо мал.

Эффективность изложенного метода демонстрируют рис. 2 и рис. 3, где приведены результаты компьютерного моделирования передачи по многолучевому каналу ВЧ-БОС, показанного на рис. 1а. Импульсный отклик канала изображён на рис. 2. На рис. 3 сопоставляются искажённые многолучевостью спектр мощности и биспектр принятого сигнала и результаты восстановления соответствующих характеристик исходного БОС. Вычисление отсчётов частотной характеристики канала проводилось на основе знания лишь одной тестовой линии, содержащей 8% элементов биспектр-образа БОС. На рис. 2 приведена импульсная характеристика канала, вычисленная с помощью обратного преобразования Фурье частотной характеристики, рассчитанной по биспектру.

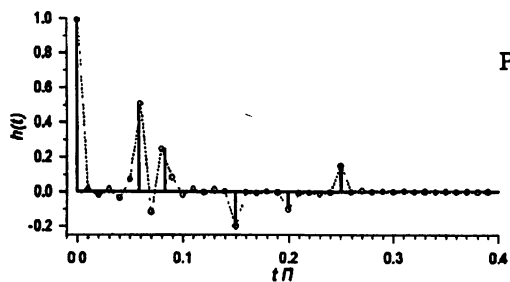
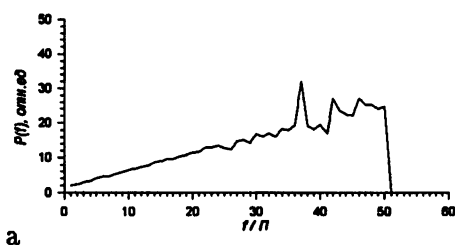
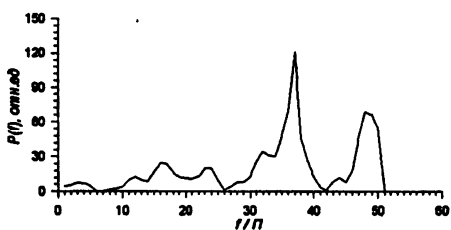
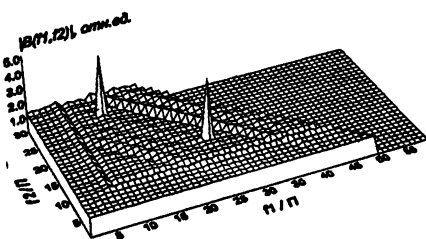
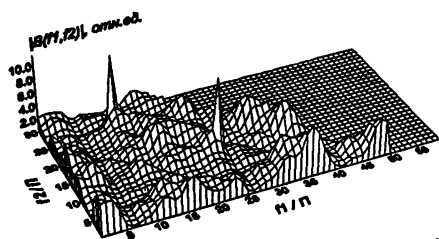


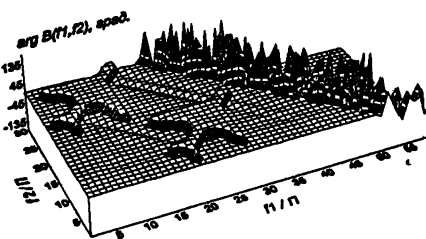
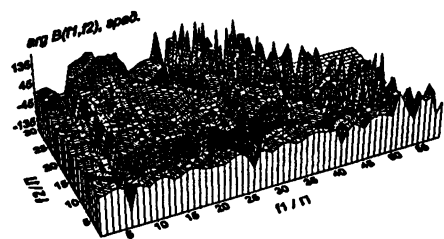
Рис. 2. Импульсная характеристика (сплошная линия), моделирующая многолучевой канал, и результат её реконструкции по биспектру принятого информационного сигнала (пунктирная линия).



а



б



в

Рис. 3. Пример восстановления спектра и биспектр-образа сигнала, переданного по многолучевому каналу: искажённый и восстановленный спектры мощности (а), искажённый и восстановленный модули биспектров (б), искажённая и восстановленная структуры бифаз (в) информационного сигнала.

В настоящей статье, посвящённой принципам синтеза БОС, данный раздел носит в основном методический и иллюстративный характер. Мы не проводим здесь сравнение предложенного метода передачи сообщений в многолучевых каналах с известными техническими решениями [14]. Это может быть сделано на основе анализа традиционного комплекса вопросов статистической теории связи, а именно, — вопросов помехоустойчивости, скорости передачи и др. Отдельные аспекты преимуществ использования БОС с этих позиций отражены в работах [5, 6].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами данной работы, направленной на развитие метода синтеза квазидетерминированных биспектрально организованных сигналов, являются следующие. Сформулированы три базовых способа выбора частот составляющих БОС, отвечающие трём различным распределениям мощности сигнала по полосе (низкочастотному, среднечастотному и высокочастотному). Получены параметры трёх семейств сигналов, оптимальных в классе регулярных решёток частот составляющих. Найденные семейства являются основой экономичных алгоритмов синтеза БОС, позволяющих создать цифровые биспектралсинтезаторы. Предложенные методы синтеза эталонных и информационных биспектральных сигналов можно реализовать и чисто аналоговым способом на основе использования высокостабильных генераторов гармонических сигналов.

В качестве примера одного из перспективных применений БОС рассмотрена возможность использования их для параллельной передачи больших информационных массивов в каналах с амплитудно-фазовыми искажениями сигналов. Предложен способ компенсации линейных амплитудно-фазовых искажений биспектрально организованного сигнала и приведён пример реконструкции его информационной структуры в условиях сильных искажений при многолучевом распространении.

Авторы благодарны за интерес к работе, обсуждение результатов, полезные замечания и поддержку А. Н. Малахову, В. А. Звереву, Г. А. Маркову, С. Н. Желтову и А. А. Дубкову.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-02-18027а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Никиас Х. Л., Рагувер М. Р. //ТИИЭР, 1987. Т. 75. № 7. С. 5.
2. Mendel J. M. //Proc. IEEE., 1991. V. 79. № 3. P. 278.

3. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Марков Г. А. //Международная конференция "100-летие начала использования электромагнитных волн для передачи сообщений и зарождения радиотехники". 50-я научная сессия, посвящённая Дню Радио, — Москва, 1995. Тезисы докладов. Ч. II. С. 62.
4. Bochkov G. N., Gorokhov K. V., Dubkov A. A., Zheltov S. N., Markov G. A., Rezvov A. V. //Proc. 7th Vilnius Conf. "Fluctuation Phenomenon in Physical Systems". — Vilnius Univ. Press, Lithuania, 1994. P. 243.
5. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Дубков А. А., Желтов С. Н., Марков Г. А. //Сб. научн. трудов "Современные проблемы радиофизики". — Нижний Новгород: ННГУ, 1996. С. 161.
6. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Дубков А. А., Желтов С. Н., Марков Г. А. //Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика, 1996. № 6 (в печати).
7. Sasato K., Sato T. //J. Acoust. Soc. Am., 1979. V. 65. № 3. P. 732.
8. Sasaki K., Sato T., Kano M. //J. Acoust. Soc. Am., 1981. V. 69. № 1. P. 286.
9. Бочков Г. Н., Горохов К. В. //Письма в ЖТФ, 1995. Т. 21. Вып. 16. С. 27.
10. Дубков А. А., Малахов А. Н. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1978. Т. 21. № 9. С. 81.
11. Bartlett H., Lohmann A. W., Wirnitzer B. // Appl. Opt., 1984. V. 23. P. 3121.
12. Matsuoka T., Urych T. J. //Proc. IEEE, 1984. V. 72. № 10. P. 1403.
13. Sundaramoorthy G., Raghuvver M. R., Dianat S. A. //IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 1990. V. 38. № 7. P. 1297.
14. Коржик В. И., Финк Л. М., Щелкунов К. Н. Расчёт помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений / Под ред. Л. М. Финка. — М.: Радио и связь, 1981.

Нижегородский государственный
университет, г. Н. Новгород,
Россия

Поступила в редакцию
14 апреля 1997 г.

**BISPECTRALLY ORGANIZED SIGNALS FOR PARALLEL
COMMUNICATION SYSTEMS WITH CORRECTION OF
AMPLITUDE-PHASE DISTORTIONS**

G. N. Bochkov, K. V. Gorokhov

A method of synthesis of quasi-determined bispectrally organized signals for the purposes of calibration, imitation, sounding as well as for parallel transfer of large information files is stated. As an elementary structural unit of a complex information signal, a bispectral triplet has been chosen, which consists of three harmonically related monochromatic components with certain phase coupling. The peculiarity and advantage of the proposed method is the stability of bispectral characteristics of a generated signal. Parameters of three base families of bispectrally organized signals have been found. Possibilities of the digital synthesis for test information signals are illustrated. A way of compensation of linear amplitude-phase distortions of a bispectrally organized signal is considered and supported by the example of reconstruction of its information structure under the conditions of strong distortions at multipath propagation.

УДК 519.217:517.977.57

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ТРЕНДА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

А. А. Мальцев, О. В. Польшин, А. М. Силаев

Рассмотрена задача оценивания тренда среднего значения стохастического временного ряда, наблюдаемого в смеси с шумом. Тренд моделировался полиномиальной функцией времени, параметры которой изменяются скачком в случайный момент. Задача решена методами теории оптимальной нелинейной фильтрации импульсных марковских процессов. В качестве примера рассмотрен приближённый алгоритм оценивания параметров кусочно-линейного тренда. Приведены результаты численного моделирования синтезированного алгоритма.

1. ВВЕДЕНИЕ

При анализе стохастических временных рядов принято различать несколько составляющих, описывающих изменения параметров с различными временными масштабами. Плавные изменения характеристик получили название трендов (тенденций). Адекватное оценивание тренда ряда необходимо при решении задач контроля и управления объектами самой различной природы, при обработке данных в области экспериментальной физики, медицины, экономики и т.п. Изучение тенденций позволяет лучше понять сущность анализируемого явления, строить достоверные прогнозы поведения дрейфующих характеристик.

Тренд формируется под действием долговременно существующих факторов. Такие факторы по истечении некоторого периода времени могут изменяться (например, при возникновении неисправностей в системе), формируя тренд с другими параметрами. Поэтому желательно оперативно обнаруживать происходящие изменения.

При математическом описании тренда удобна аппроксимация его полиномиальной функцией времени невысокой степени [1–3]. При рассмотрении больших временных интервалов, чтобы не увеличивать степень полинома, применяют моделирование тренда функцией с кусочно-постоянными параметрами. К настоящему времени получен ряд результатов по обработке процессов, имеющих различные параметры на случайных интервалах времени [4–5]. В данной работе применён эффективный и

достаточно простой метод решения подобных задач, развитый в работах [6–7] на основе теории фильтрации условных марковских процессов. С его помощью решена задача оценивания стохастического временного ряда со скачкообразным случайным изменением параметров тренда среднего значения в случайный момент времени.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что наблюдаемый временной ряд y_k представляет собой сумму трёх компонент: стационарного случайного процесса s_k с нулевым средним значением, t_k — тренда среднего значения и последовательности независимых гауссовских случайных величин v_k с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D_v :

$$y_k = s_k + t_k + v_k. \quad (1)$$

Будем считать, что случайный процесс s_k образован в результате прохождения белого гауссовского шума через линейную динамическую систему и описывается уравнениями

$$s_k = C' \vec{x}_k, \quad (2)$$

$$\vec{x}_k = M \vec{x}_{k-1} + \vec{u}_k,$$

где \vec{x}_k — вектор состояния размерности p , C' — вектор-строка размерности p , M — матрица переходов $p \times p$, \vec{u}_k — p -вектор белого гауссовского шума с нулевым средним значением и матрицей ковариаций D_u , ' — знак транспонирования.

Поскольку математические ожидания процессов s_k и v_k считаются равными нулю, закон изменения во времени среднего значения ряда y_k описывается трендом t_k . Примем, что тренд является кусочно-полиномиальной функцией времени и задаётся следующими выражениями:

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= t_k + \Delta t_{k+1} + A_0 \delta_{k\tau}, \\ \Delta t_{k+1} &= \Delta t_k + \Delta^2 t_k + A_1 \delta_{k\tau}, \\ &\dots \\ \Delta^n t_{k+1} &= \Delta^n t_k + A_n \delta_{k\tau}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\delta_{k\tau}$ — символ Кронекера,

$$\delta_{k\tau} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = \tau, \\ 0, & \text{при } k \neq \tau. \end{cases}$$

Значения $\Delta^i t_k$ фактически являются разностями i -го порядка тренда в момент времени $k+i$. В (3) для описания скачкообразных изменений разностей тренда в правую часть введены дельта-импульсные воздействия, возникающие в момент времени τ с амплитудами A_i .

Будем считать, что в начальный момент времени $k=0$ заданы плотности вероятности $P_{\vec{x}_0}(\vec{x}_0)$, $P_{t_0}(t_0)$, $P_{\Delta^i t_0}(\Delta^i t_0)$ начальных состояний вектора \vec{x}_0 , тренда t_0 и его разностей $\Delta^i t_0$, а также априорные плотности вероятности $P_{A_i}(A_i)$, $i=0, \dots, n$ скачков разностей тренда $\Delta^i t_k$ и $P_\tau(\tau)$ возможных дискретных значений случайного момента этого изменения $\tau=0, 1, 2, \dots$

Величины \vec{x}_0 , t_0 , $\Delta^i t_0$, A_i и τ предположим априорно статистически независимыми друг от друга и от шумовых последовательностей v_k , \vec{u}_k .

Задача заключается в том, чтобы в каждый момент дискретного времени $k > 0$ по реализации наблюдений $\vec{y}_1^k = (y_1, \dots, y_k)$ найти оценки вектора состояния $\hat{\vec{x}}(k)$, тренда $\hat{t}(k)$ и его разностей $\hat{\Delta}^i t(k)$.

Запишем соотношения (1)–(3) в несколько ином виде. Для этого введём расширенный вектор состояния $\vec{z}_k = (t_k, \Delta t_k, \dots, \Delta^n t_k, \vec{x}_k')'$ образованный добавлением к исходному вектору состояния компонент, описывающих тренд t_k и его разности $\Delta^i t_k$. Тогда вместо уравнений (2), (3) можно записать одно разностное уравнение для расширенного вектора \vec{z}_k :

$$\vec{z}_{k+1} = F\vec{z}_k + \vec{w}_k + \vec{A}\delta_{k\tau}. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения:

$$F = \left(\begin{array}{c|c} T & [0] \\ \hline [0] & M \end{array} \right), \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

F — матрица $(p+n+1) \times (p+n+1)$, T — матрица $(n+1) \times (n+1)$, $[0]$ — нулевая матрица размерности $p \times p$, $\vec{w}_k = (0, \dots, \vec{u}_k')'$, $\vec{A} = (A_0, \dots, A_n, 0, \dots, 0)'$ — $(p+n+1)$ -векторы.

Уравнение наблюдений (1) переписывается через вектор \vec{z}_k следующим образом:

$$y_k = H\vec{z}_k + v_k, \quad (5)$$

где $H = (1, 0, \dots, 0, \vec{C}')$ — $(p+n+1)$ -вектор-строка.

Плотности вероятности $P_{\vec{z}_0}(\vec{z}_0)$ начального значения вектора \vec{z}_0 и $P_{\vec{A}}(\vec{A})$ амплитуды импульсного возмущения выражаются через плотности вероятности $P_{\vec{x}_0}(\vec{x}_0)$, $P_{t_0}(t_0)$, $P_{A_i}(A_i)$, $i=0, \dots, n$ в соответствии с введёнными обозначениями.

Таким образом, поставленная задача сводится к задаче фильтрации вектора состояния \vec{z}_k динамической системы, подверженной импульсным

возмущениям. Для оценивания вектора применим метод решения, описанный в [6]. Следуя этой работе, апостериорная плотность вероятности $P(\vec{z}_k, k | \vec{y}_1^k) \equiv W(\vec{z}_k, k)$ представляется в виде суммы

$$W(\vec{z}_k, k) = p_0(k)W_0(\vec{z}_k, k) + p_1(k)W_1(\vec{z}_k, k),$$

где $p_0(k) \equiv P(k \leq \tau | \vec{y}_1^k)$ и $p_1(k) \equiv 1 - p_0(k) \equiv P(k > \tau | \vec{y}_1^k)$ — апостериорные плотности вероятности неоявления и появления импульсного возмущения в момент времени k ; $W_0(\vec{z}_k, k) \equiv P(\vec{z}_k, k | k \leq \tau, \vec{y}_1^k)$ и $W_1(\vec{z}_k, k) \equiv P(\vec{z}_k, k | k > \tau, \vec{y}_1^k)$ — апостериорные условные плотности вероятности вектора \vec{z}_k .

В [6] получена система уравнений для $p_0(k)$, $p_1(k)$, $W_0(\vec{z}_k, k)$, $W_1(\vec{z}_k, k)$:

$$W_0(\vec{z}_{k+1}, k+1) = \frac{P(y_{k+1} | \vec{z}_{k+1}) \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\vec{z}_{k+1} | \vec{z}_k) W_0(\vec{z}_k, k) d\vec{z}_k}{\Phi_0(y_{k+1}, k)},$$

$$W_1(\vec{z}_{k+1}, k+1) = W_{11}(\vec{z}_{k+1}, k+1) +$$

$$+ \beta(k+1)[W_{01}(\vec{z}_{k+1}, k+1) - W_{11}(\vec{z}_{k+1}, k+1)],$$

(6)

$$W_{01}(\vec{z}_{k+1}, k+1) = \frac{P(y_{k+1} | \vec{z}_{k+1}) \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\vec{z}_{k+1} - \vec{A} | \vec{z}_k) W_0(\vec{z}_k, k) dz_k P_{\vec{A}}(\vec{A}) d\vec{A}}{\Phi_{01}(y_{k+1}, k)},$$

$$W_{11}(\vec{z}_{k+1}, k+1) = \frac{P(y_{k+1} | \vec{z}_{k+1}) \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\vec{z}_{k+1} | \vec{z}_k) W_1(\vec{z}_k, k) dz_k}{\Phi_1(y_{k+1}, k)},$$

$$p_0(k+1) = \frac{\Phi_0(y_{k+1}, k)}{\Phi(y_{k+1}, k)} [1 - \nu(k)] p_0(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

В (6) $W_{01}(\vec{z}_k, k)$, $W_{11}(\vec{z}_k, k)$ — вспомогательные плотности вероятности; $P(y_k | \vec{z}_k) = N_v(y_k - H\vec{z}_k)$ — условная плотность вероятности наблюдения y_k при заданном значении вектора состояния \vec{z}_k , которая выражается через известное распределение $N_v(v_k)$ шума v_k ; $\pi(\vec{z}_{k+1} | \vec{z}_k) = N_w(\vec{z}_{k+1} - F\vec{z}_k)$ — переходная плотность вероятности последовательности \vec{z}_k , которая выражается через заданное распределение $N_w(\vec{w}_k)$ входного шума (\vec{w}_k) расширенной динамической системы. Также в (6) введены обозначения для нормировочных коэффициентов

$$\Phi_0(y_{k+1}, k) = \int_{-\infty}^{\infty} P(y_{k+1} | \vec{z}_{k+1}) \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\vec{z}_{k+1} | \vec{z}_k) W_0(\vec{z}_k, k) d\vec{z}_k d\vec{z}_{k+1},$$

$$\Phi_{01}(y_{k+1}, k) = \int_{-\infty}^{\infty} P(y_{k+1} | \bar{z}_{k+1}) \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\bar{z}_{k+1} - \bar{A} | \bar{z}_k) \times \\ \times W_0(\bar{z}_k, k) P_{\bar{A}}(\bar{A}) d\bar{A} d\bar{z}_k d\bar{z}_{k+1}, \quad (7)$$

$$\Phi_1(y_{k+1}, k) = \int_{-\infty}^{\infty} P(y_{k+1} | \bar{z}_{k+1}) \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\bar{z}_{k+1} | \bar{z}_k) W_1(\bar{z}_k, k) d\bar{z}_k d\bar{z}_{k+1},$$

$$\Phi(y_{k+1}, k) = \Phi_0(y_{k+1}, k) p_0(k) [1 - \nu(k)] + \\ + \Phi_1(y_{k+1}, k) p_1(k) + \Phi_{01}(y_{k+1}, k) p_0(k) \nu(k),$$

и вспомогательных функций

$$\nu(k) = P_\tau(k) / \sum_{i=k}^{\infty} P_\tau(i), \quad (8)$$

$$\beta(k+1) = \frac{\nu(k) p_0(k) \Phi_0(y_{k+1}, k)}{\nu(k) p_0(k) \Phi_{01}(y_{k+1}, k) + p_1(k) \Phi_1(y_{k+1}, k)}.$$

Плотность вероятности $W(\bar{z}_k, k)$, вычисленная согласно выражениям (6)–(8), позволяет найти оценку вектора $\hat{\bar{z}}(k)$ и, следовательно, оценки отдельных компонент: вектора состояния $\hat{\bar{x}}(k)$, тренда $\hat{i}(k)$ и его разностей $\Delta^i \hat{i}(k)$.

3. ПРИМЕР

До сих пор рассматривался случай, когда наблюдаемый временной ряд состоял из трёх компонент: тренда, отвечающего за долговременный дрейф среднего значения; стационарного процесса, значения которого в каждый момент частично определяются предыдущими отсчётами; и, наконец, последовательности независимых между собой величин, описывающих совершенно случайные колебания ряда. На практике часто бывает достаточно рассматривать только одну из двух последних составляющих. В случае, когда нет тенденции, но происходит скачкообразное изменение среднего, следует положить разность первого порядка в выражении (2) тождественно равной нулю:

$$t_{k+1} = t_k + A_0 \delta_{k\tau}.$$

Если тренд присутствует, но он предполагается “непрерывным”, то не нужно рассматривать скачок среднего значения, т.е. считать $A_0 = 0$. Чтобы ещё упростить ситуацию, можно в модели тренда учитывать только разности первого-второго порядка.

В качестве примера рассмотрим частный случай, когда тренд является кусочно-линейной функцией, а случайный процесс s_k отсутствует. Тогда выражения для наблюдаемого временного ряда y_k и тренда t_k имеют вид

$$y_k = t_k + v_k,$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t_k,$$

$$\Delta t_{k+1} = \Delta t_k + A_1 \delta_{k\tau},$$

Чтобы привести уравнения (9) к виду (4), (5), введём векторы

$$\vec{z}_k = (t_k, \Delta t_k)', \quad H = (1, 0), \quad \vec{A} = (0, A_1)'$$

и матрицу

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Величину Δt_k называют обычно наклоном тренда. Из выражений для плотности вероятности $W_0(\vec{z}_k, k)$ (6) следует, что она будет гауссовской при всех $k > 0$, если плотность вероятности $P_{z_0}(\vec{z}_0)$ нормальна. Плотность же вероятности $W_1(\vec{z}_k, k)$ с течением времени становится негауссовской. Однако для упрощения алгоритма будем считать её гауссовской на каждом шаге дискретного времени. Применим гауссовскую аппроксимацию также для распределения $P_{A_1}(A_1)$. В этом случае систему уравнений (6) для нахождения плотности вероятности $W(\vec{z}_k)$ можно заменить выражениями для вычисления математических ожиданий $\hat{\vec{z}}(k)$ и матриц ковариаций $K(k)$, которые записываются в виде системы связанных уравнений фильтров Калмана:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{z}}(k) &= p_0(k)\hat{\vec{z}}_0(k) + p_1(k)\hat{\vec{z}}_1(k), \\ K(k) &= p_0(k)K_0(k) + p_1(k)K_1(k) + \\ &\quad + p_0(k)p_1(k)[\hat{\vec{z}}_0(k) - \hat{\vec{z}}_1(k)][\hat{\vec{z}}_0(k) - \hat{\vec{z}}_1(k)]', \\ \hat{\vec{z}}_0(k+1) &= F\hat{\vec{z}}_0(k) + B_0(k+1)[y_{k+1} - HF\hat{\vec{z}}_0(k)], \\ B_0(k+1) &= P_0(k+1)H'[H'P_0(k+1)H' + D_v]^{-1}, \\ P_0(k+1) &= FK_0(k)F', \\ K_0(k+1) &= [I - B_0(k+1)]P_0(k+1), \\ \hat{\vec{z}}_1(k) &= \hat{\vec{z}}_{11}(k) + \beta(k)[\hat{\vec{z}}_{01}(k) - \hat{\vec{z}}_{11}(k)], \\ K_1(k) &= K_{11}(k) + \beta(k)\{K_{01}(k) - K_{11}(k) + \\ &\quad + [1 - \beta(k)][\hat{\vec{z}}_{01}(k) - \hat{\vec{z}}_{11}(k)][\hat{\vec{z}}_{01}(k) - \hat{\vec{z}}_{11}(k)]'\}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\hat{z}_{01}(k) &= \hat{z}_0(k) + A_{pr}, \quad K_{01}(k) = K_0(k) + K_{A_{pr}}, \\ \hat{z}_{11}(k+1) &= F\hat{z}_1(k) + B_{11}(k+1)[y_{k+1} - HF\hat{z}_1(k)], \\ B_{11}(k+1) &= P_{11}(k+1)H'[H'P_{11}(k+1)H' + D_v]^{-1}, \\ P_{11}(k+1) &= FK_1(k)F', \\ K_{11}(k+1) &= [I - B_{11}(k+1)]P_{11}(k+1),\end{aligned}$$

$$p_0(k+1) = \frac{\Phi_0(y_{k+1}, k)}{\Phi(y_{k+1}, k)} [1 - \nu(k)] p_0(k).$$

Здесь I — единичная матрица,

$$A_{pr} = (0, A_{1pr}), \quad A_{1pr} = \int_{-\infty}^{\infty} A_1 P_{A_1}(A_1) dA_1,$$

$$K_{A_{pr}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{A_{1pr}} \end{pmatrix}, \quad D_{A_{1pr}} = \int_{-\infty}^{\infty} (A_1 - A_{1pr})^2 P_{A_1}(A_1) dA_1,$$

Нормировочные функции принимают вид:

$$\begin{aligned}\Phi_0(y_{k+1}, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_0}} \exp \left\{ -\frac{(y_{k+1} - HF\hat{z}_0(k))^2}{2\Delta_0} \right\}, \\ \Delta_0 &= HFK_0(k)F'H' + D_v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1(y_{k+1}, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_1}} \exp \left\{ -\frac{(y_{k+1} - HF\hat{z}_1(k))^2}{2\Delta_1} \right\}, \\ \Delta_1 &= HFK_1(k)F'H' + D_v,\end{aligned}$$

$$\Phi_{01}(y_{k+1}, k) = \Phi_0(y_{k+1}, k).$$

Начальные значения оценок и начальные матрицы ковариаций к уравнениям (9) вычисляются по соответствующим плотностям вероятности.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование алгоритма фильтрации (9) проводилось в соответствии с выражениями (6) для наблюдений y_k и тренда t_k с начальными значениями $t_0 = 0$, $\Delta t_0 = 0$ и наклоном $\Delta t_k = A_1 = 1$. Это означает, что тренд отсутствует до момента времени $k = \tau = 40$, при $k > \tau$ он представляет собой линейную функцию времени $A_1(k - \tau)$.

Априорное распределение $P_\tau(\tau)$ момента появления тренда полагалось равномерным на всём интервале наблюдения $0 \leq k \leq 100$, т.е. $P_\tau(\tau) = 0,01$.

Выбор плотности вероятности $P_{A_1}(A_1)$ обуславливается априорной информацией. Если изменения среднего в сторону увеличения или уменьшения равновероятны, то очевидно следует полагать $A_{1pr} = 0$. Диапазон возможных значений наклона тренда определяет априорную дисперсию $D_{A_{1pr}}$. Результаты моделирования представлены для $A_{1pr} = 0$, $D_{A_{1pr}} = 2$.

Начальные значения вектора оценки и матрицы ковариаций задавались следующими:

$$\bar{z}_0 = (0, 0), \quad K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 изображён пример реализации случайного процесса y_k (кривая 1), смоделированной в соответствии с заданными выше параметрами при дисперсии шума наблюдений $D_v = 15$. Здесь же показан тренд t_k (кривая 2).

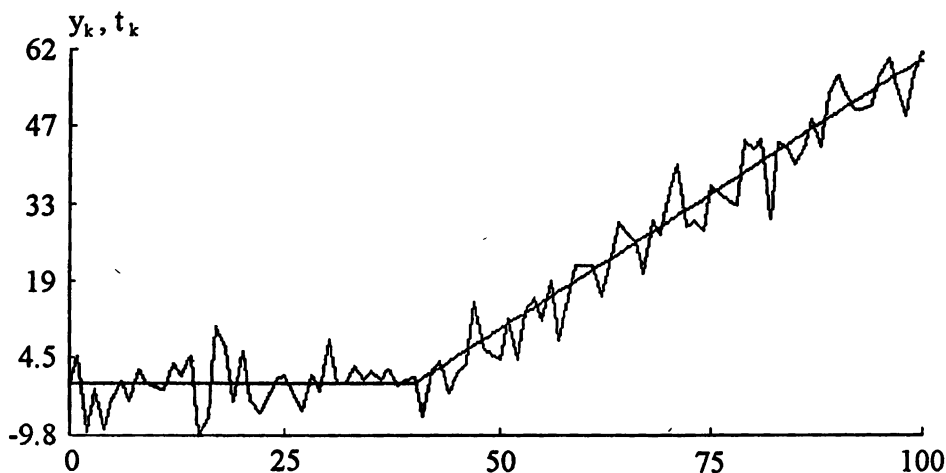


Рис. 1.

Кривые 1–3 на рис. 2 изображают зависимости от времени усреднённых по 50 реализациям оценок наклона тренда $\overline{\Delta \hat{t}(k)}$, полученные различными методами. Кривая 1 получена обработкой ряда алгоритмом (9), кривые 2 и 3 есть оценки наклона тренда, вычисленные методом наименьших квадратов (МНК) для линейной регрессии по 15 (кривая 2) и 25 (кривая 3) предыдущим отсчётам. На рис. 3 показаны зависимости от времени средних квадратов отклонений оценок от истинных значений: а) для тренда $\overline{(\hat{t}(k) - t_k)^2}$, б) для наклона тренда $\overline{(\Delta \hat{t}(k) - \Delta t_k)^2}$. Кривые 1–3 вычислены теми же методами, что и на рис. 1.

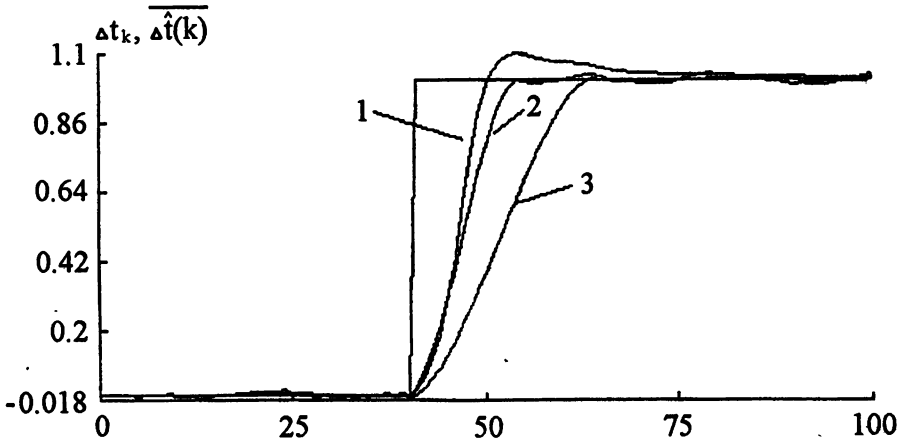
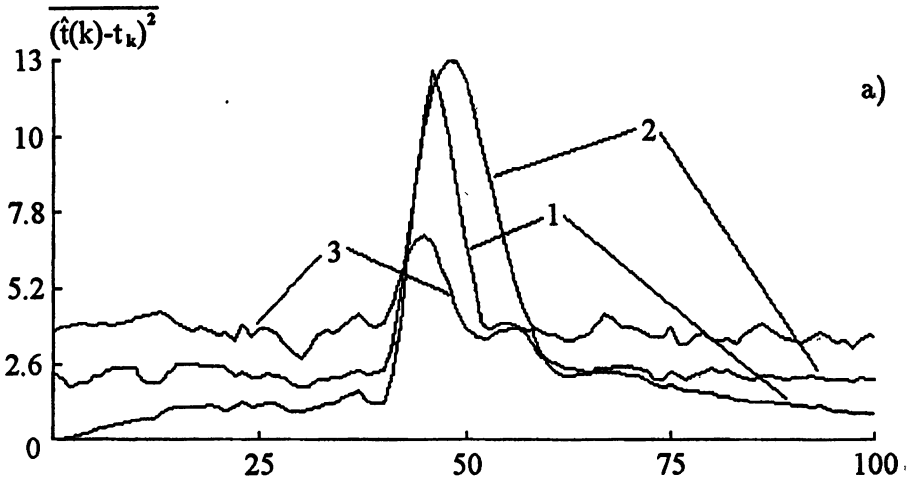
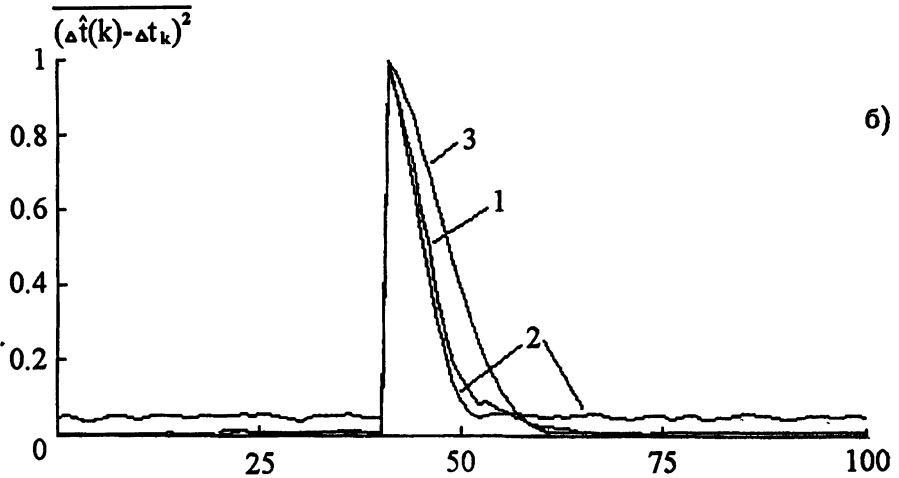


Рис. 2.



a)



b)

Рис. 3.

До момента изменения наклона тренда погрешности оценок МНК находятся на приблизительно постоянных уровнях, которые определяются величиной скользящего окна. После момента $k = \tau$ ошибки оценивания увеличиваются до своего максимума и затем спадают к стационарным значениям. Причём, чем больше число учитываемых при оценивании отсчётов ряда, тем выше максимум погрешности и ниже скорость перенастройки. В отличие от линейного метода нелинейный алгоритм (9) работает несколько иначе. Сначала усреднённый квадрат ошибки выходит на постоянный уровень, затем после $k = \tau$ достигает своего максимального значения и начинает снижаться к нулю. Это происходит из-за того, что после обнаружения изменения наклона тренда оценивание производится по всё возрастающему числу значений временного ряда. Как видно из рис. 2, 3, алгоритм (9) даёт возможность сравнительно быстро отследить скачок наклона тренда и одновременно обеспечивает низкую погрешность оценок.

Задача оценивания компонент временного ряда, состоящего из кусочно-полиномиального тренда среднего значения, стационарного случайного процесса и гауссовского шума, решена методом на основе теории условных марковских процессов, применяемым к фильтрации процессов, подверженных импульсным возмущениям. Работа алгоритма продемонстрирована на примере фильтрации параметров линейного тренда, появляющегося в случайный момент времени. Для численного моделирования применялся более простой в реализации алгоритм, полученный в гауссовском приближении. Результаты моделирования представлены в виде графиков, которые характеризуют точность получаемых оценок в зависимости от текущего времени.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-16525).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. — М.: Мир, 1976.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. — М.: Мир, 1989.
3. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. — М.: Мир, 1979.
4. Казаков И. Е., Артемьев В. М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. — М.: Наука, 1980.
5. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем /Под ред. М. Бассвиль, А. Банвенниста. — М.: Мир, 1989.

6. Мальцев А. А., Силаев А. М. //Автоматика и телемеханика, 1985. № 1. С. 48.
7. Мальцев А. А., Силаев А. М. //Автоматика и телемеханика, 1992. № 1. С. 63.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского, Россия

Поступила в редакцию
21 апреля 1997 г.

**PARAMETERS ESTIMATION FOR PIECEWISE-POLINOMIAL MEAN
VALUE TREND OF STOCHASTIC TIME SERIES**

A. A. Mal'tsev, O. V. Pol'din, A. M. Silaev

We consider the problem of the mean value trend estimation for stochastic time series, which is observed in a mix with noise. The trend is modelled as a polynomial function with parameters changed at a random time point. Proposed solution of this problem is based on the nonlinear filtering theory for the pulse Markovian processes. As an example, an algorithm for approximate estimation of piecewise-linear trend parameters is developed. Performance statistics for the algorithm are given.

УДК 621.396.96.01

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ

М. А. Островский

Предложены критерий качества и итеративный алгоритм полиномиального оценивания плотностей вероятности случайной величины. Исследованы свойства оптимальной оценки, найдены условия и скорость её сходимости.

В В Е Д Е Н И Е

Оценивание статистических характеристик наблюдаемых процессов и систем является неотъемлемым элементом большинства радиофизических исследований. Объектом оценивания могут служить как отдельные кумулянтные характеристики (например, корреляционные или спектральные), так и эмпирические плотности вероятности (ПВ) случайных процессов. Оценивание ПВ может осуществляться непосредственно методом группирования N -мерной выборки процесса и вычисления гистограмм её распределения [1], либо путём оценки вектора состояния $\hat{\mathbf{A}} = \|\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n\|^T$ нелинейного обучающегося устройства измерения, характеристика которого непосредственно связана с ПВ выборки [2]. Последний метод является, пожалуй, единственно возможным в условиях достаточно быстрых изменений ПВ. Если отсчёты процесса $\xi(t)$ статистически независимы, а сам процесс стационарен на интервале времени измерения, статистика выборки полностью характеризуется одномерным законом распределения её ν -го отсчёта $W_1(x_\nu)$ ($\nu = 1, \dots, N$). В этом случае задача статистического оценивания процесса $\xi(t)$ не отличается от задачи оценки его выборочной случайной величины ξ_ν .

Пусть в результате последовательности независимых испытаний над случайной величиной ξ образована N -мерная выборка её значений $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\|$, принадлежащая ПВ $W_1(x_\nu)$ ($\nu = 1, \dots, N$). Будем считать, что неопределённость статистических характеристик ν -го отсчёта проявляется в его зависимости от априорно неизвестного вектора параметров $\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})$, где $\mathbf{A} = \|\alpha_1, \dots, \alpha_n\|^T$. Выборка является обучающей для устройства с нелинейной вектор-функцией измерения $\mathbf{y}_\nu = \hat{\mathbf{F}}_\nu[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A}), \hat{\mathbf{A}}] = \|\hat{f}_{\nu 1}[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A}), \hat{\alpha}_1], \dots, \hat{f}_{\nu n}[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A}), \hat{\alpha}_n]\|^T$, принадлежащей Евклидову пространству R_n . Если целью обучения является стремление этой функции к заданной $\mathbf{F}_\nu[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})]$, зависящей от оцениваемой ПВ, а

сама аппроксимирующая функция известна с точностью до вектора параметров $\hat{\mathbf{A}}$, то нахождение ПВ состоит в наилучшей оценке компонент этого вектора

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{y}_\nu) = \arg \min \|\mathbf{y}_\nu - \mathbf{F}_\nu[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})]\|_n, \quad (1)$$

где $\|\cdot\|_n$ — метрика в R_n .

Казалось бы, выбор желаемой функции $\mathbf{F}_\nu = \|f_{\nu 1}, \dots, f_{\nu n}\|^T$ не ограничен рамками какого-либо узкого класса, необходимо лишь, чтобы эта функция однозначно зависела от оцениваемой ПВ. Однако, с информационной точки зрения существен вопрос о потерях информации относительно ПВ, возникающих при преобразовании отсчёта \mathbf{x}_ν в $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}_\nu)$. В [3] указывается, что минимум средних потерь обеспечивается при единственном условии, когда выборка $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$ представляет достаточную статистику, т.е. пропорциональна отношению правдоподобия (ОП) выборки. В [4, 5] показано, что при неограниченном возрастании N свойствами достаточных статистик обладают логарифмические производные ОП, элементами которых являются функции вида

$$\mathbf{F}_\nu[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})] = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})} \ln W_1[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})] = -W_1^{-1}[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})] \dot{W}_1[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})]. \quad (2)$$

При этом оценка ПВ может отыскиваться в виде функционала от функции измерения

$$\dot{W}_1[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})] = W_1(0) \exp\left\{-\int \hat{\mathbf{F}}_\nu[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A}), \hat{\mathbf{A}}] d\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})\right\}. \quad (3)$$

Для упрощения записи в дальнейшем будем использовать сокращённые обозначения $\hat{\mathbf{F}}_\nu[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A}), \hat{\mathbf{A}}] = \hat{\mathbf{F}}_\nu(\mathbf{x}_\nu, \hat{\mathbf{A}})$, $\mathbf{F}_\nu[\mathbf{x}_\nu(\mathbf{A})] = \mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}_\nu)$.

Таким образом, процедура оценивания ПВ сводится к максимально точному обучению измерителя путём приближения его функции $\hat{\mathbf{F}}_\nu(\mathbf{x}_\nu, \hat{\mathbf{A}})$ к заданной $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}_\nu)$ и определению неизвестного вектора состояния $\hat{\mathbf{A}}$. Решение этой задачи предполагает отыскание соответствующего критерия качества и синтез на его основе оптимального алгоритма оценивания.

КРИТЕРИЙ КАЧЕСТВА ОЦЕНИВАНИЯ

Рассматривая функции $\hat{\mathbf{F}}_\nu(\mathbf{x}_\nu, \hat{\mathbf{A}})$ и $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}_\nu)$ как вектора в Евклидовом пространстве R_n с квадратичной метрикой, потребуем, чтобы вариации $\hat{\mathbf{A}}$ обеспечивали минимум среднего квадрата расстояния между ними [1]

$$E\|\hat{\mathbf{F}}_\nu(\mathbf{x}_\nu, \hat{\mathbf{A}}) - \mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}_\nu)\|_n^2 = E[(\hat{\mathbf{F}}_\nu, \hat{\mathbf{F}}_\nu) - 2(\hat{\mathbf{F}}_\nu, \mathbf{F}_\nu) + (\mathbf{F}_\nu, \mathbf{F}_\nu)],$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ — заданное в R_n скалярное произведение векторов.

Принимая во внимание независимость от \hat{A} последнего произведения, перепишем, с учётом (2), критерий минимального расстояния в виде

$$J(\hat{A}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_\nu^2(x_\nu, \hat{A}) W_1(x_\nu) dx_\nu + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_\nu^T(x_\nu, \hat{A}) \dot{W}_1(x_\nu) dx_\nu. \quad (4)$$

Выделим в R_n множество l непрерывных и непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\hat{F}_\nu(x_\nu, \hat{A})$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\lim_{x_\nu \rightarrow \pm\infty} \hat{F}_\nu^T(x_\nu, \hat{A}) W_1(x_\nu) = 0.$$

Выполнение граничных условий означает, что скорость спадания периферийной части ПВ выше, чем скорость роста функции измерения. Этим условиям удовлетворяют различные виды полиномиальных многочленов, например, степенной. Тогда, для функций $\hat{F}_\nu^T(x_\nu, \hat{A}) \in l$ выражение (4) перепишется в окончательном виде

$$J(\hat{A}) = E \left[\hat{F}_\nu^2(x_\nu, \hat{A}) - 2 \frac{d}{dx_\nu} \hat{F}_\nu^T(x_\nu, \hat{A}) \right] = \min. \quad (5)$$

Покажем, что критерий (5) действительно приводит к выражению вектор-функции $\hat{F}_\nu(x_\nu, \hat{A})$ в виде (2). Для этого используем уравнение Эйлера [6], являющееся необходимым условием существования экстремума $J(\hat{A})$

$$\left(\frac{d}{d\hat{F}_\nu^T(x_\nu, \hat{A})} - \frac{d}{dx_\nu} \cdot \frac{d}{d \left[\frac{d\hat{F}_\nu(x_\nu, \hat{A})}{dx_\nu} \right]} \right) Q(x_\nu, \hat{A}) = 0,$$

где $Q(x_\nu, \hat{A}) = \left[\hat{F}_\nu^2(x_\nu, \hat{A}) - 2 \frac{d}{dx_\nu} \hat{F}_\nu^T(x_\nu, \hat{A}) \right] W_1(x_\nu)$ — подынтегральное выражение функционала качества.

Подставляя (5) в условие экстремизации, получим уравнение

$$\hat{F}_\nu(x_\nu, \hat{A}) W_1(x_\nu) + \dot{W}_1(x_\nu) = 0,$$

единственным решением которого является зависимость

$$\hat{F}_\nu(x_\nu, \hat{A}) = -\frac{d}{dx_\nu} \ln W_1(x_\nu).$$

Найденный критерий качества вытекает из известного критерия минимального расстояния, однако отличается от него тем, что получен при условии минимизации измерительных потерь информации или максимизации информации о ПВ, содержащейся в выборке x . В дальнейшем, поэтому, будем называть (5) критерием минимакса информации (ММИ).

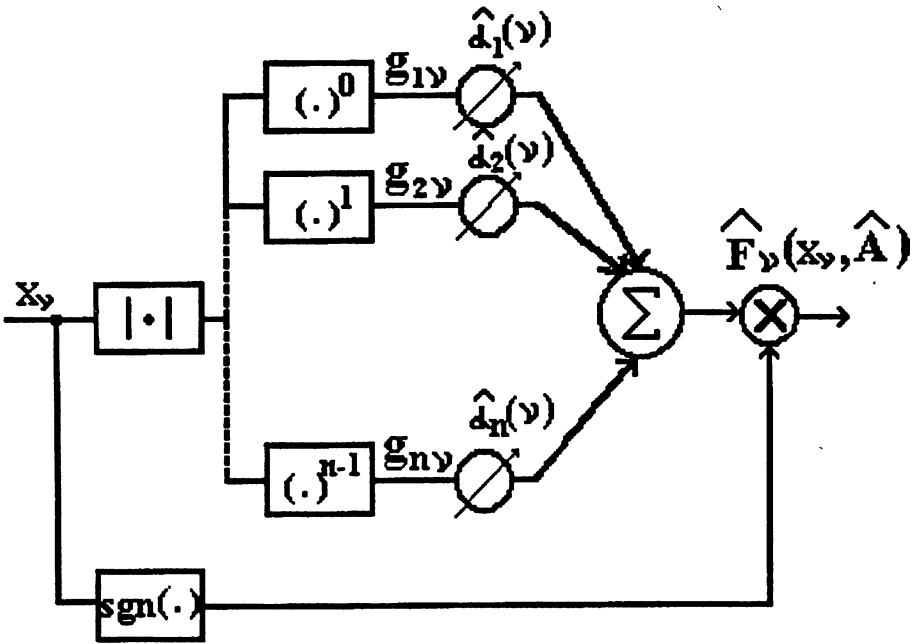


Рис. 1.

ОПТИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ

Из (2) следует, что при симметрии закона распределения случайной величины ξ функции F_ν и \hat{F}_ν являются нечётными. Для подобного класса целесообразно воспользоваться представлением функции измерения в виде степенного ряда

$$\hat{F}_\nu(x_\nu, \hat{A}) = \text{sgn } x_\nu \sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i(\nu) |x_\nu|^{i-1} = \hat{A}_\nu^T G_\nu \text{sgn } x_\nu, \tag{6}$$

где $G_\nu = \|g_{1\nu}, \dots, g_{n\nu}\|^T$ — n -мерный вектор-полином от ν -го отсчёта выборки x , а $g_{i\nu} = |x_\nu|^{i-1}$ — базисная степенная функция. Структурная схема формирования полиномиальной функции измерения (6) изображена на рис. 1, а оценка ПВ, получаемая подстановкой (6) в (3), имеет вид

$$W_1(x_\nu) = W_1(0) \exp\left\{-\hat{A}_\nu^T \int G_\nu \text{sgn } x_\nu dx_\nu\right\} = W_1(0) \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{\hat{\alpha}_i(\nu)}{i} |x_\nu|^i\right\}. \tag{7}$$

Для нахождения оптимальной по критерию ММИ оценки вектора состояния $\hat{A}_{\nu \text{opt}}$ приведём выражение мгновенной ошибки под знаком усреднения (5)

$$e_\nu = \hat{A}_\nu^T G_\nu G_\nu^T \hat{A}_\nu - 2 \frac{d}{dx_\nu} G_\nu^T \hat{A}_\nu \operatorname{sgn} x_\nu = \hat{A}_\nu^T G_\nu G_\nu^T \hat{A}_\nu - \\ - 2\delta(x_\nu) G_\nu^T \hat{A}_\nu - 2 \operatorname{sgn} x_\nu \frac{d}{dx_\nu} G_\nu^T \hat{A}_\nu.$$

Эта ошибка является квадратичным функционалом вектора состояния, т.е. удовлетворяет условиям выпуклости (вогнутости) рабочей функции измерения. Усредняя ошибку и вычисляя градиент её среднего значения по вектору состояния

$$\nabla = \left\| \frac{\partial E(e_\nu)}{\partial \hat{\alpha}_{1\nu}}, \dots, \frac{\partial E(e_\nu)}{\partial \hat{\alpha}_{n\nu}} \right\|^T = 2 \left[\hat{A}_\nu^T E(G_\nu G_\nu^T) - W_1(0) G_\nu^T(0) - \right. \\ \left. - E \left(\operatorname{sgn} x_\nu \frac{d}{dx_\nu} G_\nu \right) \right],$$

а затем, транспонируя и приравнявая к нулю полученное выражение, приходим к векторному уравнению относительно $\hat{A}_{\nu \text{opt}}$

$$E(G_\nu G_{\nu \text{opt}}^T) \hat{A}_{\nu \text{opt}} = W_1(0) G_\nu^T(0) + E \left(\operatorname{sgn} x_\nu \frac{d}{dx_\nu} G_\nu \right), \quad (8)$$

где

$$G_\nu(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \frac{d}{dx_\nu} G_\nu = \begin{Bmatrix} 0 \cdot |x_\nu|^{-1} \\ 2 \cdot |x_\nu|^1 \\ \vdots \\ (n-1) |x_\nu|^{n-2} \end{Bmatrix} \cdot \operatorname{sgn} x_\nu.$$

Отметим, что при одинаковости законов распределения отдельных отсчетов x входящие в (8) ансамблевые средние не зависят от номера ν . Это означает, что независимым от ν является и оптимальное значение вектора состояния $\hat{A}_{\nu \text{opt}} = \hat{A}_{\text{opt}}$. Второй особенностью (8) является то, что для ряда распределений усреднённое значение верхнего элемента вектора $\operatorname{sgn} x_\nu \cdot \frac{d}{dx_\nu} G_\nu$ обращается в бесконечность. По этой причине использование (8) для оценки произвольной статистики ξ ограничено и потому нецелесообразно.

Для расширения области применения (8) умножим ошибку на $|x_\nu|$. Как несложно показать, вследствие подобного домножения величина $E[|x_\nu| \delta(x_\nu) G_\nu^T]$ тождественно обращается в нуль, а получаемое при этом уравнение оптимизации сводится к виду

$$E \left[|x_\nu| G_\nu G_\nu^T \hat{A}_{\text{opt}} - \frac{d}{d|x_\nu|} (|x_\nu| G_\nu) \right] = 0, \quad (9)$$

не имеет особенностей и приводит к оптимальному решению

$$\hat{A}_{\text{opt}} = M^{-1}\Phi, \quad (10)$$

где

$$M = E(|x_\nu| G_\nu G_\nu^T) = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_2 & m_3 & \dots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \dots & m_{2n-1} \end{vmatrix} -$$

невыврожденная симметрическая матрица моментов размером $n \cdot n$;

$$\Phi = E\left(\frac{d}{d|x_\nu|} |x_\nu| G_\nu\right) = \begin{vmatrix} m_0 \\ 2m_1 \\ \vdots \\ nm_{n-1} \end{vmatrix} -$$

вектор свободных членов, а $m_i = E(|x_\nu|^i)$ — i -й начальный момент распределения модуля случайной величины.

В качестве примеров использования (5) для полиномиального оценивания ПВ рассмотрим случаи простейших показательно-целочисленных распределений: нормального $W_1(x_\nu) = (2\pi\sigma^2)^{-0,5} \exp\left(-\frac{x_\nu^2}{2\sigma^2}\right)$ и лапласовского $W_1(x_\nu) = (2\sigma^2)^{-0,5} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}|x_\nu|\right)$. В первом случае матрица моментов M образована из элементов $m_i = \frac{(2\sigma^2)^{0,5i}}{(\pi)^{0,5}} \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)$, во втором — из $m_i = \frac{\sigma^i}{(2)^{0,5i}} \Gamma(i+1)$. При $n = 3$ векторно-матричное уравнение (10) запишется в следующем виде: для нормальной ПВ

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma & \sigma^2 & 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^3 \\ \sigma^2 & 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^3 & 3\sigma^4 \\ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^3 & 3\sigma^4 & 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^5 \end{vmatrix} \hat{A}_{\text{opt}} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \\ 3\sigma^2 \end{vmatrix};$$

для лапласовской ПВ

$$\begin{vmatrix} \frac{\sigma}{\sqrt{2}} & \sigma^2 & \frac{3\sigma^3}{\sqrt{2}} \\ \sigma^2 & \frac{3\sigma^3}{\sqrt{2}} & 6\sigma^4 \\ \frac{3\sigma^3}{\sqrt{2}} & 6\sigma^4 & \frac{30\sigma^5}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \hat{A}_{\text{opt}} = \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{2}\sigma \\ 3\sigma^2 \end{vmatrix}.$$

Находя соответствующие решения этих уравнений

$$\hat{\mathbf{A}}_{\text{opt}} = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \sigma^2 \\ 0 \end{array} \right\|, \quad \hat{\mathbf{A}}_{\text{opt}} = \left\| \begin{array}{c} \sqrt{2} \\ \sigma \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\|$$

и подставляя их в (7), получаем полное совпадение результатов оптимальной полиномиальной оценки с измеряемой ПВ.

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

В случае неизвестных \mathbf{M} и Φ вектор состояния измерителя может быть найден из (9) методом стохастической аппроксимации [6] путём последовательных итераций $\hat{\mathbf{A}}(1), \hat{\mathbf{A}}(2), \dots$ в дискретном времени ν

$$\hat{\mathbf{A}}(\nu) = (\mathbf{I} - \Gamma_\nu |x_\nu| \mathbf{G}_\nu \mathbf{G}_\nu^T) \hat{\mathbf{A}}(\nu - 1) + \Gamma_\nu \frac{d}{d|x_\nu|} (|x_\nu| \mathbf{G}_\nu), \quad (11)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, Γ_ν — вектор переменных коэффициентов, определяющих скорость сходимости алгоритма, часто называемый в литературе переменным шагом адаптации.

В соответствии с (11), структурная схема оценщика k -ой компоненты вектора состояния (рис. 2)

$$\hat{\alpha}_k(\nu) = \hat{\alpha}_k(\nu - 1) - \Gamma_k(\nu) |x_\nu|^k \left[\sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i(\nu - 1) |x_\nu|^{i-1} - k |x_\nu|^{-1} \right]$$

включает в себя часть формирователя функции измерения (рис. 1) и цепь адаптивной настройки этой компоненты.

При независимом от времени шаге адаптации $\Gamma_\nu = \Gamma = \text{const}$ и выполнении условий устойчивости алгоритма, последовательность итераций (11) в среднем сходится к оптимальному вектору (10). Покажем это, предполагая, что при значительной инерционности устройства ($N \gg 1$) закон распределения компонент $\hat{\mathbf{A}}(N)$ достаточно близок к гауссовому, а сам векторный процесс $\hat{\mathbf{A}}(\nu)$ статистически не связан с принятой выборкой \mathbf{x} . Действительно, в рамках принятого предположения первый момент (11) равен

$$\begin{aligned} E[\hat{\mathbf{A}}(\nu)] &= [\mathbf{I} - \Gamma E(|x_\nu| \mathbf{G}_\nu \mathbf{G}_\nu^T)] E[\hat{\mathbf{A}}(\nu - 1)] + \Gamma E \left[\frac{d}{d|x_\nu|} (|x_\nu| \mathbf{G}_\nu) \right] = \\ &= (\mathbf{I} - \Gamma \mathbf{M}) E[\hat{\mathbf{A}}(\nu - 1)] + \Gamma \Phi. \end{aligned}$$

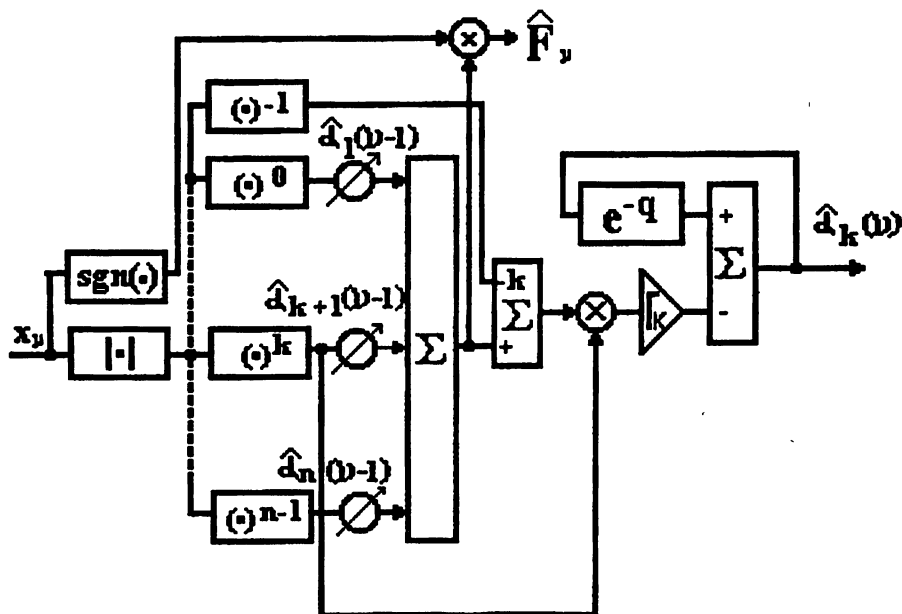


Рис. 2.

Переходя в последнем уравнении от временной к операторной форме, получим

$$E[\hat{A}^*(q)] = (e^q - I + \Gamma M)^{-1} \Gamma \Phi e^q, \quad (12)$$

откуда следует, что при обеспечении устойчивости системы по первому моменту его установившееся значение равно

$$E[\hat{A}^*(0)] = M^{-1} \Phi = \hat{A}_{\text{opt}}.$$

Таким образом, итерационный алгоритм (11) оптимален в среднестатистическом смысле, т.к. обеспечивает сходимость первого момента вектора состояния к оптимальному значению.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА

Динамические свойства первого момента определяются собственными значениями характеристического многочлена

$$\det \begin{vmatrix} e^q - 1 + \Gamma_1 m_1 & \Gamma_1 m_2 & \dots & \Gamma_1 m_n \\ \Gamma_2 m_2 & e^q - 1 + \Gamma_2 m_3 & \dots & \Gamma_2 m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_n m_n & \Gamma_n m_{n+1} & \dots & e^q - 1 + \Gamma_n m_{2n-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Поскольку характеристическая матрица не диагонализирована, нахождение её собственных значений для $n > 2$ представляет трудно разрешимую задачу.

Методам вычисления собственных значений и векторов характеристических матриц уделяется достаточное внимание в литературе (например, [2, 7]). Сюда относятся классический метод Гаусса, методы, основанные на подобном преобразовании матриц, различные интерполяционные и итерационные процедуры и т.д. Физическая сущность этих методов состоит в сведении процедуры многоканального взаимозависимого поиска компонент вектора состояния к совокупности из n независимых управлений.

Один из возможных аппаратных методов временного разделения управлений состоит в покоординатном поиске экстремума [7], широко используемом при настройке многоэлементных фазированных антенных решёток [8]. Известно, что величина ошибки e , в зависимости от величины координат вектора состояния изображается в виде линий (поверхностей) постоянного уровня с центром, соответствующим оптимальному значению \hat{A}_{opt} (рис. 3 при $n = 2$).

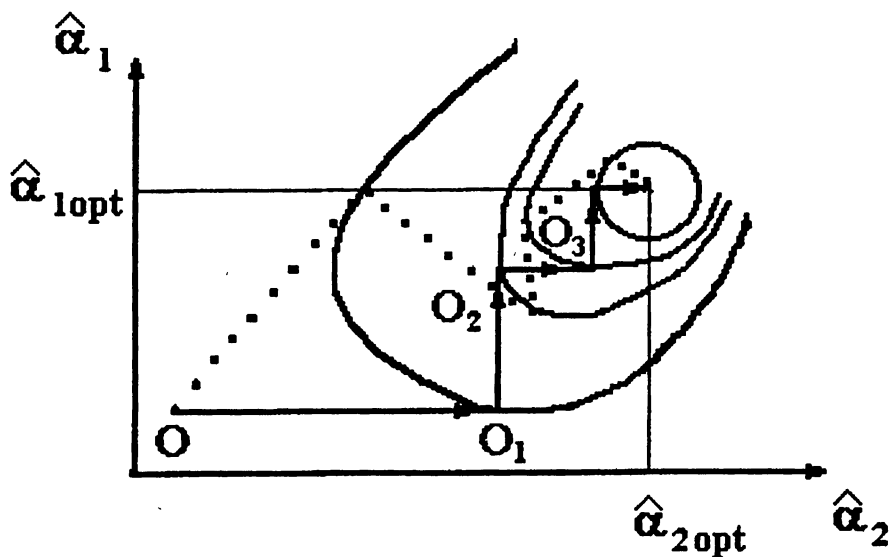


Рис. 3.

Предположим: начальные условия соответствуют точке O . Из O производится поиск минимума ошибки путём фиксации $\hat{\alpha}_1$ и оптимизации $\hat{\alpha}_2$. Геометрически это соответствует поиску линии OO_1 — касательной к линии постоянного уровня параллельно оси $\hat{\alpha}_2$. Затем, путём фиксации $\hat{\alpha}_2$ и оптимизации $\hat{\alpha}_1$ проводится касательная O_1O_2 к линии с меньшим постоянным уровнем и т.д. В конце концов покоординатный спуск при-

водит к точке абсолютного минимума $\hat{\alpha}_{1 \text{opt}}, \hat{\alpha}_{2 \text{opt}}$. Данный пример легко обобщается на случай многопараметрического управления. На этом же рисунке точками показана траектория наискорейшего спуска [7], требующая несколько меньшего времени, чем ранее рассмотренная процедура.

Таким образом, покоординатный поиск экстремума приводит к тому, что в каждый момент времени осуществляется настройка только одной из координат управляющего вектора, остальные координаты при этом сохраняются постоянными. Это даёт возможность представить в (12) произведение $(e^q - I + \Gamma M)E[\hat{A}^*(q)]$ в виде суммы нестационарной и стационарной составляющих, причём нестационарная часть диагонализируется, а стационарная включает все зафиксированные координаты управляющего вектора. При этом операторное уравнение (12) принимает вид

$$(e^q - I + \Gamma/\backslash)E[A^*(q)] = -\Gamma(M - /\backslash)E[A^*(0)] + \Gamma\Phi e^q, \quad (14)$$

где

$$\backslash = \left\| \begin{array}{cccc} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{2n-1} \end{array} \right\| \quad \text{— диагональная моментная матрица,}$$

а $M - /\backslash$ — моментная матрица, отличающаяся от (10) нулевой главной диагональю.

Из (14) следует, что динамические свойства первого момента при покоординатном спуске описываются новым характеристическим полиномом

$$\det(e^q - I + \Gamma/\backslash) = \prod_{i=1}^n (e^q - 1 + \Gamma_i m_{2i-1}) = 0. \quad (15)$$

Анализ собственных чисел $\lambda_i = \ln |1 - \beta_i|$ этого полинома позволяет найти переходные и установившиеся значения решения

$$\begin{cases} E[\hat{\alpha}_i(\nu)]_{\text{пер.}} = C_i(1 - \beta_i)^\nu, \\ E[\hat{\alpha}_i]_{\text{уст.}} = \Delta^{-1} \Delta_i, \end{cases} \quad (16)$$

безразмерные постоянные времени установления

$$N_{1i} = -\ln^{-1} |1 - \beta_i|, \quad (17)$$

а также определить условия его устойчивости

$$0 < \beta_i < 2.$$

В приведённых выражениях использованы обозначения: $\beta_i = \Gamma_i m_{2i-1}$ — обобщённый коэффициент усиления i -й петли управления, C_i — начальные условия, $\Delta = \det |M|$, Δ_i — определитель, получаемый заменой i -го столбца матрицы M на столбец свободных членов.

Как следует из (16), (17), при $0 < \beta_i < 1$ переходный процесс является монотонно спадающим, а время установления уменьшается с увеличением β_i и достигает нулевого значения при $\beta_i = 1$. Дальнейший рост обобщённого коэффициента усиления ($1 < \beta_i < 2$) приводит к колебательному характеру установления переходного процесса и возрастанию N_{1i} до бесконечности (срыв устойчивости) при $\beta_i = 2$ (рис. 4).

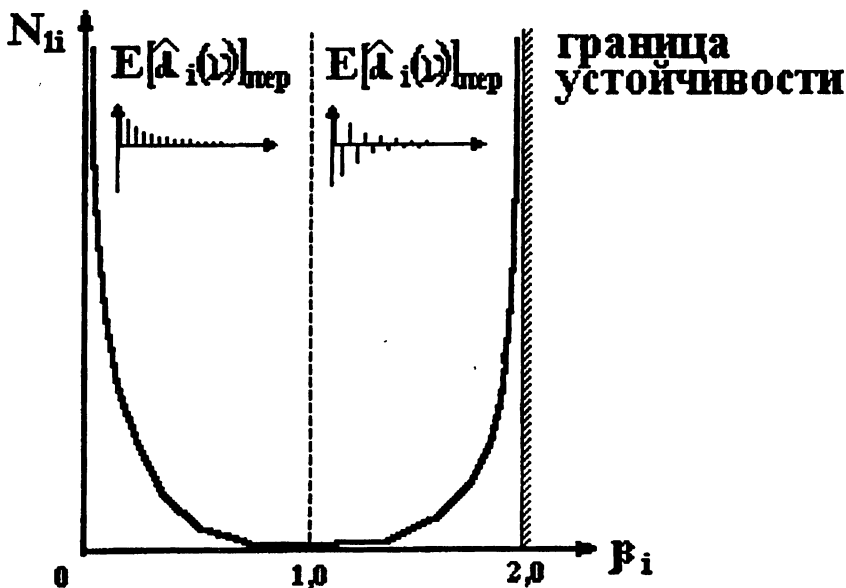


Рис. 4.

Из рисунка видно, что условия устойчивости по первому моменту не препятствуют достижению в обучающейся системе любого, сколь угодно высокого быстродействия. Однако, характеристики первого момента не являются исчерпывающими для анализа сходимости вектора состояния. Исследуем, поэтому, наряду с поведением среднего значения, динамику второго момента $\hat{A}(\nu)$. Для этого представим в (11) случайную матрицу $|x_\nu|G_\nu G_\nu^T$ в виде суммы диагональной и остаточной матриц, а диагональную — в виде суммы усреднённой \backslash и центрированной диагональной

$$\tilde{\mu}_\nu = \left\| \begin{array}{cccc} |x_\nu| - m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |x_\nu|^3 - m_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |x_\nu|^{2n-1} - m_{2n-1} \end{array} \right\|.$$

Тогда, при покоординатном поиске экстремума, когда все управления, кроме диагональных, не зависят от текущего времени, алгоритм (11) переписывается

$$\hat{A}(\nu) = (\mathbf{I} - \Gamma \backslash) \hat{A}(\nu - 1) - \Gamma \tilde{\mu}_\nu \hat{A}(\nu - 1) + \Gamma \Psi_\nu, \quad (18)$$

где $\Psi_\nu = \frac{d}{d|x_\nu|}(|x_\nu|G_\nu) - (|x_\nu|G_\nu G_\nu^T - \lambda - \tilde{\mu}_\nu)\hat{A}(N)$ — стационарный вектор свободных членов.

Взяв от обеих частей (18) дискретное преобразование Лапласа L_q , переноса в левую часть уравнения члены, содержащие $\hat{A}^*(q)$, вводя обратную диагональную матрицу

$$\mathbf{H}^*(q) = [e^q - \mathbf{I} + \Gamma/\lambda]^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{e^q - 1 + \Gamma_1 m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{e^q - 1 + \Gamma_n m_{2n-1}} \end{array} \right\|$$

и снова переходя к оригиналам, получим

$$\hat{A}(\nu) = -\Gamma \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} [\tilde{\mu}_r \mathbf{H}_{\nu-r}^T \hat{A}(r) - \mathbf{H}_{\nu-r}^T \Psi_r] \right\}. \quad (19)$$

Векторно-матричное уравнение (19) характеризует линейную нестационарную многопараметрическую систему с векторным центрированным параметром $\tilde{\mu}_\nu$ и многоканальным интегрирующим фильтром \mathbf{H}_ν , собственные числа (полюса) которого совпадают с собственными значениями характеристического полинома (15). Действительно, при статистической независимости векторов $\tilde{\mu}_\nu$ и $\hat{A}(\nu)$ усреднение (19) приводит к уравнению

$$E[\hat{A}(\nu)] = \Gamma \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{H}_{\nu-r}^T \Psi_r,$$

из которого следует зависимость динамических свойств первого момента от аналогичных свойств интегрирующего фильтра.

Вычитая из (19) среднее значение $\hat{A}(\nu)$, получим уравнение относительно центрированной составляющей вектора состояния

$$\tilde{\mathbf{a}}(\nu) = -\Gamma \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}_r \mathbf{H}_{\nu-r}^T \tilde{\mathbf{a}}(r) + \eta_\nu, \quad (20)$$

где $\eta_\nu = -\Gamma \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}_r \mathbf{H}_{\nu-r}^T E[\hat{A}(r)] - \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{H}_{\nu-r}^T [\Psi_r - E(\Psi_r)] \right\}$ — новый свободный член, объединяющий в себе все независимые от $\tilde{\mathbf{a}}(\nu)$ слагаемые.

Возводя (20) в квадрат и усредняя по ансамблю, найдём выражение для дисперсии вектора состояния \mathbf{D}_a , которая с учётом центрированности $\tilde{\mathbf{a}}$ и $\tilde{\mu}$ имеет вид

$$\mathbf{D}_a(\nu) = E(\eta_{\nu\nu}^T \eta_\nu) + \Gamma^2 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{H}_{\nu-r}^T \mathbf{R}_\mu(k-r) \mathbf{R}_a(r,k) \mathbf{H}_{\nu-k}, \quad (21)$$

где $\mathbf{R}_\mu(k - \tau) = E(\tilde{\mu}_\tau \tilde{\mu}_k)$ — симметрическая, положительно определённая корреляционная матрица вектор-параметра $\tilde{\mu}$, $\mathbf{R}_a(\tau, k) = E[\tilde{a}^T(\tau)\tilde{a}(k)]$ — нестационарная корреляционная матрица вектора состояния.

Предположим, что нестационарность вектора состояния проявляется в зависимости от времени его центральных моментов и не отражается на нормированных корреляционных свойствах [9]

$$\mathbf{R}_a(\tau, k) = \mathbf{D}_a(\tau)\rho_a(k - \tau).$$

Подставляя это выражение в (21) и переходя к изображениям в L_q , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_a^*(q) = & L_q[E(\eta_\nu^T \eta_\nu + \mathbf{D}_a^*(q) \frac{\Gamma^2}{(2\pi j)^2} \int_{c_1 - j\pi}^{c_1 + j\pi} \int_{c_2 - j\pi}^{c_2 + j\pi} \mathbf{H}^*(q_1) \mathbf{S}_\mu(q - q_1 - q_2) \times \\ & \times \mathbf{S}_a^0(q_2) \mathbf{H}^*(q - q_1) dq_1 dq_2, \end{aligned}$$

где \mathbf{S}_μ и \mathbf{S}_a^0 являются соответствующими изображениями \mathbf{R}_μ и ρ_a . Если в последнем выражении учесть ограниченность подынтегральных функций по модулю и, полагая $c_1 = c_2 = 0$, произвести замену $q_i = j\Omega_i$ ($i = 1, 2$), то при условии узкополосности обучающейся системы, по сравнению с параметрическим воздействием, из него несложно получить характеристический многочлен по второму моменту

$$\det [\mathbf{I} - \mathbf{S}_\mu(0) \frac{\Gamma^2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{H}^*(j\Omega_1) \mathbf{H}^*(q - j\Omega_1) d\Omega_1 \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{S}_a^0(j\Omega_2) d\Omega_2] = 0.$$

Так как $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{S}_a^0(j\Omega_2) d\Omega_2 = 1$, а $\mathbf{S}_\mu(0) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{R}_\mu(\tau)$ при статистической независимости выборочных значений соответствует дисперсии случайного параметра \mathbf{D}_μ , характеристический многочлен переписется в виде

$$\det [\mathbf{I} - \Gamma^2 \mathbf{D}_\mu \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{H}^*(j\Omega_1) \mathbf{H}^*(q - j\Omega_1) d\Omega_1] = 0. \tag{22}$$

В выражении (22) матрицы $\mathbf{H}^*(q)$ и

$$\mathbf{D}_\mu = \left\| \begin{array}{cccc} m_2 - m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_6 - m_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{4n-2} - m_{2n-1}^2 \end{array} \right\|$$

являются диагональными и положительно определёнными, а из вышеприведённой записи $\mathbf{H}^*(q)$ следует, что k -й элемент матрицы $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{H}^*(j\Omega_1) \cdot \mathbf{H}^*(q - j\Omega_1) d\Omega_1 = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{H}_r^T \mathbf{H}_r e^{-rq}$ расположен на её главной диагонали и равен $[e^q - (1 - \Gamma_k m_{2k-1})^2]^{-1}$. Поэтому характеристический многочлен (22) легко преобразовать к окончательному виду

$$\prod_{i=1}^n (e^q - 1 + 2\Gamma_i m_{2i-1} - \Gamma_i^2 m_{4i-2}) = 0. \quad (23)$$

Получаемые из (23) условия устойчивости второго момента запишутся в виде

$$0 < \beta_i < 2 \frac{m_{2i-1}^2}{m_{4i-2}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

и, поскольку для любого реально существующего распределения справедливо соотношение $\frac{m_{2i-1}^2}{m_{4i-2}} < 1$, эти условия оказываются более жёсткими, чем аналогичные неравенства для первого момента. Так, например, в случае гауссова закона распределения величина $\beta_{кр.}$ равна 1,273 для $i = 1$, 0,339 для $i = 2$, 0,086 для $i = 3$, 0,022 для $i = 4$. В случае лапласовского закона область устойчивости измерителя ещё более сжимается и соответствует значениям $\beta_{кр.}$: 1 при $i = 1$, 0,1 при $i = 2$, 0,0079 при $i = 3$ и 0,0006 при $i = 4$.

Переходный процесс и безразмерная постоянная времени установления второго момента в соответствии с (23) принимают вид

$$\begin{cases} [D_{ai}(\nu)]_{пер.} = B_i \left(1 - 2\beta_i + \frac{m_{4i-2}}{m_{2i}^2} \beta_i^2 \right)^\nu, \\ N_{2i} = -\ln^{-1} \left| 1 - 2\beta_i + \frac{m_{4i-2}}{m_{2i}^2} \beta_i^2 \right|, \end{cases} \quad (24)$$

где B_i — начальные условия.

Вид зависимости N_{2i} от величины обобщённого коэффициента усиления β_i для гауссовой формы ПВ и различного номера управления i приведён на рис. 5. Как видно из рисунка, стохастическая устойчивость обучающейся системы определяется устойчивостью наивысшего по порядку её управления

$$0 < \beta < 2 \min \left(\frac{m_{2i-1}^2}{m_{4i-2}} \right) = 2 \frac{m_{2n-1}^2}{m_{4n-2}}$$

Каждая из зависимостей $N_{2i}(\beta_i)$ имеет вогнутый характер с минимумом при $\beta_i = \frac{\beta_{кр.i}}{2} = \frac{m_{2i-1}^2}{m_{4i-2}}$. При этом наименьший объём выборки, требуе-

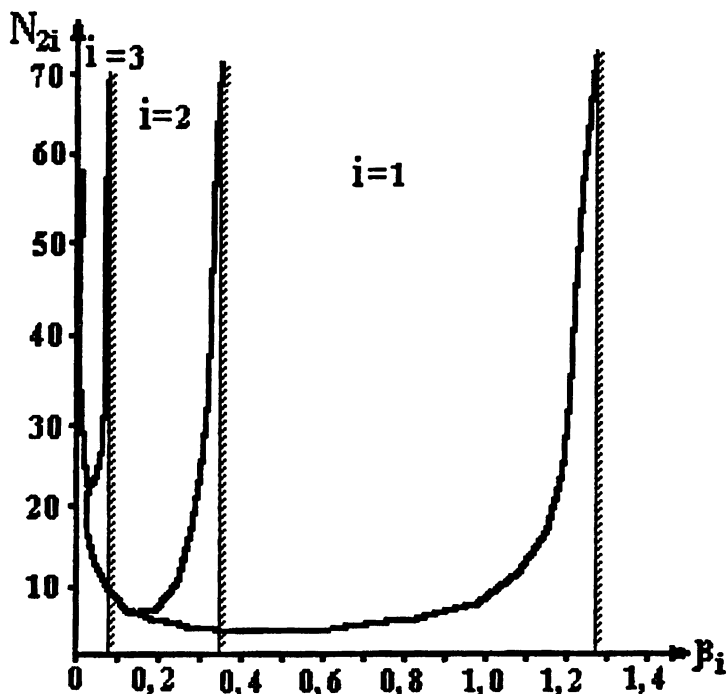


Рис. 5.

мый для установления первых двух моментов i -го управления, равен

$$(N_{2i})_{\min} = -\ln^{-1} \left| 1 - \frac{m_{2i-1}^2}{m_{4i-2}} \right| = N_{1i}.$$

Общий же минимальный объём при покоординатном поиске оптимальной оценки равен

$$N_{\min} = -\sum_{i=1}^n \ln^{-1} \left| 1 - \frac{m_{2i-1}^2}{m_{4i-2}} \right| \quad (25)$$

и в виде зависимости $\lg N_{\min}(n)$ для гауссовой и лапласовской ПВ изображён на рис. 6.

Из рисунка следует, что чем грубее измеряемая ПВ аппроксимируется целочисленной показательной-степенной зависимостью (7), т.е. чем больший порядок полинома требуется для её оценивания, тем большее время установления, а значит и больший объём выборки N нужен для получения соответствующей оценки. В то же время, аппроксимируемые без остатка ПВ (например, гауссовая или лапласовская) требуют для своего оценивания существенно меньшего объёма выборки, чем известный гистограммный метод. Для подтверждения сказанного, приведём результаты численного моделирования алгоритма (11) при $n = 3$ для гауссова и лапласовского законов распределения. В случае гауссовой ПВ достаточно высокая точность оценки (практически полное совпадение для $|x_v| < 3\sigma$ и

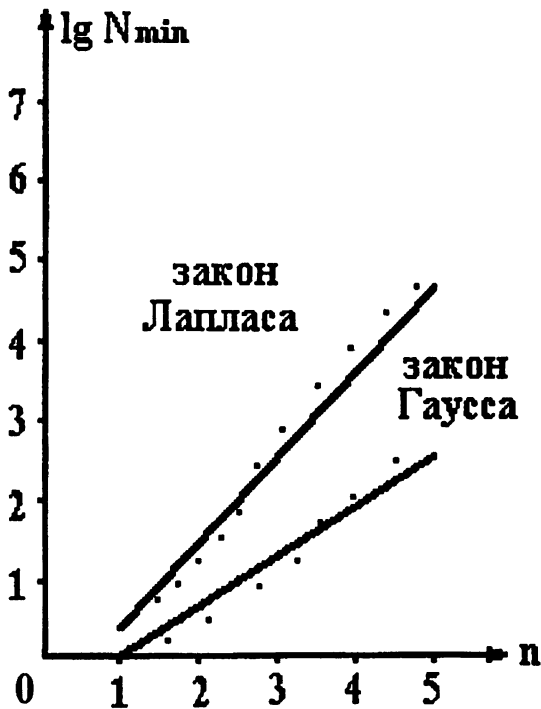


Рис. 6.

не более 12% в периферийных участках распределения) наблюдается уже для $N = 130$. При гистограммном методе оценки для достижения такой же точности требуется $N > 870$. В случае лапласовского закона для оценки методом ММИ требуется $N \approx 300$ против $N \geq 2200$ для гистограммного метода. Полученные результаты (обозначены точками на рис. 6) достаточно хорошо согласуются с расчётными, характеризующими скорость спадания второго момента i -й компоненты вектора состояния в e раз по сравнению с начальными значениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 2. — М.: Сов. радио, 1968.
2. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров /Под ред. В.С.Горского. — М.: Статистика, 1979.
3. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. Т. 2. — М.: Сов. радио, 1962.
4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 3. — М.: Сов. радио, 1976.
5. Островский М.А., Пахомов Ю.И. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1990. Т. 33. № 6. С. 689.

6. Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1970.
7. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. Т. 1. — М.: Наука, 1976.
8. Уидроу Б., Стирнэ С. Адаптивная обработка сигналов. — М.: Радио и связь, 1989.
9. Лейких М. А., Островский М. А. //Динамика систем, межвузовский сборник. — Горький, 1979. С. 86.

Нижегородское высшее зенитное
ракетное командное училище
ПВО, Россия

Поступила в редакцию
30 января 1997 г.

POLINOMIAL ESTIMATION OF THE PROBABILITY DENSITY

M. A. Ostrovsky

We have a new merit criterion for estimation of the variate probability density. A possibility has been considered for the polinomial estimation of the criterion of an arbitrary random. The algorithm of estimation, statistical stability conditions, rate of the convergence are presented.

УДК 621.391.2

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗНАКОВЫХ И РАНГОВЫХ АЛГОРИТМОВ ОБНАРУЖЕНИЯ С ФИКСИРОВАННЫМИ ОБЪЁМАМИ ВЫБОРОК В ШУМЕ И ПОТОКЕ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЗАКОНАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

М. Н. Бирюков

Показано, что знаковый, ранговый, и бинарный ранговый обнаружители с фиксированными объёмами выборок сохраняют свойство непараметричности в условиях совместного действия шума и потока хаотических импульсных помех с произвольными законами распределений.

Получено выражение для распределения ранга в условиях воздействия шума и потока регулярных импульсных помех с произвольными законами распределений. Показано, что знаковый обнаружитель с фиксированным объёмом выборки сохраняет непараметричность в этих условиях, а ранговые обнаружители с фиксированными объёмами выборок обладают свойством квазинепаарметричности.

Согласно теории проверки статистических гипотез задача обнаружения сигналов формулируется как проверка гипотезы H_0 : наблюдаемый процесс является только помехой, против альтернативной гипотезы H_1 — этот процесс представляет собой смесь сигнала с помехой. Иными словами, задача обнаружения представляет собой статистическую задачу различения двух типов распределений — гипотетического $G(x)$ и альтернативного $F(x)$.

Для решения задачи о принадлежности результатов независимых наблюдений тому или другому распределению служат широко известные критерии согласия: Колмогорова, Реньи, Крамера–Мизеса и др. [1]. Однако, данные критерии согласия, позволяя уловить незначительные различия между $G(x)$ и $F(x)$, требуют сравнительно большого числа наблюдений и сложны в вычислительном отношении.

Для наиболее распространённых в радиотехнических приложениях альтернатив, таких как альтернатива сдвига $F(x) = G(x - a)$, где a — некоторая постоянная, альтернатива масштаба $F(x) = G(x/a)$ или альтернатива более общего вида $F(x) < G(x)$, проще и часто эффективнее оказывается применение правил, основанных на знаковых и ранговых статистиках [2].

В современных задачах обнаружения сигналов при априорной неопределённости всё большее применение находят непараметрические методы,

основанные именно на знаковых и ранговых статистиках. Известно, что статистический метод называется непараметрическим, если его применение не предполагает знания функционального вида распределений. Обнаружитель принято называть непараметрическим, если он обеспечивает стабилизацию вероятности ложной тревоги α независимо от статистических характеристик помехи. При этом полагается, что помеха либо однородная, либо представляет собой смесь шума и хаотических импульсных помех (ХИП) с произвольными параметрами [2]. В условиях воздействия потока регулярных импульсных помех (РИП) совместно с шумом непараметричность знакового обнаружителя сохраняется, а ранговые обнаружители обладают свойством квазинепаарметричности, которое состоит в том, что отклонение реализуемой вероятности ложной тревоги от своего расчётного значения незначительно, т.е. ранговые обнаружители в этих условиях "почти" непараметрические. Это показано в [2] для потока РИП произвольной длительности.

Целью настоящей работы является исследование совместного влияния шума и потока хаотических импульсных помех, а также смеси шума и потока регулярных импульсных помех с произвольными законами распределений на знаковый (ЗО), ранговый (РО) и бинарный ранговый (БРО) обнаружители с фиксированными объёмами выборок.

Статистика двухвыборочного знакового обнаружителя (одна из наиболее простых) основана на подсчёте знаков разностей пар наблюдений помехошумовой y_1, y_2, \dots, y_n и исследуемой x_1, x_2, \dots, x_n выборок [2]

$$S_h = \sum_{i=1}^n h(x_i - y_i), \quad h(x_i - y_i) = \begin{cases} 1, & x_i > y_i, \\ 0, & x_i < y_i, \end{cases} \quad (1)$$

где n — число наблюдений (фиксированный объём выборки), $h(x_i - y_i)$ — индикатор инверсий (превышений x_i над y_i).

Более мощными оказываются ранговые статистики, которые в отличие от знаковых учитывают не только факт, но и степень отклонения элементов исследуемой выборки от некоторого уровня или элементов опорной выборки [1, 2].

Решающая статистика рангового обнаружителя (основанного на сумме рангов) строится на векторе ранговой выборки $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ [2]

$$S_r = \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h(x_i - y_{ij}), \quad h(x_i - y_{ij}) = \begin{cases} 1, & x_i > y_{ij}, \\ 0, & x_i < y_{ij}, \end{cases} \quad (2)$$

где y_{ij} — элементы опорной (помехошумовой) выборки, m — размер опорной (помехошумовой) выборки.

Переход к бинарному квантованию рангов значительно упрощает вычислительные операции, хотя и приводит к некоторой потере информа-

ции. Так, бинарный ранговый обнаружитель основан на решающей статистике суммы бинарно квантованных рангов k_i [2]

$$S_k = \sum_{i=1}^n k_i, \quad k_i = \begin{cases} 1, & r_i > C_1, \\ 0, & r_i \leq C_1, \end{cases} \quad (3)$$

где $C_1 = (0,75-0,9)m$ — порог квантования.

Полагаем, что при справедливости гипотезы H_0 в приёмном тракте действует аддитивная смесь шума и потока ХИП с произвольными законами распределений.

Предполагаем, что шум представляет собой стационарный (по крайней мере, в пределах длительности нескольких десятков интервалов разрешения) однородный случайный процесс, порождённый внутренним шумом приёмника или шумовой активной помехой.

Поток ХИП представляет пуассоновский (простейший) поток, средние период повторения T и длительность $\tau_{\text{н}}$ импульсов которого кратны величине интервала разрешения Δt (определяемого длительностью импульса полезного сигнала)

$$T = q\Delta t, \quad \tau_{\text{н}} = l\Delta t, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad l = 1, 2, \dots$$

Хаотическая импульсная помеха — наиболее общий случай импульсной помехи. Известно, что наложение 4–5 регулярных потоков приводит к потоку, близкому к простейшему [3]. Поэтому наложение 4–5 потоков РИП приводит практически к пуассоновскому потоку ХИП.

Пуассоновский поток обладает, как известно, свойством отсутствия последействия. Это значит, что вероятность появления импульса помехи в каком-либо интервале разрешения не зависит от появления импульсов в других интервалах и для импульсов ХИП длительностью $\tau_{\text{н}}$ определяется

$$\gamma = \frac{\tau_{\text{н}}}{T} = \frac{l}{q},$$

т.к. физически импульсы ХИП при больших γ , характерных для практики, например, радиолокации, перекрывать не могут [4].

Будем также полагать, что пуассоновский поток ХИП обладает свойством ординарности [3], которое состоит в том, что вероятность одновременного появления двух и более импульсов помехи в интервале разрешения — бесконечно малая величина по сравнению с вероятностью появления одного помехового импульса.

Полагаем, что амплитуда импульсов потока ХИП $U_{\text{н}}$ случайная и имеет произвольное распределение.

Отношение помеха/шум выражается

$$b = \frac{\sigma_{\text{н}}^2}{\sigma_{\text{ш}}^2},$$

где $\sigma_n^2, \sigma_{ш}^2$ — дисперсии помехи и шума соответственно.

Поскольку шум имеет место во всех интервалах разрешения, а ХИП может иметь место в интервале разрешения с вероятностью γ , то функцию распределения отсчёта в “пустом” интервале (где полезный сигнал отсутствует), т.е. при гипотезе H_0 , можно в соответствии с формулой полной вероятности записать в виде составного распределения

$$G(x) = (1 - \gamma)G_1(x) + \gamma G_2(x), \quad (4)$$

где $G_1(x), G_2(x)$ — функции произвольных распределений огибающих шума и смеси ХИП с шумом соответственно.

Следует отметить, что при конкретных распределениях $G_1(x)$ и $G_2(x)$ параметры шума $\sigma_{ш}^2$ и помехи b входят в выражения для этих распределений [2].

Существенным здесь является то, что отсчёты помехи в любых двух интервалах разрешения можно считать независимыми (при больших γ). Это следует из независимости отсчётов шума и свойства отсутствия последствия пуассоновского потока ХИП. Поэтому можно воспользоваться известным выражением для распределения ранга при гипотезе H_0 [2]

$$P(r/H_0) = \binom{m}{r} \int G^r(x)[1 - G(x)]^{m-r} dG(x) = \frac{1}{m+1}, \quad (5)$$

где $\binom{m}{r}$ — число сочетаний из m по r , $G(x)$ — составная функция распределения вида (4).

Выражение (5) может быть получено путём следующих рассуждений. Вероятность того, что из m независимых отсчётов y_1, y_2, \dots, y_m r окажутся меньшими некоторого фиксированного x , а остальные $m - r$ — большими x , равна

$$\binom{m}{r} G^r(x)[1 - G(x)]^{m-r}.$$

Для случайного значения x вероятность такого события может быть получена усреднением этого выражения по распределению $G(x)$, т.е. с весом $dG(x)$, что и приводит к (5). Интегрирование в (5) производится по области определения составной функции распределения, т.е. от 0 до 1. Представив выражение для $P(r/H_0)$ через гамма-функции, нетрудно убедиться, что $P(r/H_0) = 1/(m+1)$.

Отметим, что с точки зрения вычисления ранга ХИП со средней длительностью импульсов $\tau_n = l\Delta t$ и средним периодом их повторения $T = q\Delta t$ эквивалентна помехе с $\tau_n = \Delta t$, но со средним периодом повторения $T = (q/l)\Delta t$. Иными словами, импульс помехи можно мысленно

полагать разбитым на l единичных рассредоточенных по опорной выборке импульсов с соответствующим средним периодом следования.

Выражение (5) доказывает независимость распределения ранга от составной функции распределения $G(\mathbf{x})$, т.е. от законов распределений шума и смеси потока ХИП с шумом. Следовательно, распределения решающих статистик РО (2) и БРО (3) не зависят от $G(\mathbf{x})$, т.к. эти статистики являются функциями ранга r . Это значит, что ранговые обнаружители обладают свойством непараметричности.

Знаковый обнаружитель (1), являясь частным случаем РО при $m = 1$, также сохраняет инвариантность по вероятности ложного обнаружения.

Будем теперь полагать, что при справедливости гипотезы H_0 в приёмном тракте действует аддитивная смесь шума и несинхронного с периодом наблюдения потока РИП с произвольными законами распределений.

Относительно шума справедливы предположения, приведённые выше.

Для модели потока регулярных импульсных помех период повторения помеховых импульсов T детерминирован (в частности, $T = \text{const}$). Будем предполагать, что период T кратен величине интервала разрешения Δt (определяемого длительностью импульса полезного сигнала), т.е. $T = q\Delta t$, где $q = 0, 1, 2, \dots$. Предположим также, что длительность импульса РИП $\tau_{\text{и}}$ кратна интервалу разрешения $\tau_{\text{и}} = l\Delta t$, где $l = 1, 2, 3, \dots$. Вероятность наличия импульса РИП в каком-либо интервале разрешения в силу несинхронности потока с периодом наблюдения, очевидно, определяется как $\gamma = \tau_{\text{и}}/T = l/q$. Будем полагать, что амплитуда импульсов РИП удовлетворяет неравенству

$$U_{\text{и}} \approx U_{\text{огр}} \gg \sigma_{\text{ш}}, \quad (6)$$

где $U_{\text{огр}}$ — уровень нежёсткого ограничения приёмника.

В силу несинхронности потока РИП с периодом наблюдения возможно q равновероятных случаев расположения потока относительно исследуемого канала \mathbf{z} и m опорных (помехозумовых) каналов $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m$.

Рассмотрим два несовместимых события: событие А, когда в исследуемом канале отсутствует импульс помехи, и событие В, когда импульс помехи имеется в этом канале. В свою очередь, событие А распадается на три события: А', А'', А''', а событие В — тоже на три: В', В'', В'''. Событие А' соответствует расположению в опорной выборке всех помеховых импульсов за один период их повторения. Событие А''' характеризует расположение в опорной выборке всех помеховых импульсов за два и более периодов их повторения, а событие А'' соответствует оставшимся возможным расположениям помеховых импульсов в опорной выборке. Событие В'' характеризуется такими расположениями импульсов, когда, с одной стороны, в исследуемом канале \mathbf{z} присутствует первый импульс из некоторого периода повторения помеховых импульсов, а, с другой стороны, за пределами опорной выборки находится последний импульс из

данного или некоторого другого периода их повторения. Событие V''' соответствует расположениям помеховых импульсов так, что, с одной стороны, начало нового периода их повторения совпадает с соседним (с первым каналом опорной выборки) интервалом разрешения, при этом, с другой стороны, последний помеховый импульс из данного или одного из предыдущих периодов повторения помеховых импульсов присутствует в исследуемом канале. Оставшимся возможным расположениям помеховых импульсов соответствует событие V' .

Возможны четыре ситуации расположений помеховых импульсов согласно событиям А и В: 1) $m - Kq < l$, $q < \left\lfloor \frac{m+l}{K+1} \right\rfloor$ [для события V' , $q \leq \left\lfloor \frac{m+l}{K+1} \right\rfloor$ [для события A'' , где $K = \left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor$],] [означает целую часть числа; 2) $m - Kq < l$, $q \geq \left\lfloor \frac{m+l}{K+1} \right\rfloor$ [для события V' , $q > \left\lfloor \frac{m+l}{K+1} \right\rfloor$ [для события A'' ; 3) $m - Kq \geq l$, $q = \left\lfloor \frac{m+l}{K+1} \right\rfloor$ [для событий V' и A'' ; 4) $m - Kq \geq l$, $q \neq \left\lfloor \frac{m+l}{K+1} \right\rfloor$ [для событий V' и A'' . Для упрощения математических выкладок величина Δt принята за единицу, поэтому $T = q$ и $\tau_n = l$.

На рис. 1 приведены характерные расположения событий А и В для ситуации 1 (отрезками вертикальных линий показаны помеховые импульсы, сплошной волнистой линией — шум). Слева (около фигурных скобок) указано число возможных случаев расположения помеховой последовательности, а справа — пределы изменения ранга для каждого расположения. Например, для события V''' возможно $m + l - (K + 1)q + 1$ расположений, а значения ранга находятся в пределах $r = (K + 1)(q - l) \div m$.

При нахождении распределений ранга $P(r/H_0)$ удобно воспользоваться диаграммами, одна из которых представлена на рис. 2 (см. ситуацию 1). Диаграммы строятся на основании соответствующих случаев расположений помеховых импульсов для событий А и В. С помощью диаграмм можно видеть, какие значения могут принимать ранги различных событий A' , A'' , A''' , V' , V'' , V''' расположения импульсов помехи относительно опорной выборки. Пределы значений ранга для соответствующего события показаны отрезками вертикальных линий. Так, например, из рис. 2 следует, что для события V''' значение, которое может принимать ранг, лежит в пределах от $(K + 1)(q - l)$ до m , а распределение ранга

$$P(r/H_0) = \frac{1}{m - (K + 1)(q - l) + 1}.$$

Пронзведём анализ четырёх указанных ситуаций, имея в виду, что формула полной вероятности ранга записывается

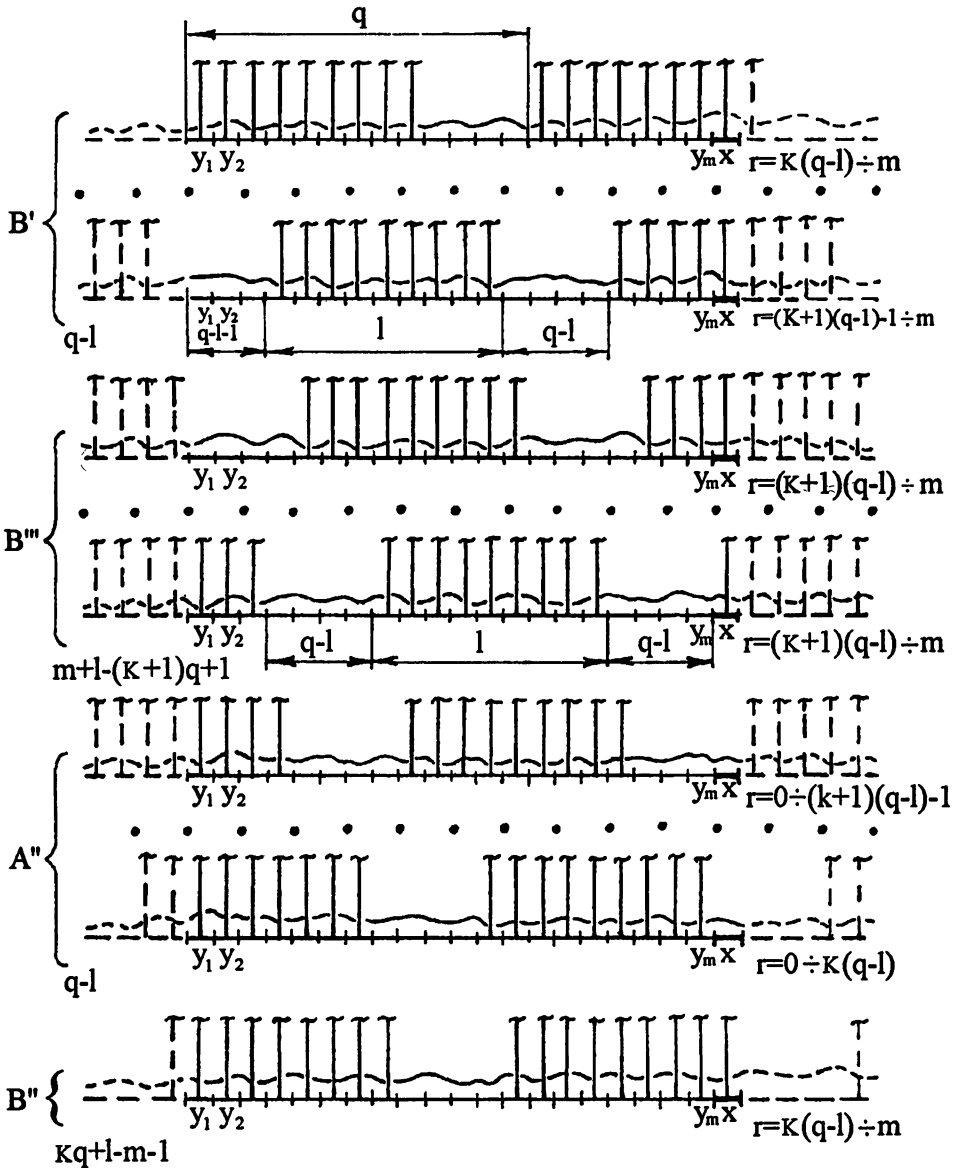


Рис. 1.

$$\begin{aligned}
 P(\tau/H_0) &= \sum_i P(\tau/A_i')P(A_i') + \sum_i P(\tau/A_i'')P(A_i'') + \sum_i P(\tau/A_i''')P(A_i''') + \\
 &+ \sum_i P(\tau/B_i')P(B_i') + \sum_i P(\tau/B_i'')P(B_i'') + \sum_i P(\tau/B_i''')P(B_i''') = \\
 &= P_{A'}(\tau/H_0) + P_{A''}(\tau/H_0) + P_{A'''}(\tau/H_0) + P_{B'}(\tau/H_0) + P_{B''}(\tau/H_0) + \\
 &+ P_{B'''}(\tau/H_0).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Для первой ситуации, когда $m - Kq < l$ и $q < \frac{m+l}{K+1}$ [для события

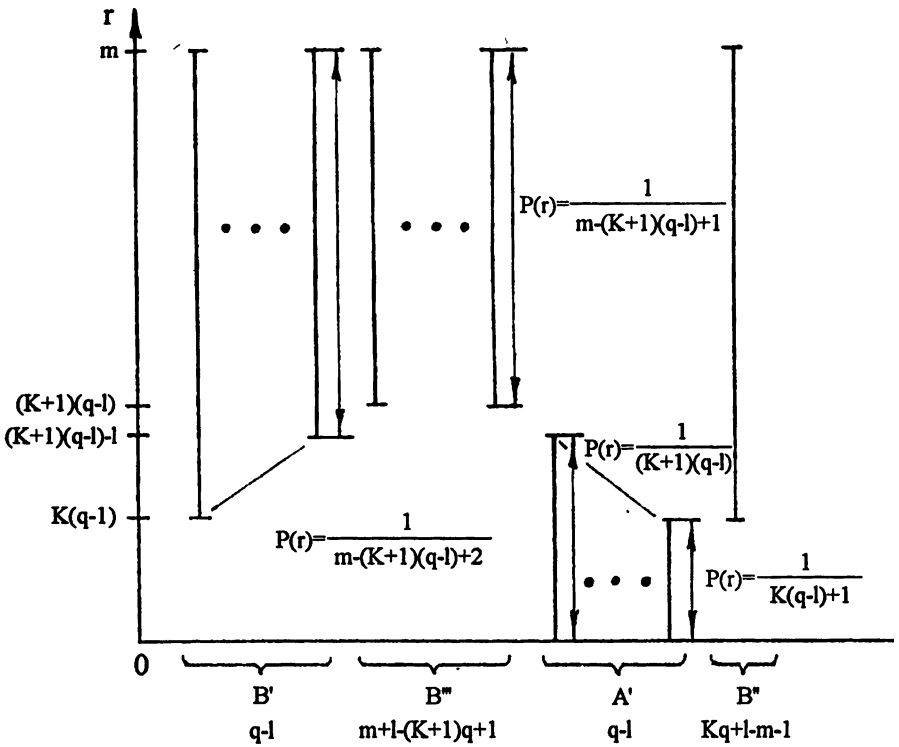


Рис. 2.

$B', q \leq \left\lfloor \frac{m+l}{K+1} \right\rfloor$ [для события A'' (см. рис. 1, 2) характерно то, что событию B' соответствует $q-l$ расположений импульсов помехи относительно опорной выборки, событию B''' — $m+l-(K+1)q+1$ расположений, событию A'' — $q-l$ расположений, событию B'' — оставшиеся $Kq+l-m-1$ расположений импульсов.

В рассматриваемом случае формула (7) имеет вид

$$\begin{aligned}
 P(r/H_0) &= \sum_{i=1}^{q-l} P(r/B'_i)P(B'_i) + \sum_{i=1}^{m+l-(K+1)q+1} P(r/B'''_i)P(B'''_i) + \\
 &\sum_{i=1}^{q-l} P(r/A''_i)P(A''_i) + \sum_{i=1}^{Kq+l-m-1} P(r/B''_i)P(B''_i) = P_{B'}(r/H_0) + \\
 &+ P_{B'''}(r/H_0) + P_{A''}(r/H_0) + P_{B''}(r/H_0), \tag{8}
 \end{aligned}$$

где очевидно, что $P(B'_i) = P(B''_i) = P(B'''_i) = P(A''_i) = 1/q$.

Найдём условные вероятности из (8), тогда для первой ситуации имеем:

$$P_{B''}(r/H_0) = \frac{1}{q} \frac{Kq+l-m-1}{m-K(q-l)+1}, \quad K(q-l) \leq r \leq m,$$

$$P_{B^m}(r/H_0) = \frac{1}{q} \frac{m+l - (K+1)q + 1}{m - (K+1)(q-l) + 1}, \quad (K+1)(q-l) \leq r \leq m, \quad (9)$$

$$P_{B^l}(r/H_0) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{q} \sum_{i=m-K(q-l)+1}^{m-r+1} \frac{1}{i}, \quad K(q-l) \leq r \leq (K+1)(q-l)-1, \\ \frac{1}{q} \sum_{i=m-(K+1)(q-l)+2}^{m-K(q-l)+1} \frac{1}{i}, \quad (K+1)(q-l) \leq r \leq m, \end{array} \right.$$

$$q < \left] \frac{m+l}{K+1} \right[;$$

$$P_{A^m}(r/H_0) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{q} \sum_{i=K(q-l)+1}^{(K+1)(q-l)} \frac{1}{i}, \quad 0 \leq r \leq K(q-l)-1, \\ \frac{1}{q} \sum_{i=(K+1)(q-l)}^{r+1} \frac{1}{i}, \quad K(q-l) \leq r \leq (K+1)(q-l)-1, \end{array} \right.$$

$$q \leq \left] \frac{m+l}{K+1} \right[.$$

Для оставшихся трёх других ситуаций расположений помеховых импульсов согласно событиям А и В математические выкладки аналогичны.

Производя соответствующую подстановку выражений, аналогичных (9), в общее выражение для распределения ранга при гипотезе H_0 (7), получаем окончательное выражение для $P(r/H_0)$ при наличии шума и потока РИП с произвольными законами распределений и произвольными длительностью l и периодом следования импульсов q . Для удобства пользования выражением результаты сводятся в табл. 1, которой следует пользоваться согласно схеме (см. рис. 3). При этом необходимо учитывать, что вероятности ранга всегда положительны, а пределы изменения ранга $0 \leq r \leq m$.

Оценим совместное влияние шума и потока РИП с произвольными законами распределений на заданную (расчётную) вероятность ложной тревоги α_1 знакового и ранговых обнаружителей с фиксированными объёмами выборок.

Легко видеть, что при $m = 1$ статистика РО (2) совпадает со статистикой ЗО (1). Поэтому для анализа знакового обнаружителя можно воспользоваться выражением для $P(r/H_0)$, см. табл. 1. Откуда получаем $P(r=0,1/H_0) = P(h=0,1/H_0) = 1/(m+1) = 1/2$ для любых параметров помехи l и q , что есть распределение ранга равномерное.

В связи с этим воспользуемся известным выражением для распределения ранга при гипотезе H_0 (5), являющимся частным случаем выражения $P(r/H_0)$, см. табл. 1. Здесь по-прежнему $G(x) = (1-\gamma)G_1(x) + \gamma G_2(x)$ —

Таблица 1

$1. \frac{1}{q} \frac{(K+1)q - m - 1}{m - K + 1} + 1, \quad 0 \leq r \leq m - K + 1$	$\frac{1}{q} \frac{m - Kq - 1 + 1}{m - (K+1) + 1}, \quad 0 \leq r \leq m - (K+1) + 1$	$\frac{1}{q} \frac{m + 1 - (K+1)q + 1}{m - (K+1)(q-1) + 1}, \quad (K+1)(q-1) \leq r \leq m$	
<p>2. $r \geq 1, \quad 0 \leq r \leq m$ (кроме $l = 1, \quad r < m - K$)</p>	<p>3. $m - Kq < 1 \quad (q \neq 1)$</p>	<p>4. $m - Kq \geq 1 \quad (m + 1 \text{ некратно } q)$</p>	<p>5. $q < \left\lfloor \frac{m+1}{K+1} \right\rfloor$</p> <p>6. $q \leq \left\lfloor \frac{m+1}{K+1} \right\rfloor$</p> <p>7. $q \geq \left\lfloor \frac{m+1}{K+1} \right\rfloor$</p> <p>8. $q > \left\lfloor \frac{m+1}{K+1} \right\rfloor$</p> <p>9.</p> <p>10. $q > m + 1$</p> <p>11. $q = \left\lfloor \frac{m+2}{K+1} \right\rfloor$</p> <p>12. $q \neq \left\lfloor \frac{m+2}{K+1} \right\rfloor$</p>

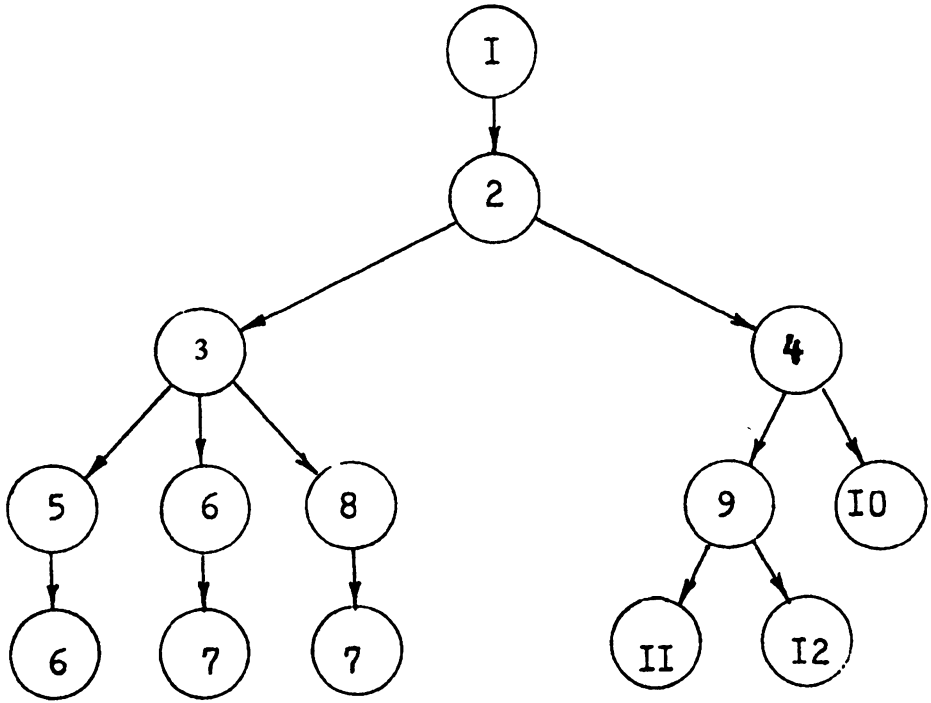


Рис. 3.

составная функция распределения, однако $G_2(x)$ — функция произвольного распределения смеси потока РИП с шумом.

Из выражения (5) следует, что непараметричность ЗО сохраняется при совместном воздействии шума и потока РИП с произвольными законами распределений.

Для анализа РО воспользуемся методикой расчёта реализуемой вероятности ложной тревоги α , приведённой в [2]:

$$\alpha = 1 - \Phi \left[\frac{C - M(S_r/H_0)}{\sigma(S_r/H_0)} \right],$$

где $\Phi[\cdot]$ — функция нормального распределения, $M(S_r/H_0)$ и $\sigma(S_r/H_0)$ — её параметры для неравномерного распределения рангов ($P(r/H_0) \neq 1/(m+1)$), C — порог обнаружения, определяемый по заданной (расчётной) вероятности ложной тревоги α_1 как корень уравнения для функции распределения ранговой статистики S_r при гипотезе H_0 [5]

$$P(S_r \leq C/H_0) = \left(\frac{1}{m+1} \right)^n \sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^{\frac{i}{m+1}} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n+i-j(m+1)-1}{n-1} = 1 - \alpha_1,$$

где $\binom{n}{j}$ — число сочетаний из n по j , $] \cdot [$ — целая часть выражения $\frac{i}{m+1}$.

Возможны три ситуации: 1) $1 < l \leq m, q \leq m$; 2) $1 < l \leq m, q > m$; 3) $l > m$.

Результаты расчёта по табличной формуле $P(r/H_0)$ показывают, что математическое ожидание статистики S_r не изменяется в условиях шума и потока РИП, а дисперсия претерпевает изменения как в сторону завышения, так и занижения своего значения при равномерном распределении ранга. Это указывает на то, что величина отклонения реализуемой вероятности α от заданной вероятности α_1 ($\Delta\alpha = \alpha - \alpha_1$) может принимать как отрицательные, так и положительные значения.

Анализ воздействия на РО шума и потока РИП с произвольными законами распределений показал, что непараметричность сохраняется при $q = l$, когда $m + 1$ равно или кратно q , для $l > m$ при $q = l + 1$, а также при $l = 1$ для $q > m + 1$.

Проиллюстрируем это табл. 2 значений отклонений вероятности ложной тревоги $\Delta\alpha$, составленной для произвольного объёма опорной выборки m и произвольных параметров помехи q и l .

Т а б л и ц а 2

q \ l	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0								
2		0							
3			0						
4				0					
5					0				
6						0			

• • • • •	m	m+1	m+2	• • • • •
		0 0	0 0	0 0 0 0 0 0
		0		
		0		
		0		
		0		
		0		

•									
•									
•									
m-1									
m									
m+1									
•									
•									
•									
•									

0				0						
0				0						
	0			0						
		0		0						
			0	0						
				0 0						
					0 0					
						0 0				
							0 0			
								0 0		

Табл. 2 показывает наиболее характерные значения $\Delta\alpha$ и соотношения параметров m, q, l , при которых в условиях шума и потока РИП с произ-

вольными законами распределений сохраняется непараметричность РО, т.е. когда

$$P(r/H_0) = \frac{1}{m+1} \quad (\Delta\alpha = 0),$$

см. выражение (5).

Для $q > m+1$, $1 < l < m$ при $q \rightarrow \infty$ и $l \rightarrow 1$, а для $l \geq m$ при $q \rightarrow \infty$ и $l \rightarrow \infty$ свойство непараметричности вновь имеет место, но уже в асимптотике.

При других значениях l и q $\Delta\alpha \neq 0$. Максимальное отклонение достигается при $l = m-1$, $q = 2m-2$ и составляет, например, при $\alpha_1 = 10^{-6}$ величину, незначительно превышающую порядок (для $m = 20$, $n = 20$ $\Delta\alpha \approx 1,17$ порядка α_1).

Расчёт реализуемой вероятности α для БРО (3) производим согласно выражению вида [2]

$$\alpha = \sum_{k=C_2}^n \binom{n}{k} p_0'^k (1-p_0')^{n-k},$$

где $\binom{n}{k}$ — число сочетаний из n по k , C_2 — порог принятия решения, определяемый для заданной α_1 уравнением

$$\alpha_1 = \sum_{k=C_2}^n \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k},$$

где $p_0 = \frac{m-C_1}{m+1}$ — вероятность превышения рангом порога квантования C_1 при гипотезе H_0 ($P(r/H_0) = 1/(m+1)$), p_0' — вероятность превышения рангом порога C_1 при воздействии шума и потока РИП, когда в общем случае $P(r/H_0) \neq 1/(m+1)$

$$p_0' = \sum_{r=C_1+1}^m P(r/H_0).$$

Производим анализ трёх ситуаций, аналогичных для РО.

Расчёт вероятности p_0' показывает, что она отклоняется от равномерной вероятности $p_0 \approx 0,19$ (при $m = 20$, $C_1 = 16$) как в сторону завышения, так и занижения p_0 , что означает либо превышение заданного уровня α_1 , либо занижение его.

Из анализа влияния шума и потока РИП с произвольными законами распределений на БРО следует, что непараметричность не нарушается при тех же значениях параметров l и q , что и для РО (см. табл. 2). Непараметричность в асимптотике достигается для $q > m+1$,

$1 < l \leq \left] \frac{m}{2} \left[+m - C_1 \right.$ при $q \rightarrow \infty, l \rightarrow 1$, а для $l > \left] \frac{m}{2} \left[+m - C_1 \right.$ при $q \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$.

В общем случае свойство непараметричности нарушается. Наибольшая величина $\Delta\alpha$ достигается при условии, что $l = \left] \frac{m}{2} \left[+m - C_1$ и $q = \left] \frac{m}{2} \left[+m + 1$. Так, при $m = 20, n = 20, C_1 = 16$ и $\alpha_1 = 10^{-6}$ отклонение $\Delta\alpha$ составляет около двух порядков.

Приведённые для РО и БРО максимальные величины $\Delta\alpha$ в силу предположения (6) являются оценками "сверху", т.е. для самых наихудших случаев. Средние же значения $\Delta\alpha$ по q и l для ранговых обнаружителей, как показывают расчёты, не превышают 0,03 от порядка α_1 ($m = 20, n = 20, \alpha_1 = 10^{-6}$).

В практической ситуации, когда уровнем шума пренебрегать нельзя (снимается ограничение, наложенное на амплитуду импульсов РИП (6)) распределение ранга в большей степени приближается к равномерному и величина $\Delta\alpha$ резко уменьшается и становится весьма незначительной ($\Delta\alpha \rightarrow 0$). Поэтому в этих условиях РО и БРО обладают свойством квазинепаарметричности.

Таким образом, в условиях совместного воздействия шума и потока ХИП с произвольными законами распределений знаковый и ранговые алгоритмы обнаружения с фиксированными объёмами выборок сохраняют свойство непараметричности.

При воздействии смеси шума и потока регулярных импульсных помех с произвольными законами распределений непараметричность знакового алгоритма обнаружения с фиксированным объёмом выборки также сохраняется, а ранговый и бинарный ранговые алгоритмы обнаружения с фиксированными объёмами выборок приобретают свойство квазинепаарметричности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 3. — М.: Сов. радио, 1976. — 288 с.
2. Бирюков М.Н. Непараметрические алгоритмы обнаружения сигналов в импульсных помехах. — М.: Изд-во МАИ, 1991. — 60 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1962. — 564 с.
4. Вопросы статистической теории радиолокации /П.А.Бакут, И.А.Большаков, Б.М.Герасимов и др.; Под ред. Г.П.Тартаковского. — М.: Сов. радио, 1963. Т.1. — 424 с.
5. Бирюков М.Н. Помехоустойчивое знаковое и ранговое обнаружение сигналов в шуме и потоке регулярных импульсных помех //Радиотехнические тетради, 1991. № 1. С. 34.

Муромский филиал
Владимирского государственного
технического университета,
Россия

Поступила в редакцию
19 июня 1996 г.

**CHARACTERISTICS OF SIGNS AND RANKS ALGORITHMS OF
DETECTION WITH FIXED VOLUMES OF SAMPLES IN NOISE AND
FLOW OF RANDOM PULSING INTERFERENCE WITH ARBITRARY
LAWS OF DISTRIBUTIONS**

M. N. Biryukov

· Is shown, that optimum sign, optimum rank, sign, rank and binary rank detectors with fixed volumes of samples save property of nonparametricity under the conditions of joint action of noise and flow of random pulsing interference with any laws of distributions.

An expression has been derived for distribution of rank under the conditions of the effect regular pulsing interference with any laws of distributions. It is shown, that the sign detector with fixed volume of sample saves the nonparametricity under these conditions, and ranks detectors with fixed volumes of samples have the property of quasi-nonparametricity.

УДК 538.56:519.25

ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. Н. Валентюк, В. Н. Лаптинский

Описан итерационный подход к анализу линейных динамических систем с флуктуирующими параметрами. Приведён алгоритм получения усреднённого по ансамблю реализаций решения динамического уравнения с произвольной статистикой флуктуаций параметров.

Известно [1, 2], что многие линейные радиофизические системы могут быть описаны линейным стохастическим динамическим уравнением

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), \quad (1)$$

где $X(t)$ — матрица решений, описывающая систему, $A(t)$ — класса $C[0, T]$ случайная ($n \times n$)-матрица параметров системы с известной, но произвольной статистикой. Система (1) имеет начальные значения вида

$$X(t=0) = X_0, \quad (2)$$

где X_0 — некоторая детерминированная матрица.

В принципе, в настоящее время в литературе описаны некоторые общие подходы к анализу такого рода систем, например, методы теории возмущений [3], континуальных интегралов или вариационных производных [4, 5]. Однако с практической точки зрения эти методы, как правило, не очень удобны из-за сложности в реализации, слабой сходимости или применимости только для частных статистик. По этой причине в данном сообщении мы описываем простую итерационную процедуру решения динамического уравнения (1), свободную от указанных недостатков.

Мы представляем матрицы $X(t)$ и $A(t)$ в виде суммы регулярных $\langle X \rangle$ и $\langle A \rangle$ и случайных \tilde{X} и \tilde{A} частей, т.е.

$$X(t) = \langle X \rangle + \tilde{X}, \quad (3)$$

$$A(t) = \langle A \rangle + \tilde{A}. \quad (4)$$

Далее, используя соотношения (3), (4) из уравнения (1) получим

$$\frac{d\langle X \rangle}{dt} = \langle A \rangle \langle X \rangle + \langle \tilde{A} \tilde{X} \rangle, \quad \frac{d\tilde{X}}{dt} = \langle A \rangle \tilde{X} + \tilde{A} \langle X \rangle + \tilde{A} \tilde{X} - \langle \tilde{A} \tilde{X} \rangle. \quad (5)$$

В уравнении (5) мы вводим вспомогательный параметр ε , с помощью которого систему (5) представим в виде

$$\frac{d\langle X \rangle}{dt} = \varepsilon \langle A \rangle \langle X \rangle + \varepsilon \langle \tilde{A} \tilde{X} \rangle, \quad \frac{d\tilde{X}}{dt} = \varepsilon \langle A \rangle \tilde{X} + \varepsilon \tilde{A} \langle X \rangle + \varepsilon \tilde{A} \tilde{X} - \varepsilon \langle \tilde{A} \tilde{X} \rangle. \quad (6)$$

Случайную составляющую матрицы $X(t)$ мы ищем в форме

$$\tilde{X}(t) = U(t) \langle X(t) \rangle. \quad (7)$$

Очевидно, что матрица $U(t)$ имеет начальное условие

$$U(t=0) = 0, \quad (8)$$

где 0 — нулевая матрица. С учётом (7) система (6) переписывается как

$$\frac{d\langle X \rangle}{dt} = \varepsilon [\langle A \rangle + \langle \tilde{A} U \rangle] \langle X \rangle, \quad (9a)$$

$$\frac{dU}{dt} = \varepsilon [\langle A \rangle U - U \langle A \rangle + \tilde{A} + \tilde{A} U - \langle \tilde{A} U \rangle - U \langle \tilde{A} U \rangle]. \quad (9b)$$

Принципиальной особенностью системы (9a), (9b) является то, что мы уже имеем замкнутое уравнение (9b) для матрицы $U(t)$ с начальными условиями (8). Уравнение (9b) с начальным условием (8) эквивалентно интегральному уравнению

$$U(t) = \varepsilon \int_0^t d\tau [\langle A \rangle U(\tau) - U(\tau) \langle A \rangle + \tilde{A}(\tau) + \tilde{A}(\tau) U(\tau) - \langle \tilde{A}(\tau) U(\tau) \rangle - U(\tau) \langle \tilde{A}(\tau) U(\tau) \rangle]. \quad (10)$$

Зная решение этого уравнения, из уравнения (9a) мы можем найти искомое решение $\langle X(t) \rangle$. В рамках предлагаемого формализма мы ищем решение уравнения (10) в виде

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) \varepsilon^k. \quad (11)$$

Используя разложение (11) в (10) для матрицы $U_1(t)$, мы имеем

$$U_1(t) = \int_0^t \tilde{A}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Подставляя соотношение (12) в уравнение (9a), мы получаем уравнение для искомого решения $\langle X(t) \rangle$ в первом приближении

$$\frac{d\langle X \rangle}{dt} = [\langle A \rangle + \int_0^t d\tau \langle \tilde{A}(t) \tilde{A}(\tau) \rangle] \langle X \rangle, \quad \langle X(0) \rangle = \langle X_0 \rangle. \quad (13)$$

Аналогичным образом получают следующие приближения:

$$U_2(t) = \int_0^t d\tau [\langle A \rangle U_1(\tau) - U_1(\tau) \langle A \rangle + \tilde{A} U_1(\tau) - \langle \tilde{A} U_1(\tau) \rangle], \quad (14)$$

$$U_3(t) = \int_0^t d\tau [\langle A \rangle U_2(\tau) - U_2(\tau) \langle A \rangle + \tilde{A} U_2(\tau) - \langle \tilde{A} U_2(\tau) \rangle - U_1(\tau) \langle \tilde{A} U_1(\tau) \rangle], \quad (15)$$

$$U_{k+1}(t) = \int_0^t d\tau \left[\langle A \rangle U_k(\tau) - U_k(\tau) \langle A \rangle + \tilde{A}(\tau) U_k(\tau) - \langle \tilde{A}(\tau) U_k(\tau) \rangle - \sum_{m=1}^{k-1} U_m(\tau) \langle \tilde{A} U_{k-m}(\tau) \rangle \right], \quad (16)$$

и уравнение для $\langle X(t) \rangle$ на $k+1$ шаге итерационного процесса:

$$\frac{d\langle X \rangle}{dt} = [\langle A \rangle + \langle \tilde{A} U_{k+1} \rangle] \langle X \rangle, \quad \langle X(0) \rangle = \langle X_0 \rangle, \quad (17)$$

где

$$\langle \tilde{A} U_{k+1}(t) \rangle = \int_0^t d\tau \left[\langle \tilde{A}(t) \langle A \rangle U_k(\tau) \rangle - \langle \tilde{A}(t) U_k(\tau) \rangle \langle A \rangle + \langle \tilde{A}(t) \tilde{A}(t) U_k(\tau) \rangle - \langle A \rangle \langle \tilde{A} U_k(\tau) \rangle - \sum_{m=1}^{k-1} \langle \tilde{A}(t) U_m(\tau) \rangle \langle \tilde{A} U_{k-m}(\tau) \rangle \right]. \quad (18)$$

Таким образом, мы видим, что в рамках рассматриваемого формализма задача, по сути дела, свелась к хорошо разработанной в вычислительной математике процедуре решения обыкновенной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Чтобы более полно представить суть предлагаемого алгоритма, сейчас рассмотрим скалярную задачу нахождения среднего значения решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = i\nu f(t)x, \quad x(t=0) = 1, \quad (19)$$

где i — мнимая единица, $f(t)$ — случайная функция с известной статистикой и нулевым средним значением, ν — произвольный детерминированный параметр. Среднее значение решения уравнения (19) в этом

случае представляет частный случай характеристического функционала $\Phi(\nu)$ случайного процесса $f(t)$ и разлагается в ряд по кумулянтным функциям $K_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ [4, 5]:

$$\Phi(\nu) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\nu)^n}{n!} \int_0^t \dots \int_0^t d\tau_1 \dots d\tau_n K_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \right], \quad (20)$$

или

$$\Phi(\nu) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} (i\nu)^n \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_2} d\tau_3 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n K_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \right]. \quad (21)$$

Для рассматриваемого случая первые три кумулянтные функции имеют вид

$$K_1(\tau) = 0, \quad K_2(\tau_1, \tau_2) = \langle f(\tau_1)f(\tau_2) \rangle, \quad K_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \langle f(\tau_1)f(\tau_2)f(\tau_3) \rangle.$$

Используя соотношения (12)–(17), мы можем убедиться, что в данной простейшей ситуации предлагаемый алгоритм воспроизводит разложения (20), (21), т.е. представляет решение задачи в виде разложения искомого решения в ряд по кумулянтным функциям случайного процесса $f(t)$. В случае же решения основной матричной задачи в рамках данного алгоритма решение ищется в виде разложения по матричным аналогам этих кумулянтных функций (кумулянтным матрицам) случайной матрицы $A(t)$. При этом на первой итерации мы получаем один член разложения, на второй — два и на k -й, соответственно, k членов разложения. Для нормальных случайных процессов в разложениях (20), (21) отличен от нуля только второй член. По этой причине, в данном случае предлагаемый алгоритм позволяет получить точный результат при использовании только одной итерации. Как известно [3], многие классические подходы (например, приближения Бурре, Крейчнана) таким свойством не обладают. Для других типов случайных процессов приемлемая точность результата может быть получена при использовании всего лишь нескольких итераций, поскольку разложения по кумулянтным функциям (матрицам) достаточно быстро сходятся [6]. В этом плане обсуждаемый алгоритм в своей принципиальной основе очень подобен методам, описанным в монографии [6], где также используются разложения решений в ряд по кумулянтным функциям.

Для того, чтобы оценить эффективность алгоритма, для одной частной практической задачи были выполнены соответствующие численные эксперименты. А именно, была рассмотрена задача оценки среднего значения интенсивности излучения $I(z)$, распространяющегося вдоль оси z в нерассеивающей среде с флуктуирующим показателем поглощения

$k(z)$ [7, 8]. Уравнение, описывающее интенсивность излучения в такой среде, имеет вид

$$\frac{dI}{dz} = -k(z)I, \quad I(0) = 1$$

и для ряда статистических моделей среды может быть решено точно. В частности, для бинарной Марковской модели среды с двумя состояниями k_1 , k_2 и средними хордами двух компонент λ_1 , λ_2 точное решение задачи представлено в [8]. Используя это точное решение, мы получаем возможность оценить сходимость предлагаемого в данном сообщении алгоритма.

Так, например, для $k_1 = 3,5$, $k_2 = 5,5$, $\lambda_1 = 2,5$, $\lambda_2 = 1,0$ точное значение средней интенсивности при $z = 0,4$ равно 0,206. При решении этой задачи по предлагаемому алгоритму мы имеем 0,196 для первой итерации, 0,212 для второй, 0,211 для третьей и 0,209 для четвертой. Для других параметров задачи ситуация примерно такая же и в большинстве случаев достаточно пяти-семи итераций, чтобы получить практически точное решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. — М.: Радио и связь, 1985. — 312 с.
2. Казаков И. Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
3. Апресян Л. А. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1974. Т. 17. № 2. С. 165.
4. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980. — 336 с.
5. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.2. Случайные поля. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
6. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
7. Valentyuk A. N. //J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer., 1995. V. 53. № 6. P. 693.
8. Valentyuk A. N. //J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer., 1996. V. 56. № 9. P. 341.

Институт прикладной оптики АН
Беларуси, г.Могилёв

Поступила в редакцию
22 октября 1996 г.

AN ITERATIVE PROCEDURE FOR THE ANALYSIS OF LINEAR DYNAMIC STOCHASTIC SYSTEMS WITH FLUCTUATING PARAMETERS

A. N. Valentyuk, V. N. Laptinsky

An iterative procedure for the analysis of linear dynamic stochastic systems with fluctuating parameters is described. An algorithm is presented for obtaining the ensemble averaged over the solution of a dynamic equation with arbitrary fluctuation statistics .