

**МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XL N 10

Нижний Новгород

1997

Содержание

Долин Л. С. О возможностях обнаружения поглощающего объекта в сильно рассеивающей среде методом непрерывной оптической локации.....	1191
Разин А. В. Переходное излучение сейсмических волн на границе разделя атмосфера-земля	1210
Акопян Э. А., Нерсиан Г. Б., Матевосян Г. Г. Потери энергии заряженной частицей в плазме во внешнем поле, с учётом действия поля на плазму и движение частицы	1224
Лапин В. Г. Обратное рассеяние электромагнитных волн на крупномасштабных неоднородностях в периодически неоднородной среде	1230
Громов Е. М., Тютин В. В. Стационарные волны, описываемые обобщённым уравнением Кортевега-де Вриза-Бюргерса.....	1241
Шульга С. Н. Влияние аниэзотропии среды на рассеяние электромагнитных волн подповерхностным включением	1249
Силаев А. М. Скорейшее обнаружение скачкообразного изменения параметров случайных процессов	1260
Волченкова Л. В., Красильников В. Н. Универсальный закон поведения высокочастотного поля вблизи поверхности движущегося идеально проводящего цилиндра в области полутени.....	1277
Донченко В. А., Заргано Г. Ф., Синявский Г. П. Расчёг параметров плоско-поперечных неоднородностей в волноводах сложных сечений в многомодовом режиме.....	1286

Зиничев В. А., Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Сазонов Ю. А. Бистатический содар на базе полноповоротных 15-метровых радиотелескопов	1302
Беляев П. П., Поляков С. В., Ермакова Е. Н., Исаев С. В. Экспериментальные исследования ионосферного альфвеновского резонатора по наблюдениям электромагнитного шумового фона в солнечном цикле 1985–1995 гг.....	1305

УДК 535.36

**О ВОЗМОЖНОСТЯХ ОБНАРУЖЕНИЯ
ПОГЛОЩАЮЩЕГО ОБЪЕКТА В СИЛЬНО
РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ
НЕПРЕРЫВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ЛОКАЦИИ**

Л. С. Долин

Исследована возможность использования метода 2-х позиционной оптической локации для наблюдения неоднородностей показателя поглощения мутной среды на очень больших оптических глубинах, где поле подсветки изотропизировалось. Получены формулы для расчёта изображения неоднородности, его контраста, отношения сигнал/шум, дальности видимости и оптимальной базы "излучатель – приёмник". Предложена система двухпозиционной локации с вращающейся базой, которая позволяет повысить вероятность обнаружения неоднородности и точность определения её местоположения. Показано, что метод непрерывной оптической локации может быть использован для наблюдения неоднородностей в живых тканях на глубинах в несколько десятков транспортных длин.

Исследование возможностей локации поглощающего объекта в сильно рассеивающей среде представляет практический интерес для решения задач оптической томографии живых тканей. В терапевтическом окне прозрачности (длины волн 0,6–1,3 мкм) мягкие ткани представляют собой мутную среду с показателем ослабления $\epsilon = 10\text{--}50 \text{ mm}^{-1}$ и показателем поглощения $\kappa = 0,01\text{--}1 \text{ mm}^{-1}$ [1, 2]. По степени анизотропии рассеяния они подобны морской воде (средний косинус индикаторы рассеяния $\sim 0,8\text{--}0,95$). Поэтому для ориентировочной оценки предельной глубины видимости (z) внутренней структуры тканей можно воспользоваться данными о дальности видимости в воде.

Известно, что лазерные системы подводного наблюдения имеют дальность действия $z \sim 10/\epsilon$ при условии эффективного подавления помехи обратного рассеяния (за счёт импульсного стробирования сигнала или пространственного разнесения излучателя и приёмника) [3]. Согласно принципу подобия оптическая дальность видимости (ϵz) не зависит от ϵ , если отношение κ/ϵ , индикаторы рассеяния и апертурные углы излучателя и приёмника остаются неизменными, а мощность источника подсветки (P_{ii}) и все параметры (X) с размерностью длины и времени изменяются в соответствии с условиями $\epsilon^2 P_{ii} = \text{const}$, $\epsilon X = \text{const}$ (в число параметров X входят размеры излучающей и приёмной апертур, база излучатель–приёмник, размер объекта наблюдения, длительность зондирующего и стробирующего сигналов). Из сказанного следует, что если бы

условия подобия выполнялись, то наблюдение внутренней структуры тканей (в отражённом свете) было бы возможно до глубины $z \sim 0,2\text{--}1,0$ мм.

Сделанная оценка не противоречит результатам работ по фемтосекундной импульсной локации [4] и оптической когерентной томографии тканей с использованием непрерывного фемтокоррелированного излучения [5, 6], хотя полного подобия между задачами подводного наблюдения и томографии тканей нет. Специфика задач оптики тканей обусловлена двумя основными факторами: 1) в тканях отношение κ/ϵ на 1,5–2 порядка меньше, чем в воде; 2) томографию тканей можно осуществлять при очень больших значениях параметра $\epsilon^2 P_i$, недостижимых в гидрооптике.

Благодаря малости κ/ϵ ткани создают более интенсивную помеху обратного рассеяния (негативные последствия увеличения помехи компенсируются за счёт большой величины $\epsilon^2 P_i$). Положительным следствием малости κ/ϵ является то, что диффузно рассеянный свет проникает на очень большие оптические глубины и благодаря этому появляется возможность для “далнего” ($z \gg 10/\epsilon$) наблюдения неоднородностей ткани, хотя и с низким разрешением. Для решения этой проблемы предполагается использовать фемтосекундную локацию [7–9] и голограмму на волнах фотонной плотности [10]. В настоящей работе мы хотим показать, что перспективным средством дальнего наблюдения может оказаться система двухпозиционной непрерывной локации с большой базой. Заметим, что при ближнем наблюдении ($\epsilon z < 10$) в изображении воспроизводятся, в основном, неоднородности показателя рассеяния среды. На больших оптических глубинах ($\epsilon z \gg 10$) поле подсветки изотропизируется. При этом неоднородности показателя рассеяния становятся невидимыми, а неоднородности показателя поглощения проявляются более контрастно благодаря тому, что за ними находятся светящиеся слои ткани. Поэтому при анализе возможностей дальнего обнаружения неоднородностей ткани в качестве объекта наблюдения рассматривается объём поглощающего вещества.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть среда с показателем рассеяния σ , показателем поглощения κ и индикаторной функцией $x(\gamma)$ (γ — угол рассеяния) занимает область пространства $z \geq 0$ (рис. 1). Оптические характеристики среды удовлетворяют условию

$$\kappa \ll \sigma_t = (1 - \overline{\cos \gamma})\sigma, \quad (1)$$

где

$$\overline{\cos \gamma} = \int_0^\pi \cos \gamma x(\gamma) \sin \gamma d\gamma / \int_0^\pi x(\gamma) \sin \gamma d\gamma =$$

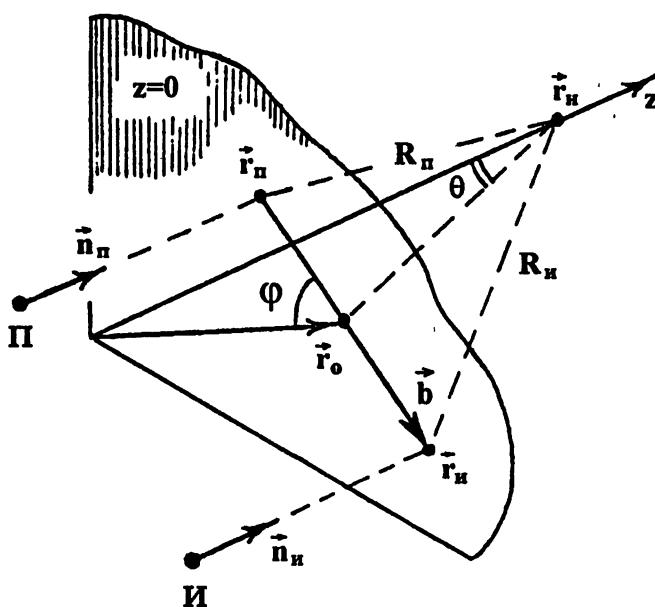


Рис. 1. Схема наблюдения.

средний косинус индикатрисы рассеяния, σ_t — транспортный показатель рассеяния. Лоцируемый объект (неоднородность) представляет собой сферический объём мутной среды радиуса a с транспортным показателем рассеяния σ_{th} и показателем поглощения $\kappa_h \ll \sigma_{th}$. Центр неоднородности располагается в точке $\vec{r}_h(0, 0, z_h)$. Расстояние (z_h) от границы среды до неоднородности и её размер удовлетворяют условиям

$$z_h \gg l_t, \quad (2a)$$

$$z_h \gg a, \quad (2b)$$

$$\alpha a \ll 1, \quad (2c)$$

где $l_t = 1/\varepsilon_t$ — транспортная длина, $\varepsilon_t = \sigma_t + \kappa$ — транспортный показатель ослабления,

$$\alpha = \sqrt{3\varepsilon_t\kappa} — \quad (3)$$

показатель ослабления диффузного света ($1/\alpha$ — длина диффузии) [11].

Система наблюдения включает в себя источник непрерывного излучения (И) и энергетический приёмник (П) с узкими диаграммами направленности, оси которых пересекают границу среды в точках \vec{r}_i , \vec{r}_{pi} . Обзор пространства осуществляется путём перемещения системы И-П в плоскости $z = \text{const}$ или путём синхронного сканирования диаграмм направленности с соблюдением условия

$$(\vec{r}_0, \vec{n}_{pi,p}) \leq \theta_0 \ll \pi/2, \quad (4)$$

где \vec{z}_0 и $\vec{n}_{ii,p}$ — единичные векторы, характеризующие направления оси z и оптических осей И и П. Последнее условие означает, что расстояние между сканирующей системой наблюдения и границей среды должно быть велико по сравнению с поперечным размером области пространства, в которой ведётся поиск неоднородности.

Изображением мы условимся называть мощность принимаемого сигнала ($P_{\text{п}}$) как функцию $\vec{r}_0(x_0, y_0) = (\vec{r}_i + \vec{r}_p)/2$ при фиксированной "базе" $\vec{b} = \vec{r}_i - \vec{r}_p$ (изображение в привычном понимании получается путём визуализации пространственного сигнала $P_{\text{п}}(\vec{r}_0)$).

Заметим, что при условиях (1), (2а), (4), $b = \text{const}$ структура изображения практически не зависит от угла между \vec{n}_i и \vec{n}_p и способа обзора пространства. Поэтому в последующем мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда оптические оси И и П направлены по нормали к границе среды (как показано на рис. 1), а изображение формируется за счёт перемещения системы наблюдения. Ширину пучка подсветки и размер области пересечения диаграммы направленности приёмника с границей среды считаем малыми по сравнению с b и полагаем

$$P_{\text{п}}(\vec{r}_0) = \Sigma_{\text{п}} \Omega_{\text{п}} L_{\text{п}}(\vec{r}_0), \quad (5)$$

где $\Sigma_{\text{п}}$ — площадь входного зрачка приёмника, $\Omega_{\text{п}}$ — телесный угол приёма, $L_{\text{п}}(\vec{r}_0)$ — яркость выходящего из среды излучения в точке $\vec{r}_{\text{п}} = \vec{r}_0 - \vec{b}/2$ в направлении $-\vec{z}_0$.

2. МОДЕЛИ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ

Пространственный сигнал $L_{\text{п}}(\vec{r}_0)$ можно разделить на две компоненты, а именно: однородный фон L_{Φ} (яркость объёмного свечения среды без объекта) и неоднородную (информационную) составляющую L_h , которая возникает в результате искажения поля подсветки поглощающим объектом:

$$L_{\text{п}}(\vec{r}_0) = L_{\Phi} + L_h(\vec{r}_0). \quad (6)$$

Основой для расчёта L_{Φ} и L_h будет служить решение уравнения переноса излучения в диффузационном приближении для поля точечного изотропного источника.

2.1. Поле точечного изотропного источника (ТИИ)

В диффузационном приближении [11, 12] яркость излучения в точке \vec{r} и направлении \vec{n} ($|\vec{n}| = 1$) выражается через пространственную облучённость $E_0 = \int L d\vec{n}$ с помощью соотношения

4π

$$L(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{1}{4\pi} (1 - l_t \vec{n} \nabla) E_0(\vec{r}). \quad (7)$$

Облучённость, создаваемая ТИИ с единичной мощностью в бесконечно протяжённой мутной среде, определяется по формуле

$$E_0^{(1)} = \left(\frac{4\pi}{3} l_t r \right)^{-1} \exp(-\alpha r), \quad (8)$$

где r — расстояние между точкой наблюдения и источником (величина $E_0^{(1)}$ имеет размерность м^2 , истинная облучённость находится путём умножения $E_0^{(1)}$ на мощность источника P_{ii}). При расположении ТИИ в точке $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ полубесконечной мутной среды облучённость в точке среды $\vec{r}(x, y, z) = \vec{r}_\perp + z \cdot \vec{z}_0$ равна

$$E_0^{(2)}(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}) = E_0^{(1)}(|\vec{r} - \vec{r}_1|) - E_0^{(1)}(|\vec{r} - \vec{r}_2|), \quad (9)$$

где $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - 2(z_1 + z_0)\vec{z}_0$, $z_0 = 0,71 \cdot l_t$ — экстраполированная длина в проблеме Милна, \vec{r}_\perp — составляющая \vec{r} в плоскости $z = 0$.

2.2. Поле пучка подсветки

На больших расстояниях от точки \vec{r}_i распределение облучённости $E_0^{(ii)}$ от направленного источника подсветки с мощностью P_{ii} можно представить в виде

$$E_0^{(ii)}(\vec{r}) = P_{ii} \cdot E_0^{\text{TMI}}(\vec{r}_{ii} \rightarrow \vec{r}) \quad (10)$$

через поле облучённости E_0^{TMI} , которое создаётся в среде точечным мононаправленным источником (ТМИ) с единичной мощностью, находящимся в точке \vec{r}_{ii} и действующим в направлении \vec{z}_0 . В соответствии с оптическим принципом взаимности [12] облучённость в точке \vec{r} от ТМИ

$$E_0^{\text{TMI}}(\vec{r}_{ii} \rightarrow \vec{r}) = 4\pi L^{(2)}(\vec{r} \rightarrow \vec{r}_{ii}, -\vec{z}_0), \quad (11)$$

где $L^{(2)}$ — яркость в точке \vec{r}_{ii} и направлении $-\vec{z}_0$ от ТИИ, расположенного в точке \vec{r} . Как следует из (7),

$$L^{(2)}(\vec{r} \rightarrow \vec{r}_{ii}, -\vec{z}_0) = \frac{1}{4\pi} \left[\left(1 + l_t \frac{\partial}{\partial z} \right) E_0^{(2)}(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}) \right] \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{r}, \\ \vec{r} = \vec{r}_{ii} \end{array} \quad (12)$$

С учётом (8), (9), (12), при условии

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_{ii}| \gg l_t \quad (13)$$

формула (11) даёт

$$E_0^{\text{ТМИ}}(\vec{r}_n \rightarrow \vec{r}) = \frac{3}{2\pi R^3} \left(1 + \frac{z_0}{l_t}\right) (1 + \alpha R)(z_0 + z) \exp(-\alpha R), \quad (14)$$

а из формул (7), (10), (14) имеем:

$$\begin{aligned} L_\Phi &= L(\vec{r}_n, -\vec{z}_0) = \frac{P_n}{4\pi} \left[\left(1 + l_t \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right) E_0^{\text{ТМИ}}(\vec{r}_n \rightarrow \vec{r}) \right] \begin{matrix} \vec{r}_\perp \\ z \end{matrix} = \begin{matrix} \vec{r}_n \\ 0 \end{matrix}, \\ &= \frac{3P_n l_t}{8\pi^2 b^3} \left(1 + \frac{z_0}{l_t}\right)^2 (1 + \alpha b) \exp(-\alpha b). \end{aligned} \quad (15)$$

2.3. Сечение поглощения объекта (неоднородности)

Пользуясь условиями (1), (2), будем считать поле подсветки в окрестности точки \vec{r}_n (с размером $\sim a$) однородным и изотропным. Тогда L_n можно рассматривать как яркость излучения, приходящего в точку \vec{r}_n из точки \vec{r}_n от вспомогательного изотропного источника с отрицательной "мощностью"

$$P = -\Sigma E_0^{(n)}(\vec{r}_n). \quad (16)$$

Величина Σ — это сечение поглощения неоднородности, которое определяется как отношение поглощаемой мощности к облучённости $E_0^{(n)}$, создаваемой источником подсветки в точке \vec{r}_n в отсутствие неоднородности.

Для нахождения Σ нужно решить следующую задачу: сферический объём мутной среды $0 < r \leq a$ характеризуется параметрами σ_{th} , κ_n ; область $r > a$ занята средой с параметрами σ_t , κ ; известно, что источник подсветки при $\sigma_{th} = \sigma_t$ создаёт в области $r \leq a$ облучённость $E_0^{(n)} = \text{const}$; требуется найти распределение облучённости от этого источника в случае $\sigma_{th} \neq \sigma_t$, $\kappa_n \neq \kappa$. Решение этой задачи будем искать в виде

$$E_0(r) = \begin{cases} f_1(r), & r \leq a, \\ E_0^{(n)} + f_2(r), & r > a, \end{cases} \quad (17)$$

$$f_1 = \frac{A_1}{r} \sinh \alpha_n r, \quad (18a)$$

$$f_2 = \frac{A_2}{r} \exp(-\alpha r), \quad (18b)$$

где $\alpha_n = \sqrt{3\epsilon_{th}\kappa_n}$, $\epsilon_{th} = \sigma_{th} + \kappa_n$, f_1 — ограниченное (при $r \rightarrow 0$) центральносимметричное решение однородного диффузационного уравнения для среды с параметрами σ_{th} , κ_n ; f_2 — аналогичное решение для

среды с параметрами σ_t , κ , удовлетворяющее условию $f_2 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Коэффициенты $A_{1,2}$ определяются из условий непрерывности E_0 и плотности потока энергии $\vec{H} = -D\nabla E_0$ при $r = a$ (D — коэффициент диффузии) с учётом условий $\partial E_0^{(n)}/\partial r = 0$; $D = 1/3\varepsilon_{th}$ при $r \leq a$; $D = 1/3\varepsilon_t$ при $r > a$.

Сопоставление формул (8) и (186) показывает, что функцию f_2 можно рассматривать как распределение облучённости от ТИИ с мощностью

$$P = 4\pi l_t A_2/3, \quad (19)$$

а из (16), (19) находим:

$$\Sigma = -4\pi l_t A_2/3E_0^{(n)}. \quad (20)$$

Окончательные формулы для расчёта Σ , которые получаются после подстановки A_2 в (20) и отбрасывания слагаемых с относительной величиной $\sim \alpha a$, имеют вид

$$\Sigma = \Sigma_a \cdot \frac{\rho - \operatorname{th} \rho}{\rho + (\varepsilon_{th}/\varepsilon_t - 1) \operatorname{th} \rho}, \quad (21)$$

$$\Sigma_a = \frac{4}{3}\pi a l_t, \quad (22a)$$

$$\rho = \alpha_n a = a\sqrt{3\varepsilon_{th}\kappa_n}. \quad (22b)$$

Величина Σ_a — это сечение поглощения абсолютно чёрной неоднородности (идеально поглощающей сферической поверхности радиуса a). Зависимость Σ от ρ и отношения $\varepsilon_{th}/\varepsilon_t$ иллюстрируется кривыми рис. 2. Сечение поглощения “прозрачной” неоднородности ($\rho \ll 1$) зависит только от её показателя поглощения и объёма:

$$\Sigma \approx \frac{4}{3}\pi a^3 \kappa_n. \quad (23)$$

Заметим, что при выводе формулы (21) в неявном виде было использовано условие

$$\kappa_n \gg \kappa \quad (24)$$

(наряду с условием $\alpha a \ll 1$). Поэтому она даёт неверный результат при $\kappa_n \rightarrow \kappa \neq 0$: в отсутствие неоднородности ($\kappa_n = \kappa$, $\varepsilon_{th} = \varepsilon_t$) сечение поглощения не обращается в нуль. Выражение для Σ , лишённое этого недостатка, получается при задании поля подсветки в виде $E_0^{(n)} = A \operatorname{sh} ar/r$ (поле такого вида в отличие от $E_0^{(n)} = \text{const}$ удовлетворяет диффузионному уравнению при $\kappa \neq 0$). Однако в дальнейшем мы будем пользоваться приближённым выражением (21), полагая условие (24) выполненным.

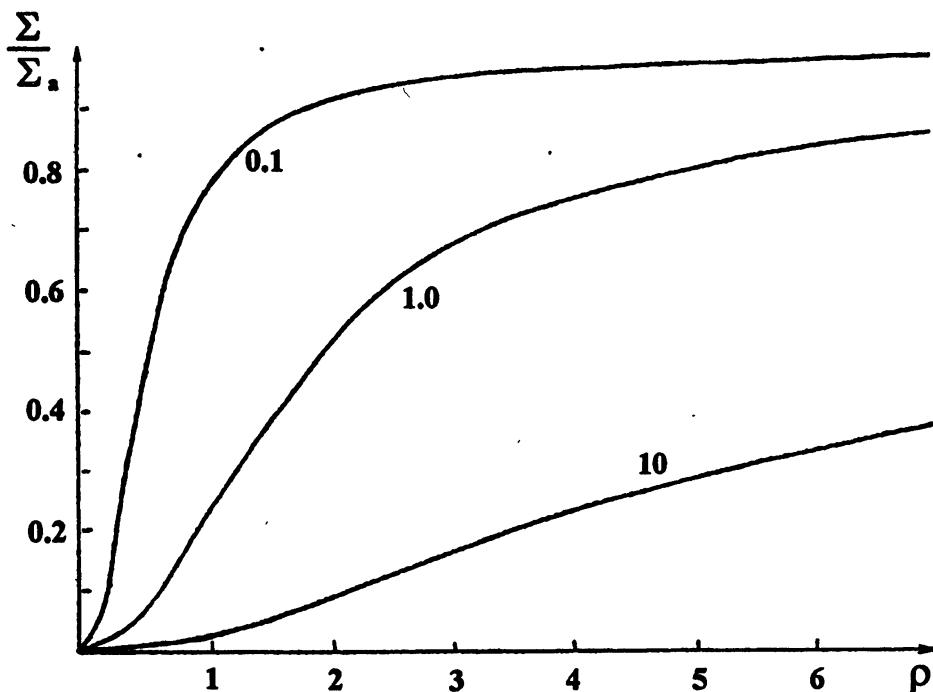


Рис. 2. Зависимость сечения поглощения неоднородности от ρ . Значения $\epsilon_{\text{тн}}/\epsilon_{\text{т}}$ указаны на рисунке, Σ_a — сечение поглощения абсолютно чёрной неоднородности.

2.4. Информативная составляющая яркости (L_h)

Яркость излучения в точке приёма (\vec{r}_n) от вспомогательного источника с мощностью P (имитирующего неоднородность) выражается с помощью оптической теоремы взаимности через облучённость E_0^{TMI} , которая создаётся в точке \vec{r}_n точечным мононаправленным источником с единичной мощностью, расположенным в точке \vec{r}_n и действующим в направлении \vec{z}_0 :

$$L_h(\vec{r}_0) = \frac{P}{4\pi} E_0^{\text{TMI}}(\vec{r}_n \rightarrow \vec{r}_n). \quad (25)$$

Величина E_0^{TMI} в (25) рассчитывается по формуле (14), если в ней произвести замены $\vec{r}_{\text{и}} \rightarrow \vec{r}_n$, $\vec{r}(\vec{r}_\perp, z) \rightarrow \vec{r}_n(0, 0, z_n)$.

3. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЁТА ИЗОБРАЖЕНИЯ

В соответствии с (5), (6), (10), (16), (25) пространственный сигнал, формирующий изображение, определяется соотношениями

$$P_n(\vec{r}_0) = P_\Phi + P_h(\vec{r}_0), \quad (26)$$

$$P_{\Phi} = \Sigma_{\text{п}} \Omega_{\text{п}} L_{\Phi}, \quad (27)$$

$$P_{\text{н}}(\vec{r}_0) \frac{\Sigma}{4\pi} P_{\text{п}} \Sigma_{\text{п}} \Omega_{\text{п}} E_0^{\text{ТМИ}}(\vec{r}_{\text{п}} \rightarrow \vec{r}_{\text{н}}) E_0^{\text{ТМИ}}(\vec{r}_{\text{н}} \rightarrow \vec{r}_{\text{н}}), \quad (28)$$

$$\vec{r}_{\text{н,п}} = \vec{r}_0 \pm \vec{b}/2. \quad (29)$$

Фоновый сигнал P_{Φ} находится из (15), (27). Сигнал от неоднородности $P_{\text{н}}$ при $z_{\text{н}} \gg z_{\text{б}}$ с помощью (14), (28) представляется в виде

$$P_{\text{н}}(\vec{r}_0) = -\frac{9P_{\text{н}}}{16\pi^3} \left(1 + \frac{z_{\text{б}}}{l_{\text{т}}}\right)^2 \frac{\Sigma \Sigma_{\text{п}} \Omega_{\text{п}} z_{\text{н}}^2}{R_{\text{н}}^3 R_{\text{п}}^3} (1 + \alpha R_{\text{н}})(1 + \alpha R_{\text{п}}) \times \\ \times \exp[-\alpha(R_{\text{н}} + R_{\text{п}})], \quad (30\text{a})$$

$$R_{\text{н,п}} = \sqrt{z_{\text{н}}^2 + r_{\text{н,п}}^2} = \sqrt{z_{\text{н}}^2 + (\vec{r}_0 \pm \vec{b}/2)^2}. \quad (30\text{b})$$

Поглощающая неоднородность проявляется в изображении (визуализированном распределении $P_{\text{н}}(\vec{r}_0)$) в виде размытого тёмного пятна с центром в точке $\vec{r}_0 = 0$. Назовём контрастом изображения отношение амплитуды информативного сигнала к фоновому сигналу:

$$k = \frac{P_{\text{н}}(0)}{P_{\Phi}} = \frac{P_{\text{н}}(0)}{P_{\Phi}} - 1. \quad (31)$$

Структуру пятна будем характеризовать функцией

$$\Phi(\vec{r}_0) = P_{\text{н}}(\vec{r}_0)/P_{\text{н}}(0), \quad (32)$$

которая удовлетворяет условию $\Phi(0) = 1$ и может быть названа функцией размытия точки (ФРТ). Изображение представляется через k и Φ в виде

$$P_{\text{н}}(\vec{r}_0) = P_{\Phi}[1 + k\Phi(\vec{r}_0)]. \quad (33)$$

Подчеркнём, что в соответствии с исходными предположениями (сделанными при постановке задачи) полученные формулы описывают изображение, которое не несёт информацию о размере наблюдаемого объекта. На основе этого изображения можно судить только о налинии (или отсутствии) объекта, его местоположении и поглощательной способности.

4. КОНТРАСТ ИЗОБРАЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОСТИ

Согласно (31), (30), (15), (27) зависимость контраста от глубины расположения неоднородности ($z_{\text{н}}$) и базы (b) определяется формулами

$$k = -\frac{12\Sigma}{\pi l_{\text{т}} z_{\text{н}}} \left(\frac{\beta}{1 + \beta^2}\right)^3 \frac{(1 + \xi\sqrt{1 + \beta^2})^2}{1 + 2\beta\xi} \exp[-2\xi(\sqrt{1 + \beta^2} - \beta)],$$

$$\xi = \alpha z_n, \quad \beta = b/2z_n, \quad \alpha = \sqrt{3\varepsilon_{\text{т}}\kappa}. \quad (34a - г)$$

Контраст является немонотонной функцией "относительной базы" β : для любого ξ можно указать значение $\beta = \beta_K$, при котором контраст принимает максимальную величину $k = K$.

В случае непоглощающей среды ($\kappa = 0, \xi = 0$) имеем:

$$\beta_K = 1, \quad K = K_0 = -\frac{2a}{z_n} \left(\frac{\Sigma}{\Sigma_a} \right). \quad (35)$$

Заметим, что контраст изображения абсолютно чёрной неоднородности, находящейся в непоглощающей среде, не зависит от параметра мутности среды σ_t , поскольку изменение σ_t одинаково влияет на сечение поглощения чёрной неоднородности и яркость дымки (это видно из формул (15), (22а)). Его максимальная величина (при $b = 2z_n$) равна

$$K_{0a} = -\frac{2a}{z_n}. \quad (36)$$

Как следует из формул (35), (21), (22), в такой среде контраст изображения неоднородности с сечением поглощения $\Sigma < \Sigma_a$ возрастает по мере увеличения σ_t ("прозрачная" неоднородность превращается в абсолютно чёрную). Для иллюстрации этого эффекта на рис. 3 показана зависимость относительного контраста (K_0/K_{0a}) от величины σ_t/κ_n для нескольких значений $\kappa_n a$ (расчёты выполнены в предположении $\sigma_{th} = \sigma_t$).

В случае $\kappa \neq 0$ максимум контраста (K) достигается при значениях $\beta_K > 1$ ($b > 2z_n$) и при прочих равных условиях имеет меньшую величину по сравнению с контрастом (K_0) в непоглощающей среде. Зависимость β_K и отношения K/K_0 от величины ξ представлена на рис. 4.

5. ФУНКЦИЯ РАЗМЫТИЯ ТОЧКИ (ФРТ) И ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ (ДН)

Из формул (32), (30) получается следующее выражение для ФРТ:

$$\Phi(\vec{r}_0) = \frac{R_o^6}{R_n^3 \cdot R_{\text{п}}^3} \cdot \frac{(1 + \alpha R_n)(1 + \alpha R_{\text{п}})}{(1 + \alpha R_0)^2} \exp[-\alpha(R_n + R_{\text{п}} - 2R_0)], \quad (37)$$

$$R_0 = \sqrt{z_n^2 + (b/2)^2}. \quad (38)$$

Полагая

$$r_0 = z_n \cdot \operatorname{tg} \theta, \quad (\vec{r}_0 \cdot \vec{b}) = r_0 \cdot b \cdot \cos \varphi, \quad (39a, б)$$

ФРТ можно преобразовать в функцию угловых переменных $F = \Phi[\vec{r}_0(\theta, \varphi)]$, которая представляет собой эффективную диаграмму направленности светолокационной системы и имеет вид

$$F(\theta, \varphi) = \frac{R_o^6}{R_n^3 R_{\text{п}}^3} \cdot \frac{(1 + \xi \rho_{\text{п}})(1 + \xi \rho_{\text{п}})}{(1 + \xi \rho_0)^2} \exp[-\xi(\rho_n + \rho_{\text{п}} - 2\rho_0)], \quad (40)$$

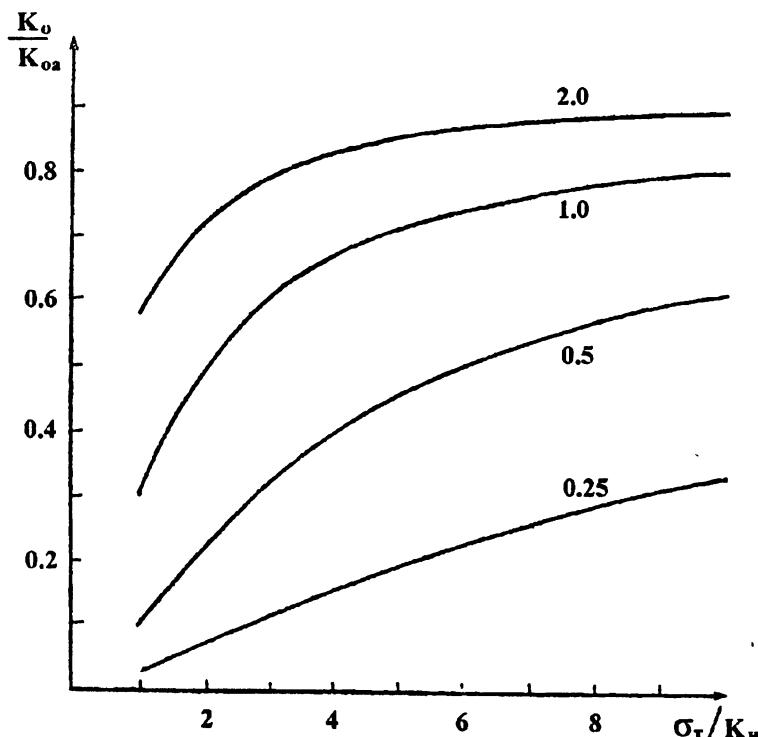


Рис. 3. Эффект повышения контрастности изображения поглощающего сгустка вещества с ростом мутности среды. Значения κ_a указаны на рисунке, $\sigma_{th} = \sigma_t$; $\kappa = 0$.

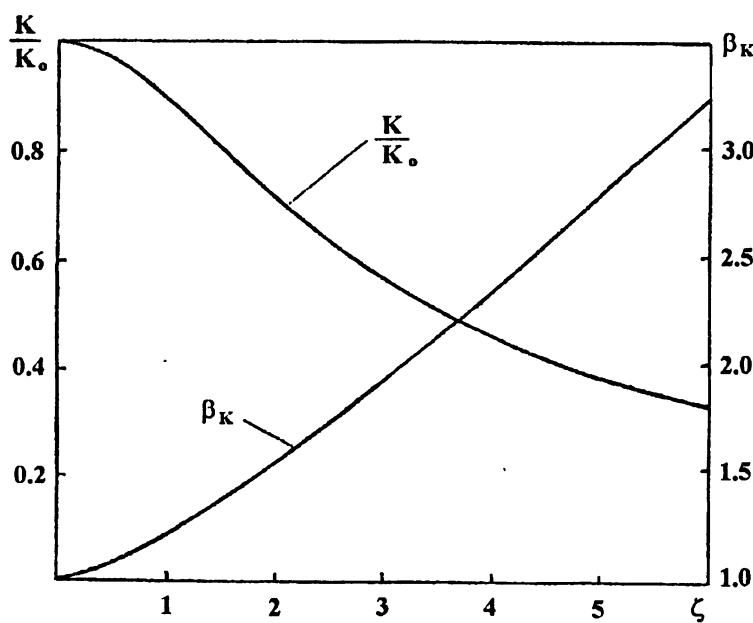


Рис. 4. Зависимость относительных значений оптимальной базы и максимального контраста изображения поглощающей неоднородности от ξ .

где

$$\rho_0 = \sqrt{1 + \beta^2}, \quad \rho_{i,n} = \sqrt{1 + \beta^2 + \tan^2 \theta \pm 2\beta \tan \theta \cos \varphi}. \quad (41a, b)$$

В случае непоглощающей среды ($\xi \equiv 0$) диаграмма F не зависит от глубины расположения неоднородности (z_n). При нулевой базе ($\beta = 0$) она аксиально симметрична (не зависит от φ). По мере увеличения базы ДН уширяется и теряет аксиальную симметрию. В поглощающей среде угловая ширина ДН уменьшается с ростом ξ (рис. 5).

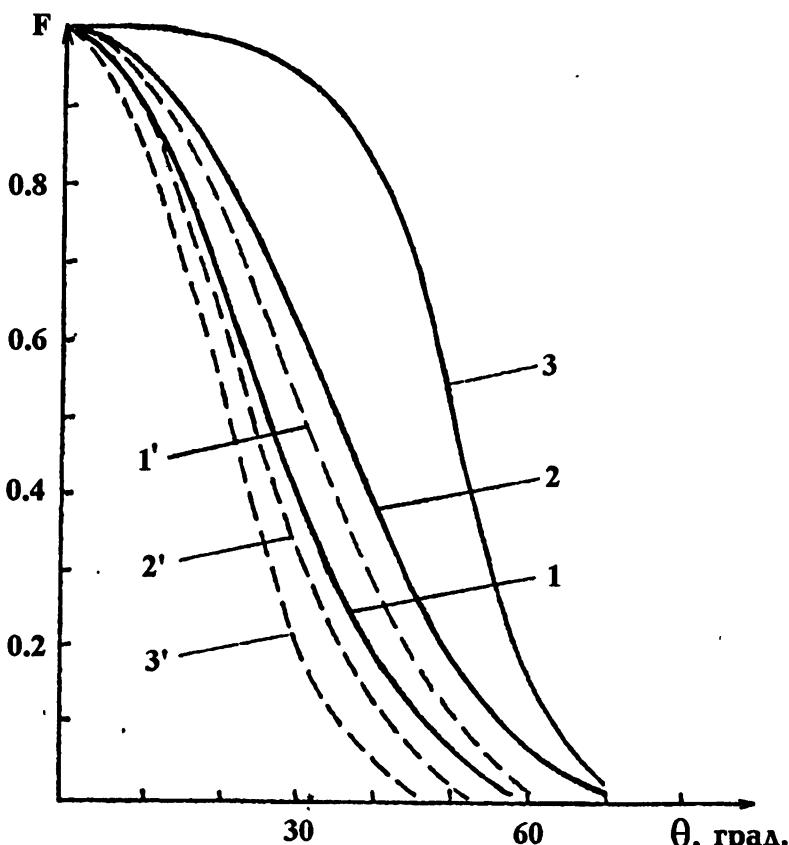


Рис. 5. Эффективная диаграмма направленности светолокационной системы в непоглощающей (кривые 1-3) и поглощающей (1'-3') среде при $\beta = 0$ (кривая 1); $\beta = 1$, $\varphi = \pi/2$ (кривая 2), 0 (кривая 3); $\beta = 1$, $\varphi = \pi/2$, $\xi = 1$ (кривая 1'), 3 (2'), 5 (3').

6. ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ (SNR)

Будем для определённости считать, что внутренние шумы фотоприёмника обусловлены дробовым эффектом. Обозначим через η спектральную

чувствительность фотокатода (с размерностью [А/Вт]) и представим ток фотодетектора в виде суммы фонового (i_{Φ}) и полезного (i_h) токов:

$$i = i_{\Phi} + i_h(\vec{r}_0) = \eta[P_{\Phi} + P_h(\vec{r}_0)]. \quad (42)$$

Тогда при условии $i_h \ll i_{\Phi}$ отношение сигнал/шум в изображении объекта можно представить в виде:

$$SNR = i_h(0) / \sqrt{2e_0(1 + B_{sh})\Delta f \cdot i_{\Phi}}, \quad (43)$$

где $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ кул., Δf — полоса усилительного тракта (Гц), параметр B_{sh} учитывает потери SNR в процессе усиления сигнала. Из (43), (42), (30), (27), (15) получаем:

$$\begin{aligned} SNR &= 0,318 \sqrt{\frac{\eta P_h \Sigma_{\Pi} \Omega_{\Pi}}{e_0(1 + B_{sh})\Delta f}} \cdot \frac{\Sigma \cdot \beta^{1,5}}{z_h^{2,5} l_t^{0,5} (1 + \beta^2)^3} \cdot \frac{(1 + \xi \sqrt{1 + \beta^2})^2}{(1 + 2\beta\xi)^{0,5}} \times \\ &\times \exp \left[\left(\beta - 2\sqrt{1 + \beta^2} \right) \xi \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Подобно контрасту SNR принимает максимальное значение при определённой величине “относительной базы” $\beta = \beta_{sh}(\xi)$. В случае непоглощающей среды $\beta_{sh} = \operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$; зависимость β_{sh} от ξ показана на рис. 6. Как видно из рис. 4 и рис. 6, отношение β_{sh}/β_K всегда меньше 1 и оно уменьшается с ростом ξ . Последнее означает, что при увеличении показателя поглощения среды потери контраста можно частично компенсировать путём увеличения базы, а потери SNR — путём её уменьшения.

7. ДАЛЬНОСТЬ ЛОКАЦИИ (ДЛ)

Если ДЛ ограничивается дробовыми шумами приёмника, то её расчёт сводится к решению уравнения (44) относительно z_h при заданном пороговом значении SNR . При $\kappa = 0$ и оптимальной базе $b = 2z_h/\sqrt{3}$ (т.е. при условии $\beta = \beta_{sh}(0)$) дальность локации (z^0) оценивается по формуле

$$\frac{z^0}{l_t} = 0,332 \frac{(\Sigma/l_t^2)^{0,4}}{(SNR)^{0,4}} \left[\frac{\eta P_h (\Sigma_{\Pi}/l_t^2) \Omega_{\Pi}}{e_0(1 + B_{sh})\Delta f} \right]^{0,2}. \quad (45)$$

Согласно (45), отношение z^0/l_t не зависит от l_t при условиях $\kappa = 0$, $\Sigma/l_t^2 = \text{const}$, $\Sigma_{\Pi}/l_t^2 = \text{const}$. При заданных параметрах излучателя и приёмника дальность обнаружения абсолютно чёрной неоднородности в непоглощающей среде $z^0 \sim l_t^{0,2}$, а при наблюдении слабопоглощающей неоднородности $z^0 \sim 1/l_t^{0,2}$ (см. (22а), (23), (45)).

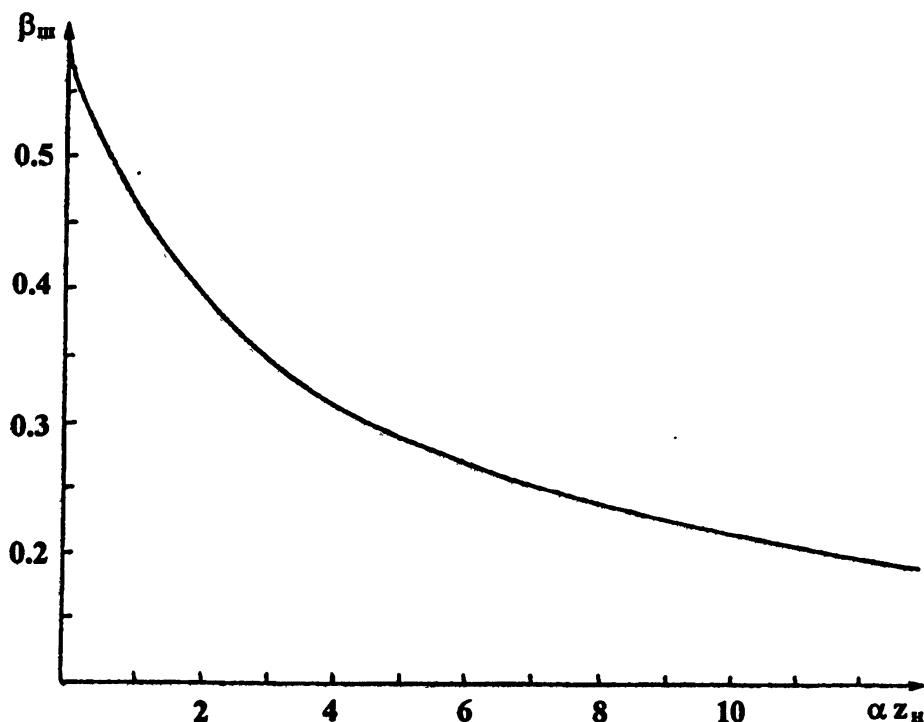


Рис. 6. Относительная оптимальная база β_w в зависимости от ξ .

Для оценки ДЛ в поглощающей среде (z) можно использовать результаты численного решения уравнения (44), представленные на рис. 7 в виде кривых, изображающих зависимость (z/l_t) от параметра z^0/l_t (рассчитанного по формуле (45)) при различных значениях параметра $\Gamma = \alpha l_t = \sqrt{3\kappa l_t}$ (уравнение решалось при условии $\beta = \beta_w(\xi)$). В дальнейшем величину z мы будем называть энергетической дальностью локации. В условиях реального эксперимента ДЛ может ограничиваться не внутренними шумами приёмника, а внешними мультиплексивными шумами, связанными с нестабильностью источника подсветки или неоднородностью оптических свойств мутной среды. Внешние шумы проявляются в виде пространственных флуктуаций фонового сигнала (ΔP_Φ) и ограничивают диапазон регистрируемых контрастов пороговым значением K_{π} , которое равно характерной величине относительных флуктуаций фона: $K_{\pi} = \Delta P_\Phi / P_\Phi$. Эти шумы ограничивают возможность увеличения z за счёт повышения мощности источника и чувствительности приёмника и определяют предельную дальность локации (z_{π}), которая находится из уравнения

$$|K(z_{\pi})| = K_{\pi}. \quad (46)$$

Поэтому реальная ДЛ совпадает с энергетической z при условии $z < z_{\pi}$, а при $z > z_{\pi}$ она равна z_{π} .

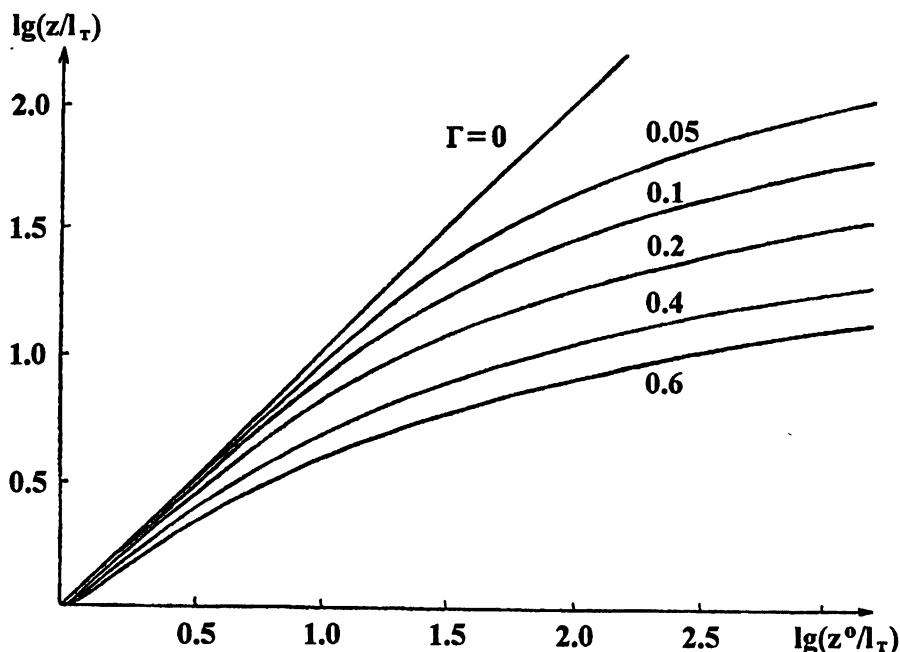


Рис. 7. Связь между энергетическими дальностями действия светолокационной системы в поглощающей и непоглощающей средах. Значения безразмерного коэффициента ослабления диффузного света Γ указаны на рисунке.

Согласно (35), (46) в непоглощающей среде предельная ДЛ равна

$$z_{\pi}^0 = \frac{2a}{K_{\pi}} \left(\frac{\Sigma}{\Sigma_a} \right). \quad (47)$$

Предельная ДЛ в поглощающей среде (z_{π}) находится по значениям z_{π}^0 и α с помощью кривых рис. 8, построенных на основе уравнения (46) и данных рис. 4.

Рассмотрим для примера задачу об обнаружении абсолютно чёрной неоднородности в тканях; полагаем $l_t = 0,15$ см, $\kappa l_t = 0,01$, $\Gamma = \sqrt{3\kappa l_t} = 0,17$, $\alpha = \Gamma/l_t = 1,155$ см⁻¹, $a = l_t$, $K_{\pi} = 0,02$. При указанных значениях a и K_{π} формула (47) даёт $z_{\pi}^0 = 100l_t$. При этом $\alpha z_{\pi}^0 = \Gamma z_{\pi}^0/l_t = 17$ и, как видно из рис. 8, $z_{\pi}/z_{\pi}^0 = 0,34$. Следовательно, в рассматриваемом случае предельная дальность локации $z_{\pi} = 34l_t = 5,1$ см.

Для достижения такой дальности система наблюдения должна иметь энергетическую ДЛ $z \geq z_{\pi}$. При $z/l_t > 34$ и $\Gamma = 0,17$ величина z^0/l_t , согласно рис. 7, должна быть больше 1300. Обращаясь к уравнению (45) можно видеть, что при $a = l_t$, $\Sigma_{\pi}/l_t^2 = 10^2$, $\Omega_{\pi} = 0,03$, $B = 1$, $\Delta f = 100$ Гц, $\eta = 0,6$ А/Вт, $SNR = 5$ это условие выполняется, если источник излучения имеет мощность $P_{\pi} \geq 0,125$ Вт. При меньших значениях мощности ДЛ не достигает предельного значения и равна энергетической ДЛ.

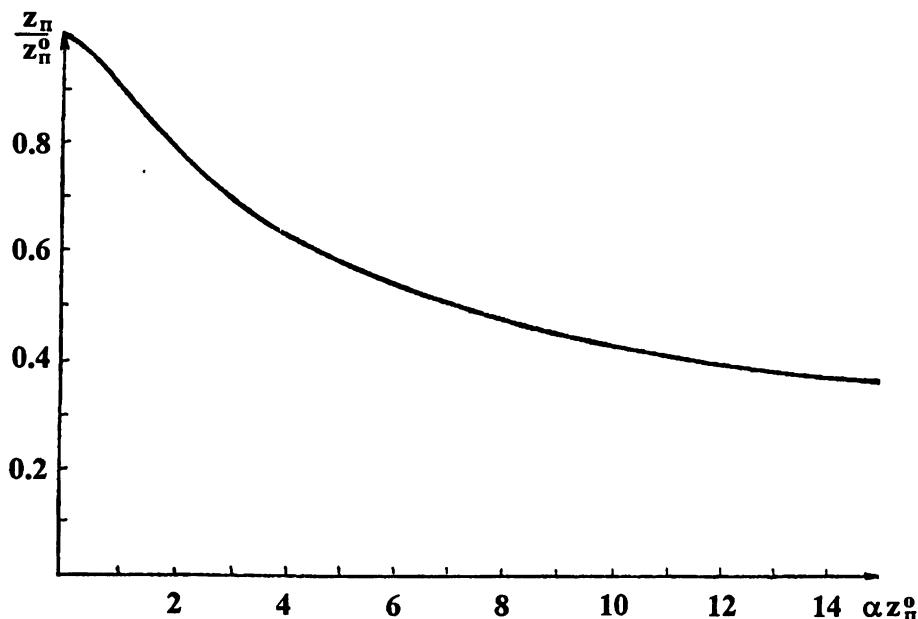


Рис. 8. Отношение предельных дальностей локации в поглощающей (z_n) и непоглощающей (z_n^0) средах в зависимости от αz_n^0 .

Соотношение между энергетической и предельной ДЛ должно учитываться и при выборе оптимальной базы. В случае $z < z_n$ (при недостатке света) нужно руководствоваться условием ($\beta = \beta_{ш}$), обеспечивающим максимум SNR , а в случае $z > z_n$ (при избытке света) база должна выбираться в соответствии с условием ($\beta = \beta_K$) максимума контраста.

8. СИСТЕМА С ВРАЩАЮЩЕЙСЯ БАЗОЙ

Система двухпозиционной непрерывной локации позволяет обнаруживать неоднородности на очень больших оптических глубинах, но при этом её разрешающая способность оказывается низкой.* Как видно из рис. 5, при $\kappa = 0$ полуширина ДН по уровню 0,5 составляет 51° в плоскости базы ($\varphi = 0$) и 36° в плоскости, перпендикулярной базе ($\varphi = \pi/2$); в поглощающей среде диаграмма несколько обужается и её полуширина приближается к 20° .

Определённого улучшения разрешающей способности можно достичь за счёт использования системы двухпозиционной локации с вращающейся базой, т.е. одного из вариантов многопозиционной локации. При вращении излучателя и приёмника в плоскости $z = \text{const}$ вокруг точки \vec{r}_0 (центра базы) сигнал от объекта промодулируется из-за несимметрии ДН.

* Для краткости мы употребляем термин "разрешающая способность", хотя речь идёт о точности определения местоположения одиночного объекта.

Измеряя амплитуду переменной составляющей мощности принимаемого сигнала ($A_{\text{п}}$) и воспроизводя её как функцию \vec{r}_0 или θ , можно сформировать изображение

$$A_{\text{п}}(\theta) = \kappa P_{\Phi} \left[F \left(\theta, \varphi = \frac{\pi}{2} \right) - F(\theta, \varphi = 0) \right], \quad (48)$$

имеющее вид кольца с центром в точке расположения объекта (рис. 9). По такому изображению координаты объекта определяются с более высокой точностью, чем при двухпозиционной локации.

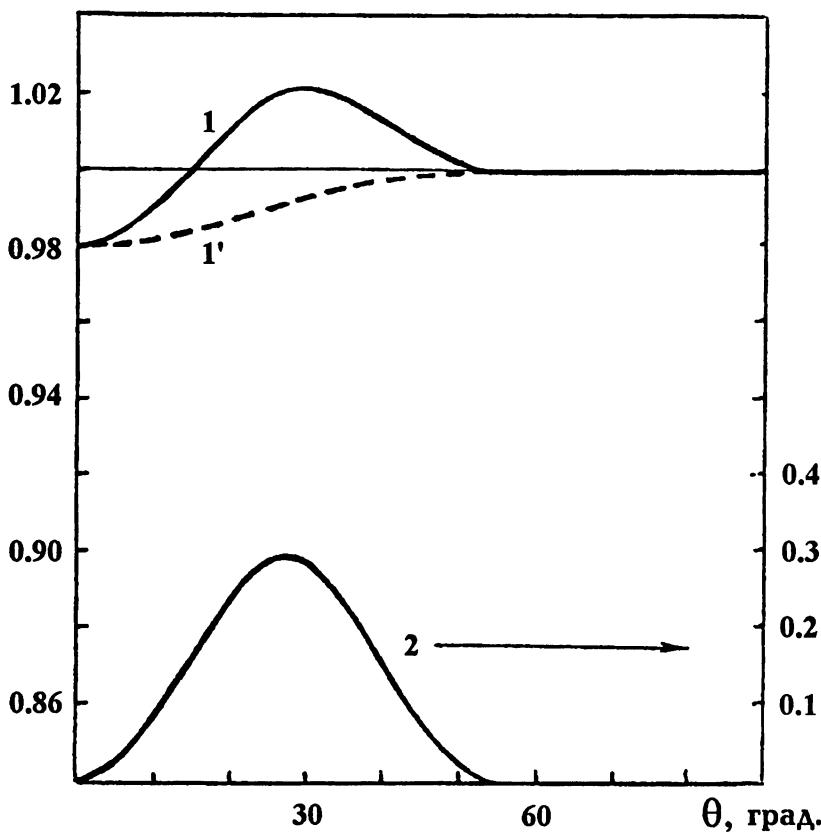


Рис. 9. Изображение абсолютно поглощающей неоднородности с радиусом $a = 0,1z_n$ при $\beta = 1$, $\xi = 5$: кривая 1 — зависимость $I(\theta)/P_{\Phi}$ для системы с вращающейся базой при $C = 5$; 2 — величина $-A_{\text{п}}(\theta)/kP_{\Phi}$; 1' — зависимость $P_{\text{п}}(\theta)/P_{\Phi}$ при $\varphi = \pi/2$ для системы с фиксированной базой.

Для более полной реализации потенциала этой системы целесообразно использовать как постоянную, так и переменную составляющие сигнала. В частности, изображение (I) можно строить по формуле

$$I(\theta) = \bar{P}_{\text{п}}(\theta) + C A_{\text{п}}(\theta), \quad (49)$$

где \bar{P}_n — среднее (за время оборота базы) значение мощности принимаемого сигнала в точке \vec{r}_0 , C — весовой множитель. Для получения такого изображения постоянную составляющую тока фотодетектора нужно сложить с усиленной и продетектированной переменной составляющей. Приближённо полагая

$$\bar{P}_n(\theta) \cong \frac{1}{2} \left[P_n(\theta, \varphi=0) + P_n\left(\theta, \varphi=\frac{\pi}{2}\right) \right],$$

изображение I можно представить в виде

$$I(\theta) = P_\Phi [1 + \kappa \tilde{F}(\theta)], \quad (50)$$

$$\tilde{F}(\theta) = \left(C + \frac{1}{2} \right) F\left(\theta, \varphi=\frac{\pi}{2}\right) - \left(C - \frac{1}{2} \right) F(\theta, \varphi=0). \quad (51)$$

Как видно из рис. 9, на таком изображении поглощающая неоднородность проявляется в виде круглого тёмного пятна со светлым ореолом. Благодаря наличию в образе объекта устойчивых специфических признаков (круговая симметрия, знакопеременный контраст) для его поиска можно использовать операцию согласованной фильтрации и за счёт этого повысить разрешающую способность системы.

В заключение хочу выразить благодарность В. А. Савельеву за помощь в выполнении расчётов и подготовке работы к публикации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-02-5797).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilson B. C., Jacques S. L. //IEEE J. Quantum Electron., 1990. V. 26. № 12. P. 2186.
2. Cheong W.-F., Prahl S. A., Welch A. J. //IEEE J. Quantum Electron., 1990. V. 26. № 12. P. 2166.
3. Долин Л. С., Левин И. М. Справочник по теории подводного видеонаблюдения. — Л.: Гидрометеопиздат, 1991. — 230 с.
4. Hauger C., Baigar E., Wilhelm T., Zinth W. //Optics Communications, 1996. № 131. P. 351.
5. Sergeev A. M., Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., Feldchtein F. I., Kamensky V. A. //OSA TOPS in Advances in Optical Imaging and Photon Migration, 1996. V. 2. P. 196.
6. Sergeev A. M., Gelikonov V. M., Gelikonov G. V., Feldchtein F. I. //Proc. SPIE, 1994. V. 2328. P. 144.
7. Das B. B., Yoo K. M., Alfano R. R. //Opt. Lett., 1993. V. 18. № 13. P. 1092.

8. Liu Feng, Yoo K. M., Alfano R. R. //Opt. Lett., 1994. V. 19. № 10. P. 740.
9. Hee M. R., Izatt J. A., Swanson E. A., Fujimoto J. G. //Opt. Lett., 1993. V. 18. № 13. P. 1107.
10. Knuttel A., Schmitt J. M., Knutson J. R. //Appl. Opt., 1993. V. 32. № 4. P. 381.
11. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1960. — 520 с.
12. Зеге Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. — Минск: Наука и техника, 1985. — 328 с.

Институт прикладной физики
РАН, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
22 апреля 1997 г.

**DOUBLE-POSITION OPTICAL SOUNDING WITH CONTINUOUS
LIGHTING AS A MEANS OF IMAGING BIOLOGICAL TISSUES
INHOMOGENEITIES AT LARGE DEPTHS**

L. S. Dolin

The absorption coefficient of tissues in the therapeutic window is relatively small, therefore multiple - scattered light is able to penetrate into tissue on large optical depths. This work is devoted to research of the opportunity of use double-position optical sounding for detection of absorptive inhomogeneity on depths, where light field is almost isotropic. Expression for inhomogeneity section of absorption in turbid medium is found, formulas for account of the image, its contrast, signal / noise ratio, range of visibility and optimum base source - receiver are obtained. It is shown, that in the case of nonabsorptive medium the image contrast of black object does not depend on medium turbidity and the image contrast of transparent inhomogeneity even can grow with turbidity increasing. In absorbing medium, the image contrast and range of visibility decrease with growth of turbidity and absorption coefficient. In typical situations, the optimum size of base exceeds distance up to object and grows when power potential of imaging system increases. A system with rotated base is offered, which permits to form the absorptive inhomogeneity image as a dark stain with light halo and at the expence of it to increase probability of definition of its size. Results of this work show the opportunity of creation of laser system for diagnostics of tissue layers by thickness in some centimetres.

УДК 534.232

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА АТМОСФЕРА – ЗЕМЛЯ

A. B. Разин

Методом контурного интегрирования решена задача о переходном излучении упругих волн источником массы, равномерно движущимся в газе по нормали к границе раздела однородных газообразного и упругого полупространств и исчезающим в момент касания поверхности твёрдого тела. Получены асимптотические формулы для поля переходного излучения, справедливые вблизи фронтов продольной и поперечной сферических волн и конической волны. Для точек наблюдения, расположенных на продолжении траектории источника в твёрдом теле, получено точное аналитическое выражение для поля переходного излучения. Проанализировано влияние эффектов взаимодействия продольных и поперечных волн на поверхности упругой среды на пространственное распределение поля переходного излучения.

Для динамической теории упругости традиционными являются задачи о возбуждении волн при различных импульсных или периодических воздействиях на среду. Однако помимо источников, обладающих набором собственных частот, волны могут возбуждаться движущимися источниками с постоянной производительностью, не имеющими собственной частоты. Излучение, возникающее при равномерном движении таких источников в неоднородных средах или вблизи границ сред, получило название переходного излучения. Наиболее полное развитие получила теория переходного излучения электромагнитных волн [1–3]. Переходное излучение акустических волн впервые было рассмотрено в [4]. Подробный анализ переходного излучения в акустике дан в обзоре [5]. В работах [6–9] исследованы различные аспекты переходного излучения акусто-гравитационных волн, возникающего при движении источника массы в экспоненциально стратифицированной атмосфере. Переходное излучение упругих волн в кристаллах движущимися дислокациями проанализировано в [10, 11]. Излучение упругих волн источниками, движущимися в газе вблизи границы твёрдого тела, и, в частности, в приземных слоях атмосферы, изучено недостаточно полно.

В реальных условиях Земля, и атмосфера представляют собой сложные неоднородные среды, характеристики которых могут меняться с течением времени, а граница раздела между ними имеет весьма сложную форму. Тем не менее теоретическое исследование взаимодействия геосфер Земли через посредство происходящих в них волновых процессов

представляет интерес уже в рамках идеализированных моделей. В настоящей работе методом контурного интегрирования [12] решена задача о переходном излучении сейсмических волн источником массы постоянной производительности, равномерно движущимся в газе по нормали к границе раздела однородных газообразного и упругого полупространств и исчезающим в момент касания твёрдого тела. Смещения в упругом полупространстве представлены в виде однократного интеграла по замкнутому контуру. Эти интегралы вычислены приближённо вблизи фронтов сферических продольной и поперечной волн, а также конической волны. Исследовано влияние эффектов взаимодействия продольных и поперечных волн на поверхности твёрдого тела на форму импульса переходного излучения. Для точек, лежащих на продолжении траектории источника в упругом полупространстве, получено точное аналитическое выражение для поля переходного излучения. Аналогичная задача рассматривалась ранее в [13], однако указанные эффекты там не анализировались. Излучение акустических волн источником массы на границе газ — твёрдое тело детально исследовано в [14].

Итак, пусть источник массы с постоянной производительностью Q равномерно движется в газе с звуковой скоростью v из области $z = -\infty$ в положительном направлении оси z цилиндрической системы координат r, φ, z и исчезает в момент касания поверхности твёрдого тела. Как и в классических задачах о переходном излучении в электродинамике [3, 15] исключим из рассмотрения нестационарные процессы, связанные с началом движения источника. Однородный газ, заполняющий полупространство $z < 0$, будем характеризовать плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1 , а однородное изотропное твёрдое тело, занимающее полупространство $z > 0$ — плотностью ρ_2 и скоростями продольной и поперечной волн соответственно c_L и c_t . Газодинамические возмущения при $z < 0$ описываются потенциалом скоростей φ_1 , который удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi_1 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = \frac{Q}{\rho_1} H(-t) \frac{\lambda}{2\pi(\lambda^2 + r^2)^{3/2}} \delta(z - vt). \quad (1)$$

В (1) t — время, δ — дельта-функция Дирака, H — ступенчатая функция Хевисайда, а λ — характерный поперечный размер источника. Введение распределённого источника необходимо для использования развитых в [12] методов контурного интегрирования. Результаты для точечного источника получим предельным переходом $\lambda \rightarrow 0$ в окончательных выражениях для волновых полей.

Возмущения в упругом полупространстве будем описывать скалярным ψ и векторным $\vec{A} = A \vec{e}_\varphi$ (\vec{e}_φ — орт оси φ) потенциалами смещений, которые связаны со смещениями соотношением

$$\vec{u} = \text{grad } \psi + \text{rot } \vec{A}, \quad \text{div } \vec{A} = 0. \quad (2)$$

Для потенциалов ψ и \vec{A} справедливы однородные волновые уравнения

$$\Delta\psi - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta A - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

которые совместно с уравнением (1) необходимо решать с граничными условиями, выражающими непрерывность вертикальных смещений и нормальных к границе компонент тензора напряжений, а также равенство нулю тангенциальных компонент тензора напряжений на поверхности контакта двух сред[16].

Решения уравнений для ψ и \vec{A} в виде интегралов Фурье представляются следующим образом:

$$\psi = \frac{Q}{4\pi^2\rho_1 v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^\infty T_\ell(\omega, k) \exp(-i\omega t + i\alpha_\ell z - \lambda k) J_0(kr) k dk, \quad (4)$$

$$A = \frac{Q}{4\pi^2\rho_1 v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^\infty T_t(\omega, k) \exp(-i\omega t + i\alpha_t z - \lambda k) J_1(kr) k dk, \quad (5)$$

где k — горизонтальное волновое число, ω — циклическая частота, J_0 и J_1 — функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков,

$$T_\ell = \frac{i\omega\varepsilon(\alpha_1 + \omega/v)(k_t^2 - 2k^2)}{c_t^2 \alpha_1 S_0(\omega, k)},$$

$$T_t = -\frac{2\omega\varepsilon k \alpha_\ell (\alpha_1 + \omega/v)}{c_t^2 \alpha_1 S_0(\omega, k)},$$

$$S_0(\omega, k) = R_0(\omega, k) + \varepsilon k_t^4 \alpha_\ell / \alpha_t, \quad \varepsilon = \rho_1 / \rho_2,$$

$$R_0(\omega, k) = (k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 \alpha_\ell \alpha_t, \quad \alpha_{1,\ell,t} = (k_{1,\ell,t}^2 - k^2)^{1/2},$$

$k_{1,\ell,t} = \omega/c_{1,\ell,t}$ — волновые числа акустической волны в газе и продольной и поперечной волне в твёрдом теле. Вводя в среды малое затухание можно показать, что контур интегрирования по ω в (4), (5) должен проходить выше особых точек подынтегральных выражений, т. е. в области $\text{Im } \omega > 0$. Для сходимости интегралов (4), (5) при $z \rightarrow \infty$ необходимо считать, что $(\omega^2/c_{1,\ell,t}^2 - k^2)^{1/2} = i |(k^2 - \omega^2/c_{1,\ell,t}^2)^{1/2}|$ при $k > |\omega|/c_{1,\ell,t}$.

Рассмотрим вначале смещения $\vec{u}^{(\ell)}$, определяемые скалярным потенциалом ψ . Делая в интеграле Фурье (4) замену $\omega = c_\ell k' \chi$, $k = k'$, а затем

$\chi = (1 - \theta^2)^{-1/2}$ [12], и пользуясь соотношением (2) получим для компонент смещений выражения в виде интегралов по замкнутому контуру:

$$u_x^{(\ell)} = -\frac{iQc_\ell}{4\pi^2\rho_2c_t^2R} \oint_{L_\ell} \frac{T_{tx}(\theta)d\theta}{E_\ell(\theta)} \quad (6)$$

$$u_r^{(\ell)} = -\frac{iQrc_\ell}{4\pi^2\rho_2c_t^2R} \oint_{L_\ell} \frac{T_{tr}(\theta)d\theta}{E_\ell(\theta)D_\ell(\theta)} \quad (7)$$

В (6), (7) θ — безразмерная переменная интегрирования, $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$ — расстояние от источника до точки наблюдения,

$$T_{tx}(\theta) = \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)\theta[(\theta^2 + \eta^2)^{1/2} + 1/M_\ell]}{M_\ell(\theta^2 + \eta^2)^{1/2}(\theta^2 - \gamma_\ell^2)S_\ell(\theta)},$$

$$T_{tr}(\theta) = (1 - \theta^2)T_{tx}(\theta)/\theta,$$

$$M_\ell = v/c_\ell, \quad \gamma_\ell^2 = 1 + (1/M_1^2 - 1)/n_\ell^2, \quad M_1 = v/c_1, \quad n_\ell = c_1/c_\ell,$$

$$D_\ell(\theta) = c_\ell t - z\theta - RE_\ell(\theta) - i\lambda(1 - \theta^2)^{1/2},$$

$$S_\ell(\theta) = R_\ell(\theta) + \epsilon a^4\theta(\theta^2 - \eta^2)^{-1/2}, \quad a = c_\ell/c_t,$$

$$R_\ell(\theta) = (2\theta^2 + a^2 - 2)^2 + 4\theta(1 - \theta^2)(\theta^2 + \mu^2)^{1/2},$$

$$\eta^2 = c_\ell^2/c_1^2 - 1, \quad \mu^2 = c_\ell^2/c_t^2 - 1,$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} (\theta^2 + \mu^2)^{1/2} = i|\theta|, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} (\theta^2 + \eta^2)^{1/2} = i|\theta|,$$

$$E_\ell(\theta) = \left[(\theta - q_1^{(\ell)})(\theta - q_2^{(\ell)}) - 2(i\lambda/R^2)(1 - \theta^2)^{1/2}(c_\ell t - z\theta) \right]^{1/2},$$

$$q_{1,2}^{(\ell)} = \left[c_\ell t z \pm r(R^2 - c_\ell^2 t^2)^{1/2} \right] / R^2,$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} (1 - \theta^2)^{1/2} = -i\theta, \quad \lim_{\substack{\theta \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} E_\ell(\theta) = \theta.$$

Контур интегрирования L_ℓ изображён на рис. 1.

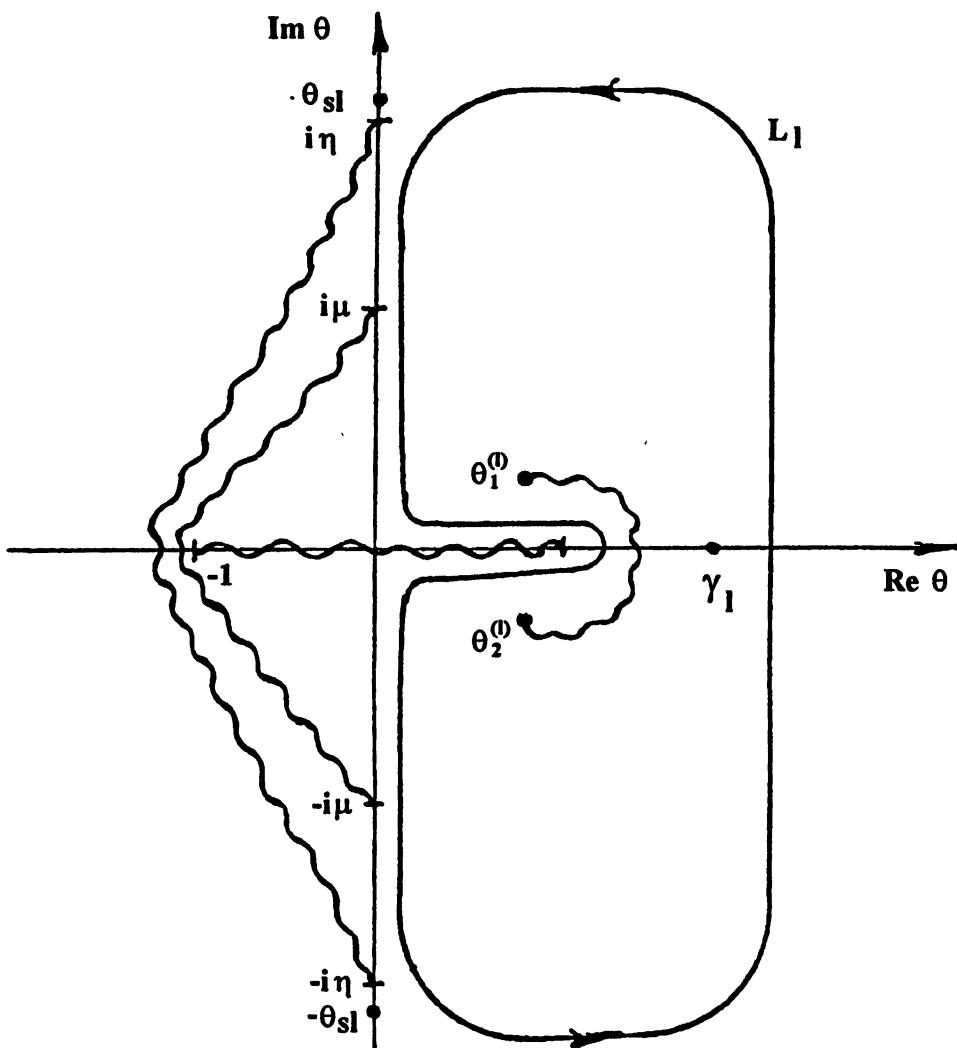


Рис. 1. Контур интегрирования L_ℓ и особые точки подынтегральных выражений (6), (7). Разрезы показаны волнистыми линиями.

Для выполнения интегрирования в (6), (7) необходимо проанализировать особые точки подынтегральных выражений. Точки ветвления $\theta = \pm 1$, $\theta = \pm i\mu$, $\theta = \pm i\eta$ аналитических функций $(1 - \theta^2)^{1/2}$, $(\theta^2 + \mu^2)^{1/2}$, $(\theta^2 + \eta^2)^{1/2}$ и определяемые из решения уравнения $S_\ell(\theta) = 0$ полюса $\pm\theta_{sl} = i(c_\ell^2/c_s^2 - 1)^{1/2}$ (c_s — скорость поверхностной волны Стонели) лежат вне контура L_ℓ . При $z > c_\ell t$ аналитическая функция $E_\ell(\theta)$ не имеет точек ветвления на рассматриваемом листе римановой поверхности [12], и интегралы (6), (7) пропорциональны вычетам в полюсе $\theta = \gamma_\ell$. В предельном случае точечного источника ($\lambda \rightarrow 0$) результаты интегрирования имеют вид:

$$u_{\text{зкт}}^{(\ell)} = \frac{Q c_\ell (2\gamma_\ell^2 - 2 + a^2) \gamma_\ell}{2\pi \rho_2 c_\ell^2 R M_\ell S_\ell(\gamma_\ell) \epsilon_\ell(\gamma_\ell)}, \quad (8)$$

$$u_{rct}^{(\ell)} = \frac{Q c_\ell r (2\gamma_\ell^2 - 2 + a^2) (1 - \gamma_\ell^2)}{2\pi \rho_2 c_t^2 R M_\ell S_\ell(\gamma_\ell) \varepsilon_\ell(\gamma_\ell) d_\ell(\gamma_\ell)}, \quad (9)$$

где

$$d_\ell(\theta) = c_\ell t - z\theta - R\varepsilon_\ell(\theta), \quad \varepsilon_\ell(\theta) = [(\theta - q_1^{(\ell)}) (\theta - q_2^{(\ell)})]^{1/2}.$$

Выражения (8), (9) описывают статические поля смещений во всём упругом полупространстве $z > 0$ при $t < 0$, т. е. до момента касания источником границы. При $t > 0$ выражения (8), (9) полностью описывают смещения, определяемые скалярным потенциалом, только в области $z < c_\ell t$, куда ещё не пришёл импульс переходного излучения.

При $z < c_\ell t$ аналитическая функция $E_\ell(\theta)$ имеет внутри контура L_ℓ на рассматриваемом листе римановой поверхности точки ветвления [12]

$$Q_{1,2}^{(\ell)} = q_1^{(\ell)} \pm i \frac{\lambda \sin^2(\delta - \delta_\ell)}{R \sin \delta_\ell},$$

где $\delta = \arccos(z/R)$, $\delta_\ell = \arccos(c_\ell t/R)$. Интегралы по берегам разреза, проведённого между этими точками ветвления, описывают вертикальные и горизонтальные смещения в продольной волне, которые в предельном случае точечного источника имеют вид:

$$u_z^{(\ell)} = -\frac{i Q c_\ell H(t - R/c_\ell)}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 R} \oint_{L_{\ell q}} \frac{T_{\ell z}(\theta) d\theta}{\varepsilon_\ell(\theta)}, \quad (10)$$

$$u_r^{(\ell)} = -\frac{i Q r c_\ell H(t - R/c_\ell)}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 R} \oint_{L_{\ell q}} \frac{T_{\ell r}(\theta) d\theta}{\varepsilon_\ell(\theta) d_\ell(\theta)}, \quad (11)$$

где контур $L_{\ell q}$ охватывает разрез, проведённый между точками ветвления $q_{1,2}^{(\ell)}$ аналитической функции $\varepsilon_\ell(\theta)$, и

$$H(t - R/c_\ell) = \begin{cases} 1, & t > R/c_\ell, \\ 0, & t < R/c_\ell, \end{cases}$$

— ступенчатая функция Хевисайда.

Интегралы (10), (11) вычисляются аналитически вблизи фронта сферической продольной волны, где $R \lesssim c_\ell t$, так что $c_\ell t z \gg r(c_\ell^2 t^2 - R^2)^{1/2}$ и $\varepsilon_\ell(\theta) \simeq \theta - z/R$. Результаты интегрирования пропорциональны вычетам в полюсе $\theta = z/R$:

$$u_z^{(\ell)} \Big|_{R \lesssim c_\ell t} \simeq u_{o\ell} \cos \delta, \quad u_r^{(\ell)} \Big|_{R \lesssim c_\ell t} \simeq u_{o\ell} \sin \delta, \quad (12)$$

$$u_{\alpha t} = \frac{Q c_t z H(t - R/c_t)(a^2 - 2r^2/R^2) \left[(z^2/R^2 + \eta^2)^{1/2} + 1/M_t \right]}{2\pi\rho_2 c_t^2 R^2 (z^2/R^2 + \eta^2)^{1/2} S_t(z/R) M_t(z^2/R^2 - \gamma_t^2)}.$$

На продолжении траектории источника в твёрдом теле, т. е. при $r = 0$, $\varepsilon_t(\theta) = \theta - c_t t/z$, и интеграл (10) пропорционален вычету в полюсе $\theta = c_t t/z$. Таким образом, для вертикальных смещений при $r = 0$ получаем точное аналитическое выражение:

$$u_z^{(t)} \Big|_{r=0} = \frac{Q c_t^3 t^2 H(t - z/c_t)(2c_t^2 t^2/z^2 - 2 + a^2) \left[(c_t^2 t^2/z^2 + \eta^2)^{1/2} + 1/M_t \right]}{2\pi\rho_2 c_t^2 z^2 (c_t^2 t^2 + z^2 \eta^2)^{1/2} S_t(c_t t/z) M_t(c_t^2 t^2/z^2 - \gamma_t^2)} \quad (13)$$

Перейдём к вычислению смещений $\tilde{u}^{(t)}$, определяемых векторным потенциалом \tilde{A} . Делая в интеграле Фурье (5) замену $\omega = c_t k' \chi$, $k = k'$, а затем $\chi = (1 - \theta^2)^{-1/2}$ [12], и пользуясь соотношением (2) получим для компонент смещений выражения в виде интегралов по контуру L_t (рис. 2):

$$u_z^{(t)} = -\frac{iQ}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint_{L_t} \frac{T_{tz}(\theta) d\theta}{E_t(\theta)}, \quad (14)$$

$$u_r^{(t)} = \frac{iQ}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint_{L_t} \frac{T_{tr}(\theta) d\theta}{E_t(\theta) D_t(\theta)}, \quad (15)$$

где

$$T_{tz}(\theta) = \frac{(\theta^2 - \alpha^2)(1 - \theta^2)\theta \left[(\theta^2 + \beta^2)^{1/2} + 1/M_t \right]}{M_t(\theta^2 + \beta^2)^{1/2}(\theta^2 - \gamma_t^2) S_t(\theta)},$$

$$T_{tr}(\theta) = \theta T_{tz}(\theta),$$

$$M_t = v/c_t, \quad \gamma_t^2 = 1 + (1/M_t^2 - 1)/n_t^2, \quad n_t = c_1/c_t,$$

$$D_t(\theta) = c_1 t - z\theta - R E_t(\theta) - i\lambda(1 - \theta^2)^{1/2},$$

$$S_t(\theta) = R_t(\theta) + \varepsilon (\theta^2 - \alpha^2)^{1/2} (\theta^2 + \beta^2)^{-1/2}, \quad \alpha^2 = 1 - n^2, \quad n = c_t/c_t;$$

$$R_t(\theta) = (1 - 2\theta^2)^2 + 4\theta(1 - \theta^2)(\theta^2 - \alpha^2)^{1/2}, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} (\theta^2 - \alpha^2)^{1/2} = \theta,$$

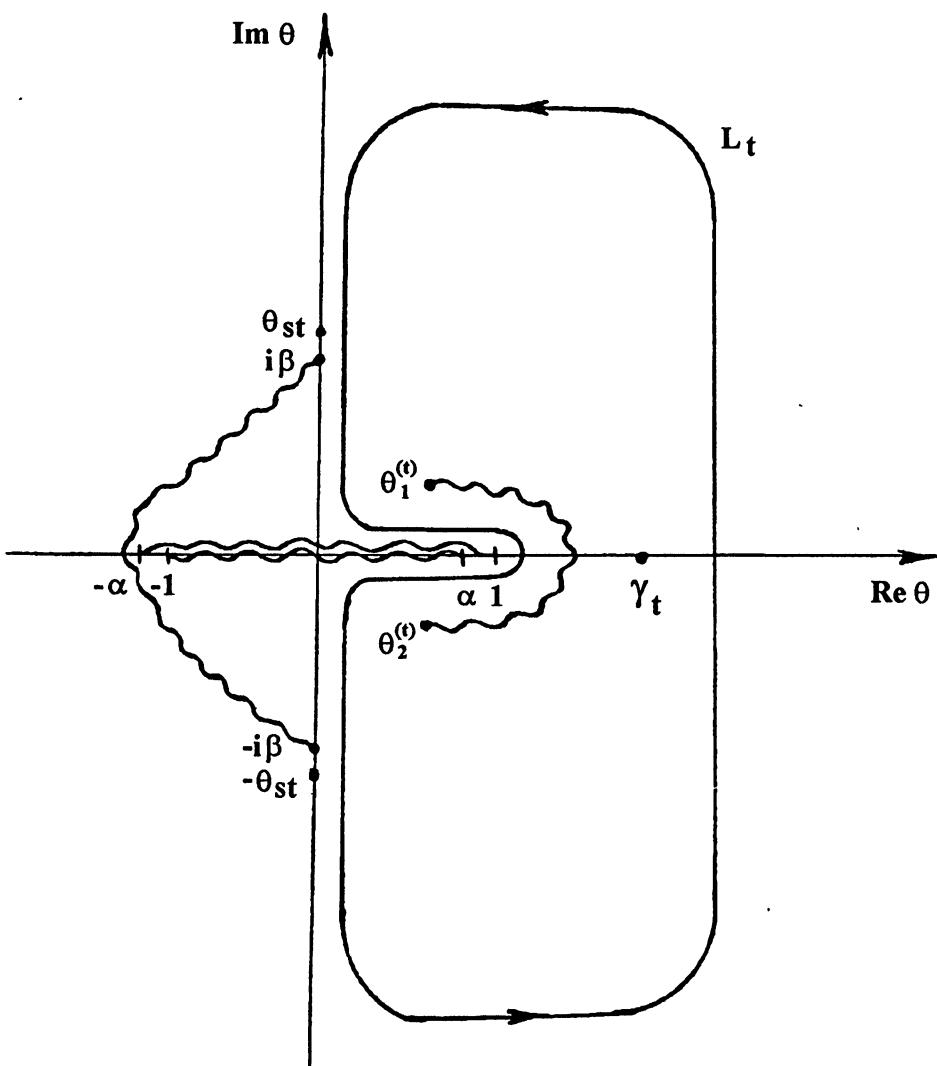


Рис. 2. Контур интегрирования L_t и особые точки подынтегральных выражений (14), (15).

$$\beta^2 = c_t^2/c_1^2 - 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} (\theta^2 + \beta^2)^{1/2} = i |\theta|,$$

$$E_t(\theta) \doteq \left[(\theta - q_1^{(t)})(\theta - q_2^{(t)}) - 2(i\lambda/R^2)(1 - \theta^2)^{1/2}(c_t t - z\theta) \right]^{1/2},$$

$$q_{1,2}^{(t)} = \left[c_t t z \pm r(R^2 - c_t^2 t^2)^{1/2} \right] / R^2, \quad \lim_{\substack{\theta \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} E_t(\theta) = \theta.$$

В области $z > c_t t$ существуют только статические возмущения, которые определяются вычетами в полюсе $\theta = \gamma_t$ и в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ описываются формулами:

$$u_{zct}^{(t)} = \frac{Q(\gamma_t^2 - \alpha^2)^{1/2}(1 - \gamma_t^2)}{\pi \rho_2 c_t R M_t S_t(\gamma_t) \varepsilon_t(\gamma_t)}, \quad (16)$$

$$u_{rct}^{(t)} = -\frac{Q r (\gamma_t^2 - \alpha^2)^{1/2}(1 - \gamma_t^2)}{\pi \rho_2 c_t R M_t S_t(\gamma_t) \varepsilon_t(\gamma_t) d_t(\gamma_t)}, \quad (17)$$

где

$$d_t(\theta) = c_t t - z\theta - R\varepsilon_t(\theta), \quad \varepsilon_t(\theta) = [(\theta - q_1^{(t)})(\theta - q_2^{(t)})]^{1/2}.$$

Аналогично выражениям (8), (9) формулы (16), (17) описывают статические поля смещений в области $z > 0$ до момента касания источником границы. При $t > 0$ выражения (16), (17) полностью описывают смещения, определяемые векторным потенциалом, только в области $z > c_t t$, куда ещё не пришёл импульс переходного излучения.

При $z < c_t t$ аналитическая функция $E_t(\theta)$ имеет внутри контура L_t на рассматриваемом листе римановой поверхности точки ветвления [12]

$$Q_{1,2}^{(t)} = q_1^{(t)} \pm i \frac{\lambda \sin^2(\delta - \delta_t)}{R \sin \delta_t},$$

где $\delta_t = \arccos(c_t t / R)$. Точки ветвления $\theta = \pm\alpha$, $\theta = \pm i\beta$, $\theta = \pm 1$ и полюса $\pm\theta_{st} = i(c_t^2/c_s^2 - 1)^{1/2}$ лежат вне контура L_t .

При вычислении интеграла (14), (15) следует рассмотреть случаи $R > c_t t$ и $R < c_t t$ и учесть две возможные ситуации: $\operatorname{Re} Q_1^{(t)} > \alpha$ и $\operatorname{Re} Q_1^{(t)} < \alpha$. Условие $\operatorname{Re} Q_1^{(t)} = \alpha$ можно переписать в виде $t = t_k = r/c_t + z\alpha/c_t$, где t_k — время прихода в точку с координатами (r, z) , конической волны [17, 18]. Коническая волна существует в области углов $\delta > \theta_0$, где $\theta_0 = \arcsin n$.

Анализ, аналогичный проведённому в [12], показывает, что в области углов $\delta < \theta_0$, где $\operatorname{Re} Q_1^{(t)} > \alpha$ и коническая волна отсутствует, смещения в поперечной волне, генерируемой при остановке и выключении точечного источника массы, имеют следующий интегральный вид:

$$u_z^{(t)} = -\frac{i Q H(t - R/c_t)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint_{L_{tq}} \frac{T_{tz}(\theta) d\theta}{\varepsilon_t(\theta)}, \quad (18)$$

$$u_r^{(t)} = \frac{i Q r H(t - R/c_t)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint_{L_{tq}} \frac{T_{tr}(\theta) d\theta}{\varepsilon_t(\theta) d_t(\theta)}, \quad (19)$$

где контур L_{tq} охватывает разрез, проведённый между точками ветвления $q_{1,2}^{(t)}$ аналитической функции $\varepsilon_t(\theta)$.

Из (18), (19) следует, что вблизи фронта поперечной сферической волны смещения описываются формулами:

$$u_z^{(t)} \Big|_{R \gtrsim c_t t} \simeq u_{ot} \sin \delta, \quad u_r^{(t)} \Big|_{R \gtrsim c_t t} \simeq -u_{ot} \cos \delta, \quad (20)$$

$$u_{ot} = \frac{QrzH(t - R/c_t)(z^2/R^2 - \alpha^2)^{1/2}[(z^2/R^2 - \alpha^2)^{1/2} + 1/M_t]}{\pi \rho_2 c_t R^3 (z^2/R^2 + \beta^2)^{1/2} S_t(z/R) M_t (z^2/R^2 - \gamma_t^2)}.$$

Для описания поля в области углов $\delta > \theta_0$ представим величины $T_{tz}(\theta)$ и $T_{tr}(\theta)$ в виде:

$$T_{tz} = T_{1z} + T_{2z} \sqrt{\theta^2 - \alpha^2}, \quad T_{tr} = T_{1r} + T_{2r} \sqrt{\theta^2 - \alpha^2},$$

$$T_{1z}(\theta) = -\frac{[4\theta(1-\theta^2) + \varepsilon(\theta^2 + \beta^2)^{1/2}](\theta^2 - \alpha^2)(1-\theta^2)\theta[(\theta^2 + \beta^2)^{1/2} + 1/M_t]}{(\theta^2 + \beta^2)^{1/2} \tilde{W}_t(\theta) M_t (\theta^2 - \gamma_t^2)},$$

$$T_{2z}(\theta) = \frac{(1 - 2\theta^2)^2(1 - \theta^2)\theta[(\theta^2 + \beta^2)^{1/2} + 1/M_t]}{(\theta^2 + \beta^2)^{1/2} \tilde{W}_t(\theta) M_t (\theta^2 - \gamma_t^2)},$$

$$T_{1r}(\theta) = \theta T_{1z}(\theta), \quad T_{2r}(\theta) = \theta T_{2z}(\theta),$$

$$\tilde{W}_t(\theta) = W_t(\theta) - 8\varepsilon \frac{\theta(1 - \theta^2)(\theta^2 - \alpha^2)}{(\theta^2 + \beta^2)^{1/2}} - \varepsilon^2 \frac{\theta^2 - \alpha^2}{\theta^2 + \beta^2},$$

$$W_t(\theta) = 16\alpha^2\theta^6 + 8(1 - 4\alpha^2)\theta^4 + 8(2\alpha^2 - 1)\theta^2 + 1.$$

Во временном интервале $t_k < t < R/c_t$ переходное излучение, описываемое векторным потенциалом, представляет собой коническую волну:

$$u_{zk} = \frac{2QH(R/c_t - t)H(\alpha_t - q_1^{(t)})}{\pi^2 \rho_2 c_t R} \int_{\alpha}^{q_1^{(t)}} \frac{T_{2z}(\theta)(\alpha^2 - \theta^2)^{1/2}}{\varepsilon_t(\theta)} d\theta, \quad (21)$$

$$u_{rk} = -\frac{2QrH(R/c_t - t)H(\alpha_t - q_1^{(t)})}{\pi^2 \rho_2 c_t R} \int_{\alpha}^{q_1^{(t)}} \frac{T_{2r}(\theta)(\alpha^2 - \theta^2)^{1/2}}{\varepsilon_t(\theta) d_t(\theta)} d\theta. \quad (22)$$

Интегралы (21), (22) нетрудно вычислить вблизи фронта конической волны, где $q_1^{(t)} \approx \alpha$:

$$u_{zk} \Big|_{t \gtrsim t_k} \approx -u_{ok} n, \quad u_{rk} \Big|_{t \gtrsim t_k} \approx u_{ok} \alpha, \quad (23)$$

$$u_{ok} = \frac{Q H(R/c_t - t) H(\alpha - q_1^{(t)}) n \alpha^{3/2} (\alpha - q_1^{(t)}) [(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} + 1/M_t]}{\pi \rho_2 c_t R (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} (1 - 2\alpha^2)^2 [(r/R)(1 - c_t^2 t^2/R^2)^{1/2}]^{1/2} M_t (\alpha^2 - \gamma_t^2)}.$$

При $t > R/c_t$ смещения в области углов $\delta > \theta_0$ соответствуют сферической поперечной волне и в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ даются выражениями:

$$\begin{aligned} u_z^{(t)} &= -\frac{i Q H(t - R/c_t)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint_{L_{tq}} \frac{T_{1z}(\theta) d\theta}{\varepsilon_t(\theta)} + \\ &+ \frac{Q H(t - R/c_t) H(\alpha - \operatorname{Re} q_1^{(t)})}{\pi^2 \rho_2 c_t R} \left[\int_{\alpha}^{q_1^{(t)}} \frac{T_{2z}(\theta) (\alpha^2 - \theta^2)^{1/2}}{\varepsilon_t(\theta)} d\theta + \text{k.c.} \right], \\ u_r^{(t)} &= \frac{i Q r H(t - R/c_t)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint_{L_{tq}} \frac{T_{1r}(\theta) d\theta}{\varepsilon_t(\theta) d_t(\theta)} - \\ &- \frac{Q r H(t - R/c_t) H(\alpha - \operatorname{Re} q_1^{(t)})}{\pi^2 \rho_2 c_t R} \left[\int_{\alpha}^{q_1^{(t)}} \frac{T_{2r}(\theta) (\alpha^2 - \theta^2)^{1/2}}{\varepsilon_t(\theta) d_t(\theta)} d\theta + \text{k.c.} \right]. \end{aligned}$$

Вблизи фронта поперечной сферической волны, когда $c_t t z \gg r(c_t^2 t^2 - R^2)^{1/2}$, вертикальная и горизонтальная компоненты смещений при $\delta > \theta_0$ описываются приближёнными формулами:

$$u_z^{(t)} \Big|_{R \approx c_t t} \simeq (u_o^{(t)} + u_{op}^{(t)}) \sin \delta, \quad u_r^{(t)} \Big|_{R \approx c_t t} \simeq -(u_o^{(t)} + u_{op}^{(t)}) \cos \delta, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u_o^{(t)} &= \frac{Q r z (\alpha^2 - z^2/R^2) H(t - R/c_t)}{\pi \rho_2 c_t R^3 (z^2/R^2 + \beta^2)^{1/2} \tilde{W}_t(z/R)} \left[\frac{4r^2 z}{R^3} + \frac{\varepsilon}{(z^2/R^2 + \beta^2)^{1/2}} \right] \times \\ &\times \frac{(z^2/R^2 + \beta^2)^{1/2} + 1/M_t}{M_t (z^2/R^2 - \gamma_t^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{op}^{(t)} &= \frac{2 Q r z (1 - 2z^2/R^2) (\alpha^2 - z^2/R^2)^{1/2} H(\alpha - z/R) [(z^2/R^2 + \beta^2)^{1/2} + 1/M_t]}{\pi^2 \rho_2 c_t R^3 (z^2/R^2 + \beta^2)^{1/2} \tilde{W}_t(z/R) M_t (z^2/R^2 - \gamma_t^2)} \times \\ &\times \ln \left[\frac{r}{R} \left(1 - \frac{c_t^2 R^2}{R^2} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Первые слагаемые в (24) аналогичны смещениям, которые имеют место в области углов $\delta < \theta_0$. Вторые слагаемые в (24) описывают искажения формы импульса переходного излучения, которые связаны с взаимодействием продольных и поперечных волн на границе упругой среды и существуют только в области $\delta > \theta_0$.

Анализ полученных выше результатов позволяет сделать следующие выводы. До момента касания источником границы ($t < 0$) в упругой среде существуют статические деформации, создаваемые движущимся источником и его изображением. В момент касания источником границы ($t = 0$) генерируется импульс переходного излучения, после прохождения которого через некоторую область среды какие-либо возмущения в этой области исчезают.

В предельном случае неподвижного источника ($v = 0$), выражения (12), (13), (20), (23) и (24) описывают сейсмические волны, возникающие при "выключении" точечного источника массы, находящегося на границе раздела однородных газообразной и упругой сред. При этом в газе генерируется дельта-импульс давления отрицательной полярности. Задача о возбуждении упругих волн импульсным звуковым источником, находящимся в граничащем с твёрдой средой газе, решена в [19].

Значительный интерес представляет исследование поля переходного излучения для точек наблюдения, лежащих на границе раздела сред. Известно, что в идеализированной ситуации, когда точечный звуковой источник находится на плоской границе раздела однородных невязких жидкостей, сферическая акустическая волна вдоль границы не распространяется. Это связано с тем, что коэффициент отражения звука при скользящем падении равен минус единице [16], так что падающая и отражённая волны компенсируют друг друга. Сигнал, распространяющийся вдоль границы, представляет собой только боковую волну (см., например, [12]). В случае, если одна из граничащих сред является упругой, вдоль границы раздела распространяются боковые, поверхностная и вытекающая волны [20]. Поле переходного излучения на границе газ – твёрдое тело может быть вычислено при малых по сравнению со скоростью звука в газе скоростях движения источника, как это было сделано ранее для границы раздела двух жидкостей [21]. Эта задача, ввиду её сложности и громоздкости, будет решена в отдельной работе.

В заключение отметим, что в лабораторных условиях экспериментальная проверка полученных здесь и в работе [14] теоретических результатов может быть проведена с помощью источника тепла, который создаётся сфокусированным лазерным [22] (термооптический источник) или ультразвуковым излучением. Движением такого источника легко управлять, он исключает эффекты обтекания тела источника средой и может перемещаться с большими скоростями. Газодинамические возмущения, создаваемые движущимся в среде тепловым источником, описываются

уравнением, полностью аналогичным уравнению (1) [23].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. - 624 с.
2. Болотовский Б. М. //УФН, 1961. Т. 75. Вып. 2. С. 295.
3. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. — М.: Наука, 1984. - 360 с.
4. Докучаев В. П. //ЖЭТФ, 1962. Т. 43. № 2(8). С. 595.
5. Павлов В. И., Сухоруков А. И. //УФН, 1985. Т. 147. Вып. 1. С. 83.
6. Григорьев Г. И., Савина О. Н. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1983. Т. 26. № 2. С. 135.
7. Джангирян Р. Г., Костанян Ф. А. //Изв. АН Армянской ССР. Физика, 1984. Т. 19. Вып. 5. С. 245.
8. Эйдман В. Я. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1984. Т. 27. № 12. С. 1545.
9. Григорьев Г. И., Денисов Н. Г., Савина О. Н. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1989. Т. 32. № 2. С. 145.
10. Нацик В. Д. //Письма в ЖЭТФ, 1968. Т. 8. № 6. С. 324.
11. Нацик В. Д., Бурканов А. Н. //ФТТ, 1972. Т. 14. № 5. С. 1289.
12. Курин В. В., Немцов Б. Е., Эйдман В. Я. //УФН, 1985. Т. 147. Вып. 1. С. 157.
13. Докучаев В. П., Разин А. В. //Изв. АН СССР. Физика Земли, 1987. № 8. С. 56.
14. Разин А. В. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1997. Т. 40. № 4. С. 420.
15. Гинзбург В. Л., Франк И. М. //ЖЭТФ, 1946. Т. 16. № 1. С. 15.
16. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. - 343 с.
17. Ewing W. M., Jardetsky W. S., Press F. Elastic waves in layered media. — New York: McGraw – Hill Book Co., Inc., 1957. 380 р.
18. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. — М.: Наука, 1986. - 328 с.
19. Разин А. В. //Акуст. журн., 1993. Т. 39. № 3. С. 530.
20. Разин А. В. //Изв. РАН. Физика Земли, 1993. № 2. С. 73.
21. Немцов Б. Е., Разин А. В. Излучение звука источником массы, пересекающим границу раздела сред. //Препринт № 221. — Горький: НИРФИ, 1986. - 37 с.
22. Луговой В. Н., Стрельцов В. Н. //ЖЭТФ, 1973. Т. 65. № 4. С. 1407.
23. Лямшев Л. М., Седов Л. В. //Акуст. журн., 1981. Т. 27. № 1. С. 5.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
4 июля 1997 г.

**TRANSITION RADIATION OF SEISMIC WAVES AT THE
ATMOSPHERE-EARTH INTERFACE***A. V. Razin*

A problem is solved by the method of contour integration on the transition radiation of elastic waves by the mass production source moving uniformly in gas over the normal to the interface of homogeneous gaseous and elastic halfspaces and vanishing at the moment of the solid body surface contact. Asymptotic formulas have been derived for the field of the transition radiation, which are valid near fronts of longitudinal and transverse spherical waves and near a front of a conic wave. For points of observation located at the source trajectory continuation in the solid body the exact analytical expression has been obtained for the field of the transition radiation. The influence of the effects of longitudinal and transverse wave interaction on the surface of the solid medium on the transition radiation field have been analyzed.

УДК 533.951

**ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ
В ПЛАЗМЕ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ, С УЧЁТОМ
ДЕЙСТВИЯ ПОЛЯ НА ПЛАЗМУ И ДВИЖЕНИЕ
ЧАСТИЦЫ**

Э. А. Акопян, Г. Б. Нерсисян, Г. Г. Матевосян

В настоящей работе рассмотрены поляризационные потери заряженной частицей в Максвелловской плазме, помещённой во внешнее высокочастотное (ВЧ) электрическое поле. При этом учитываются осцилляции под действием внешнего поля как самой частицы, так и электронов плазмы. При получении выражений для потерь частицы предполагалось, что вектор поступательного движения частицы и составляет произвольный угол с вектором напряжённости внешнего ВЧ поля.

Вопрос о поляризационных потерях заряженной частицей в плазме при наличии внешнего электрического однородного поля $E = E_0 \sin(\omega_0 t)$ рассматривался в ряде работ [1–9]. В этих работах были получены выражения для поляризационных потерь, конкретизированные затем для частных случаев ориентации вектора E относительно вектора скорости поступательного движения частицы u ($E \perp u$; $E \parallel u$).

В настоящей работе проведён расчёт поляризационных потерь энергии заряженной частицей при произвольной ориентации вектора E относительно вектора u . Кроме того, в отличие от вышеуказанных работ, учитывается одновременно действие внешнего поля как на электродинамические свойства плазмы, так и на движение частицы.

Мы будем считать, что положительно заряженные ионы плазмы неподвижны и служат фоном, обеспечивающим электрическую нейтральность плазмы. Внешнее электрическое поле описывается выражением $E = E_0 \sin(\omega_0 t)$, т.е. однородно. Последнее допущение возможно, если длина волн внешнего поля больше характерных размеров неоднородностей, возникающих в плазме. Будем считать также, что скорости движения частицы много меньше световой, так что электрическое поле в плазме можно считать потенциальным. Предполагается также, что за время пролёта частицы выполняется неравенство $|\delta E| \ll |E_0|$, где δE — величина напряжённости электрического поля в плазме. Основным состоянием будем считать состояние плазмы, помещённой во внешнее однородное электрическое поле. Как следствие этого, функция распределения основного состояния имеет вид

$$F = \Phi(v + v_E \cos(\omega_0 t)), \quad (1)$$

где $\mathbf{v}_E = e\mathbf{E}_0/m\omega_0$, e , m — заряд и масса электрона.

Среднюю за период внешнего поля величину потерь энергии заряженной частицей dW/dt определим выражением

$$\frac{dW}{dt} = q \langle [\mathbf{u} - \mathbf{v}_q \cos(\omega_0 t)][\mathbf{E}_0 \sin(\omega_0 t) + \delta\mathbf{E}] \rangle, \quad (2)$$

где $\mathbf{v}_q = q\mathbf{E}_0/m_q\omega_0$, q и m_q — заряд и масса проходящей частицы, \mathbf{u} — скорость поступательного движения частицы, скобки означают усреднение по периоду внешнего ВЧ поля.

Линеаризуя кинетическое уравнение по $\delta\mathbf{E}$ и решая его совместно с уравнением Пуассона, получим для величины напряжённости электрического поля в точке нахождения частицы $\delta\mathbf{E}(0, t)$ следующее выражение:

$$\delta\mathbf{E}(0, t) = -\frac{4\pi i q}{(2\pi)^3} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \exp[i(m-n)\omega_0 t] \int dk \frac{k}{k^2} \frac{J_n(ka)J_m(ka)}{\epsilon(k, n\omega_0 + ku)}, \quad (3)$$

где $\mathbf{a} = e\mathbf{E}_0/m\omega_0^2 - q\mathbf{E}_0/m_q\omega_0^2$, $J_n(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка n , $\epsilon(k, \omega)$ — продольная диэлектрическая проницаемость:

$$\epsilon(k, \omega) \equiv \epsilon_1(k, \omega) + i\epsilon_2(k, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{k}\partial\Phi(\mathbf{v})/\partial\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0}. \quad (4)$$

Подставляя значения величины $\delta\mathbf{E}(0, t)$ в выражение для потерь (2) и усредняя последнее по периоду ВЧ поля, получим для величины dW/dt выражение

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{4\pi i q^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk}{k^2} \left[ku - \frac{n(kv_q)}{(ka)} \right] \frac{J_n^2(ka)}{\epsilon(k, n\omega_0 + ku)}. \quad (5)$$

При отсутствии ВЧ поля или в случае, когда пробной частицей является электрон, потери, определяемые формулой (5), переходят в обычные Боровские потери.

Как видно из выражения (5), величина потерь энергии заряженной частицей зависит, кроме прочего, от её массы и знака её заряда. Последнее допускает простую физическую интерпретацию: в зависимости от знака заряда, проходящая частица колеблется либо в фазе, либо в противофазе с электронами плаэмы. Кроме этого, при каждом фиксированном значении волнового вектора \mathbf{k} оказываются различными, при прочих равных условиях, величины амплитуд полей ($J_n(ka)$), которые зависят от знака проходящего заряда и её массы.

Как известно [1, 2], основной вклад в выражение для потерь дают значения величин тех частот и волновых векторов, для которых плаэма проэрачна. С учётом этого выражение (5) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -\frac{q^2}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk}{k^2} \left[ku - \frac{n(kv_q)}{(ka)} \right] J_n^2(ka) \times \\ &\times \delta[\epsilon_1(k, n\omega_0 + ku)] \operatorname{sgn}[\epsilon_2(k, n\omega_0 + ku)], \end{aligned} \quad (6)$$

где интегрирование по \mathbf{k} ведётся в области прозрачности $\{C\}$. Рассмотрим подробно случай, когда частица движется в плазме с Максвелловским распределением. В этом случае

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \quad \operatorname{sgn}[\epsilon_2(\mathbf{k}, \omega)] = \operatorname{sgn}(\omega), \quad (7)$$

где ω_{Le} — ленгмюровская частота электронов плазмы. Выражение (6) при этом примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & -\frac{q^2}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk}{k^2} \left[ku - \frac{n(kv_q)}{(ka)} \right] J_n^2(ka) \times \\ & \times \delta \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(n\omega_0 + ku)^2} \right] \operatorname{sgn}(n\omega_0 + ku). \end{aligned} \quad (8)$$

При этом область прозрачности $\{C\}$ определяется неравенством $|n\omega_0 + ku| > kv_{Te}$, где v_{Te} — тепловая скорость электронов плазмы. Заметим, что это неравенство, вместе с условием обращения в нуль аргументов δ -функций, входящих в выражение (8), приводит к ограничению значений абсолютных величин волновых векторов возбуждаемых в плазме волн — $k \equiv |\mathbf{k}| < 1/r_{De}$, где r_{De} — дебаевский радиус электронов плазмы.

Преобразуя в выражении (8) δ -функции от сложного аргумента к δ -функциям от линейного по \mathbf{k} аргумента, получим

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & -\frac{q^2 \omega_{Le}^2}{2\pi} \int_C \frac{dk}{k^2} \left\{ J_0^2(ka) \delta(ku - \omega_{Le}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ku - \frac{n(kv_q)}{(ka)} \right] \times \right. \\ & \times \left. \frac{1}{\omega_{Le}} J_n^2(ka) [\delta(ku + n\omega_0 - \omega_{Le}) - \delta(ku + n\omega_0 + \omega_{Le})] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее мы будем считать, что во всей области интегрирования по \mathbf{k} выполняется условие $|ka| < 1$ или, что то же самое, $|a| < r_{De}$. В этом случае, ограничиваясь в выражении (9) членами, квадратичными по (ka) , получим для величины dW/dt выражение

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & -\frac{q^2 \omega_{Le}}{2\pi} \int_C \frac{dk}{k^2} \left\{ \omega_{Le} \left[1 - \frac{(ka)^2}{2} \right] \delta(ku - \omega_{Le}) + \right. \\ & + \left. \frac{(ka)^2}{4} \left[ku - \frac{(kv_q)}{(ka)} \right] [\delta(ku + \omega_0 - \omega_{Le}) - \delta(ku + \omega_0 + \omega_{Le})] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегрируя выражение (10), получим окончательно:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{q^2 \omega_{Le}^2}{2u} \left[\ln(1 + \lambda^2) + \frac{a^2}{8\lambda^2 r_{De}^2} Q(\lambda, b, s)(3 \cos^2 \psi - 1) \right], \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\lambda, b, s) = & (b+1)^2(b+1+bs)\ln\left[1+\frac{\lambda^2}{(b+1)^2}\right] - \\ & -(b-1)^2(b-1+bs)\ln\left[1+\frac{\lambda^2}{(b-1)^2}\right] - 2\ln(1+\lambda^2), \end{aligned} \quad (12)$$

$\lambda = u/v_{Te}$, $s = (q/m_q)/(e/m - q/m_q)$, $b = \omega_0/\omega_{Le} > 1$. Первое слагаемое в выражении (11) соответствует известным потерям быстрой частицей энергии на излучение плаазменных волн [1, 2]. Легко заметить, что полученное выражение для потерь при $m_q \rightarrow \infty$ (тяжёлая частица) и в соответствующих частных случаях относительной ориентации векторов u и E_0 переходит в выражения, полученные в работах [1, 2].

Обсудим теперь угловую зависимость для потерь. Функция $Q(\lambda, b, s)$ при $b > 1$ всегда положительна. Выражение же $(3\cos^2\psi - 1)$ меняет знак так, что при $0 \leq \psi \leq \psi_0 = \arccos(1/\sqrt{3})$ возбуждение волн с частотами $\omega_0 \pm \omega_{Le}$ приводит к дополнительным потерям энергии частицей. Наоборот, при углах $\psi_0 \leq \psi \leq \pi/2$ потери на возбуждение волн с частотами $\omega_0 \pm \omega_{Le}$ меняют знак, и полные потери энергии частицей уменьшаются. При движении частицы под углом $\psi = \psi_0$ высокочастотное поле не влияет на поляризационные потери. Заметим, что полученная угловая зависимость потерь имеет квадрупольный характер.

Из выражений (5)–(12) видно, что потери энергии заряженной частицы в плаазме, при наличии внешнего электрического поля, будут зависеть, кроме прочего, от знака её заряда и массы. С помощью выражения (11) найдём относительное отличие потерь энергии электрона (первое слагаемое в формуле (11)) и позитрона

$$P(\lambda) \equiv \frac{\left(-\frac{dW_+}{dt}\right) - \left(-\frac{dW_-}{dt}\right)}{\left(-\frac{dW_-}{dt}\right)} = \frac{a^2}{8r_{De}^2} \frac{Q(\lambda, b, s)}{\lambda^2 \ln(1 + \lambda^2)} (3\cos^2\psi - 1), \quad (13)$$

где $\left(-\frac{dW_-}{dt}\right)$, $\left(-\frac{dW_+}{dt}\right)$ — потери энергии электрона и позитрона соответственно. На рис. 1 показана зависимость величины P (в процентах) от параметра λ для значений углов $\psi = 0$, $\psi = \pi/6$, $\psi = \pi/4$, $\psi = \pi/3$ и $\psi = \pi/2$. Приняты следующие значения параметров a , b и s : $a = 0,5r_{De}$, $b = 10$, $s = -0,5$. Из приведённого рисунка видно, что разница в значениях потерь для электрона и позитрона небольшая. Следует, однако, отметить, что величина $P(\lambda)$ растёт с ростом амплитуды внешнего поля. Примечательно, что разница в потерях энергии заряженной положительно или отрицательно частицы зависит от внешних параметров (частота, амплитуда внешнего поля) и является в этом смысле управляемой величиной.

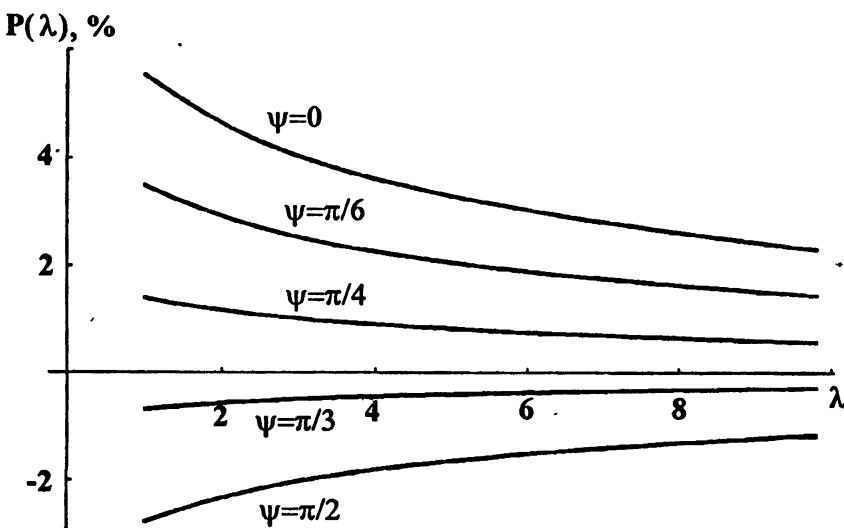


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тавгиридзе Т. Л., Цинцадзе Н. Л. //Журн. эксперим. и теорет. физики, 1970. Т. 58. С. 975.
2. Алиев Ю. М., Горбунов Л. М., Рамазашвили Р. Р. //Журн. эксперим. и теорет. физики, 1971. Т. 61. С. 1477.
3. Матевосян Г. Г. //Краткие сообщения по физике ФИАН, 1972. № 7. С. 13.
4. Матевосян Г. Г. //Изв. АН Арм. ССР. - Физика, 1973. Т. 13. С. 431.
5. Аматуни А. Ц., Магомедов М. Р., Сехпосян Э. В., Элбакян С. С. //Изв. АН Арм. ССР. - Физика, 1977. Т. 12. С. 244.
6. Акопян Э. А., Матевосян Г. Г. //Изв. вузов. - Радиофизика, 1983. Т. 26. С. 1310.
7. Акопян Э. А., Матевосян Г. Г. //Физика плаэмы, 1984. Т. 10. С. 648.
8. Arista N. R., Galvao R. O. M., Miranda L. C. M. //Phys. Rev. A, 1989. V. 40. P. 3808.
9. Акопян Э. А., Матевосян Г. Г. //Изв. вузов. - Радиофизика, 1992. Т. 35. С. 155.

Институт радиофизики и
электроники НАН Армении,
г. Аштарак

Поступила в редакцию
15 ноября 1996 г.

THE ENERGY LOSSES OF A CHARGED PARTICLE IN PLASMA IN THE EXTERNAL FIELD TAKING INTO ACCOUNT THE FIELD ACTION ON PLASMA AND THE MOTION OF THE PARTICLE

E. A. Akopyan, H. B. Nersisyan, H. H. Matevosyan

In this work we consider the polarisation losses of a charged particle of the Maxwellian plasma in the external high-frequency (HF) electric field. The oscillations of particles are taken into account as well as plasma electrons in the external field. In deriving of expressions of the energy losses , the orientation of velocity of particle uniform motion with respect to the HF external electric field is assumed to be arbitrary.

УДК 537.874.4

ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КРУПНОМАШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. Г. Лапин

Показано, что в периодически неоднородной среде возможно обратное рассеяние электромагнитных волн на случайных неоднородностях с масштабом, превышающим длину волны. Наибольшее рассеянное поле возникает в случае возникновения брэгговского резонатора, когда периодический слой является согласующей системой для падающей волны. Рассеяние эффективно даже для неоднородностей с масштабом много большим радиуса Френеля неоднородного слоя. Радиус корреляции рассеянного поля может быть столь же велик.

1. В данной работе исследуются особенности однократного рассеяния на случайных неоднородностях, помещённых в плоский слой периодически неоднородной среды. Ранее, в работах [1,2] исследовано распространение волн в периодически неоднородном слое и особо отмечены условия возбуждения брэгговского резонатора. Характерным для этих случаев является наличие больших значений волнового поля внутри слоя, превышающих амплитуду падающей волны. Кроме того, отражённое периодическим слоем поле может при определённых условиях обратиться в ноль, т.е. периодически неоднородная среда может являться согласованной системой. Ниже мы покажем, что наличие случайных неоднородностей даже очень большого масштаба в этих случаях приводит к значительному обратнорассеянному полю. Это поле будет наибольшим в случае, когда и падающая волна, и возмущённое поле удовлетворяют условиям возбуждения брэгговского резонатора, что определяет пространственный спектр рассеяния.

Исследованный периодически неоднородный слой с безотражательными границами является брэгговским фильтром для электромагнитных волн. Аналогичные фильтры используются в электронике СВЧ [3] (сконструированы на основе гофрированных волноводов), кроме того, в микроэлектронике широко используются брэгговские фильтры для поверхностных акустических волн [4]. В этой связи полученные здесь общие результаты о рассеянии на случайных неоднородностях могут быть полезны для оценки необходимой точности изготовления фильтров, с тем чтобы дефекты изготовления не влияли на характеристики устройств.

2. Допустим, что в периодически неоднородном слое $0 \leq z \leq L$ изотропной среды с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0(z) = \epsilon_{00} \times [1 - 2m \cos(2k_n z)] > 0$ ($\epsilon_{00}, m = \text{const}$) присутствуют малые хаотические неоднородности $\epsilon_1(\vec{r})$ ($|\epsilon_1| \ll |\epsilon_0|$), причём $\langle \epsilon_1 \rangle = 0$.

Предположим, что на слой под углом θ_0 к нормали падает плоская монохроматическая волна ТМ-поляризации: $\vec{H}_0 = \vec{e}_y \times \exp[i(-\omega t + k_0(z \cos \theta_0 + x \sin \theta_0))]$. В этом случае из системы Maxwella получим следующие уравнения для комплексных амплитуд магнитного поля падающей волны $H(z)$

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon_0}{dz} \frac{dH}{dz} + k_0^2 (\epsilon_0 - \sin^2 \theta_0) H = 0, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (1)$$

и возмущённого поля \vec{H}_1 :

$$\Delta \vec{H}_1 + \frac{1}{\epsilon_0} [\nabla \epsilon_0 \times \text{rot } \vec{H}_1] + k_0^2 \epsilon_0 \vec{H}_1 = - \left[\nabla \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \right) \times \text{rot } \vec{H}_0 \right] - k_0^2 \epsilon_1 \vec{H}_0, \quad (2)$$

где учтены только линейные по возмущению ϵ_1 члены. Введём в рассмотрение Фурье-компоненты по координатам, лежащим в плоскости слоя:

$$\{\vec{\Phi}, f\}(q_1, q_2, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\vec{H}_1, \epsilon_1\} e^{-i(q_1 x + q_2 y)} dx dy$$

При этом уравнение (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_x}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon_0}{dz} \left(\frac{d\Phi_x}{dz} - iq_1 \Phi_z \right) + (k_0^2 \epsilon_0 - q^2) \Phi_x &= \frac{q_0 q_2}{\epsilon_0(z)} f H(z), \\ \frac{d^2 \Phi_y}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon_0}{dz} \left(\frac{d\Phi_y}{dz} - iq_2 \Phi_z \right) + (k_0^2 \epsilon_0 - q^2) \Phi_y &= \frac{d}{dz} \left[\frac{f}{\epsilon_0(z)} \right] \frac{dH}{dz} - \\ - \left[k_0^2 + \frac{q_0(q_1 - q_0)}{\epsilon_0} \right] f H, & \\ \frac{d^2 \Phi_z}{dz^2} + (k_0^2 \epsilon_0 - q^2) \Phi_z &= P_z, \end{aligned} \quad (3)$$

$$P_z \equiv - \frac{i q_2}{\epsilon_0} f \frac{dH}{dz}, \quad f \equiv f(q_1 - q_0, q_2, z),$$

где обозначено: $q_0^2 \equiv k_0^2 \sin^2 \theta_0$, q_0 — поперечная составляющая волнового вектора падающей волны, $q = (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$ — аналогичная величина для рассеянного поля.

Эта система уравнений описывает распространение плоских волн произвольной поляризации, на которые разложено рассеянное поле. После введения новых координат $\{x', y'\}$, таких что ось Ox' направлена вдоль

вектора $\vec{q} = q_1 \vec{e}_x + q_2 \vec{e}_y$ ($\vec{e}_{\{x,y\}}$ — орты осей OX и OY), система может быть приведена к виду

$$\frac{d^2 \Phi_{y'}}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon_0}{dz} \frac{d\Phi_{y'}}{dz} + (k_0^2 \epsilon_0 - q^2) \Phi_{y'} = P_{y'},$$

$$\frac{d^2 \Phi_z}{dz^2} + (k_0^2 \epsilon_0 - q^2) \Phi_z = P_z, \quad (4)$$

$$iq\Phi_{x'} + \frac{d\Phi_z}{dz} = 0,$$

$$P_{y'} \equiv \frac{q_1}{q\epsilon_{00}} \frac{df}{dz} \frac{dH}{dz} - \left[k_0^2 \cos^2 \theta_0 \frac{q_1}{q} + \frac{q_0 q}{\epsilon_{00}} \right] f H,$$

где $\Phi_{y'} = q_1/q\Phi_y - q_2/q\Phi_x$ — составляющая магнитного поля, ортогональная плоскости распространения данной Фурье-компоненты (ТМ-волна), а $\Phi_{x'} = q_1/q\Phi_x + q_2/q\Phi_y$ — составляющая поля, лежащая в плоскости распространения и параллельная границам слоя, которая совместно с Φ_z описывает волну ТЕ-поляризации. Последнее уравнение представляет собой соотношение $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ (здесь и далее предполагаем $\epsilon_{00} = 1$). Заметим также, что компонента электрического поля ТЕ-волны может быть выражена через поле Φ_z : $E_{1y'} = k_0/q\Phi_z$. Таким образом, для нахождения рассеянного поля необходимо проинтегрировать первые два уравнения системы (4).

3. В дальнейшем мы будем предполагать, что амплитуда периодической модуляции диэлектрической проницаемости $\epsilon_0(z)$ мала: $m \ll \cos^2 \theta_0$, и будем пользоваться решениями для ТЕ-волн, изученными в работах [1,2]. Решения для ТМ-волны в периодически неоднородной среде получены в работе [5]. Воспользовавшись этими результатами, решение уравнения (1) для падающей волны в слое, удовлетворяющее безотражательным граничным условиям при $z = 0$ и $z = L$, запишем в виде

$$H(z) = \exp(ik_n z) \frac{g_0 \cos(g_0(z-L)) + i\Delta k_0 \sin(g_0(z-L))}{g_0 \cos(g_0 L) - i\Delta k_0 \sin(g_0 L)} - \exp(-ik_n z) \frac{i\gamma_0 \sin(g_0(z-L))}{g_0 \cos(g_0 L) - i\Delta k_0 \sin(g_0 L)} + O(m^{-1}), \quad (5)$$

$$\Delta k_0 \equiv k_0 \cos \theta_0 - k_n, \quad g_0 \equiv \sqrt{\Delta k_0^2 - \gamma_0^2},$$

здесь $|\Delta k_0| \ll k_n$ — т.е. решение справедливо вблизи первого брэгговского резонанса, $\gamma_0 \equiv m k_0 \cos(2\theta_0)/(4 \cos \theta_0)$ — величина, обратная масштабу многократного рассеяния падающей волны ТМ-поляризации на периодической структуре (для волны ТЕ-поляризации получим такое же решение

без множителя $\cos(2\theta_0)$ в величине γ_0). В дальнейшем мы не будем рассматривать случай углов падения, близких $\pi/4$, поскольку (5) в случае $\gamma_0 \rightarrow 0$ или больших расстроек $\gamma_0^2 L / |\Delta k_0| \ll 1$ принимает вид невозмущённой падающей волны $H(z) = \exp(ik_0 \cos \theta_0)$. В случае сильной решётки $\gamma_0 L \gg 1$ вблизи резонанса решение качественно иное. Причём условие $g_0 = 0$ определяет границы первой резонансной зоны Маттье, при котором характер изменения амплитуд прямой и обратнорассеянной волн меняется (внутри резонансной зоны амплитуды меняются экспоненциально, а вне её по гармоническому закону). Отметим также, что при $g_0 L = \pi n$ ($n = 1, 2, \dots$) отражённая слоем волна обращается в нуль при $z \leq 0$, в то же время поле внутри слоя достигает значений $\gamma_0 L / (\pi n)$. Это значительно больше амплитуды падающей на слой волны (если периодическая структура сильна) и соответствует частному случаю брэгговского резонатора, при котором периодически неоднородный слой является согласованной системой для падающей волны.

Общие решения уравнений (4) находим, аналогично работам [1,2], после чего для полей $\Phi_{y'}$ и Φ_z получим

$$\begin{aligned} \Phi_{\{y',z\}}(z) &= -\frac{1}{W_{\{y',z\}}} \left[\Phi_{1\{y',z\}}(z) \int_0^z P_{\{y',z\}}(z') \Phi_{2\{y',z\}}(z') dz' + \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{2\{y',z\}}(z) \int_z^L P_{\{y',z\}}(z') \Phi_{1\{y',z\}}(z') dz' \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где линейно независимые решения однородных уравнений $\Phi_{1\{y',z\}}$, $\Phi_{2\{y',z\}}$ и вронсианы $W_{\{y',z\}}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \Phi_{1\{y',z\}} &= \exp(ik_n z) \left[\cos(g_{\{y',z\}}(z-L)) + \frac{i\Delta k}{g_{\{y',z\}}} \sin(g_{\{y',z\}}(z-L)) \right] + \\ &\quad + \exp(-ik_n z) \frac{i\gamma_{\{y',z\}}}{g_{\{y',z\}}} \sin(g_{\{y',z\}}(z-L)), \\ \Phi_{2\{y',z\}} &= \exp(ik_n z) \frac{i\gamma_{\{y',z\}}}{g_{\{y',z\}}} \sin(g_{\{y',z\}} z) + \\ &\quad + \exp(-ik_n z) \left[\frac{i\Delta k}{g_{\{y',z\}}} \sin(g_{\{y',z\}} z) - \cos(g_{\{y',z\}} z) \right], \\ W_{\{y',z\}} &= i2k_n \left[\cos(g_{\{y',z\}} L) - \frac{i\Delta k}{g_{\{y',z\}}} \sin(g_{\{y',z\}} L) \right], \\ \Delta k &\equiv \sqrt{k_0^2 - q^2} - k_n, \quad |\Delta k| \ll k_n, \\ g_{\{y',z\}} &\equiv \sqrt{\Delta k^2 - \gamma_{\{y',z\}}^2}, \quad \gamma_z = \frac{\gamma_{y'}}{1 - 2q^2/k_0^2} \equiv \frac{mk_0^2}{4\sqrt{k_0^2 - q^2}}. \end{aligned}$$

Это решение так же, как для падающей волны, справедливо вблизи первого брэгговского резонанса, т.е. описывает возмущенное поле в области поперечных волновых векторов $|(\vec{q}^2 - q_*^2)/k_n| \ll k_n$, где q_* соответствует точному резонансу: $\Delta k(q_*) = \sqrt{k_0^2 - q_*^2} - k_n = 0$. Это условие позволяет рассматривать рассеяние только на крупномасштабных неоднородностях, имеющих узкий спектр случайных неоднородностей. Кроме того заметим, что использование приближенных решений однородных уравнений (4) не скажется на поле (6), рассеянном в присутствии вытянутых неоднородностей, если $m^4 \ll \langle |\epsilon_1|^2 \rangle$.

4. Далее, при анализе рассеянного поля будем предполагать, что неоднородности $\epsilon_1(\vec{r})$ являются статистически однородными: $\langle \epsilon_1(\vec{r}) \epsilon_1^*(\vec{r}') \rangle = \Psi_\epsilon(\vec{r} - \vec{r}')$, и ограничимся случаем вытянутых неоднородностей $\epsilon_1(\vec{r}) = \epsilon_1(x, y)$. При этом $\langle f(\vec{q}) f^*(\vec{q}') \rangle = F_0^2(\vec{q}) \delta(\vec{q} - \vec{q}')$, где $F_0^2(\vec{q})$ — Фурье-сопряженная с функцией Ψ_ϵ . В этом случае, согласно (6), рассеянное поле также является статистически однородным по координатам $\{x, y\}$, поскольку $\langle \Phi_{\{z, y'\}}(\vec{q}) \Phi_{\{z, y'\}}^*(\vec{q}') \rangle = \Phi_{0\{z, y'\}}^2(\vec{q}) \delta(\vec{q} - \vec{q}')$, где $\Phi_{0\{z, y'\}}^2$ — средние угловые спектры соответствующих компонент рассеянного поля. Аналогичные спектры для электрического поля найдём, воспользовавшись соотношениями

$$E_{1qy'} = \frac{k_0}{q} \Phi_z, \quad E_{1qx'} = -\frac{i}{k_0} \frac{d}{dz} \Phi_y + \frac{iq_1 f}{q k_0} \frac{dH}{dz}.$$

С учётом этого из (6) получим выражение для спектра ТЕ-компоненты ($E_{1qy'}$) рассеянного поля на выходе из слоя

$$\begin{aligned} E_{0y'}^2(\vec{q}) &= \frac{k_0^2}{16} \frac{c_z F_0^2(q_1 - q_0, q_2)}{[g_z^2 + \gamma_z^2 \sin^2(g_z L)][g_0^2 + \gamma_0^2 \sin^2(g_0 L)]} \times \\ &\times \left\| (\gamma_z \Delta k_0 + \gamma_0 \Delta k) \left[\frac{\sin((g_z - g_0)L)}{g_z - g_0} - \frac{\sin((g_z + g_0)L)}{g_z + g_0} \right] + \right. \\ &\left. + 2i \left[\frac{\gamma_z g_0 + \gamma_0 g_z}{g_z + g_0} \sin^2 \left(\frac{g_z + g_0}{2} L \right) + \frac{\gamma_z g_0 - \gamma_0 g_z}{g_z - g_0} \sin^2 \left(\frac{g_z - g_0}{2} L \right) \right] \right\|^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где $c_z \equiv q_2^2/q^2$ и для гауссовой функции корреляции неоднородностей

$$F_0^2 = \langle |\epsilon_1|^2 \rangle l^2 / (4\pi) \exp\{-l^2[(q_1 - k_0 \sin \theta_0)^2 + q_2^2]/4\},$$

l — горизонтальный радиус корреляции. Далее рассматривается случай крупномасштабных неоднородностей $k_0 l \gg 1$, соответствующий узкому спектру неоднородностей, что необходимо для справедливости полученных решений. Выражение для углового спектра тангенциальной слою компоненты электрического поля рассеянной ТМ-волны

$E_{0x}^2(\vec{q}) = (1 - q^2/k_0^2)\Phi_{0y}^2(\vec{q})$ здесь не приводим, поскольку оно легко получается из (7) переобозначением $\gamma_z \rightarrow -\gamma_{y'}$, $g_z \rightarrow g_{y'}$ с одновременной заменой множителя c_z на $c_{y'}$, определяющийся выражением

$$c_{y'} = \left[\frac{q_1}{q} \cos^2 \theta_0 + \sin \theta_0 \frac{q}{k_0} \right]^2.$$

Заметим, что в отсутствие периодической структуры ($\gamma_0 = \gamma_z = \gamma_{y'} = m = 0$) обратнорассеянное поле равно нулю, что в данном случае естественно. Однако интересен случай сильной решётки $\gamma_z L \gg 1$, который и обсудим далее.

Наиболее подробно исследуем случай $g_0 L = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$, когда периодический слой является согласующей системой для падающей волны. Как будет ясно, это соответствует наибольшей величине рассеянного поля. При этом максимум спектра достигается при q , соответствующих равенству $g_0 = g_z$, при котором рассеянное поле также удовлетворяет условию возникновения брэгговского резонатора. Осуществляя разложение в окрестности максимума

$$\Delta k(q) \simeq \Delta k_0 - \gamma_z(X - X_0), \quad X \equiv \frac{q^2}{2k_n \gamma_z}, \quad X_0 \equiv \frac{k_0^2 \sin^2 \theta_0}{2k_n \gamma_z},$$

$$(g_z - g_0)L \simeq \frac{(\gamma_z L)^2}{2\pi n}(X - X_0 - 2s \cos^2 \theta_0)(X - X_0 + 2s \sin^2 \theta_0),$$

$$s \equiv \Delta k_0 \cos(2\theta_0) / |\Delta k_0 \cos(2\theta_0)|, \quad |g_z - g_0|L \ll 1,$$

видим, что знаменатель в (7) содержит наиболее узкий резонансный множитель:

$$1 + \frac{(\gamma_z L)^6}{(2\pi^2 n^2)^2} (X - X_0 - 2s \cos^2 \theta_0)^2 (X - X_0 + 2s \sin^2 \theta_0)^2.$$

Причём, имеется не одна, а две резонансные области, которые не пересекаются в случае сильной решётки $\gamma_z L \gg 1$. Однако один из максимумов имеет малую амплитуду, поскольку для множителя в числителе справедливо представление

$$(\Delta k_0 \gamma_z + \Delta k_z \gamma_0)^2 \simeq \gamma_z^2 \gamma_0^2 (X - X_0 - 2s \cos^2 \theta_0)^2.$$

Значит, в одной из точек, в которой знаменатель минимален, числитель обращается в нуль. Изложенные соображения позволяют преобразовать выражение (7) и получить

$$E_{0y'}^2 = G \frac{q_2^2 \cos^2(2\theta_0)}{q^2 \cos^2 \theta_0} \frac{\exp\{-l^2[(q_1 - q_0)^2 + q_2^2]/4\}}{[1 + \beta^2(X - X_0 + 2s \sin^2 \theta_0)^2]}, \quad (8)$$

$$G \equiv \frac{\langle |\epsilon_1|^2 \rangle l^2 (k_0 L)^2 (\gamma_z L)^4}{16\pi^5 n^4} [1 + O((\gamma_z L)^{-2})], \quad \beta \equiv \frac{2(\gamma_z L)^3}{\pi^2 n^2} \gg 1.$$

Для спектра $E_{0x}^2(\vec{q})$ можно тоже проделать аналогичные разложения вблизи резонансной полосы брэгговского резонатора:

$$(g_y - g_0)L \simeq \frac{(\gamma_z L)^2}{2\pi n} (X - X_0)(X - X_0 - 2s \cos(2\theta_0)),$$

$$(\gamma_0 \Delta k - \gamma_y \Delta k_0)^2 \simeq \gamma_0^2 (\Delta k - \Delta k_0)^2 = \gamma_0^2 \gamma_z^2 (X_0 - X)^2,$$

в результате получим

$$\begin{aligned} E_{0x}^2 &= G \cos^4(2\theta_0) \left[\frac{q_1}{q} \cos^2 \theta_0 + \frac{q}{k_0} \sin \theta_0 \right]^2 \times \\ &\times \frac{\exp\{-l^2[(q_1 - q_0)^2 + q_z^2]/4\}}{1 + \beta^2 \cos^4(2\theta_0)[X - X_0 - 2s \cos(2\theta_0)]^2}. \end{aligned}$$

Интересно, что амплитуда спектральной интенсивности в данном случае пропорциональна L^6 . Это связано с тем обстоятельством, что амплитуда падающей волны и функция Грина при реализации резонатора $\sim L$. Кроме того, рассеяние происходит когерентно по глубине (поле $\sim L$), а наибольший вклад даёт середина слоя, где поля максимальны.

Нетрудно убедиться, что в случае сильной решётки ($\gamma L \gg 1$) максимумы полученных спектров не перекрываются. Поэтому средние угловые спектры полей ($E_x = q_1/qE_x' - q_2/qE_y'$, $E_y = q_2/qE_x' + q_1/qE_y'$, $|\vec{E}_r| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$) просто выражаются через аналогичные величины в штрихованной системе координат (перекрёстные члены пренебрежимо малы):

$$E_{0x}^2 = \frac{q_1^2}{q^2} E_{0x}'^2 + \frac{q_2^2}{q^2} E_{0y}'^2, \quad E_{0y}^2 = \frac{q_2^2}{q^2} E_{0x}'^2 + \frac{q_1^2}{q^2} E_{0y}'^2, \quad (9)$$

$$E_{0r}^2 = E_{0x}'^2 + E_{0y}'^2. \quad (10)$$

Заметим, что E_{0y}^2 , является спектром ТЕ-компоненты рассеянного поля, а E_{0x}^2 — тангенциальной слою ТМ-компоненты рассеянной волны. Максимум последнего расположен при $q_{2 \max}^2 = 0$, $q_{1 \max}^2 = k_0^2 \sin^2 \theta_0 + s m k_0 k_n \cos(2\theta_0) / \cos \theta_0$, а пиковая величина $\sim (\cos(2\theta_0) / \cos \theta_0)^4$, т.е. возрастает по мере удаления угла падения от значения $\pi/4$, при котором $\gamma_0 = 0$ и нарушается приближение сильной решётки. Значение $\theta_0 = \pi/2$ также исключается, поскольку не позволяет выполнить условия малости периодической модуляции ($m \ll \cos^2 \theta_0$).

Максимумальные значения спектра E_{0y}^2 , достигаются в двух точках:

$$q_{2 \max} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{l^2 q_0} \sqrt{\sqrt{\frac{(l q_0)^4}{4} + 1} - 1},$$

$$q_{1 \max} = q_0 \sqrt{1 + \frac{8}{(l q_0)^4} \left[1 - \sqrt{\frac{(l q_0)^4}{4} + 1} \right]},$$

которые при малых углах падения сливаются в нуле, а при больших значениях lq_0 соответствуют $q_{2\max} = \pm 2/l$, $q_{1\max} \approx q_0$. Однако при таких углах падения волны амплитуда этих максимумов уменьшается: $E_{0y}^2 \sim (lq_0)^{-2}$. Отметим, что в случае $k_0 l \gg 1$ условие $lq_0 \equiv lk_0 \sin \theta_0 \gg 1$ может выполняться и для достаточно малых углов падения. При этом интегрирование спектра E_{0y}^2 , по $dq_1 dq_2$ даёт множитель $\sqrt{2\pi}/(q_0 l)^3$ и соответственно $\sqrt{\pi}/(q_0 l)$ для спектра E_{0x}^2 . Значит при таких углах падения рассеянное поле ослабляется и интенсивность тангенциальной компоненты рассеянного поля определяется ТМ-компонентой:

$$\langle |E_r(z=L)|^2 \rangle \simeq \langle |E_x|^2 \rangle = \frac{\langle |\epsilon_1|^2 \rangle \cos^4(2\theta_0) (k_n L)^2 (k_n m/4)^2 l L}{8\pi^{5/2} n^2 \sin(2\theta_0) \cos^4 \theta_0},$$

что, как будет видно далее, в $k_0 l \sin \theta_0 \gg 1$ раз меньше, чем при нормальном падении. Таким образом, исследуемый вид рассеяния наиболее эффективен в случае очень малых углов падения и сопровождается рассеянием ТМ-волны в ТЕ-компоненту.

В случае нормального падения выражения (8), (9) упрощаются:

$$E_{0x}^2 = G \frac{q_1^2}{q^2} \frac{\exp(-\gamma_z k_n l^2 X/2)}{1 + \beta^2(X - s^2)^2}, \quad E_{0y}^2 = G \frac{q_2^2}{q^2} \frac{\exp(-\gamma_z k_n l^2 X/2)}{1 + \beta^2 X^2}. \quad (11)$$

Очевидно, что спектр E_{0x}^2 , в случае $k_0 \leq k_n$ ($s \leq 0$) даёт малые значения и в пределах точности рассмотрения должен быть опущен. Интегрируя полученные выражения по $\{q_1, q_2\}$ и учитывая, что интегрирование по $q dq$ приводит к табличным интегралам [6]

$$\begin{aligned} I_x' &= \int_0^\infty \frac{\exp(-\alpha X)}{1 + \beta^2(X - 1)^2} dX = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{\beta} \exp \left[-\frac{\alpha(\beta + i)}{\beta} \right] E_1 \left[-\frac{\alpha(\beta + i)}{\beta} \right] \right\} \simeq \\ &\simeq \frac{\pi \exp(-\alpha)}{\beta} \left[1 + \frac{1}{\pi \beta} [\exp(\alpha) + \alpha E_i(\alpha)] \right], \\ I_y' &= \int_0^\infty \frac{\exp(-\alpha X)}{1 + \beta^2 X^2} dX = \frac{1}{\beta} \operatorname{Re} \left\{ i \exp \left(-\frac{i\alpha}{\beta} \right) E_1 \left(-i \frac{\alpha}{\beta} \right) \right\} \simeq \\ &\simeq \frac{\pi}{2\beta} \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi \beta} \left(\ln \frac{\alpha}{\beta} - \gamma^* \right) \right], \end{aligned}$$

где $\gamma^* \simeq 0,57$ — постоянная Эйлера, $\alpha \equiv \Delta k_0 k_n l^2$ (разложение справедливо при $\frac{\alpha}{\beta} \simeq \frac{\pi^2 n^2 k_0 l}{2(\gamma L)^2} \frac{l}{L} \ll 1$), получим

$$\langle |E_x(L)|^2 \rangle \simeq \frac{\langle |\varepsilon_1|^2 \rangle}{16\pi n^2} (k_0 L)^2 (\gamma L) (k_0 \gamma l^2) \exp(-k_0 \gamma l^2), \quad (12)$$

$$\langle |E_y(L)|^2 \rangle \simeq \frac{\langle |\varepsilon_1|^2 \rangle}{32\pi n^2} (k_0 L)^2 (\gamma L) (k_0 \gamma l^2), \quad (13)$$

$$\langle |\vec{E}_r(L)|^2 \rangle \simeq \frac{\langle |\varepsilon_1|^2 \rangle}{32\pi n^2} (k_0 L)^2 (\gamma L) (k_0 \gamma l^2) [1 + 2 \exp(-k_0 \gamma l^2)], \quad (14)$$

$$\langle |E_x(L)|^2 \rangle = 3 \langle |E_y(L)|^2 \rangle = \frac{3}{4} \langle |\vec{E}_r(L)|^2 \rangle. \quad (15)$$

Видим, что интенсивность $\langle |E_x(z=L)|^2 \rangle$ рассеянной ТМ-компоненты имеет максимум при $k_0 \gamma l^2 = 1$, в то время как интенсивность $\langle |E_y(z=L)|^2 \rangle$ растёт с увеличением поперечного масштаба неоднородностей до значений $(k_0 l)^2 \simeq k_0 L (\gamma L)^2$ (при которых использованное разложение интегралов I_x, I_y становится недостаточным). Значит в случае рассеяния на неоднородностях очень большого масштаба в рассеянном поле преобладает компонента ТЕ-поляризации. В то же время, если масштаб неоднородностей не очень велик: $\gamma k_0 l^2 \ll 1$ можно сказать, что вектор \vec{E}_r в среднем расположен в плоскости, составляющей угол $\operatorname{arctg}(\sqrt{\langle |E_y|^2 \rangle / \langle |E_x|^2 \rangle}) = \pi/6$ с плоскостью поляризации падающей волны.

Отметим, что в данной задаче обратнорассеянное поле $\langle |E_y(L)|^2 \rangle$ становится малым, если масштаб неоднородностей более чем в $\gamma L \gg 1$ раз превышает радиус Френеля, соответствующий толщине слоя. Именно такие неоднородности следовало бы в данном случае называть "крупномасштабными".

Заметим также, что наибольшая интенсивность рассеяния соответствует $n = 1$; кроме того для очень больших $n \sim (\gamma L)^{3/2}$ спектральные максимумы начинают перекрываться, что необходимо учитывать в расчётах, однако этот случай менее интересен, поскольку рассеянное поле сильно уменьшается.

Корреляционные функции компонент рассеянного поля могут быть получены из (11) интегрированием по $dq_1 dq_2$ с весом $\exp(i\vec{q}\vec{p})$:

$$\begin{aligned} \Psi_{yy}(\vec{p}) &\equiv \langle E_{y'}(x + \rho \cos \eta, y + \rho \sin \eta, L) E_{y'}^*(x, y, L) \rangle = \\ &= \frac{\beta \langle |E_{y'}(L)|^2 \rangle}{\pi k_n \gamma} \int_0^\infty \frac{\cos^2 \eta J_0(q\rho) - \cos(2\eta) J_1(q\rho)/(q\rho)}{1 + \beta^2 [q^2/(2\gamma k_n) - 2s]^2} 2qdq \simeq \\ &\simeq 2 \langle |E_{y'}(L)|^2 \rangle \left\{ \cos^2 \eta J_0 \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) - \cos(2\eta) \frac{\rho_1}{\rho} J_1 \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_{x'}(\vec{\rho}) &\equiv \langle E_{x'}(x + \rho \cos \eta, y + \rho \sin \eta, L) E_{x'}^*(x, y, L) \rangle = \\
 &= \frac{\beta \langle |E_{x'}(L)|^2 \rangle}{\pi k_n \gamma} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \eta J_0(q\rho) + \cos(2\eta) J_1(q\rho)/(q\rho)}{1 + [\beta/(2\gamma k_n)]^2 q^4} 2qdq \simeq \\
 &\simeq 2 \langle |E_{x'}(L)|^2 \rangle \left\{ \sin^2 \eta J_0 \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right) + \cos(2\eta) \frac{\rho_2}{\rho} J_1 \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\rho_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{4k_n \gamma}}, \quad \rho_2 \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{3}\beta}{2k_n \gamma}},$$

где интенсивности $\langle |E_{x'}(L)|^2 \rangle$, $\langle |E_{y'}(L)|^2 \rangle$ определяются выражением (12). Видим, что имеются два характерных масштаба корреляции — ρ_1 и ρ_2 , а корреляционные функции полей E_τ , E_x , E_y будут содержать оба эти масштаба, поскольку, например,

$$\langle E_\tau(\vec{\rho} + \vec{r}_{xy}) E_\tau^*(\vec{r}_{xy}) \rangle = \Psi_{x'}(\vec{\rho}) + \Psi_{y'}(\vec{\rho}), \quad \vec{r}_{xy} \equiv \vec{e}_x x + \vec{e}_y y.$$

Заметим, что в случае $l^2 k_n \gamma \gg 1$ функция $\Psi_{x'}$ становится малой вместе с интенсивностью $\langle |E_{x'}(L)|^2 \rangle$, в результате чего существен только второй характерный масштаб корреляции, который в γL раз превышает радиус Френеля, вычисленный для толщины рассеивающего слоя.

Таким образом в рассмотренной ($g_0 L = \pi$) ситуации рассеянное поле максимально, что формально связано с минимумом знаменателя в выражении (7) и соответствует большим значениям полей падающей и рассеянных волн в толще слоя. С другой стороны, если параметры падающей волны соответствуют, например, границе резонансной зоны ($g_0 = 0$), спектральная плотность рассеянного поля уменьшается в $(\gamma L)^2$ раз, в результате чего, несмотря на уширение спектра, интенсивность рассеяния мала. В случае точного брэгговского резонанса падающей волны с периодической структурой спектральная интенсивность в $(\gamma L)^6$ раз меньше, чем в ситуации, рассмотренной выше, и не зависит от толщины слоя L . Это объясняется тем, что поле падающей волны экспоненциально $\sim \exp(-\gamma z)$ спадает по мере углубления в слой и эффективное рассеяние происходит в области размером $\Delta z \sim \gamma^{-1}$, а остальная часть слоя фактически не влияет на рассеяние. Интересно, что спектральная составляющая, соответствующая реализации резонатора для рассеянного излучения ($gL = \pi n$), в этом случае не выделена в спектре. Это объясняется тем, что степенной (по z) закон роста поля в резонаторе не достаточен, чтобы конкурировать с экспоненциальным уменьшением амплитуды падающей волны.

Данные исследования поддержаны грантом РФФИ 95-02-05001 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапин В. Г., Тамойкин В. В. //Тр. III Суздальского симпоз. УРСИ по модификации ионосферы мощными радиоволнами. — М.: ИЗМИРАН, 1991. С. 54.
2. Лапин В. Г. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1989. Т. 32. № 9. С. 1144.
3. Денисов Г. Г., Реznиков М. Г. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1982. Т. 25, № 5. С. 562.
4. Пасхин В. М., Сандлер М. С., Свешников Б. В. //Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1983. Т. 26. № 1. С. 103.
5. Гусев В. Д., Голынский С. М. //Тр. III Суздальского симпоз. УРСИ по модификации ионосферы мощными радиоволнами. — М.: ИЗМИРАН, 1991. С. 125.
6. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
14 мая 1997 г.

**ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING BY LARGE – SCALE
INHOMOGENEITIES IN PERIODICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM**

V. G. Lapin

Is shown, that in periodically non-uniform media a back scattering is possible of electromagnetic waves by casual inhomogeneities with a scale, exceeding the wavelength. The maximum scattering field arises in the case of the Bragg resonator occurrence, when the periodic layer is a non-reflecting system for an incident wave. The scattering is large enough even in the case when the inhomogeneities scale much exceeds the Fresnel radius of a non-uniform layer. The scattering field correlation radius can be so large as well.

УДК 537.876.23

**СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ
ОБОБЩЁННЫМ УРАВНЕНИЕМ
КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА-БЮРГЕРСА**

E. M. Громов, B. B. Тютин

Получены решения в виде стационарных волн в рамках обобщенного уравнения Кортевега - де Вриза - Бюргерса, содержащего неконсервативные члены линейной накачки, линейной высокочастотной и нелинейной диссипаций. Анализируются как периодические, так и уединенные волны.

Распространение низкочастотных волн в нелинейных диспергирующих неконсервативных средах может быть описано обобщенным уравнением Кортевега-де Вриза-Бюргерса:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu \psi^n \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \gamma_0 \psi - \alpha \psi^{n+1} - \gamma_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где в левой части уравнения собраны консервативные члены (μ — параметр нелинейности, β — параметр дисперсии), а в правой части — неконсервативные члены (γ_0 — параметр неустойчивости, α — параметр нелинейной диссипации, γ_1 — параметр высокочастотной диссипации). Левая часть (1) является уравнением Кортевега-де Вриза (КдВ) при $n = 1$ и модифицированным КдВ при $n = 2$. В отсутствие дисперсии ($\beta = 0$), неустойчивости ($\gamma_0 = 0$) и нелинейных потерь ($\alpha = 0$) (1) переходит в уравнение Бюргерса, описывающее, в частности, ударные волны. Периодические стационарные нелинейные волны были найдены к настоящему времени в следующих частных случаях: в [1] при отсутствии дисперсии и нелинейных потерь ($\beta = 0$, $\alpha = 0$) и в [2] при отсутствии нелинейности и дисперсии ($\mu = 0$, $\beta = 0$). При $n = 1$ и $\alpha = 0$ уравнение (1) описывает распространение ионно-звуковых волн в изотропной плазме с учётом столкновений и при наличии дрейфа электронов относительно ионов [1]. Уравнение последнего вида (при $n = 1$ и $\alpha = 0$) также использовалось в качестве модельного для описания распространения поверхностных и внутренних волн в мелкой стратифицированной жидкости в присутствии вертикально неоднородного течения. В этом случае (1) аналитически исследовалось в адиабатическом "солитонном" приближении, при котором решение (1) было представлено в виде солитона КдВ с медленно меняющимися амплитудой, скоростью и протяжённостью [2]. В этом приближении было найдено критическое значение амплитуды солитона, определяемое величинами μ , β , γ_0 и γ_1 . При $\alpha = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$

в [3] найдены решения (1) в виде стационарных волн перепада. При $n = 1$, $\alpha = 0$ уравнение (1) анализировалось численно [4] и было показано, что произвольные начальные возмущения эволюционируют к системе солитонов разной амплитуды. В тоже время в Мексиканском заливе и в Желтом море Дэвид Рубинштейн в 1996 г. провёл ряд натурных наблюдений внутренних волн в мелкой стратифицированной воде в присутствии вертикально неоднородных течений (прилива и отлива), которые указывают на существование нелинейных периодических стационарных волн, что не может быть интерпретировано без учёта нелинейных потерь.

В данной работе в рамках (1) при учёте нелинейных потерь ($\alpha \neq 0$) аналитически найдены решения в виде стационарных как уединённых, так и периодических волн.

Заменой переменных $\zeta = x - Vt$, $t' = t$ и считая исковую функцию $\psi(z, \tau)$ в выбранной системе независящей от времени, получим

$$-V \frac{d\psi}{d\zeta} + \mu \psi^n \frac{d\psi}{d\zeta} + \beta \frac{d^3\psi}{d\zeta^3} = \gamma_0 \psi - \alpha \psi^{n+1} - \gamma_1 \frac{d^2\psi}{d\zeta^2}. \quad (2)$$

Добавляя и вычитая в (2) члены $C_1 d^2\psi/d\xi^2$ и $C_2 d\psi/d\xi$, где $C_{1,2}$ — неизвестные постоянные величины, которые будут определены ниже, уравнение (2) представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left\{ \beta \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + C_1 \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{\mu}{(n+1)} \psi^{n+1} + (C_2 - V) \psi \right\} = \\ = (C_1 - \gamma_1) \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + C_2 \frac{d\psi}{d\xi} - \alpha \psi^{n+1} + \gamma_0 \psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем искать решение (3), при котором соотношение в фигурных скобках и правая часть (3) равны нулю. При этом уравнение (3) соответствует системе двух однотипных дифференциальных уравнений:

$$\beta \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + C_1 \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{\mu}{(n+1)} \psi^{n+1} + (C_2 - V) \psi = 0, \quad (4)$$

$$(C_1 - \gamma_1) \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + C_2 \frac{d\psi}{d\xi} - \alpha \psi^{n+1} + \gamma_0 \psi = 0. \quad (5)$$

Для совместности системы уравнений (4), (5) необходимо удовлетворить следующие условия:

$$\frac{\beta}{C_1 - \gamma_1} = \frac{C_1}{C_2} = -\frac{\mu}{\alpha(n+1)} = \frac{(C_2 - V)}{\gamma_0} = \lambda, \quad (6)$$

где λ — постоянный коэффициент пропорциональности. Учитывая, что $\lambda = -\mu/(n+1)\alpha$, имеем следующее соотношение для скорости стационарных волн

$$V = \frac{\mu \gamma_0}{(n+1)\alpha} - \frac{(n+1)\alpha \gamma_1}{\mu} + \frac{(n+1)^2 \alpha^2 \beta}{\mu^2}. \quad (7)$$

С учётом (6) и считая $(C_1 - \gamma_1)\beta \neq 0$, система уравнений (4), (5) эквивалентна одному ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + a \frac{d\psi}{d\zeta} + b\psi^{n+1} + c\psi = 0, \quad (8)$$

где коэффициенты a , b , c имеют вид:

$$a = 1 - \frac{\mu\gamma_1}{(n+1)\alpha\beta}, \quad b = \frac{\mu^3}{(n+1)^3\alpha^2\beta}, \quad c = -\frac{\gamma_0\mu^3}{(n+1)^3\alpha^3\beta}.$$

Полученное уравнение (8) описывает волны в среде с линейной дисперсией, нелинейной диссипацией, нелинейностью и неустойчивостью ($\beta\alpha\mu\gamma_0 \neq 0$). Член с первой производной описывает потери и в общем случае может считаться положительным ($a > 0$), поскольку случай отрицательного параметра ($a < 0$) может быть преобразован в случай положительного параметра сменой знака координаты: $\zeta \rightarrow -\zeta$. Далее для определённости примем коэффициенты α , γ_0 , γ_1 положительными: $\alpha > 0$, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$. В этом случае параметры b и c имеют разные знаки: $bc < 0$.

Проанализируем (8) при $n = 1$ и $n = 2$.

1. При $n = 1$ уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + a \frac{d\psi}{d\zeta} + b\psi^2 + c\psi = 0. \quad (9)$$

В этом уравнении существуют два состояния равновесия: $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = -c/b$. При $c < 0$ ψ_1 — седло, а ψ_2 — устойчивый фокус при $|c| > a^2/4$ или устойчивый узел при $|c| \leq a^2/4$. На рис. 1а показана фазовая плоскость уравнения (9) для этого случая. Сепаратриса 1, идущая из седла в устойчивое состояние равновесия, соответствует ограниченной стационарной волне перепада с осцилляциями* на переднем фронте (рис. 1б). Прочие кривые на рис. 1а соответствуют неограниченным сепаратрисам. При $c > 0$ ψ_2 — седло, а ψ_1 — устойчивый фокус при $|c| > a^2/4$ или устойчивый узел при $|c| \leq a^2/4$.** При уменьшении величины a количество осцилляций увеличивается. В предельном случае $a = 0$, фокус преобразуется в состояние равновесия типа центр (рис. 1с), стационарная волна перепада с осцилляциями трансформируется в солитон (рис. 1д). Уравнение (9) при этом имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + b\psi^2 + c\psi = 0. \quad (10)$$

*Если устойчивое состояние — фокус.

**Фазовая плоскость в этом случае является зеркальным отображением фазовой плоскости при $c < 0$.

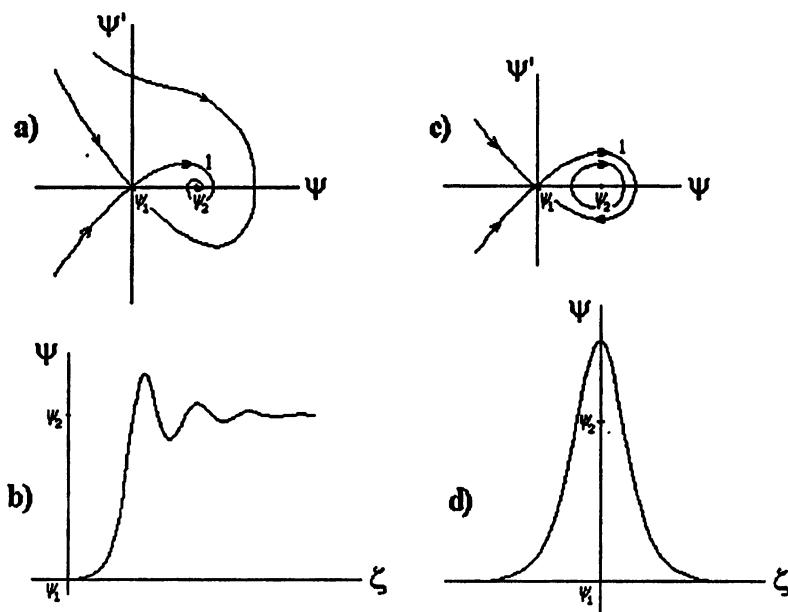


Рис. 1. Фазовая плоскость (9) и профиль уединенной волны, отвечающей сепаратору 1 при $a \neq 0$ (а, б) и при $a = 0$ (с, д).

Интегрируя его, имеем закон сохранения энергии*

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{d\zeta} \right)^2 + \frac{b}{3} \psi^3 + \frac{c}{2} \psi^2 = H. \quad (11)$$

Уравнение (11) имеет осциллирующее ограниченное решение при $c^3/(6b^2) < H < 0$ ($c < 0$) или $0 < H < c^3/(6b^2)$ ($c > 0$) в виде эллиптической функции Вейерштрассе:

$$\psi = -\frac{6}{b} P(\zeta, g_2, g_3) - \frac{c}{2b},$$

где P — функция Вейерштрассе, $g_2 = c^2/12$, $g_3 = c^3/216 - b^2H/18$ — параметры функции Вейерштрассе. При $H = 0$ ($c < 0$) или $H = c^3/(6b^2)$ ($c > 0$) уравнение (11) имеет солитонное решение в виде

$$\psi = \psi_\infty + \frac{\psi_0}{\operatorname{ch}^2(\zeta\sqrt{|c|}/2)}, \quad \psi_0 = \frac{3|c|}{2b}, \quad \psi_\infty = 0 \text{ } (c < 0), \quad \psi_\infty = -\frac{c}{b} \text{ } (c > 0). \quad (12)$$

*Который является уравнением движения частицы с полной энергией H над потенциалом $U = b\psi^3/3 + c\psi^2/2$.

Кроме того, решение (9) можно аналитически описать при $a = 10, c = \pm 24$ в виде волны перепада:

$$\psi = \frac{6}{b} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\zeta)} + 2 \operatorname{th}(\zeta) + 2 \operatorname{sign}(b) \right),$$

где $\operatorname{sign}(b)$ — обозначение знака коэффициента b . Процедура, использованная для получения этого решения, применялась в [3].

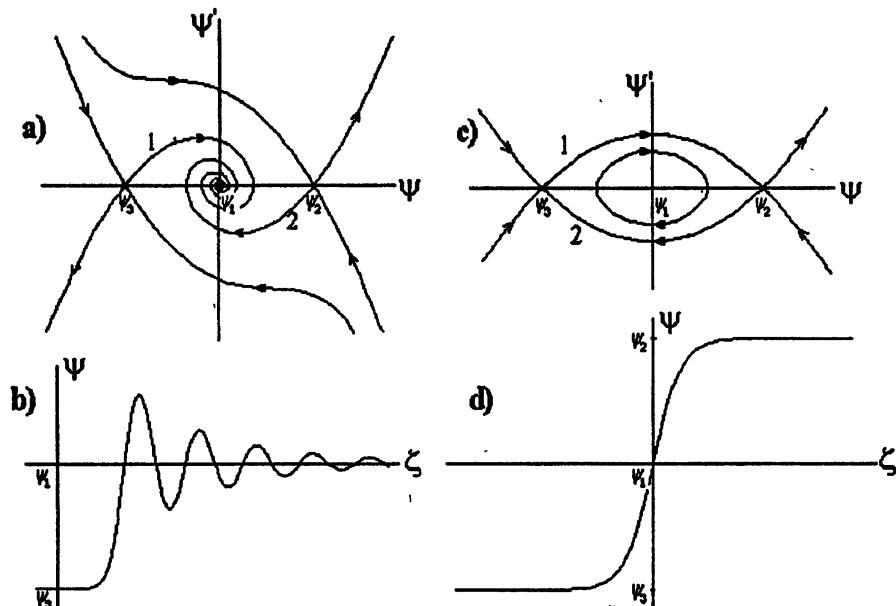


Рис. 2. Фазовая плоскость (13) и профиль уединенной волны, отвечающей сепаратрисе 2 при $a \neq 0, b > 0$ (а, б) и при $a = 0, b > 0$ (с, д).

2. При $n = 2$ уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + a \frac{d\psi}{d\zeta} + b\psi^3 + c\psi = 0. \quad (13)$$

При $bc < 0$ в этом уравнении существуют три состояния равновесия: $\psi_1 = 0$, $\psi_{2,3} = \pm \sqrt{-c/b}$. Если $b > 0$ ψ_1 — седло, а $\psi_{2,3}$ — устойчивые фокусы при $2|c| > a^2/4$ или устойчивые узлы при $2|c| \leq a^2/4$. На рис. 2а показана фазовая плоскость уравнения (9) для этого случая. Сепаратрисы 1 и 2, идущие из седла в устойчивые состояния равновесия, соответствуют ограниченным стационарным волнам перепада с осцилляциями* на переднем фронте (рис. 2б — одна из этих волн перепада). Прочие кривые на рис. 2а соответствуют неограниченным сепаратрисам. При уменьшении величины a количество осцилляций увеличивается.

*Если устойчивые состояния — фокусы.

Если $b < 0$ $\psi_{2,3}$ — седла, а ψ_1 — устойчивый фокус при $|c| > a^2/4$ или устойчивый узел при $|c| \leq a^2/4$. На рис. 3а показана фазовая плоскость уравнения (9) для этого случая. Сепаратрисы 1 и 2, идущие из седел в устойчивое состояние равновесия, соответствуют ограниченным стационарным волнам перепада с осцилляциями* на переднем фронте (рис. 3б) — одна из этих волн перепада). Прочие кривые на рис. 3а соответствуют неограниченным сепаратрисам. При уменьшении величины a количество осцилляций увеличивается.

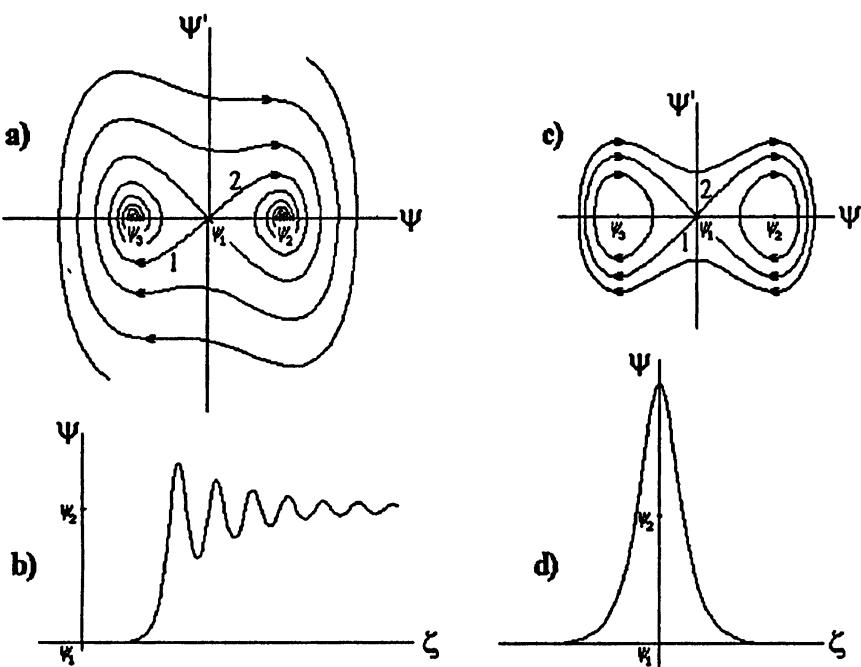


Рис. 3. Фазовая плоскость (13) и профиль уединенной волны, отвечающей сепаратрисе 1 при $a \neq 0, b < 0$ (а, б) и при $a = 0, b < 0$ (с, д).

В случае $a = 0$ устойчивые фокусы преобразуются в состояния равновесия типа центр (рис. 2с $b > 0$ и рис. 3с $b < 0$), стационарные волны перепада с осцилляциями трансформируются в солитоны (рис. 2д) или в волны перепада (рис. 3д)**. Уравнение (13) в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + b\psi^3 + c\psi = 0, \quad (14)$$

*Если устойчивое состояние — фокус.

**Показаны лишь по одной из стационарных волн.

в результате его интегрирования имеем закон сохранения энергии*

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{d\zeta} \right)^2 + \frac{b}{4} \psi^4 + \frac{c}{2} \psi^2 = H. \quad (15)$$

При $b > 0$ уравнение (15) имеет осциллирующее ограниченное решение при $H > -c^2/(4b)$, $H \neq 0$ в виде кноидальных волн

$$\psi = dn \left(\sqrt{\frac{b}{2}} \zeta \left| \frac{2\sqrt{c^2 + 4bH}}{-c + \sqrt{c^2 + 4bH}} \right. \right) \quad (H < 0),$$

$$\psi = cn \left(\frac{\sqrt{b} (c^2 + 4bH)^{1/4}}{(-c + \sqrt{c^2 + 4bH})^{1/2}} \zeta \left| \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4bH}}{2\sqrt{c^2 + 4bH}} \right. \right) \quad (H > 0)$$

и солитонное решение для $H = 0$ в виде

$$\psi = \frac{\psi_0}{\operatorname{ch}(\zeta\sqrt{-2c})}, \quad \psi_0 = \pm \sqrt{\frac{-2c}{b}}. \quad (16)$$

При $b < 0$, при энергии H , удовлетворяющей соотношению $0 < H < -c^2/(4b)$, уравнение (15) имеет осциллирующее ограниченное решение в виде кноидальной волны

$$\psi = ns \left(\sqrt{-\frac{b}{2}} \zeta \left| \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4bH}}{-c + \sqrt{c^2 + 4bH}} \right. \right).$$

При $H = -c^2/(4b)$ уравнение (15) имеет решение в виде волн перепада (кинков):

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{-c}{b}} \operatorname{th} \left(\zeta \sqrt{\frac{c}{2}} \right). \quad (17)$$

В данной работе в рамках (1) найдены решения в виде стационарных как уединённых, так и периодических волн. Это позволяет рассматривать уравнение (1) в качестве модельного для описания распространения периодических внутренних волн в мелкой стратифицированной воде с неоднородным по высоте потоком и качественной интерпретации натурных наблюдений, о которых упоминалось выше.

Данная работа проводилась при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант N 96-02-19609).

*Который является уравнением движения частицы с полной энергией H над потенциалом $U = b\psi^4/4 + c\psi^2/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ott E., Manheimer W.M., Book D.L., and Boris J.P. //Phys. Fluids, 1973. V. 16. P. 855.
2. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. — В кн.: Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984. С. 340.
3. Jeffrey A., Mohamad M.N.B. //Wave Motion, 1991. V. 14. № 4. P. 369.
4. Островский Л. А., Степанянц Ю. А., Цимринг Л. Ш. — Сб.: Труды II Международной рабочей группы "Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике". Часть 2. — Киев: Наукова думка, 1985. С. 201.

Институт прикладной физики
РАН, г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
4 июля 1997 г.

**STATIONARY WAVES DESCRIBED BY A GENERALIZED THE
KORTEVEG – DE VRIESE – BURGERS EQUATION**

E. M. Gromov, V. V. Tyutin

The stationary waves in the form of the generalized Kortevég – de Vries – Burgers equation in presence of the nonconservative terms of both the linear pumping, linear high-frequency dissipation, and nonlinear dissipation have been found. Both periodical and solitary waves are analized.

УДК 537.874

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ СРЕДЫ НА РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПОДПОВЕРХНОСТНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

С. Н. Шульга

Построена двумерная физико-математическая модель рассеяния электромагнитных волн на неоднородном объекте, погруженном в материальное полупространство, которая учитывает анизотропию электромагнитных свойств рассеивателя и окружающей среды. Она инициирована потребностями дистанционного зондирования, неразрушающего контроля и СВЧ техники и базируется на численном решении системы интегральных уравнений для компонент электрического поля внутри включения методом моментов. Приведены численные примеры, которые иллюстрируют рассеяние волн неоднородностью в морском льде и полимерном композите.

1. Данная работа посвящена теоретической проблеме, которая принадлежит к числу ключевых в дистанционном зондировании, неразрушающем контроле, технике сверхвысоких частот (СВЧ) и основывается на моделировании электромагнитного поля, рассеянного подповерхностным включением с учётом анизотропии электрофизических свойств рассеивателя и окружающей среды. Как известно, анизотропия играет заметную роль в формировании радиолокационного сигнала от таких природных сред, как морской лёд, снег [1], и поэтому должна учитываться при интерпретации данных радиолокации указанных покровов. Анизотропия также присуща полимерным композитам, в которых она обусловлена как анизотропными свойствами армирующих волокон или частиц, например, из углерода, так и ориентационной направленностью их в пространстве [2]. Естественно, что достоверные модели радиоволнового контроля полимерных композитов должны отображать эту их черту. Использование анизотропных материалов в СВЧ технике позволяет существенно улучшить функциональные характеристики диэлектрических волноводов и элементов на их основе (фильтров, антенн и т.д.) [3], и поэтому встаёт вопрос об углублении наших знаний о взаимодействии электромагнитных волн с такими материалами.

Большая часть предшествующих работ, посвящённых рассеянию волн на телах, расположенных под поверхностью среды, касается ситуации, когда окружающая среда, а также рассеиватель, если он является проницаемым для поля, являются изотропными [4–6]. С другой стороны, работы, в которых рассматривается объект в анизотропной среде, в основном посвящены однородным средам, где границы раздела отсутствуют [7, 8].

С. Н. Шульга

1249

Данная работа является попыткой обобщения известной ранее физико-математической модели рассеяния радиоволн подповерхностными объектами на случай, когда однородное диэлектрическое полупространство и погруженное в него неоднородное диэлектрическое тело характеризуются анизотропией электрофизических свойств. Из-за сложности общей трёхмерной задачи мы сосредоточили здесь своё внимание на более простой, двумерной модели, когда рассеиватель имеет вид бесконечно длинного цилиндра, параллельного границе раздела, и является неоднородным лишь в поперечном сечении, а волна распространяется в направлении, перпендикулярном к цилиндру. Кроме того, считается, что тензоры диэлектрической проницаемости тела и среды имеют упрощённый вид, который позволяет существование и раздельный анализ полей E - и H -поляризации. Для численного решения поставленной задачи используется метод интегральных уравнений относительно внутреннего поля включения [9] совместно с методом моментов [8, 10, 11].

2. Будем считать, что область $z > 0$ является свободной, а однородное материальное полупространство занимает область $z < 0$. Погрузим в это полупространство неоднородный цилиндр, так чтобы он был ориентирован вдоль оси Ox , и обозначим его поперечное сечение в плоскости yOz через S (см. рис. 1).

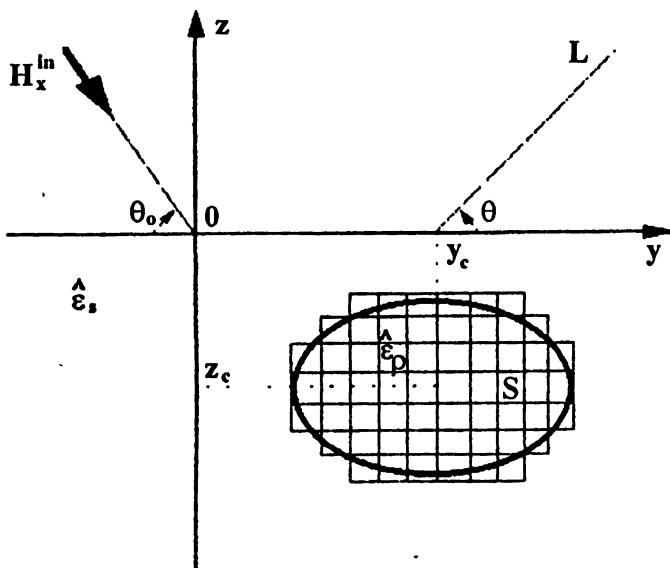


Рис. 1.

Диэлектрическая проницаемость материального полупространства и

цилиндра характеризуется соответствующими тензорами:

$$\hat{\epsilon}_s = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy}^{(s)} & \epsilon_{yz}^{(s)} \\ 0 & \epsilon_{zy}^{(s)} & \epsilon_{zz}^{(s)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\epsilon}_p = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(p)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy}^{(p)} & \epsilon_{yz}^{(p)} \\ 0 & \epsilon_{zy}^{(p)} & \epsilon_{zz}^{(p)} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Элементы тензора $\hat{\epsilon}_s$, являются постоянными величинами, а $\hat{\epsilon}_p$ — некоторыми функциями переменной $\vec{r} = (0, y, z)$ в области S . Тензоры диэлектрической проницаемости с такой структурой присущи, например, одноосным материалам с оптической осью в плоскости yOz или же электронной плазме в статическом магнитном поле, направленном вдоль оси Ox . Магнитная проницаемость везде равна единице.

Что касается электромагнитного поля, то относительно него сделаны следующие допущения: 1) оно возбуждается сторонними источниками с гармонической зависимостью от времени ($\sim e^{-i\omega t}$) и 2) не зависят от переменной x . Тогда из уравнений Максвелла видно, что компоненты E_x , H_y и H_z исследуемого поля совпадают с одноименными компонентами для случая изотропного материального полупространства с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_s = \epsilon_{xx}^{(s)}$, которое вмещает изотропный цилиндр с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_p = \epsilon_{xx}^{(p)}$. Сходная задача для E -поляризованного поля неоднократно рассматривалась раньше (см., например, [12] и цитированную там литературу), и поэтому мы ограничиваемся расчётом величин H_x , E_y , E_z , которые определяют H -поляризованный компоненту полного поля.

3. Используя уравнения Максвелла, можно получить следующие выражения для компонент E_y , E_z через x -компоненту магнитного поля: в свободном полупространстве ($z > 0$) —

$$E_y = -\frac{1}{ik_0} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{ik_0} \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (2)$$

в материальном полупространстве ($z < 0$) вне рассеивателя S —

$$E_y = -\frac{1}{ik_0 a_s} \left(\epsilon_{yz}^{(s)} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \epsilon_{zz}^{(s)} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$E_z = \frac{1}{ik_0 a_s} \left(\epsilon_{yy}^{(s)} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \epsilon_{zy}^{(s)} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right),$$

и внутри рассеивателя —

$$E_y = -\frac{1}{ik_0 a_p} \left(\varepsilon_{yz}^{(p)} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \varepsilon_{zz}^{(p)} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$E_z = \frac{1}{ik_0 a_p} \left(\varepsilon_{yy}^{(p)} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \varepsilon_{zy}^{(p)} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right),$$

где приняты обозначения

$$a_s = \varepsilon_{yy}^{(s)} \varepsilon_{zz}^{(s)} - \varepsilon_{yz}^{(s)} \varepsilon_{zy}^{(s)}, \quad a_p = \varepsilon_{yy}^{(p)} \varepsilon_{zz}^{(p)} - \varepsilon_{yz}^{(p)} \varepsilon_{zy}^{(p)}. \quad (5)$$

Отметим, что в правой части формул (2)–(4) и следующих уравнениях (7), (8) для упрощения записи опущены члены, связанные со сторонними источниками. Далее считается, что эти сторонние источники расположены вне рассеивателя — например, в бесконечно удалённых точках пространства.

Для нахождения функции H_x мы следуем известной идеи [9] о том, что электромагнитное поле в присутствии тела совпадает с полем в отсутствие тела, которое порождалось бы суперпозицией тех же сторонних источников и новых, наведённых источников электрического типа с плотностью $\vec{J}^{\text{ind}} = (0, J_y^{\text{ind}}, J_z^{\text{ind}})$, где

$$J_y^{\text{ind}} = -\frac{ik_0 c}{4\pi} (\eta_{yy} E_y + \eta_{yz} E_z), \quad J_z^{\text{ind}} = -\frac{ik_0 c}{4\pi} (\eta_{zy} E_y + \eta_{zz} E_z), \quad (6)$$

если \vec{r} принадлежит области S , и $J_y^{\text{ind}} = J_z^{\text{ind}} \equiv 0$, если \vec{r} находится вне S . Здесь $k_0 = \omega/c$ и c — волновое число и скорость света в вакууме, а функции $\eta_{jk} \equiv \varepsilon_{jk}^{(p)} - \varepsilon_{jk}^{(s)}$ означают электрический контраст рассеивателя ($j, k = y, z$). Наведённые источники фактически распределены по области S , а при переходе её границы скачком принимают нулевые значения. Отметим, что они представляют собой неизвестные величины, так как выражаются через пока неизвестные компоненты электрического поля E_y, E_z в сечении цилиндра.

Как следует из уравнений Максвелла для свободного и материального полупространств с учётом наведённых источников, функция H_x удовлетворяет волновым уравнениям

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_0^2) H_x = 0, \quad (z > 0); \quad (7)$$

$$\left[\varepsilon_{yy}^{(s)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon_{zz}^{(s)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (\varepsilon_{yz}^{(s)} + \varepsilon_{zy}^{(s)}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + k_0^2 a_s \right] H_x = a_s q, \quad (8)$$

где q определяется соотношением

$$q = \frac{4\pi}{ca_s} \left[\left(\varepsilon_{zy}^{(s)} \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{zz}^{(s)} \frac{\partial}{\partial z} \right) J_{py} - \left(\varepsilon_{yy}^{(s)} \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{yz}^{(s)} \frac{\partial}{\partial z} \right) J_{pz} \right]. \quad (9)$$

Частные производные в правой части (9) следует понимать в духе теории обобщенных функций [13] в связи с тем, что функции J_{py} , J_{pz} имеют разрывы на контуре области S .

Нетрудно также убедиться, что непрерывность касательных компонент поля H_x , E_y на границе раздела $z = 0$ будет обеспечена, если выполняются условия

$$\left. H_x \right|_{z=+0} = \left. H_x \right|_{z=-0}, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial H_x}{\partial z} \right|_{z=+0} = \frac{1}{a_s} \left(\varepsilon_{yz}^{(s)} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \varepsilon_{zz}^{(s)} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \Big|_{z=-0}.$$

4. Введём в рассмотрение функцию Грина $G(\vec{r}, \vec{r}')$ как решение уравнений (8), (9) для дельтообразной правой части $q(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, которое удовлетворяет граничным условиям (10) и условиям излучения в бесконечности. Тогда из (8)–(10) можно перейти к такому соотношению,

$$H_x(\vec{r}) = H_x^{in}(\vec{r}) + \int G(\vec{r}, \vec{r}') q(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (11)$$

где интеграл берётся по всей плоскости yOz , \vec{r} — произвольная точка в плоскости yOz , а $H_x^{in}(\vec{r})$ — произвольное решение однородной ($q = 0$) задачи (8)–(10). Физический смысл величины H_x^{in} заключается в том, что она представляет собой первичное поле, которое существует в отсутствие рассеивателя (и наведённых источников).

С помощью интегрирования по частям с учётом (9), (6) можно (11) переписать в виде

$$H_x(\vec{r}) = H_x^{in}(\vec{r}) + ik_0 F[E_y, E_z](\vec{r}), \quad (12)$$

$$F[E_y, E_z](\vec{r}) = \int_S d\vec{r}' [L_y(\vec{r}, \vec{r}') E_y(\vec{r}') + L_z(\vec{r}, \vec{r}') E_z(\vec{r}')]. \quad (13)$$

Функции L_y , L_z описываются выражениями

$$\begin{aligned} a_s L_y(\vec{r}, \vec{r}') &= [\varepsilon_{zy}^{(s)} \varepsilon_{yy}^{(p)}(\vec{r}') - \varepsilon_{yy}^{(s)} \varepsilon_{zy}^{(p)}(\vec{r}')] \partial G(\vec{r}, \vec{r}') / \partial y' + \\ &+ [\varepsilon_{zz}^{(s)} \eta_{yy}(\vec{r}') - \varepsilon_{yz}^{(s)} \eta_{zy}(\vec{r}')] \partial G(\vec{r}, \vec{r}') / \partial z', \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a_s L_z(\vec{r}, \vec{r}') &= [\varepsilon_{zz}^{(s)} \varepsilon_{yz}^{(p)}(\vec{r}') - \varepsilon_{yz}^{(s)} \varepsilon_{zz}^{(p)}(\vec{r}')] \partial G(\vec{r}, \vec{r}') / \partial z' + \\ &+ [\varepsilon_{zy}^{(s)} \eta_{yz}(\vec{r}') - \varepsilon_{yy}^{(s)} \eta_{zz}(\vec{r}')] \partial G(\vec{r}, \vec{r}') / \partial y', \end{aligned} \quad (15)$$

в которых фигурируют обыкновенные частные производные $\frac{\partial G}{\partial y'}$, $\frac{\partial G}{\partial z'}$.

Рассуждая аналогично [8], подставим (12) в формулы (4). В результате получим систему интегродифференциальных уравнений относительно неизвестного распределения электрического поля E_y, E_z в сечении цилиндра:

$$E_y(\vec{r}) = -\frac{1}{a_p(\vec{r})} \left[\varepsilon_{yy}^{(p)}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{zz}^{(p)}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[H_x^{in}(\vec{r})/ik_0 + F(\vec{r}) \right], \quad (16)$$

$(\vec{r} \in S)$

$$E_z(\vec{r}) = \frac{1}{a_p(\vec{r})} \left[\varepsilon_{yy}^{(p)}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{zy}^{(p)}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[H_x^{in}(\vec{r})/ik_0 + F(\vec{r}) \right]. \quad (17)$$

Имея решение этих уравнений, величину $H_x(\vec{r})$ в произвольной точке плоскости yOz можно определить из (12), а компоненты электрического поля E_y, E_z вне рассеивателя — по прямым формулам (2), (3).

5. Для расчёта электромагнитного поля в соответствии с приведённой выше схемой нам понадобится функция Грина $G(\vec{r}, \vec{r}')$. Её мы найдём довольно просто: как решение соответствующей граничной задачи с помощью преобразования Фурье по разностной переменной $y - y'$:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa e^{i\kappa(y-y')} G(\kappa, z, z'). \quad (18)$$

Здесь κ — спектральный параметр, а $G(\kappa, z, z')$ — спектральная функция Грина. В случае, когда точки \vec{r} и \vec{r}' находятся вместе в нижнем полупространстве ($z, z' < 0$), в интеграле в правой части (18) удаётся выделить функцию Грина $G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}')$ для безграничной среды с диэлектрической проницаемостью $\hat{\epsilon}_s$ и дополнительный член $G^{(r)}(\vec{r}, \vec{r}')$ вида (18) со спектральным прообразом $G^{(r)}(\kappa, z, z')$, который учитывает присутствие границы $z = 0$. Решение для $G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}')$ имеется в работах [7, 8]. Полученные нами аналитические выражения для $G^{(r)}(\kappa, z, z')$ отличаются некоторой громоздкостью и поэтому не приводятся.

Численное решение интегродифференциальных уравнений (16), (17) мы получаем методом моментов [10, 11]. С этой целью мы сначала аппроксимируем сечение S рассеивателя ступенчатою фигуру (рис. 1), которая состоит из M одинаковых прямоугольных ячеек размером $\Delta y \times \Delta z$. Приблизительно считается, что диэлектрическая проницаемость тела и электрическое поле являются постоянными величинами в пределах каждой ячейки. Положив в (16), (17) $\vec{r} = \vec{r}_m$, где \vec{r}_m — радиус-вектор центральной точки в m -й ячейке, мы получаем систему $2M$ линейных алгебраических уравнений относительно величин $E_{ym} = E_y(\vec{r}_m)$ и $E_{zm} = E_z(\vec{r}_m)$:

$$E_{ym} = \sum_{n=1}^M (K_{mn}^{yy} E_{yn} + K_{mn}^{yz} E_{zn}) + Q_m^y, \quad (19)$$

$(m = 1, 2, \dots, M)$

$$E_{zm} = \sum_{n=1}^M (K_{mn}^{zy} E_{yn} + K_{mn}^{zz} E_{zn}) + Q_m^z. \quad (20)$$

Выражения для коэффициентов K_{mn}^{jk} и правых частей Q_m^j легко установить, сопоставив (19), (20) с (16), (18), и поэтому они не детализируются. Система уравнений (19), (20) решалась нами численно методом Гаусса.

Основная трудность, связанная с системой (19), (20), лежит в необходимости численного вычисления коэффициентов K_{mn}^{jk} . Из представления $G(\vec{r}, \vec{r}') = G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}') + G^{(r)}(\vec{r}, \vec{r}')$, справедливого для $z, z' < 0$, следует, что вначале величины $L_y(\vec{r}, \vec{r}')$, $L_z(\vec{r}, \vec{r}')$ из (14), (15), а потом и коэффициенты K_{mn}^{jk} можно записать в виде суммы двух слагаемых, $K_{mn}^{jk} = K_{mn}^{jk(0)} + K_{mn}^{jk(r)}$, первое из которых возникает в задаче рассеяния на теле в безграничной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_s , а второе учитывает влияние границы раздела $z = 0$. Метод численного определения величин $K_{mn}^{jk(0)}$ описан в работе [8]; он сводит эту процедуру к вычислению некоторых линейных интегралов по контуру n -й ячейки. Величина $K_{mn}^{jk(r)}$ имеет вид трёхкратного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{S_n} d\vec{r}' \dots$, где внутренний интеграл по n -й ячейке S_n удаётся вычислить аналитически, а внешний интеграл типа Зоммерфельда находится численно с применением соответствующей деформации контура интегрирования в комплексную область спектрального параметра κ [12]. Такая же схема вычислений используется также при вычислении величины $F[E_y, E_z](\vec{r})$ и поля H_x, E_y, E_z вне рассеивателя. Присутствие интеграла типа Зоммерфельда в выражении $F[E_y, E_z](\vec{r})$ становится понятным после подстановки интегрального разложения (18) в (14), (15).

6. На рис. 2 и 3 проиллюстрировано численное решение задачи рассеяния плоской H -поляризованной волны единичной амплитуды, которая падает из свободного полупространства по нормали к границе $z = 0$ материального полупространства. Принято, что включение имеет прямоугольное поперечное сечение с центром симметрии в точке $y_c = 0, z_c = -h_c$ ($h_c > 0$ — глубина погружения включения) и сторонами l и h , которые параллельны осям Oy и Oz соответственно. Объектом исследования выступает комплексная амплитуда рассеяния $D(\theta)$, выражение для которой получается из следующего представления рассеянного поля в свободном

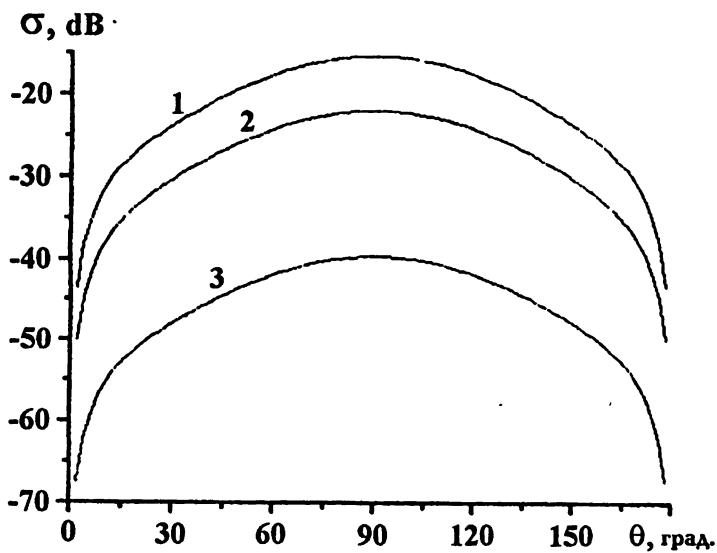


Рис. 2.

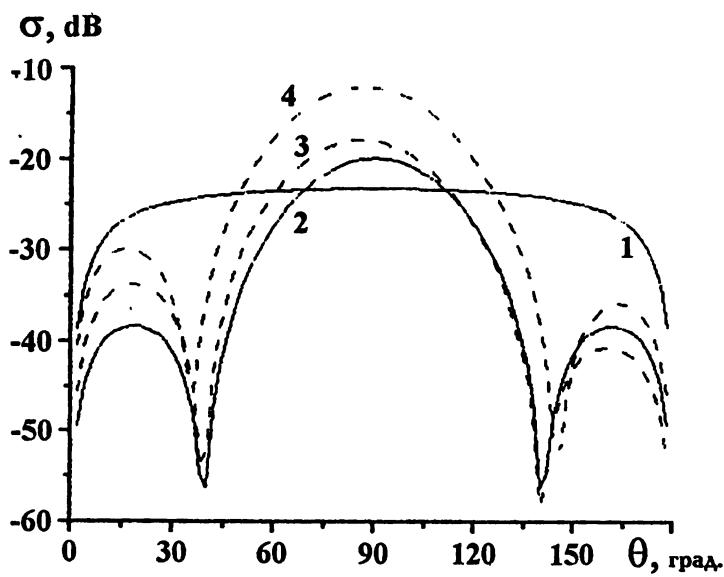


Рис. 3.

полупространстве:

$$H_x^{sc}(\vec{r}) = D(\theta) \frac{e^{ik_0 L}}{\sqrt{L}} \quad \text{при } k_0 L \gg 1. \quad (21)$$

Здесь L, θ — полярные координаты в плоскости yOz с полюсом в начале координат: $y = L \cos \theta, z = L \sin \theta$. Точнее, нас интересует коэффициент рассеяния $\sigma(\theta) = |D(\theta)|^2$. Материал включения и окружающей среды представляет собой одноосный диэлектрик, который характеризуется главными значениями диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}$ вдоль оптической оси и в перпендикулярном ей направлении, соответственно. Считается, что оптическая ось лежит в плоскости yOz и составляет угол φ_0 с направлением оси Oy , который отсчитывается от выбранного направления по часовой стрелке. Нетрудно убедиться, что тензор диэлектрической проницаемости такого материала в системе координат xyz представляется в виде (2) с элементами

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy}^{(s)} &= \epsilon_{\parallel}^{(s)} \cos^2 \varphi_0 + \epsilon_{\perp}^{(s)} \sin^2 \varphi_0, \\ \epsilon_{zz}^{(s)} &= \epsilon_{\parallel}^{(s)} \sin^2 \varphi_0 + \epsilon_{\perp}^{(s)} \cos^2 \varphi_0, \\ \epsilon_{yz}^{(s)} &= \epsilon_{zy}^{(s)} = (\epsilon_{\perp}^{(s)} - \epsilon_{\parallel}^{(s)}) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Рис. 2 отвечает ситуации, когда материальное полупространство представляет собой морской лёд с главными значениями диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\parallel}^{(s)} = 3,4 + 0,25i, \epsilon_{\perp}^{(s)} = 3,4 + 0,12i$ [14]. Приведённые здесь кривые отвечают разным значениям диэлектрической проницаемости рассеивателя. Кривая 1 описывает однородное включение, а именно пустотелую трещину с единичной диэлектрической проницаемостью. Вторая кривая получена для ситуации, когда включение является анизотропным и кусочно-неоднородным. Верхняя его половина характеризуется единичной диэлектрической проницаемостью (воздух), а нижняя — одноосным диэлектрическим тензором с главными значениями: $\epsilon_{\parallel}^{(p)} = 3,87 + 0,057i, \epsilon_{\perp}^{(p)} = 3,54 + 0,21i$ (морской лёд), — и тем же направлением оптической оси, что и в окружающей среде. Кривая 3 получена для сплошного анизотропного включения с тензором диэлектрической проницаемости, описанным только что. Глубина залегания включения $k_0 h_c = 2,0$, а его размеры такие: $l = 20h, k_0 h = 0,2$. На рис. 3 представлены результаты расчётов для материального полупространства из полимерного композита на основе резины, армированного углеродными частицами, в которое погружено включение — армирующий стержень — из двуокиси титана. Для выбранных материалов в диапазоне СВЧ имеем [15]: $\epsilon_{\parallel}^{(s)} = 11,87 + 0,8i, \epsilon_{\perp}^{(s)} = 21,19 + 3,23i, \epsilon_{\parallel}^{(p)} = 7,197, \epsilon_{\perp}^{(p)} = 0,913$. Глубина погружения включения составляет $k_0 h_c = 2,0$, а его размеры характеризуются величинами

$l = h$, $k_0 h = 1,0$ (кривая 1) либо $l = 80h$, $k_0 h = 0,1$ (остальные кривые). Рассмотрены такие случаи ориентации оптических осей окружающей среды и включения: обе названные оси совпадают с осью Oy , т.е. $\varphi_0^{(s)} = 0^\circ$, $\varphi_0^{(p)} = 0^\circ$ (кривые 1, 2); оптическая ось окружающей среды наклонена под углом $\varphi_0^{(s)} = 45^\circ$, а $\varphi_0^{(p)} = 0^\circ$ (кривая 3); оптическая ось материала включения наклонена под углом $\varphi_0^{(p)} = 45^\circ$, а $\varphi_0^{(s)} = 0^\circ$ (кривая 4).

Как показало численное исследование, предложенное нами решение является достаточно эффективным, и поэтому может использоваться для решения обратной задачи визуализации дефектов, скрытых границей раздела. С точки зрения возможности применения предложенной модели в дистанционном зондировании и нераэрушающем контроле полимерных композитов её целесообразно усовершенствовать в таких направлениях, как учёт трёхмерного характера рассеяния, неоднородности окружающей среды и возможное присутствие в ней случайных возмущений. Это может быть достигнуто с помощью интегральных уравнений электродинамики для слоистых сред [16], и метода многократного рассеяния в статистически неоднородных средах [17].

Автор признателен О. А. Третьякову и Н. П. Жуку за обсуждение результатов данной статьи и рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fung A. K. Microwave Scattering and Emission Models and Their Applications. — London: Artech House, 1994. P. 36.
2. Krohn T. L., Medgyesi-Mitschang L. //IEEE Trans. Antennas. Propag., 1989. V. 37. № 2. P. 219.
3. Курушин Е. П., Нефедов Е. И. Электродинамика анизотропных структур. — М.: Наука, 1980. С. 86.
4. Peters L. Jr., Richmond J. H. //Radio Sci., 1982. V. 17. № 6. P. 973.
5. Uzunoglu N. K., Kanellopoulos J. D. //J. Phys. A, 1982. V. 15. № 2. P. 459.
6. Яровой А. Г. //Акуст. журн., 1991. Т. 37. № 6. С. 1047.
7. Monzon J. C. //IEEE Trans. Antennas. Propag., 1988. V. 36. № 10. P. 1401.
8. Багацкая О. В., Жук Н. П., Шульга С. Н. //Радиотехника и электроника, 1995. Т. 40. № 6. С. 869.
9. Хижняк Н. А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. — Киев: Наукова думка, 1986. С. 91.
10. Richmond J. H. //IEEE Trans. Antennas. Propag., 1965. V. 14. № 5. P. 334.
11. Su C. C. //IEEE Trans. Antennas. Propag., 1987. V. 35. № 12. P. 1418.

12. Zhuck N. P., Yarovoy A. G. //IEEE Trans. Antennas. Propag., 1994. V. 42. № 1. P. 16.
13. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959. С. 234.
14. Lee J. K., Kong J. A. //IEEE Trans. Geosci. Rem. Sens., 1985. V. 23. № 6. P. 910.
15. Hashimoto O., Shimizu Y. //IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1986. V. 34. № 11. P. 1201.
16. Жук Н. П. //Изв. вузов. - Радиофизика, 1985. Т. 26. № 6. С. 753.
17. Zhuck N. P. //Phys. Rev. B, 1994. V. 50. № 21. P. 15636.

Харьковский государственный
университет, Украина

Поступила в редакцию
3 февраля 1997 г.

**AN EFFECT OF MEDIUM ANISOTROPY ON THE SCATTERING OF
ELECTROMAGNETIC WAVES BY A SUBSURFACE INCLUSION**

S. N. Shul'ga

A two-dimensional model of electromagnetic wave scattering by a penetrable object immersed in a material halfspace is developed, which takes into account electromagnetic anisotropy of the scatterer and the ambient medium. This model is initiated by practical needs of remote sensing, nondestructive testing and microwave engineering, and invokes numerical solution to a system of integral equations for the electric field components inside an inclusion via the moment method. Numerical examples which illustrate scattering by an inhomogeneity in sea ice and polymer composite are presented.

УДК 621.391.8:519.217

СКОРЕЙШЕЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

A. M. Силаев

Сформулированы правила определения оптимальных моментов остановки для различных функций потерь в задаче скорейшего обнаружения скачкообразного изменения параметров сигналов в непрерывном времени. Найдены выражения для функций апостериорных потерь. Показано, что для решения задачи скорейшего обнаружения разладки можно использовать алгоритмы оптимального в среднеквадратическом смысле оценивания момента появления скачка.

1. ВВЕДЕНИЕ

По проблемам оптимального обнаружения изменения вероятностных характеристик случайных процессов и оптимального оценивания моментов появления скачков параметров сигналов к настоящему времени опубликовано большое число работ (см., например, [1–7]). Данные задачи возникают при разработке систем управления технологическими процессами, в технической и медицинской диагностике, в сейсмологии, радиолокации и в других областях науки и техники. Для некоторых приложений представляет интерес скорейшее обнаружение момента изменения параметров случайных процессов [8, 9]. Задача скорейшего обнаружения “разладки” вероятностных характеристик случайных процессов была сформулирована А. Н. Колмогоровым и для простейшего случая скачкообразного изменения среднего значения наблюдаемого белого шума решена в работах [1, 8–11]. Данную задачу можно формулировать как задачу о нахождении оптимального момента остановки наблюдений, и для её решения обычно используются методы теории статистического последовательного анализа и теории нелинейной фильтрации марковских случайных процессов [11–17]. Однако попытки получить точное решение данной задачи для более сложных случаев, чем изменение среднего значения белого шума, обычно наталкиваются на серьёзные математические трудности.

В работах [18–20] рассматривались близкие по тематике задачи оптимальной фильтрации сигналов со скачкообразными изменениями параметров и оптимального в среднеквадратическом смысле оценивания самих

моментов появления скачков. В настоящей работе алгоритмы, найденные в [19, 20], применяются для задачи скорейшего обнаружения скачкообразного изменения параметров случайных процессов в непрерывном времени. Рассматриваются различные варианты функций потерь. Для каждого варианта сформулированы правила определения оптимальных моментов остановки наблюдений. Получены выражения для функций апостериорных потерь. Величина функции апостериорных потерь в момент остановки позволяет характеризовать качество обнаружения скачкообразного изменения параметров для конкретной реализации наблюдаемого процесса.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем считать, что в непрерывном времени наблюдается реализация \vec{y}_0^t векторного случайного процесса

$$\vec{y}(t) = \vec{s}(\vec{x}, \tau, t) + \vec{\eta}(t) \quad (t > 0), \quad (1)$$

где

$$\vec{s}(\vec{x}, \tau, t) = \begin{cases} \vec{s}_0(\vec{x}, t) & \text{при } t \leq \tau, \\ \vec{s}_1(\vec{x}, t) & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что $\vec{s}_0(\vec{x}, t)$, $\vec{s}_1(\vec{x}, t)$ — заданные функции времени и информационного сигнала $\vec{x}(t)$; $\vec{\eta}(t)$ — вектор белых гауссовых шумов с нулевым средним значением и матрицей интенсивностей $N(t)$, $\vec{\eta}(t)$ статистически не зависит от τ и $\vec{x}(t)$; τ — неизвестный случайный момент скачкообразного изменения структуры наблюдаемого процесса (1). Случайный векторный процесс $\vec{x}(t)$ будем считать марковским (при фиксированном значении τ) с уравнением для априорной условной плотности вероятности вида

$$\frac{\partial P(\vec{x}, t | \tau)}{\partial t} = \begin{cases} L_0 P(\vec{x}, t | \tau) & \text{при } t \leq \tau, \\ L_1 P(\vec{x}, t | \tau) & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь для общности предполагается, что в момент времени τ одновременно со скачком статистических характеристик наблюдаемого процесса (1) могут также происходить и скачкообразные изменения самого сигнала $\vec{x}(t)$, что учитывается в (2) путём переключения операторов $L_0(\cdot)$, $L_1(\cdot)$, определяющих эволюцию плотности вероятности процесса $\vec{x}(t)$ до и после момента скачка τ . Будем считать, что при $t = 0$ начальное значение сигнала $\vec{x}(0)$ и случайная величина τ статистически независимы, и для них заданы плотности вероятности $P_0(\vec{x})$ и $P_\tau(\tau)$ при $\tau \geq 0$. Например, можно предполагать, что

$$P_\tau(\tau) = \begin{cases} \nu e^{-\nu\tau} & \text{при } \tau \geq 0, \\ 0 & \text{при } \tau < 0 \end{cases} \quad (3)$$

экспоненциальная априорная плотность вероятности с параметром ν , или

$$P_\tau(\tau) = \begin{cases} 1/T & \text{при } 0 \leq \tau \leq T, \\ 0 & \text{при } \tau < 0, \tau > T \end{cases} \quad (4)$$

равномерная плотность вероятности на интервале наблюдений длительности T .

Будем рассматривать задачу определения момента остановки \bar{t} процесса наблюдений, наиболее близкого к истинному моменту появления скачка τ , в смысле минимума средних потерь

$$J = \langle c(\bar{t}, \tau) \rangle. \quad (5)$$

Здесь $c(t, \tau)$ — функция потерь, а скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают статистическое усреднение по всем случайным величинам задачи. В общем случае функцию потерь (риска, штрафов) имеет смысл выбирать в виде $c(t - \tau)$ такой, чтобы при $t < \tau$ она не возрастила, при $t > \tau$ не убывала, а при $t = \tau$ равнялась нулю. В дальнейшем будем рассматривать следующие функции потерь:

а) квадратичную

$$c_k(t - \tau) = (t - \tau)^2, \quad (6a)$$

б) в виде модуля линейной функции

$$c_m(t - \tau) = |t - \tau|, \quad (6b)$$

в) несимметричную с постоянным уровнем штрафа за ложные тревоги

$$c_p(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } t < \tau, \\ a(t - \tau) & \text{при } t \geq \tau, \end{cases} \quad (6c)$$

г) экспоненциальную функцию потерь с насыщением

$$c_e(t - \tau) = 1 - e^{-a|t - \tau|}, \quad (6d)$$

где a — некоторый постоянный коэффициент. Графики данных функций приведены на рис. 1.

Пусть $W_\tau(\tau, t) \equiv P_\tau(\tau | \vec{y}_0^t)$ — апостериорная плотность вероятности τ при условии, что известна реализация \vec{y}_0^t наблюдаемого процесса $\vec{y}(t)$ на интервале времени $[0, t]$. Обозначим посредством

$$J(s, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} c(s - \tau) W_\tau(\tau, t) d\tau \quad (7)$$

условные апостериорные потери, которые получаются в результате усреднения функции $c(s - \tau)$ по τ при фиксированной реализации наблюдений

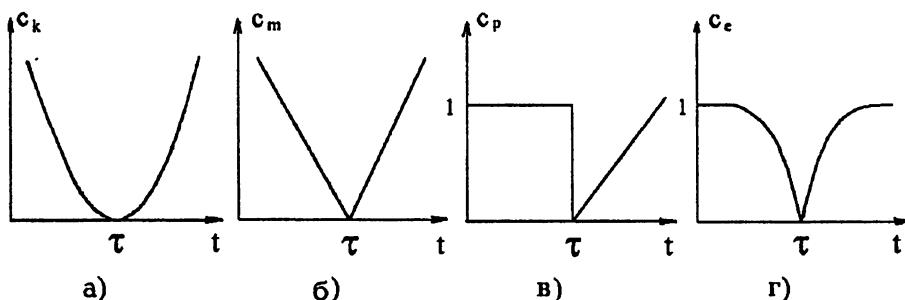


Рис. 1.

\bar{y}_0^t . Критерий качества (5) при условии, что наблюдения проводятся до момента времени t , можно представить в виде

$$J(t) = \langle J(t^*, t) \rangle_{\bar{y}_0^t}, \quad (8)$$

где оценка $t^* = t^*(\bar{y}_0^t)$ является функционалом наблюдений, а скобки $\langle \dots \rangle_{\bar{y}_0^t}$ означают усреднение по ансамблю реализаций \bar{y}_0^t . Отсюда следует, что для минимизации средних потерь (8) достаточно минимизировать апостериорную функцию потерь $J(t^*, t)$, подбирая значение t^* .

Будем считать, что допустимыми в момент t являются значения

$$t^*(\bar{y}_0^t) \geq t. \quad (9)$$

Данному условию можно дать следующую интерпретацию. Величина t^* является оценкой момента остановки для каждой конкретной реализации наблюдений \bar{y}_0^t . При этом решение в момент времени t продолжать наблюдения принимается только при $t^* > t$. Если же $t^* = t$, то наблюдения должны остановиться. Поскольку t^* предполагается непрерывной функцией времени t , из рассмотрения, таким образом, исключаются ситуации, когда $t^* < t$. Отметим, что если критерий качества (5) не дополнен условием типа (9), то его затруднительно использовать для решения задачи скорейшего обнаружения скачка. Минимизировать такой критерий будут просто некоторые оценки момента появления скачка τ , с течением времени устанавливающиеся к постоянному значению в соответствии с эмпирическим правилом — чем дольше проводятся наблюдения, тем точнее оценка параметра сигнала. Поэтому именно при помощи условия (9) критерий качества (5) удается применить для решения задачи скорейшего обнаружения разладки.

Предположим, что для каждого момента t до остановки наблюдений найдены оптимальные значения $t^* = t^*(\bar{y}_0^t) > t$, которые минимизируют функции (7) и (8), а в момент $t = \bar{t}$ выполняется условие остановки $\bar{t} = t^* = t^*(\bar{y}_0^t) = t$. В дальнейшем покажем, что именно в этот мо-

мент минимизируется критерий (5) с учётом ограничения (9), т.е. функция средних потерь $J(t)$ при $t > 0$ достигает минимального значения $J = J(\bar{t}) = \min J(t)$ в момент остановки наблюдений $t = \bar{t}$.

3. ФУНКЦИИ АПОСТЕРИОРНЫХ ПОТЕРЬ

Воспользуемся результатами работ [18–20]. В [18] рассматривалась задача оптимального оценивания процесса $\vec{x}(t)$, заданного уравнениями (1), (2). Апостериорную плотность вероятности $W(\vec{x}, t) = P(\vec{x}, t | \vec{y}_0^t)$ процесса $\vec{x}(t)$ можно представить в виде

$$W(\vec{x}, t) = p_0(t) W_0(\vec{x}, t) + p_1(t) W_1(\vec{x}, t), \quad (10)$$

где

$$p_0(t) = P(\tau \geq t | \vec{y}_0^t) = \int_t^\infty W_\tau(u, t) du$$

и

$$p_1(t) = 1 - p_0(t) = P(\tau < t | \vec{y}_0^t) = \int_{-\infty}^t W_\tau(u, t) du$$

имеют смысл апостериорных вероятностей непоявления ($t \leq \tau$) и появления ($t > \tau$) скачкообразного изменения к моменту времени t , а $W_0(\vec{x}, t)$, $W_1(\vec{x}, t)$ — соответствующие условные плотности вероятности вектора $\vec{x}(t)$ при отсутствии и при появлении скачка к этому моменту времени. В [18] найдена замкнутая система взаимосвязанных дифференциальных уравнений для функций $p_1(t)$, $W_0(\vec{x}, t)$, $W_1(\vec{x}, t)$.

В работах [19, 20] рассматривались также задачи оптимального оценивания момента τ скачкообразного изменения статистических характеристик случайного процесса $\vec{x}(t)$, заданного моделью уравнений (1), (2). По аналогии с (10) оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка

$\hat{f}_\tau(t) = \int_{-\infty}^\infty f(u) W_\tau(u, t) du$ произвольной функции $f(\tau)$ может быть представлена в виде взвешенной суммы

$$\hat{f}_\tau(t) = p_0(t) f_0(t) + p_1(t) f_1(t) \quad (11)$$

двух условных оценок $f_0(t)$, $f_1(t)$, которые вычисляются в текущем времени совместно с функциями $p_0(t)$, $p_1(t)$ с помощью системы взаимосвязанных дифференциальных уравнений. Например, считая $f(\tau) = \tau$ или $f(\tau) = \tau^2$, можно получить алгоритмы оптимального в среднеквадратическом смысле оценивания самого момента скачка τ или его квадрата:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(t) &= p_0(t) \hat{\tau}_0(t) + p_1(t) \hat{\tau}_1(t), \\ \widehat{\tau^2}(t) &= p_0(t) \widehat{\tau^2}_0(t) + p_1(t) \widehat{\tau^2}_1(t). \end{aligned} \quad (12)$$

В [10, 18] показано, что апостериорную плотность вероятности $W_\tau(\tau, t)$ при $\tau \geq t$ можно представить в виде

$$W_\tau(\tau, t) = p_0(t) P_\tau(\tau)/p_{0pr}(t) \quad (\tau \geq t), \quad (13)$$

где

$$p_{0pr}(t) = \int_t^\infty P_\tau(u) du = P(\tau \geq t) \quad —$$

априорная вероятность не появления скачка к моменту времени t . С учётом соотношения (13) условная оценка $f_0(t)$ в (11) может быть найдена в виде

$$f_0(t) = \int_t^\infty f(u) W_\tau(u, t) du / p_0(t) = \int_t^\infty f(u) P_\tau(u) du / p_{0pr}(t). \quad (14)$$

Отсюда следует, что условная оценка $f_0(t)$ в (11), а также оценки $\hat{\tau}_0(t)$, $\widehat{\tau^2}_0(t)$ в (12) не зависят от наблюдаемого процесса $\bar{y}(t)$ и определяются только формой априорной плотности вероятности момента появления скачка $P_\tau(\tau)$.

Используя (11)–(14), проведём усреднение по τ интересующих нас

функций потерь (6) и найдём апостериорные потери (7) при $s \geq t$:

а) для квадратичных потерь (6а)

$$\begin{aligned} J_k(s, t) &= s^2 - 2s\hat{\tau}(t) + \widehat{\tau^2}(t) = \\ &= [s^2 - 2s\hat{\tau}_1(t) + \widehat{\tau^2}_1(t)] p_1(t) + \int_t^\infty (u-s)^2 P_\tau(u) du p_0(t) / p_{0pr}(t); \end{aligned} \quad (15a)$$

б) для потерь в виде модуля линейной функции (6б)

$$\begin{aligned} J_m(s, t) &= \int_{-\infty}^t (s-u) W_\tau(u, t) du + \int_s^\infty (u-s) W_\tau(u, t) du = [s - \hat{\tau}_1(t)] p_1(t) + \\ &+ \left[\int_t^s (s-u) P_\tau(u) du + \int_s^\infty (u-s) P_\tau(u) du \right] p_0(t) / p_{0pr}(t); \end{aligned} \quad (15b)$$

в) для функции потерь (6в)

$$\begin{aligned} J_p(s, t) &= a \int_{-\infty}^t (s-u) W_\tau(u, t) du + \int_s^\infty W_\tau(u, t) du = a[s - \hat{\tau}_1(t)] p_1(t) + \\ &+ \left[a \int_t^s (s-u) P_\tau(u) du + \int_s^\infty P_\tau(u) du \right] p_0(t) / p_{0pr}(t); \end{aligned} \quad (15b)$$

г) для экспоненциальной функции потерь (6г)

$$\begin{aligned}
 J_e(s, t) &= 1 - \int_{-\infty}^s e^{-a(s-u)} W_\tau(u, t) du - \int_s^\infty e^{-a(u-s)} W_\tau(u, t) du = \\
 &= 1 - e^{-a(s-t)} \theta_1(t) p_1(t) - \\
 &- \left[\int_t^s e^{-a(s-u)} P_\tau(u) du + \int_s^\infty e^{-a(u-s)} P_\tau(u) du \right] p_0(t)/p_{0pr}(t). \quad (15\Gamma)
 \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\tau}(t)$ и $\widehat{\tau^2}(t)$ — оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки случайной величины τ и её квадрата τ^2 . Функции

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}_1(t) &\equiv \int_{-\infty}^t u W_\tau(u, t) du / p_1(t), \\
 \widehat{\tau^2}_1(t) &\equiv \int_{-\infty}^t u^2 W_\tau(u, t) du / p_1(t), \\
 \theta_1(t) &\equiv \int_{-\infty}^t e^{-a(t-u)} W_\tau(u, t) du / p_1(t)
 \end{aligned}$$

имеют смысл условных оценок величин τ , τ^2 , $e^{-a(t-\tau)}$ при условии появления скачка к моменту времени t . Следуя результатам работ [19, 20], можно записать дифференциальные уравнения для вычисления данных оценок в текущем времени совместно с функциями $p_0(t)$, $p_1(t)$. Эти дифференциальные уравнения достаточно громоздки и в настоящей работе в общем случае не приводятся.

В качестве примера запишем данные уравнения только для задачи, когда наблюдается скалярный сигнал $x(t)$ на фоне белого гауссовского шума $\eta(t)$ с нулевым средним значением и интенсивностью N . При этом сигнал $x(t)$ в момент времени τ скачком изменяет своё значение с нулевого на величину A :

$$y(t) = x(t) + \eta(t); \quad x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq \tau, \\ A & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

В предположении, что $P_\tau(\tau)$ имеет экспоненциальное распределение (3), при $t > 0$ получим систему дифференциальных уравнений в симметризованном смысле [19]:

$$dp_1/dt = \nu p_0 + p_0 p_1 [2y(t)A - A^2] / (2N),$$

$$d\hat{\tau}_1/dt = (\nu p_0/p_1)(t - \hat{\tau}_1), \quad d\widehat{\tau^2}_1/dt = (\nu p_0/p_1)(t^2 - \widehat{\tau^2}_1),$$

$$d\theta_1/dt = -a\theta_1 + (\nu p_0/p_1)(1 - \theta_1).$$

Начальные условия для функций $p_1(t)$, $\hat{\tau}_1(t)$, $\widehat{\tau^2}_1(t)$ нулевые, а $\theta_1(t) = 1$ при $t = 0$. При этом функции $p_{0pr}(t)$, $\hat{\tau}_0(t)$, $\widehat{\tau^2}_0(t)$ в (12)–(15) имеют вид

$$p_{0pr}(t) = e^{-\nu t}, \quad \hat{\tau}_0(t) = t + 1/\nu, \quad \widehat{\tau^2}_0(t) = (t + 1/\nu)^2 + (1/\nu)^2.$$

Отметим, что в общем случае функции $p_1(t)$, $\hat{\tau}_1(t)$, $\widehat{\tau^2}_1(t)$, $\theta_1(t)$, $\hat{\tau}(t)$, $\widehat{\tau^2}(t)$ являются непрерывными функциями времени, если только априорная плотность вероятности $P_\tau(\tau)$ не содержит δ -функций, а, например, имеет вид (3) или (4). Таким образом, формулы (15) при $s = t$ позволяют находить значение апостериорных потерь $J(s, t)$ в текущий момент времени, а при $s > t$ прогнозировать будущие апостериорные потери по наблюдениям \bar{y}_0^t . При этом $J(s, t)$ является непрерывной функцией как по аргументу s , так и по аргументу t . Как известно [12], для решения задачи скорейшего обнаружения разладки необходимо сравнивать текущие и ожидаемые потери. Если $J(t, t) \leq J(s, t)$ при всех $s \geq t$, то, очевидно, необходимо произвести остановку в момент времени t . Если же текущие потери превышают будущие $J(t, t) > J(s, t)$ при некотором $s > t$, то целесообразно продолжать наблюдения.

4. ПРАВИЛА ОСТАНОВКИ НАБЛЮДЕНИЙ

Проведём исследование полученных функций апостериорных потерь (15) при $s \geq t$. Для этого продифференцируем (15) по s и запишем значения первых производных в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_k(s, t)}{\partial s} &= -2[\hat{\tau}(t) - s] = 2\{[\hat{\tau}_0(t) - \hat{\tau}_1(t)]p_1(t) - G_k(s, t)\}, \\ G_k(s, t) &\equiv \hat{\tau}_0(t) - s \equiv \int_t^\infty u P_\tau(u) du / p_{0pr}(t) - s; \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_m(s, t)}{\partial s} &= p_0(t) \left[\frac{p_1(t)}{p_0(t)} - G_m(s, t) \right], \\ G_m(s, t) &\equiv \left[\int_s^\infty P_\tau(u) du - \int_t^s P_\tau(u) du \right] / p_{0pr}(t); \end{aligned} \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_p(s, t)}{\partial s} &= a p_0(t) \left[\frac{p_1(t)}{p_0(t)} - G_p(s, t) \right], \\ G_p(s, t) &\equiv \left[P_\tau(s) - a \int_t^s P_\tau(u) du \right] / [a p_{0pr}(t)]; \end{aligned} \quad (16c)$$

$$\frac{\partial J_e(s, t)}{\partial s} = a e^{-a(s-t)} p_0(t) \left[\frac{\theta_1(t) p_1(t)}{p_0(t)} - G_e(s, t) \right],$$

$$G_e(s, t) \equiv e^{a(s-t)} \left[\int_s^{\infty} e^{-a(u-s)} P_r(u) du - \int_t^s e^{-a(s-u)} P_r(u) du \right] / p_{0pr}(t).$$
(16г)

Здесь введены функции $G(s, t)$, которые могут быть вычислены априорно для различных конкретных плотностей вероятности $P_r(\tau)$.

Рассмотрим сначала случай квадратичной функции потерь. Из (16а) следует, что $G_k(s, t)$ линейно убывает с ростом s и имеет вид, представленный на рис. 2. Можно показать, что для условных оценок $\hat{\tau}_0(t)$ и $\hat{\tau}_1(t)$ выполняются неравенства $\hat{\tau}_1(t) \leq t \leq \hat{\tau}_0(t)$.

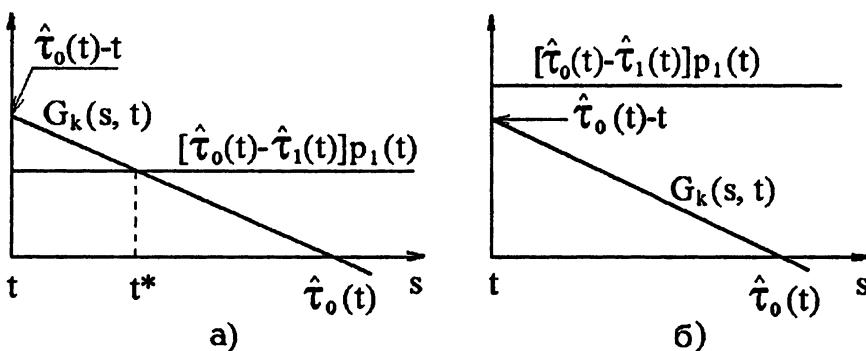


Рис. 2.

Поэтому величина $[\hat{\tau}_0(t) - \hat{\tau}_1(t)] p_1(t)$, входящая в правую часть (16а), всегда неотрицательна и в зависимости от конкретной реализации наблюдаемого процесса \vec{y}_0^t может быть или меньше, или больше, чем $G_k(t, t)$, как показано соответственно на рис. 2а и 2б. Рис. 2а имеет место, например, при малых временах наблюдений, когда $p_1(t)$ мало отличается от начального нулевого значения $p_1(0) = \int_{-\infty}^0 P_r(u) du = 0$ или в случае, когда скачок в (1), (2) ещё не произошёл к моменту времени t , и поэтому функция $p_1(t) \ll 1$. При этом, очевидно, найдётся такое значение $s = t^*$, что $G_k(t^*, t) = [\hat{\tau}_0(t) - \hat{\tau}_1(t)] p_1(t)$. Из (16а) следует, что производная $\partial J_k(s, t) / \partial s$ при $0 \leq s < t^*$ отрицательна, при $s = t^*$ обращается в ноль, а при $s > t^*$ положительна. Поэтому функция $J_k(s, t)$ имеет минимум в точке $s = t^*$, а график её можно представить в виде рис. 3а.

После появления скачка в модели (1), (2) значение функции $p_1(t)$ увеличивается и становится близким к единице. При этом выполняется неравенство $[\hat{\tau}_0(t) - \hat{\tau}_1(t)] p_1(t) > G_k(t, t) = \hat{\tau}_0(t) - t$, как показано на рис. 2б, и из (16а) следует, что $\partial J_k(s, t) / \partial s > 0$ при всех $s \geq t$, а сама функция

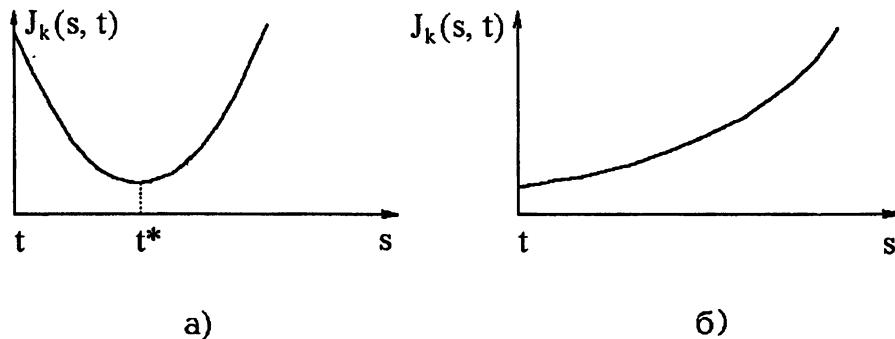


Рис. 3.

$J_k(s, t)$ имеет вид, представленный на рис. 3б, т.е. $J_k(s, t) > J_k(t, t)$ при всех $s \geq t$.

Найдём тот момент времени $t = \bar{t}$, при котором происходит переход от состояния, изображённого на рис. 3а, к состоянию, изображённому на рис. 3б. В этот момент времени точка минимума апостериорных потерь $J_k(s, t)$ совпадает с текущим временем $t^* = t = \bar{t}$, следовательно, $\partial J_k(s, t)/\partial s = 0$ при $s = t$. При этом $[\hat{\tau}_0(t) - \hat{\tau}_1(t)] p_1(t) = \hat{\tau}_0(t) - t$ и, поскольку $\hat{\tau}(t) = p_0(t)\hat{\tau}_0(t) + p_1(t)\hat{\tau}_1(t)$, получаем условие

$$\hat{\tau}(\bar{t}) = \bar{t} \quad (17a)$$

для определения момента остановки \bar{t} . В результате можно сформулировать следующее правило скорейшего обнаружения скачка при квадратичном критерии качества: необходимо вычислять среднеквадратичную оценку момента появления скачка $\hat{\tau}(t)$, которая является достаточной статистикой до тех пор, пока $\hat{\tau}(t) > t$. В первый же момент времени, такой что $\hat{\tau}(t) = t$, следует остановить наблюдения. Подставив (17a) в (15a), найдём величину апостериорных потерь в момент остановки:

$$J_k(\bar{t}, \bar{t}) = \widehat{\tau^2}(\bar{t}) - \bar{t}^2 = \widehat{\tau^2}(\bar{t}) - [\hat{\tau}(\bar{t})]^2. \quad (18a)$$

Отсюда видно, что функция $J_k(\bar{t}, \bar{t})$ равна апостериорной дисперсии случайной величины τ при $t = \bar{t}$ и может быть вычислена [19] для каждой конкретной реализации наблюдений \vec{y}_0^t . Сравнивая $J_k(\bar{t}, \bar{t})$ с априорной дисперсией случайной величины τ , можно судить о точности обнаружения разладки для данной конкретной реализации \vec{y}_0^t .

Рассмотрим теперь случай функции потерь в виде модуля линейной функции. Из (16б) следует, что функция $G_m(s, t)$ — убывающая по s , так как $\partial G_m(s, t)/\partial s = -2P_\tau(s)/p_{0pr}(t) < 0$, если только $P_\tau(s) \neq 0$. При этом $G_m(t, t) = 1$. Поскольку поведение функций $G_m(s, t)$ и $J_m(s, t)$ при $s \geq t$ качественно похоже на поведение соответствующих функций $G_k(s, t)$, $J_k(s, t)$

для квадратичных потерь (см. рис. 2, 3), то по аналогии с предыдущим случаем из (16б) получим следующее правило обнаружения разладки для потерь в виде модуля линейной функции: пока $p_1(t) < 0,5$ надо проводить наблюдения; в момент $t = \bar{t}$, когда первый раз достаточная статистика $p_1(t)$ равна пороговому уровню

$$p_1(\bar{t}) = 0,5 \quad (17б)$$

наблюдения останавливаются. В этот момент функцию апостериорных потерь можно вычислить по формуле

$$J_m(\bar{t}, \bar{t}) = [\hat{\tau}_0(\bar{t}) - \hat{\tau}_1(\bar{t})]/2. \quad (18б)$$

Рассмотрим случай функции потерь (6в). Из (16в) следует, что функция $G_p(s, t)$ может быть представлена в виде

$$G_p(s, t) = \left[P_\tau(s) + a \int_s^\infty P_\tau(u) du \right] / [a p_{0pr}(t)] - 1.$$

Отсюда видно, что $G_p(s, t)$ является убывающей функцией s , если при увеличении s убывает сумма $P_\tau(s) + a \int_s^\infty P_\tau(u) du$. Отметим, что данное условие выполняется, если $P_\tau(\tau)$ невозрастающая функция аргумента τ , например, вида (3) или (4). Будем считать, что в рассматриваемом случае $P_\tau(\tau)$ как раз есть невозрастающая функция τ . Тогда поведение функций $G_p(s, t)$, $J_p(s, t)$ по аналогии с предыдущими случаями можно снова качественно описывать рис. 2 и 3. Обозначим

$$\nu(t) \equiv P_\tau(t)/p_{0pr}(t). \quad (19)$$

Тогда $G_p(t, t) = \nu(t)/a$, и из (16в) следует условие для определения момента остановки в виде $p_1(\bar{t})/p_0(\bar{t}) = \nu(\bar{t})/a$. Поскольку $p_0(\bar{t}) = 1 - p_1(\bar{t})$, то данное условие можно также представить в форме

$$p_1(\bar{t}) = \nu(\bar{t})/[a + \nu(\bar{t})]. \quad (17в)$$

Отсюда видно, что достаточной статистикой в этом случае является функция апостериорной вероятности появления скачка $p_1(t)$ к моменту времени t , а момент остановки \bar{t} определяется тем временем, когда $p_1(t)$ первый раз равна пороговому уровню (17в). В момент $t = \bar{t}$ в соответствии с (15в), (17в) минимальное значение функции апостериорных потерь будет равно

$$J_p(\bar{t}, \bar{t}) = \frac{1 + \nu(\bar{t})[\bar{t} - \hat{\tau}_1(\bar{t})]}{1 + \nu(\bar{t})a}. \quad (18в)$$

Пусть, например, задана экспоненциальная плотность вероятности $P_\tau(\tau)$ вида (3). Тогда из (19) следует, что $\nu(t) \equiv \nu$ и пороговый уровень в (17в) постоянен. Если же $P_\tau(\tau)$ — равномерная плотность вероятности (4), то $\nu(t) = 1/(T-t)$ при $0 \leq t < T$ и порог для $p_1(t)$ в (17в) равен $1/[1+a(T-t)]$, т.е. пороговое значение растёт с увеличением времени при $0 \leq t \leq T$. При $t = T$ как порог, так и функция $p_1(T)$ равны единице и автоматически выполняется равенство (17в). Поэтому в момент $t = T$ заведомо будет произведена остановка наблюдений, если только она не случится в более ранний момент времени.

Рассмотрим, наконец, экспоненциальную функцию потерь (6г). Как видно из (16г), соответствующая данному случаю функция $G_e(s, t)$ довольно сложно выражается через априорную плотность вероятности $P_\tau(\tau)$. Поэтому ограничимся исследованием задач, когда $P_\tau(\tau)$ — экспоненциальная (3) или равномерная (4) плотность вероятности. Несложно получить, что в обоих вариантах $G_e(s, t)$ монотонно убывает при увеличении s . Поэтому поведение функций $G_e(s, t)$, $J_e(s, t)$ можно снова качественно описывать рисунками вида рис. 2 и 3, как для квадратичной функции потерь. Подставив (3) и (4) в (16г), найдём соответствующие пороговые значения $G_e(t, t) = \nu/(a + \nu)$ и $G_e(t, t) = [1 - e^{-a(T-t)}]/[a(T-t)]$ для экспоненциальной и равномерной априорной плотности вероятности при $0 \leq t < T$. Из (16г) видно, что достаточной статистикой в задаче скорейшего обнаружения разладки в этом случае является величина $\theta_1(t)p_1(t)/p_0(t)$. Момент остановки наблюдений определяется тем моментом времени, когда $\theta_1(t)p_1(t)/p_0(t)$ первый раз равна пороговому уровню. При экспоненциальной плотности вероятности (3) из (15г), (16г) получим условие для определения момента остановки $t = \bar{t}$, а также значение функции апостериорных потерь в этот момент времени

$$\theta_1(\bar{t})p_1(\bar{t})/p_0(\bar{t}) = \nu/(a + \nu), \quad (17\text{г})$$

$$J_e(\bar{t}, \bar{t}) = 1 - 2\nu p_0(\bar{t})/(a + \nu).$$

При равномерной априорной плотности вероятности момента появления скачка (4) с помощью (15г), (16г) соответственно получим

$$\theta_1(\bar{t})p_1(\bar{t})/p_0(\bar{t}) = [1 - e^{-a(T-\bar{t})}]/[a(T - \bar{t})],$$

$$J_e(\bar{t}, \bar{t}) = 1 - 2p_0(\bar{t}) [1 - e^{-a(T-\bar{t})}] / [a(T - \bar{t})] \quad (18\text{г})$$

$$(0 \leq \bar{t} < T).$$

Таким образом, для всех четырёх рассмотренных функций потерь (6а)–(6г) найдены алгоритмы обработки наблюдаемого процесса $\tilde{y}(t)$, которые позволяют определить моменты остановки $t = \bar{t}$ и вычислить значения функций апостериорных потерь в эти моменты времени.

5. МИНИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СРЕДНИХ ПОТЕРЬ

Будем рассматривать реализации наблюдений, для которых достаточные статистики достигают пороговые значения по формулам (17), (18) первый раз в момент времени $t = \bar{t}$. Покажем, что при $t = \bar{t}$ действительно минимизируются средние потери (5) с учётом условия (9). Для этого рассмотрим сначала случай, когда наблюдения продолжены до момента времени $t > \bar{t}$. В этот момент времени средние потери можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 J(t) &= \left\langle J \left[t^*(\vec{y}_0^t), t \right] \right\rangle_{\vec{y}_0^t} = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} c [t^*(\vec{y}_0^t) - \tau] W_\tau(\tau, t) d\tau \right\rangle_{\vec{y}_0^t} = \\
 &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle c [t^*(\vec{y}_0^t) - \tau] \right\rangle_{\vec{y}_0^t} W_\tau(\tau, \bar{t}) d\tau \right\rangle_{\vec{y}_0^t}.
 \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь изменён порядок интегрирования по τ , \vec{y}_0^t , $\vec{y}_0^{\bar{t}}$. При этом обозначение \vec{y}_0^t учитывает совокупность реализаций наблюдений $\vec{y}_0^{\bar{t}}$ и \vec{y}_0^t , т.е. $\vec{y}_0^t = \{\vec{y}_0^{\bar{t}}, \vec{y}_0^t\}$. В (20) внутренние скобки $\langle \dots \rangle_{\vec{y}_0^t}$ означают, что вместо первоначального усреднения по апостериорной плотности вероятности $W_\tau(\tau, t) = P(\tau | \vec{y}_0^t)$ случайной величины τ проводится усреднение по реализациям наблюдений на интервале времени от \bar{t} до t . При этом среднее по τ берётся при фиксированном значении \vec{y}_0^t , а величина $t^*(\vec{y}_0^t)$ в силу (9) должна быть не меньше чем t . В соответствии с теоремой о среднем можно подобрать такое значение $t_1 \geq t$, что внутренние усреднения в (20) представляются в виде

$$\left\langle c [t^*(\vec{y}_0^t) - \tau] \right\rangle_{\vec{y}_0^t} = c (t_1 - \tau),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c (t_1 - \tau) W_\tau(\tau, \bar{t}) d\tau = J(t_1, \bar{t}).$$

Учитывая, что $t_1 \geq t > \bar{t}$, из (15) получим $J(t_1, \bar{t}) > J(\bar{t}, \bar{t})$. Поэтому (20) можно продолжить в виде

$$J(t) = \left\langle J(t_1, \bar{t}) \right\rangle_{\vec{y}_0^{\bar{t}}} > \left\langle J(\bar{t}, \bar{t}) \right\rangle_{\vec{y}_0^{\bar{t}}} = J(\bar{t}). \quad (21)$$

Отсюда следует, что невыгодно продолжать наблюдения дольше времени \bar{t} , т.к. это приводит к увеличению средних потерь.

Рассмотрим теперь случай $0 \leq t < \bar{t}$, когда в момент t достаточные статистики для различных функций потерь ещё меньше пороговых значений (17), а функции $J(s, t)$ имеют один минимум в

точке $s = t^* = t^*(\bar{y}_0^t) \geq t$, как показано на рис. 3а. Будем рассуждать от противного. Предположим, что минимум средних потерь достигается не в момент \bar{t} , а раньше — в некоторый момент $t < \bar{t}$. При этом $J(t) < J(\bar{t})$. Имеются две возможности — или $t^*(\bar{y}_0^t) \geq \bar{t}$, или $t \leq t^*(\bar{y}_0^t) < \bar{t}$. В первом случае средние потери из (7), (8) равны

$$\begin{aligned} J(t) &= \left\langle J [t^*(\bar{y}_0^t), t] \right\rangle_{\bar{y}_0^t} = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} c [t^*(\bar{y}_0^t) - \tau] W_\tau(\tau, t) d\tau \right\rangle_{\bar{y}_0^t} = \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} c [t^*(\bar{y}_0^t) - \tau] \langle W_\tau(\tau, \bar{t}) \rangle_{\bar{y}_0^t} d\tau \right\rangle_{\bar{y}_0^t} = \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} c [t^*(\bar{y}_0^t) - \tau] W_\tau(\tau, \bar{t}) d\tau \right\rangle_{\bar{y}_0^t} = \left\langle J [t^*(\bar{y}_0^t), \bar{t}] \right\rangle_{\bar{y}_0^t}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь использовано очевидное при $\bar{t} > t$ соотношение:

$$W_\tau(\tau, t) = \langle W_\tau(\tau, \bar{t}) \rangle_{\bar{y}_0^t}.$$

При этом обозначение \bar{y}_0^t теперь указывает на совокупность реализаций наблюдений \bar{y}_0^t и \bar{y}_t^t , т.е. $\bar{y}_0^t = \{\bar{y}_0^t, \bar{y}_t^t\}$. Поскольку $t^*(\bar{y}_0^t) \geq \bar{t}$, из (15) следует, что $J [t^*(\bar{y}_0^t), \bar{t}] \geq J(\bar{t}, \bar{t})$. Поэтому (22) можно продолжить в виде

$$J(t) = \left\langle J [t^*(\bar{y}_0^t), \bar{t}] \right\rangle_{\bar{y}_0^t} \geq \langle J(\bar{t}, \bar{t}) \rangle_{\bar{y}_0^t} = J(\bar{t}), \quad (23)$$

что противоречит сделанному предположению о минимальности средних потерь в момент t .

Рассмотрим теперь второй возможный случай — пусть $t \leq t^* = t^*(\bar{y}_0^t) < \bar{t}$. Тогда для апостериорных потерь $J [t^*(\bar{y}_0^t), t]$ можно записать выражение

$$\begin{aligned} J(t^*, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} c(t^* - \tau) W_\tau(\tau, t) d\tau = \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} c(t^* - \tau) W_\tau(\tau, t^*) d\tau \right\rangle_{\bar{y}_t^{t^*}} = \\ &= \langle J(t^*, t^*) \rangle_{\bar{y}_t^{t^*}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку $t^* < \bar{t}$, имеется такое значение $s = s(t^*) > t^*$, что $J(t^*, t^*) > J(s, t^*)$. Поэтому (24) продолжается в виде

$$J(t^*, t) = \langle J(t^*, t^*) \rangle_{\bar{y}_t^{t^*}} > \langle J[s(t^*), t^*] \rangle_{\bar{y}_t^{t^*}}.$$

Усредняя теперь последнее выражение по \vec{y}_0^t и учитывая, что $\vec{y}_0^{t*} = \{\vec{y}_0^t, \vec{y}_t^{t*}\}$, получим

$$J(t) = \left\langle J \left[t^*(\vec{y}_0^t), t \right] \right\rangle_{\vec{y}_0^t} > \langle J[s(t^*), t^*] \rangle_{\vec{y}_0^{t*}} = J(t^*). \quad (25)$$

Это снова противоречит предположению о минимальности средних потерь в момент t . Таким образом, действительно средние потери минимальны в момент времени \bar{t} , определяемый соотношениями (17). Более того, по аналогии с (22)–(25) можно показать, что функция средних потерь $J(t)$ является невозрастающей функцией времени на интервале $0 \leq t \leq \bar{t}$. Это означает, что для уменьшения средних потерь всегда выгодно продолжать наблюдения, если достаточными статистиками не достигнуты пороговые уровни (17).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим некоторые важные особенности предлагаемого подхода решения задач скорейшего обнаружения скачкообразных изменений параметров случайных сигналов.

Предложенный метод охватывает широкий класс процессов, описываемых уравнениями (1), (2), а также позволяет рассматривать разные виды функций потерь $c(t - \tau)$ и априорной плотности вероятности $P_\tau(\tau)$. Алгоритмы скорейшего обнаружения скачков сравнительно просты, работают в текущем времени. Пороговые значения в (17) не зависят от вида уравнений (1), (2), определяются только функциями $c(t - \tau)$, $P_\tau(\tau)$, поэтому могут быть вычислены до проведения наблюдений. Следует отметить также, что эти же самые алгоритмы могут быть использованы и для решения задач оптимального оценивания процесса $\vec{x}(t)$ и момента появления скачка τ .

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (грант № 97-02-16525).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. — М.: Наука, 1976.
2. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. — М.: Сов. радио, 1978.
3. Клигене Н., Телькснис Л. //А и Т, 1983. № 10. С. 5.
4. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1989.

5. Бассвиль М., Вилски А., Банвенист А. и др. Обнаружение изменений свойств сигналов и динамических систем. — М.: Мир, 1989.
6. Обнаружение изменений свойств случайных процессов. — В сб.: Статистические проблемы управления. — Вильнюс, 1984. Вып. 65. — 243 с.
7. Методы распознавания случайных процессов. — В сб.: Статистические проблемы управления. — Вильнюс, 1990. Вып. 89. — 235 с.
8. Ширяев А. Н. //ДАН СССР, 1961. Т. 138. № 4. С. 799.
9. Ширяев А. Н. //Теория вероятности и её применения, 1963. Т. 8. Вып. 1. С. 26.
10. Стратонович Р. Л. //Вестник МГУ. Сер. Математика, механика, 1962. № 2. С. 63.
11. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. — М.: Гос. ун-т, 1966.
12. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974.
13. Казаков В. А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. — М.: Сов. радио, 1973.
14. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов. — М.: Сов. радио, 1975.
15. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991.
16. Роббинс Г., Сигмунд Д., ЧАО И. Теория оптимальных правил остановки. — М.: Наука, 1977.
17. Сосулин Ю. Г., Фишман М. М. Теория последовательных решений и её применения. — М.: Радио и связь, 1985.
18. Мальцев А. А., Силаев А. М. //Изв. вузов. Радиофизика, 1983. Т. 26. № 1. С. 49.
19. Мальцев А. А., Силаев А. М. //Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 32. № 1. С. 62.
20. Мальцев А. А., Силаев А. М. //Радиотехника и электроника, 1989. Т. 34. № 5. С. 1023.

Нижегородский государственный
университет им.
Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
25 июня 1997 г.

**THE QUICKEST DETECTION OF A SUDDEN CHANGE IN
PARAMETERS OF RANDOM PROCESSES**

A. M. Silaev

The optimal stopping rules for various functions of losses in a problem of the quickest detection of a sudden change in parameters of signals in continuous time are formulated. Expressions for a posteriori losses functions are found. It is shown, that for the decision of the quickest detection problem it is possible to use algorithms of optimal change point estimation in the least mean square sense.

УДК 537.8.029.6; 621.37.029.6

**УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ЗАКОН ПОВЕДЕНИЯ
ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ В БЛИЗИ
ПОВЕРХНОСТИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИДЕАЛЬНО
ПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА В ОБЛАСТИ ПОЛУТЕНИ**

Л. В. Волченкова, В. Н. Красильников

Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн на неподвижных телах детально разработаны. Значительно меньше развита теория для движущихся границ раздела. В частности, принципиально интересны эффекты, возникающие при релятивистских скоростях движения границ. Из эвристических принципов локальности и кажущегося положения границы следует, что универсальный закон В. А. Фока для поведения поля в области полутени сохраняется и для движущегося в пустоте выпуклого идеально проводящего тела. Возникающий новый параметр (скорость движения цилиндра) не оказывается на описании кинематических явлений, если вместо мгновенного положения границы рассматривать её кажущееся положение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы будем опираться на хорошо известные результаты В. А. Фока, полученные для главных членов коротковолновой асимптотики электромагнитного поля в области полутени около выпуклого тела. Для простоты мы ограничимся двумерной задачей, плоской падающей волной и идеальной проводимостью.

Вспомним сформулированный Фоком принцип локальности [1], согласно которому на поверхности неподвижного выпуклого идеально проводящего тела, радиусы кривизны которого велики по сравнению с длиной волны, переход от света к тени происходит в узкой полосе ширины

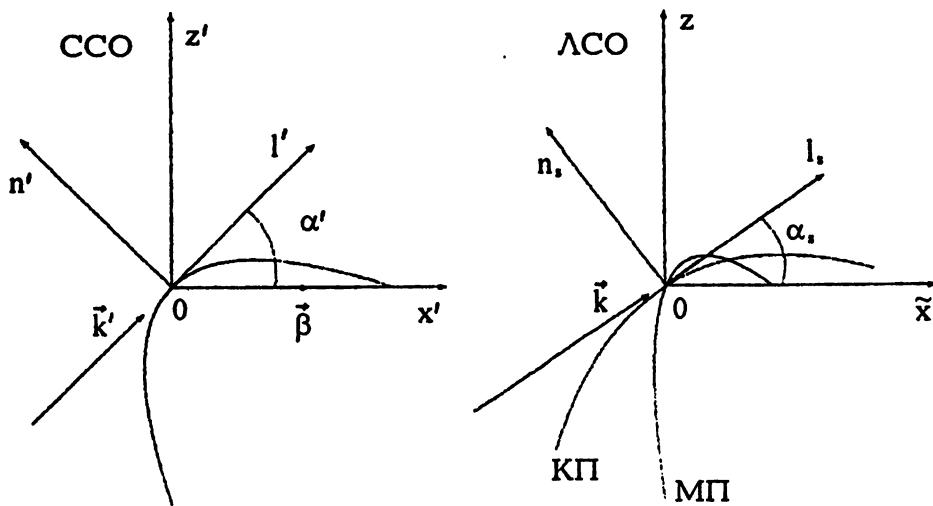
$$d' \approx \frac{R'}{m'}, \quad (1)$$

где $m' = \left(\frac{k'R'}{2}\right)^{1/3}$ — число Фока (большой параметр задачи), k' — волновое число, R' — радиус кривизны нормального сечения поверхности плоскостью падения. Штрихами будем отмечать величины, связанные с собственной системой отсчёта. Поле в области полутени зависит только от локальной кривизны поверхности и определяется универсальным образом [1]. Введём декартову систему координат $\{l', v', n'\}$ с началом отсчёта

в точке O касания поверхности предельным лучом, n' — внешняя нормаль к телу, l' — направление распространения волны, ось v' параллельна оси цилиндра, терминатор в плоскости падения представляется точкой O (см. рисунок). Поля в полосе полутени зависят от координат только посредством двух безразмерных переменных, приведённого расстояния от терминатора и приведённой высоты:

$$\xi' = \frac{l'}{d'} = \frac{m'l'}{R'}, \quad \zeta' = \frac{2m'^2}{R'} \left(n' + \frac{l'^2}{2R'} \right). \quad (2)$$

Уравнение предельного луча ($n' = 0$) в безразмерных координатах имеет вид $\zeta' = \xi'^2$, а поверхность, согласно принятой Фоком аппроксимации, $\zeta' = 0$. Области полутени соответствуют значениям $|\xi'| < 1$, $\zeta' < 1$.



Рассмотрим волны двух поляризаций. Согласно терминологии, принятой в геометрической оптике [2], первой из них отвечает вектор \vec{E}' , перпендикулярный плоскости падения, второй — вектор \vec{H}' . Поля описываются с помощью двух введённых Фоком универсальных функций:

$$\begin{Bmatrix} \Psi(\xi', \zeta') \\ \Phi(\xi', \zeta') \end{Bmatrix} = \frac{ie^{-i\xi'\zeta'+i\frac{\xi'^3}{3}}}{2\sqrt{\pi}} \int_C e^{-i\xi'\tau} \begin{Bmatrix} W_2(\tau - \zeta') - \frac{W'_2(\tau)}{W'_1(\tau)} W_1(\tau - \zeta') \\ W_2(\tau - \zeta') - \frac{W_2(\tau)}{W'_1(\tau)} W_1(\tau - \zeta') \end{Bmatrix} d\tau, \quad (3)$$

где $W_{1,2}(\tau)$ — функции Эйри, $W'_{1,2}(\tau)$ — их производные. С точностью до величин порядка $\frac{1}{m'^2}$ компоненты поля представляются следующим обра-

зом:

$$E'_v = H'_n = H'_{0n} \Phi, \quad H'_l = \frac{i}{m'} H'_{0n} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta'}, \quad (4)$$

$$H'_v = -E'_n = H'_{0v} \Psi, \quad E'_l = -\frac{i}{m'} H'_{0v} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta'},$$

где H'_{0i} — компоненты магнитного поля падающей волны, контур C на комплексной плоскости τ складывается из лучей $(\infty e^{\frac{2i\pi}{3}}, 0]$ и $[0, \infty e^{-\frac{i\pi}{3}}]$.

Токи на поверхности проводника определяются касательными составляющими магнитного поля

$$\begin{aligned} i'_v &= \frac{i}{m} \Psi(\xi', 0) H'_{0n}, \\ i'_l &= -\Phi(\xi', 0) H'_{0v}. \end{aligned} \quad (5)$$

Токи, возбуждаемые в области полутени полями первой поляризации, на порядок (по параметру m') меньше.

Дифракция коротких волн в области полутени для движущихся границ раздела уже рассматривалась в ряде работ. Например, в [3] автор с помощью пространственно-временного лучевого метода строит формальное решение, выявляя его зависимость от скорости движения. В отличие от предшествующих работ, мы доказываем, что универсальный закон Фока сохраняется и для движущихся тел. Выявить его инвариантность удается благодаря принципу кажущегося положения границы раздела [4].

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Поля в области полутени на движущемся с постоянной скоростью $v = \beta c$ теле можно найти с помощью применения преобразования Лоренца, зная решение в *собственной* инерциальной системе отсчета (ССО). Мы будем опираться на приведенное выше асимптотическое решение задачи дифракции в области полутени для неподвижного выпуклого тела.

Пусть ССО связана с идеально проводящим цилиндром переменного радиуса, имеющим в точке терминатора радиус кривизны R' . Благодаря принципу локальности для нас существенна геометрия поверхности только вблизи точки O . В её окрестности справедливы формулы (4), (5). Вспомним, что в асимптотическом решении Фока граница тела аппроксимируется параболическим законом; в данном случае

$$z' \cos \alpha' - x' \sin \alpha' + \frac{1}{2R'} (z' \sin \alpha' + x' \cos \alpha')^2 = 0$$

при падении на цилиндр плоской монохроматической волны с волновым вектором $\vec{k}' = k' \cos \alpha' \vec{e}_x + k' \sin \alpha' \vec{e}_z$ и частотой $\omega' = k'c$; ось y' , параллельна оси цилиндра.

В лабораторной системе отсчёта (ЛСО) введём также наряду с $\{x, y, z\}$ координаты $\{l, v, n\}$, введённые по аналогии с ССО. В ЛСО параболический цилиндр движется со скоростью $\beta \vec{e}_x$. Начала отсчёта времени выберем так, что в момент $t = t' = 0$ начала координат совпадают $x = x' = 0$.

Рассматриваемое тело в ЛСО сжимается вдоль оси x , но его сечение остаётся параболой:

$$z \cos \alpha' - \gamma(x - vt) \sin \alpha' + \frac{1}{2R'}[z \sin \alpha' + \gamma(x - vt) \cos \alpha']^2 = 0, \quad (6)$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Волновой вектор изменяет свою продольную компоненту

$$\vec{k} = k' \gamma (\beta + \cos \alpha') \vec{e}_x + k' \sin \alpha' \vec{e}_z. \quad (7)$$

При этом иными оказываются частота падающей волны $\omega = \omega' \gamma (1 + \beta \cos \alpha')$ и направление распространения α , где $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha' [\gamma(\beta + \cos \alpha')]^{-1}$. Поля пересчитываются по формулам

$$\vec{H} = \gamma \vec{H}' + \gamma [\vec{\beta}, \vec{E}'] - (\gamma - 1) \frac{(\vec{\beta} \vec{H}')}{\beta^2} \vec{\beta}, \quad (8)$$

$$\vec{E} = \gamma \vec{E}' - \gamma [\vec{\beta}, \vec{H}'] - (\gamma - 1) \frac{(\vec{\beta} \vec{E}')}{\beta^2} \vec{\beta},$$

причём пространственно-временные аргументы в ЛСО с аналогичными величинами в ССО связаны так:

$$l = \frac{l'(1 - \beta^2 \cos^2 \alpha') + n' \beta^2 \cos \alpha' \sin \alpha'}{\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha'}}, \quad (9)$$

$$n = \frac{n'}{\gamma \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha'}}.$$

Из (6), (7), (9) легко увидеть, что если мы введём безразмерные переменные на движущейся поверхности по аналогии с (2), то аргументы входящих в выражения для полей функций Ψ и Φ изменятся.

На основании решения задачи в ССО с помощью преобразований Лоренца мы можем построить двухпараметрический класс решений в ЛСО, который характеризуется скоростью движения ССО β и направлением падающих лучей α . На первый взгляд, поведение поля в области полутени на движущемся теле не обладает универсальностью из-за явной зависимости от α и β .

3. КАЖУЩЕЕСЯ ПОЛОЖЕНИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА

Для описания дифрагирующего поля воспользуемся принципом кажущегося положения, вводящим в рассмотрение поверхность, на которой происходит взаимодействие некоторого фиксированного фазового фронта падающей волны с движущейся границей раздела. На свету кинематика лучей и фронтов такова, что использование кажущейся поверхности (КП) сохраняет универсальность отражательных формул Фока [4]. Применим этот подход и для решения в области полутени.

В ЛСО на цилиндр (6) падает плоская волна с волновым вектором (7) и амплитудой магнитного поля, пересчитанной по правилу (8). Рассмотрим поверхность, отвечающую взаимодействию движущейся со скоростью β параболы (6) с некоторой фиксированной фазой волны φ (проходящей в момент t_0 через точку касания $x = vt_0$):

$$\vec{k}(\vec{r} - vt_0 \vec{e}_x) - \omega(t - t_0) = \varphi = 0. \quad (10)$$

Можно показать, что КП, отвечающие последовательно взаимодействующим фазам (в отличие от мгновенных поверхностей (МП), соответствующих фиксированным моментам времени), как результат совместного решения (6) и (10), образуют в нашем случае параболоид, движущийся синхронно вместе с телом, и описываются уравнением

$$F(\tilde{x}, z, \beta, \alpha') = z\gamma(\beta + \cos \alpha') - \tilde{x} \sin \alpha' + \frac{(z\gamma \sin \alpha' + \tilde{x} \cos \alpha')^2}{2a\gamma(1 + \beta \cos \alpha')} = 0, \quad (11)$$

где $\tilde{x} = x - vt_0$.

Точка терминатора O имеет в ЛСО координаты: $x_0 = vt_0$, $z_0 = z'_0$. Нетрудно убедиться, что в точке O для КП выполняется равенство

$$F'_x/F'_z = -\tan \alpha = -k_z/k_x.$$

Поскольку отношение F'_x/F'_z определяет тангенс угла наклона касательной, то в ЛСО предельный луч касается кажущейся поверхности в точке O , что ещё раз подтверждает физическую обоснованность её введения. Заметим, что по отношению к МП точка O не является точкой касания луча. Например, при движении навстречу волне угол падения на МП будет острым, а угол отражения — тупым (так, что в целом луч остается прямым).

Смещение от точки касания вдоль поверхности (в ССО) l' отличается от расстояния l_s , разделяющего те же точки на КП,

$$l_s = \sqrt{\tilde{x}^2 + z^2} = l'\gamma(1 + \beta \cos \alpha'). \quad (12)$$

Определим также для КП радиус кривизны в точке касания

$$R_s = \frac{(F'_x{}^2 + F'_z{}^2)^{3/2}}{F''_{xx}F'_z{}^2 - 2F'_x F''_{xz}F'_z + F'_x{}^2 F''_{zz}} = R'\gamma^2(1 + \beta \cos \alpha')^2 \quad (13)$$

и число Фока

$$m_s = \left(\frac{k R_s}{2} \right)^{1/3} = m' \gamma (1 + \beta \cos \alpha'). \quad (14)$$

4. УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ЗАКОНА В. А. ФОКА

Теперь мы можем определить безразмерное расстояние вдоль КП как $\xi_s = \frac{m_s l_s}{R_s}$. Из (12)–(14) видно, что оно совпадает с (7)

$$\xi_s = \xi'.$$

Введём на КП локальную систему координат $\{\tilde{l}, \tilde{v}, \tilde{n}\}$ (см. рисунок). Напомним, что в терминах каждого положения мы рассматриваем координаты точки в момент, когда через неё проходит данный волновой фронт. Нетрудно убедиться, что тогда

$$\tilde{l} = l_s - n \gamma \beta \sin \alpha', \quad \tilde{v} = v', \quad \tilde{n} = n'.$$

Нормаль n' в ЛСО составляет угол α_1 с осью z ($\gamma \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha'$), в то время как нормаль к КП — угол $\alpha_s = \alpha$. Точки, лежащие на одном перпендикуляре к поверхности в ССО, в ЛСО принадлежат различным перпендикулярам к КП. Это означает, что они проходятся волновым фронтом в разные моменты времени. Это приводит к тому, что точки вблизи движущегося тела разнесены относительно КП (т.е. с точки зрения одной фазы волны) на расстояние $l_s \neq \tilde{l}$.

Определим безразмерную высоту над КП как $\zeta_s = \frac{2m_s}{R_s} \left(n_s + \frac{l_s^2}{2R_s} \right)$, где $n_s = \tilde{n}$, и l_s соответствует расстоянию вдоль предельного луча между точками, разнесёнными в ССО на расстояние l' . С учётом (12)–(14) мы получаем

$$\zeta_s = \zeta'.$$

Таким образом, изменения координат и параметров R и m , возникающие за счёт движения, компенсируют друг друга при введении безразмерных переменных, последовательно использующих идею каждого положения границы раздела. В частности, функции Фока Ψ и Φ оказались зависящими от двух переменных, не изменяющихся при пересчёте

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \zeta, \beta, \alpha) &= \Psi(\xi_s, \zeta_s) = \Psi(\xi', \zeta'), \\ \Phi(\xi, \zeta, \beta, \alpha) &= \Phi(\xi_s, \zeta_s) = \Phi(\xi', \zeta'). \end{aligned}$$

Тем самым мы показали, что поле в области полутени движущегося идеального проводника может быть описано с помощью обычных функций Фока, отнесённых к кажущемуся положению поверхности. Этот эффект является отражением того хорошо известного обстоятельства, что

в коротковолновой асимптотике поля его локализация на фронте волны важнее локальности на луче, а волновой фронт взаимодействует с движущейся поверхностью именно в точках, определяемых уравнением (11), и дифрагирует на "увиденном" им объекте, как на неподвижном. Сохранению структуры поля с физической точки зрения содействует и тот факт, что электромагнитная волна в области полутени оказывается квазимонохроматическим сигналом. Даже при релятивистских скоростях движения в окрестности термиатора допплеровский сдвиг частоты в отражённом поле исчезает. Функции Фока Φ и Ψ , обладающие, в принципе, частотной зависимостью, имеют определённые значения, отвечающие частоте ω .

Импеданс на поверхности неподвижного проводника можно понимать либо как отношение тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей, либо как связь между поверхностным током и действующим полем [5]. Когда мы имеем дело с движущейся поверхностью, такие определения не эквивалентны; физически обоснована именно вторая трактовка понятия импеданса. Введённый таким способом импеданс пропорционален импедансу в ССО; в нашем случае и до, и после пересчёта он остаётся равным нулю.

Поверхностная плотность тока на движущемся идеальном проводнике [6] равна тангенциальной составляющей величины $\tilde{H} = \vec{H} - \beta_n[\vec{n}, E]$, т.е. $i = \frac{4\pi}{c}[\vec{n}, \tilde{H}]$. Компоненты \tilde{H} выражаются через величины в ССО, согласно (8), следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_v &= H'_v \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \alpha')}, & \tilde{H}_l &= H'_l \frac{1}{\gamma \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha'}}, \\ \tilde{H}_n &= H'_n \sqrt{\frac{1 + \beta \cos \alpha'}{1 - \beta \cos \alpha'}},\end{aligned}\tag{15}$$

Очевидно, что для компонент поверхностного тока справедливы обычные формулы Фока (5), в которых функции Ψ и Φ , а также m_s , согласно приведённому выше рецепту, вычисляются для кажущейся поверхности,

$$i_v = \frac{4\pi}{c} \tilde{H}_l = \frac{i}{m_s} \Psi(\xi, 0) \tilde{H}_{0n}, \quad (\text{I})$$

$$i_l = -\frac{4\pi}{c} \tilde{H}_v = -\Phi(\xi, 0) \tilde{H}_{0v}, \quad (\text{II})$$

где величины \tilde{H}_{0i} соответствуют падающей волне. Меняющиеся при движении объекта его динамические свойства сказываются на амплитудных соотношениях (15), явно зависящих от β и α .

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Согласно принципу локальности, в ССО [1] играет роль только малая окрестность границы тени — диапазон горизонтальных расстояний $|l| < R'/m$ и высот $n < R'/m^2$, что равносильно неравенствам

$$|\xi| < 1, \quad \zeta < 1, \quad (16)$$

которые, как показано выше, универсальны. При этом ограничение в форме (16) остаётся прежним и для ЛСО.

Параметр m определяет порядок поправочных членов, отброшенных в представлении поля в области полутени (4). В силу локального характера преобразований Лоренца оценка погрешности переносится из ССО в ЛСО.

Кроме того, принцип локальности делает возможным обобщение полученных результатов на случай изменяющихся скоростей движения. При этом, разумеется, требуется малость изменения величины β на расстояниях порядка размеров области полутени (1) и за времена пробега этой области волновым процессом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 97-02-18310).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970. — 520 с.
2. Борн М., Вольф Е. Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
3. Лялинов М. А. // Записки научных семинаров ЛОМИ. Математические вопросы теории распространения волн, 1991. Т. 195. 21.
4. Красильников В. Н., Лутченко Л. Н. // Проблемы дифракции и распространения волн, 1973. Вып. 12. С. 150.
5. Угаров В. А. Специальная теория относительности. — М.: Наука, 1977. — 384 с.
6. Красильников В. Н. Параметрические волновые явления в классической электродинамике. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996.

Научно-исследовательский
институт радиофизики при
СПбГУ, С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию
24 июня 1997 г.

**UNIVERSAL LAW OF BEHAVIOUR OF HIGH FREQUENCY FIELD
NEAR THE SURFACE OF A MOVING PERFECTLY CONDUCTING
CYLINDER IN THE HALF SHADOW REGION**

L. V. Volchenkova, V. N. Krasil'nikov

Asymptotic methods of short wave diffraction by motionless bodies are studied in details. The theory for moving boundaries between two media is less developed. In particular, a case of relativistic velocity is very interesting. Due to heuristic locality principles and the principle of seeming position of the boundary we conclude that the universal Fock law of the field behaviour in the half shadow region is the same for moving in free space convex perfectly conducting body. A new parameter (velocity of movement) does not change the description of the process if we consider the seeming position of the boundary instead of its instantaneous position.

УДК 621.372.831

РАСЧЁТ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКО-ПОПЕРЕЧНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ВОЛНОВОДАХ СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ В МНОГОМОДОВОМ РЕЖИМЕ

В. А. Донченко, Г. Ф. Заргано, Г. П. Синявский

Изложена методика исследования плоско-поперечных неоднородностей в волноводах сложных сечений в режиме падения на неоднородность нескольких как распространяющихся, так и нераспространяющихся волн. Собственные векторные функции и критические волновые числа волновод сложных сечений определялись методом частичных областей с учётом особенности на ребре.

Плоско-поперечные неоднородности типа тонких диафрагм, стыков и сдвигов волноводов сложных сечений (рис. 1) находят широкое применение при конструировании различных устройств СВЧ и КВЧ диапазонов волн [1, 2]. При исследовании селективных устройств, содержащих плоско-поперечные неоднородности, особенно актуальной является задача, связанная с режимом падения на неоднородность одновременно нескольких электромагнитных волн, которые могут быть как распространяющимися, так и нераспространяющимися волнами. Расчёт параметров таких сложных селективных устройств связан со значительными математическими трудностями и практически отсутствует в известной литературе. В данной работе изложен метод расчёта параметров плоско-поперечных неоднородностей в многомодовом режиме работы.

Рассматривалась плоско-поперечная неоднородность сложного поперечного сечения, заключённая между двумя полубесконечными отрезками регулярных волноводов сложных сечений с воздушным заполнением. Плоско-поперечная неоднородность находится в сечении $z = 0$. Потери в металле не учитываются. На неоднородность падают одновременно несколько электромагнитных волн, часть из которых может быть нераспространяющимися волнами. Так как, падающие волны вызывают появление вблизи неоднородности всего спектра высших типов волн, то при близко расположенных двух плоско-поперечных неоднородностей возможно падение на вторую неоднородность возникающих вблизи первой неоднородности и не успевающих затухнуть нераспространяющихся типов волн.

Поскольку электромагнитное поле в волноводе является векторной суммой полей всех типов волн, присутствующих в данной точке пространства, задачу о падении на неоднородность нескольких волн можно решать для каждой электромагнитной волны в отдельности, определяя при этом

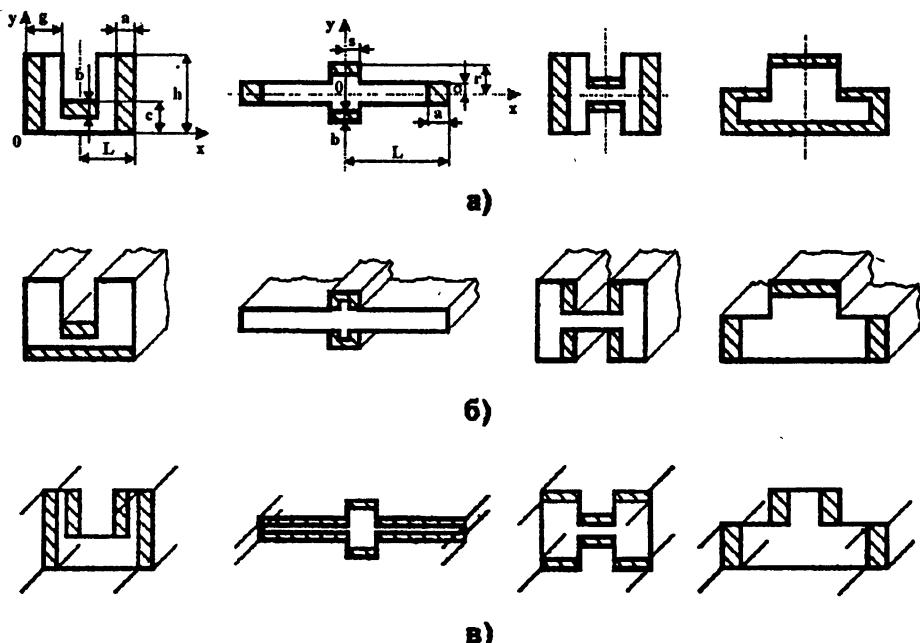


Рис. 1. Плоско-поперечные неоднородности в волноводах сложных сечений:
 а) тонкие диафрагмы, б)стыки волноводов, в) сдвиги волноводов.

эквивалентную комплексную проводимость в месте стыка и коэффициенты матрицы рассеивания [3]. Обобщённая матрица рассеяния, состоящая из коэффициентов отражения и прохождения для каждой отдельной из всех падающих с двух сторон на неоднородность волн, является полной характеристикой плоско-поперечной неоднородности в волноводе в многомодовом режиме работы.

Электрическое поле падающей на неоднородность произвольной электромагнитной волны с порядковым номером “р” имеет вид:

$$\vec{E}_p^{Ia} = \left(\vec{e}_x E_{px}^{Ia}(x, y) + \vec{e}_y E_{py}^{Ia}(x, y) + e_z E_{pz}^{Ia}(x, y) \right) e^{-j\gamma_p^{Ia} z}. \quad (1)$$

Постоянная распространения волны в волноводе γ_p^{Ia} будет действительной величиной для распространяющихся и мнимой для нераспространяющихся типов волн.

Полное электрическое поле в возбуждающем (I) и возбуждаемом (II) волноводах является суперпозицией электрического поля основной волны, электрических полей, распространяющихся при данном значении частоты Н- и Е-волн, и электрических полей, нераспространяющихся типов Н- и

Е-волн, возбуждаемых вблизи неоднородности [4]:

$$\vec{E}^I = \vec{E}_p^{Ia} e^{j\gamma_p^{Ia} z} + r_{pp}^{Ia} \vec{E}_p^{Ia} e^{j\gamma_p^{Ia} z} + \sum_{n=1}^{M^{Ih}} r_{np}^{Ih} \vec{E}_n^{Ih} e^{j\gamma_n^{Ih} z} + \\ + \sum_{k=1}^{M^{Ie}} r_{kp}^{Ie} \vec{E}_k^{Ie} e^{j\gamma_k^{Ie} z} + \sum_{n=M^{Ih}+1}^{\infty} r_{np}^{Ih} \vec{E}_n^{Ih} e^{j\gamma_n^{Ih} z} + \sum_{k=M^{Ie}+1}^{\infty} r_{kp}^{Ie} \vec{E}_k^{Ie} e^{j\gamma_k^{Ie} z}, \quad (2)$$

$$\vec{E}^{II} = t_{pp}^{IIa} \vec{E}_p^{IIa} e^{-j\gamma_p^{IIa} z} + \sum_{n=1}^{M^{IIh}} t_{np}^{IIh} \vec{E}_n^{IIh} e^{-j\gamma_n^{IIh} z} + \sum_{k=1}^{M^{Ile}} t_{kp}^{Ile} \vec{E}_k^{Ile} e^{-j\gamma_k^{Ile} z} + \\ + \sum_{n=M^{IIh}+1}^{\infty} t_{np}^{IIh} \vec{E}_n^{IIh} e^{-j\gamma_n^{IIh} z} + \sum_{k=M^{Ile}+1}^{\infty} t_{kp}^{Ile} \vec{E}_k^{Ile} e^{-j\gamma_k^{Ile} z},$$

где $\vec{E}_q^{ba}(x, y)$ — электрическая собственная векторная функция b -го волновода волны a -типа с порядковым номером q , $q = 1, 2, 3, \dots; b = I, II$ — номер волновода; индекс $a = h, e$ означает, соответственно, принадлежность к классу Н- или Е-волн; $n \neq p$ — для падающих на неоднородность Н-волни; $k \neq p$ — для падающих на неоднородность Е-волн; M^{ba} — количество распространяющихся a -типа волн в b -ом волноводе;

$\gamma_q = -j\hat{\gamma}_q = (k^2 - k_q^2)^{1/2}$ — постоянная распространения волны q -типа;

k — волновое число свободного пространства; k_q — критическое волновое число волны q -типа.

Временная зависимость выбрана в виде $e^{j\omega t}$.

Коэффициенты отражения r_{qp}^{ba} и прохождения t_{qp}^{ba} волн в волноводе находятся из условия равенства электрического поля $\vec{E}^I = \vec{E}^{II}$ ($z = 0$) на апертуре неоднородности с учётом ортогональности собственных векторных функций волноводов:

$$1 + r_{pp}^{Ia} = \int_s \vec{\mathcal{E}}_p(x, y) \rho_p^{Ia} \vec{E}_p^{Ia}(x, y) ds, \\ r_{np}^{Ia} = \int_s \vec{\mathcal{E}}_p(x, y) \rho_n^{Ia} \vec{E}_n^{Ia}(x, y) ds, \\ t_{np}^{IIa} = \int_s \vec{\mathcal{E}}_p(x, y) \rho_n^{IIa} \vec{E}_n^{IIa}(x, y) ds, \quad (3)$$

где $\vec{\mathcal{E}}_p(x, y)$ — неизвестное векторное электрическое поле на апертуре неоднородности s .

Интегрирование в выражениях (3) проводится только по апертуре неоднородности s , т. к. на металле $\tilde{\mathcal{E}}_p(x, y) = 0$.

ρ_q^{ba} — нормировочный множитель, определяемый из формулы:

$$(\rho_q^{ba})^{-1} = \int_s \tilde{E}_q^{ba}(x, y) \tilde{E}_q^{ba}(x, y) ds, \quad (4)$$

где s_b — площадь поперечного сечения соответствующего волновода.

Используя условие непрерывности для касательных составляющих магнитного поля $\vec{H}^I = \vec{H}^{II}$ на отверстии неоднородности s ($z = 0$) и преобразуя полученное интегральное уравнение с учётом выражений (3) и формулы [4]

$$G_p + jB_p = (1 - r_{pp}^{Ia}) / (1 + r_{pp}^{Ia}), \quad (5)$$

получаем в вариационной форме выражение для комплексной проводимости в месте неоднородности, учитывающее появление волн, распространяющихся в обе стороны от неоднородности:

$$\begin{aligned} G_p + jB_p = & \left[\theta_p^{IIa} W^{IIa} + \sum_{n=1}^{M^{Ih}} \gamma_n^{Ih} W_n^{Ih} + \sum_{n=1}^{M^{IIh}} \gamma_n^{IIh} W_n^{IIh} + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{M^{Ie}} k^2 W_k^{Ie} / \gamma_k^{Ie} + \sum_{k=1}^{M^{IIe}} k^2 W_k^{IIe} / \gamma_k^{IIe} + \\ & + j \left(- \sum_{n=M^{Ih}+1}^{\infty} \hat{\gamma}_n^{Ih} W_n^{Ih} - \sum_{n=M^{IIh}+1}^{\infty} \hat{\gamma}_n^{IIh} W_n^{IIh} + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=M^{Ie}+1}^{\infty} k^2 W_k^{Ie} / \hat{\gamma}_k^{Ie} + \sum_{k=M^{IIe}+1}^{\infty} k^2 W_k^{IIe} / \hat{\gamma}_k^{IIe} \right) \right] / \theta_p^{Ia} W_p^{Ia}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$W_q^{ba} = \left(\int_s \tilde{\mathcal{E}}_p \tilde{E}_q^{ba} ds \right)^2 \rho_q^{ba}, \quad \theta_p^{ba} = \begin{cases} k^2 / \gamma_p^{ba} & \text{при } a = e, \\ \gamma_p^{ba} & \text{при } a = h. \end{cases}$$

Комплексная проводимость $G_p + jB_p$ в месте неоднородности нормирована на волновую проводимость падающей в I-ом волноводе волны и представляет функционал, стационарный относительно малых вариаций векторного электрического поля на апертуре неоднородности [5–7]. Функционал (6) не содержит ограничений ни на форму волновода, ни на форму апертуры неоднородности.

Представляя неизвестное электрическое поле $\tilde{\mathcal{E}}_p(x, y)$ в отверстии неоднородности s в виде

$$\tilde{\mathcal{E}}_p(x, y) = \sum_{i=1}^N U_{ip} \vec{\mathcal{E}}_i(x, y), \quad (7)$$

где U_{ip} — неизвестные коэффициенты разложения поля p -ой волны; $\vec{\mathcal{E}}_i(x, y)$ — электрические собственные векторные ортонормированные функции, удовлетворяющие граничным условиям на контуре сочленения, и решая методом Галеркина [8] интегральное уравнение, получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов U_{ip} :

$$\sum_{i=1}^N U_{ip} D_{lip} = a_{lp}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} D_{lip} = & \theta_p^{Ia} \rho_p^{Ia} \Phi_{lip}^{Ia} + \theta_p^{IIa} \rho_p^{IIa} \Phi_{lip}^{IIa} + \sum_{n=1}^{M^{Ih}} \gamma_n^{Ih} \rho_n^{Ih} \Phi_{lin}^{Ih} + \\ & + \sum_{n=1}^{M^{IIh}} \gamma_n^{IIh} \rho_n^{IIh} \Phi_{lin}^{IIh} + \sum_{k=1}^{M^{Ie}} \frac{k^2}{\gamma_k^{Ie}} \rho_k^{Ie} \Phi_{lik}^{Ie} + \sum_{k=1}^{M^{IIe}} \frac{k^2}{\gamma_k^{IIe}} \rho_k^{IIe} \Phi_{lik}^{IIe} + \\ & + j \left(- \sum_{n=M^{Ih}+1}^{\infty} \hat{\gamma}_n^{Ih} \rho_n^{Ih} \Phi_{lin}^{Ih} - \sum_{n=M^{IIh}+1}^{\infty} \hat{\gamma}_n^{IIh} \rho_n^{IIh} \Phi_{lin}^{IIh} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=M^{Ie}+1}^{\infty} \frac{k^2}{\hat{\gamma}_k^{Ie}} \rho_k^{Ie} \Phi_{lin}^{Ie} - \sum_{k=M^{IIe}+1}^{\infty} \frac{k^2}{\hat{\gamma}_k^{IIe}} \rho_k^{IIe} \Phi_{lik}^{IIe} \right), \end{aligned}$$

$$a_{lp} = 2\theta_p^{Ia} \int_s \vec{\mathcal{E}}_l \vec{E}_p^{Ia} ds,$$

$$\Phi_{liq}^{ba} = \int_s \vec{\mathcal{E}}_l \vec{E}_q^{ba} ds \int_s \vec{\mathcal{E}}_i \vec{E}_q^{ba} ds.$$

В результате решения системы (8) находим неизвестные коэффициенты разложения U_{ip} , знание которых позволяет вычислить электрическое поле $\vec{\mathcal{E}}_p(x, y)$ (7) на апертуре неоднородности.

Используя выражение (6) и знание $\vec{\mathcal{E}}_p(x, y)$, рассчитываем комплексную нормированную проводимость в месте плоско-поперечной неоднородности для каждой из падающих на неоднородность волн. Знание величины такой проводимости позволяет проанализировать влияние плоско-поперечной неоднородности на характер прохождения волны в волноводном тракте.

Используя теорию цепей [3], можно представить такую плоско-поперечную неоднородность в виде многополюсника с числом M входов и

выходов, равным числу падающих на неоднородность волн в каждом волноводе. Такой многополюсник описывается нормированной многоволновой матрицей рассеяния, которая может быть представлена в виде четырёхклеточной матрицы в следующем виде:

$$S^H = \begin{bmatrix} S_{MM}^{11} & S_{MM}^{12} \\ S_{MM}^{21} & S_{MM}^{22} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Нижние индексы в элементах матрицы рассеяния (9) обозначают номера волн, верхние индексы — номера волноводов.

Нетрудно установить связь между элементами нормированной матрицы рассеяния и коэффициентами отражения и прохождения падающих на неоднородность волн:

$$S_{np}^{11} = \left(\frac{\sigma_p^I}{\sigma_n^I} \right)^{1/2} r_{np}^{Ia}, \quad S_{np}^{12} = \left(\frac{\sigma_p^{\text{II}}}{\sigma_n^I} \right)^{1/2} t_{np}^{Ia}, \quad (10)$$

$$S_{np}^{21} = \left(\frac{\sigma_p^I}{\sigma_n^{\text{II}}} \right)^{1/2} t_{np}^{\text{II}a}, \quad S_{np}^{22} = \left(\frac{\sigma_p^{\text{II}}}{\sigma_n^{\text{II}}} \right)^{1/2} r_{np}^{\text{II}a},$$

где σ_q^b — волновое сопротивление линии b для q -й волны.

Расчёт коэффициентов отражения r_{np}^{ba} и прохождения t_{np}^{ba} волн можно производить по формулам (3). Однако, эти же коэффициенты с целью повышения точности их расчётов можно вычислить на основе вариационного подхода, представив их в виде функционалов, стационарных относительно малых вариаций вектора касательного электрического поля на апертуре неоднородности.

Коэффициент отражения r_{pp}^{Ia} падающей p -волны в возбуждающем (1) волноводе можно получить из формулы (5):

$$r_{pp}^{Ia} = (1 - G_p^2 - B_p^2 - 2jB_p)/[(1 + G_p)^2 + B_p^2]. \quad (11)$$

Возведём выражения (3) в квадрат и разделим второе и третье на возведённое в квадрат первое, в которое входит коэффициент отражения падающей волны r_{pp}^{Ia} . В результате для любого коэффициента отражения r_{np}^{Ia} или прохождения t_{np}^{Ia} при $n \neq p$ получаем выражения вида:

$$(r_{pp}^{Ia})^2 = (1 + r_{pp}^{Ia})^2 \frac{(\rho_n^{Ia} \int \vec{E}_p \vec{E}_n^{Ia} ds)^2}{(\rho_p^{Ia} \int \vec{E}_p \vec{E}_p^{Ia} ds)^2}, \quad (12)$$

$$(t_{np}^{\text{II}a})^2 = (1 + r_{pp}^{Ia})^2 \frac{(\rho_n^{\text{II}a} \int \vec{E}_p \vec{E}_n^{\text{II}a} ds)^2}{(\rho_p^{Ia} \int \vec{E}_p \vec{E}_p^{Ia} ds)^2}.$$

Аналогичным образом, получив по формуле (11) коэффициент отражения r_{pp}^{IIa} падающей p -волны во втором волноводе (возбуждающий и возбуждаемый волноводы меняются местами), можно определить коэффициенты отражения r_{np}^{IIa} и прохождения t_{np}^{Ia} ($n \neq p$) волн:

$$(r_{np}^{\text{IIa}})^2 = (1 + r_{pp}^{\text{IIa}})^2 \frac{(\rho_n^{\text{Ia}} \int \vec{E}_p \vec{E}_n^{\text{IIa}} ds)^2}{(\rho_p^{\text{IIa}} \int \vec{E}_p \vec{E}_p^{\text{IIa}} ds)^2},$$

$$(t_{np}^{\text{Ia}})^2 = (1 + r_{pp}^{\text{IIa}})^2 \frac{(\rho_n^{\text{Ia}} \int \vec{E}_p \vec{E}_n^{\text{Ia}} ds)^2}{(\rho_p^{\text{IIa}} \int \vec{E}_p \vec{E}_p^{\text{IIa}} ds)^2}. \quad (13)$$

Полученные таким образом коэффициенты матрицы рассеяния S являются совокупностью параметров, полностью характеризующей плоско-поперечную неоднородность в волноводе, поэтому однозначно устанавливают связь между всеми интересующими нас электромагнитными волнами, падающими на неоднородность.

Следует отметить, что для анализа частотно-зависимых параметров, таких как коэффициенты отражения и прохождения волн для отдельной плоско-поперечной неоднородности в волноводе в многомодовом режиме, удобнее исследовать зависимости эквивалентной комплексной проводимости $G + jB$ от частоты для каждой волны. Аппарат же матриц рассеяния предпочтителен при исследовании селективных СВЧ-устройств, состоящих из нескольких последовательно расположенных неоднородностей.

Согласно изложенной методике был разработан алгоритм расчёта на ЭВМ плоско-поперечных неоднородностей в волноводах сложных сечений в многомодовом режиме работы. На основе этого алгоритма была составлена программа на языке C++ для ПЭВМ, которая даёт возможность рассчитывать параметры тонких диафрагм, плоско-поперечных стыков и сдвигов следующих типов волноводов сложных сечений: П-, Н-, Г-, Т-, О-, крестообразных и желобковых волноводов. Форма апертуры неоднородности должна иметь форму одного из вышеперечисленных волноводов.

Собственные векторные функции исследуемых волноводов определялись на основе метода частичных областей (МЧО) с учётом особенности поведения электромагнитного поля на ребре [1, 9]. Этот метод позволяет с высокой точностью вычислять электромагнитные поля и критические волновые числа волноводов сложных сечений, поперечное сечение которых может быть разбито на смежные прямоугольные области. В качестве базовой области с отсутствующей симметрией поля в поперечном сечении всех вышеперечисленных волноводов можно выделить Г-образные области, которые разбиваются на две прямоугольные области, в каждой из которых решение двумерного уравнения Гельмгольца для продольных

компонент электромагнитного поля (H_z для Н-волн, E_z для Е-волн) имеет вид:

$${}_1H_z(x, y) = \sum_{m=0}^{M_1} A_m^h \cos(p_m^h x - \frac{\pi}{2} n_2) \sqrt{(2 - \delta_{0\alpha_m^h})/h} \cos(\alpha_m^h y - \frac{\pi}{2} n_3),$$

$${}_2H_z(x, y) = \sum_{m=0}^{M_1} B_m^h \cos[f_m^h(l - x) - \frac{\pi}{2} n_4] \sqrt{(2 - \delta_{0\beta_m^h})/c} \cos(\beta_m^h y - \frac{\pi}{2} n_3),$$

$${}_1E_z(x, y) = \sum_{m=0}^{M_1} A_m^e \sin(p_m^e x + \frac{\pi}{2} n_2) \sqrt{(2 - \delta_{0\alpha_m^e})/h} \sin(\alpha_m^e y + \frac{\pi}{2} n_3), \quad (14)$$

$${}_2E_z(x, y) = \sum_{m=0}^{M_1} B_m^e \sin(f_m^e(l - x) + \frac{\pi}{2} n_4) \sqrt{(2 - \delta_{0\beta_m^e})/c} \sin(\beta_m^e y + \frac{\pi}{2} n_3),$$

$$\alpha_m = \frac{\pi}{h}(m + |n_1 - n_3|/2), \quad \beta_m = \frac{\pi}{c}(m + n_3/2), \quad p_m^2 = k_q^2 - \alpha_m^2,$$

$$f_m^2 = k_q^2 - \beta_m^2, \quad \delta_{0\alpha_m(\beta_m)} = \begin{cases} 1, & \text{при } \alpha_m(\beta_m) = 0, \\ 0, & \text{при } \alpha_m(\beta_m) \neq 0, \end{cases}$$

где n_i обозначает граничное условие на части контура Г-образной области ($i = 1, 2, 3, 4$) [1]: $n_i = 0$, если на отрезке контура задано граничное условие типа электрической стенки (для “чётных”–“even” волн), $n_i = 1$ — типа магнитной стенки (для “нечётных”–“odd” волн).

Амплитудные коэффициенты $A_m^h, B_m^h, A_m^e, B_m^e$ в выражениях (14) определялись методом, изложенным в работе [9].

Численный анализ внутренней сходимости метода показал, что погрешность расчётов в первом приближении вариационного метода ($N = 1$) равна примерно 20%. При $N = 2, 3$ обеспечивалась точность расчётов с погрешностью менее 0,5% [6]. Кроме того, погрешность расчётов существенно зависит от количества учитываемых в волноводах нераспространяющихся высших типов волн. С увеличением их числа улучшалась сходимость метода и возрастала точность результатов, что, однако, приводило к значительным затратам машинного времени. В результате для инженерных расчётов целесообразно использовать третье приближение ($N = 3$) вариационного метода и по 10-ти нераспространяющихся Н- и Е-волн ($N_1 + N_2 = 20$) в обоих волноводах. Для точных исследовательских расчётов рекомендуется использовать четвёртое приближение

($N = 4$) вариационного метода и по 15-ти нераспространяющихся Н- и Е-волни ($N_1 + N_2 = 30$) в волноводах. Последующие приближения не дают уже существенного улучшения результата.

Так как, точность расчётов параметров плоско-поперечных неоднородностей в значительной мере зависит от точности вычисления электромагнитных полей в исследуемых волноводах, в работе использовались электромагнитные поля и критические волновые числа волноводов сложных сечений, вычисленные на ЭВМ в четвёртом приближении МЧО с учётом особенности на ребре при 50 членах в рядах по собственным функциям частичных областей. В этом случае погрешность расчётов критических волновых чисел не привышала 0,01%, а электромагнитных полей была меньше 1%.

Таблица 1

Сравнение результатов расчётов $|t_{11}^{\Pi h}|$ волны H_{0e}^1 для тонкой диафрагмы в П-волноводе (рис. 1а), полученных с помощью функционала (12) — (*) и по формуле (3)

δ %	kl	N			
		3	3*	5	5*
0	1,4	0,998210	0,998210	0,998136	0,998136
	3,8	0,974684	0,974684	0,963178	0,963178
5	1,4	1,047040	0,998214	1,046933	0,998140
	3,8	1,022492	0,974688	1,010639	0,963210
10	1,4	1,095876	0,998223	1,095738	0,998148
	3,8	1,070381	0,974698	1,058177	0,963296

В табл. 1 приведены результаты расчётов модуля коэффициента прохождения $t_{11}^{\Pi h}$ основной распространяющей волны П-волновода — волны H_{0e}^1 , полученные с помощью стационарного функционала (12) и вычислением по формуле (3). Расчёты проводились для тонкой сложной диафрагмы в стандартном П-волноводе (рис. 1а) с полосой пропускания 2,4:1 ($l = 1$, $g = 0,845l$, $h = 0,9l$, $c = 0,375l$, $a = 0,3l$, $b = 0,15l$) для двух фиксированных значений нормированных волновых чисел $kl = 1,4, 3,8$ в зависимости от номера приближения вариационного метода — N . Параметр δ определяет вариацию (в процентах) значений коэффициентов разложения U_{ip} (7) электрического поля на апертуре неоднородности от рассчитанных из системы (8). Из таблицы видно, что отклонение значений коэффициентов разложения поля на апертуре неоднородности от полученных из решения системы на 5 — 10% практически не приводит

к отклонению значения модуля коэффициента прохождения в случае его вычисления в вариационной форме. В случае его непосредственного вычисления по формуле (3) погрешность расчёта при отклонении поля точно найденного значения на 5% в среднем составляет 4,9%, а при отклонении на 10% – 9,9% (для некоторых случаев неоднородностей погрешность составляла до 20%).

Таблица 2

Сравнение результатов расчётов $|r_{21}^{Ih}|$ (верхний ряд) и $|r_{12}^{Ih}|$ (нижний ряд) для тонкой диафрагмы в П-волноводе (рис. 1а), полученных с помощью функционала (12) — (*) и по формуле (3)

δ %	kl	N			
		3	3*	5	5*
0	1,4	0,148822	0,148823	0,149684	0,149684
		0,148822	0,148823	0,149684	0,149684
5	1,4	0,159751	0,152301	0,160605	0,153120
		0,148935	0,148848	0,149829	0,149722
10	1,4	0,170681	0,155472	0,171528	0,156251
		0,149067	0,148893	0,150003	0,149791

В табл. 2 для этой же структуры приведены результаты расчётов модулей коэффициентов отражения r_{21}^{Ih} (на диафрагму падает волна H_{oe}^1) и r_{12}^{Ih} (на диафрагму падает волна H_{oe}^2). Этот случай интересен тем, что для приведённого значения нормированного волнового числа $kl = 1,4$ волна H_{oe}^1 является распространяющейся, а волна H_{oe}^2 нераспространяющейся волной. Для нераспространяющейся волны точность вычисления r_{12}^{Ih} в обоих случаях высокая. Для распространяющейся волны точность вычисления r_{21}^{Ih} ухудшается, однако и в этом случае стационарный функционал даёт в среднем в 3,5 раза меньшую погрешность. Анализ табличных результатов подтверждает вывод, что при вариациях электрического поля на апертуре неоднородности, элементы матрицы рассеяния вычисляются гораздо точнее, если выражения для их расчёта представляют собой стационарные функционалы.

В качестве примера метода в работе приведены результаты расчёта параметров тонких диафрагм в П- и желобковом волноводах в случаях многомодового режима работы: на диафрагму падают три распространяющиеся волны. Наибольший интерес для практического применения представляют тонкие комбинированные диафрагмы, с помощью которых оказывается возможным получать резонанс эквивалентной шунтирующей

проводимости B в желаемой точке рабочего диапазона частот.

На рис. 2а в виде графиков представлены результаты расчёта нормированной комплексной проводимости G_p (штриховая) и jB_p (сплошная) в зависимости от нормированного волнового числа k_c для тонкой комбинированной диафрагмы $a = c$, $b = 0,1c$ в желобковом волноводе с размерами $l = 5c$, $h = 1,5c$, $z = 0,5c$ (рис. 1а) при трёх распространяющихся волнах: H_{0e}^1 , критическое волновое число которой $k_1c = 0,31881$, $H_{0e}^2 - k_2c = 0,95548$, $H_{0e}^3 - k_3c = 1,589224$. Для первой волны практически $G = 1$ во всём частотном диапазоне. Для второй и третьей волны в запредельном режиме G возрастает с ростом k_c , достигая максимума на критической частоте и убывает в режиме распространения. Мнимая часть проводимости B для первой волны мала и носит индуктивный характер, для второй волны в запредельном режиме имеет ёмкостный характер, меняя его на индуктивный в режиме распространения, для третьей волны характер изменения аналогичен второй волне. Графики на рис. 2б показывают изменения G_p (штриховая) и jB_p (сплошная) в зависимости от k_c для аналогичной тонкой диафрагмы с большими размерами $a = 2c$, $b = 0,3c$ в желобковом волноводе. Характер изменения G_p и jB_p сохраняется аналогично предыдущему по частотному диапазону для всех трёх распространяющихся волн, однако для такой диафрагмы характерно возрастание G и jB для второй волны, и уменьшение для третьей.

На рис. 3 приведены зависимости G_p и jB_p от kl для тонкой диафрагмы с размерами $a = 0,3l$, $b = 0,15l$ (рис. 3а) и $a = 0,4l$, $b = 0,2l$ (рис. 3б) в стандартном П-волноводе с полосой пропускания 2,4:1 (рис. 1а) для трёх распространяющихся волн: H_{0e}^1 , критическое волновое число которой $k_1l = 1,0859$, $H_{0e}^2 - k_2l = 3,5776$, $H_{0e}^3 - k_3l = 4,1559$. Для такого вида неоднородности характерно наличие резонансов для jB ($jB = 0$) для первых двух распространяющихся волн. В обоих случаях характер проводимости jB меняется при прохождении резонанса с индуктивного на ёмкостный. С увеличением размеров диафрагмы возрастают значения параметров неоднородности для всех трёх распространяющихся волн.

Следует заметить, что на всех представленных графиках просматривается чёткая корреляция между значениями критических волновых чисел распространяющихся волн и изменениями графиков G_p и jB_p .

Таким образом, изложенная методика расчёта параметров плоско-перечных неоднородностей в волноводах сложных сечений в многомодовом режиме может быть эффективно использована при расчёте и проектировании антенно-фидерных устройств радиолокационной, радионавигационной аппаратуры и систем средств связи.

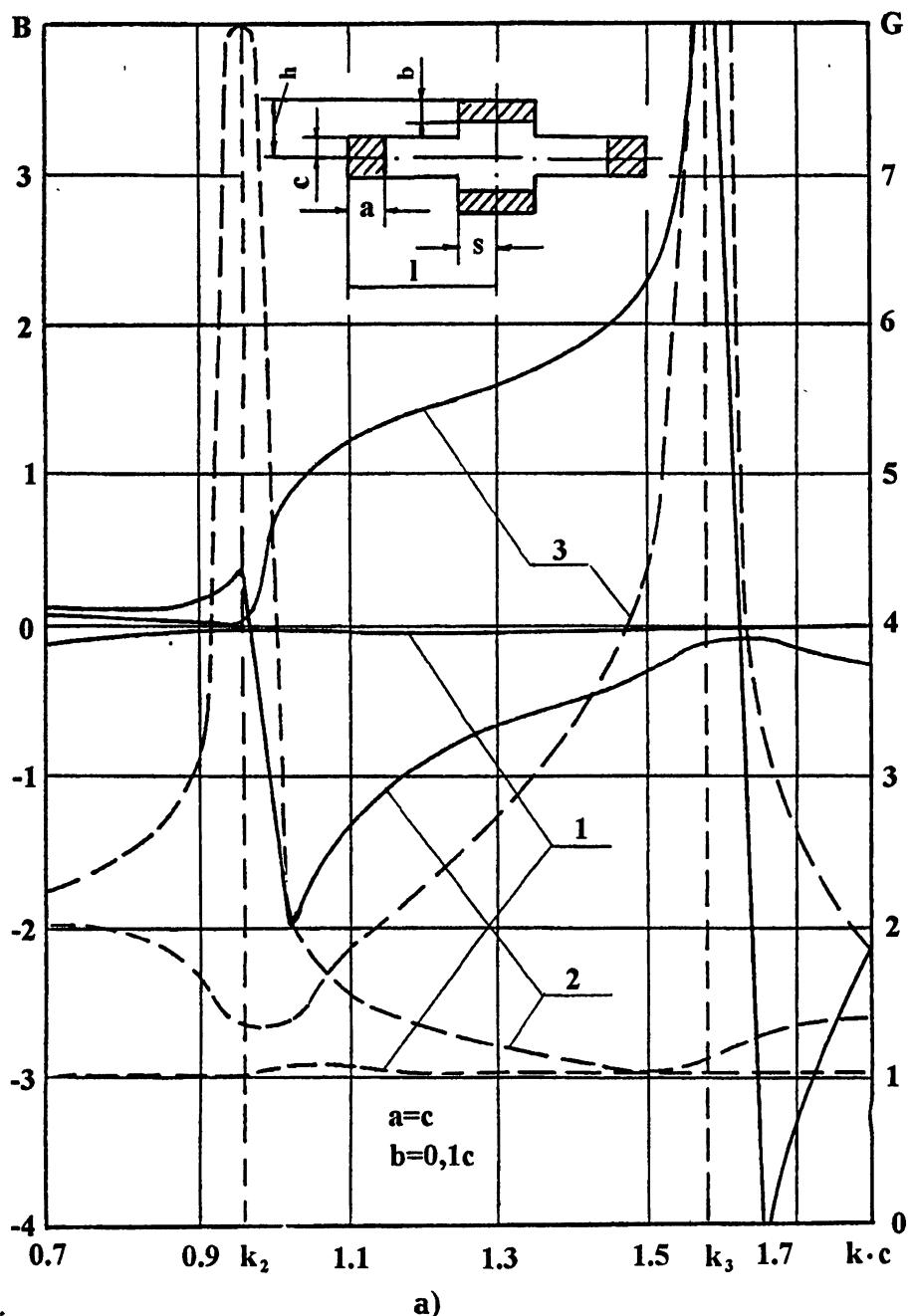


Рис. 2а. Зависимость G (штриховая) и B (сплошная) от нормированного волнового числа для тонкой диафрагмы в одножелобковом волноводе при трёх распространяющихся волнах типа H_{oe} .

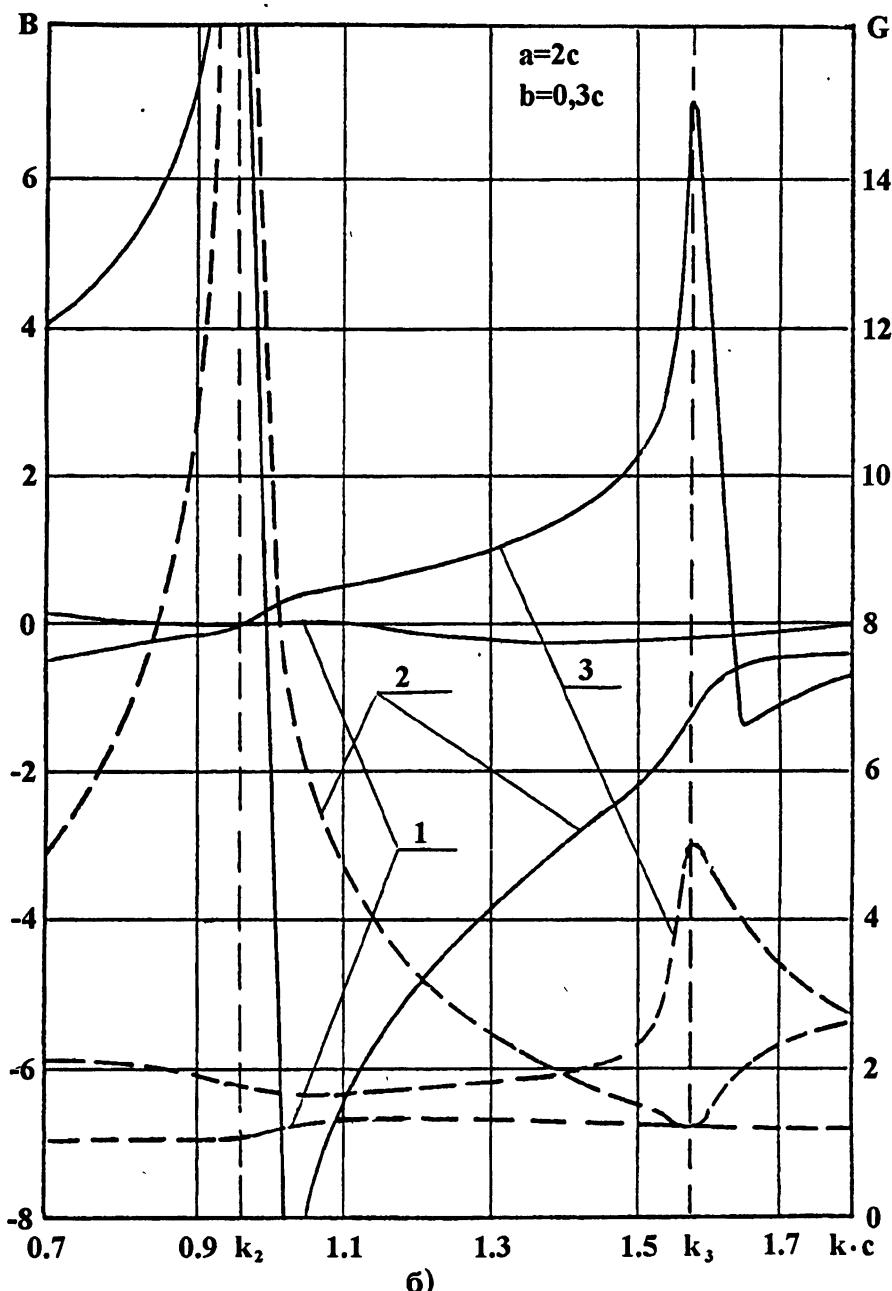


Рис. 26. Зависимость G (штриховая) и B (сплошная) от нормированного волнового числа для тонкой диафрагмы в одножелобковом волноводе при трёх распространяющихся волнах типа H_{oe} .

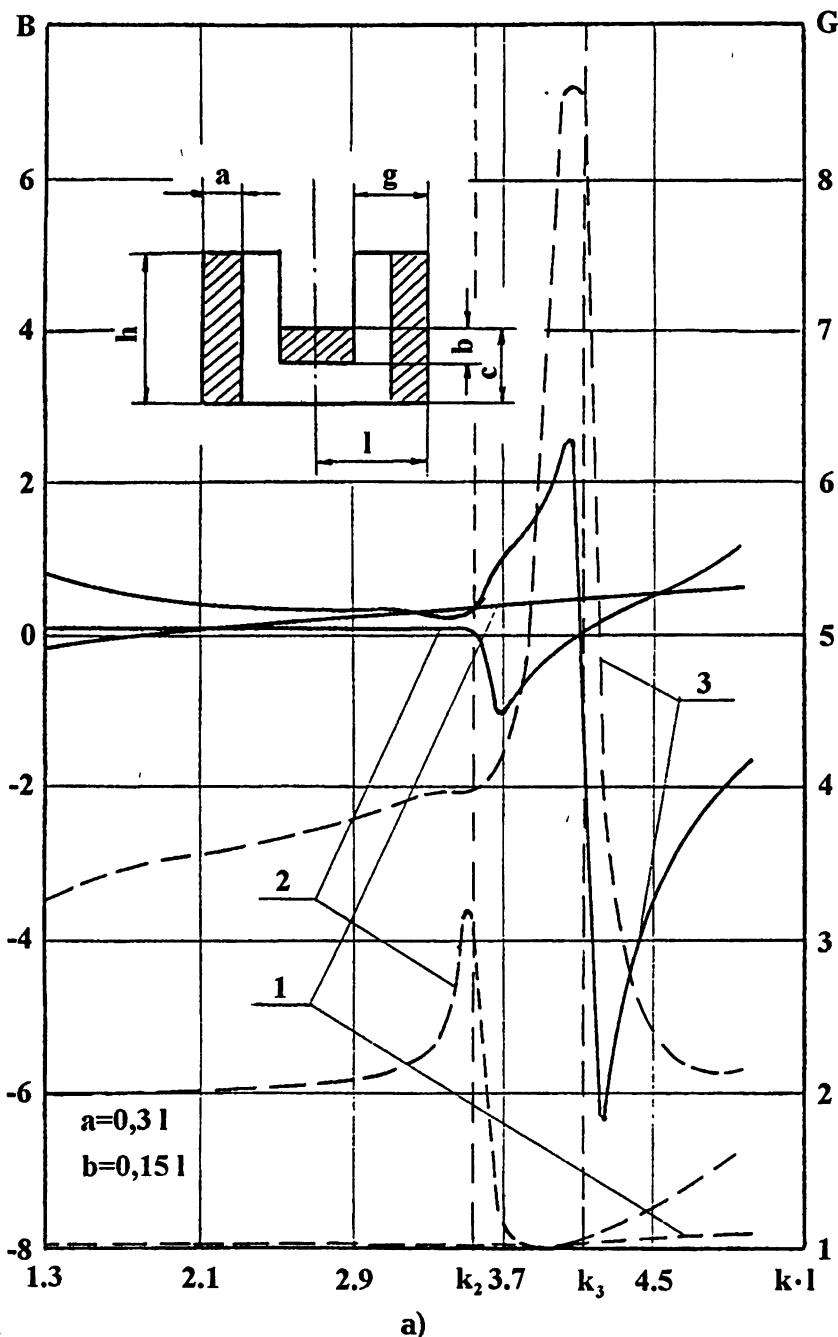


Рис. 3а. Зависимость G (штриховая) и B (сплошная) от нормированного волнового числа для тонкой диафрагмы в Π -волноводе при трёх распространяющихся волнах типа H_{oe} .

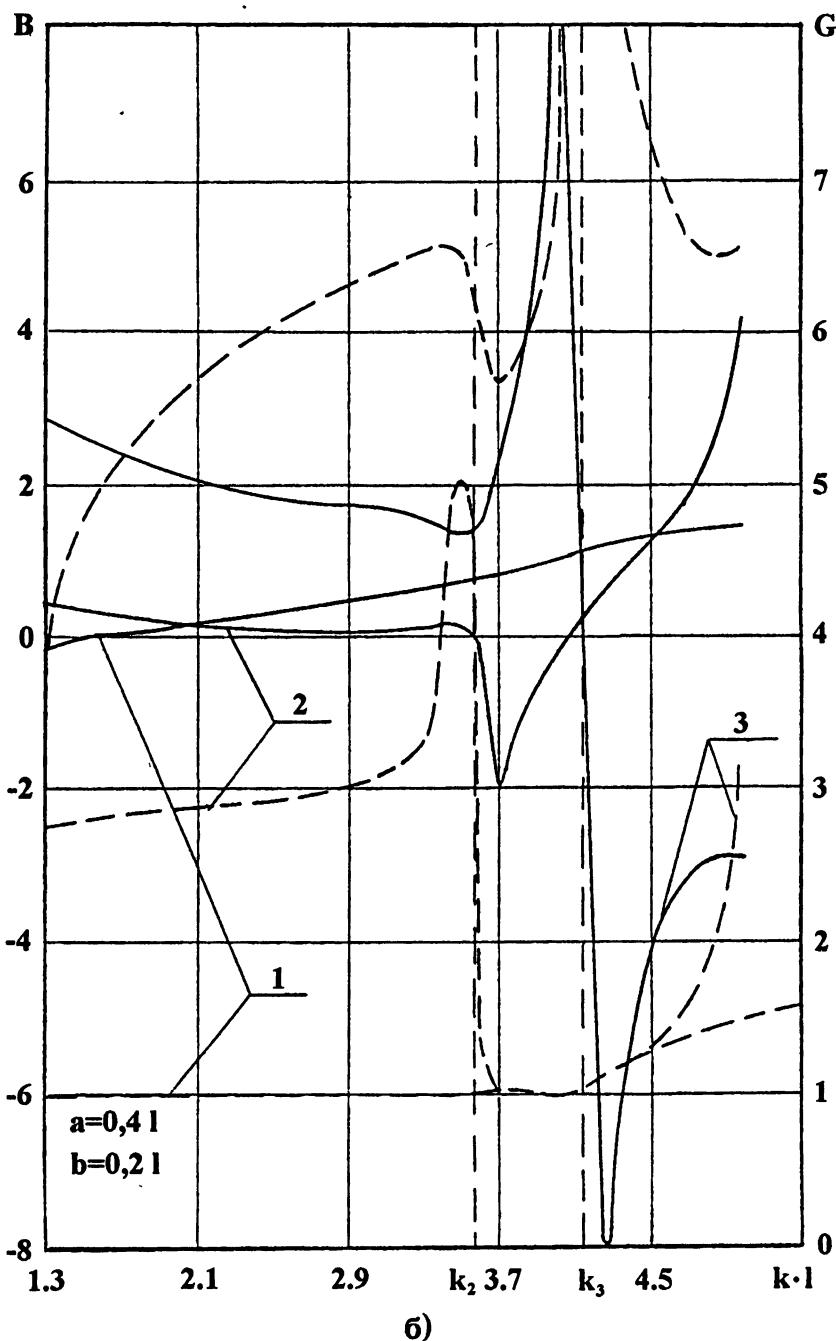


Рис. 36. Зависимость G (штриховая) и B (сплошная) от нормированного волнового числа для тонкой диафрагмы в П-волноводе при трёх распространяющихся волнах типа H_{oc} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Волноводы сложных сечений. /Г. Ф. Заргано, В. П. Ляпин, В. С. Михалевский и др. — М.: Радио и связь, 1986. — 124 с.
2. Беляков С. И., Кацацев В. И., Харитонов А. И. Желобковый волновод. Ч. 2. Элементы фидерного тракта //Обзоры по электронной технике. Сер. 1. Электроника СВЧ. — М.: ЦНИИ “Электроника”, 1989. Вып. 11 (1465). — 58 с.
3. Сазонов Д. М., Гридин А. Н., Мишустин Б. А. Устройства СВЧ. — М.: Высшая школа, 1981. — 295 с.
4. Левин Л. Теория волноводов. — М.: Радио и связь, 1981. — 312 с.
5. Farmer E. D. //Proc. Inst. Electr. Engrs., 1956. V. 103. № 3. P. 145.
6. Донченко В. А., Заргано Г. Ф., Синявский Г. П. Расчет параметров стыков П-волноводов с разными высотами выступов //Автоматизированное проектирование устройств СВЧ. Межвуз. сб. научн. тр. — М.: Изд-во МИРЭА, 1991. С. 83.
7. Швингер Ю. //Зарубежная радиоэлектроника, 1970. № 3. С. 4.
8. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. — М.: Мир, 1988. — 352 с.
9. Заргано Г. Ф., Синявский Г. П., Ткаченко В. П. //Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 32. № 3. С. 339.
10. Заргано Г. Ф., Синявский Г. П., Ткаченко В. П. //Изв. вузов. Радиофизика, 1987. Т. 30. № 11. С. 1350.

Ростовский госуниверситет,
г. Ростов-на-Дону, Россия

Поступила в редакцию
13 июня 1997 г.

**CALCULATION OF PARAMETERS OF PLANE-TRANSVERSE
INHOMOGENEITIES IN WAVEGUIDES OF COMPLEX SECTIONS IN
MULTIMODE SCHEDULE**

V. A. Donchenko, G. F. Zargano, G. P. Sinyavsky

A methodics is given for the investigation of plane-transverse inhomogeneities in waveguides of complex sections in the schedule of incidence of several both propagating and nonpropagating waves on the inhomogeneity. Eigen vector functions and critical wave numbers of waveguides with complex sections are defined by the method of partial regions, taking into account peculiarities at the edge.

УДК 520.27

**БИСТАТИЧЕСКИЙ СОДАР НА БАЗЕ
ПОЛНОПОВОРОТНЫХ 15-МЕТРОВЫХ
РАДИОТЕЛЕСКОПОВ**

В. А. Зиничев, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Ю. А. Сазонов

Для проведения атмосферных исследований на полигоне НИРФИ был создан бистатический содар на базе имеющихся полноизогнутых параболических зеркал РТ-15-1 и РТ-15-2, разнесённых на 400 м в направлении восток—запад. В фокусе первого параболоида установлен рупорный акустический излучатель (подводимая электрическая мощность до 200 Вт). В фокусе второго размещён измерительный микрофон, сигнал с которого подавался на усилитель и терц-октавный фильтр. Спектральная обработка принимаемого сигнала производилась на анализаторе спектра С4-73. Стробирование сигнала по времени (дальности) осуществлялось задержкой запуска анализатора относительно момента излучения импульса передатчиком. Регистрация спектра производилась на двухкоординатном самописце. В первых экспериментах использовался импульсный режим работы содара с несущей частотой в интервале от 700 до 900 Гц, длительностью импульса 0,4 с и периодом повторения 12 с. Эксперименты проводились в сентябре 1996 г. Для выделения сигнала, рассеянного атмосферной турбулентностью, проводилось зондирование как при пересекающихся диаграммах антенн, так и в отсутствие пересечения (когда луч одной из антенн отводился по азимуту на несколько диаграмм). При зондировании атмосферы в течение первых нескольких секунд наблюдался сильный отклик на частоте зондирующего сигнала, который определялся, в основном, рассеянием звука на деревьях и других местных предметах. Этот сигнал испытывал значительные (до 10 дБ) временные флуктуации. На рис. 1 приведены гистограммы распределения по интенсивности наблюдавшихся 30.09.96 г. сигналов как для случая пересекающихся лучей (рис. 1а), так и для случая, когда луч передающей антенны был отведён по азимуту на 10° (рис. 1б). Приводимые данные относятся к дальности зондирования 600 м (задержка строба равнялась 3,5 с). Средняя интенсивность принимаемого сигнала при пересекающихся (в отсутствие ветровой рефракции) лучах составляла 5,3 дБ, а при отводе луча по азимуту падала до 4,2 дБ (при акустических измерениях за 0 дБ принимается интенсивность сигнала, равная 10^{-12} Вт/м²). Таким образом, изменение средней интенсивности сигнала при разведении лучей составило 1,1 дБ при среднеквадратической ошибке 0,4 дБ. Мощность рассеянного атмосферной турбулентностью сигнала и принимаемая антенной (P_r) может

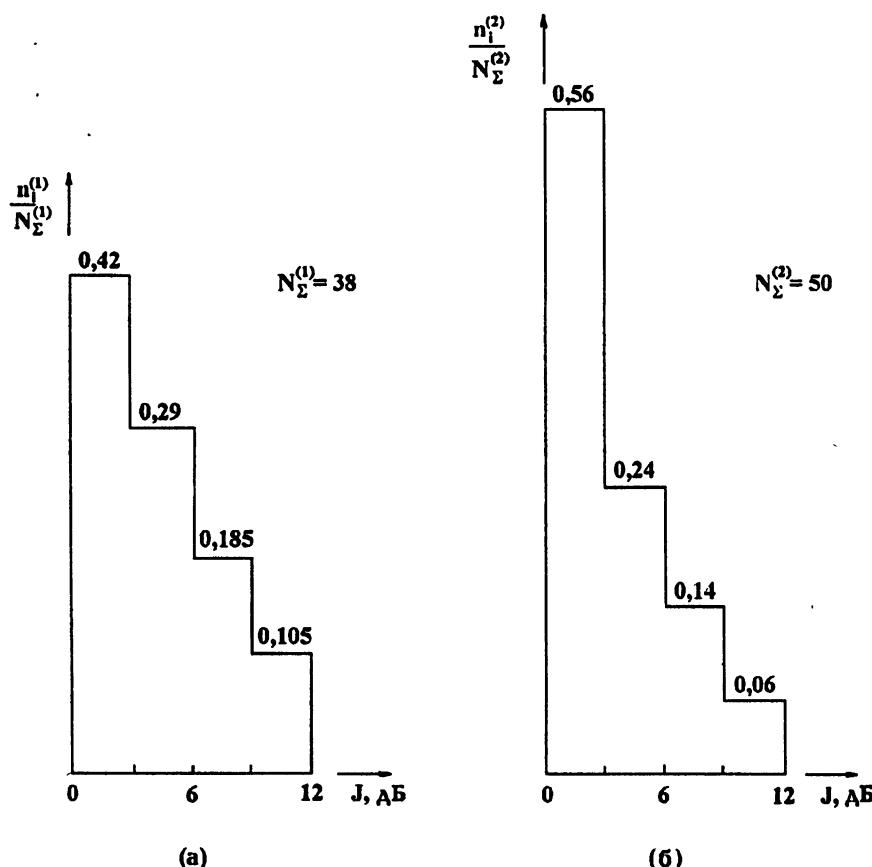


Рис. 1.

быть определена из соотношения [1]:

$$P_r = P_t \sigma L S R^{-2} e^{-2\alpha R}, \quad (1)$$

где P_t — излучаемая звуковая мощность, σ — поперечник рассеяния (на единицу рассеивающего объема), L — характерный линейный размер области рассеяния, S — эффективная площадь приемной антенны, R — дальность зондирования, α — коэффициент поглощения звуковых волн в атмосфере. Тогда для интенсивности сигнала в фокальной области антенны (J_r) имеем

$$J_r = \frac{4\pi P_r}{\lambda^2} = P_r \sigma L G R^{-2} e^{-2\alpha R}, \quad (2)$$

где $G = \frac{4\pi S}{\lambda^2}$ — коэффициент усиления приемной антенны. Из этого соотношения можем оценить поперечник рассеяния σ . Принимая $P_r = 10$ Вт, $L = 50$ м, $G = 3000$, $R = 600$ м, $\alpha = 10^{-3} \text{ м}^{-1}$, $J_r = 1,3 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ (для $J_r = 1,1 \text{ дБ}$), найдем $\sigma = 10^{-12} \text{ м}^{-1}$.

Полученная оценка относится к нижней границе величины σ из-за возможного влияния ветровой рефракции на условия пересечения лучей антенн (пересечение лучей в эксперименте могло быть лишь частичным). В последующем предполагается улучшить частотное разрешение, что позволит отделить рассеянный на атмосферных неоднородностях сигнал (имеющий допплеровское смещение частоты) от сигнала, формируемого отражением от неподвижных наземных объектов. Кроме того, для регистрации сигнала будут использованы современные средства (персональный компьютер, КАМАК), позволяющие осуществить запись сигнала, приходящего со всех возможных дальностей, с большим динамическим диапазоном. Следует отметить, что бистатический содар позволяет, в принципе, проводить измерения в непрерывном режиме излучения звука на фиксированной частоте. Это даёт возможность обеспечить хорошее спектральное разрешение. Пространственное разрешение при этом определяется размером области пересечения диаграмм направленности антенн. Для РТ-15 и рабочей частоты 800 Гц (ширина диаграммы направленности около 3-х градусов) пространственное разрешение составит около 70 м на дальности 1 км. Бистатический содар будет использован в комплексе атмосферных измерений для контроля интенсивности турбулентности и скорости ветра на высотах 0,5 – 1,5 км.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 95-02-04768.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красненко Н. П. Акустическое зондирование атмосферы. — Новосибирск: Наука, 1986.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
20 января 1997 г.

BISTATIC SODAR USING 15-METER OVERALL REVIEW RADIOTELESCOPS

V. A. Zinichev, N. A. Mityakov, V. O. Rapoport, Yu. A. Sazonov

УДК 550.383

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ИОНОСФЕРНОГО АЛЬФВЕНОВСКОГО РЕЗОНАТОРА
ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО
ШУМОВОГО ФОНА В СОЛНЕЧНОМ ЦИКЛЕ
1985–1995 гг.**

П. П. Беляев, С. В. Поляков, Е. Н. Ермакова, С. В. Исаев

На основании многолетних наблюдений резонансной структуры спектра (РСС) магнитного поля в диапазоне частот 0,1–10 Гц в течение 11-летнего солнечного цикла установлено, что резонансные условия для альфвеновских волн внутри ионосферы (ионосферный альфвеновский резонатор — ИАР) однозначно контролируются уровнем солнечной активности. РСС регулярно наблюдается в годы минимума солнечной активности и практически не наблюдается в годы максимума солнечной активности. Этот экспериментальный факт основан на анализе наблюдений, выполненных в 1985–1995 гг. Показано, что учёт ИАР позволяет естественным образом объяснить зависимость РСС от активности Солнца

1. ВВЕДЕНИЕ

Ионосферный альфвеновский резонатор (ИАР) был впервые экспериментально обнаружен в 1985 г. при исследовании спектра фонового приземного электромагнитного шума в диапазоне частот 0,1–20 Гц [1]. Центральная часть ИАР находится на максимум F-слоя, а верхняя граница обусловлена нарушением геометрической оптики для альфвеновских волн на спаде концентрации ионосферной плазмы выше максимума F-слоя (нижняя граница ИАР служит в то же время верхней стенкой волновода Земля—ионосфера). Будучи резонатором для альфвеновских волн, эта область ионосферы является одновременно волноводом для быстрых магнитозвуковых волн. Внутри ионосферы на резонансных частотах ИАР $f_k \sim k f_0$, где f_0 — фундаментальная частота альфвеновского резонатора, $k = 1, 2, 3, \dots$, энергия альфвеновских волн возрастает, причём это возрастание характеризуется фактором добротности Q_k , достигающим величины 5–10. Очевидно, что эти резонансные подъёмы энергии волн внутри ионосферы можно зарегистрировать *in situ* только с помощью ИСЗ. Однако, как оказалось, наличие резонансных условий для альфвеновских волн в ионосфере приводит к формированию резонансной структуры спектра (РСС) возбуждаемых разрядами молний электромагнитных волн в полости Земля—ионосфера (высоты 0–100 км) на частотах

0,1–10 Гц. РСС проявляется в глубокой гармонической модуляции спектра приземного электромагнитного шума по оси частот с характерным частотным масштабом $\Delta F_{k,k+1} = f_{k+1} - f_k$ и глубиной модуляции, пропорциональной добротности резонатора Q_k . В работах [1–3] получены убедительные экспериментальные доказательства существования РСС и показано, что учёт ИАР позволяет естественным образом объяснить её основные свойства. Таким образом, исследования спектра приземного электромагнитного шума позволяют нам по измерениям его структуры и динамики поведения контролировать основные параметры (резонансные частоты f_k и добротности Q_k) ИАР.

Исследования РСС начаты в НИРФИ с момента её первой регистрации в 1985 г. на среднеширотном пункте (120 км восточнее г. Н. Новгорода) с использованием высокочувствительного трёхкомпонентного индукционного магнитометра, ортогональной установки земных токов и, позднее, с ёмкостным датчиком вертикального электрического поля (1995 г.). Наиболее контрастно РСС проявляется в диапазоне частот ниже ~ 5 Гц с масштабом $\Delta F \sim 0,5\text{--}3$ Гц, нередко захватывая область частот первого Шумановского максимума 5–10 Гц, что приводит к кажущемуся расщеплению его огибающей по спектру. В спектре вертикального электрического поля РСС к настоящему времени не обнаружена, что согласуется с моделью её формирования для приземных источников поля под влиянием резонансных свойств ионосферы [4, 5].

Одним из ярких результатов многолетнего ряда наблюдений РСС в 1985–1995 гг. является установление однозначной связи появляемости структуры с эволюцией активности Солнца в 11-летнем цикле. РСС оказалась чувствительным индикатором активности светила: вероятность наблюдения РСС (по числу дней в году) максимальна в годы минимума солнечной активности (1985–1987, 1993–1995) и сводится к нулю в годы её максимума (1989–1991).

2. ТЕХНИКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Экспериментальные исследования, результаты которых представлены в данной работе, проводились на среднеширотном низкочастотном приёмном пункте “Новая Жизнь”, одноимённом с деревней расположения и созданном для высокоточных измерений в УНЧ ($f \sim 0,01\text{--}10$ Гц) и СНЧ-ОНЧ ($f \sim 10^{-2}\text{--}10^2$ кГц) диапазонах. Этот пункт расположен примерно в 100 км к востоку от Нижнего Новгорода (географическая широта — 57° с.ш., долгота — 45° в.д., $L = 2,65$) и имеет достаточно низкий уровень индустриальных помех. Пункт предназначен для измерений как естественных излучений, так и искусственных низкочастотных сигналов, генерируемых, в частности, коротковолновым нагревным стендом “Сура” (расположен в 30 км от приёмного пункта).

Измерительное оборудование пункта:

1. Базовый индукционный двухкомпонентный широкополосный экранированный магнитометр с чувствительностью $0,05 \text{ пТл}/\sqrt{\text{Гц}}$ на частоте 1 Гц (компоненты поля $H_{C-\text{ю}}$, $H_{B-\text{з}}$).
2. Наземная заглубленная экранированная петля-рамка радиусом 250 м; число витков $n = 18$ (вертикальная компонента поля H_z).
3. Ортогональная симметричная установка земных токов с длиной плеч $l = 2 \times 75$ м и глубиной заложения свинцовых электродов 2,5 м ($E_{C-\text{ю}}$, $E_{B-\text{з}}$).
4. Ёмкостный датчик вертикального электрического поля E_z .
5. Набор рамочных антенн СНЧ-ОНЧ диапазонов ($H_{C-\text{ю}}$, $H_{B-\text{з}}$).
6. Портативный двухкомпонентный индукционный магнитометр с чувствительностью $0,1 \text{ пТл}/\sqrt{\text{Гц}}$ на частоте 1 Гц.

В отличие от традиционных геофизических измерений, которые мотивируются, главным образом, интересом к довольно интенсивным спорадическим явлениям, мы развиваем нашу экспериментальную методику для исследования магнитосферы и ионосферы, используя слабые, но регулярно наблюдаемые сигналы от известных источников. Такими источниками являются широкополосный шумовой фон, генерируемый молниевыми разрядами, и искусственные сигналы, генерируемые нагревным стендом "Сура". С этой точки зрения среднеширотное расположение нашего пункта имеет преимущества по сравнению с высокоширотными станциями. Интенсивные спорадические излучения довольно редки здесь, что даёт возможность измерять электромагнитный шумовой фон и изучать (в их чистой форме) низкочастотные электродинамические свойства среды, включая различные волноводы и резонансные полости в околосземном пространстве. В 1985 году этот метод дал нам возможность обнаружить сильное влияние резонансных свойств ионосферы на атмосферный шумовой фон (АШФ) в частотном диапазоне 0,1–10 Гц и, тем самым, экспериментально доказать существование ИАР.

Методика обработки данных, использованная в данной работе, заключалась в арифметическом усреднении независимых спектральных реализаций с необходимым для выделения структуры разрешением по частоте $\sim \Delta f = 0,1$ Гц. Как правило, усреднение проводилось для числа реализаций $n = 64 \div 128$ (анализаторы спектра СКЧ-72, $\tau = (10 \div 20)$ мин), что позволяет понизить дисперсию флюктуаций огибающей спектра до $\sim 1/\sqrt{n} \simeq (10 \div 15)\%$ и чётко регистрировать наблюдаемый эффект.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ

В настоящей работе приводятся данные статистической обработки многолетнего ряда наблюдений РСС в средних широтах, проведённых в

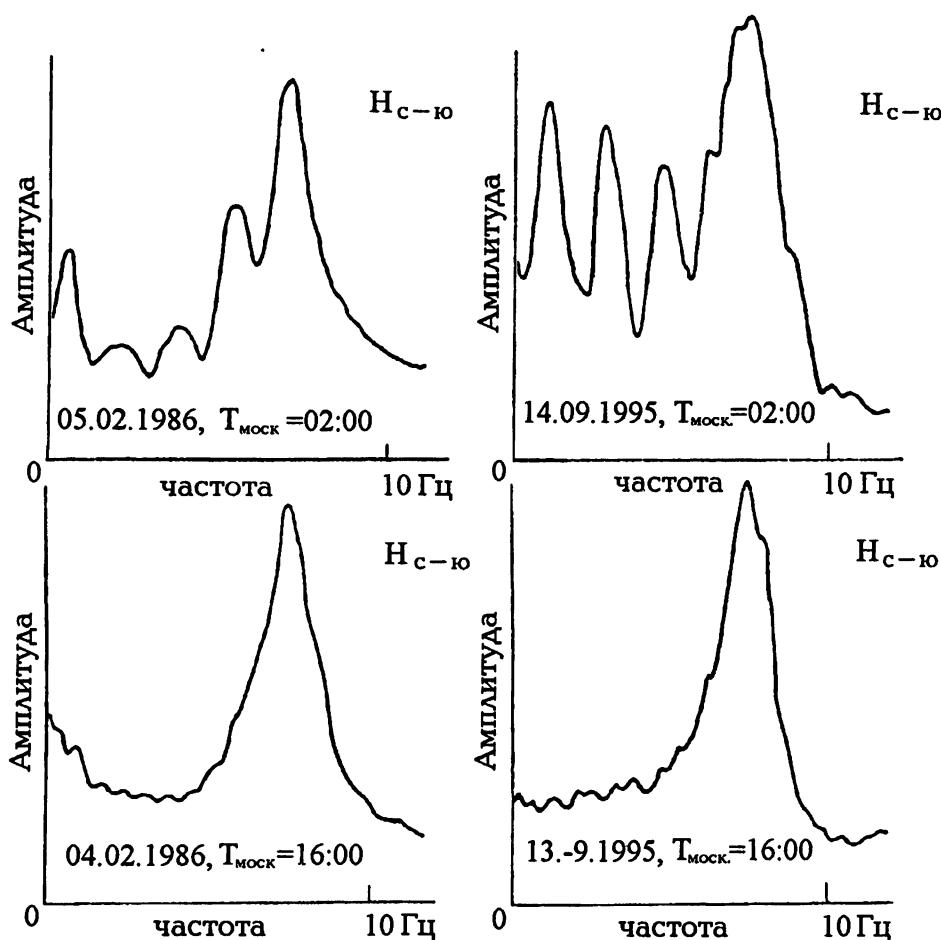


Рис. 1.

22 цикле солнечной активности с 1985 по 1995 гг. для двух ортогональных компонент магнитного поля $H_{С-ю}(H)$ и $H_{В-з}(D)$. Анализ результатов проводился методом глазомерной оценки усреднённых спектральных форм шума, регистрация которых при выводе данных на двухкоординатный графопостроитель проводилась с интервалом времени $10 \div 20$ мин. При этом считалось, что РСС присутствует, если наблюдается явная гармоническая модуляция спектра шума вдоль по оси частот. В качестве иллюстрации, на рис. 1 представлены характерные дневные иочные формы спектра шума в годы, близкие к минимумам солнечной активности, 1986 и 1995. Резонансная структура спектра электромагнитного шума в средних широтах — типично ночное явление. В светлое время суток (нижняя часть рисунка) спектральный подъём на частоте $\sim 7,8$ Гц связан с резонансным увеличением амплитуды шума на частоте глобального Шумановского резонатора. Ночью (верхняя часть рисунка) на частотах ниже Шу-

мановского максимума электромагнитный шум, создаваемый излучением разрядов молний в распределённых по планете грозах, подвергается дополнительному резонансному воздействию ионосферного альфеновского резонатора. Воздействие проявляется в виде периодических резонансных подъёмов амплитуды спектра шума на гармониках собственной частоты ИАР. В годы солнечного максимума (1989–1991 гг.) ночной спектр шума по форме близок к дневному.

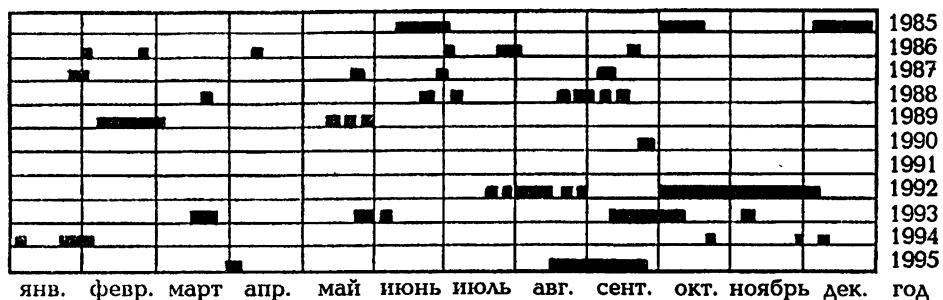


Рис. 2. Календарная таблица распределения суточных интервалов наблюдений резонансной структуры спектра в 22 солнечном цикле.

На рис. 2 приведён календарный график интервалов круглосуточных наблюдений за анализируемый период времени. При выборе интервалов наблюдений мы руководствовались стремлением покрыть основные сезоны года. Исключение составляют 1990–1991 гг., когда наблюдения РСС не проводились или проводились крайне фрагментарно. На рис. 3а представлена гистограмма годового объёма суточных наблюдений в цикле солнечной активности, где N — число полных суток наблюдений за текущий год. Как правило, РСС наблюдается в ночных условиях, начиная с момента захода Солнца в пункте наблюдения и до его восхода. При этом в утренние часы РСС наблюдается в течение 1–2 часов и после восхода. Глубина модуляции амплитуды спектра магнитного шума вдоль по оси частот и резонансный масштаб ΔF РСС медленно нарастают после захода Солнца и быстро убывают в восходные часы, сохраняясь на некотором стационарном уровне в полуночные часы. В дневное же время РСС практически не удается зарегистрировать.

Эти основные суточные особенности поведения РСС, выявленные в наших предыдущих работах [1–3], в тех случаях, когда спектральная структура наблюдалась как явление, сохранялись в течение всего периода наблюдений в солнечном цикле. С другой стороны выяснилось, что вероятность регистрации РСС $\Delta N/N$ за данный интервал наблюдений существенно зависела от фазы активности светила в цикле (ΔN — число суток, в которых РСС регистрировалась, N — полное число суток наблюдений за данный интервал). В 1985–1987 гг. резонансная структура

спектра наблюдалась практически каждую ночь из суток, охваченных наблюдениями. Начиная с 1988 г. относительное число $\Delta N/N$ ночных регистраций структуры стало быстро убывать. На рис. 3б приведён график зависимости $\Delta N/N$ от календарного года наблюдений.

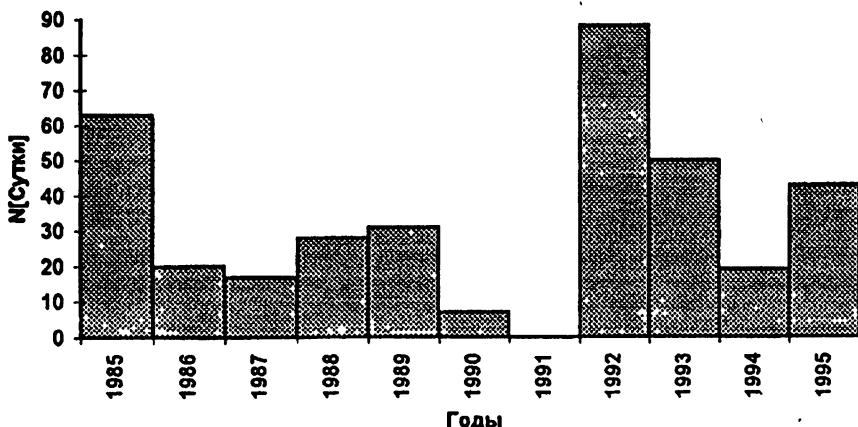


Рис. 3а. Распределение числа суток N , охваченных наблюдениями, по годам. N — полное число суток наблюдений за данный год.

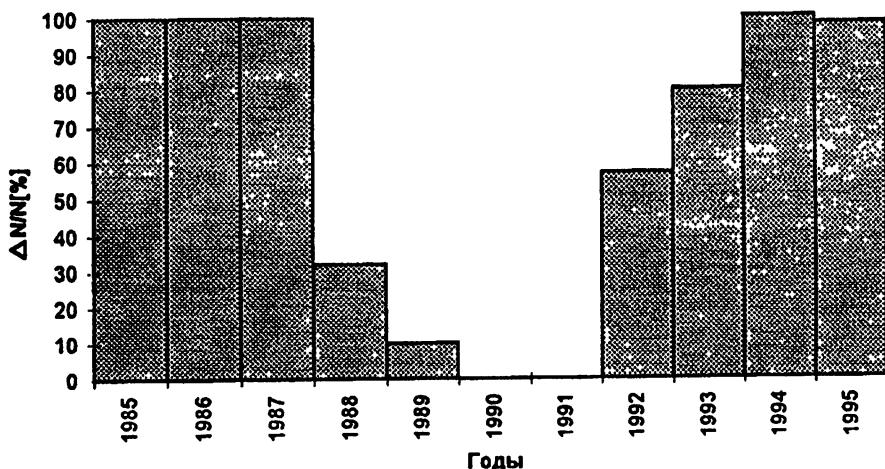


Рис. 3б. Вероятность наблюдения РСС $\Delta N/N$ за данный год. ΔN — число суток за год, в которых РСС была зарегистрирована. N — полное число суток наблюдений за данный год.

Для сопоставления зависимости $\Delta N/N$ с фазой солнечной активности на рис. 4а приведён усреднённый по полугодичным интервалам ход среднемесячного числа солнечных пятен в 22 цикле [6]. Уже беглое сравнение рис. 3б и рис. 4а обнаруживает чёткую антикорреляцию в поведении $\Delta N/N$ и числа солнечных пятен в зависимости от года наблюдений. Обращает на себя внимание быстрый спад величины $\Delta N/N$ в 1988–1989 гг. и

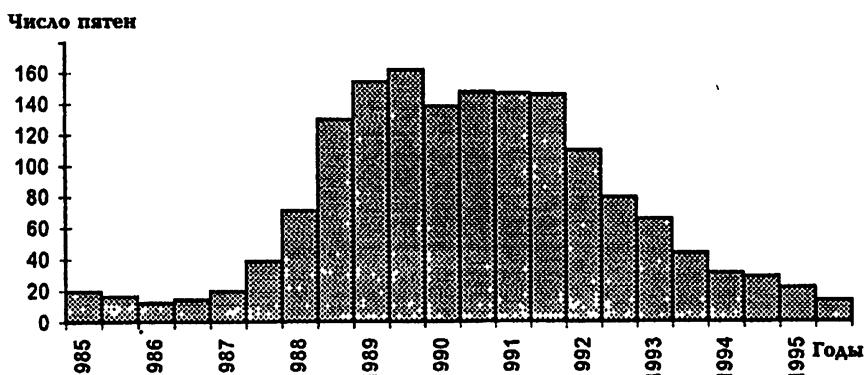


Рис. 4а. Помесечный, усреднённый за полгода ход числа солнечных пятен в цикле активности [6].

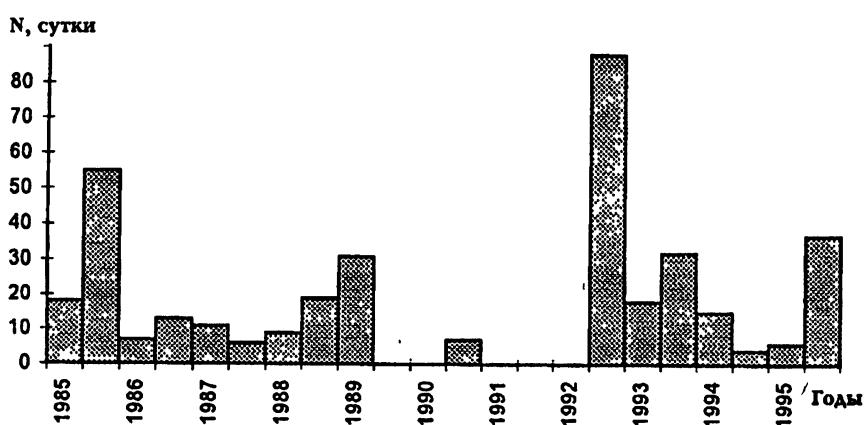


Рис. 4б. Распределение числа суток N , охваченных наблюдениями по полугодичным интервалам.

более плавное нарастание $\Delta N/N$ в 1992–1994 гг. Наоборот, в это же самое время мы наблюдаем быстрое нарастание числа солнечных пятен в 1988–1989 гг. и более плавное убывание их числа в 1992–1994 гг. С целью увеличения точности сравнения поведения вероятности наблюдения РСС с ходом числа солнечных пятен на рис. 4б, в приведены более детальные зависимости N и $\Delta N/N$ с суммированием числа суток наблюдений за полугодичные интервалы. Дальнейшая временная детализация поведения $\Delta N/N$ не представляется возможной вследствие ограниченности ряда наблюдений (см. рис. 2). Данные, представленные на рис. 3, 4, демонстрируют чёткую пороговую зависимость поведения $\Delta N/N$ от числа солнечных пятен: при числе пятен, меньшем чем ~ 30 , $\Delta N/N \sim 100\%$, т.е., другими словами, при низком уровне солнечной активности, характеризуемой числом пятен, меньшим этого значения, РСС регистрируется постоянно. При числе же солнечных пятен, превышающем пороговое значение, на-

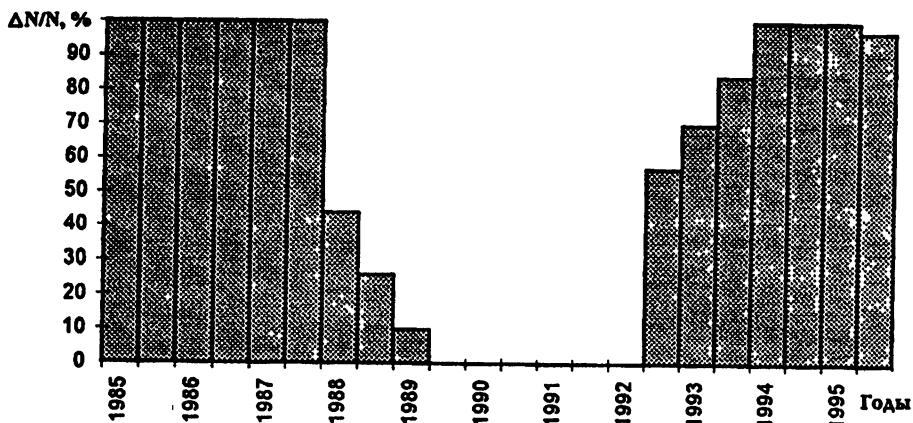


Рис. 4в. Вероятность наблюдений РСС $\Delta N/N$ за полугодичные интервалы времени. ΔN — число суток за полгода, в которые РСС регистрировалась. N — полное число суток, охваченных наблюдениями за данные полгода.

блюдается обратная зависимость вероятности появления РСС $\Delta N/N$ от уровня активности светила, рис. 5. Ниспадающая ветвь на рис. 5 соответствует значениям параметров на спаде цикла в 1985–1989 гг., обратный ход кривой — подъём активности в 1992–1995 гг. С целью демонстрации спектральных форм фонового электромагнитного шума на рис. 6 приведены околополуночные и околополуденные усреднённые спектры в полосе анализа $\delta F \sim 12$ Гц для двух линейных поляризаций магнитного поля $H_{С-Ю}$ и $H_{В-З}$. Рисунки иллюстрируют основные характерные особенности поведения РСС (см. также [1–3]):

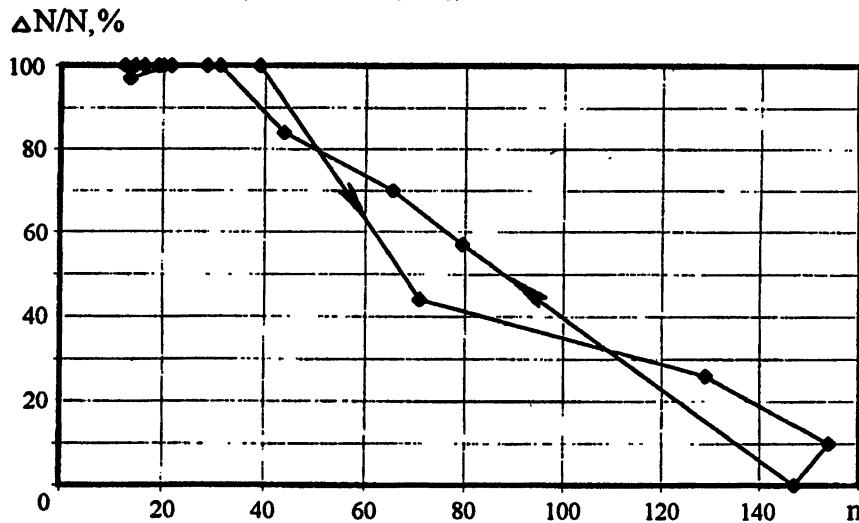


Рис. 5. Вероятность наблюдения РСС как функция числа солнечных пятен по данным рис. 4а,в.

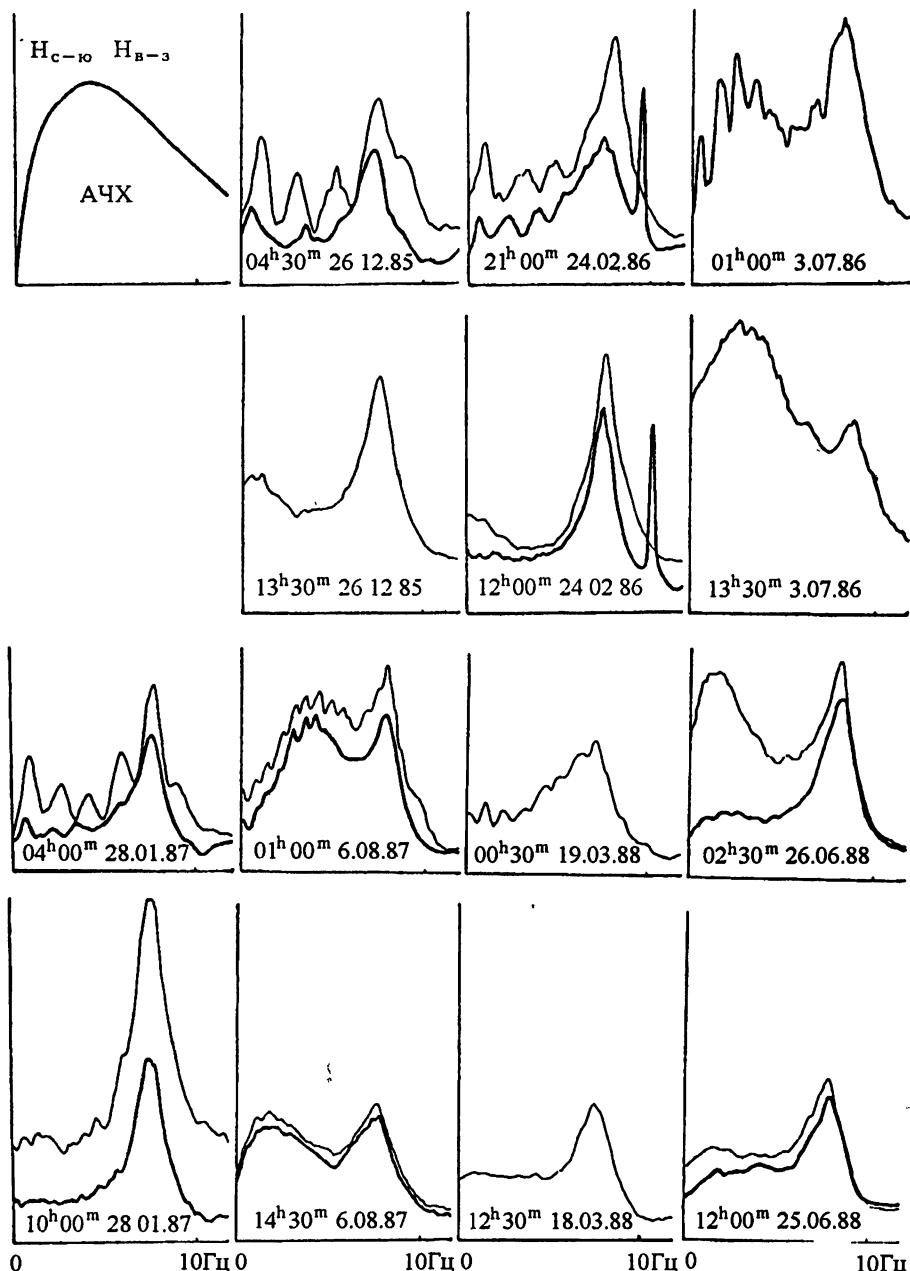


Рис. 6а. Динамика поведения РСС в солнечном цикле. 1985 г. — обнаружение эффекта и начало регулярных наблюдений. Данные приведены выборочно для зимних и летних условий. Ночные и дневные реализации спектра шума разнесены по вертикали. Усреднение по (64–128) спектральным реализациям. Компоненты магнитного поля “север—юг” (тонкая линия) и “восток—запад” (жирная линия). В левом верхнем углу — амплитудно-частотная характеристика приёмных трактов (отклик на внешнее калибровочное магнитное поле постоянной амплитуды).

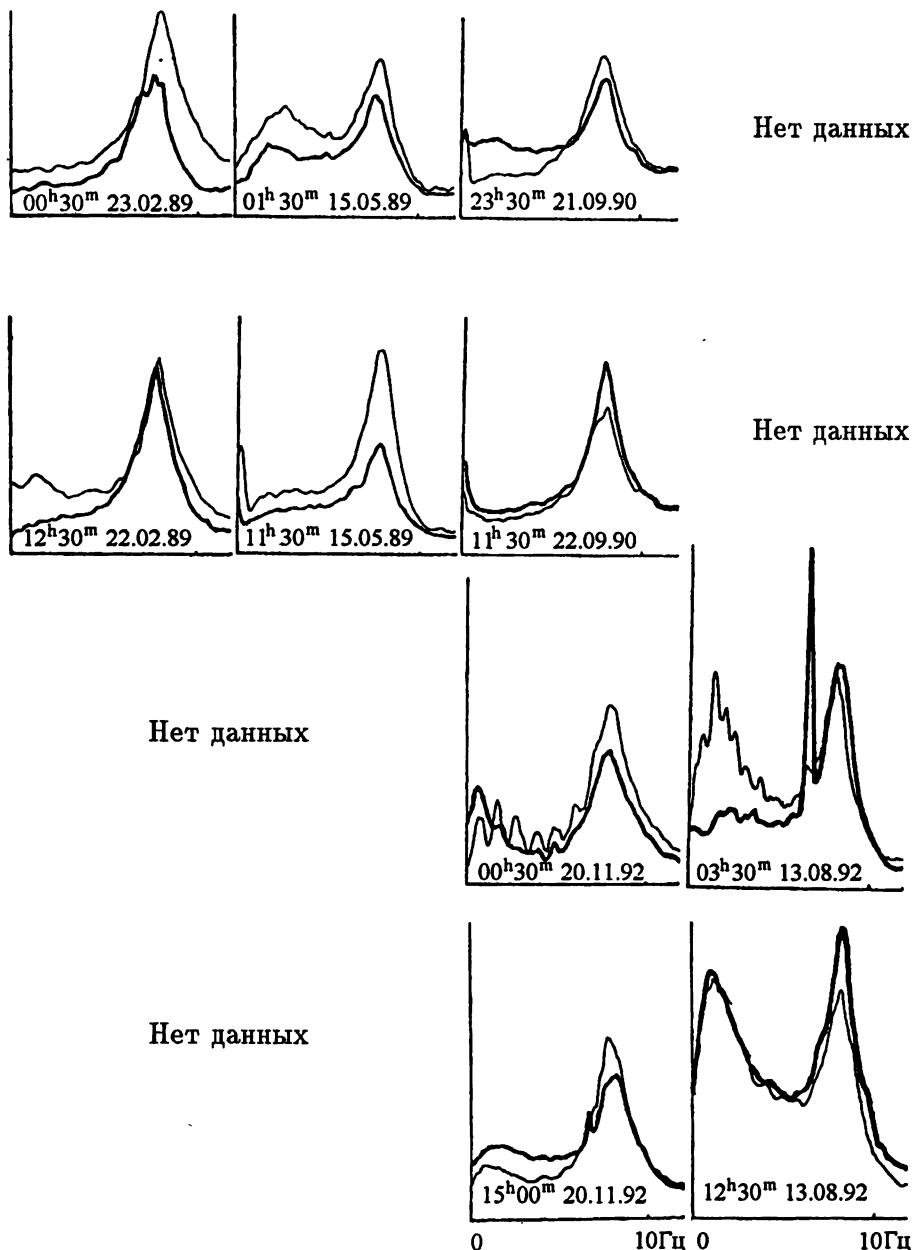


Рис. 66. Контрастность наблюдаемой формы РСС и вероятность её появления быстро падали с возрастанием активности Солнца, начиная с 1988 г. Осень 1992 г. — повторное начало уверененной регистрации эффекта.

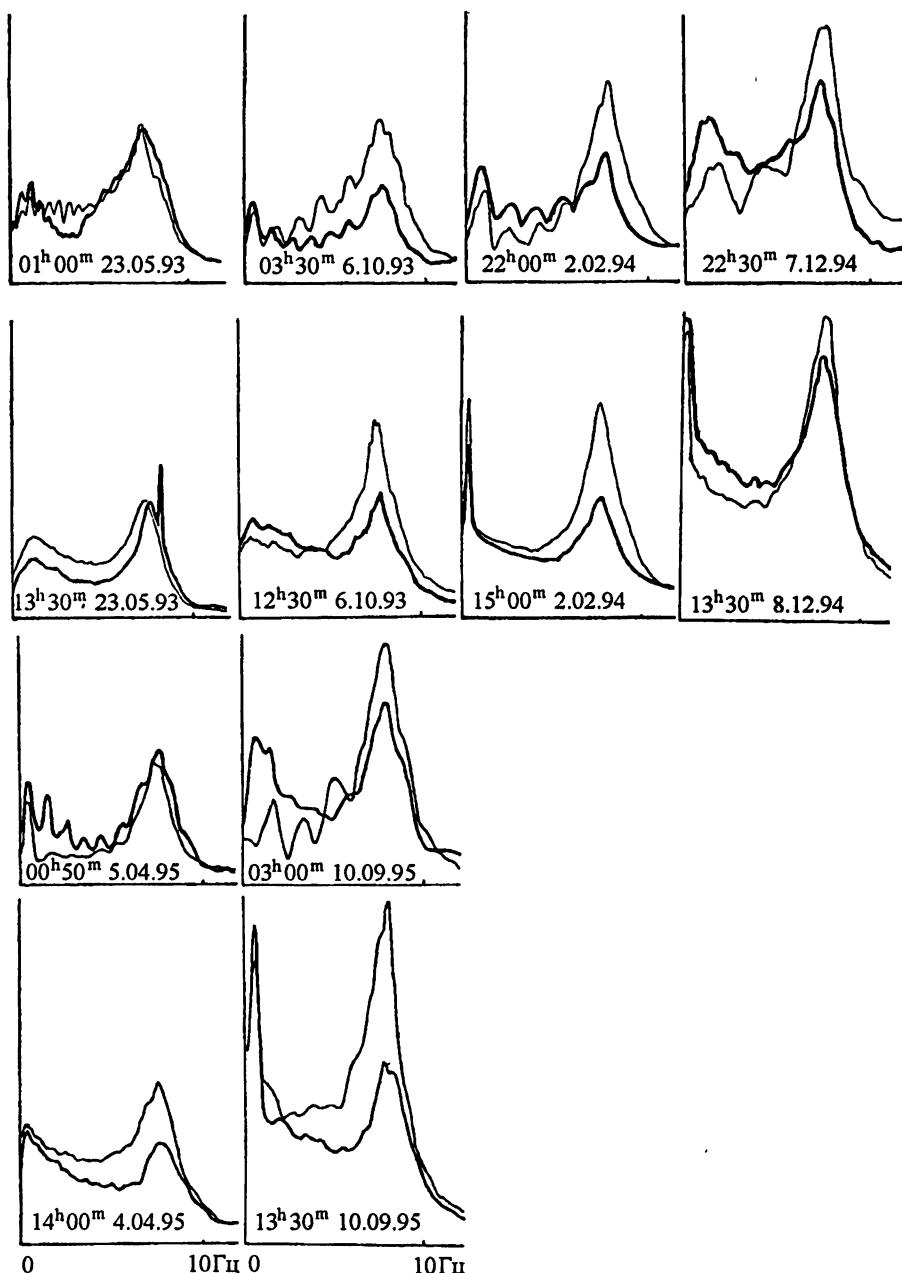


Рис. 6в. Глубина модуляции амплитуды спектра и частотный масштаб РСС быстро нарастают с падением солнечной активности. На рис. 6а-6в резкие подъёмы амплитуды спектра в летнее время связаны с местной грозовой активностью. Изредка наблюдаются дискретные по частоте помехи неизвестного происхождения в окрестностях первого Шумановского резонанса.

- РСС в средних широтах — типично ночное явление;
- вероятность наблюдения РСС $\Delta N/N$ максимальна в годы минимума солнечной активности (1985–1987 гг., 1993–1995 гг.) и минимальна в годы её максимума;
- частотный масштаб структуры ΔF (расстояние между двумя соседними максимумами или минимумами) меняется в пределах $\sim 0,3\text{--}3$ Гц, глубина модуляции амплитуды спектра достигает значения $\sim 0,5$;
- нередко РСС простирается вплоть до частоты первого Шумановского резонанса ($f \sim 7,8$ Гц), приводя к деформации огибающей Шумановского спектрального максимума с характерным для РСС частотным масштабом ΔF .

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Основной экспериментальный результат, представленный выше, — обратная зависимость вероятности наблюдения резонансной структуры спектра от уровня активности Солнца в 11-летнем цикле — в первом приближении является очевидным, если принять во внимание механизм её формирования. Как показано в [4, 5], наиболее вероятной причиной формирования резонансной структуры является влияние резонансных свойств ионосферы (ИАР) на грозовой электромагнитный шум. ИАР существует благодаря наличию в ионосфере двух областей (по высоте) нарушения геометрической оптики для альфвеновских волн в диапазоне частот $\sim 0,1\text{--}10$ Гц: в нижней ионосфере (высоты ~ 100 км) и в области выше максимума F-слоя на спаде альфвеновского показателя преломления (высоты $\sim 1000\text{--}2000$ км). Спектр собственных частот ИАР можно оценить из соотношения:

$$f_k = k \frac{c}{2n_a L}, \quad (1)$$

где c — скорость света, L — характерный масштаб спада альфвеновского показателя преломления n_a выше максимума F-слоя ионосферы. В свою очередь, n_a выражается следующей формулой:

$$n_a = \frac{c\sqrt{4\pi\rho}}{H_0} \sim N_e^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где H_0 — напряжённость земного магнитного поля, ρ — плотность плазмы, N_e — электронная концентрация.

Резонансное влияние ИАР на входной импеданс ионосферы на её нижней границе и наличие выраженных гиротропных свойств у нижней ионосферы приводят в совокупности к формированию обсуждаемой структуры, причём, как отмечалось выше, характерный частотный масштаб

РСС $\Delta F = f_{k+1} - f_k$ [3–5, 7]. Очевидно, что отсутствие отражения альфвеновских волн от верхней границы ионосферы приводит к исчезновению резонансного эффекта и, как следствие, к исчезновению РСС. В дневных условиях добротность резонатора резко падает вследствие увеличения поглощения волн в нижней ионосфере.

В годы минимума солнечной активности максимум F-слоя проявляется наиболее контрастно и, соответственно, градиент концентрации на высотах до 1000 км также наиболее выражен, что создаёт благоприятные условия для отражения альфвеновских волн от верхней стенки ИАР (нарушение условий геометрической оптики в широком интервале частот, вплоть до частоты Шумановского резонанса). Наоборот, плавное спадание концентрации с высотой в годы максимума солнечной активности, вызванное более интенсивной солнечной радиацией и потоками энергичных частиц, нарушает условия отражения альфвеновских волн от верхней части ионосферной толщи и, в итоге, резонансный эффект исчезает.

В качестве сравнения наших данных с состоянием профиля электронной концентрации ионосферной плазмы в реальных условиях на рис. 7 приведены результаты среднеширотных измерений в области высот 100–1000 км с помощью некогерентного радара Millstone Hill и модельные профили концентрации, рассчитанные по модели ионосферы IRI-86, относящиеся к тому же солнечному циклу [8]. Как видно из рис. 7, модельный профиль концентрации ионосферной плазмы, в отличие от реально измеренного, более соответствует нашей статистике распределения наблюдаемости РСС по солнечному циклу. Высотные зависимости, соответствующие периоду максимальной активности Солнца, обладают плавным характером спадания концентрации с высотой в отличие от периода минимальной активности. Ярко выраженный градиент концентрации высотного профиля в годы минимума может обеспечивать благоприятные условия для возникновения резонансных эффектов в ионосфере, приводя, тем самым, к формированию РСС, и наоборот.

За рамками настоящей работы осталось множество более тонких свойств резонансной структуры, касающихся суточного и сезонного ходов, связи с геомагнитной активностью, поляризации и других. Выделим здесь результаты эксперимента по исследованию резонансных свойств высокоширотной ионосферы [9, 10], в котором впервые РСС была зарегистрирована в другом регионе Земного шара.

Таким образом, в настоящее время мы можем констатировать, что в околосземном пространстве на высотах ионосферы существует ещё одна резонансная структура — ионосферный альфвеновский резонатор, который наряду с хорошо изученным Шумановским резонатором является принципиальным фактором в формировании электромагнитного фона, окружающего планету.

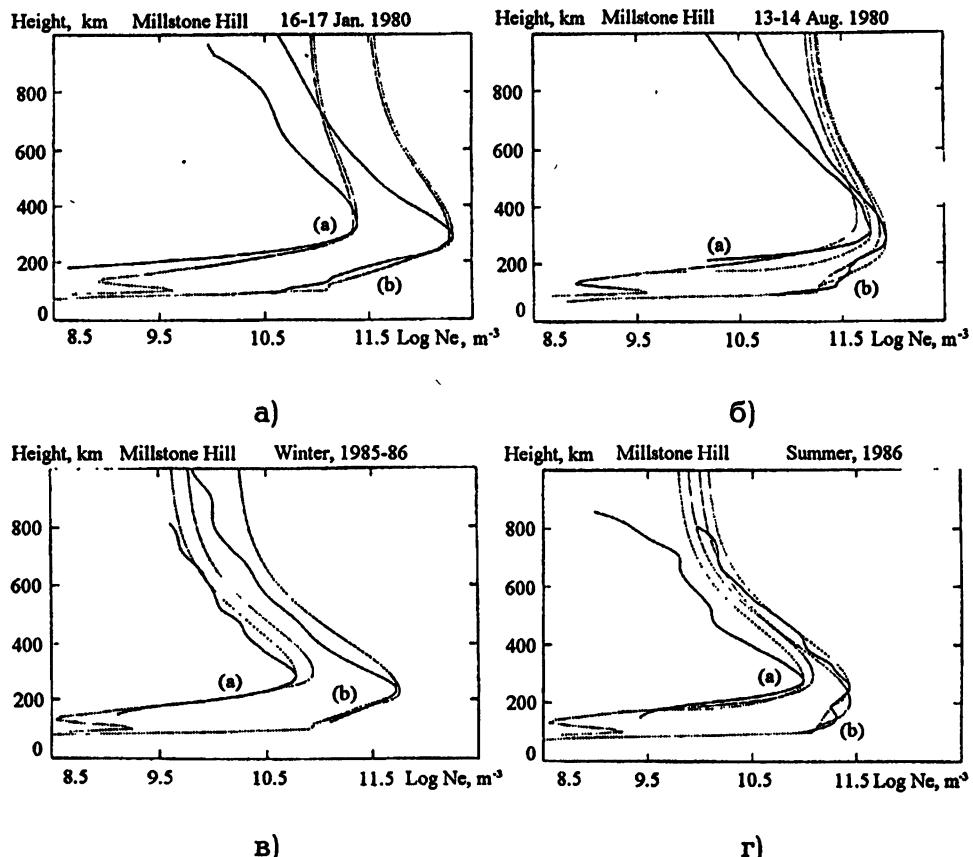


Рис. 7. Измеренный некогерентным радаром Millstone Hill высотный профиль концентрации плаэмы (сплошные линии) и рассчитанный по модели IRI-86 (пунктирные линии) в цикле солнечной активности: а) зима, солнечный максимум; б) лето, солнечный максимум; в) зима, солнечный минимум; г) лето, солнечный минимум. Индексы (а) и (б) в поле рисунков обозначают, соответственно, полуночные и полуденные значения. Данные заимствованы из [8].

Авторы выражают благодарность Симонову В. С. за помощь в организации и проведении наблюдений.

Исследования были проведены при поддержке РФФИ в рамках гранта N 94-05-16861. Авторы также выражают благодарность за финансовую поддержку МНФ (грант N R8W000).

ЛИТЕРАТУРА

- Беляев П.П., Поляков С.В., Рапопорт В.О., Трахтенгерц В.Ю. //ДАН СССР, 1987. Т. 297. С. 840.
- Беляев П.П., Поляков С.В., Рапопорт В.О., Трахтенгерц В.Ю. //Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 32. С. 663.

3. Беляев П. П., Поляков С. В., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. //Препринт N 230. — Горький: НИРФИ, 1987. — 33 с.
4. Беляев П. П., Поляков С. В., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. //Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 32. С. 802.
5. Belyaev P. P., Polyakov S. V., Rapoport V. O., Trakhtengerts V. Yu. //J. Atm. Terr. Phys., 1990. V. 52. P. 781.
6. Solar-Geophysical Data, March 1996. № 619. Part 1.
7. Поляков С. В., Рапопорт В. О. //Геомагнетизм и аэрономия, 1976. Т. 21. С. 816.
8. Buonsanto M. J. //J. Atm. Terr. Phys., 1989. V. 51. P. 441.
9. Беляев П. П., Исаев С. В., Трахтенгерц В. Ю., Безингер Т., Кангарас Е. — В кн.: XVIII Всерос. конф. по распространению радиоволн, С.-Петербург (17–19 сент. 1996 г.). Тез. докладов. — М., 1996. Т. 1. С. 84.
10. Belyaev P. P., Isaev S. V., Trakhtengerts V. Yu., Bosinger T., and Kangas J. — Book of Abstracts, Intern. Conf. on Problems of Geocosmos (17–23 June). — St.-Peterburg, Russia: Sankt-Petersburg State University, 1996. P. 52.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию
3 июля 1996 г.

**EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF THE IONOSPHERIC ALFVEN
RESONATOR FROM ELECTROMAGNETIC NOISE BACKGROUND
OVER THE SOLAR CYCLE OF 1985-1995**

P. P. Belyaev, S. V. Polyakov, E. N. Ermakova, S. V. Isaev

Based on long-term observations of the resonance structure in the magnetic field spectrum (RSS), recorded in the frequency range of 0.1–10 Hz over one complete solar cycle (11 years), it was found, that the resonance conditions for the Alfvén waves in the ionosphere (ionospheric Alfvén resonator) are determined by the level of the solar activity. RSS are regularly observed in years of minimum solar activity, and are practically absent in years of maximum solar activity. These experiments were performed during 1985–1995. It was shown thereby, that the consideration of the ionospheric Alfvén resonator will allow us to explain the dependence of the RSS on the solar activity.