

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XXXIX № 9

Нижний Новгород

1996

Содержание

Куркин А. А., Петров В. В. Гамильтоновское описание баротропных волн Россби	1067
Погорелов В. И. Коэффициенты отражения и прохождения электромагнитных волн разных поляризаций на одномерном слое неоднородности среды	1075
Григорьев Г. И., Савина О. Н., Тамойкин В. В. Об устойчивости звуковых волн, распространяющихся в нестационарно движущейся среде	1087
Джандиери Г. В., Диасамидзе Ж. М., Джандиери В. Г. К теории рассеяния электромагнитных волн в средах с пространственно-временными флюктуациями скорости	1091
Бурлак Г. Н., Гrimальский В. В., Ишкабулов К. Нелинейная модуляция мощной электромагнитной волны в слабооднородной плаэме	1096
Кириллов В. В. Двумерная теория распространения электромагнитных волн СНЧ-диапазона в волноводном канале Земля—ионосфера	1103
Алимов В. А., Рахлин А. В. Амплитудные флюктуации в теории рефракционного рассеяния радиоволн	1114
Моисеев С. Н. Определение некоторых интегральных параметров слоя E_s по наблюдаемым данным	1125
Фурашов Н. И., Свердлов Б. А., Черняев С. Н. Исследование поглощения электромагнитного излучения чистым водяным паром на частотах вблизи 1,5 ТГц	1129

Ермолаев В. Т., Флаксман А. Г., Анурин А. А. Оценивание параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой	1144
Бровенко А. В., Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Шестопалов В. П. Спектральные и дифракционные характеристики открытых резонаторов с гиротропными (плазменными) включениями	1161
Глявин М. Ю., Запевалов В. Е. Численное моделирование переходных процессов в 170 ГГц/1 МВт гиротроне для ITER	1176

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**С.Я.БРАУДЕ, С.Н.ВЛАСОВ, А.В.ГАПОНОВ-ГРЕХОВ,
 В.Л.ГИНЗБУРГ (главный редактор),
 Л.М.ЕРУХИМОВ (зам.главного редактора),
 В.В.ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В.А.ЗВЕРЕВ, Ю.Л.КЛИМОНТОВИЧ,
 А.Н.КОНДРАТЕНКО, Ю.В.КРАВЦОВ, В.Н.КРАСИЛЬНИКОВ,
 А.Н.МАЛАХОВ, В.В.НИКОЛЬСКИЙ, В.Ю.ПЕТРУНЬКИН,
 М.И.РАБИНОВИЧ, А.И.САИЧЕВ, А.А.СЕМЕНОВ, С.А.ТАГЕР,
 В.И.ТАЛАНОВ, В.В.ТАМОЙКИН, Д.И.ТРУБЕЦКОВ,
 В.И.ТУРЧИН, В.П.УРЯДОВ, Г.И.ФРЕЙДМАН, А.В.ЯКИМОВ**

Ответственный секретарь редакции О.А.ШЕЙНЕР

**Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.
 Усл.печ.л. 10, 15. Усл.кр.-отт. 10, 15. Уч.-изд.л. 12, 20.
 Тираж 350 экз. Заказ № 77. Цена 10000 р.**

**Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,
 ул.Большая Печёрская, 25,
 Научно-исследовательский радиофизический институт,
 редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика".
 Телефон 36-01-71, e-mail rfj@nirfi.sci-nnov.ru**

**Отпечатано с готового набора в типографии ПОКГС ООП
 603600, Нижний Новгород, ул.Ошарская, 64**

**© "Известия высших учебных заведений.
 Радиофизика", 1996**

УДК 551.466.81

ГАМИЛЬТОНОВСКОЕ ОПИСАНИЕ БАРОТРОПНЫХ ВОЛН РОССБИ

A. A. Куркин, B. B. Петров

Для баротропных волн Россби произвольной амплитуды в приближении β -плоскости найдено преобразование к нормальным каноническим переменным. На его основе получена матрица трёхволнового взаимодействия и найдено выражение для слагаемого четвёртого порядка в гамильтониане взаимодействия, описывающего модуляционную неустойчивость волн Россби. Вычислен инкремент данной неустойчивости и произведена его численная оценка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гамильтоновская теория нелинейных волн Россби в общем случае включает в себя, наряду с описанием канонических переменных системы, закон канонического преобразования последних к нормальным переменным задачи. Отысканию канонических переменных для волн Россби посвящено достаточное количество работ (см. [1–4]). При этом нормальные канонические переменные получены лишь в частном случае [1] волн Россби малой амплитуды, исключающем решение в виде солитонов или локализованных вихрей.

В настоящей работе для баротропных волн Россби в приближении β -плоскости найдено преобразование к нормальным каноническим переменным, не содержащее ограничений на амплитуду взаимодействующих волн. Использованный при этом подход основан на вариационном принципе [5–6] и близок к тому, который применен при исследовании гамильтоновской структуры волн Россби в работах [3–4]. С помощью найденного преобразования получено выражение для матрицы трёхволнового взаимодействия. Найдено также выражение для слагаемого четвёртого порядка в гамильтониане взаимодействия, описывающего модуляционную неустойчивость волн Россби. Вычислен инкремент данной неустойчивости и произведена его численная оценка.

2. НОРМАЛЬНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Будем рассматривать нелинейные волны Россби в приближении β -плоскости. Ось x системы координат направим на восток, а ось y — на

A. A. Куркин, B. B. Петров

1067

север, Ω — угловая скорость вращения планеты. Уравнения динамики несжимаемой жидкости в этом приближении имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} - 2\Omega v \sin \lambda &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} + 2\Omega \sin \lambda u &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y},\end{aligned}\quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где $\vec{v} = (u, v)$, $\sin \lambda(y)$ — широтная зависимость параметра Кориолиса. В линейном приближении она запишется в виде:

$$\sin \lambda(y) = \sin \lambda_0 + \frac{\gamma_0}{2\Omega} y$$

. Здесь $\gamma_0 = \frac{2\Lambda}{r_0} \cos \lambda_0$, где r_0 — радиус Земли. Поскольку уравнение непрерывности (2) оставляет независимой только одну компоненту скорости, а давление p определяется через скорость, то уравнения (1) описывают систему с одной степенью свободы, следовательно, необходимо найти только одну пару канонических переменных для полного гамильтоновского описания динамики рассматриваемой системы. Для отыскания канонических переменных рассматриваемой системы воспользуемся преобразованием Клебша [5], выразив проекции скорости u и v на оси системы координат в виде

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} - \sqrt{2\Omega} \alpha, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} - \sqrt{2\Omega} \sin \lambda \beta.\end{aligned}\quad (3)$$

В представлении Клебша (3) уравнения движения могут быть получены из вариационного принципа

$$\delta \int dt \int \mathcal{L} dx dy = 0,$$

где $\mathcal{L} = -\rho_0 \left(\dot{\varphi} + \alpha \dot{\beta} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 \right)$ — плотность лагранжиана.

Зная плотность лагранжиана \mathcal{L} , можно стандартным преобразованием Лежандра получить выражение для плотности гамильтониана \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \dot{\beta} - \mathcal{L}.$$

В этом выражении переменные β и $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\beta} = -\rho_0\alpha$ могут рассматриваться в качестве канонически сопряжённых координаты и импульса системы (см., например, [3]). Для них исходные уравнения движения

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dt} - \sqrt{2\Omega}u &= 0, \\ \frac{d\alpha}{dt} + \sqrt{2\Omega}v \sin \lambda(y) &= 0,\end{aligned}\tag{4}$$

как нетрудно убедиться, находятся из уравнений Гамильтона

$$\dot{\beta} = \frac{\delta H}{\delta(-\rho_0\alpha)}, \quad -\rho_0\dot{\alpha} = -\frac{\delta H}{\delta\beta},$$

в которых гамильтониан $H = \int \mathcal{H} dx dy$ равен полной энергии среды

$$H = \frac{\rho_0}{2} \int (u^2 + v^2) dx dy.$$

Следует отметить, что уравнения (4) совпадают с уравнениями (1) после подстановки в них (3) и учёта уравнения непрерывности (2). Иными словами, уравнениями (4) исчерпывается математическое описание динамики рассматриваемой системы – системы с одной степенью свободы – и, следовательно, найденные канонические переменные β и $-\rho_0\alpha$ полностью решают задачу гамильтоновского описания этой динамики.

Перейдём от переменных β и $-\rho_0\alpha$ к нормальным каноническим переменным, позволяющим описать нелинейное взаимодействие волн Россби. С этой целью представим исходные переменные задачи в виде интеграла Фурье

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \beta \\ -\rho_0\alpha \\ \varphi \end{bmatrix} = \int_{k_x < 0} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ \beta_k \\ -\rho_0\alpha_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

по координатам x и y . Линеаризованные уравнения (4) в k -представлении запишутся в виде

$$\begin{aligned}u_k^{(0)} &= ik_x \varphi_k^{(0)} - \sqrt{2\Omega} \alpha_k, \\ v_k^{(0)} &= ik_y \varphi_k^{(0)} - \sqrt{2\Omega} \sin \lambda_0 \beta_k,\end{aligned}\tag{5}$$

причём, с учётом уравнения непрерывности (2) будем иметь

$$v_k^{(0)} = -\frac{k_x}{k_y} u_k^{(0)}.\tag{6}$$

Из (6) найдём выражение для $\varphi_k^{(0)}$

$$\varphi_k^{(0)} = -\sqrt{2\Omega} \frac{ik_x \alpha_k}{k^2} - \sqrt{2\Omega} \sin \lambda_0 \frac{ik_y \beta_k}{k^2} + \frac{\gamma_0}{\sqrt{2\Omega}} \frac{k_y}{k^2} \frac{\partial \beta_k}{\partial k_y},$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Подставляя это выражение в (5), получим

$$u_k^{(0)} = -\sqrt{2\Omega} \frac{k_x^2}{k^2} \alpha_k - \sqrt{2\Omega} \sin \lambda_0 \frac{k_y k_x}{k^2} \beta_k + \frac{i\gamma_0}{\sqrt{2\Omega}} \frac{k_y k_x}{k^2} \frac{\partial \beta_k}{\partial k_y}, \quad (7)$$

С учётом (7) квадратичная часть H_0 гамильтониана H , равная

$$H_0 = \rho_0 \int_{k_x < 0} \frac{k^2}{k_y^2} u_k^{(0)} u_k^{(0)*} dk_x dk_y,$$

приводится к следующему функционалу от канонических переменных β_k и $-\rho_0 \alpha_k$:

$$\begin{aligned} H_0 = & 2\Omega \rho_0 \int_{k_x < 0} \frac{1}{k^2} \left\{ k_y^2 \alpha_k \alpha_k^* + k_x^2 \sin^2 \lambda_0 \beta_k \beta_k^* + k_x^2 \frac{\gamma_0^2}{4\Omega^2} \frac{\partial \beta_k}{\partial k_y} \frac{\partial \beta_k^*}{\partial k_y} - \right. \\ & - k_x k_y \sin \lambda_0 (\alpha_k^* \beta_k + k.c.) + ik_x k_y \frac{\gamma_0}{2\Omega} (\alpha_k \frac{\partial \beta_k^*}{\partial k_y} - k.c.) + \\ & \left. + ik_x^2 \frac{\gamma_0}{2\Omega} \sin \lambda_0 (\beta_k^* \frac{\partial \beta_k}{\partial k_y} - k.c.) \right\} dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (8)$$

Для перехода в (8) к нормальным каноническим переменным, осуществим следующее каноническое преобразование переменных α_k и β_k :

$$\begin{aligned} \beta_k &= B_k a_k, \\ \alpha_k &= \sin \lambda_0 \frac{k_x}{k_y} B_k a_k + \frac{i\gamma_0}{2\Omega} \frac{\partial}{\partial k_y} \left\{ \frac{k_x}{k_y} B_k a_k^* \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом потребуем, чтобы квадратичная часть H_0 в новых переменных a_k и $i a_k^*$ принимала вид

$$H_0 = \int_{k_x < 0} \omega_k a_k a_k^* dk_x dk_y, \quad (10)$$

где $\omega_k = -\frac{\gamma_0 k_x}{k^2}$ — закон дисперсии волн Россби. Из условия (10) найдём для функции B_k следующее выражение

$$B_k = \sqrt{\frac{2\Omega}{\rho_0 \gamma_0}} \frac{k_y}{\sqrt{-k_x}}.$$

В итоге формулы перехода к нормальным каноническим переменным a_k и ia_k^* примут вид

$$\begin{aligned}\beta_k &= \sqrt{\frac{2\Omega}{\rho_0\gamma_0}} \frac{k_y}{\sqrt{-k_x}} a_k, \\ \alpha_k &= \sqrt{\frac{2\Omega\rho_0}{\gamma_0}} \frac{k_x}{\sqrt{-k_x}} \left\{ \sin \lambda_0 a_k + \frac{i\gamma_0}{2\Omega} \frac{\partial a_k^*}{\partial k_y} \right\}.\end{aligned}\quad (11)$$

В новых переменных будем иметь уравнения вида

$$\dot{a}_k = -i \frac{\delta H}{\delta a_k^*},$$

где

$$H = \frac{\rho_0}{2} \int_{k_x < 0} (u_k u_k^* + v_k v_k^*) dk_x dk_y. \quad (12)$$

Перейдём в кубичной части H_1 гамильтониана (12) к нормальным переменным a_k и ia_k^* . Выражая u_k и v_k через α_k и β_k и используя преобразование (11), получим следующее выражение для матрицы трёхволнового взаимодействия

$$\begin{aligned}V_{kk_1k_2} &= i \frac{\Omega}{\sqrt{\gamma_0}} \frac{\sin^3 \lambda_0}{\sqrt{-k_x k_{1x} k_{2x}}} \left\{ \frac{k_x k_{2x} k_{1y} (k_x k_{1y} + k_{1x} k_y)}{k_x^2 + k_y^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_{1x} k_{2x} k_y (k_{2x} k_y + k_x k_{2y})}{k_{2x}^2 + k_{2y}^2} - \frac{k_x k_{1x} k_{2y} (k_{2x} k_{1y} + k_{1x} k_{2y})}{k_{1x}^2 + k_{1y}^2} \right\}.\end{aligned}\quad (13)$$

Заметим, что найденное преобразование к нормальным каноническим переменным волны Россби не содержит ограничений на их амплитуду. Это позволяет строить гамильтониан взаимодействия нормальных волн в любом порядке теории возмущений и эффективно описывать фундаментальные явления нелинейного взаимодействия этих волн.

3. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН РОССБИ

Рассмотрим самовоздействие волны Россби в рамках эффекта модуляционной неустойчивости последних в качестве примера подобного взаимодействия, представляющего как теоретический, так и прикладной интерес. Для описания этого эффекта необходимо учесть слагаемое следующего (четвёртого) порядка в разложении гамильтониана взаимодействия по степеням нормальных переменных. Из (12) с учётом (11) найдём

$$H_2 = \int W_{kk_1k_2k_3} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta(\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) d\vec{k} d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3,$$

где

$$\begin{aligned} W_{kk_1k_2k_3} = & \frac{4\Omega^3 \sin^2 \lambda_0}{\gamma_0^2 \sqrt{k_x k_{1x} k_{2x} k_{3x}}} \left\{ (k_x k_{1x} k_{2y} k_{3y} + k_{2x} k_{3x} k_y k_{1y}) \left[\frac{k_x k_{1x} k_y k_{3y}}{k^2} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{k_{2x} k_{3x} k_y k_{2y}}{k_2^2} \right] + (k_{1x} k_{2x} k_y k_{3y} + k_x k_{3x} k_{1y} k_{2y}) \left[\frac{k_{1x} k_{2x} k_y k_{1y}}{k_1^2} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{k_x k_{3x} k_{2y} k_{3y}}{k_3^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

В эффе́кте самовоздействия, наряду с кубичной нелинейностью среды, описываемой H_2 , будет принимать участие (за счёт последовательных процессов) и квадратичная нелинейность среды, описываемая слагаемым H_1 . Вклад H_1 можно учесть с помощью процедуры канонических преобразований исходных нормальных переменных, которая исключала бы кубичные члены из гамильтониана взаимодействия. Это преобразование имеет вид [7]

$$a_k = b_k - \int \frac{V_{kk_1k_2}}{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) b_{k_1} b_{k_2} d\vec{k}_1 d\vec{k}_2.$$

При этом

$$H_2 = \int T_{kk_1k_2k_3} b_k^* b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta(\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) d\vec{k} d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3,$$

где

$$T_{kk_1k_2k_3} = W_{kk_1k_2k_3} + 2 \frac{V_{k_1+k_2,k_2,k_3}^* V_{k+k_1,k,k_1}}{\omega_{k+k_1} - \omega_k - \omega_{k_1}}.$$

Полученное выражение для $T_{kk_1k_2k_3}$ существует только для тех направлений, вдоль которых запрещены распадные процессы, то есть не выполнено условие вида $\omega_{k+k_1} - \omega_k - \omega_{k_1} = 0$. Рассматриваемая нами модуляционная неустойчивость развивается вдоль таких направлений, поэтому это выражение не содержит особенностей и для дальнейшего исследования может быть использовано приближение спектрально-узкого волнового пакета.

В приближении спектрально-узкого волнового пакета, сосредоточенного вблизи \vec{k}_0 , уравнение, описывающее эффе́кт самовоздействия волн Россби, примет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + V_g \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{i}{2} \left\{ \omega'' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{V_g}{k_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right\} + iT |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (14)$$

Здесь

$$\Psi = \int b_k e^{i\omega(k_0)t+i(\vec{k}-\vec{k}_0)\vec{r}} d\vec{k},$$

V_g — проекция групповой скорости на ось x , а $T = \frac{4\Omega^3}{\gamma^2} \sin^4 \lambda_0 \frac{k_{0x}^2 k_{0y}^4}{k_0^2} (1 + \frac{4}{3} \sin^2 \lambda_0)$. Найдём с помощью (14) инкремент модуляционной неустойчивости рассматриваемых волн. Линеаризуя (14) вблизи равновесного состояния

$$\Psi \equiv \Psi_0 = B e^{-iB^2 T t}, \quad (15)$$

где $\Delta\omega_n = TB^2$ — нелинейный сдвиг по частоте за счёт наличия кубичной нелинейности, и полагая малые отклонения переменных от состояния (15) пропорциональными $e^{-ift+i\vec{k}\vec{r}}$, получим следующее дисперсионное уравнение

$$f^2 - 2fV_g\kappa \cos \Theta + V_g^2 \kappa^2 \cos^2 \Theta - \left\{ \frac{\kappa^2 G(\Theta)}{2} - 2TB^2 \right\}^2 + T^2 B^4 = 0, \quad (16)$$

где $G(\Theta) = \omega'' \cos^2 \Theta + \frac{\omega'}{k_0} \sin^2 \Theta$, а $\cos \Theta = \frac{\vec{\kappa} \vec{k}_0}{\kappa k_0}$.

Решение (16) имеет вид

$$f = V_g \kappa \cos \Theta \pm \sqrt{\left\{ \frac{\kappa^2 G(\Theta)}{2} - 2TB^2 \right\}^2 - T^2 B^4}.$$

Из (16) следует, что область неустойчивости по каждому направлению Θ ограничена значениями

$$TB^2 < \frac{\kappa^2 G(\Theta)}{2} < 3TB^2.$$

При этом максимальный инкремент достигается при

$$\kappa_{\max}^2 = \frac{4TB^2}{G(\Theta)}$$

и равен $(\text{Im } f)_{\max} = \gamma_{\text{mod}} = TB^2$.

Для волн Россби с длиной 1000 км на 30° с.ш., где $\gamma_0 = 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-1}$, получим следующее значение инкремента модуляционной неустойчивости $\gamma_{\text{mod}} \approx 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Сравнивая полученное значение γ_{mod} с инкрементом распадной неустойчивости $\gamma_p = 2\pi |V_{kk_1 k_2}| B$, который на данной широте, согласно (13), равен по порядку величины 10^{-6} с^{-1} , можно заключить, что рассмотренное самовоздействие волн Россби достаточно эффективно и должно учитываться наравне с явлением распадной неустойчивости этих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е., Питербарг Л. И. // Докл. АН СССР, 1987. Т. 295. № 1. С. 86.
2. Захаров В. Е., Монин А. С., Питербарг Л. И. // Докл. АН СССР, 1987. Т. 295. № 1. С. 1061.
3. Гончаров В. П. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1984. Т. 20. № 2. С. 125.
4. Цейтлин В. Ю. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1989. Т. 25. № 9. С. 948.
5. Селиджер Р. Л., Уитем Г. Б. // Сб. перев. "Механика". 1969. № 5. С. 99.
6. Гончаров В. П., Павлов В. И. Проблемы гидродинамики в гамильтоновом описании. — Изд-во МГУ, 1993.
7. Захаров В. Е. // Изв. вузов. Радиофизика, 1974. Т. 17. № 4. С. 431.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
4 июля 1996 г.

HAMILTONIAN DESCRIPTION OF BAROTROPIC ROSSBY WAVES

A. A. Kurkin, V. V. Petrov

A transformation to normal canonical variables has been found in the beta-plane approximation for barotropic Rossby waves of arbitrary amplitude. This transformation is used to derive a matrix of three-wave interaction and to find an expression for addend of the fourth order in the hamiltonian of interaction, describing modulate instability of Rossby waves. The increment of this instability has been calculated and its numerical estimation is made.

УДК 621.371

КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН РАЗНЫХ ПОЛЯРИЗАЦИЙ НА ОДНОМЕРНОМ СЛОЕ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ

B. I. Погорелов

Получены строгие (не содержащие приближений) формулы для коэффициентов отражения и прохождения электромагнитных волн любой поляризации в изотропной среде с одномерным слоем неоднородности произвольного профиля, играющим роль переходного слоя между двумя различными однородными средами. Поскольку данные формулы включают в себя величины, находящиеся путём численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, то результатом этой работы является метод расчёта указанных коэффициентов, который доведён до быстрого и удобного вида.

Приводятся результаты расчётов для двух частных случаев. Даётся аналитический предельный переход от полученных формул к частному случаю резкой границы между средами (т. е. к известным формулам Френеля).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в пространстве координат (x, y, z) определена функция диэлектрической проницаемости $\epsilon(z)$, зависящая лишь от координаты z и обладающая свойствами $\epsilon = \epsilon_1 = \text{const}_1$ при $z \geq z_1$ и $\epsilon = \epsilon_2 = \text{const}_2$ при $z \leq 0$. В интервале $0 < z < z_1$ функция $\epsilon(z)$ может быть произвольной и даже терпеть разрывы (рис. 1). Электромагнитная волна с циклической частотой ω падает на слой со стороны больших значений z под каким-либо первоначальным углом $\phi_1 = \phi(z_1)$. Полагая амплитуду падающей волны при $z = z_1$ равной 1, обозначим комплексную амплитуду отраженной волны при $z = z_1$ через R , а комплексную амплитуду проходящей волны при $z = 0$ через D . Тогда R и D будут соответственно коэффициентами отражения и прохождения заданной падающей волны. Требуется найти их значения.

Когда электрическое поле $\vec{\mathcal{E}}$ ортогонально плоскости падения волны, оно строго подчиняется уравнению Гельмгольца $\Delta\vec{\mathcal{E}} + (\omega/C)^2\epsilon\vec{\mathcal{E}} = 0$, где C — скорость света в вакууме. Ранее, в работе [1], было найдено точное решение данной задачи для этого частного случая, который с чисто математической точки зрения идентичен многим другим задачам из разных областей физики (например, квантовой механики и акустики) и техники.

B. I. Погорелов

1075

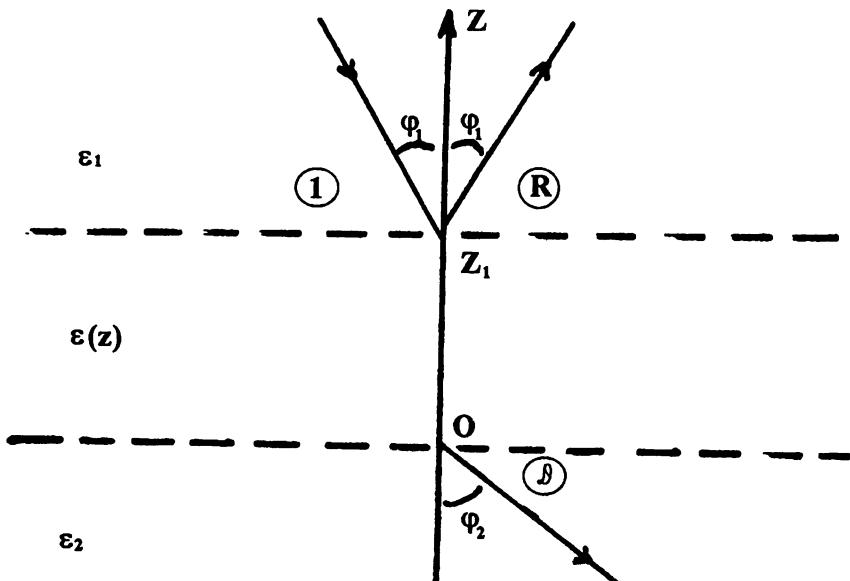


Рис. 1.

Особенно важно применение этого решения к проблемам диагностики среды распространения волны (определение профиля $\epsilon(z)$ по частотным распределениям $R(\omega)$ и $D(\omega)$), являющееся соответствующей обратной задачей к поставленной выше. Сейчас оно может осуществляться только подбором вида зависимости $\epsilon(z)$, для которой уже известный метод [1] приводит к функциям $R(\omega)$, $D(\omega)$, максимально совпадающим с соответствующими зависимостями, определенными экспериментально. Данное обстоятельство выдвигает жесткое условие к простоте и оперативности перебора различных вариантов функций $\epsilon(z)$, т.е. к простоте решения прямой задачи.

Возможности рассматриваемого метода подробно обсуждались в работе [1], равно как и свойства других существующих в настоящее время методов.

Случай такой поляризации поля электромагнитной волны, когда вектор \vec{E} лежит в плоскости ее падения на слой неоднородности среды, не описывается строго уравнением Гельмгольца и поэтому не охватывается результатами работы [1]. Ниже дается и его решение, а также делается совместный анализ ряда особенностей разработанного метода для обоих частных случаев поляризации волны.

2. ВОЛНА С ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ \vec{E} В ПЛОСКОСТИ ПАДЕНИЯ. ПЕРВЫЙ ПУТЬ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ

В отличие от [1] мы здесь будем рассматривать уравнение не для элек-

трического, а для магнитного поля \vec{H} . При данной поляризации волн у вектора \vec{H} имеется лишь одна компонента H_y , ортогональная плоскости падения (x, z). Далее будем ее обозначать просто как H . Уравнение для $H(z)$ имеет вид [2]:

$$H'' - (\epsilon'/\epsilon) H' + (\omega^2/C^2) \cdot \epsilon \cdot \cos^2 \phi(z) H = 0, \quad (1)$$

где штрихи означают дифференцирование по координате z . Подставим в (1) $H(z) = Q(z) \cdot F(z)$ с неизвестными пока функциями $Q(z)$ и $F(z)$. Если в переписанном таким образом уравнении подчинить выбор функции $F(z)$ требованию, чтобы множитель перед Q' обращался в 0, то получится $F(z) = \sqrt{\epsilon(z)}$, а уравнение для Q примет вид

$$Q'' + (\omega/C)^2 \left[\frac{1}{2} (C/\omega)^2 (\epsilon'/\epsilon)' - \frac{1}{4} (C/\omega)^2 (\epsilon'/\epsilon)^2 + \epsilon \cos^2 \phi \right] Q = 0. \quad (2)$$

Напомним, что для волн иной поляризации приходилось иметь дело с уравнением $E'' + (\omega/C)^2 \epsilon \cos^2 \phi E = 0$, и именно для него в [1] был разработан метод комбинированного аналитически–численного решения. Он основывался на замене $E = E_0 \exp \left\{ (i\omega/C) \int_0^z \eta_e dz \right\}$ с функцией η_e , удовлетворяющей уравнению

$$\eta'_e = (i\omega/C) \left(\eta_e^2 - \epsilon \cos^2 \phi \right). \quad (3)$$

Можно снова воспользоваться этим уже отработанным способом решения, рассматривая в (2) выражение в квадратных скобках как некоторую иную разновидность ϵ_n функции $\epsilon \cos^2 \phi$. Если мы запишем Q через η_q таким же образом, как и E через η_e , то для η_q будем иметь уравнение

$$\eta'_q = (i\omega/C) \left(\eta_q^2 - \left[\frac{1}{2} (C/\omega)^2 (\epsilon'/\epsilon)' - \frac{1}{4} (C/\omega)^2 (\epsilon'/\epsilon)^2 + \epsilon \cos^2 \phi \right] \right) \quad (4)$$

и далее прежним методом, разделяя Q на падающую, отраженную и проходящую волны, получим для Q коэффициенты отражения и прохождения в полном соответствии с изложением в [1], что даст

$$R_q = \frac{\sqrt{\epsilon_n(z)} - \eta_q(z)}{\sqrt{\epsilon_n(z)} + \eta_q(z)}, \quad D_q = \frac{2 \sqrt{\epsilon_n(z)}}{\sqrt{\epsilon_n(z)} + \eta_q(z)} \exp \left\{ (i\omega/C) \int_0^z \eta_q dz \right\}. \quad (5)$$

Интегрирование в выражении для D_q ведется от начала слоя неоднородности на выбранной оси z со стороны уходящей, прошедшей этот слой волны (при $z = 0$) до значения z в любой точке пространства по другую сторону неоднородности, т. е. в области расположения падающей и отраженной волн. Границным значением $\eta_q(0)$ является $\sqrt{\epsilon_n(0)} = \sqrt{\epsilon(0)} \cos \phi(0)$,

удовлетворяющее условию $\eta' = 0$ при $z \leq 0$, вытекающему из требования существования лишь одной уходящей волны в данной области. При этом ϵ' и ϵ'' для $z \leq 0$ зануляются согласно условиям задачи. Поскольку и по другую сторону неоднородности $\epsilon' = \epsilon'' = 0$ тоже, то в формулах для R_q и D_q корень $\sqrt{\epsilon_n(z)} = \sqrt{\epsilon(z)} \cos \phi(z)$. Функция $\phi(z)$ вдоль оси z меняется по закону Снелиуса.

Найденные выше выражения для $R_q(z)$, $D_q(z)$ описывают коэффициенты отражения и прохождения для функции Q , введенной в качестве вспомогательной. Нам, однако, нужно иметь эти коэффициенты для поля \mathcal{E} , т.е. R_e и D_e . Чтобы осуществить этот переход, проанализируем связь R_q , D_q с R_e , D_e , а также с соответствующими коэффициентами для магнитного поля R_h , D_h .

По обе стороны слоя неоднородности соотношения между значениями \mathcal{H} и \mathcal{E} в падающей (\mathcal{H}_n , \mathcal{E}_n), отраженной (\mathcal{H}_o , \mathcal{E}_o) и проходящей ($\mathcal{H}_{\text{пр}}$, $\mathcal{E}_{\text{пр}}$) волнах записываются как

$$\mathcal{H}_n = \sqrt{\epsilon(z_1)} \mathcal{E}_n, \quad \mathcal{H}_o = -\sqrt{\epsilon(z_1)} \mathcal{E}_o, \quad \mathcal{H}_{\text{пр}} = \sqrt{\epsilon(0)} \mathcal{E}_{\text{пр}}, \quad (6)$$

а соотношения между соответствующими \mathcal{H} и Q имеют вид

$$Q_n = \mathcal{H}_n / \sqrt{\epsilon(z_1)}, \quad Q_o = \mathcal{H}_o / \sqrt{\epsilon(z_1)}, \quad Q_{\text{пр}} = \mathcal{H}_{\text{пр}} / \sqrt{\epsilon(0)} \quad (7)$$

согласно условию выбора функции f (фазы в (6) для всех \mathcal{E} равны фазам их проекций \mathcal{E}_x соответственно равенству $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x / \cos \phi$). Из уравнений (6) нетрудно получить связь между R_e , D_e и R_h , D_h в виде $R_e = -R_h$, $D_e = D_h$, а из (7) найти $R_h = R_q$, $D_h = D_q$. Поэтому интересующие нас величины R_e и D_e можно выразить на основе формул (5), переписав их как

$$R_q = -R_e, \quad D_q = D_e. \quad (8)$$

Таким образом уравнения (5) и (8) полностью задают искомые нами функции $R_e(z)$, $D_e(z)$.

3. ВТОРОЙ СПОСОБ РАСЧЕТА R_e И D_e ПРИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПОЛЯ $\tilde{\mathcal{E}}$ В ПЛОСКОСТИ ПАДЕНИЯ ВОЛНЫ НА СЛОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ И ОБЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ R_e , D_e ПРИ ЛЮБОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНЫ

Сделанные выше выводы в принципе дают полное решение поставленной задачи. Но форма их неудобна и не слишком эффективна как в смысле дальнейшего аналитического исследования результата, так и в смысле его практического применения для численных расчетов. Это определяется, в частности, наличием в уравнении для η_q производных ϵ' и ϵ'' . В большинстве случаев задания функции $\epsilon(z)$ необходимость их расчета в

процессе численного решения уравнения для η_q , комплексного, быстро меняющего свой аргумент и чувствительного к ошибкам, приводит также к большим ошибкам в конечных результатах расчетов, к неустойчивости компьютерной программы. Кроме того, при наличии разрывов в функции $\epsilon(z)$ приходится рассчитывать R_e , D_e , работая фактически в классе обобщенных функций, что не всегда удобно. Однако существует возможность более приемлемой формы представления и расчета величин R_e и D_e . Чтобы показать это, ограничимся сначала условиями нормального падения волн на слой неоднородности.

При указанной ситуации оба типа волн (нормальная и тангенциальная к плоскости падения) становятся совершенно эквивалентными. К любой из них, следовательно, должны быть применимы оба метода расчета: и непосредственно по полю \mathcal{E} , изложенному в [1], и по полю \mathcal{H} с последующим пересчетом к \mathcal{E} , что рассмотрено в части 2 настоящей работы. Второй путь более сложен и довольно резко отличается от первого. Но можно аналитически показать, что оба эти пути полностью согласуются друг с другом.

Из (8) и выражения для R в (5) и в [1] при $n = \sqrt{\epsilon}$ получим

$$\frac{n - \eta_e}{n + \eta_e} = -\frac{n - \eta_q}{n + \eta_q} \quad \text{или} \quad \eta_e \eta_q = n^2 = \epsilon. \quad (9)$$

Естественно, (9) записывается для области с $\epsilon = \text{const}$, где существуют падающая и отраженная волны. Можно также показать (или просто проверить подстановкой), что в условиях нормального падения волны на слой неоднородности (для $\cos \phi = 1$) уравнения (3) и (4) взаимно переходят друг в друга при использовании преобразования

$$\left[\eta_q + \frac{iC}{2\omega} (\epsilon'/\epsilon) \right] \eta_e = \epsilon \quad (10)$$

для всех значений координаты z . Следовательно, (10) является обобщением (9) на всю область значений z .

Теперь от частного случая нормального падения волны на слой неоднородности среди вернемся к общему случаю произвольного угла падения ϕ_1 . Внутри слоя угол $\phi(z)$ меняется по закону Снелиуса и приобретает за слоем значение $\phi(0)$. Для волны с вектором $\vec{\mathcal{E}}$, лежащим в плоскости падения, уравнение для \mathcal{H} имеет вид (1) и обусловливает функцию $\eta_q(z)$, подчиняющуюся (4). Формально и здесь возможен переход от η_q к некоторой функции η_e , связанной с η_q уравнением (10). Сделаем этот переход и посмотрим, какими свойствами данная функция будет обладать. Не трудно вывести уравнение для η_e , имеющее вид

$$\eta'_e = \frac{i\omega}{C} \left(\eta_e^2 \cos^2 \phi - \epsilon \right). \quad (11)$$

Из него даже безотносительно к последующей трактовке η_e и ее роли в расчетах R_e и D_e следует, что замена η_h на η_e очень удобна хотя бы потому, что решение (11) не отягощается расчетами производных от ϵ . Из этих соображений проще сначала решать (11), а далее, в области $z > z_1$ (если необходимо) переходить к η_q . Но оказывается, что при расчетах R_e и D_e можно ограничиться только использованием функции η_q с целью обоснования метода этих расчетов и не более того. Действительно, преобразуем (11), поделив его на $\cos^2 \phi$, и введем новую координату $\zeta = \int_0^z \cos^2 \phi(z) dz$ и новую модификацию ϵ вида $\epsilon_r = \epsilon / \cos^2 \phi$. При этом (11) перепишется как

$$\frac{d}{d\zeta} \eta_e = \frac{i\omega}{C} (\eta_e^2 - \epsilon_r), \quad (12)$$

которое подобно (7) фактически уже решалось в [1] вплоть до расчетов коэффициентов отражения и прохождения волн. Там показано, что, если η_e в области $z \leq 0$ имеет постоянное значение $\eta_e(0) = \sqrt{\epsilon_r(0)} = n(0)/\cos(0)$, то функция

$$\epsilon_r = \epsilon_{0r} \exp \left\{ \frac{i\omega}{C} \int_0^\zeta \eta_e d\zeta \right\} \quad (13)$$

в ней будет иметь вид одной (проходящей) волны, тогда как по другую сторону неоднородности среды она превращается в систему двух волн, идущих в противоположных относительно оси ζ направлениях. Новым в уравнении (12) с этой точки зрения является лишь замена z на ζ , из-за чего используемые масштабы измерения длины вдоль оси ζ будут разными по обе стороны неоднородности. Было бы удобно при расчетах R_e и D_e с помощью (12) не проделывать каждый раз переход от η_e к η_q и к (5), а строить формулы для R_e , D_e прямо из (12) обычным изложенным в [1] способом, несколько скорректированным с учетом возникающего изменения масштабов измерения z .

Пусть R_{er} и D_{er} — соответствующие коэффициенты, полученные из (12) методом [1] без коррекции. Осуществим переход от них к искомым нами коэффициентам R_e и D_e .

Связь между R_{er} и R_q находится очень просто благодаря тому, что входящие в них функции η_q и η_e определены в области с $\epsilon' = 0$, где (10) переходит в (9). Легко видеть, что (9) тождественно также уравнению $\frac{\eta_e - n/\cos \phi}{\eta_e + n/\cos \phi} = -\frac{\eta_q - n/\cos \phi}{\eta_q + n/\cos \phi}$, являющемуся не чем иным как $R_{er} = -R_q$. Учитывая (8), имеем $R_e = R_{er}$, в силу чего R_e можно находить из (12) по старому, не измененному правилу [1].

Что же касается расчета D_e , то использование (12) требует введения в метод [1] дополнительного корректирующего множителя. Действительно, преобразуем D_q из (5) путем замены η_q на η_e посредством (10). Для этого сначала представим входящий туда экспоненциальный множитель в виде

$$\exp \left\{ \frac{i\omega}{C} \int_0^z \eta_q dz \right\} = \exp \left\{ \frac{i\omega}{C} \int_0^z (\eta_q - \eta_e \cos^2 \phi) dz \right\} \exp \left\{ \frac{i\omega}{C} \int_0^z \eta_e \cos^2 \phi dz \right\},$$

поделив и помножив его на экспоненту, входящую в D_{er} . Первый из множителей данного выражения после замены η_q через η_e согласно (10) и последующего применения уравнения (11) легко преобразуется к выражению $[\eta_e(z)/\eta_e(0)] \sqrt{\epsilon(z)/\epsilon(0)}$. Второй (не экспоненциальный) множитель у D_q в (5) вместе с найденным выше выражением оказывается равным соответствующему (не экспоненциальному) множителю у D_{er} , взятому с коэффициентом $\cos \phi(z)/\cos \phi(0)$. Таким образом, если на основе (12) формально определять D_{er} по методу [1], то истинное D_e будет равно

$$D_e = D_{er} \frac{\cos \phi(z_1)}{\cos \phi(0)}.$$

Подводя итог изложенному выше, приведем конечные формулы для расчета коэффициентов отражения (R_e) и прохождения (D_e) волн поля \vec{E} через одномерный слой неоднородности среды с $\epsilon = \epsilon(z)$. Полагается, что проекции волнового вектора на ось z у падающей и проходящей волн отрицательны, а проекция его у отраженной волны положительна. Неоднородность расположена в интервале значений $z \in (0, z_1)$. Вне этого интервала, по обе стороны функция ϵ принимает постоянные, в общем случае разные значения.

При расположении вектора $\vec{E} = \vec{E}_{||}$ в плоскости падения волны на слой расчет $R_e = R_{||}$ и $D_e = D_{||}$ ведется с помощью $\eta_e = \eta_{||}$, определяемого путем решения (численного или аналитического) уравнения (12) с граничным условием $\eta_{||} = \sqrt{\epsilon(0)}$. После нахождения $\eta_{||}(z)$ и $\int_0^z \eta_{||} \cos^2 \phi dz$ в любой точке z по другую сторону слоя неоднородности величины $R_{||}$ и $D_{||}$ определяются по формулам

$$R_{||} = - \frac{\sqrt{\epsilon(z)/\cos \phi(z)} - \eta_{||}(z)}{\sqrt{\epsilon(z)/\cos \phi(z)} + \eta_{||}(z)} \quad \text{и} \quad (14)$$

$$D_{||} = \frac{2\sqrt{\epsilon(z)/\cos \phi(z)}}{\sqrt{\epsilon(z)/\cos \phi(z)} + \eta_{||}(z)} \exp \left\{ \frac{i\omega}{C} \int_0^z \eta_{||} \cos^2 \phi dz \right\} \cdot \frac{\cos \phi(z)}{\cos \phi(0)}.$$

Напомним [1], что для волны с полем $\vec{E} = \vec{E}_\perp$, ортогональным плоскости ее

падения на слой неоднородности, расчет $R_e = R_\perp$ и $D_e = D_\perp$ ведется с помощью функции $\eta_e = \eta_\perp$, удовлетворяющей уравнению (3) при граничном условии $\eta_\perp = \sqrt{\epsilon(0)} \cos \phi(0)$, по формулам

$$R_\perp = -\frac{\sqrt{\epsilon(z)} \cos \phi(z) - \eta_\perp(z)}{\sqrt{\epsilon(z)} \cos \phi(z) + \eta_\perp(z)} \quad \text{и} \quad (14')$$

$$D_\perp = \frac{2\sqrt{\epsilon(z)} \cos \phi(z)}{\sqrt{\epsilon(z)} \cos(z) + \eta_\perp(z)} \exp \left\{ \frac{i\omega}{C} \int_0^z \eta_\perp dz \right\}.$$

4. СЛУЧАЙ РЕЗКОГО ИЗЛОМА СВОЙСТВ СРЕДЫ И ПЕРЕХОД К ФОРМУЛАМ ФРЕНЕЛЯ

Представляет интерес применение (14) и (14') к известному частному случаю, когда значения ϵ различны по разные стороны слоя неоднородности, а сам этот переходный слой бесконечно узок. Тогда интеграл в выражениях для D_e зануляется, т. к. длина области интегрирования обращается в нуль. В привычных для формул Френеля обозначениях (14) перепишется с заменою $\cos \phi(z_1) = \cos \phi_1$, $\cos \phi(0) = \cos \phi_2$, $\epsilon(z) = n_1^2$, $\epsilon(0) = n_2^2$. При этом имеем $\eta_{||} = n_2 / \cos \phi_2$ (равно граничному значению при $z = 0$) и

$$R_{||} = -\frac{n_1 / \cos \phi_1 - n_2 / \cos \phi_2}{n_1 / \cos \phi_1 + n_2 / \cos \phi_2}, \quad (15)$$

$$D_{||} = \frac{2n_1 / \cos \phi_1}{n_1 / \cos \phi_1 + n_2 / \cos \phi_2} \cdot \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2}.$$

Простые тригонометрические преобразования легко переводят эти выражения к общепринятым для френелевских формул виду.

Что же касается волн с поляризацией вектора \vec{E} , ортогональной плоскости падения волны на слой, то η_\perp в данном случае равно граничному значению $n_2 \cos \phi_2$, а формулы (14') превращаются в

$$R_\perp = \frac{n_1 \cos \phi_1 - n_2 \cos \phi_2}{n_1 \cos \phi_1 + n_2 \cos \phi_2}, \quad (15')$$

$$D_\perp = \frac{2n_1 \cos \phi_1}{n_1 \cos \phi_1 + n_2 \cos \phi_2}.$$

Здесь также несложные тригонометрические преобразования приводят (15') к традиционной форме записи.

Интересно отметить, что ранее выбор знаков перед R_{\parallel} и R_{\perp} в формулах Френеля оставался спорным [3], точное описание амплитуд волн в них сочеталось с некоторой неопределенностью относительно их фаз. Вероятно, настоящий подход к данной проблеме дает окончательное решение этого вопроса.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Для расчетов коэффициентов R_{\perp} , R_{\parallel} и D_{\perp} , D_{\parallel} при различных углах падения волн на слой неоднородности автором была разработана компьютерная программа. В процессе работы в нее заносятся математическая модель слоя и параметры, определяющие поляризацию, угол падения волны на слой неоднородности и частоты волн, для которых должен быть произведен расчет. Напомним, что R_e и D_e — величины комплексные, несущие в себе информацию об амплитудах и о фазах отраженной и проходящей волн. Меняя положение точек начала и конца интервала расчета вне слоя неоднородности, мы будем получать различные значения фаз у R_e и D_e , которые, однако, редко требуются на практике. Поэтому программа выполнена в варианте расчета квадратов модулей R_e и D_e (т. е. применительно к энергетическим исследованиям), хотя ее несложная корректировка позволяет получать и соответствующие полные комплексные величины.

Некоторые из результатов, полученных с помощью этой программы, приводятся ниже. Выбор типа переходного слоя и его масштабы брались применительно к задачам ионосферных исследований, но вся картина явлений, конечно, сохраняется при использовании данных расчетов и для иных применений, если соблюдены заданные отношения между масштабами неоднородностей и длиной волны излучения.

Наличие данной программы дает возможность оперативного расчета практически неограниченного числа конкретных численных примеров. Здесь же мы приведем лишь два из них: влияние на поле слоев неоднородности ионизации в формах гауссоиды (первый пример) и одного периода синусоиды (второй пример). В обоих случаях ширина слоя неоднородности бралась равной одному километру. Поглощение энергии в слоях не вводилось и бралась единая “фазовая” диэлектрическая проницаемость $\epsilon(z_1) = \epsilon(0)$. Поэтому ниже на соответствующих рисунках приводятся лишь зависимости R_{\perp} , R_{\parallel} от частоты, т. к. при таких условиях любые пары величин R и D оказываются связанными уравнением $R^2 + D^2 = 1$, вытекающим из закона сохранения энергии. Программа рассчитывает R и D независимо, что дает возможность использовать указанную связь между ними для оценки точности расчетов. Обычно она была в пределах

двух–трех процентов, и ее, несомненно, можно еще повысить в процессе совершенствования текста программы.

Графики для R_{\perp} при $\phi_1 \neq 0$ и для $R_{\perp} = R_{\parallel}$ при $\phi_1 = 0$ выполнены сплошными линиями, а для R_{\parallel} при $\phi_1 \neq 0$ — пунктирными.

А). Слой с неоднородностью ионизации формы $N = N_0 \exp \{-(3z)^2\}$ с $N_0 = 0,11 \cdot 10^6$ эл./см³. Диэлектрическая проницаемость рассчитывалась по формуле [2] $\epsilon = 1 - 3,18 \cdot 10^9 \cdot N / 4\pi^2 f^2$. Фоновое значение электронной концентрации на краях слоя (т. е. при $z = \pm 0,5$ км) бралось равным $N_0 \exp \{-(1,5)^2\}$. Полученные зависимости R_{\perp} и R_{\parallel} от частоты волн, соответствующие углам падения $\phi_1 = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ$, даны на рис. 2.

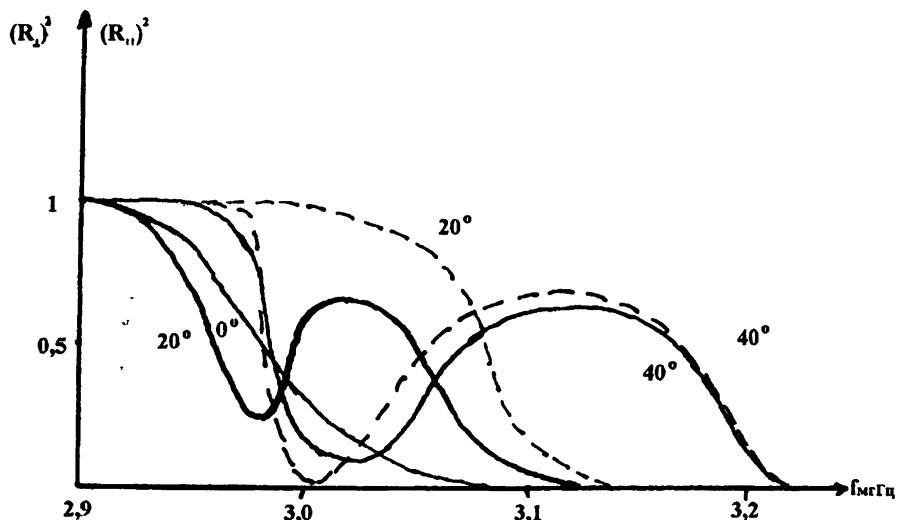


Рис. 2.

Б). Слой с неоднородностью типа $N = N_0 \sin [2\pi(z - 0,5)]$ для $N_0 = 0,11 \cdot 10^6$ эл./см³ при фоновом значении электронной концентрации в среде, равном 0. Здесь также расчет R_{\perp} и R_{\parallel} велся для $\phi_1 = 0^\circ, 20^\circ$ и 40° . Его результаты представлены на рис. 3.

Первый из рассчитанных случаев имеет форму и относительную величину неоднородности, близкие к типичным для устойчивых слоев неоднородности среды, а второй — для разного рода ее нестационарных возмущений (например, при плаэменных колебаниях в ионизованных средах, при вариациях плотности среды распространения звуковых или гравитационных волн и т. д.). Видно, что отличия между R_{\perp} и R_{\parallel} (а, следовательно, также и между D_{\perp} и D_{\parallel}) при $\phi_1 \neq 0$ достаточно существенны, что необходимо учитывать как при расчетах полей волн в средах с неоднородностями заданного вида, так и в обратных задачах — при диагностике этих неоднородностей среды с помощью экспериментального исследования распространяющихся в ней волн.

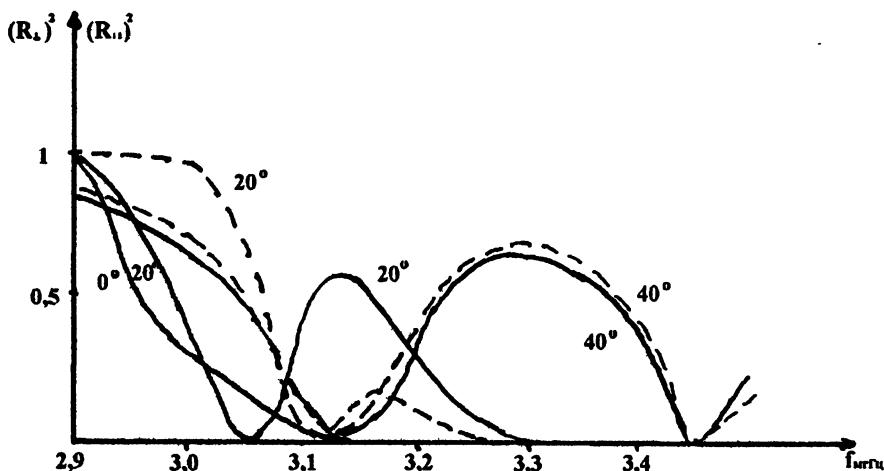


Рис. 3.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

- Погорелов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 4. С. 435–442.
- Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1960. С. 224, 263, 277.
- Fundamental formulas of physics / ed. D. H. Menzel. — New York, 1955. Р. 419. (перевод: Основные формулы физики / под ред. Д. Мензела. — М.: ИЛ, 1957. С. 357.).

Институт прикладной геофизики,
г. Москва

Поступила в редакцию
19 февраля 1996 г.

THE REFLECTION AND TRANSMISSION COEFFICIENTS OF
ELECTROMAGNETIC WAVES WITH DIFFERENT POLARIZATIONS
FOR AN INHOMOGENEOUS ONE-DIMENSIONAL LAYER IN THE
MEDIUM

V. I. Pogorelov

The strict formulae of the reflection and transmission coefficients are obtained for electromagnetic waves with an arbitrary polarization in the medium, where a one-dimensional transitional layer with an arbitrary cross-section profile separates two parts of the medium with different dielectric permittivities. These formulae include the functions which must be numerically calculated in every concrete case by means of the computer calculation of the second order differential equation. Therefore this work gives the method of calculations of the reflection and transmission coefficients. It is easy and fast. The results of numerical illustrative computations are presented. There has been given a transition to the limit case of a sharp boundary between two media (the Fresnel's case).

УДК 533.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕСТАЦИОНАРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Г. И. Григорьев, О. Н. Савина, В. В. Тамойкин

Анализируется устойчивость звуковых волн в среде, движущейся с переменной во времени скоростью. Получен и проанализирован критерий нестабильности этих волн для слабой модуляции скорости среды. Показано, что при распространении в условиях параметрического резонанса возникающие гармоники имеют дополнительный сдвиг по частоте.

В работе [1] рассмотрено излучение и распространение звуковых волн в среде, движущейся с переменной во времени скоростью. Исследование проводилось на основе анализа волнового уравнения для давления p (или плотности ρ)

$$\frac{d^2 p}{dt^2} - c^2 \Delta p - \frac{du_0}{dt} \nabla p = 0. \quad (1)$$

Аналогичное уравнение для смещения ξ имеет вид

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \xi - \frac{du_0}{dt} \operatorname{div} \xi = 0. \quad (2)$$

При записи (1)–(2) введены обозначения: c — адиабатическая скорость звука, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0(t) \nabla$.

Принимая скорость u_0 направленной по оси x , полагаем, что u_0 меняется по гармоническому закону

$$u_0(t) = u_1 + u_2 \sin \Omega t.$$

Такое движение среды может возникать под действием внешней силы с плотностью $F_{0x} = \rho_0 \Omega u_2 \cos \Omega t$, либо являться следствием прохождения волн с большими по сравнению с длиной звуковой волны основной гармоники пространственными масштабами.

Вводя замену переменных

$$\{p, \xi\} = \{\tilde{p}, \tilde{\xi}\} \exp[i k_x x + i k_y y + i \alpha z - ik_x \int u_0(t) dt], \quad (3)$$

из (1) приходим к уравнению Матье

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} + \omega_0^2 (1 - h \cos \Omega t) \tilde{p} = 0, \quad (4)$$

где $\omega_0^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2)$, $h = ik_x u_2 \Omega / \omega_0^2$.

В дальнейшем параметр h будем считать малым $|h| \ll 1$. При выполнении условия параметрического резонанса

$$\Omega = m\omega_0 \quad (m = 2, 4, \dots) \quad (5)$$

требование $|h| \ll 1$ сводится к неравенству $(mu_2/c) \sin \theta \ll 1$, где θ — угол между волновым вектором \mathbf{k} волны и осью x декартовой системы координат (x, y, z) .

Запишем решение уравнения (4) в виде [2]

$$\tilde{p} = A(t) \exp(i\omega t) + B(t) \exp(-i\omega t). \quad (6)$$

Предполагая $A(t)$ и $B(t)$ медленными функциями времени, в условиях первого резонанса $\Omega = 2\omega_0 + \epsilon$ ($\epsilon \ll \omega_0$), когда $\ddot{A} \ll \omega_0 \dot{A}$, $\ddot{B} \ll \omega_0 \dot{B}$, имеем

$$\dot{A} \approx \frac{ik_x u_2 \Omega}{4\omega_0} B \exp(i\epsilon t),$$

$$\dot{B} \approx \frac{ik_x u_2 \Omega}{4\omega_0} A \exp(i\epsilon t).$$

Для $A(t)$ и $B(t)$ из последних двух соотношений получаем

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k_x^2 u_2^2 \Omega^2}{16\omega_0^2} \right\} (A, B) = 0. \quad (7)$$

Записывая решение (7) в виде $A, B \sim \exp(st)$, находим

$$s = \pm \frac{ik_x u_2 \Omega}{4\omega_0}. \quad (8)$$

Полученный результат означает, что решение уравнения (4) имеет устойчивый характер, т.е. не происходит раскачки звуковых волн из-за пульсационной составляющей скорости среды при малых значениях чисто мнимого параметра h и выполнении резонансных условий.

Проведённое ранее авторами [1] исследование распространения и излучения звуковых волн в среде с пульсационной составляющей скорости ветра (без учёта члена $\frac{du_0}{dt} \nabla p$ в волновом уравнении (1)) показало, что кроме основной частоты $\omega_0 = c(k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2)^{1/2}$, задаваемой источником, генерируемые им возмущения содержат гармоники, сдвинутые от ω_0 на величину $\pm \Omega$. Учёт члена $\frac{du_0}{dt} \nabla p$ в (1) приводит, как показано выше, к дополнительному частотному сдвигу на величину

$$\Delta\omega = \frac{k_x u_2 \Omega}{4\omega_0} = \frac{k_x u_2}{2}. \quad (9)$$

При использованном в вычислениях в [1] условии $\alpha = (k_x u_2 / \Omega) \ll 1$ $\Delta\omega \ll \Omega$.

Путём замены $t = 2\tau/\Omega$ уравнение (4) можно привести к стандартному виду, используемому в [3]:

$$\frac{d^2\tilde{p}}{d\tau^2} + (a \cos 2\tau + \lambda)\tilde{p} = 0, \quad (10)$$

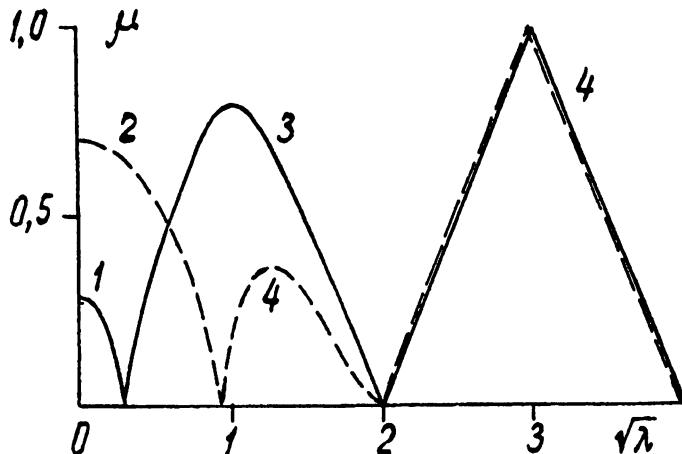
где $a = -4ik_x u_2 / \Omega$, $\lambda = 4\omega_0^2 / \Omega^2$. Решение этого уравнения ищется стандартным способом в виде разложения в ряд [3]

$$\tilde{p} = \exp(\mu\tau) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(2ik\tau). \quad (11)$$

Подстановка (11) в (10) приводит к бесконечной системе однородных линейных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если характеристический показатель μ выбирается так, чтобы при малых a выполнялось следующее условие:

$$\operatorname{ch}(\pi\mu) = 1 - 2 \sin^2(\pi\sqrt{\lambda}/2) - \frac{\pi a^2}{4(1-\lambda)\sqrt{\lambda}} \sin(\pi\sqrt{\lambda}) + O(a^4). \quad (12)$$

При записи (12) учитывалось, что аналогичные соотношения в известных нам монографиях [3, 4] приведены с опечатками, которые выявлены авторами при выводе этой зависимости.



Действительная и мнимая части характеристического показателя $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ в зависимости от $\sqrt{\lambda}$ при различных значениях параметра α .
 1. μ_1 при $\alpha = 0,1$; 2. μ_1 при $\alpha = 0,3$; 3. μ_2 при $\alpha = 0,1$; 4. μ_2 при $\alpha = 0,3$.

Анализ соотношения (12) показывает, что при $\lambda = 1$, т.е. при $\Omega = 2\omega_0$, значения μ являются чисто мнимыми, следовательно отсутствует экспоненциальный рост решения (см. рисунок).

Численное исследование (12) приводит к заключению, что раскачка колебаний возможна лишь в окрестности частот $\omega_0 = 0$. Для частот, соответствующих условию (4), раскачка колебаний отсутствует, по крайней мере, при малых значениях параметра a .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов: 95-02-05001, Григорьев Г. И., Тамойкин В. В.; 96-05-64277, Савина О. Н.).

ЛИТЕРАТУРА

- Григорьев Г. И., Савина О. Н., Тамойкин В. В. Распространение и излучение звуковых волн в нестационарно движущейся среде // Препринт № 383. — Нижний Новгород: НИРФИ, 1994. — 16 с.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Механика. — М.: Наука, 1965. Т. 1. С. 103.
- Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1967. Т. 3. С. 146.
- Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: ИЛ, 1950. С. 533.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
Нижегородский государственный
технический университет

Поступила в редакцию
17 октября 1995 г.

ON THE STABILITY OF ACOUSTIC WAVES PROPAGATING IN NONSTATIONARY MOVING MEDIA

G. I. Grigor'ev, O. N. Savina, V. V. Tamoikin

Stability of acoustic waves is analyzed in a medium moving with a velocity variable in time. A criterion of these wave instability has been obtained and analyzed for weak modulation of the medium velocity. It is shown, that in propagation under the condition of the parametric resonance, the harmonics occurred have an additional frequency shift.

УДК 551.521.3

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ СКОРОСТИ

Г. В. Джандиери, Ж. М. Диасамидзе, В. Г. Джандиери

В работе получено выражение тензора эффективной диэлектрической проницаемости в среднем неподвижной нестационарной среды. Показано, что быстрые временные пульсации скорости приводят к нарастанию среднего поля волн и увеличению скорости распространения электромагнитной волны. Проводится сравнение поверхностей частотных спектров мощностей рассеянного поля для гауссовой и диффузационной составляющих соленоидального поля скоростей с использованием ЭВМ. Показано, что с увеличением пульсации скорости в частотном спектре, соответствующем диффузационной корреляционной функции, возникают "провалы".

Распространению волн в случайно-неоднородных средах посвящено большое количество работ, где, в основном, рассматриваются пространственно-временные флуктуации диэлектрической проницаемости и проводимости [1, 2].

Настоящая работа посвящена рассеянию электромагнитных волн на флуктуациях скорости движения, а диэлектрическая проницаемость (плотность) среды постоянна.

1. Используя материальные соотношения Минковского и уравнения Maxwella, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\varepsilon - 1) \operatorname{rot} [\vec{E} \vec{v}] + \right. \\ \left. + \vec{E} (\operatorname{grad} \varepsilon \cdot \vec{v}) - \vec{v} (\operatorname{grad} \varepsilon \cdot \vec{E}) \right\} = -\frac{\varepsilon - 1}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\vec{v} \vec{H}] . \quad (1) \end{aligned}$$

Решение уравнения (1) проводится методом возмущения по канеровской схеме замыкания уравнений. Выражение для рассеянного поля в среднем неподвижной среды можно записать через флуктуации скорости \vec{v}_1 :

$$\begin{aligned}
E_i^{(1)}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{c_*^2} \int_{-\infty}^t dt' \int_V d\vec{r}' M(\vec{r}') \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} d\omega \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 \right)^{-1} \left(\delta_{ij} - \frac{c_0^2}{\omega^2} k_i k_j \right) \times \\
& \times \left\{ k_m^0 E_j^0 \left(\omega_0 v_{1m} + i \frac{\partial v_{1m}}{\partial t'} \right) + i\omega_0 \left(E_m^0 \frac{\partial v_{1j}}{\partial x'_m} - E_j^0 \frac{\partial v_{1m}}{\partial x'_m} \right) + E_j^0 \frac{\partial^2 v_{1m}}{\partial t' \partial x'_m} - \right. \\
& - E_m^0 \frac{\partial^2 v_{1j}}{\partial t' \partial x'_m} + \frac{1}{c_0} (n_j E_m^0 - n_m E_j^0) \left(\frac{\partial^2 v_{1m}}{\partial t'^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial v_{1m}}{\partial t'} - \omega_0^2 v_{1m} \right) \left. \right\} \times \\
& \times \exp [i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t') + i\vec{k}_0 \vec{r}' - i\omega_0 t'], \tag{2}
\end{aligned}$$

V — объем рассеивающей среды, $M(\vec{r}') = 1$ внутри рассеивающего объема и $M(\vec{r}') = 0$ вне его; \vec{k}_0 и ω_0 — волновой вектор и частота одной спектральной компоненты средней составляющей электрического поля; $c_0^2 = c^2/\epsilon$, $c_*^2 = c^2/(\epsilon - 1)$. Считаем, что турбулентность в статистическом смысле однородна, изотропна и стационарна. Тензор диэлектрической проницаемости хаотически неоднородной среды [3], линейно связывающий спектральные компоненты средней электрической индукции и среднего электрического поля, примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\vec{k}_0, \omega_0) = & \epsilon \left[1 - 2 \frac{(\epsilon - 1)^2}{\epsilon^2} \frac{\langle v^2 \rangle}{c_0^2} \right] \delta_{ij} - \\
& - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{(\epsilon - 1)^2}{\epsilon} \frac{k_\ell^0}{\omega_0 c_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} (n_\ell W_{ij}^0 - n_i W_{\ell j}^0 + \delta_{ij} n_m W_{\ell m}^0 - \delta_{\ell j} n_m W_{im}^0) - \\
& - \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{(\epsilon - 1)^2}{\epsilon} \frac{1}{c_0^2} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty d\vec{\rho} d\vec{k} d\omega \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 \right)^{-1} \times \\
& \times \left\{ \frac{c_0 k_\ell^0}{\omega_0} (k_i k_p n_p W_{\ell j} + k_\ell k_j n_m W_{im} - k_i k_j n_m W_{\ell m} - k_\ell k_p n_p W_{ij}) + \right. \\
& + k_i k_j W_{pp} + k_n k_m \delta_{ij} W_{nm} - k_i k_m W_{jm} - k_n k_j W_{in} + k_n k_j^0 W_{in} - k_i k_j^0 W_{pp} + \\
& + \omega \left[\frac{k_\ell^0}{\omega_0} k_m (\delta_{ij} W_{\ell m} - \delta_{\ell j} W_{im}) + \frac{k_p}{c_0} (\delta_{ij} n_m W_{pm} - n_i W_{pj}) \right] + \\
& + \omega^2 \frac{k_\ell^0}{\omega_0 c_0} (n_\ell W_{ij} - n_i W_{\ell j} + \delta_{ij} n_m W_{\ell m} - \delta_{\ell j} n_m W_{im}) + \\
& + \frac{1}{\omega} \frac{k_\ell^0 k_j^0 c_0^2}{\omega_0} k_p (k_\ell W_{ip} - k_i W_{\ell p}) - \frac{1}{\omega^2} c_0^2 k_i k_j k_n k_p W_{np} \left. \right\} \times \\
& \times \exp [i(\vec{k} - \vec{k}_0) \vec{\rho} - i(\omega - \omega_0) \tau]. \tag{3}
\end{aligned}$$

Здесь: $W_{ij}^0 \equiv W_{ij}(\vec{k} - \vec{k}_0, 0)$, $W_{ij} \equiv W_{ij}(\vec{k} - \vec{k}_0, \tau)$ — пространственный спектр произвольной корреляционной функции флюктуации скорости.

В качестве примера рассмотрим гауссовый корреляционный тензор соленоидального векторного поля скоростей

$$W_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{\pi^2}{4} \left\langle v^2 \right\rangle (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) \ell^5 T \exp \left[-\frac{(k\ell)^2}{4} - \frac{(\omega T)^2}{4} \right], \quad (4)$$

ℓ и T — характерные пространственный и временной масштабы пульсации скорости.

Затухание или нарастание среднего поля волны в нестационарной среде определяется мнимой частью [3]. Поперечная, относительно распространения волны ($\vec{k}_0 = k_0 \hat{z}$), составляющая тензора ϵ_{ij}^{eff} в случае мелкомасштабных неоднородностей ($k_0 \ell < 1$) выражается через гиперболические функции и интеграл вероятности от чисто мнимого аргумента. При $T \rightarrow \infty$ и достаточно быстрых пульсациях скорости, когда выполняются неравенства $\ell \ll c_0 T$ и $\omega_0 T \ll 1$, формулы заметно упрощаются

$$\begin{aligned} \text{Im } \epsilon_{eff}^{tr}(k_0, \omega_0) &= 5\pi(\varepsilon - 1)^2 \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \left(\frac{\omega_0 \ell}{c_0} \right)^5 \exp \left(-\frac{k_0^2 \ell^2}{4} \right), \\ \text{Im } \epsilon_{eff}^{tr}(k_0, \omega_0) &= -120 \pi^{3/2} (\varepsilon - 1) \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} (k_0 \ell) \left(\frac{\ell}{c_0 T} \right)^4 \exp \left(-\frac{k_0^2 \ell^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, в чисто пространственном случае волна среднего поля затухает, а временные флуктуации скорости среды, в отличие от флуктуации диэлектрической проницаемости [1], приводят к незначительному нарастанию ее. Это можно объяснить параметрическим взаимодействием электромагнитной волны с пульсациями скорости.

Знание действительной части ϵ_{eff}^{tr} позволяет вычислить скорость распространения электромагнитной волны в случайно-неоднородной нестационарной среде

$$v_* = \frac{c_0}{2} \left[1 + 160 \pi \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon^2} \langle v^2 \rangle \frac{T^2}{\ell^2} \right]. \quad (6)$$

Быстрые, по сравнению с частотой волны среднего поля, временные флуктуации скорости среды приводят к увеличению ее скорости.

2. Одной из важных статистических характеристик рассеянного поля является частотный спектр мощности. В данном сообщении ограничимся случаем линейной поляризации поперечной волны среднего поля, когда вектор \vec{E}_0 перпендикулярен плоскости рассеяния (\vec{k}_0, \vec{z}),

$$\Phi_{ij}^\perp(\vec{r}, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \left\langle E_i^{(1)}(\vec{r}, t) E_j^{(1)*}(\vec{r}, t_1) \right\rangle \exp(-i\Omega t_0), \quad (7)$$

$t_0 = t_1 - t$, $\vec{\alpha} = \vec{r}/|\vec{r}|$ — единичный вектор, направленный от начала координат внутри рассеивающего объема до точки наблюдения. Для сравнения целесообразно рассмотреть также диффузионный корреляционный тензор соленоидального векторного поля скоростей, учитывающий перемешивание неоднородностей со среднеквадратичной скоростью $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \sim \sim \ell/T$. Его пространственно-временной спектр имеет вид [4]

$$W_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{\pi^2}{2} \langle v^2 \rangle \frac{T\ell^2}{k^3} \left[1 + \frac{1}{2} (k\ell)^2 - 2 \frac{(\omega T)^2}{(k\ell)^2} \right], \times \\ \times (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) \exp \left[-\frac{(k\ell)^2}{4} - \frac{(\omega T)^2}{(k\ell)^2} \right]. \quad (8)$$

Не выписывая аналитических выражений компонентов частотного спектра мощности рассеянного поля в зоне Фраунгофера вдали от рассеивающего объема, приведем результаты численного расчета, отражающие пространственную эволюцию деформаций поверхностей функций Φ_{xx}^\perp по мере роста частоты пульсации скорости в виде рис. 1, 2.

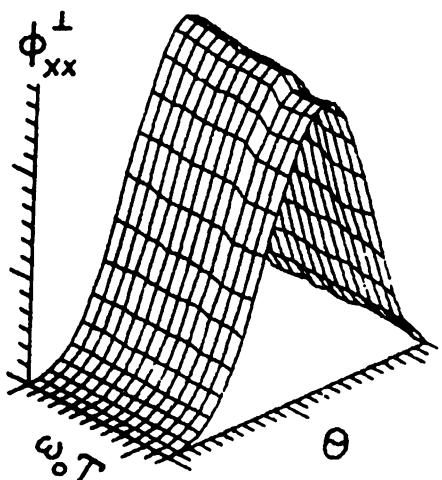


Рис. 1. Модель Гаусса.

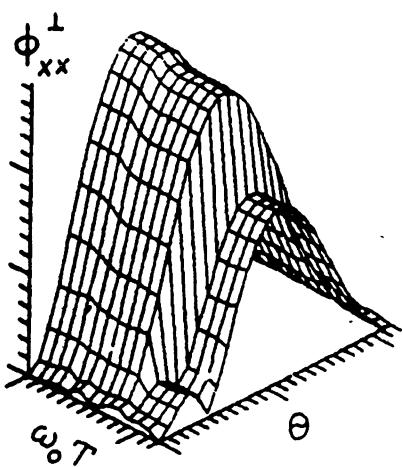


Рис. 2. Диффузационная модель.

Зависимость Φ_{xx}^\perp от угла θ задается при фиксированном значении частотного параметра $(\Omega/\omega_0) = 0,5$. Временной параметр $\omega_0 T$ меняется в пределах $10^{-4} \div 1$, а $k_0 \ell = 0,5$. Анализ показывает, что спектр рассеянного поля при наличии диффузии неоднородностей более чувствителен к временным вариациям флуктуации скорости, чем в случае гауссовой модели. В частности, в интервале углов $36^\circ < \theta < 40^\circ$ появляется "провал", а для функции Φ_{yz}^\perp — дополнительный провал в пределах $90^\circ < \theta < 95^\circ$ (θ — угол, образованный векторами \vec{k}_0 и $\vec{\alpha}$). Поскольку $T \sim \ell / \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, это относится к случаю $\sqrt{\langle v^2 \rangle} > c_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бегиашвили Г. А., Гавриленко В. Г., Джандиери Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 6. С. 948.
2. Гвелесиани А. И., Джандиери Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 5. С. 631.
3. Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 3. С. 356.
4. Джандиери Г. В., Гомидзе Н. Х., Сурманидзе З. Дж. Труды ГТУ. — Тбилиси, 1995. С. 73.

Грузинский технический
университет, г. Тбилиси, Грузия

Поступила в редакцию
29 февраля 1996 г.

**TO THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING IN
MEDIA WITH SPACE-TIME FLUCTUATIONS OF THE VELOCITY**

G. V. Dzhandieri, Zh. M. Diasamidze, V. G. Dzhandieri

The paper presents an expression for the tensor of the effective dielectric permittivity at the average motionless nonstationary medium. It is shown, that quick time pulsations of the velocity result in the increase of the average wave field and the increase of the electromagnetic wave propagation. A comparison is made between the surfaces of frequency spectra of the scattered field powers for the Gaussian and diffusion components of the solinoidal field velocities with the use of the computer. It is shown, that with the increase of the velocity pulsations in the frequency spectrum, corresponding to the diffuseion correlation function, "dips" occur.

УДК 550.383

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДУЛЯЦИЯ МОЩНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Г. Н. Бурлак, В. В. Гриимальский, К. Ишкабулов

Показана возможность нелинейного захвата ленгмюровской волны в области слабой неоднородности плазмы при параметрическом взаимодействии с мощной электромагнитной волной. В надкритических условиях при наличии диссипации и неидеальности отражения возникают пространственно-временные корреляции амплитуд и, далее, формирование волновых солитонных структур. В системе возникают мощные регулярные осцилляции, что приводит к гигантской модуляции импульса накачки. При дальнейшем увеличении надпороговости увеличивается вклад ленгмюровской нелинейности, в результате чего уединенные волны резко усиливаются и сжимаются.

При нелинейном взаимодействии сильного электромагнитного излучения с реальной плазмой важен учет долгоживущих по сравнению с длительностью импульса электромагнитной накачки, неоднородностей плотности. Область плазмы между пиками плотности (локальная яма) становится подобной резонатору с полупрозрачными границами, где в результате параметрического взаимодействия с электромагнитной накачкой возникает раскачка ленгмюровских волн с быстрым накоплением нелинейных эффектов.

Пусть в окрестности пологого дна ямы длины L электромагнитные волны с частотами ω_1, ω_2 резонансным образом взаимодействуют с ленгмюровской волной разностной частоты $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, $\int_0^L |k_1 - k_2 - K| dz < 1$. Считаем, что $\Omega > \omega_p$, где ω_p - плазменная частота, при этом за пределами области условия параметрической связи не выполняются и прошедшие ленгмюровские волны из-за поглощения быстро затухают. В безграничной системе при надкритических условиях здесь возникает неустойчивость [1,2], а, поскольку скорости волн резко отличаются, то неустойчивость такого рода приводит к усилению медленных возбуждений и формированию трехволновых солитонов, подобно [3]. Следует отметить, что в данной системе наряду с нелинейностью параметрического взаимодействия важна и собственная нелинейность ленгмюровской подсистемы. Реально эта нелинейность проявляется после нарастания амплитуд, приводит к модуляционной неустойчивости и далее к формированию НУШ-солитонов (НУШ - нелинейное уравнение Шредингера). Взаимное влияние обоих указанных

процессов с учетом поглощения и неидеальности отражения от границ вызывает сложную пространственно-временную солитонную динамику, что проявляется в гигантской модуляции проходящего излучения.

Ввиду конечной величины барьера, ленгмюровская волна будет частично отражаться на концах $z = 0, L$ с коэффициентами отражения $R_{0,1} < 1$. В простейшем, рассматриваемом ниже случае, обратная (отраженная) ленгмюровская волна, из-за отсутствия синхронизма с лазерной накачкой не взаимодействует, однако испытывает самовоздействие и кросс-модуляцию со стороны прямой волны.

Пренебрегая по параметру $(v/c) \ll 1$ (v и c — скорости ленгмюровской и электромагнитных волн соответственно) временными производными в уравнениях для электромагнитных волн, безразмерные уравнения движения для комплексных амплитуд запишем в виде

$$\begin{aligned} [\partial_\zeta + \partial_\tau + ig\partial_\zeta^2 + i\alpha(|A_3|^2 + 2|A_4|^2) + \gamma]A_3 &= A_1 A_2^*, \\ [-\partial_\zeta + \partial_\tau + ig\partial_\zeta^2 + i\alpha(2|A_3|^2 + |A_4|^2) + \gamma]A_4 &= 0, \\ \partial_\zeta A_1 &= -A_2 A_3, \quad \partial_\zeta A_2 = A_1 A_3^*, \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными и начальными условиями $A_3(0, \tau) = f_3(\tau) + R_0 A_4(l, \tau)$, $A_4(l, \tau) = R_1 A_3(l, \tau)$, $A_3(\zeta, 0) = 0$, $A_1(0, \tau) = f_1(\tau)$, $A_2(0, \tau) = 0$. Здесь $\partial_\zeta = \partial/\partial\zeta$, $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$, A_1 и A_2 — амплитуды накачки и холостой электромагнитных волн, A_3 и A_4 — амплитуды прямой и отраженной ленгмюровских волн, $\zeta = z/l_n$ и $\tau = tv/l_n$ — пространственная и временная переменные соответственно, $l = L/l_n$, $f_{1,3}(\tau)$ определяются входными амплитудами волн при $\zeta = 0$, $\gamma = \Gamma l_n$, Γ — коэффициент затухания, l_n — нелинейный пространственный масштаб, g — параметр дисперсии, α — параметр собственной нелинейности ленгмюровской подсистемы. Поглощение электромагнитных волн в области прозрачности считается малым. В данной задаче параметр γ имеет смысл параметра надкритичности.

В случае малой начальной затравки (что эквивалентно $\alpha, g = 0$ в (1)) относительная фаза волн быстро устанавливается и амплитуды можно считать вещественными. В этом случае с учетом соотношений $A_1^2 + A_2^2 = f_1^2(\tau)$, $A_1 = f_1(\tau) \cos(\phi)$, $A_2 = f_1(\tau) \sin(\phi)$, $A_3 = \partial\phi/\partial\zeta$ порядок системы (1) можно понизить. После исключения обратной волны замкнутое уравнение для A_3 принимает следующий вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\partial}{\partial\tau} + \gamma \right) A_3 = 0,5 f_1^2(\tau) \sin(2\varphi), \quad \varphi = \int_0^\zeta A_3(\zeta, \tau) d\zeta. \quad (2)$$

Важно, что граничная модуляция накачки входит в (2) как переменный коэффициент при нелинейности, что открывает возможность управлять режимами нелинейной системы.

Отметим, что заменой $u, v = b(\zeta - \tau) \pm (1/b) \int g^2(\tau) d\tau, \psi = 2\varphi, b = \text{const}$ систему (2) можно свести к уравнению типа синус-Гордона

$$\partial^2 \psi / \partial u^2 - \partial^2 \psi / \partial v^2 + [\gamma b / g^2(\tau)] (\partial \psi / \partial u - \partial \psi / \partial v) = \sin(\psi), \quad (3)$$

что позволяет при $\gamma = 0$ интерпретировать стационарные возбуждения в системе как солитоны.

Однако в ограниченной среде это не приводит к упрощению, поскольку краевые условия при этом следует выполнять на бегущих границах. К тому же наличие поглощения и неидеальность отражения не позволяют воспользоваться свойствами, связанными с полной интегрируемостью этого уравнения [4, 5]. На сложность динамики указывает также то обстоятельство, что в режиме неустойчивости при $\gamma = 0$ помимо солитонов данная модель имеет и нестационарные решения с автомодельностью $\sim (u^2 - v^2)$ отличной от автомодельности бегущей волны $\sim (u \pm v)$ [4].

Из (2) определим условия неустойчивости, полагая $|A_3|, |\varphi| \ll 1$ и $\sim \exp(i(\omega\tau - k\zeta))$. После несложных вычислений пороговое условие можно записать в виде $\gamma < \gamma_{th} = -0,75\beta + 0,25Im\Delta^{1/2}$, где $\beta = -\ln(R^2)/1 > 0$, $\Delta = (2n\pi/1 + i\beta)^2 - 8$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При малых $\beta \ll 1$ должно быть $2^{1/2}1/\pi > n$. Минимальным порогом обладает мода с $n = 0$ (апериодическая неустойчивость), причем при $\beta \ll 1$ для нее $\gamma_{th} \approx 0,707$. Для общего случая при $n = 0$ пороговое условие запишем в размерном виде

$$E_0^2 > E_{th}^2 = (\alpha/Kk_2L^2)(2\Gamma L + \ln R^{-2})(\Gamma L + \ln R^{-2}). \quad (4)$$

Из (4), в частности, следует, что при уменьшении отражения порог имеет логарифмическую особенность, что связано с отсутствием собственных нелокализованных возбуждений при $R^2 = 0$ из-за выноса волн из области.

На начальном этапе, когда амплитуды ленгмюровских волн определяются малой шумовой затравкой, главную роль играет связь с электромагнитным полем. Однако при нарастании амплитуд волн начинает проявляться модуляционная неустойчивость ($\alpha, g \neq 0$), приводящая к изменению фаз волн и локальному выходу из условий синхронизма. На этом этапе необходимо учитывать оба механизма нелинейности на равных условиях.

Поскольку в общем случае получить аналитическое решение нелинейной системы (1) с граничными условиями весьма сложно, в работе был выполнен компьютерный эксперимент путем численного решения (1) при различных параметрах. Это позволило в единых рамках исследовать все стадии взаимодействия от начальной неустойчивости до развитого нелинейного режима.

Импульс накачки имел достаточно гладкие фронты, что позволило наблюдать различные динамические режимы. Для расчетов использовались

следующие величины: $f_1(\tau) = \exp(-a(\tau - 1/a)^2)$, $a = 0,0025$ -гауссов импульс падающей мощной электромагнитной волны, шум $f_3(\tau)$ моделировался равномерно распределенной на интервале $[0, f_{30}]$ случайной величиной, $f_{30} = 10^{-4}$, $A_{30} = 0$, $l = 5$ при различных α , g , R^2 и значениях параметра надкритичности γ от 0,7 до 0,001. Расчет проводился по схеме высокого порядка, точность контролировалась путем уменьшения шага сетки.

Наши расчеты обнаружили в зависимости от параметров различные динамические режимы: установление постоянной амплитуды ленгмюровской волны, а также возникновение мощных осцилляций на выходе системы уже при сравнительно небольших превышениях порога. Типичные картины пространственно-временной динамики представлены на рис. 1, 2. На рисунках временной интервал отвечает началу и центральной части импульса накачки, пространственный интервал — длина системы.

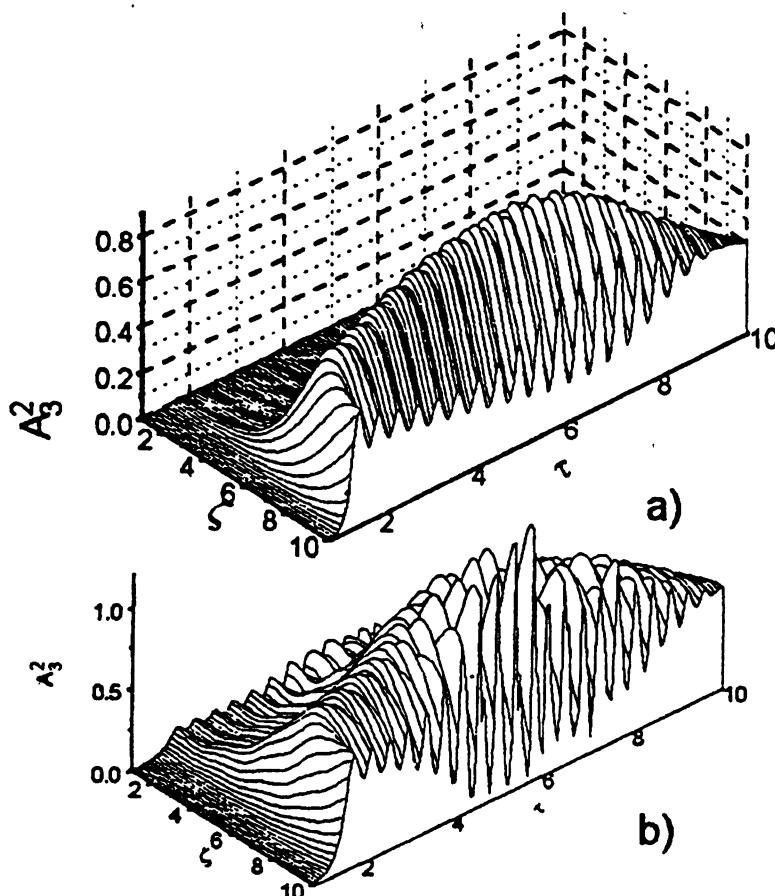


Рис. 1. Пространственно-временная динамика ленгмюровских солитонов $|A_3(\zeta, \tau)|^2$ при а) $R = 0,5$, $g = 0,1$; б) $R = 0,55$, $g = 0,2$, а также $\alpha = 0,4$, $\gamma = 0,1$.

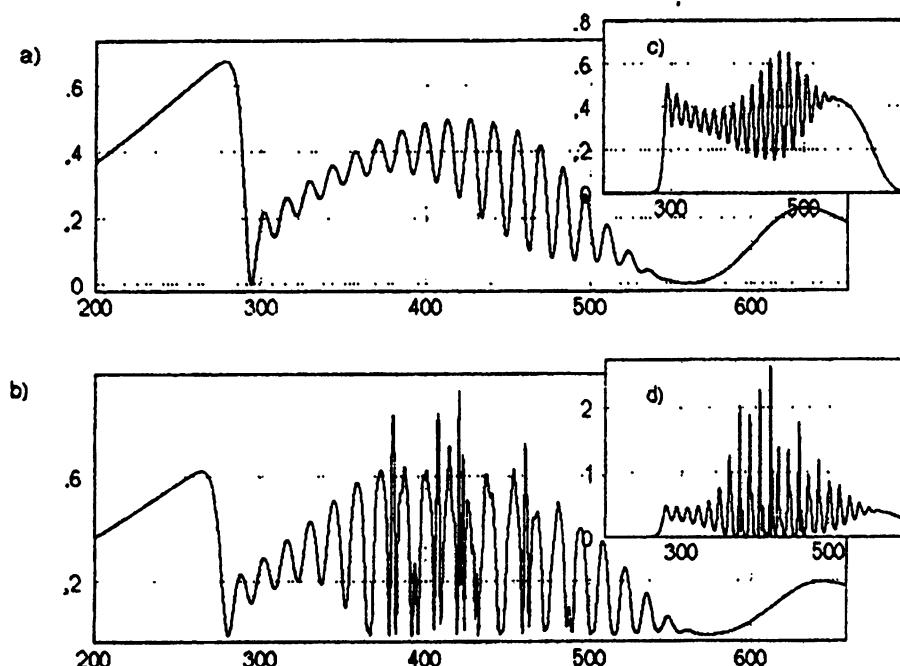


Рис. 2. Модуляция электромагнитной волны накачки $|A_1(l, \tau)|^2$ на выходе в функции времени τ при а) $R = 0,5$, $g = 0,1$; б) $R = 0,55$, $g = 0,2$, а также $\alpha = 0,4$, $\gamma = 0,1$. На вставках с), д) приведены соответствующие амплитуды ленгмюровской волны $|A_3(l, \tau)|^2$.

Поскольку граничная затравка достаточна мала, то, как показывает расчет, в докритических условиях при $\gamma > \gamma_{th}$ на выходе системы устанавливаются шумы малой амплитуды. При этом форма импульса накачки практически не изменяется.

Однако уже при слабой надкритичности выходной сигнал начинает быстро нарастать и в плаэме формируется широкий солитоноподобный импульс ленгмюровской волны. Этот импульс по мере продвижения к выходу замедляет движение и останавливается вблизи границы. Такой режим отвечает установлению стационарной генерации ленгмюровской волны. Отметим, что уже на этом этапе $\varphi(1) \sim \pi/2$ и, следовательно, пренебрегать нелинейностью взаимодействия нельзя.

При дальнейшем увеличении надпороговости стационарный режим становится неустойчивым и в системе развивается более сложная динамика. После зарождения с увеличением амплитуды импульс замедляется, приобретает стационарную форму и затем быстро выходит из области. Таким образом, солитоны начинают излучаться, однако в результате частичного переотражения вновь попадают на вход. Поскольку из-за затухания, неидеальности отражения, собственной нелинейности стационарная форма ленгмюровских импульсов не сохраняется, процесс

формирования солитонов начинается с новой фазы и, казалось бы, должен терять когерентность. однако, как показал расчет, это не так.

Для не слишком длинных областей переотраженные импульсы оказывают синхронизирующее воздействие. В системе возникает пространственно-временная корреляция и процесс генерации солитонов приобретает временную повторяемость. В результате на выходе возникают регулярные осцилляции амплитуд, а импульс накачки приобретает гигантскую периодическую модуляцию (рис.1а, 2а).

При $R^2 \propto 0,5$ такая динамика продолжается вплоть до умеренной надкритичности. Однако когда площадь ленгмюровских импульсов оказывалась больше критической, происходило резкое сужение и усиление солитонов (рис.1б, 2б). На рис.1б, начиная со времен порядка половины длительности импульса волны накачки, показано быстрое развитие модуляционной неустойчивости и формирование НУШ солитонов. Начиная с этого момента превалирует механизм самовоздействия (НУШ), а влияние параметрической нелинейности ввиду сильного изменения фаз и выхода из синхронизма с накачкой сводится к параметрическому усилению с эффективным коэффициентом усиления $\gamma_e > 0$. Поскольку в системе со слабым усилением НУШ-односолитонное решение имеет вид [4] $\exp(\gamma_e \zeta)/ch[\exp(\gamma_e \zeta)(\zeta - \tau)]$, это качественно соответствует наблюдавшейся нами динамике.

При большей надпороговости начинает сказываться нелинейность обоих механизмов, осцилляции становятся нерегулярными, а процесс формирования солитонов все более затуманным. При этом модуляция импульса волны накачки приобретает хаотический вид.

Итак, в рассмотренной выше среде ввиду поглощения и синхронизма с электромагнитным излучением ленгмюровские волны реально существуют лишь в области слабой неоднородности, что эквивалентно их нелинейному захвату этой областью. В слабо надкритическом режиме возникает пространственно-временная самоорганизация параметрически связанных волн, в результате которой на выходе возникают регулярные колебания. При этом прошедший импульс электромагнитной накачки приобретает гигантскую модуляцию, отражающую сложную динамику в системе. При увеличении амплитуды происходит переключение эффективного механизма нелинейности и в системе формируются или синус-Гордона или НУШ солитоны.

Отметим, что такие процессы могут происходить не только в лабораторной плазме, но и в лазерах с обратной связью [6] и в анизотропных кристаллах (с заменой ленгмюровской волны на звуковую). Однако наибольший интерес они могут вызывать при анализе спектра модуляции проходящего излучения при активных экспериментах в околоземной плазме [7-9]. Это может позволить получать важную информацию о локальных свойствах среды, поскольку рассмотренные выше неоднородно-

сти различных пространственных масштабов недавно зарегистрированы непосредственно [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988. — 303 с.
2. Cross M. C. and Hohenberg P. C. // Rev. Mod. Phys., 1993. V. 65 (part 2). P. 851.
3. Бурлак Г. Н., Гримальский В. В., Коцаренко Н. Я. // ЖЭТФ, 1986. Т. 90. С. 1487.
4. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983. — 294 с. (Lamb G. L., JR. Elements of soliton theory. — University of Arizona, 1980)
5. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П. и др. Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
6. Giacomelli G., Meucci R., Politi A., Arechi F. T. // Phys. Rev. Lett., 1994. V. 73. P. 1099.
7. Молчанов О. А. Ниизкочастотные волны в околоземной плазме. — М.: Наука, 1985.
8. Марков Г. А., Чугунов Ю. В. // Изв. ВУЗов Радиофизика, 1994. Т. 37. № 6. С. 799.
9. Фролов В. Л., Бойко Г. Н., Метелев С. А. и др. // Изв. ВУЗов Радиофизика, 1994. Т. 37. № 6. С. 909.
10. Гдалевич Г. Л., Губский В. Ф., Ижовкина Н. И. и др. // Космические исследования, 1994. Т. 32. С. 98.

Киевский национальный
университет, Украина

Поступила в редакцию
12 мая 1996 г.

NONLINEAR MODULATION OF A POWERFUL ELECTROMAGNETIC WAVE IN WEAKLY INHOMOGENEOUS PLASMA

G. N. Burlak, V. V. Grimal'skij, K. Ishkabulov

A possibility has been shown of Langmuir wave nonlinear trapping in a weakly inhomogeneous plasma under parametric interaction with a powerful electromagnetic wave. Under over-critical conditions in the presence of dissipation and nonideal reflection there appear space-time amplitude correlations and there a formation of wave soliton structures. The system gives rise to powerful regular oscillations that leads to a great modulation of the pumping pulse. With a further growth of the Langmuir nonlinearity increases resulting in amplification and compression of solitary waves.

УДК 621.371

ДВУМЕРНАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СНЧ—ДИАПАЗОНА В ВОЛНОВОДНОМ КАНАЛЕ ЗЕМЛЯ—ИОНОСФЕРА

B. B. Кириллов

Изложена поверхностная теория двумерного телеграфного уравнения. Описана методика получения параметров L и C этой теории по электромагнитному полю ведущей нормальной волны, ее постоянной распространения вместе с двумя первыми азимутальными производными. Для возбуждения волновода вертикальным и горизонтальным электрическими диполями определены сторонние источники двумерного телеграфного уравнения, которыми являются соответственно двумерно точечное стороннее напряжение и направленное точечное стороннее удельное напряжение. Связь эффективных источников с физическими не зависит практически от свойств ионосферы. Эффективный источник горизонтального диполя пропорционален земному поверхностному импедансу в месте расположения источника.

Распространение электромагнитных волн в приземном волноводном канале происходит в сложных условиях горизонтально и вертикально неоднородной анизотропной ионосфера. Электромагнитное поле и свойства среды зависят от всех трех пространственных координат. Задача традиционно рассматривается методом нормальных волн [1–4], который позволяет учесть произвольное вертикальное строение анизотропной ионосферы. Однако, рассмотрение горизонтальных неоднородностей наталкивается на практически непреодолимые трудности из-за сравнимости горизонтального масштаба неоднородности с длиной волны. Метод нормальных волн в общей форме не учитывает специфику распространения радиоволн СНЧ-диапазона, когда волновод оказывается тонким и среди нормальных волн выделяется одна, являющаяся аналогом кабельной волны в случае распространения между поверхностью Земли и ионосферой; остальные моды — местные и затухают на горизонтальном расстоянии порядка высоты волновода.

В работе [5] волновод Земля—ионосфера трактуется как сферический резонатор, верхняя стенка которого характеризуется горизонтально неоднородным анизотропным импедансом. Предполагая импеданс малым, его влияние на электромагнитное поле учитывается как возмущение поля идеального резонатора с бесконечно проводящими верхней и нижней стенками. На этом пути исследованы довольно сложные модели горизонтальных глобальных неоднородностей, не рассматриваемые ранее другими ме-

тодами. Основным недостатком метода является использование в СНЧ-диапазоне импедансной постановки задачи. Дело в том, что неоднородная ионосфера не имеет четко выраженной нижней границы. Область, существенная при отражении, простирается от окрестности высот, на которых токи смещения равны токам проводимости, до высот, где токи проводимости значительно больше токов смещения [6, 7]. Исключительно из-за влияния нижней части ионосферы импеданс неоднородного слоя зависит от вида поля, падающего снизу на ионосферу [6, 8]. Такое свойство импеданса проявляется в его зависимости от угла падения волны. Введение эффективной отражающей поверхности на различной высоте не дает в этом диапазоне частот значительное ослабление этой зависимости, что приводит к недопустимости импедансной постановки задачи.

Имеется двумерная теория распространения электромагнитных волн, в основу которой заложен факт выделенности одной нормальной волны [9, 10]. Задача сводится к интегрированию уравнения Гельмгольца на поверхности сферы (земная поверхность) для вертикальной компоненты вектора Герца g

$$\operatorname{div} \operatorname{Grad} g + k^2 S^2 g = 0, \quad (1)$$

$$(\operatorname{Grad} g)_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad (\operatorname{Grad} g)_\varphi = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta j_\theta + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j_\varphi,$$

где $\{r, \theta, \varphi\}$ — сферическая система координат, a — радиус Земли, k — волновое число, S — постоянная распространения ведущей нормальной волны, имеющая смысл синуса угла падения у земной поверхности. Для горизонтально неоднородного волновода под постоянной распространения в данной точке понимается постоянная распространения такого сферически слоистого волновода, свойства которого соответствуют реальной ионосфере на вертикали, проходящей через рассматриваемую точку.

Вертикальная компонента электрического поля E_z и горизонтальные компоненты магнитного поля B на поверхности Земли определяются соотношениями

$$E_z = i\omega S^2 g, \quad B_\theta = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi}, \quad B_\varphi = -\frac{1}{a} \frac{\partial g}{\partial \theta}.$$

Основное уравнение (1) двумерной теории носит эвристический характер и является непосредственным обобщением на горизонтально неоднородный волновод соотношения, являющегося точным для основной моды регулярного волновода. Оно имеет явные недостатки, заключенные в ее конструкции: из двух параметров (постоянная распространения и нормировочный интеграл) лишь постоянная распространения входит в уравнение; нормировочный интеграл определяет интенсивность источника и

соответствует месту расположения источника, что свидетельствует о нарушении теоремы взаимности.

Для модели волновода со скачкообразными изменениями свойств ионосферы считаются непрерывными функция $S^2 g$, нормальная производная функции g , т.е. E_r , и тангенциальная компонента магнитной индукции на поверхности Земли при переходе из одной области параметров нормальной волны в другую. В строгой электродинамической постановке задачи такая непрерывность должна быть на всей поверхности разрыва диэлектрической проницаемости, включая уровни внутри ионосферы. Границные условия, присущие дифференциальному уравнению (1), сохраняют непрерывность лишь на уровне земной поверхности. Такой исключительный выбор земной поверхности ничем не оправдан.

В работе [11] высказана идея о том, что распространение радиоволн СНЧ-диапазона в приземном волноводном канале можно трактовать как процесс распространения в двумерной длинной линии. Идея носила качественный характер и не получила развития на протяжении уже более двадцати лет.

Количественная теория сформулирована нами в [12] на основе дифференциальной формы уравнения сохранения электрического заряда в Земле. После интегрирования по вертикальной координате в Земле уравнение сохранения относительно поверхностной плотности заряда q и линейной плотности тока \mathbf{j} имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} - i\omega q = 0. \quad (2)$$

Зависимой переменной является напряжение $u(\theta, \varphi)$, определяемое интегралом от вертикальной компоненты электрического поля E_r по радиальной переменной r на промежутке $[0, \infty]$. Поверхностная плотность заряда q связана с напряжением u соотношением

$$q = Cu, \quad u \equiv \int_0^\infty E_r dr, \quad (3)$$

где C — поверхностная плотность емкости. Линейная плотность тока \mathbf{j} связана с поверхностным градиентом напряжения соотношением

$$i\omega L \mathbf{j} = \operatorname{Grad} u, \quad (4)$$

где L — локальная индуктивность в общем случае анизотропной ионосферы, описываемая матрицей второго порядка. Материальные соотношения (3) и (4) преобразуют дифференциальное уравнение сохранения (2) в уравнение второго порядка относительно напряжения u

$$\operatorname{div} L^{-1} \operatorname{Grad} u + \omega^2 C u = 0. \quad (5)$$

Электромагнитное поле на поверхности Земли выражается через поверхностную плотность заряда q и линейную плотность тока \mathbf{j} по формулам [12]

$$\epsilon_0 E_r = q, \quad H_\varphi = -j_\theta, \quad H_\theta = j_\varphi \quad \text{при } r = a$$

Если материальные соотношения (3) и (4) берутся на реальном электромагнитном поле, то дифференциальное уравнение (5) превращается в тождество. Оно становится уравнением, с помощью которого можно описывать распространение электромагнитных волн, если поверхностная плотность емкости C и локальная индуктивность L определены заранее и не зависят от конкретного поля. Уравнение (5) обобщает уравнение длинных линий, называемое также телеграфным уравнением на двумерный случай. В такой модели материальных соотношений двумерную теорию, описываемую уравнением (5), можно сопоставить с теорией, выражаемой уравнением (1). В первом случае уравнение (1) написано относительно вертикальной компоненты вектора Герца g , в нашем случае — уравнение (5) — относительно напряжения u . В первом случае лишь квадрат постоянной распространения S^2 входит в коэффициент дифференциального уравнения. В уравнение (5) входят два параметра — L и C , получаемые по электромагнитному полю нормальной волны, причем один из них — L — содержится внутри дифференциального оператора.

При скачкообразном изменении свойств ионосферы непрерывными остаются напряжение u и нормальная компонента поверхностного тока j_n . Таким образом, и в нашем случае непрерывной остается тангенциальная по отношению к поверхности разрыва компонента магнитного поля на поверхности Земли, которая выделяется тем, что совпадает с нормальной компонентой земного тока. Непрерывность по вертикальной компоненте электрического поля реализуется только в среднем по высоте.

В работах [12–14] проведена оценка точности метода двумерного телеграфного уравнения. Показано, что даже в случае резкого изменения свойств среды, когда неизбежно возбуждаются местные волны, не учитывающие моделью материальных соотношений, электромагнитные поля в точной электродинамической постановке и по методу двумерного телеграфного уравнения совпадают достаточно точно при удалении от границы разрыва свойств среды на высоту волноводного канала как источника, так и точки наблюдения.

В диапазоне СНЧ сферическая слоистость слабо проявляется на параметрах L и C , поэтому естественным является определение этих параметров по электромагнитному полю основной нормальной моды горизонтально однородного волновода с диэлектрической проницаемостью ионосферы на вертикали, проходящей через рассматриваемую точку поверхности. Таким образом, приходим к следующей методике нахождения параметров волновода L и C : для каждой точки $\{\theta, \varphi\}$ на земной поверхности

сти рассматривается задача распространения в плоском горизонтально однородном волноводе, образованном Землей и вертикально неоднородной анизотропной ионосферой со свойствами, взятыми из реальной ионосферы на вертикали, проходящей через рассматриваемую точку. В этой задаче требуется найти электромагнитное поле основной распространяющейся волны и по нему определить параметры L и C . В анизотропном случае свойства нормальной волны зависят от направления, в котором меняется электромагнитное поле нормальной волны в горизонтальной плоскости. Привлекая к рассмотрению две нормальные волны с бесконечно близкими направлениями, однозначно находим поверхностную плотность емкости C и матрицу L в анизотропном случае.

Нормальная волна удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = ik\eta_0 \mathbf{H}, \quad (6)$$

$$\text{rot } \eta_0 \mathbf{H} = -ik\varepsilon \mathbf{E},$$

где $\eta_0 = 120\pi$ Ом — импеданс вакуума, ε — тензор относительной диэлектрической проницаемости; нормальная волна в горизонтальной плоскости имеет характер бегущей волны.

Введем декартовую систему координат $\{x', y', z\}$ так, чтобы ось z была направлена вверх и $z = 0$ соответствовало земной поверхности, а вдоль оси y' свойства нормальной волны не менялись. Тогда зависимость от x' определяется $\exp(ikSx')$ (спектральный параметр S имеет смысл синуса угла падения у земной поверхности). При $z \rightarrow \pm\infty$ поле нормальной волны убывает. Значения параметра S , при котором удается удовлетворить всем названным требованиям, образуют спектр нормальных волн.

Из вертикальной проекции второго уравнения Максвелла (6) следует алгебраическая связь для нормальной волны между вертикальной компонентой электрического поля E_z и тангенциальными составляющими электромагнитного поля

$$E_z = -\frac{S}{\varepsilon_{zz}}\eta_0 H_y' - \frac{\varepsilon_{zx}'}{\varepsilon_{zz}}E_x' - \frac{\varepsilon_{zy}'}{\varepsilon_{zz}}E_y'. \quad (7)$$

На поверхности Земли, где $\varepsilon = 1$, вертикальная компонента электрического поля связана только с поперечной компонентой магнитного поля

$$E_z = -S\eta_0 H_y', \quad \text{при } z = 0. \quad (8)$$

Кроме того, потребуется поперечная проекция первого уравнения Максвелла, имеющая вид

$$\frac{\partial E_x'}{\partial z} - ikSE_z = ik\eta_0 H_y',$$

из которого следует

$$(\mathbf{Grad} u)_{x'} = -ik\eta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} H_y' dz, \quad (\mathbf{Grad} u)_{y'} = 0, \quad (9)$$

так как E_x' исчезает в нормальной волне на пределах интегрирования.

Для поверхностной плотности емкости C , используя определение (3), связь между вертикальной компонентой E_z на поверхности Земли с поверхностной плотностью заряда q и определение напряжения (3), получим соотношение

$$C = \frac{\epsilon_0 E_z(0)}{\int_0^{\infty} E_z dz}, \quad (10)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Выбранные пределы интегрирования учитывают, что $|\epsilon_g| \gg 1$, вследствие чего вертикальная компонента электрического поля в Земле пренебрежимо мала из-за ее большой по модулю относительной диэлектрической проницаемости.

Аналогично, для элементов матрицы, обратной к матрице локальной индуктивности, с привлечением соотношения (9) и определения (4) получим

$$(L_{x'x'}^{-1})^{-1} = \mu_0 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} H_y dz}{H_y(0)}, \quad (11)$$

$$-\frac{L_{y'x'}}{L_{y'y'}} = \frac{L_{y'x'}^{-1}}{L_{x'x'}^{-1}} = \frac{j_{y'}}{j_{x'}} = -\frac{H_{x'}(0)}{H_{y'}(0)}, \quad (12)$$

где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума. В формуле (11) интегрирование по земному участку остается из-за непрерывности тангенциальной компоненты магнитного поля при переходе из воздуха в Землю и из-за его проникновения в почву на глубину порядка скин-слоя.

Из двумерного телеграфного уравнения (5) для постоянной распространения S получается соотношение

$$\mu_0 \epsilon_0 S^2 = \frac{C}{L_{x'x'}^{-1}}. \quad (13)$$

В отличие от аналогичного соотношения длинной линии, где постоянная распространения определяется произведением погонной емкости и погонной индуктивности, в это выражение входит отношение поверхностной плотности емкости C к элементу $L_{x'x'}^{-1}$, матрицы, обратной локальной индуктивности. В изотропном случае это отношение может быть заменено соответствующим произведением. Формулы (10) для поверхностной плотности емкости и (11) для элемента матрицы $L_{x'x'}^{-1}$, приводят по (13) к той же самой постоянной распространения S ведущей нормальной волны.

В анизотропном случае постоянная распространения зависит от азимута распространения нормальной волны в горизонтальной плоскости. Любая матрица, связывающая два вектора так, что преобразование, его осуществляющее, не зависит от последовательности перехода от исходной системы координат $\{x, y\}$ к повернутой на угол $\psi\{x', y'\}$, зависит от ψ через синус и косинус двойного угла. В дифференциальной форме это преобразование имеет вид

$$\frac{\partial L_{x'x'}^{-1}}{\partial \psi} = -\frac{\partial L_{y'y'}^{-1}}{\partial \psi} = L_{x'y'}^{-1} + L_{y'x'}^{-1}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial L_{x'y'}^{-1}}{\partial \psi} = \frac{\partial L_{y'x'}^{-1}}{\partial \psi} = L_{y'y'}^{-1} - L_{x'x'}^{-1}.$$

Эти соотношения вместе с первыми двумя производными от постоянной распространения ведущей нормальной волны S по азимуту можно использовать для доопределения матрицы L^{-1} . По формуле (13) находится после дифференцирования первая и вторая производные от элемента матрицы $L_{x'x'}^{-1}$, по азимутальному углу ψ . Таким образом, имеем

$$L_{x'y'}^{-1} = -L_{y'x'}^{-1} + \frac{\partial L_{x'x'}^{-1}}{\partial \psi}, \quad (15)$$

$$L_{y'y'}^{-1} = L_{x'x'}^{-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_{x'x'}^{-1}}{\partial \psi^2}. \quad (16)$$

Соотношения (10), (12), (13), (15) и (16) полностью определяют матрицу L^{-1} для любого азимута ψ по свойствам ведущей нормальной волны и ее двух первых азимутальных производных. Строго говоря, требуются также две производные от поверхностной емкости C . Однако, этот параметр слабо зависит от азимута, что позволяет исключить из рассмотрения его производные.

В общем случае система дифференциальных уравнений (14) не удовлетворяется для всех элементов матрицы L^{-1} и матрица L для произвольного азимута не восстанавливается по ее значению на некотором определенном азимуте. В этом случае матрица L с необходимостью является функцией азимутального угла ψ , который определяется направлением градиента напряжения u в горизонтальной плоскости.

Если для описания распространения ведущей нормальной волны годится лучевое рассмотрение, то для формирования лучевого поля потребуются наряду с постоянной распространения S ее первые две производные по азимутальному углу ψ . Определение (10), (12), (13), (15) и (16) матрицы L^{-1} гарантирует те же параметры, если рассматривать двумерное телеграфное уравнение лучевым способом. Таким образом, лучевые картины по основной моде уравнений Максвелла и двумерного телеграфного уравнения совпадут.

В случае отсутствия азимутальной зависимости постоянной распространения матрица L , согласно (15), (16), инвариантна по азимуту и обладает свойством:

$$L_{x'x'} = L_{y'y'}, \quad L_{x'y'} = -L_{y'x'}. \quad (17)$$

Обратно, если известно, что матрица L , в зависимости от угла ψ , следует соотношениям (17), как это бывает для обычной матрицы, то по формуле (13) получается аналитическая зависимость постоянной распространения от азимута

$$S^2(\psi) = \frac{L_{xx}^{-1} \cdot S^2(0)}{L_{xx}^{-1} \cdot \cos^2 \psi + L_{yy}^{-1} \cdot \sin^2 \psi + (L_{xy}^{-1} + L_{yx}^{-1}) \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi},$$

где матрица L^{-1} соответствует значениям $\psi = 0$.

Для описания возбуждения электромагнитного поля в рамках двумерного телеграфного уравнения, в него следует ввести стороннее напряжение u_{ct} (либо поверхностную плотность заряда) и вектор стороннего удельного напряжения e_{ct} (либо, соответственно, вектор линейной плотности тока)

$$\operatorname{div}[L^{-1}(e_{ct} + \operatorname{Grad} u)] + \omega^2 C(u + u_{ct}) = 0.$$

Сторонние источники для двумерного телеграфного уравнения не имеют непосредственного физического смысла. Они получаются из сопоставления полей, получаемых по этой теории, с соответствующими полями точной теории нормальных волн в рамках горизонтально однородного волновода. Поле основной нормальной волны обратно пропорционально нормировочному интегралу N , который можно определить следующим образом [15]

$$2\epsilon_0 E_z^+(0) E_z(0) N = \int_0^\infty (E_z^+ D_z + D_z^+ E_z + H_z^+ B_z + B_z^+ H_z) dz, \quad (18)$$

где интегрирование осуществляется от соответствующих компонент электромагнитного поля ведущей нормальной волны и сопряженной к ней. Сопряженная нормальная волна удовлетворяет тем же уравнениям Максвелла, что и основная нормальная волна [15], с заменой явного волнового числа k на $-k$ и тензора диэлектрической проницаемости ϵ на транспонированный. В нормировочном интеграле (18) интегрирование производится только по воздушному и ионосферному участкам волновода по тем же причинам, что и в интеграле для поверхностной плотности емкости. Для источника типа вертикального электрического диполя с моментом P эквивалентным источником двумерного телеграфного уравнения является

точечно распределенное в горизонтальной плоскости стороннее напряжение

$$u_{ct} = A \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (19)$$

где $A = \frac{P_0}{C \cdot N}$. Эквивалентный источник пропорционален электрическому дипольному моменту P_0 и обратно пропорционален произведению поверхности плотности емкости C и нормировочного интеграла N . Для того, чтобы электромагнитное поле основной нормальной волны совпадало с полем двумерного телеграфного уравнения, требуется, чтобы это произведение не зависело от азимутального угла ψ и от точки в горизонтальной плоскости в случае плавно нерегулярного волновода. Последнее требование связано с теоремой взаимности. Указанные ограничения не являются жесткими и легко выполняются в приближенных моделях. Если принять эти ограничения, то из (19) следует, что точечный источник стороннего напряжения для двумерного телеграфного уравнения в случае возбуждения волновода вертикальным электрическим диполем связан с дипольным моментом универсальным множителем. В конкретных моделях СНЧ-волновода этот множитель совпадает с ϵ_0^{-1} , в случае открытой плоскости — в два раза больше.

Для приземного горизонтального электрического диполя с токовым моментом Jl эквивалентным источником двумерного телеграфного уравнения является точечный источник удельного напряжения, направленный по дипольному моменту

$$\mathbf{e}_{ct} = B \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad B = \frac{\epsilon_0 Z_g Jl}{CN},$$

где Z_g — поверхностный импеданс Земли в месте расположения источника. Так же, как и в случае вертикального электрического диполя, амплитуда точечного источника удельного напряжения практически не зависит от свойств ионосферы. Однако, свойства земной поверхности в месте расположения источника входят непосредственно в виде множителя — земного импеданса.

Таким образом, описана методика получения параметров двумерного телеграфного уравнения по соответствующим параметрам основной нормальной волны. Сформулированы условия эквивалентности на земной поверхности электромагнитного поля ведущей нормальной волны уравнений Максвелла и поля двумерной теории для случая горизонтально однородного волновода. Показано, что сторонним источником вертикального электрического диполя является двумерно точечное стороннее напряжение, амплитуда которого пропорциональна дипольному моменту и не зависит практически от свойств волновода. Приземный горизонтальный электрический диполь для двумерного уравнения эквивалентен направленному точечному вектору удельного напряжения, амплитуда которого

пропорциональна токовому моменту горизонтального диполя и земному поверхностному импедансу и не зависит практически от свойств ионосферы.

Работа поддержана грантом 01.067 конкурсного центра при Санкт-Петербургском государственном университете.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснушкин П. Е. // ДАН СССР, 1966. Т. 171. № 1. С. 61.
2. Гюнниен Э. М., Галюк Ю. П. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: ЛГУ, 1972. Вып. 11. С. 109.
3. Галюк Ю. П., Иванов В. И. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: ЛГУ, 1978. Вып. 16. С. 148.
4. Wait J. R. *Electromagnetic Waves in Stratified Media*. — New York: Pergamon press, 1970.
5. Блиох П. В., Николаенко А. П., Филиппов Ю. Ф. Глобальные электромагнитные резонансы в полости Земля—ионосфера. — Киев: Наукова думка, 1977.
6. Кириллов В. В. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: ЛГУ, 1978. Вып. 16. С. 99.
7. Галюк Ю. П., Георге А. В., Кириллов В. В. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: ЛГУ, 1989. Вып. 22. С. 85.
8. Кириллов В. В., Пронин А. Е. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: ЛГУ. Вып. 13. С. 110.
9. Field E. C., Joiner R. G. // Radio Science, 1979. V. 14. № 6. P. 1057.
10. Papert R. A. // Radio Science, 1985. V. 20. № 2. P. 229.
11. Madden T., Thomson W. // Rev. Geophys., 1965. V. 3. № 2. P. 211.
12. Галюк Ю. П., Кириллов В. В., Макаров Г. И. // Распространение радиоволн километрового диапазона. — Апатиты: Изд-во ЮФАН, 1987. С. 45.
13. Кириллов В. В., Копейкин В. Н. — В сб.: Тез. докл. межведомственного семинара по распространению радиоволн, Красноярск, 1986.
14. Кириллов В. В., Копейкин В. Н. // Проблемы дифракции и распространения волн. Л.: ЛГУ, 1989. Вып. 22. С. 123.
15. Кириллов В. В. // Проблемы дифракции и распространения волн. — С-Пб.: С-ПбГУ, 1993. Вып. 25. С. 24.

Научно-исследовательский
институт радиофизики при
Санкт-Петербургском
госуниверситете, г. С.-Петербург

Поступила в редакцию
15 февраля 1996 г.

**TWO DIMENSIONAL THEORY FOR ELF PROPAGATION IN THE
EARTH-IONOSPHERE WAVEGUIDE***V. V. Kirillov*

A surface theory of the two-dimensional telegraph equation is formulated. In this paper we describe a method for obtaining this theory parameters L and C from the dominant waveguide mode of the electromagnetic field, propagation constant and its two derivates in respect to the azimuth. For excitation of the waveguide by vertical and horizontal electric dipoles, for the two-dimensional telegraph equation sources are determined, which are shown to be the surface point external tension and oriented specific surface point external tension per unit length, respectively. These effective sources are independent of the ionosphere. The effective sources for the horizontal dipole is proportional to the earth's surface impedance in the dipole location.

УДК 621.371

АМПЛИТУДНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В ТЕОРИИ РЕФРАКЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН

B. A. Алимов, A. B. Рахлин

Рассмотрены некоторые аспекты теории рефракционного рассеяния радиоволни применительно к исследованиям флуктуаций интенсивности излучения за случайным фазовым экраном. Найдены выражения для кусочной аппроксимации функции распределения флуктуаций интенсивности в ближней зоне и в области случайных фокусировок за экраном. Полученные выражения использованы для расчёта индекса мерцаний радиоволни в этих областях. Соответствующие расчёты выполнены с учётом конечных размеров внешнего и внутреннего масштабов турбулентных неоднородностей фазового экрана. Показано, что рефракционное рассеяние радиоволни, как правило, характеризуется резко выраженным эффектом случайной фокусировки интенсивности излучения за фазовым экраном. Но в условиях сильно развитой турбулентности среды распространения радиоволни (фазового экрана) этот эффект может и отсутствовать.

В последнее время был достигнут определённый прогресс в разработке и использовании для радиофизических приложений метода рефракционного рассеяния радиоволни (PPP). Этот метод заключается в расчётах статистических характеристик распространения радиоволни в толстом слое с сильными (средний квадрат флуктуационного набега фазы s_0^2 в слое много больше единицы) крупномасштабными (внешний масштаб турбулентности L_0 много больше характерного размера зоны Френеля F для данной трассы) флуктуациями показателя преломления с помощью соответствующих вычислений этих характеристик при дифракции излучения в свободном пространстве за эквивалентным фазовым экраном (средний квадрат набега фазы на экране — \bar{s}_0^2 , внешний масштаб неоднородностей на экране — L_0). Метод PPP был разработан Букером для расчётов пространственных характеристик флуктуаций интенсивности радиоволни (см. [1] и цитированную там литературу). В [2, 3] этот метод был использован для расчётов флуктуаций частотной корреляции радиоволни, а в [4] был рассмотрен вопрос о пределах применимости метода PPP.

И всё же некоторые аспекты метода PPP до последнего времени оставались неизученными. Прежде всего, это замечание касается проблемы распределения флуктуаций интенсивности радиоволни при дифракции их на случайному фазовому экране. Несмотря на то, что флуктуации интенсивности излучения за фазовым экраном достаточно подробно исследовались в течение нескольких десятилетий, вопрос о распределении флу-

туаций интенсивности радиоволн за экраном до сих пор практически не решён (см., например, обзорные работы [5, 6]).

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ РАДИОВОЛН ЗА СЛУЧАЙНЫМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

Исходным соотношением при рассмотрении вопроса о флуктуациях плоской волны при дифракции её на случайному фазовому экране является выражение для поля принимаемого сигнала [7]:*

$$E(z) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x) \exp\left(-i\frac{k}{2z}x^2\right) dx, \quad (1)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число (λ — длина волны); z — расстояние от экрана до точки наблюдения ($\sqrt{\frac{z}{k}} = F$ — параметр Френеля [1]), $E_0(x) = \exp[is(x)]$ — поле волны на экране; $s(x)$ — фазовый набег волны на экране. Флуктуации $s(x)$ предполагаются нормальными со среднеквадратичным значением $\sqrt{s_0^2} \gg 1$ и нормированной корреляционной функцией $\rho_s(x)$ ($x = x_2 - x_1$ — расстояние между точками наблюдения на экране). Функцию $\rho_s(x)$ будем считать дифференцируемой с характерными пространственными масштабами флуктуаций фазы на экране $L_2 = [-\rho_s''(0)]^{-1/2}$ и $L_4 = [\rho_s'''(0)]^{-1/4}$ (см. также [8, 9]).

В дальнейшем мы будем рассматривать случай развитой турбулентной структуры флуктуаций фазы волны на экране, когда выполняются следующие неравенства:

$$L_4 \gg F \gg L_{2E} = L_2 / \sqrt{s_0^2}. \quad (2)$$

Эти неравенства, вообще говоря, соответствуют случаю рефракционного рассеяния радиоволн с резко выраженным фокусирующим эффектом неоднородностей фазового экрана (см., например, численные расчёты индекса флуктуаций интенсивности в работе [10]).

Следует отметить также известное равенство [8, 15]:

$$L_4^2 = F_\Phi^2 \sqrt{s_0^2}, \quad (3)$$

которое справедливо для точки наблюдения, расположенной в фокальной плоскости за фазовым экраном ($F_\Phi = \sqrt{\frac{z_\Phi}{k}}$). Именно в фокальной плоскости, как будет показано ниже, выражение для распределения флуктуаций

* Вопрос о флуктуациях интенсивности радиоволны мы будем рассматривать на примере дифракции излучения на одномерном фазовом экране.

интенсивности радиоволн за случайным фазовым экраном наиболее сложное.

Поле в точке наблюдения будет формироваться широким спектром неоднородностей, которые, несколько условно, можно разделить на крупномасштабные (с размерами $L > F$) и мелкомасштабные ($L \leq F$) (см. (2)). Влияние крупномасштабных неоднородностей экрана можно учесть в геометрооптическом приближении (см., например, [15]), ограничиваясь второй производной в пространственном разложении фазы волны. При этом соотношение (1) приближенно можно записать в виде:

$$E(z) \simeq \sqrt{\frac{ik}{2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} E'_0(x) \exp \left\{ -i \left[\frac{k}{2z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \right] x^2 \right\} dx, \quad (4)$$

где $E'_0(x)$ — составляющая поля волны на фазовом экране, описывающая флуктуации радиоволны, обусловленные мелкомасштабными неоднородностями.

Когда точка наблюдения расположена в фокальной плоскости относительно крупномасштабных неоднородностей фазового экрана (см. (3)), показатель экспоненты в соотношении (4) можно считать равным нулю, и мы приходим к известному соотношению для поля сигнала в фокусе линзы [7]. Когда размер этой линзы L_4 много больше характерного масштаба мелкомасштабных неоднородностей L_{2E} , поле в фокусе линзы, в силу центральной предельной теоремы, будет иметь нормальное распределение, а флуктуации интенсивности соответственно будут описываться экспоненциальным распределением:

$$P_1(I) \simeq \exp(-I). \quad (5)$$

Это соотношение применимо лишь для значений интенсивности $I \lesssim I_1 = \bar{I} = \frac{L_{2E} L_4}{F^2}$ (\bar{I} — среднее значение интенсивности быстрых флуктуаций в фокусе линзы [11]). Причём необходимо иметь в виду, что обычно $L_2 \gg L_4$ (см. ниже, а также [8]), так что величина $I_1 \gg 1$.

При значениях $I > I_1$ флуктуации интенсивности уже обусловлены, в основном, флуктуациями крупномасштабных неоднородностей фазы волны на экране с резко выраженным фокусирующими свойствами. Это неоднородности с масштабами порядка L_4 . Фактически речь идёт о распределении флуктуаций интенсивности за одиночной крупномасштабной линзовой неоднородностью (при усреднённых быстрых флуктуациях на масштабе $L_4 \gg L_{2E}$) со случайными флуктуациями положения её относительно центра. Такая задача была решена в работе [12]. Распределение флуктуаций интенсивности за фокусирующей линзой с волновым параметром $\alpha_0 = z/z_\Phi$ ($z_\Phi = \frac{kL_4^2}{\sqrt{s_0^2}}$ — фокусное расстояние линзы, см.(3))

описывается соотношением [12] (см. также [15])

$$P_2(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_0} \cdot \frac{1}{I^3} \left\{ \exp \left[-\frac{(I-1)^2}{2\alpha_0^2 I^2} \right] + \exp \left[-\frac{(I+1)^2}{2\alpha_0^2 I^2} \right] \right\}. \quad (6)$$

В нашем случае соотношение (6) описывает достаточно высокие уровни интенсивности $1 \ll I_1 \lesssim I \lesssim I_2 = \frac{L_4^2}{F^2}$. (Заметим, что значение I_2 является предельным уровнем интенсивности в фокусе крупномасштабной линзы с характерным размером L_4 [12]). Соотношение (6) преобразуется к виду

$$P_2(I) \simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi}\alpha_0} \cdot \frac{\exp \left(-\frac{1}{2\alpha_0^2} \right)}{I^3}. \quad (7)$$

Наконец, если мы будем интересоваться распределением экстремально высоких уровней интенсивности $I > I_2$, то необходимо учесть, что такие сильные выбросы могут наблюдаться как результат случайных фокусировок радиоволн при дифракции на крупномасштабных неоднородностях с размерами $L > L_4$. Причём наиболее вероятны аномально высокие уровни интенсивности при наблюдениях в фокусе на оси линзы [12]. Выражение для интенсивности принимаемого излучения за изолированной крупномасштабной неоднородностью в этом случае имеет вид [15]

$$I = \frac{1}{|1-\alpha|}, \quad (8)$$

где $\alpha = \frac{z}{k} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \Big|_{x=0}$ — случайный волновой параметр (см. выше). Используя соотношение (8) и проводя несложные преобразования вероятностей с учётом оговоренного выше нормального распределения флуктуаций фазы волны, для распределения экстремальных значений уровней интенсивности в точке наблюдения находим:

$$P_3(I) = \frac{1}{I^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi s_0^2}} \exp \left(-\frac{I^2}{2s_0^2} \right). \quad (9)$$

Это соотношение справедливо при уровнях интенсивности $I \gtrsim I_3 = \frac{L_4 L_2}{F^2}$, т.е. для флуктуаций интенсивности обусловленных дифракцией излучения на фокусирующих линзах с размерами $L \gtrsim \sqrt{L_4 L_2}$. Величина $\sqrt{L_4 L_2}$ больше характерного размера L_4 , поэтому при расчётах распределения флуктуаций интенсивности, в отличие от соответствующих

расчётов в [12], можно было не учитывать случайные флуктуации положения линзы относительно её оси, что и было учтено при выводе соотношения (9).

В заключение следует заметить, что когда точка наблюдения находится в ближней зоне за фазовым экраном ($\alpha_0 \ll 1$), при расчётах распределения флуктуаций интенсивности, обусловленных мелкомасштабными неоднородностями, можно не учитывать случайные фокусировки излучения. Тогда, используя соотношение (8), легко получить следующее соотношение (см. также [15]):

$$P_1(I) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_0} \cdot \exp \left[-\frac{(I-1)^2}{2\alpha_0^2} \right]. \quad (10)$$

Выражение (10) описывает распределение уровней интенсивности радиоволн при $0 \leq I \lesssim I_1 = \frac{L_4 L_{2E}}{F^2}$. Но в отличие от формулы (5) соотношение (10) справедливо только в области значений $\alpha_0 \ll 1$.

Итак, распределение флуктуаций интенсивности радиоволн за случаем фазовым экраном может быть описано следующим выражением (при $\alpha_0 \lesssim 1$):

$$P(I) = \begin{cases} P_1(I) & \text{при } 0 \leq I \lesssim I_1 = \frac{L_{2E} L_4}{F^2}, \\ P_2(I) & \text{при } I_1 \lesssim I \lesssim I_2 = \frac{L_4^2}{F^2}, \\ P_3(I) & \text{при } I \gtrsim I_3 = \frac{L_2 L_4}{F^2}. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь

$$P_1(I) = \begin{cases} \exp(-I) & \text{для } \alpha_0 \simeq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_0} \exp \left[-\frac{(I-1)^2}{2\alpha_0^2} \right] & \text{для } \alpha_0 \ll 1, \end{cases}$$

$$P_2(I) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\exp \left(-\frac{1}{2\alpha_0^2} \right)}{\alpha_0} \cdot I^{-3},$$

$$P_3(I) = I^{-2} \cdot (2\pi s_0^2)^{-1/2} \cdot \exp(-I^2/2s_0^2).$$

Функция распределения $P(I)$ получена в форме кусочной аппроксимации, отдельные составляющие которой между собой сшиваются, в целом, достаточно хорошо. Хотя области значений I вблизи I_1 и в интервале $I_2 \div I_3$ являются переходными, в которых, строго говоря, указанные аппроксимации $P(I)$ не работают.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в ближней зоне распределение флуктуаций интенсивности радиоволн описывается, в основном, нормальным распределением. При этом, однако, более точное распределение флуктуаций интенсивности может быть и иным, но в рамках рассмотренных приближений нормальное распределение является хорошей аппроксимацией реального распределения. Здесь может быть проведена аналогия с нормальным распределением флуктуаций амплитуды для слабых флуктуаций радиоволн, когда многие реальные распределения флуктуаций удовлетворительно аппроксимируются нормальным распределением (см., например, [7, 12]). Это обстоятельство следует учитывать при интерпретации результатов экспериментальных исследований статистики сигналов (см. [13]).

2. ИНДЕКС МЕРЦАНИЙ РАДИОВОЛН

Выражения (11), (12) могут быть использованы для вычислений соответствующих моментов распределения флуктуаций интенсивности радиоволн за случайным фазовым экраном. Мы ограничимся анализом второго момента, широко известного как индекс мерцаний [7]:

$$S_4^2 = \bar{I}^2 - 1 = \int_0^\infty P(I) I^2 dI - 1. \quad (13)$$

Поведение этого параметра исследовалось во многих работах (см. библиографию в обзорных работах [5, 6]) на основании прямых вычислений величины S_4^2 с использованием соотношения (11).

Подставляя (11), (12) в соотношение (13), находим (при $\alpha_0 \ll 1$ и $\alpha_0 \simeq 1$ соответственно)*

$$S_4^2 \simeq \alpha_0^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\alpha_0^2}\right)}{\alpha_0} \cdot \ln\left(\frac{L_4}{L_{2E}}\right) + \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{L_2}{\alpha_0 L_4}\right)\right], \quad (14)$$

$$S_4^2 \simeq 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \ln\left(\frac{L_4}{L_{2E}}\right) + \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{L_2}{L_4}\right)\right]. \quad (15)$$

Здесь $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

Соотношения (14), (15) находятся в хорошем соответствии с выражениями, полученными в результате прямых вычислений индекса мерцаний в [8]. Соотношение (14) не представляет большого интереса, поскольку основной вклад, вносимый в величину S_4^2 , здесь даёт первое слагаемое,

*При получении соотношений (14), (15) учтены указанные выше приближения, использованные при выводе выражений (11), (12).

равное $\alpha_0^2 \ll 1$. Соотношение (15) заслуживает более подробного анализа.

При наблюдениях за флюктуациями интенсивности в фокальной плоскости фазового экрана ($\alpha_0 \simeq 1$) при рефракционном рассеянии радиоволн возможен известный эффект усиления мерцаний радиоволн, который учитывается вторым слагаемым в соотношении (15):

$$F_\Phi = \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \ln \left(\frac{L_4}{L_2} \sqrt{s_0^2} \right). \quad (16)$$

Мы проведём сейчас оценки величины F_Φ с учётом некоторых характерных корреляционных функций флюктуаций фазы радиоволн $\rho_s(x)$, присущих турбулентной структуре (с показателем спектра p) окружающей околоземной среды распространения радиоволн [10]:

$$\rho_s(x) = \begin{cases} \exp \left[-\frac{(x^2 + L_i^2)^{1/2}}{L_0} \right] & \text{для } p = 2, \\ \frac{(x^2 + L_i^2)^{1/2}}{L_0} K_1 \left[\frac{(x^2 + L_i^2)^{1/2}}{L_0} \right] \left[\frac{L_i}{L_0} K_1 \left(\frac{L_i}{L_0} \right) \right]^{-1} & \text{для } p = 3, \\ \left[1 + \frac{(x^2 + L_i^2)^{1/2}}{L_0} \right] \exp \left[-\frac{(x^2 + L_i^2)^{1/2}}{L_0} \right] \cdot \left[\left(1 + \frac{L_i}{L_0} \right) \exp \left(-\frac{L_i}{L_0} \right) \right]^{-1} & \text{для } p = 4, \\ \frac{(x^2 + L_i^2)^{1/2}}{L_0} \left\{ K_1 \left[\frac{(x^2 + L_i^2)^{1/2}}{L_0} \right] + \frac{1}{2} \frac{(x^2 + L_i^2)^{1/2}}{L_0} K_0 \left[\frac{(x^2 + L_i^2)^{1/2}}{L_0} \right] \right\} \cdot \left\{ \frac{L_i}{L_0} \left[K_1 \left(\frac{L_i}{L_0} \right) + \frac{1}{2} \frac{L_i}{L_0} K_0 \left(\frac{L_i}{L_0} \right) \right] \right\}^{-1} & \text{для } p = 5, \end{cases} \quad (17)$$

где $K(x)$ — функции Макдональда.

Результаты вычислений второй и четвёртой производных функций (17), которые определяют параметры L_2 и L_4 (см. выше), сведены в таблицу:

p	2	3	4	5
$-\rho''(0)$	$(L_0 L_i)^{-1}$	$L_0^{-2} \ln \left(\frac{2L_0}{CL_i} \right)$	L_0^{-2}	$\frac{1}{2} L_0^{-2}$
$\rho'''(0)$	$3(L_0 L_i^3)^{-1}$	$3(L_0 L_i)^{-2}$	$3(L_0^3 L_i)^{-1}$	$3(2L_0^4)^{-1} \ln \left(\frac{2L_0}{CL_i} \right)$

Здесь $C \simeq 0,577$ — постоянная Эйлера; L_0 , L_i — соответственно внешний и внутренний масштаб турбулентности.

Расчёты величины F_Φ по формуле (16) с использованием полученных выражений для параметров L_4 , L_2 были проведены с учётом соотношения (3) для следующих характерных случаев: $\frac{L_0}{F} = 10$; $\frac{L_i}{F} = 10^{-2}$ и $\frac{L_i}{F} = 1$ (ср. [10]). Оказалось, как и следовало ожидать, что с увеличением внутреннего масштаба турбулентности фокусирующие свойства фазового экрана с сильными крупномасштабными неоднородностями проявляются более отчётливо. Так, например, в первом случае ($\frac{L_i}{F} = 10^{-2}$) величина $F_\Phi \simeq 0$ для $p \leq 4$, но при $\frac{L_i}{F} = 1 - F_\Phi \simeq 0,6$ и 1 для $p = 3$ и $p = 4$ соответственно. Для турбулентности с показателем спектра $p = 5$ при $\frac{L_i}{F} = 10^{-2}$ $F_\Phi = 1,25$, а при $\frac{L_i}{F} = 1 - F_\Phi \simeq 1,65$. Но в то же время, фокусирующие свойства фазового экрана практически не проявляются в условиях развитой турбулентности (при $p = 2$ $F_\Phi \simeq 0$ в обоих случаях). Случай развитой турбулентности ($p = 2$) заслуживает более детального рассмотрения.

В [10] анализ флуктуаций интенсивности радиоволн за фазовым экраном был выполнен при пренебрежении внутренним масштабом турбулентности ($L_i \equiv 0$). Такой подход не совсем корректен, тем более что при численных величинах в [10] учитывалось значение величины L_i . Учёт конечности параметра L_i , как следует из соотношения (17), приводит к дифференцируемости функций $\rho_s(x)$. Это, в свою очередь, позволяет получить известную гауссовскую аппроксимацию для пространственной корреляционной функции поля радиоволн [7]:

$$\Gamma_{EE^*}(x) = \exp \left[-2\bar{s}_0^2(1 - \rho_s(x)) \right] \simeq \exp \left[-\frac{x^2}{L_{2E}^2} \right], \quad (18)$$

которая справедлива не только для спектра турбулентности с показателем $p \geq 3$, но и для $p = 2$ (ср. [10]). В конечном счёте такое поведение функции $\Gamma_{EE^*}(x)$ объясняет наблюдаемое в численных расчётах спектров гауссово спадание спектральной интенсивности в области высоких частот (см. [10]), что невозможно было объяснить в [10] в рамках нулевого параметра L_i . Это обстоятельство может иметь существенные последствия при интерпретации экспериментальных данных исследований флуктуаций интенсивности радиоволн методом многочастотных наблюдений, например, за сигналами ИСЗ при их радиопросвечивании ионосферы [14]. В этом случае следует учитывать конечную величину внутреннего масштаба турбулентности плазмы, иначе интерпретация экспериментальных данных становится некорректной (ср. [14]).

Возвращаясь к анализу поведения индекса мерцаний радиоволн в условиях сильной турбулентности (при $p = 2$), заметим, что, как показали

проведённые нами расчёты величины F_Φ , отсутствие фокусирующего эффекта фазового экрана объясняется следующим обстоятельством. В рассмотренных случаях необходимое условие фокусировки (3) реализуется уже при малых значениях величины $\bar{s}_0^2 \lesssim 1$, так что при больших значениях величины среднеквадратичного набега фазы $\sqrt{\bar{s}_0^2} \gg 1$, характерного для ракурсного рассеяния радиоволн, точка наблюдения находится во Фраунгоферовой зоне ($\alpha_0 = \frac{z}{z_\Phi} \gg 1$), когда, как известно, имеет место релеевское распределение флуктуаций амплитуд радиоволн за фазовым экраном и гауссовское поведение спектра флуктуаций интенсивности принимаемого излучения (см., например, [7, 8]). В этих условиях, как легко показать, характерно значительное уширение спектра амплитудных флуктуаций как в области высоких, так и низких спектральных частот. Но при этом, естественно, какие-либо особенности, присущие фокусирующему эффекту фазового экрана, в поведении спектра интенсивности в условиях развитой турбулентности ($p = 2$) не проявляются (см. численные расчёты [10]).

Итак, рефракционное рассеяние радиоволн, как правило, характеризуется резко выраженным эффектом случайных фокусировок интенсивности излучения за фазовым экраном. Но в условиях сильно развитой турбулентности среды распространения радиоволн этот эффект может и отсутствовать.

В заключение кратко остановимся на вопросе о распределении флуктуаций интенсивности радиоволн за двумерным фазовым экраном. При этом, следуя [16], будем считать фокусирующие свойства линзовых крупномасштабных неоднородностей экрана полностью некоррелированными по координатным осям \vec{x} и \vec{y} . Тогда исходным выражением для определения функции распределения флуктуаций интенсивности за двумерным фазовым экраном $P_g(I)$ будет соотношение [16]:

$$P_g(I) = \int_0^\infty P_0(I_x) \cdot P_0(I/I_x) \frac{dI_x}{I_x}, \quad (19)$$

где $P_0(I)$ — соответствующие распределения флуктуаций интенсивности за одномерным экраном (см. (6), (9) и [16]). Проводя необходимые преобразования, в результате получаем следующее выражение для функции распределения флуктуаций интенсивности радиоволн за двумерным фазовым экраном (при $\alpha_0 \leq 1$):*

*Геометрооптическое приближение для плотности вероятности флуктуаций интенсивности за двумерным фазовым экраном, учитывающее корреляцию фокусирующих свойств хаотических линз по разным осям, содержится в [18].

$$P_g(I) = \begin{cases} P_{1g}(I) & \text{при } 0 \leq I \lesssim I_1 = \frac{(L_{2E}L_4)^2}{F^4}, \\ P_{2g}(I) & \text{при } I_1 \lesssim I \lesssim I_2 = \frac{L_4^4}{F^4}, \\ P_{3g}(I) & \text{при } I \gtrsim I_3 = \frac{(L_2L_4)^2}{F^4}, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} P_{1g}(I) &\simeq \begin{cases} \exp(-I) & \text{для } \alpha_0 \simeq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_0} \exp\left[-\frac{(I-1)^2}{2\alpha_0^2}\right] & \text{для } \alpha_0 \ll 1, \end{cases} \\ P_{2g}(I) &\simeq \frac{4}{\pi\alpha_0^2} \exp(-\alpha_0^{-2}) I^{-3}, \\ P_{3g}(I) &\simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi s_0^2}} I^{-5/2} \cdot \exp(-2I/s_0^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Используя формулы (19) и (20), находим следующее соотношение для индекса мерцаний радиоволн в наиболее интересном случае, когда точка наблюдения находится в области случайных фокусировок за двумерным фазовым экраном (при $\alpha_0 \simeq 1$):

$$S_4^2 \simeq 1 + \frac{8}{\pi e} \ln\left(\frac{L_4}{L_{2E}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[1 - \Phi\left(2\frac{L_2}{L_4}\right)\right]. \quad (22)$$

Это соотношение находится в хорошем соответствии с подобным выражением, полученным в результате прямых вычислений индекса мерцаний в [17]. Видно, что за двумерным фазовым экраном эффект случайных фокусировок излучения сильными крупномасштабными неоднородностями среды распространения выражен более отчётливо по сравнению со случаем рефракционного рассеяния радиоволн на одномерном экране (ср. (15) и (21)).

Работа выполнена в рамках проекта 95-02-03716 РФФИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Booker H. G. // Indian. Radio Space Phys., 1986. V. 15. № 5-6. P. 197.
2. Алимов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 9. С. 893.
3. Алимов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 10. С. 1012.
4. Алимов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 11. С. 1118.
5. Якушкин И. Г. // Изв. вузов. Радиофизика, 1985. Т. 28. № 5. С. 535.

6. Rino C.L. // Radio Sci., 1982. V. 17. № 4. P. 855.
7. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 — М.: Наука, 1978.
8. Buckley R. // Austr. J. of Phys., 1971. V. 24. № 3. P. 351.
9. Шишов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1971. Т. 14. № 1. С. 85.
10. Booker H. G., Majidiah G. // J. Atm. Terr. Phys., 1981. V. 43. № 11. P. 1199.
11. Денисов Н. Г., Татарский В. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1963. Т. 6. № 3. С. 488.
12. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1973. Т. 16. № 10. С. 1540.
13. Денисенко П. Ф. и др. // Геом. и аэрономия, 1994. Т. 34. № 6. С. 170.
14. Vats H. O. et al. // J. Atm. Terr. Phys., 1981. V. 43. № 12. P. 1235.
15. Salpeter E. E. // Astroph. J., 1967. V. 147. № 2. P. 433.
16. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1975. Т. 18. № 7. С. 948.
17. Buckley R. // Austr. J. of Phys., 1971. V. 24. № 3. P. 373.
18. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. — М.: Наука, 1990.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород

Поступила в редакцию
30 апреля 1996 г.

AMPLITUDE FLUCTUATIONS IN THE THEORY OF RADIO WAVE REFRACTION SCATTERING

V. A. Alimov, A. V. Rakhlin

Some aspects have been considered for the theory of radio wave refraction scattering applicable to investigations of radiation intensity fluctuations behind a random phase screen. Expressions have been derived for piecewise approximation of the distribution function of the intensity fluctuations in the near zone and in the region of random focusing behind the screen. The corresponding calculations are made with taking into account the finite dimensions of the external and internal scales of the turbulent inhomogeneities of the phase screen. It is shown, that as a rule, the refraction scattering of radio waves is characterized by a sharply expressed effect of random focusing of the radiation intensity behind the phase screen. But under the conditions of strongly developed turbulence of the medium of radio wave propagation (phase screen), this effect can be absent.

УДК 621.371

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СЛОЯ E_s ПО НАБЛЮДАЕМЫМ ДАННЫМ

C. H. Mouseev

Получена связь между коэффициентами физической и статистической моделей частоты экранирования среднеширотного слоя E_s , что позволяет заменить измерение некоторых интегральных параметров ионосферы их оценкой по выборке частоты экранирования. Выделен параметр, который отвечает за инерционные свойства плазмы в максимуме слоя E_s . Показано, что вечерний максимум электронной концентрации слоя E_s скорее всего объясняется наличием полусуточной составляющей скорости ветра.

Хорошо известно, что измерение многих физических параметров ионосферы имеет низкую точность и слишком дорого. В полной мере это относится и к параметрам слоя E_s . В данной работе предлагается путем сопоставления существующих физических моделей слоя E_s со статистическими эмпирическими моделями заменить измерение некоторых физических параметров слоя E_s их оценкой по выборке частоты экранирования, круглосуточно фиксируемой на ионосферных станциях через каждые 15 минут.

В работе [1] был осуществлен переход от детерминированного дифференциального уравнения теории ветрового сдвига к стохастическому в квазистационарном приближении. Там же показано, что при малых значениях дисперсии логарифма частоты экранирования f_b будет справедлив линеаризованный вариант уравнения для $\ln f_b(t)$

$$\frac{dV(t)}{dt} = b_1 - b_2 V(t) + n(t), \quad V(t) = \ln f_b(t), \quad (1)$$

где $b_1 = \frac{1}{2}[a_2 \exp\{-m_1\}(1 + m_1 + \ln A) - a_1]$, $b_2 = a_2 \exp\{-m_1\}$, $m_1 = 2m - \ln A$, $m = M[\ln f_b]$, $a_2 = -DN_0 f_2''$, $a_1 = -Df_2'' - Xf_1'U_0/R$, $A = e^2/(4\pi^2 m_e \epsilon_0)$, $M[\cdot]$ означает операцию математического ожидания, e и m_e — заряд и масса электрона, ϵ_0 — электрическая постоянная, D — коэффициент амбиполярной диффузии, N_0 — фоновая электронная концентрация, f_2'' и f_1' — соответственно вторая и первая производные электронной концентрации и зональной составляющей скорости ветра по высоте, X — отношение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли к полной, R — отношение частоты столкновения ионов

C. H. Mouseev

1125

к их гирочастоте, U_0 — детерминированная составляющая скорости зонального ветра, $n(t)$ — белый гауссовский шум с односторонней спектральной плотностью N_s , описывающий с точностью до константы флуктуации зональной составляющей скорости ветра. Все значения коэффициентов берутся на высоте максимума слоя E_s .

В то же время в работе [2] по наблюдаемым данным среднеширотной ионосферной станции вертикального зондирования г.Москвы была построена статистическая модель частоты экранирования. Несколько упрощенный вариант этой модели можно записать в следующем виде

$$y_t - \varphi y_{t-1} = a_t, \quad y_t = \ln f_b(t) - m(t), \quad (2)$$

где

$$m(t) = A_0/2 + \sum_{k=1}^2 \{A_k \cos(2\pi kt/s) + B_k \sin(2\pi kt/s)\}, \quad (3)$$

отсчеты y_t и y_{t-1} разнесены на $\Delta = 15$ мин, $s = 96$, a_t — белый гауссовский шум с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 .

Теоретическая модель (1) и эмпирическая модель (2) были построены независимо друг от друга с использованием качественно разных подходов: классического физического в первом случае и феноменологического во втором. Однако можно заметить, что уравнение (2) является разностным аналогом стохастического дифференциального уравнения (1). Поэтому допустимо сопоставление коэффициентов уравнения (2)-(3), оцениваемых по выборке наблюдаемых данных частоты экранирования, с физическими трудноизмеряемыми коэффициентами уравнения (1). Это сопоставление дает следующую связь между коэффициентами

$$a_1 = -\frac{1}{\Delta} \ln |\varphi|, \quad (4)$$

$$N_s = 4a_1\sigma^2/(1 - \exp\{-2a_1\Delta\}), \quad (5)$$

$$m = b_1/b_2 = \ln \sqrt{AN_0} - \frac{1}{2} \ln(1 + \alpha U_0), \quad (6)$$

где $\alpha = Xf'_1/(DRf''_2)$.

Интегральный параметр a_1^{-1} по смыслу является интервалом корреляции флуктуаций электронной концентрации в максимуме слоя E_s [1]. В работе [3] на обширном экспериментальном материале были проведены модельные расчеты времени переходных процессов в слое E_s . Это время оказалось порядка 1 часа. Оценка параметра a_1^{-1} по наблюдаемым данным f_b станции вертикального зондирования г.Москвы за 1976-1979 годы июнь-июль с помощью соотношения (4) была $a_1^{-1} \approx 70$ минут, что хорошо согласуется с качественной оценкой, данной в [1]. Параметр a_1^{-1} характеризует вязкие инерционные свойства ионосферной плазмы в максимуме

слоя E_s . Рассматривая физические параметры ионосферы, входящие в интегральный показатель a_1^{-1} , можно определить каким образом они влияют на инерционность плазмы в максимуме слоя E_s .

Соотношение (5) позволяет по выборке частоты экранирования оценить спектральную плотность зональной составляющей скорости ветра N_s .

Параметр m является средним значением $\ln f_b(t)$. В модели (2)-(3) среднее значение $\ln f_b(t)$ было аппроксимировано двумя членами ряда Фурье с периодами сутки и полсуток. Многими авторами [3,4] отмечается наличие в вероятностных характеристиках слоя E_s двух максимумов — глобального дневного и локального вечернего. Наличие дневного максимума объясняется зависимостью фоновой электронной концентрации от зенитного угла Солнца. О физическом механизме возникновения вечернего максимума существуют различные гипотезы. Как видно из (6) среднее $\ln f_b(t)$ состоит из двух слагаемых. Первое зависит от фоновой электронной концентрации и, стало быть, полностью определяется зенитным углом Солнца. Это слагаемое дает вклад в суточную составляющую среднего $\ln f_b(t)$. Второе слагаемое зависит от детерминированной составляющей скорости ветра U_0 . В [5] отмечается, что скорость ветра на высотах образования слоя E_s имеет сильные суточную и полусуточную составляющие. Поэтому наличие полусуточной составляющей в среднем $\ln f_b(t)$, ответственной за формирование вечернего максимума, можно объяснить влиянием на образование слоя E_s полусуточной составляющей скорости зонального ветра.

Выводы. Сопоставление коэффициентов физических и статистических моделей частоты экранирования слоя E_s позволяет заменить измерение части интегральных параметров ионосферы оценкой их по наблюдаемым данным частоты экранирования, а также физически объяснить некоторые статистические закономерности в поведении слоя E_s , выявленные эмпирическим путем.

ЛИТЕРАТУРА

- Лукин А. Н., Моисеев С. Н. // Изв. ВУЗов Радиофизика, 1991. Т. 34. № 8. С. 872-878.
- Лукин А. Н., Моисеев С. Н. // Геомагнетизм и аэрономия, 1993. Т. 33. № 2. С. 77-83.
- Гершман Б. Н., Игнатьев Ю. А., Каменецкая Г. Х. Механизмы образования ионосферного спорадического слоя на различных широтах. — М.: Наука, 1976. — 108 с.

4. Чавдаров С. С., Часовитин Ю. К., Чернышева С. П., Шефтель В. М. Среднеширотный спорадический слой E ионосферы. — М.: Наука, 1975. — 120 с.
5. Казимировский Э. С., Кокоурова В. Д. Движение в ионосфере. — Новосибирск: Наука, 1979. — 344 с.

Воронежский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 января 1994 г.

**DETERMINATION OF SOME INTEGRATED PARAMETERS OF
Es-LAYER ACCORDING TO THE OBSERVATIONAL DATA**

S. N. Moiseev

A relation has been obtained between factors of physical and statistical models of screen frequency of middle-latitude Es-layer, that permits us to replace the measurement of some integrated parameters of the ionosphere by their valuations on the observational data. The parameter is allocated, which is responsible for lag of properties of plasma in maximum of Es-layer. It is shown, that the evening maximum in statistical characteristics of the screen frequency of Es-layer is explained by the presence of half-daily component in the wind velocity.

УДК 621.371.246 : 621.3.029.66

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЧИСТЫМ ВОДЯНЫМ ПАРОМ НА ЧАСТОТАХ ВБЛИЗИ 1,5 ТГЦ

Н. И. Фурашов, Б. А. Свердлов, С. Н. Черняев

Выполнены измерения коэффициента поглощения чистого водяного пара в окне его относительной прозрачности в диапазоне длин волн $\lambda \approx 196 - 205$ мкм. Измерения проведены на эшелеттном вакуумном спектрометре при спектральном разрешении около $0,8\text{ см}^{-1}$, температуре 304 К в интервале давлений 12,5–28,5 Тор. Полученные данные в совокупности с результатами ранее выполненных в этом окне спектрометрических измерений поглощения в смеси водяной пар + сухой воздух (при атмосферном давлении смеси) свидетельствуют о том, что компонента коэффициента поглощения атмосферного водяного пара, квадратично зависящая от его парциального давления, на 26% меньше соответствующей компоненты коэффициента поглощения чистого водяного пара. В отличие от длинноволновых субмиллиметровых окон прозрачности, где несовпадение указанных компонент впервые было выявлено, в коротковолновом окне с центром на $\lambda = 200$ мкм процентная разница в их значениях примерно в два раза меньше.

Экспериментальные исследования [1, 2] молекулярного поглощения радиоволн водяным паром в длинноволновых субмиллиметровых окнах прозрачности атмосферы привели к обнаружению эффекта, который не объясняется существующими теориями столкновительного уширения спектральных линий газов и который, вероятно, имеет тесную связь с неустановленным до сих пор механизмом избыточного поглощения в парах воды. Он проявляется в том, что величина коэффициента поглощения чистого водяного пара, изменяющаяся в окнах прозрачности пропорционально квадрату его давления, не совпадает (вопреки теоретическим предсказаниям) с квадратичной компонентой коэффициента поглощения атмосферного водяного пара, а примерно в 1,5 раза превышает её. Таким образом, величина квадратичной по давлению водяного пара компоненты поглощения оказывается зависящей ещё и от давления постороннего газа (сухого воздуха).

Поскольку этот эффект был выявлен на материале единичных измерений, весьма желательно получить дополнительные экспериментальные доказательства его существования. Описываемые ниже измерения имели именно такую конечную цель. Мы выбрали для исследования окно относительной прозрачности с центром на частоте $\nu = 1,5$ ТГц ($\lambda = 200$ мкм),

так как в этом окне измерения квадратичной компоненты коэффициента поглощения водяного пара для смеси $H_2O +$ сухой воздух уже выполнены [3]. Наша задача, таким образом, заключалась в том, чтобы провести аналогичные измерения в чистом водяном паре и сопоставить полученные результаты с данными работы [3].

Измерения поглощения в чистых парах воды, как и измерения [3], выполнялись на вакуумном эшелеттном спектрометре [4, 5] с источником излучения — ртутной лампой ДРТ-220 — и пневматическим детектором ОАП-7. Как и в эксперименте [3], ширина аппаратной функции спектрометра (на половинном уровне) составляла около $0,8 \text{ см}^{-1}$, температура в его камере поддерживалась на уровне $304(\pm 2) \text{ К}$. Заполнение камеры (предварительно откаченной до давления $\sim 0,05 \text{ Тор}$) водяным паром производилось через натекатель из подогреваемой колбы с обезгаженной дистиллированной водой. Давление пара контролировалось масляным манометром с точностью не хуже 1%. Процедура измерений была, в основном, такой же, как и в работе [3]. Спектрограммы регистрировались в “вакууме” (остаточное давление $\sim 0,1 \text{ Тор}$) и при различных давлениях водяного пара в интервале длин волн $\lambda \approx 196 - 205 \text{ мкм}$, соответствующем центральной области его окна прозрачности. Скорость сканирования спектра составляла $0,37 \text{ мкм}/\text{мин}$, постоянная времени приемно-регистрирующего устройства равнялась 10 с.

Пример полученной из эксперимента зависимости эффективного в полосе пропускания спектрометра коэффициента поглощения $\bar{\Gamma}_{\text{эксп}}$ чистого водяного пара от длины волны дан на рис. 1. На нём точки — значения $\bar{\Gamma}_{\text{эксп}}$, определённые непосредственно по спектрограммам, кривая 1 — аппроксимирующая. Кривой 2 представлена теоретическая зависимость $\bar{\Gamma}_{\text{теор}}(\lambda)$. Данные рис. 1 соответствуют давлению водяного пара $e = 14,2 \text{ Тор}$ и температуре $T = 304 \text{ К}$.

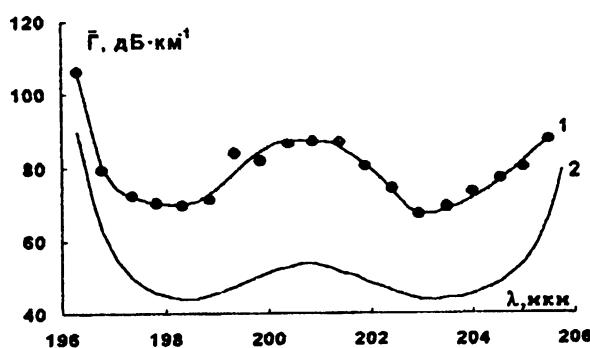


Рис. 1.

Значения $\bar{\Gamma}_{\text{теор}}(\lambda)$ (в $\text{дБ}/\text{км}$) вычислялись по формуле:

$$\bar{\Gamma}^{\text{теор}}(\lambda) = (4,34/L) \ln \left\{ \frac{\int_{\lambda-\Delta}^{\lambda+\Delta} A(\lambda - \lambda') d\lambda'}{\int_{\lambda-\Delta}^{\lambda+\Delta} A(\lambda - \lambda') \cdot \exp[(-L/4,34) \cdot \Gamma^{\text{теор}}(\lambda')] d\lambda'} \right\}, \quad (1)$$

где $L = 5,53 \cdot 10^{-3}$ км — длина оптического пути в спектрометре, $A(\lambda - \lambda')$ — аппаратная функция спектрометра, 2Δ — спектральный интервал, в котором $A(\lambda - \lambda') \neq 0$. В (1) использовано предположение, что интенсивность принимаемого излучения в отсутствие поглощения в пределах аппаратной функции не зависит от длины волны. Функция $A(\lambda - \lambda')$ определялась экспериментально методом, изложенным в [6, 7].

Входящий в (1) теоретический коэффициент поглощения $\Gamma^{\text{теор}}(\lambda)$ для монохроматического излучения рассчитывался так же, как и в работе [3]. Как и в [3], кроме поглощения молекулами H_2O , находящимися в основном колебательном состоянии $(0,0,0)$, учитывался вклад приходящихся на рассматриваемое окно прозрачности линий поглощения молекул H_2O , находящихся в возбуждённом низшем колебательном состоянии $(0,1,0)$, а также линий изотопозамещённых молекул D_2O и HDO . В случае чистого водяного пара полуширины $\Delta\nu$ линий H_2O для колебательного состояния $(0,1,0)$ принимались такими же, что и полуширины линий, соответствующих тем же вращательным переходам, для основного состояния этих молекул. Значения последних содержатся в [8]. Для полуширин линий D_2O и HDO ввиду отсутствия данных было принято значение $18,8 \text{ МГц}\cdot\text{Тор}^{-1}$, характеризующее среднюю полуширину линий вращательной полосы H_2O при $T = 304 \text{ К}$ [8].

Результаты расчёта спектрального распределения коэффициента поглощения чистого водяного пара в диапазоне $\lambda \approx 195 - 206 \text{ мкм}$ при $e = 14 \text{ Тор}$ и $T = 304 \text{ К}$ приведены на рис. 2 (кривая 1). Видно, что из-за наличия линий H_2O $(0,1,0)$, D_2O и HDO окно прозрачности оказывается довольно “изрезанным”; интенсивности этих линий (за исключением слабой линии D_2O с центром на $\lambda_0 = 202,77 \text{ мкм}$) превышают величину плавно меняющегося с длиной волны фонового поглощения, обусловленного крыльями расположенных слева и справа от окна линий H_2O $(0,0,0)$. С увеличением давления водяного пара относительный вклад линий, приходящихся на окно, в суммарное поглощение уменьшается, так как величина фонового поглощения растёт пропорционально e^2 , а интенсивности линий остаются при этом постоянными. Однако и при наибольших значениях e , при которых проводились измерения ($e \sim 28 \text{ Тор}$), роль линий H_2O $(0,1,0)$, D_2O и HDO остаётся заметной. На рис. 2 кривой 2 показан и усреднённый по аппаратной функции спектрометра теоретический коэффициент поглощения $\bar{\Gamma}^{\text{теор}}(\lambda)$. Видно, что при том спектральном раз-

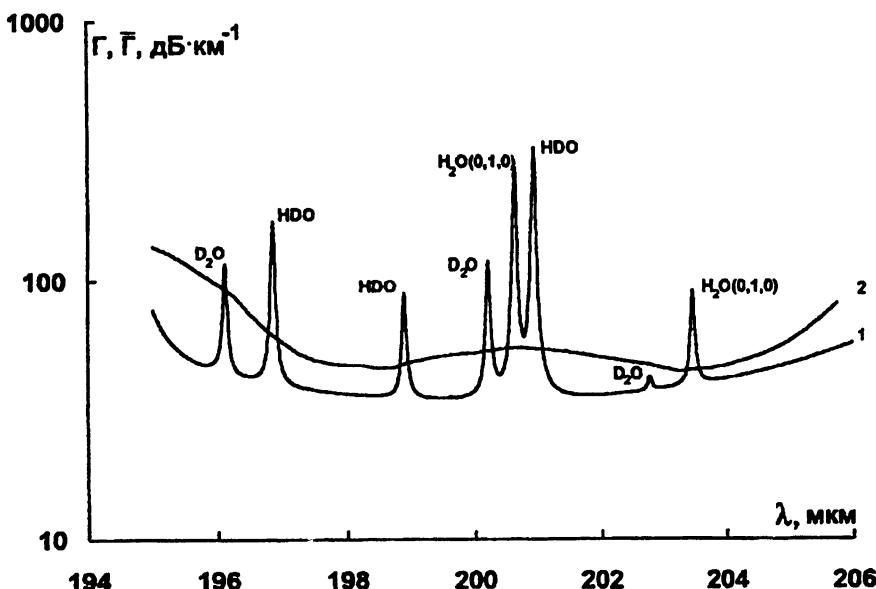


Рис. 2.

решении, которое имело место в эксперименте, линии поглощения, расположенные в окне прозрачности, полностью слажены. Лишь две наиболее сильные, близкие по длине волн линии H_2O ($0,1,0$) и HDO ($\lambda_0 = 200,64$ и $200,94$ мкм соответственно) проявляются на этой кривой (интегрально) в виде небольшого максимума поглощения.

Вернемся к данным рис. 1. Рассмотрение измеренной зависимости $\bar{\Gamma}_{\text{эксп}}(\lambda)$ и рассчитанной $\bar{\Gamma}_{\text{теор}}(\lambda)$ показывает, что они имеют примерно одинаковый вид, т.е. качественно эксперимент хорошо согласуется с теоретическим расчётом. В количественном же отношении результаты измерений существенно расходятся с расчётными данными: в минимумах и максимуме поглощения измеренная величина $\bar{\Gamma}_{\text{эксп}}$ превышает расчётные значения $\bar{\Gamma}_{\text{теор}}$ в $1,5 - 1,6$ раз. Примерно такое же расхождение наблюдается и при других значениях давления водяного пара в интервале его изменения в эксперименте.

Перейдём к основной части исследования — к определению компоненты коэффициента поглощения чистого водяного пара, квадратично зависящей от его давления. Предварительно отметим следующее. В эксперименте [3], выполнявшемся в газовой смеси $\text{H}_2\text{O} + \text{сухой воздух}$ при её давлении, равном атмосферному, вклад в поглощение приходящихся на окно прозрачности линий H_2O ($0,1,0$), D_2O и HDO даже на их резонансных частотах был незначительным (см. рис. 4 в [3]), так что измеренное в [3] минимальное поглощение в окне практически полностью определяется крыльями расположенных вне его линий H_2O ($0,0,0$). Малый вклад в поглощение линий, “населяющих” окно, в условиях эксперимента [3] объясняется тем, что

при наличии постороннего газа (сухого воздуха) интенсивность этих линий с ростом его давления p уменьшается как $1/p$ (при $p \gg e$), тогда как фоновое поглощение увеличивается пропорционально p .

В чистом водяном паре интенсивность линий, расположенных в окне прозрачности, превышает уровень фонового поглощения, и их вклад в усредненный по аппаратной функции коэффициент поглощения $\bar{\Gamma}$ оказывается вполне заметным, особенно вблизи $\lambda = 200,8$ мкм. Важным при этом для нас является то, что этот вклад, обозначаемый далее через $\bar{\Gamma}_\pi$, по сравнению с фоновым поглощением $\bar{\Gamma}_\Phi$, пропорциональным e^2 , имеет иную зависимость от давления водяного пара. Действительно, поскольку линии поглощения, приходящиеся на окно, применительно к условиям эксперимента являются слабыми (в центре любой из них $\Gamma_\pi(\lambda_0)L < 0,4$), и их ширины по отношению к ширине аппаратной функции $A(\lambda - \lambda')$ составляли всего лишь $\sim 2 \div 5\%$, то интегральное поглощение линий, "охватываемых" контуром $A(\lambda - \lambda')$, подчиняется так называемому линейному закону (см., например, [9]), и следовательно, их вклад в величину $\bar{\Gamma}$ пропорционален e . Отмеченное обстоятельство позволяет непосредственно из эксперимента определить как интересующую нас величину $\bar{\Gamma}_\Phi$, так и $\bar{\Gamma}_\pi$. Для этого, очевидно, нужно располагать экспериментальной зависимостью $\bar{\Gamma}^\text{эксп}(e)$.

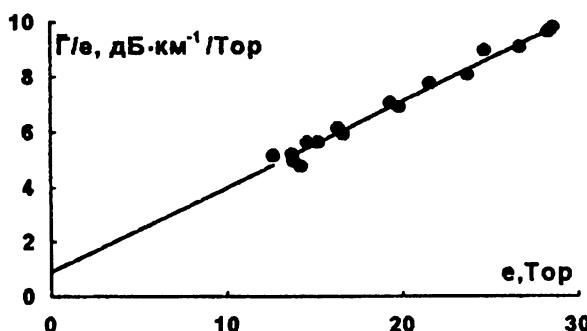


Рис. 3.

На рис. 3 в качестве примера приведена зависимость $\bar{\Gamma}^\text{эксп}/e$ от e , полученная на $\lambda = 203,2$ мкм в интервале $e \approx 12,5 \div 28,5$ Тор. Отсутствие экспериментальных точек для более низких давлений связано с резким увеличением погрешности измерений $\bar{\Gamma}^\text{эксп}$ из-за малого ослабления сигнала на оптическом пути спектрометра. Сплошная линия на рис. 3 — аппроксимирующая прямая

$$\bar{\Gamma}/e = \bar{\gamma}_\pi + \bar{\gamma}_\Phi e, \quad (2)$$

где $\bar{\gamma}_\pi = \bar{\Gamma}_\pi/e$, $\bar{\gamma}_\Phi = \bar{\Gamma}_\Phi/e^2$. Значения параметров $\bar{\gamma}_\pi$ и $\bar{\gamma}_\Phi$ определялись методом наименьших квадратов.

Обработка экспериментальных зависимостей $\bar{\Gamma}_{\text{эксп}}/e$ от e проводилась на трёх длинах волн — в минимумах и максимуме кривой $\bar{\Gamma}_{\text{эксп}}(\lambda)$ (см. рис. 1). Полученные значения $\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{эксп}}$, $\bar{\gamma}_{\text{л}}^{\text{эксп}}$ и их среднеквадратические ошибки представлены в таблице. Здесь же приведены расчётные значения $\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{теор}}$, $\bar{\gamma}_{\text{л}}^{\text{теор}}$ и величина избыточного фонового поглощения $\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{изб}} = \bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{эксп}} - \bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{теор}}$. Данные таблицы соответствуют температуре $T = 304\text{ K}$.

$\lambda, \text{ мкм}$	$\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{эксп}}$	$\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{теор}}$	$\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{изб}}$	$\bar{\gamma}_{\text{л}}^{\text{эксп}}$	$\bar{\gamma}_{\text{л}}^{\text{теор}}$
198,5	$0,305 \pm 0,010$	0,185	$0,120 \pm 0,010$	$0,90 \pm 0,25$	0,58
200,8	$0,295 \pm 0,010$	0,177	$0,118 \pm 0,010$	$2,0 \pm 0,2$	1,38
203,2	$0,310 \pm 0,010$	0,200	$0,110 \pm 0,010$	$0,85 \pm 0,25$	0,34

Примечание: Значения $\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{эксп}}$, $\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{теор}}$, $\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{изб}}$ даны в $\text{дБ}\cdot\text{км}^{-1}/\text{Тор}^2$, значения $\bar{\gamma}_{\text{л}}^{\text{эксп}}$, $\bar{\gamma}_{\text{л}}^{\text{теор}}$ — в $\text{дБ}\cdot\text{км}^{-1}/\text{Тор}$.

Из таблицы видно, что измеренное фоновое поглощение существенно превышает рассчитанное теоретически, и что избыточное поглощение $\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{изб}}$ на всех трёх длинах волн имеет близкие, перекрывающиеся среднеквадратической ошибкой значения. Несоответствие между экспериментом и расчётом наблюдается и в отношении величины $\bar{\gamma}_{\text{л}}$. Однако в отличие от избыточного фонового поглощения (имеющего место и в других окнах прозрачности), природа которого окончательно пока не установлена, это несоответствие легче поддаётся объяснению. Во-первых, расчётные значения коэффициента поглощения $\gamma_{\text{л}}^{\text{теор}}(\lambda)$, обусловленного приходящимся на окно прозрачности спектральными линиями H_2O (0,1,0), HDO и D_2O , из-за неточного знания их параметров (в первую очередь, полуширин) имеют лишь ориентировочный характер. Во-вторых, на величину $\bar{\gamma}_{\text{л}}^{\text{теор}}$ в гораздо большей степени, чем на $\bar{\gamma}_{\Phi}^{\text{теор}}$ (особенно в минимумах кривой $\bar{\Gamma}_{\text{эксп}}(\lambda)$) влияют крылья аппаратной функции, которые экспериментально определяются с большой погрешностью. Наконец, невысокая точность и экспериментальных значений $\bar{\gamma}_{\text{л}}^{\text{эксп}}$; так, на волнах $\lambda = 198,5$ и $203,2$ мкм их отличие от $\bar{\gamma}_{\text{л}}^{\text{теор}}$ укладывается в удвоенную среднеквадратическую ошибку.

Сопоставим данные проведённых измерений с результатом эксперимента [3]. В работе [3] для квадратичной по влажности воздуха ρ компоненты коэффициента поглощения смеси $\text{H}_2\text{O} +$ сухой воздух на волне $\lambda_* = 199,6$ мкм получено: $\gamma_{\Phi}^{\text{эксп}} = 0,255 \pm 0,010 \text{ дБ}\cdot\text{км}^{-1}/\text{г}^2\cdot\text{м}^{-6}$. Учитывая, что $\rho[\text{г}/\text{м}^3] = 289e/T$, для $T = 304\text{ K}$ в интересующей нас размерности получаем $\gamma_{\Phi}^{\text{эксп}} = 0,230 \pm 0,009 \text{ дБ}\cdot\text{км}^{-1}/\text{Тор}^2$. Указанные значения $\gamma_{\Phi}^{\text{эксп}}$ относятся к монохроматическому излучению. Для чистого водяного пара величина $\gamma_{\Phi}^{\text{эксп}}$ на волне 199,6 мкм может быть определена как сумма $\gamma_{\Phi}^{\text{теор}}(\lambda_*) + \gamma_{\Phi}^{\text{изб}}(\lambda_*)$. Для $\gamma_{\Phi}^{\text{теор}}(\lambda_*)$ расчёт даёт значение $0,173 \text{ дБ}\cdot\text{км}^{-1}/\text{Тор}^2$. Пренебрегая в отношении $\gamma_{\Phi}^{\text{изб}}$ эффектом усредне-

ния (т.е. считая $\gamma_{\phi}^{\text{изб}} \approx \bar{\gamma}_{\phi}^{\text{изб}}$ и полагая величину $\bar{\gamma}_{\phi}^{\text{изб}}(\lambda_*)$ равной $0,116 (\pm 0,006)$ дБ·км⁻¹/Тор² — среднему по данным таблицы значению, получаем: $\gamma_{\phi}^{\text{эксп}}(\lambda_*) = 0,289 \pm 0,006$ дБ·км⁻¹/Тор². Это значение примерно на 26% превышает величину квадратичной по e компоненты коэффициента поглощения атмосферного водяного пара.

Итак, данные настоящего исследования в совокупности с результатами измерений [3] подтверждают сделанный в [2] вывод о несовпадении значений квадратичных по e компонент коэффициентов поглощения чистого и атмосферного водяного пара. Однако по сравнению с длинноволновыми субмиллиметровыми окнами прозрачности с центрами вблизи 340 и 410 ГГц, где оно впервые было выявлено, в коротковолновом окне $\nu = 1500$ ГГц процентная разница в значениях указанных компонент примерно в два раза меньше. В работе [2] высказано предположение, что зависимость квадратичной компоненты коэффициента поглощения водяного пара от парциального давления сухого воздуха может быть связана с деформацией близких крыльев спектральных линий H₂O при добавлении к чистому водяному пару постороннего газа. На основании полученных данных внести большую определённость в интерпретацию этой зависимости довольно трудно. Для этого, очевидно, необходимо проведение дальнейших исследований, о чём более конкретно уже говорилось в [2].

В заключение проведём сопоставление полученной нами величины избыточного поглощения $\gamma_{\phi}^{\text{изб}} = 0,116 \pm 0,006$ дБ·км⁻¹/Тор² с данными работы [10], авторы которой выполнили измерения поглощения в чистом водяному паре на Фурье-спектрометре с многоходовой кюветой. Согласно данным рис.4 работы [10], соответствующим давлению $e = 18,43$ Тор и температуре $T = 296$ К, в окне прозрачности $\nu = 1500$ ГГц коэффициент избыточного поглощения, пропорционального e^2 , равен $\Gamma_{\phi}^{\text{изб}} = 40 \pm 3$ дБ·км⁻¹, откуда $\gamma_{\phi}^{\text{изб}} = 0,118 \pm 0,009$ дБ·км⁻¹/Тор². Поскольку значение $\gamma_{\phi}^{\text{изб}}$, полученное нами, соответствует другой температуре (304 К), для корректного сравнения данных необходимо знать зависимость $\gamma_{\phi}^{\text{изб}}$ от T . К сожалению, для частот порядка 1500 ГГц сведения о ней отсутствуют. Поэтому, полагая, что в интервале температур 296–304 К зависимость $\gamma_{\phi}^{\text{изб}}(T)$ может быть описана степенной функцией T^{-n} , ограничимся оценкой интервала значений n , при которых полученные нами и авторами работы [10] значения $\gamma_{\phi}^{\text{изб}}$ с учётом указанных выше их случайных ошибок можно считать согласующимися. Нетрудно найти, что $-4,2 \leq n \leq 5,4$. В работе [11] из измерений поглощения в чистом водяному паре на частотах 297, 343, 412, 460 ГГц было найдено, что $n = 9,0 \pm 1,5$. В диапазоне $\nu = 600 - 900$ ГГц величина n по данным работы [10] лежит в пределах $6 \div 14$. Наконец, на лазерной частоте $\nu \approx 2528$ ГГц, приходящейся на окно прозрачности, согласно экспериментальным данным [12], $n \approx 2,5$. Приведённые данные указывают на то, что в коротковолновой части субмиллиметрового диапазона зависимость избыточного поглоще-

ния в чистых парах воды от температуры с увеличением частоты ослабевает, приближаясь к теоретической температурной зависимости поглощения молекулами H_2O в окнах прозрачности.

Авторы выражают благодарность В.Ю. Каткову за участие в обсуждении результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94-02-05407-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Furashov N.I., Katkov V.Yu. // Int. J. IR&MM Waves, 1985. V. 6. № 8. P. 751.
2. Катков В. Ю., Фурашов Н. И. // Оптика атмосферы и океана, 1994. Т. 7. № 5. С. 602.
3. Свердлов Б. А., Фурашов Н. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1991. Т. 34. № 1. С. 3.
4. Аверков С. И., Аникин В. И. и др. // ПТЭ, 1963. № 1. С. 108.
5. Свердлов Б. А., Фурашов Н. И. // Оптика и спектроскопия, 1974. Т. 36. № 5. С. 861.
6. Соскин М. С. // Укр. физ. журн., 1959. Т. 4. № 2. С. 239.
7. Рядов В. Я., Фурашов Н. И., Шаронов Г. А. // Радиотехника и электроника, 1964. Т. 9. № 6. С. 943.
8. Benedict W.S., Kaplan L.D. // JQSRT, 1964. V. 4. № 3. P. 453.
9. Гуди Р. М. Атмосферная радиация, ч. 1. Основы теории. — М.: Мир, 1966. — 522 с.
10. Bohlander R. A., Emery R. J. et al. —In: Atmospheric Water Vapor / Ed. A. Deepak, T. D. Wilkerson, L. H. Ruhnke. — N.Y.: Academic Press, 1980. P. 241.
11. Катков В. Ю., Фурашов Н. И. — В кн.: Тезисы докл. IV Всесоюзной школы по распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. — Нижний Новгород, 1991. С. 41.
12. Станкевич В. С. // Радиотехника и электроника, 1977. Т. 22. № 6. С. 1273.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород

Поступила в редакцию
21 мая 1996 г.

INVESTIGATION OF ABSORPTION OF ELECTROMAGNETIC RADIATION BY PURE WATER VAPOR NEAR 1.5 THz*N. I. Furashov, B. A. Sverdlov, S. N. Chernyaev*

The measurements of the pure water vapor absorption coefficient have been performed in the transparency window at the wavelengths $\lambda \approx 196 - 205 \mu\text{m}$. Measurements were carried out by an echelle vacuum spectrometer with spectral resolution about 0.8 cm^{-1} at a temperature of 304 K in the pressure interval 12.5 – 28.5 Tor. The data obtained combined with the results of earlier spectrometric measurements of absorption in water vapor + dry air mixture in this window (at normal atmospheric pressure of the mixture) testify to the fact, that the component of the atmospheric water vapor absorption coefficient quadratically depending on its partial pressure is by 26% less than the corresponding component of the pure water vapor absorption coefficient. In contradistinction to long-wave submillimeter transparency windows, where the discrepancy of the mentioned components has first been found, in the short-wave window centered at $\lambda = 200 \mu\text{m}$ the percentage difference in their values is twice less.

УДК 535.42:532.783

**ДИФРАКЦИЯ И ПОРОГ
ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
В ГЕЛИКОИДАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ
С БОЛЬШИМ ШАГОМ СПИРАЛИ**

H. B. Шипов

Экспериментальные исследования резонансного переходного параметрического излучения в кристаллах показывают его перспективность как источника рентгеновского излучения [1]. Увеличение интенсивности излучения заряженной частицы в периодических структурах при $v < c_{\phi} = c/\sqrt{\epsilon}$, где ϵ — средняя диэлектрическая проницаемость, отмечалось в [2–4]. Если длина волны λ сравнима с шагом спирали d холестерического жидкого кристалла (ХЖК), то возрастание интенсивности обусловлено возбуждением дифрагирующей циркулярной поляризации (правой для правой спирали ХЖК), эффективный показатель преломления для которой меньше $\sqrt{\epsilon}$ [3]. Спектральная плотность излучения резонансно возрастает с приближением к брэгговской частоте $\omega_B = c\tau/2\sqrt{\epsilon}$, где $\tau = 4\pi/d$, и убывает с удалением от ω_B до значений $\sim \epsilon^2 \omega \delta^2 / c^2$ резонансного переходного излучения [3], δ — амплитуда изменения $\epsilon(z)$ вдоль оси z .

Целью настоящей работы является физическая интерпретация возрастания интенсивности излучения в ХЖК с большим шагом спирали, выявление из множества собственных волн тех, которые ответственны за это возрастание, решение вопроса о резонансности излучения, исследование зависимости спектральной плотности излучения от энергии (скорости) частицы, детальный анализ предельных случаев как по частоте излучения, так и по энергии частицы, в частности предела геометрической оптики.

Пусть заряженная частица движется вдоль спиральной оси z ХЖК со скоростью v , близкой к c_{ϕ} . Поэтому волновые векторы $\vec{k}_m = \vec{k}_0 + m\vec{\tau}$ для пространственных фурье-амплитуд \vec{E}_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) при малых τ составляют малый угол θ с осью z (рис. 1). В случае распространения волн вдоль оси ($\theta = 0$) известны четыре собственных решения в циркулярных поляризациях: $\vec{E}_j(z) = \vec{E}_{0j} e^{ik_{0j}z} + \vec{E}_{1j} e^{ik_{1j}z}$. Две из них $j = 1, 2$ распространяются вдоль оси z , а две другие $j = 3, 4$ — в противоположном направлении. Поэтому в результате проектирования бесконечной системы связанных уравнений на циркулярные орты $\hat{n}_{\pm} = (\hat{x} \cos \theta \pm i\hat{y} - \hat{z} \sin \theta)/\sqrt{2}$ в первом приближении оказываются связанными либо амплитуды E_0^-, E_1^+ :

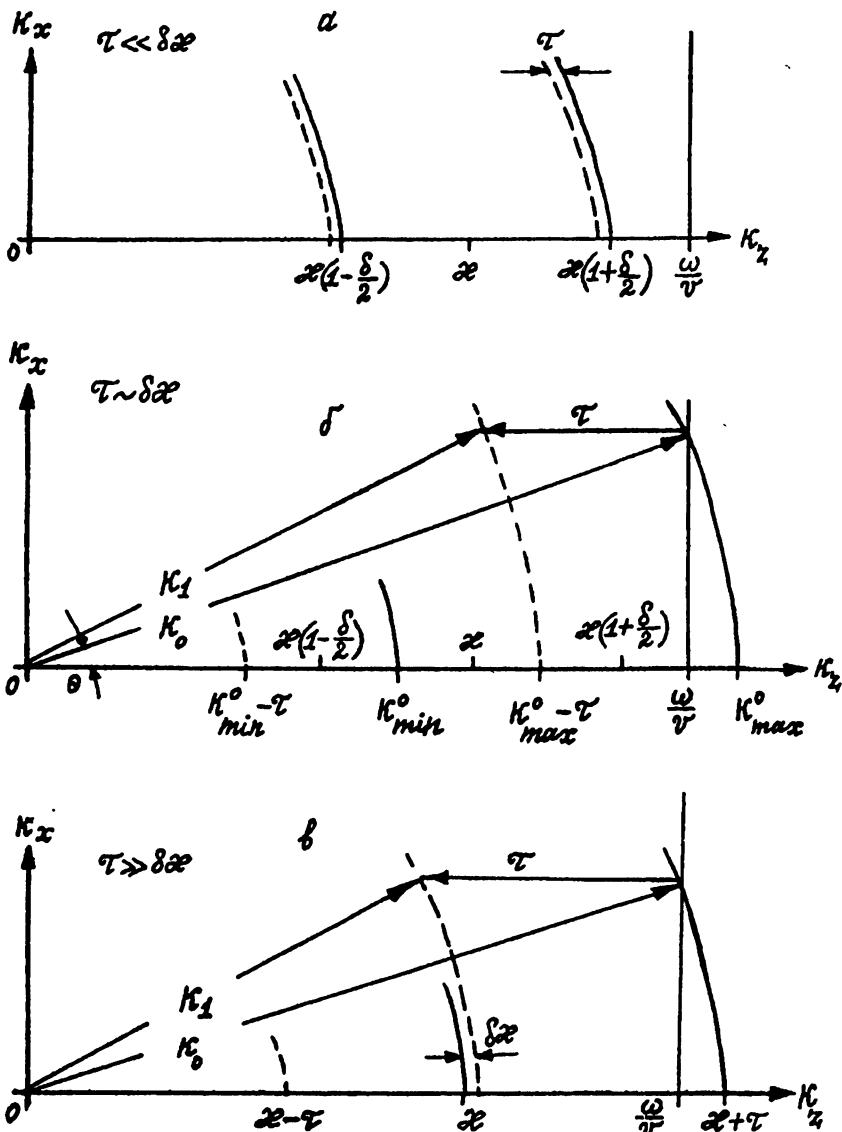


Рис. 1.

$$\begin{cases} E_0^- (1 - k_0^2/\alpha^2 + i\epsilon''/\epsilon) + \delta E_1^+ = ie v \theta \delta(\omega - k_0 v) / 2\sqrt{2}\pi^2 \omega \epsilon , \\ E_0^- \delta + (1 - k_1^2/\alpha^2 + i\epsilon''/\epsilon) E_1^+ = 0 , \quad \vec{k}_1 = \vec{k}_0 + \vec{r} , \end{cases} \quad (1a)$$

либо амплитуды E_0^+ , E_{-1}^- :

$$\begin{cases} E_0^+ (1 - k_0^2/\alpha^2 + i\epsilon''/\epsilon) + \delta E_{-1}^- = ie v \theta \delta(\omega - k_0 v) / 2\sqrt{2}\pi^2 \omega \epsilon , \\ E_0^+ \delta + (1 - k_{-1}^2/\alpha^2 + i\epsilon''/\epsilon) E_{-1}^- = 0 , \quad \vec{k}_{-1} = \vec{k}_0 - \vec{r} , \end{cases} \quad (16)$$

где $\epsilon'' = \text{Im } \epsilon$, $\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\text{Re } \epsilon}$, $\epsilon = (\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp})/2$, $\delta = (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})/2\epsilon$ — амплитуда модуляции диэлектрических свойств ($\delta \sim 0,01$), ϵ_{\parallel} , ϵ_{\perp} — главные значения тензора диэлектрической проницаемости вдоль длинной и короткой оси молекул соответственно. Все остальные амплитуды E_m ($|m| \geq 2$) вычисляются через E_0 , $E_{\pm 1}$, убывая по степеням θ^2 , то есть для угловых отклонений $\theta \sim \sqrt{\delta}$ точность решений (1) оказывается порядка непопречности волны δ .

Обращение в нуль детерминанта матрицы однородных систем (1) определяет волновые векторы собственных мод ХЖКК в двухвольновом приближении:

$$\vec{E}_j(r) = \hat{n}_{-} e^{i\vec{k}_{0j}\vec{r}} + P_j \hat{n}_{+} e^{i\vec{k}_{1j}\vec{r}}, \quad P_j = (\tau' \pm r)/\delta, \quad r = [(\tau')^2 + \delta^2]^{1/2}, \quad (2)$$

$$\vec{k}_{0j} = \vec{\alpha} + \hat{z}\vec{\alpha}(\tau' \pm r)/2, \quad \tau' = \tau/\alpha, \quad \vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta).$$

Дисперсионные поверхности при малых θ близки к сферам и пересекают ось k_z в точках $k_{\max, \min}^0 = \alpha(1 + (\tau' \pm r)/2)$ (рис. 1 б). В пределе геометрической оптики $\tau' \ll \delta$ ($d \gg \lambda/\delta$) собственные моды (2) переходят в линейные поляризации с показателями преломления $\sqrt{\epsilon_{\parallel}} = \sqrt{\epsilon}(1 + \delta/2)$ и $\sqrt{\epsilon_{\perp}} = \sqrt{\epsilon}(1 - \delta/2)$ (рис. 1 а), а вектор поляризации каждой из волн поворачивается вслед за директором (длинной осью молекул) при распространении вдоль оси z . Причем для первой волны $k_0 = \alpha(1 + \delta/2)$ вектор поля в каждой точке кристалла параллелен директору, а для второй волны $k_0 = \alpha(1 - \delta/2)$ — перпендикулярен директору.

Из условия обращения в бесконечность амплитуд E_0^- , E_1^+ в (1а) находим два угла $\theta_0 = (q + \tau' \pm r)^{1/2}$ испускания излучения в черенковский конус, когда плоскость $\omega = k_0 v$ пересекает две сплошные дуги (рис. 1), где

$$q = 2\left(\alpha - \frac{\omega}{v}\right)/\alpha = 2(v - c_{\Phi})/v = 1 - c^2/v^2 \epsilon.$$

Дифракционный конус $\vec{k}_1 = \vec{k}_0 + \vec{r}$ при этом содержит в себе черенковский конус. Аналогично, из условия максимума решений системы (1б) находим еще два угла испускания излучения в черенковский конус $\theta_0 = (q - \tau' \pm r)^{1/2}$, отвечающие пересечению плоскостью $\omega = \vec{k}_0 \vec{v}$ двух пунктирных дуг на рис. 1. Дифракционный конус $\vec{k}_{-1} = \vec{k}_0 - \vec{r}$ поэтому расположен внутри черенковского конуса.

Вычислим, следуя [5], силу торможения частицы собственным полем (радиационные потери):

$$F = (e\vec{v}/v) \iiint \vec{E}_0(\vec{k}_0, \omega) d^3 k_0 d\omega.$$

Амплитуды E_1 , E_{-1} дают осциллирующий во времени вклад, который исчезает при усреднении. Основной вклад в интеграл по полярному углу

θ дают углы испускания θ_0 . Если переменная интегрирования θ в точке полюса $\theta = \theta_0$ имеет малую положительную мнимую составляющую, то полюс обходится сверху, что сводится к умножению на $-\pi i$. Так исчезает диссипация в системах (1), а для спектральной плотности излучения с единицы длины траектории частицы находим:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega} = & \frac{e^2 \omega}{4rc^2} [(r - \tau')(q + \tau' + r)\theta(q + \tau' + r) + (r + \tau')(q - \tau' + r) \cdot \\ & \cdot \theta(q - \tau' + r) + (r + \tau')(q + \tau' - r)\theta(q + \tau' - r) + \\ & + (r - \tau')(q - \tau' - r)\theta(q - \tau' - r)], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\theta(x) = 1$ для $x > 0$, $\theta(x) = 0$ для $x \leq 0$.

Пусть $\frac{\omega}{v} > \alpha(1 + \delta/2)$, т.е. черенковское излучение в пределе геометрической оптики невозможно, $v < c/\sqrt{\epsilon_{||}}$ (рис. 1 а). Тем более оно невозможно в изотропной фазе ХЖК, поскольку $\frac{\omega}{v} > \alpha$. Незначительное охлаждение образца переводит кристалл в холестерическую фазу, вектор обратной решетки τ возрастает, и при $\frac{\omega}{v}, k_{\max}^o$ реализуется единственный черенковский конус излучения (рис. 1 б). Плавный максимум по частоте (шагу спирали) достигается при $\tau' = -q$, $\frac{dW}{d\omega} = e^2 \omega (\sqrt{q^2 + \delta^2} + q)/4c^2$, достигая при $q \sim -\delta$ значений $\sim e^2 \omega \delta / c^2$, что в δ^{-1} раз превышает спектральную плотность резонансного переходного излучения. Изменение частоты в несколько раз уменьшает спектральную плотность (3) незначительно, что указывает на нерезонансный характер явления. Напомним, что изменение частоты на один процент в условиях брэгговской дифракции [3] приводит к падению спектральной плотности излучения в несколько раз. Для рассматриваемых частот $\delta \omega \sim \tau$ отношение амплитуд циркулярных поляризаций в собственных модах (2) оказывается порядка единицы ($p_j \sim 1$), а различие их волновых векторов в (2) мало: $k_{0j} - k_{1j} = \tau \sim \delta \omega$, где $j = 1$ отвечает радиус дисперсионной поверхности k_{\max}^o (рис. 1 б). Таким образом мы имеем дело именно с излучением Вавилова–Черенкова, причем излучаемая мода $j = 1$ представлена двухволновым приближением (2), и мы можем использовать оценку по известной формуле Тамма–Франка $dW/d\omega = e^2 \omega \sin^2 \theta_0 / c^2 \sim e^2 \omega \delta / c^2$, поскольку $\theta_0 \sim \sqrt{\delta}$. При дальнейшем понижении температуры шаг спирали уменьшается, и при $\tau \sim \delta \omega$ (рис. 1 в) волновые векторы в излучаемой моде $j = 1$ в (2) значительно разливаются по величине: $k_{0j} - k_{1j} = \tau \gg \delta \omega$. Оценка спектральной плотности по формуле Тамма–Франка уже не справедлива, а выражение (3) спадает до типичных значений резонансного переходного излучения $\sim e^2 \omega \delta^2 / c^2$. В собственной моде $j = 1$ в (2) решающий вклад обеспечивает левая циркулярная поляризация $\hat{n}_+ e^{i\tilde{k}_{1j}\tilde{r}}$ (поскольку

$p_j \gg 1$), совпадающая по направлению со скоростью частицы (пунктирная дуга на рис. 1 в). Напомним, что с удалением от брэгговской частоты ω_B основной вклад в спектральную плотность дает правая (дифрагирующая) циркулярная поляризация, распространяющаяся в обратном направлении [3].

С увеличением скорости частицы плоскость ω/v начинает последовательно пересекать сферы $k_{\max}^0 - \tau$, k_{\min}^0 , $k_{\min}^0 - \tau$, возбуждая конусы излучения с меньшими углами раствора $2\theta_0$ (а значит и с меньшими интенсивностями). При этом последовательно становятся отличными от нуля второе, третье и четвертое слагаемые в (3), обуславливая четыре порога (рис. 2) для возбуждения двух физически различных $j = 1, 2$ собственных мод ХЖК (2). Пунктир на рис. 2 отвечает излучению в изотропной фазе, где показатель преломления $\sqrt{\epsilon}$.

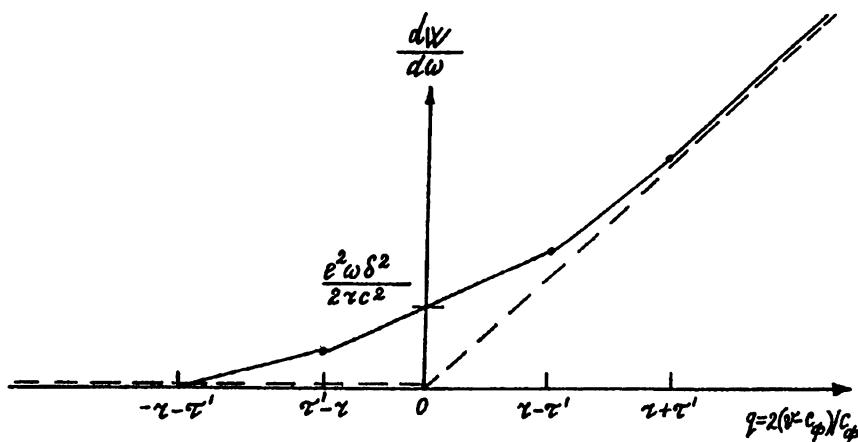


Рис. 2.

Развитое приближение применим для анализа экспериментального спектра пропускания света в скрещенных поляроидах через слой ХЖК толщиной $L = 4d = 38$ мкм [6] (рис. 3 б). Решая граничную задачу с использованием собственных мод (2) и учитывая, что на входной поверхности вектор падающей линейной поляризации совпадает с длинной осью молекул, для коэффициента пропускания света в скрещенных поляроидах получаем зависимость $T = (\tau'/r)^2 \cdot \sin^2 L \alpha r / 2$ (рис. 3 а), хорошо согласующуюся с экспериментом. Как и ожидалось, биения имеют нерезонансный характер и убывают с частотой, поскольку вектор поляризации основной моды $j = 1$ на выходной поверхности параллелен линейной поляризации падающей волны. Учет дополнительных амплитуд $E_{\pm 2}$ приводит к снижению первых максимумов зависимости $T_{(1/\lambda)}$ в соответствии с экспериментом [6].

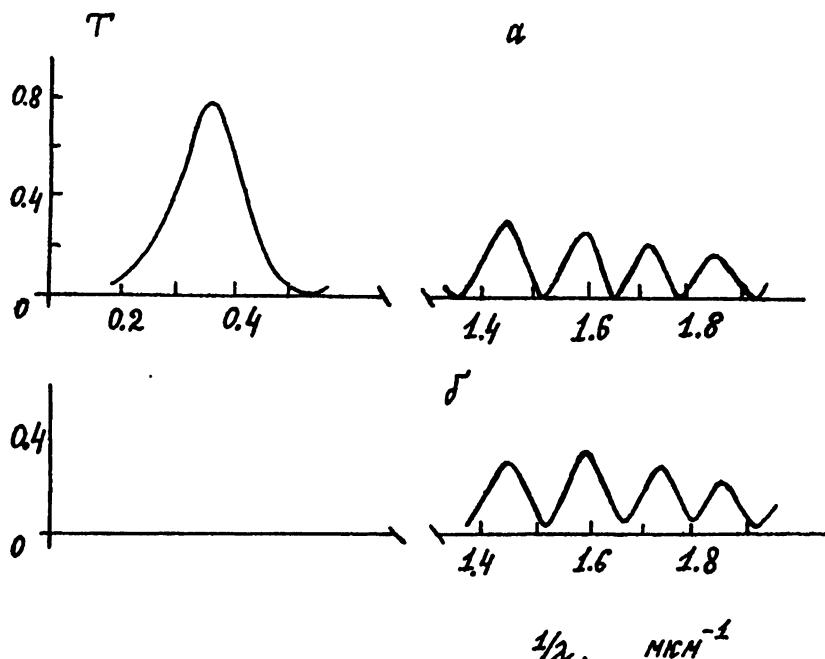


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасенко В. П., Барышевский В. Г., Зуевский Р. Ф. и др. — В сб.: Материалы XX Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. — М.: МГУ, 1991. С. 112.
2. Буц В. А. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 8. С. 996.
3. Беляков В. А., Шипов Н. В. — В сб.: Тезисы докладов XIV Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. — М.: МГУ, 1984. С. 85.
4. Шипов Н. В. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 11. С. 1309.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. С. 115.
6. Хоштария Д. Г., Осадчий С. М., Чилая Г. С. // Кристаллография. 1985. Т. 30. Вып. 4. С. 755.

Московский государственный
университет леса

Поступила в редакцию
9 сентября 1994 г.

**DIFFRACTION AND CHERENKOV RADIATION THRESHOLD
IN HELICAL STRUCTURES WITH A LARGE SPIRAL STEP**

N. V. Shipov

H. B. Shipov

1143

УДК 621.396.677

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ, ПРИНИМАЕМЫХ АНТЕННОЙ РЕШЁТКОЙ

B. T. Ермолов, A. Г. Флаксман, A. A. Анурип

Предложен метод оценивания параметров сигналов и весового вектора в адаптивных антенных решетках (АР) на основе оценивания параметров минимального многочлена выборочной корреляционной матрицы (КМ) входного процесса. Метод обладает высокой эффективностью и дает возможность получить оценки параметров сигналов с точностями, близкими к границам Крамера-Рао.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача пространственной обработки сигналов в многоэлементных АР обычно ставится следующим образом. Пусть имеется J точечных источников сигналов. С помощью N -элементной АР регистрируется возбуждаемое источниками поле, в виде N -мерного вектора X входного процесса:

$$X(t) = \sum_{i=1}^J a_i(t) \Phi_i + n(t), \quad (1)$$

где $a_i(t)$ — комплексная амплитуда i -го источника в одном элементе АР; Φ_i — вектор-фазор, описывающий амплитудно-фазовое распределение i -го сигнала; $n(t)$ — вектор аддитивных собственных шумов приемных устройств.

Система обработки сигналов, измеряя L временных выборок входного процесса, должна решить три основные задачи.

1. Оценить число действующих источников сигналов.

2. Оценить угловые направления на источники сигналов и их мощности. Если априори предполагается, что источники взаимно коррелированы, то вместо оценки мощности ставится более общая задача оценки элементов матрицы взаимных корреляционных моментов сигналов источников.

3. Оценить вектор W весовой обработки сигналов в АР. Такая задача возникает, если входной процесс (1) является помехой, на фоне которой обнаруживается полезный сигнал, описываемый заданным вектором S .

Эти задачи имеют статистический характер и должны, строго говоря, решаться статистическими, а не детерминистическими методами. Как

правило, поиск статистических методов ведется на основе анализа функции правдоподобия.

Решение первой задачи оценки числа источников методом максимума функции правдоподобия не существует. В самом деле, собственные шумы приемных каналов АР в (1) можно представить в виде суммы сигналов N слабых источников. Поэтому функция правдоподобия не имеет экстремума по переменной J . В связи с этим в ряде работ [1–6] для оценки числа источников предлагается модифицировать функцию правдоподобия путем добавления к ней некоторой корректирующей (или "штрафной") функции. Обычно это линейная функция от числа источников J . Модифицированная функция правдоподобия должна иметь максимум, положение которого является оценкой числа источников J . К сожалению статистически строго обосновать вид корректирующей функции пока не удалось. Решение этой задачи можно получить путем разделения собственных чисел оценочной КМ на шумовые и сигнальные с помощью некоторого порогового значения. Однако статистически строго обосновать выбор порога также пока не удалось, так как неизвестен закон распределения плотности вероятности шумовых собственных чисел этой матрицы.

Для решения второй задачи оценки угловых направлений на источники сигналов и их мощностей (или взаимных корреляционных моментов) предложено большое число методов [7–23]. В основном это аналоги методов спектрального оценивания. Среди этих методов целесообразно выделить методы проекционного типа, например, метод MUSIC [7, 12, 14, 15, 22]. Проекционные методы обладают достаточно высокой чувствительностью к слабым сигналам и при увеличении длины выборки дают асимптотически несмешанные оценки параметров сигналов. Кроме того при большом отношении сигнал/шум дисперсии оценок близки к предельным значениям, даваемым неравенством Крамера-Рао [7, 12]. В сущности любой проекционный метод сводится к построению оценки матрицы-проектора на шумовое подпространство. Однако предлагаемые оценки матрицы-проектора на шумовое подпространство также не имеют строгого статистического обоснования. Например, формирование проектора в базисе собственных векторов требует предварительной оценки размерности шумового подпространства, то есть решения первой задачи, что, как уже отмечалось, сопряжено с большими трудностями.

Для решения третьей задачи оценки вектора W весовой обработки в АР также предложено большое число методов. Среди них можно выделить группу градиентных методов [19–23] и группу методов обращения оценочной КМ входного процесса (1) [24–28]. Общей является проблема статистической устойчивости получаемой оценки вектора W . Статистическая неустойчивость обусловлена большим разбросом шумовых собственных чисел оценочной КМ и проявляет себя в виде флюктуаций компонент вектора W , принадлежащих подпространству собственного шума. В то же

время основной вклад в величину выходного отношения сигнал/шум дает как раз подпространство собственного шума. Поэтому проблема статистически устойчивой оценки матрицы-проектора на шумовое подпространство имеет важное значение и для решения третьей задачи.

В [29] предложен статистический среднеквадратический критерий оценки параметров (степени и коэффициентов) минимального многочлена выборочной КМ входного процесса (1). Этот критерий согласован с критериями максимума функции правдоподобия и минимума информационного расстояния [30]. Параметры минимального многочлена связаны с параметрами источников сигналов, действующих на АР. Однако в [29] вопросы оценки параметров источников через параметры минимального многочлена не рассматривались.

В настоящей работе предложен метод оценивания параметров сигналов и весового вектора АР на основе оценивания параметров минимального многочлена. Параметры этого многочлена находятся из среднеквадратического критерия, согласно которому для выборочной корреляционной матрицы отыскивается матричный многочлен наименьшей степени с минимальной евклидовой нормой не превышающей заданный порог. Величина порога выбирается так, чтобы уменьшить влияние собственного шума. Это позволяет оптимизировать ранг и собственные числа матрицы-проектора на шумовое подпространство, что в свою очередь дает возможность получить оценки числа источников, их угловых положений и мощностей, обладающие высокой эффективностью.

2. ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (ЧИСЛО ВЫБОРОК БЕСКОНЕЧНО)

Рассмотрим N -элементную АР произвольной геометрии. Пусть имеется $J < N$ источников сигналов с угловыми координатами $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_J$ и мощностями $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_J$, а также аддитивные собственные шумы приемных устройств. Комплексный случайный вектор $X(t)$ входного процесса в АР можно представить в виде (1). Будем считать, что сигналы и аддитивные шумы представляют собой случайные, эргодичные, нормально распределенные комплексные величины с нулевым средним значением. При этом шумы не коррелированы с сигналами, а также статистически независимы в различных приемных каналах и имеют единичную мощность в каждом канале. В то же время сигналы различных источников могут быть коррелированными между собой. Тогда КМ входного процесса (1) в приемных каналах АР имеет вид [7, 20]:

$$M = \langle X(t)X(t)^H \rangle = FGF^H + E. \quad (2)$$

Здесь $F = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_J)$ — матрица размерности $N \times J$, составленная из вектор-столбцов Φ_i ; $G = \{\sqrt{\nu_i\nu_j}r_{ij}\}$ — матрица размерности $J \times J$,

описывающая статистические свойства сигналов в элементе АР, с которым связано начало системы координат; $\nu_i = \langle |a_i(t)|^2 \rangle$ — мощность i -го сигнала; r_{ij} — коэффициент корреляции i -го и j -го сигналов; E — единичная матрица, описывающая статистические свойства собственного шума; $\langle \dots \rangle$ и H обозначают операции усреднения и эрмитова сопряжения.

В случае $J < N$ векторное пространство размерности N разбивается на два подпространства: сигнальное и шумовое. Первое из них имеет размерность J и соответствует сигнальным собственным числам КМ (2) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_J \geq 1$. Второе подпространство является ортогональным первому, имеет размерность $N - J$ и соответствует шумовым собственным числам КМ (2) $\lambda_{J+1} = \lambda_{J+2} = \dots = \lambda_N = 1$.

Вводя базис из собственных векторов U_i ($i = 1, 2, \dots, N$) КМ (2) можно представить в виде разложения [22, 24]

$$M = \sum_{j=1}^N \lambda_j U_j U_j^H. \quad (3)$$

Так как КМ (2) имеет кратные собственные числа, то (3) удобнее представить в другом эквивалентном виде:

$$M = \sum_{j=1}^K \lambda_j P_j, \quad (4)$$

где P_j — матрица-проектор на собственное подпространство, соответствующее собственному числу λ_j ; K — число неравных между собой собственных чисел ($K \leq J + 1$). Сумма проекторов P_j дает единичную матрицу E .

Пусть из N собственных чисел точной КМ M неравными между собой являются K чисел $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_K$. Тогда ее минимальный многочлен будет иметь вид [31]:

$$\varphi_K(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_K). \quad (5)$$

Подставим в этот многочлен в качестве аргумента КМ M . Получим

$$\varphi_K(M) = (M - \lambda_1 E)(M - \lambda_2 E) \dots (M - \lambda_K E). \quad (6)$$

Сомножитель $(M - \lambda_i E)$ представляет собой матрицу, аннулирующую (зануляющую) векторы i -го собственного подпространства. Поскольку в (6) присутствуют все K сомножителей, то матрица $\varphi_K(M)$ аннулирует любой вектор N -мерного пространства. Это значит, что матрица $\varphi_K(M)$ является нулевой, т.е. $\varphi_K(M) = [0]$.

Если в (6) выбрать ограниченное число сомножителей K_1 ($K_1 < K$), то получим ненулевую матрицу: $\varphi_{K_1}(M) \neq [0]$. Эта матрица будет, однако,

аннулировать любой вектор S , который принадлежит совокупности выбранных собственных подпространств, т.е. $\varphi_{K_1}(M)S = [0]$. В частности, если исключить из (6) только один i -ый сомножитель, то получим матрицу $\varphi_{K-1}^{(i)}(M)$, которая будет проектировать любой вектор на i -ое собственное подпространство. Таким образом можно построить входящие в (4) матрицы-проекторы P_i ($i = 1, 2, \dots, K$) в виде матричных многочленов:

$$P_i = \left[\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^K (M - \lambda_p E) \right] \left[\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^K (\lambda_i - \lambda_p) \right]^{-1}. \quad (7)$$

Соответствующее i -ому подпространству собственное число матрицы P_i равно единице, а остальные ($K-1$) собственных чисел равны нулю. Свойства матриц-проекторов такого типа можно найти в [32].

Построение матриц-проекторов P_i ($i = 1, 2, \dots, K$) в принципе решает поставленные в части I задачи обработки сигналов. При этом важную роль играет матрица-проектор $P_{\text{ш}}$ на шумовое подпространство, которую можно получить из (7), полагая $i = K$ и $\lambda_K = 1$. Тогда

$$P_{\text{ш}} = \left[\prod_{p=1}^{K-1} (M - \lambda_p E) \right] \left[\prod_{p=1}^{K-1} (1 - \lambda_p) \right]^{-1}. \quad (8)$$

Определение числа источников сигналов осуществляется на основании соотношения

$$J = N - Sp P_{\text{ш}}, \quad (9)$$

где $Sp(\cdot)$ — след матрицы.

Направления на источники сигналов отождествляются согласно проекционного метода с максимумами функции [7, 12, 14, 15, 18]

$$\eta(\theta) = [S^H(\theta) P_{\text{ш}} S(\theta)]^{-1}, \quad (10)$$

где $S(\theta)$ — нормированный управляющий вектор произвольного направления θ . Выражение в квадратных скобках имеет физический смысл части выходной мощности АР, соответствующей подпространству собственного шума. Если текущий угол θ у вектора $S(\theta)$ совпадает с направлением на любой источник сигнала $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_J$, то этот вектор будет принадлежать сигнальному подпространству, а его проекция на шумовое подпространство будет равна нулю. Поэтому в этой точке функция $\eta(\theta)$ будет иметь особенность типа 0^{-1} . По этим пикам функции $\eta(\theta)$ определяются угловые положения на источники сигналов.

В наиболее простом случае одного источника КМ М имеет два собственных числа λ_1 и $\lambda_2 = 1$. Проектор (8) на шумовое подпространство будет тогда иметь вид: $P_{\text{ш}} = (M - \lambda_1 E)(1 - \lambda_1)^{-1}$, а функция $\eta(\theta) = (1 - \lambda_1)[S^H(\theta) M S(\theta) - \lambda_1]^{-1}$. В этом случае проекционный метод полностью эквивалентен согласованной обработке, которая является

оптимальной и сводится к измерению мощности $S^H(\theta)MS(\theta)$ при сканировании лучем антенны.

В случае двух и более источников согласованная обработка перестает быть оптимальной и имеет место отличие метода согласованной обработки и проекционного метода. В детерминистском случае проекционный метод дает точные значения параметров сигналов, в то время как согласованная обработка дает систематические ошибки.

Элементы матрицы взаимных корреляционных моментов сигналов можно найти исходя из выражения [7]:

$$G_{ij} = B_i^H M B_j - \sigma_{ij}, \quad (11)$$

где вектор $B_i = [E - F_i(F_i^H F_i)^{-1}F_i^H]\Phi_i$ обеспечивает вычитание всех сигналов, кроме i -го; матрица F_i размерности $N \times (J - 1)$ получается из матрицы вектор-фазоров F в (2) путем исключения вектор-фазора Φ_i направления на i -ый источник, σ_{ij} — символ Кронекера.

Наконец, для решения третьей задачи определения весового вектора АР необходимо найти обратную КМ M^{-1} , т.к. оптимальный весовой вектор $W = M^{-1}S$ [25]. С учетом (4) имеем, что

$$M^{-1} = \sum_{j=1}^K \frac{1}{\lambda_j} P_j = \sum_{j=1}^{K-1} \frac{1}{\lambda_j} P_j + P_{\text{ш}}; \quad W = \sum_{j=1}^{K-1} \frac{1}{\lambda_j} P_j S + P_{\text{ш}} S. \quad (12)$$

Если собственные числа подпространства помеховых сигналов велики по сравнению с единицей, то первое слагаемое в (12) играет незначительную роль и $W \approx P_{\text{ш}} S$. Заметим также, что первую формулу в (12) особенно удобно использовать для многолучевых АР, когда необходимо одновременно обнаруживать сигналы с различных направлений. В этом случае достаточно один раз найти обратную КМ M^{-1} и затем сформировать весовые векторы для каждого из лучей.

Минимальный многочлен (5) можно представить в другом виде

$$\varphi_K(\lambda) = \lambda^K - p_1 \lambda^{K-1} - p_2 \lambda^{K-2} - \dots - p_{K-1} \lambda - p_K, \quad (13)$$

где p_i — действительные коэффициенты. Учитывая, что $\varphi_K(M) = [0]$, получим

$$M^K - p_1 M^{K-1} - p_2 M^{K-2} - \dots - p_{K-1} M - p_K E = [0]. \quad (14)$$

Отсюда следует, что $K+1$ степенных матриц E, M, M^2, \dots, M^K являются линейно зависимыми, а любой набор из K этих матриц будет линейно независимым.

Из (14) можно найти обратную КМ M^{-1} в виде разложения по K степенным матрицам $E, M, M^2, \dots, M^{K-1}$. Для этого разделим (16) на p_K ($p_K \neq 0$) и преобразуем к виду

$$M(c_1 E + c_2 M + c_3 M^2 + \dots + c_K M^{K-1}) = E. \quad (15)$$

Коэффициенты разложения c_i связаны с коэффициентами минимального многочлена p_i в (13) соотношениями [26, 27]:

$$c_1 = -\frac{p_{K-1}}{p_K}, \quad c_2 = -\frac{p_{K-2}}{p_K}, \dots, c_{K-1} = -\frac{p_1}{p_K}, \quad c_K = \frac{1}{p_K}. \quad (16)$$

Выражение в круглых скобках в (15) представляет собой обратную КМ M^{-1} . Такое разложение обратной КМ использовалось в [16, 26–28].

3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (ЧИСЛО ВЫБОРОК КОНЕЧНО)

Система обработки сигналов регистрирует L выборочных линейно-независимых векторов X_l входного процесса (1). Поэтому вместо точной КМ (2) используется ее максимально правдоподобная оценка [7, 20, 22]

$$\hat{M} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L X_l X_l^H. \quad (17)$$

Элементы оценочной КМ являются случайными величинами и имеют совместное распределение плотности вероятности Уишарта [22]. В силу случайного характера вероятность появления кратных собственных чисел ничтожно мала. Поэтому, при $L \geq N$ эта матрица имеет N случайных собственных чисел $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N > 0$. Шумовое собственное число, равное единице и имеющее кратность $N - J$ для точной КМ, размножается на $N - J$ простых собственных чисел оценочной КМ \hat{M} . Разброс шумовых собственных чисел возрастает с уменьшением числа выборок L . Они могут принимать значения, существенно меньшие единицы. При $L < N$ оценочная КМ \hat{M} является вырожденной и имеет L положительных собственных чисел, а $N - L$ ее собственных чисел равны нулю. Подпространство, соответствующее нулевым собственным числам, ортогонально подпространству выборочных векторов $X(l)$ и называется ядром КМ \hat{M} . Ядро характерно тем, что не содержит апостериорных данных о сигналах. Поэтому выводы в отношении их свойств в ядре можно сделать только на основе априорных данных [28]. Наконец, если $L \rightarrow \infty$, то КМ $\hat{M} \rightarrow M$.

Если к матрице (17) подходить строго детерминистически, то многочлен (5) необходимо записать в виде $\phi_N(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \mu_j)$. Это характеристический многочлен степени N . Отсюда следует, что $\phi_N(\hat{M}) = [0]$ и линейно независимыми будут N степенных матриц $E, \hat{M}, \hat{M}^2, \dots, \hat{M}^{N-1}$. Таким образом при переходе от точной КМ M к выборочной КМ \hat{M} число линейно независимых матриц увеличивается от K ($K < N$) до N . Это обусловлено влиянием собственного шума и появлением множества шумовых собственных чисел вместо одного. Поэтому для оценки

параметров минимального многочлена, степень которого равна K , детерминистский подход ($\epsilon_m(M) = [0]$) не годится. В [29] предложено для оценки параметров минимального многочлена использовать статистику вида:

$$I_m = \min_{c_n} \|\epsilon_m(\hat{M})\|^2 = \min_{c_n} Sp[\epsilon_m(\hat{M})]^2, \quad (18)$$

где $\epsilon_m(\hat{M}) = E - \sum_{n=1}^m c_n \hat{M}^n$. Степень минимального многочлена находится из решения пороговой задачи. При этом используется априорная информация о статистических свойствах собственного шума. В (2) предполагалось, что КМ собственного шума равна единичной матрице. Поэтому априори можно утверждать, что при отсутствии внешних источников сигналов степень минимального многочлена $K = 1$. Полагая теперь в (18) $m = 1$ и считая, что в (17) выборки берутся только из собственного шума, можно вычислить для статистики I_1 ее среднее $\langle I_1 \rangle$ и среднеквадратическое отклонение σ_1 [29].

$$\langle I_1 \rangle = \frac{N^2 - 1}{N + L}, \quad \sigma_1 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N + L} \sqrt{1 + (2N^2 - 3)/NL}. \quad (19)$$

По этим данным определяется порог T , который можно принять равным, например, $T = \langle I_1 \rangle$ или $T = \langle I_1 \rangle + \sigma_1$. Величина порога зависит от числа выборок L и числа элементов N .

При наличии в системе не только собственного шума, но и сигналов, статистика I_1 превышает значение порога. Так как с ростом m от 1 до N функционал (18) убывает до нуля, то всегда существует такое значение $m = \hat{K}$, при котором $I_m < T$. Это значение \hat{K} и принимается за оценку степени минимального многочлена, так как дальнейшее уменьшение I_m будет обусловлено влиянием шумовых собственных чисел. Получаемая при этом матрица $\epsilon_m(\hat{M})$ будет наиболее близкой к нулевой матрице. При $L \rightarrow \infty$ значение $T \rightarrow 0$ и мы приходим к детерминистическому случаю, когда $\epsilon_m(M) = [0]$.

В [29] показано, что критерий (18) тесно связан с критериями минимума информационного расстояния и максимума функции правдоподобия. В частности, при $L \rightarrow \infty$ все критерии становятся асимптотически эквивалентными. В то же время критерий (18) является наиболее простым, поскольку выражается в виде квадратичного функционала.

Входящая в (18) матрица $\epsilon_m(\hat{M})$ представляет собой матричный многочлен степени m . Соответствующий ему алгебраический многочлен запишем в виде

$$\epsilon_m(\lambda) = 1 - \sum_{n=1}^m c_n \lambda^n = \prod_{n=1}^m (1 - \gamma_n \lambda), \quad (20)$$

где γ_n — величина обратная корню многочлена $\epsilon_m(\lambda)$. Многочлен такого типа получается из минимального многочлена (5) путем его деления на

число $(-1)^K \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_K$, не равное нулю. В соответствии с (20) выражение (18) запишем в виде:

$$I_m = \min_{\gamma_n} \|\epsilon_m(\hat{M})\|^2 = \min_{\gamma_n} Sp[\prod_{n=1}^m (E - \gamma_n \hat{M})^2], \quad (21)$$

где $\epsilon_m(\hat{M}) = \prod_{n=1}^m (E - \gamma_n \hat{M})$, а минимизация достигается за счет выбора чисел γ_n .

Матрица $\epsilon_m(\hat{M})$ аналогично (6) имеет ряд сомножителей. Так же как и (6) она будет аннулировать любой вектор при $m = N$, так как $\epsilon_N(\hat{M}) = [0]$. При $m < N$ векторы будут аннулироваться в некоторую сферу минимального размера. Минимальными будут и значения собственных чисел матрицы $\epsilon_m(\hat{M})$, так как критерий (21) можно записать в виде:

$$I_m = \min_{\gamma_n} \sum_{i=1}^N \prod_{n=1}^m (1 - \gamma_n \mu_i)^2. \quad (22)$$

Условие минимума функционала (21) будет

$$\frac{\partial I_m}{\partial \gamma_n} = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (23)$$

Отсюда получим следующую систему нелинейных уравнений

$$\gamma_n = Sp[\hat{M} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^m (E - \gamma_i \hat{M})^2] \{Sp[\hat{M}^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^m (E - \gamma_i \hat{M})^2]\}^{-1}, \quad (24)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Эта система уравнений для каждого m решается итерационным путем. Причем m значения γ_n , вычисленные для функционала I_m , являются начальными приближениями для вычисления $(m+1)$ чисел γ_n для функционала I_{m+1} . При $m = 1$ итераций не требуется и из (24) сразу имеем, что $\gamma_1 = (Sp\hat{M})(Sp\hat{M}^2)^{-1}$. Практика вычислений показывает, что итерационный процесс сходится быстро. Например, достаточно не более пяти итераций, чтобы значения γ_n были вычислены с точностью 10^{-4} при $m = 4$. Полученный набор чисел γ_n дает оценки величин, обратных собственным числам КМ M . Поэтому оценками собственных чисел будут величины γ_n^{-1} . Наименьшее из них дает оценку шумового собственного числа, а другие дают оценки сигнальных собственных чисел.

Теперь аналогично (7) построим оценки матриц-проекторов

$$\hat{P}_i = [\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^K (E - \gamma_p \hat{M})] [\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^K (1 - \frac{\gamma_p}{\gamma_i})]^{-1}. \quad (25)$$

Выражение (25) перейдет в (7) при $L \rightarrow \infty$, если учесть, что $\hat{K} \rightarrow K$, $\hat{M} \rightarrow M$, $\gamma_p \rightarrow \lambda_p^{-1}$, $\gamma_i \rightarrow \lambda_i^{-1}$, и сделать простые алгебраические преобразования. Среди этих матриц имеется оценка проектора \hat{P}_w на подпространство собственного шума, которая получается при подстановке в (25) в качестве γ_i наибольшего из полученного набора чисел γ_n .

Теперь число действующих источников J оценивается по формуле

$$\hat{J} = N - \{Sp\hat{P}_w\}_{OK}, \quad (26)$$

где $\{\dots\}_{OK}$ — обозначает округление до целого числа. Выражение (26) является аналогом точного выражения (9).

Угловые координаты источников сигналов отождествляются с максимумами функции

$$\hat{\eta}(\theta) = [S^H(\theta)\hat{P}_w^2 S(\theta)]^{-1}. \quad (27)$$

Выражение (27) также является аналогом точной формулы (10). Максимум функции $\hat{\eta}(\theta)$ совпадает с минимумом функции $S^H(\theta)\hat{P}_w^2 S(\theta)$. В свою очередь глубина минимума этой функции зависит от того, насколько близки к нулю сигнальные собственные числа матрицы $\epsilon_m(\hat{M})$. Но эта матрица выбирается наиболее близкой к нулевой матрице по критерию (21). Следовательно ее собственные числа также наиболее близки к нулю. Поэтому матрица \hat{P}_w наиболее эффективно аннулирует векторы сигнального подпространства.

Наконец, если оценены угловые положения $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_K$, источников сигналов, то их мощности и коэффициенты корреляции могут быть оценены с помощью (11), в котором точная КМ M заменяется на выборочную КМ \hat{M} , а матрица F_i и вектор Φ_i строится с использованием оценок $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_K$.

Предположим теперь, что число выборок входного процесса (1) $L < N$. В этом случае выборочная КМ \hat{M} в (17) имеет L отличных от нуля собственных чисел и $N - L$ нулевых. Приведенные выше рассуждения будут справедливыми, если их отнести не ко всему N -мерному пространству, а к L -мерному подпространству выборочных векторов. В частности, необходимо в (18) матрицу $\epsilon_m(\hat{M})$ записать в виде:

$$\epsilon_m(\hat{M}) = P_{||} - \sum_{n=1}^m c_n \hat{M}^n, \quad (28)$$

где $1 \leq m \leq L$, $P_{||}$ — тождественный проектор на подпространство выборочных векторов.

Минимизировать квадрат нормы этой матрицы невозможно, так как заранее не известна матрица-проектор $P_{||}$. Чтобы решение этой задачи стало возможным, в правой части (28) добавим ортогональный проектор

P_{\perp} на ядро матрицы \hat{M} . Это приводит нас вновь к выражению (18), так как $P_{||} + P_{\perp} = E$. При этом

$$I_m = \min_{c_n} Sp[P_{||} - \sum_{n=1}^m c_n \hat{M}^n]^2 + SpP_{\perp}^2. \quad (29)$$

Второе слагаемое $SpP_{\perp}^2 = SpP_{\perp} = N - L$ является постоянной величиной. Поэтому минимум функционала (18) совпадает с минимумом первого слагаемого в (29), которое равно квадрату нормы матрицы (28). Таким образом, при $L < N$ вместо (28) можно использовать $\epsilon_m(\hat{M})$ из (18). При этом нужно учитывать, что с ростом m величина I_m уменьшается не до нуля, а до величины $N - L$. Для разрешения J источников минимально необходимое число выборок $L = J + 1$. В этом случае существует одно шумовое собственное число КМ \hat{M} и следовательно оценка проектора $\hat{P}_{\text{ш}}$ может быть получена.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В качестве примера использования теории рассмотрим задачу определения числа некоррелированных сигналов, принимаемых АР. Для определенности выберем линейную АР с шагом $d = 0.5\lambda$ (λ - длина волны) и числом элементов $N = 10$. Случайный вектор $X(t)$ входного процесса представим в виде (1), где каждый компонент вектора $n(t)$ имеет нулевое среднее, единичную дисперсию и является статистически независимым от других компонент. Случайная величина $a_i(t)$ имеет нулевое среднее и дисперсию, равную v_i . На основе (1) формировалось различное число L выборок входного процесса. Далее с помощью формул (21) и (24) последовательно, начиная с $m = 1$, вычислялись значения функционала I_m до тех пор, пока при некотором значении $m = \hat{K}$ величина I_m не становилась меньше выбранного на основании (19) порога. Затем в соответствии с (25) строилась матрица-проектор $P_{\text{ш}}$ на шумовое подпространство и оценивалось с помощью (26) число действующих сигналов. На рис. 1 приведены вероятности ρ правильной оценки числа сигналов в зависимости от их мощности при длине выборки входного процесса $L = 100$. Рассмотрены случаи одного (кривые 1) и двух (кривые 2, 3) сигналов одинаковой мощности с различным угловым расстоянием друг относительно друга. Кривые 2 соответствуют значению $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = 0,5\Delta\theta_L$ (где $\Delta\theta_L = 0,88\lambda/Nd = 10^\circ$ — ширина луча по уровню половинной мощности), а кривые 3 — значению $\Delta\theta = 0,2\Delta\theta_L$. Жирные кривые построены для более высокого значения порога $T = \langle I_1 \rangle + \sigma$, а тонкие — для более низкого порога $T = \langle I_1 \rangle$. Предельные значения ρ при $v \rightarrow 0$ для случая одного сигнала дают значение “ложной тревоги”, когда значение функционала I_1 превышает порог при наличии только собственного шума. В

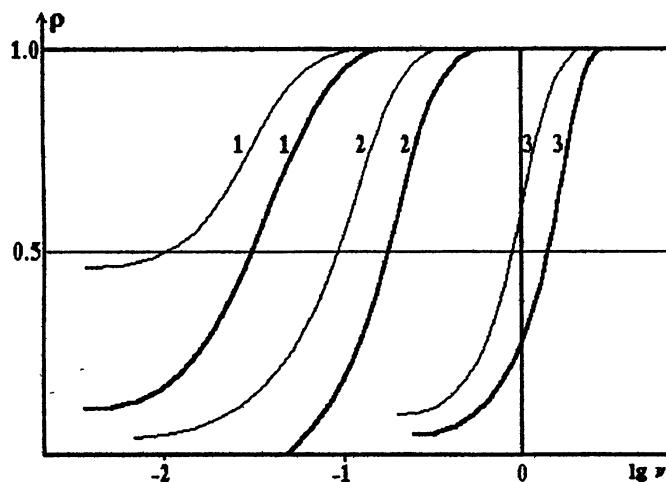


Рис. 1.

каждом варианте моделировалось 100 опытов с различными выборками выходного процесса.

Из рисунка видно, что предложенный метод обладает высокой эффективностью. Если сравнить полученные результаты с аналогичными результатами, приведенными в [4], то оказывается, что предложенный метод более эффективен, чем метод MDL (minimum description length) и метод AIC (Akaike information criterion) и обладает примерно одинаковой эффективностью с методом EDT (eigenvector detection technique). Однако, последний из них предполагает знание некоторой априорной информации [4]: вид волнового фронта (например, плоский), угловая координата центра расположения источников, что достаточно трудно определить на практике. В то же время предложенный выше метод подобной априорной информации не требует. Более того он не требует знания волнового фронта и геометрии АР. Необходимо только, чтобы АР находилась в области когерентности сигналов.

Рассмотрим теперь задачу оценки параметров сигналов. Пусть имеется один источник сигнала ($J = 1$), расположенный по нормали к АР. Угловую координату θ_1 будем оценивать как точку максимума функции $\hat{\eta}(\theta)$ в (27), а мощность сигнала оценим с помощью выражения (11), которое при $J = 1$ принимает вид: $v_1 = \hat{\Phi}_1^H \hat{M} \hat{\Phi}_1 - 1$, где компоненты вектор-фазора $\hat{\Phi}_1$ соответствуют оценке $\hat{\theta}_1$ положения сигнала. На рис.2 кружками приведена (в долях ширины луча) среднеквадратическая ошибка (СКО) оценки координаты сигнала в зависимости от длины выборки L для различных мощностей сигнала. Аналогичные данные для СКО оценки мощности приведены на рис.3, на котором точки, кружки и звездочки относятся к случаям $v = 100; 10; 1$; соответственно. Сплошными кривыми показана потенциальная точность соответствующих оценок (гра-

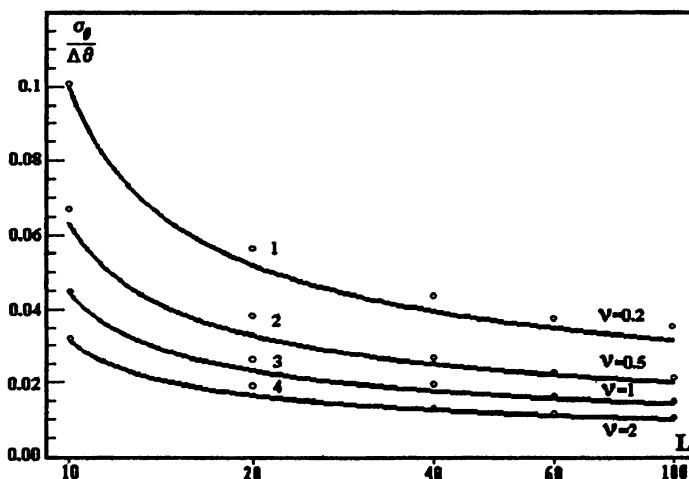


Рис. 2.

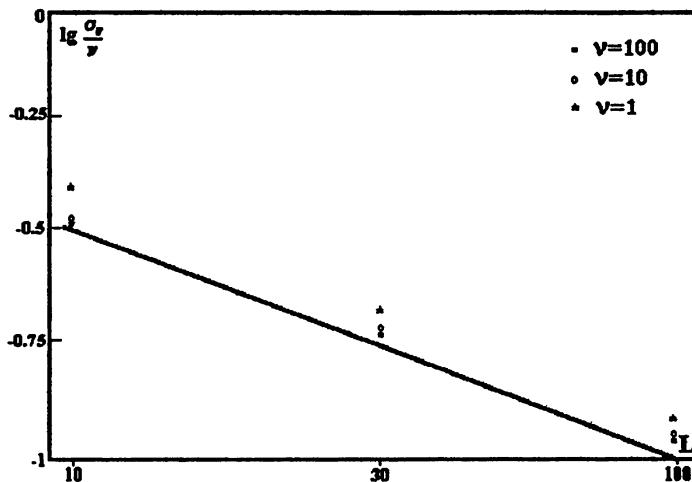


Рис. 3.

ницы Крамера-Рао), которая определяется следующими выражениями [7]:

$$\sigma_\theta^2 = \left[2\nu NL \left(\frac{\partial \Phi^H}{\partial \theta} P_{\text{ш}} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right]^{-1}; \quad \sigma_\nu^2 = \frac{\nu}{L}, \quad (30)$$

где производная $\partial\Phi/\partial\theta$ вычисляется в точке θ_1 . При $N^2 \gg 1$, дисперсия оценки положения источника сигнала $\sigma_\theta^2 \simeq 0.2(\Delta\theta_L)^2/\nu NL$. Из рисунка видно, что полученные результаты близки к потенциально достижимым.

Рассмотрим теперь случай двух источников сигналов одинаковой мощности. Результаты, полученные с помощью предложенного метода, будем сравнивать с результатами, найденными с помощью метода Кейпона [7], в котором угловые координаты источников сигналов отождествляются

Мощность источников ν [дБ]	Предлагаемый метод			Метод Кейпона		
	$\hat{\theta}_1$ [град.]	$\hat{\theta}_2$ [град.]	σ_θ [град.]	$\hat{\theta}_1$ [град.]	$\hat{\theta}_2$ [град.]	σ_θ [град.]
0	-2,17	1,99	0,46	-	-	-
2,5	-2,25	2,12	0,35	-	-	-
5	-2,35	2,29	0,25	-	-	-
7,5	-2,42	2,40	0,18	-1,48	1,54	0,34
10	-2,45	2,45	0,14	-1,92	1,92	0,21
12,5	-2,47	2,47	0,10	-2,19	2,20	0,13
15	-2,48	2,49	0,08	-2,32	2,32	0,09
17,5	-2,49	2,49	0,06	-2,40	2,41	0,08
20	-2,49	2,50	0,04	-2,44	2,45	0,05

с максимумами функции $\hat{\eta}^{(K)}(\theta) = [S^H(\theta)\hat{M}_{\text{ш}}^{-1}S(\theta)]^{-1}$. В таблице приведены оценки углового положения источников сигналов, усредненные по 100 опытам, и СКО σ_θ этих оценок в зависимости от мощности сигналов ν для углового расстояния между источниками $\Delta\theta = 0,5\Delta\theta_L$ (угловые положения источников равны $\theta_1 = -2,5^\circ$ и $\theta_2 = 2,5^\circ$) и длины выборки входного процесса $L = 100$. Из сравнения приведенных данных видно, что предложенный метод обладает значительно большей эффективностью. Во-первых метод Кейпона не регистрирует слабые источники. Во-вторых, систематические и случайные ошибки для метода Кейпона принимают большие значения. Только при достаточно больших интенсивностях источников методы дают одинаковые результаты. Отдельные реализации функции $\hat{\eta}(\theta)$ для разных мощностей источников сигнала и различного числа выборок входного процесса приведены на рис.4 ($\nu_1 = \nu_2 = 5; L = 500$), рис.5 ($\nu_1 = \nu_2 = 5; L = 100$) и на рис.6 ($\nu_1 = \nu_2 = 1; L = 500$).

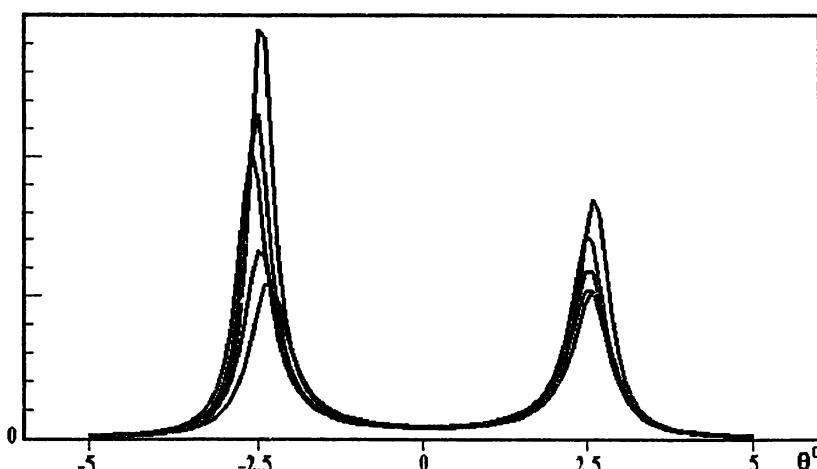


Рис. 4.

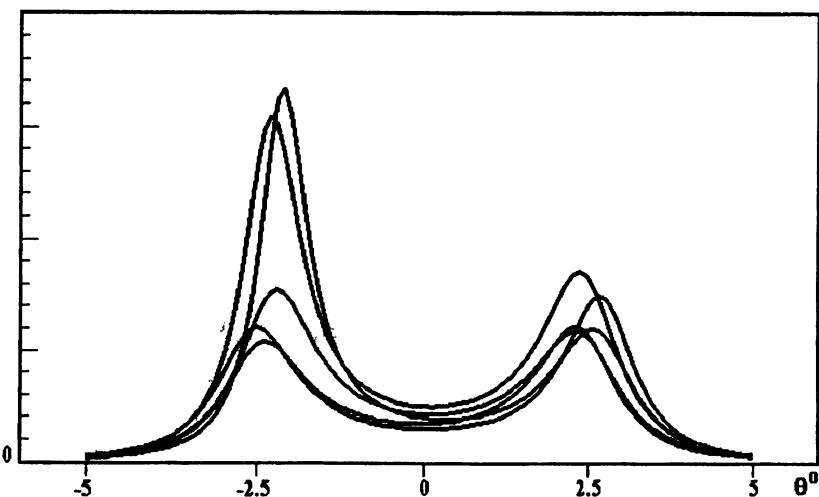


Рис. 5.

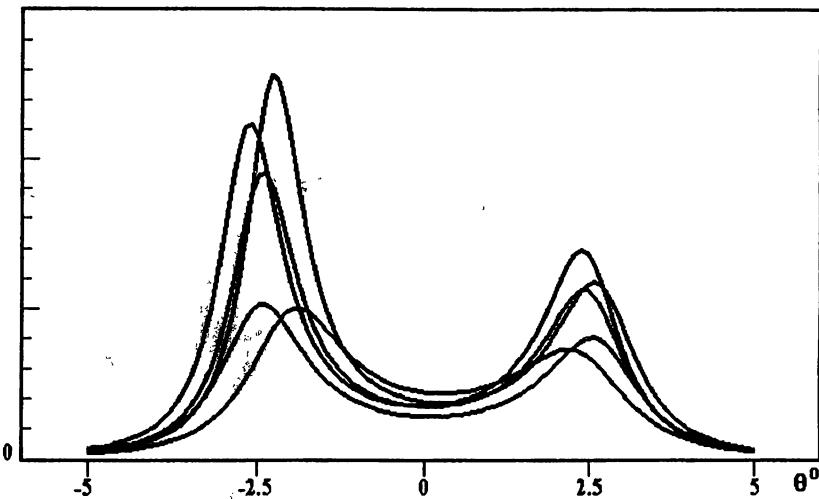


Рис. 6.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен метод оценивания проектора на шумовое подпространство сигнальной корреляционной матрицы в виде матричного многочлена. Собственные числа этого многочлена, соответствующие сигнальному подпространству, минимизированы, благодаря чему сигнальные векторы при проектировании имеют минимальные остатки. Оценка проектора оптимизирована также по рангу благодаря выбору порога, минимизирующего влияние собственного шума. Это, в свою очередь, дает возможность получить оценки параметров сигналов с точностями, близкими к границам Крамера-Рао.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wax M., Kailath T. // IEEE Trans. Acoust., Speech., Signal Processing. 1985. V. 33. № 2. P. 387.
2. Wax M., Ziskind I. // IEEE Trans. Acoust., Speech., Signal Processing. 1989. V. 37. № 10. P. 1190.
3. Wong K. M., Zhang Q., Reilly J. P., Yip P. C. // IEEE Trans. Acoust., Speech., Signal Processing. 1990. V. 38. № 11. P. 1959.
4. Lee H., Li F. // IEEE Trans. Signal Processing. 1994. V. 42. № 9. P. 2380.
5. Rissanen J. // Ann. Stat. 1983. V. 11. № 2. P. 416.
6. Araike H. // IEEE Trans. Anten. Control. 1974. V. 19. № 6. P. 719.
7. Караваев В. В., Сазонов В. В. Статистическая теория пассивной локации. — М.: Радио и связь, 1987.
8. Pisarenko V. F. // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1973. V. 33. P. 247.
9. Shmidt R. O. // IEEE Trans. Anten. and Propag. 1986. V. 34. № 3. P. 276.
10. Bienvenu G. — In: Proc. ICASSP'79 (Washington, DC). — 1979. P. 306.
11. Kumaresan R. O., Tufts D. W. // IEEE Trans. Aerosp., Electr., Syst. Jan. 1983. V. 19. P. 134.
12. Stoica P., Nehorai A. // IEEE Trans. Acoust., Speech., Signal Processing. May 1989. V. 37. P. 720.
13. Gershman A. B. // Electron. Lett. Aug. 1991. V. 27. P. 1485.
14. Oh S. K., Un C. K. // Electron. Lett. Okt. 1989. V. 25. P. 2472.
15. Миные Ж., Делиль Ж. Ю. // ТИИЭР. 1987. Т. 75. № 11. С. 21.
16. Ermolayev V. T., Gershman A. B. // IEEE Trans. Signal Processing. 1994. V. 42. № 9. P. 2389.
17. Гершман А. Б., Ермолаев В. Т., Флаксман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 8. С. 941.
18. Nickel U. // IEE Proc. 1988. V. F-135. № 1. P. 7.
19. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автономных системах. — М.: Радио и связь, 1984.
20. Ширман Я. В., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1981. — 416 с.
21. Мальцев А. А. Статистический анализ адаптивных радиоэлектронных систем: Докторская диссертация. Горьковский госуниверситет, 1989.
22. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. Введение в теорию / Пер. с анг. — М.: Радио и связь, 1986. — 448 с.
23. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов / Пер. с анг. — М.: Радио и связь, 1989. — 440 с.
24. Журавлев А. К., Лукашкин А. П., Поддубный С. С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. — Л.: Изд-во Лен. универ., 1983. — 240 с.

25. Applebaum S. P. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1976 V. 24. № 5. P. 585.
26. Ермолаев В. Т., Флаксман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 4. С. 472.
27. Ermolayev V. T., Flaksman A. G. // Internat. J. of Electronics. 1993. V. 75. № 4. P. 753.
28. Ermolayev V. T., Flaksman A. G., Rodygin Yu. L. // Internat. J. of Electronics. 1994. V. 76. № 3. P. 497.
29. Ермолаев В. Т. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38. № 8. С. 841.
30. Кульбак С. Теория информации и статистики. — М.: 1967.
31. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
32. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров / Пер. с франц. — М.: Наука, 1967. — 780 с.

Нижегородский
научно-исследовательский
институт радиотехники

Поступила в редакцию
28 декабря 1995 г.

ESTIMATION OF SIGNALS RECEIVED BE ANTENNA ARRAY

V. T. Ermolayev, A. G. Flaksman, A. A. Anurin

A high-efficient method of signal and weighting vector estimations in adaptive antenna array (AA) is proposed. The method is based on the estimation of minimal polynomial of input sampled covariance matrix and enables to get signal estimates with an accuracy near Cramer-Rao limits.

УДК 537.874.4

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ДИФРАКЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ С ГИРОТРОПНЫМИ (ПЛАЗМЕННЫМИ) ВКЛЮЧЕНИЯМИ

A. V. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук, В. П. Шестопалов

Построена строгая в математическом отношении электродинамическая модель, описывающая спектральные характеристики двумерных открытых резонаторов с круговыми гиротропными плазменными цилиндрами. В результате создан и обоснован численный алгоритм расчета спектра собственных частот такого класса структур; проведен анализ колебательных процессов двумерного двухзеркального резонатора с круговым плазменным цилиндром в диапазонах, где имеют место гибридные междугиповые колебания.

Известно [1], что одним из методов, с помощью которого проводят диагностику плазмы, является резонаторный метод, в котором применяются закрытые и открытые цилиндрические резонаторы. Закрытые резонаторы при проведении диагностики плазмы используют, в основном, в длинноволновом диапазоне, поскольку на более коротких длинах волн возникают большие плотности спектра собственных частот.

В связи с этим, в начале 60-х годов при проведении диагностики плазменных сред начали применять открытые резонаторы (ОР), в которых, по сравнению с закрытыми, спектр собственных частот более редкий.

Данные подходы плазменной диагностики основываются на методе малых возмущений [2], либо на асимптотических методах, изложенных в [3, 4], и обладают, на наш взгляд, следующими недостатками:

а) при осуществлении диагностики плазмы с помощью метода малых возмущений предполагается, что "внесение" плазменного включения в резонатор приводит к незначительному смещению частоты "пустого" резонатора;

б) метод малых возмущений математически обоснован только для применения его при исследовании закрытых электродинамических структур;

в) применение метода малых возмущений и упомянутых асимптотических методов дает возможность исследовать только часть спектра собственных частот, а в случаях, когда резонансная длина волны соизмерима с геометрическими параметрами резонатора либо находящегося в ОР плазменного включения, становится неприемлемым.

Цель настоящей работы — создание строгой в математическом отношении теории для исследования спектральных характеристик двумерных ОР с круговыми гиротропными плаズменноподобными цилиндрами, конечным итогом которой является эффективный алгоритм расчета спектра собственных частот (собственных мод) такого класса структур.

Развитая теория позволяет проводить анализ колебательных процессов и в тех случаях (в диапазонах, где имеют место гибридные междуполосовые колебания, когда резонансная длина волны соизмерима с геометрическими, а также плаズменными параметрами), где указанные выше подходы неприемлемы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ОР С КРУГОВЫМИ ЦИЛИНДРАМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ГИРОТРОПНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ

Пусть S_1 и S_2 — зеркала ОР, а S_3 — поперечное сечение кругового цилиндра с границей ∂S_3 (см. рис. 1), заполненного гиротропной однородной средой с тензором относительной диэлектрической проницаемости

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

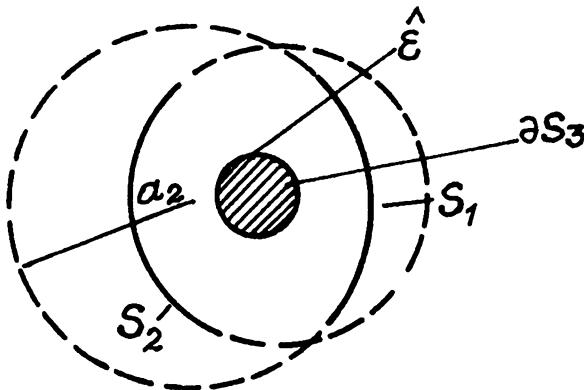


Рис. 1.

Предполагается, что ось гиротропного цилиндра параллельна оси декартовой системы координат $Oxyz$, а зеркала ОР моделируются идеально проводящими, незамкнутыми круговыми цилиндрическими поверхностями, образующие которых также параллельны оси OZ . Кроме того, счита-

ется, что вдоль оси OZ рассматриваемая открытая структура (ОР + гиротропный цилиндр) бесконечна и однородна, а электромагнитное поле не зависит от координаты z , иными словами рассматриваются двумерные колебания.

В случае двумерных колебаний, с учетом гиротропности среды, система однородных уравнений Максвелла сводится к двум независимым краевым задачам в терминах дифференциальных уравнений (типа уравнения Гельмгольца) с краевыми условиями Неймана и Дирихле на S_j ($j = 1, 2$) и условиями сопряжения на ∂S_3 , описывающим соответственно H - и E -колебания. В дальнейшем ограничимся случаем H -поляризованных колебаний (вектор напряженности магнитного поля параллелен оси OZ). Случай E -колебаний рассматривается аналогично.

В данной работе ограничимся исследованием случая двухзеркального ОР с гиротропным (плазменноподобным) цилиндром, хотя предлагаемый здесь подход допускает обобщение на спектральные задачи для многозеркальных ОР, содержащих конечное число цилиндров, заполненных различными гиротропными средами с тензором относительной диэлектрической проницаемости вида (1).

Обозначим через R_k риманову поверхность аналитического продолжения по спектральному параметру k ($k = \omega/c$, ω — собственная частота, c — скорость света в вакууме) функции Грина

$$G(k, p, p_0) = -\frac{i}{4} \mathcal{H}_0^{(1)}(k|p - p_0|)$$

(зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$) уравнения Гельмгольца $\Delta V + k^2 V = 0$.

Соответствующая спектральная задача о комплексных собственных частотах состоит в определении значений спектрального параметра $k \in R_k$, при которых существуют нетривиальные решения V_1 и V_2 уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \Delta V_2(p) + k^2 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) V_2(p) &= 0, \quad p \in S_3; \\ \Delta V_1(p) + k^2 V_1(p) &= 0, \quad p \notin S_3, \end{aligned} \tag{2}$$

удовлетворяющие условию Неймана на зеркалах S_1 и S_2 ОР

$$\left. \frac{\partial V_1(p)}{\partial \vec{n}_j} \right|_{S_j} = 0 \quad (j = 1, 2), \tag{3}$$

условиям сопряжения на границе ∂S_3 гиротропного цилиндра

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) V_2(p - h\vec{n}) - V_1(p + h\vec{n}) \right] = 0, \quad p \in \partial S_3;$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \left[\varepsilon_1 \left(\operatorname{grad} V_2(p - h\vec{n}), \vec{n} \right) - i\varepsilon_2 \left(\operatorname{grad} V_2(p - h\vec{n}), \vec{r} \right) - \right. \\ \left. - \left(\operatorname{grad} V_1(p + h\vec{n}), \vec{n} \right) \right] = 0, \quad p \in \partial S_3, \quad (4)$$

условию типа Мейкснера

$$\int_{\Omega} \left(|V_j|^2 + |\operatorname{grad} V_j|^2 \right) dx dy < \infty \quad (j = 1, 2) \quad (5)$$

для любой ограниченной области $\Omega \subset R^2$ и условию излучения Рейхардта на бесконечности, согласно которому существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех $r > M$, для функции $V_1(p)$ имеет место представление:

$$V_1(p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m F_m^n(kr) \exp(im\varphi), \quad (6)$$

где (r, φ) — полярные координаты точки $p = (x, y)$;

$$F_m^n(z) = (-1)^{mn} \left(2n J_m((-1)^n z) + H_m^{(1)}((-1)^n z) \right).$$

Здесь $n = 0, \pm 1, \pm 2$ — номер листа римановой поверхности $R_k = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} R_n$ (значение $n = 0$ соответствует “физическому” листу R_0 , где $\operatorname{Im}(k) < 0$); ряд в (6) и ряды, получаемые из него почлененным дифференцированием по r и φ , равномерно и абсолютно сходятся при $r > M$, $\varphi \in [0; 2\pi]$; \vec{v}_j — орт нормали к S_j , а \vec{n} , \vec{r} — соответствующие орты нормали и касательной в точке $p = (x, y) \in \partial S_3$; $J_m(z)$, $H_m^{(1)}(z)$ — соответственно функции Бесселя и Ханкеля первого рода m -го порядка. Функции $V_1(p)$ и $V_2(p)$ связаны с H_z -компонентой напряженности магнитного поля следующим образом:

$$H_z = \begin{cases} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) V_2(p), & p \in S_3, \\ V_1(p), & p \notin S_3. \end{cases}$$

Остальные компоненты электромагнитного поля выражаются через $V_1(p)$ и $V_2(p)$ из уравнений Максвелла.

Элементы тензора $\hat{\epsilon}$ в общем случае нелинейно зависят от спектрального параметра $k \in R_k$.

В качестве примера будем рассматривать модель магнитоактивной,

холодной электронной плаэмы. Тогда, согласно [5],

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 1 - \frac{k_p^2(k + i\hat{\nu})}{k((k + i\hat{\nu})^2 - k_c^2)}; \quad \varepsilon_2 = -\frac{k_p^2 k_c}{k((k + i\hat{\nu})^2 - k_c^2)}; \\ \varepsilon_3 &= 1 - \frac{k_p^2}{k(k + i\hat{\nu})},\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$k_p = \frac{\omega_p}{c}; \quad k_c = \frac{\omega_c}{c}; \quad \hat{\nu} = \frac{\nu}{c}.$$

Здесь ω_p и ω_c — соответственно плазменная и электронная циклотронная частоты, а ν — частота столкновений электронов плаэмы.

2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ. РАСЧЕТ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОР С ПЛАЗМЕННОПОДОБНОЙ СРЕДОЙ

Спектральная задача (2)–(6) затруднительна для исследования прямыми численными методами, поскольку, во-первых, спектральный параметр $k \in R_k$ нелинейным образом входит как в условие излучения (6), так и, в отличие от спектральных задач в [6, 7], в условия сопряжения. И, во-вторых, (2)–(6) является несамосопряженной краевой задачей в неограниченной области.

Эти обстоятельства не позволяют использовать для численного решения краевой задачи (2)–(6) хорошо развитый аппарат теории линейных операторов в гильбертовых (банаховых) пространствах, который составляет основу асимптотической теории ОР [3, 4].

Предлагаемый нами метод решения такого класса задач состоит из двух этапов.

На первом этапе исходная краевая задача (2)–(6) сводится к системе парных сумматорных уравнений относительно собственных токов на зеркалах ОР, а на втором — производится аналитическое обращение оператора, соответствующего главной сингулярности этой системы уравнений с помощью стандартной процедуры метода задачи Римана–Гильберта для разомкнутых контуров [8, 9].

В результате применения такого рода процедуры регуляризации задача (2)–(6) эквивалентным образом сведена к задаче на характеристические числа матричной оператор-функции в гильбертовом пространстве $\ell_2^3 = \ell_2 \times \ell_2 \times \ell_2$ вида:

$$I - A(k),$$

где I — тождественный оператор в ℓ_2^3 , а

$$A(k) \equiv A(k, k_p, k_c, \hat{\nu}, \dots) = \|A_{mn}^{jq}(k)\|_{j,q=1}^3.$$

Матричные элементы $A_{mn}^{iq}(k)$ ($j; q = 1, 2$) при $k \in R_0$ с точностью до постоянной совпадают с матричными элементами в [6, 7], а остальные при $k \in R_0$ имеют следующий вид:

$$A_{mn}^{j3}(k) = \frac{\pi^2}{2} (kb)^3 F_n(kb) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} T_{n-q}(k\ell_{3j}) K_q(kb) F_q^m(u_j) \Phi_q^{mj}(\dots), \quad j = 1, 2;$$

$$A_{mn}^{3q}(k) = 2\Delta_m J_{n-m}(k\ell_{3q}) \mathcal{H}_n^{(1)'}(ka_q) J_m(kb) \exp(i(n-m)\psi_{q3}), \quad q = 1, 2$$

и

$$A_{mn}^{33}(k) = \left(1 - \pi ikb \Delta_m (\alpha_m J_m(kb) \mathcal{H}_m^{(1)}(kb) - J_m(kb) \mathcal{H}_m^{(1)'}(kb)) \right) \delta_m^n.$$

Здесь

$$F_n(z) = \alpha_n J_n(z) - J'_n(z);$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\xi(k)} \left(\frac{J'_n(kb\xi(k))}{J_n(kb\xi(k))} + \frac{\beta_n |n|}{kb\xi(k)} \right),$$

где $\xi(k) = \left(\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} \right)^{1/2}$, а $\beta_n = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{sign}(n)$;

$$T_{n-q}(z_1) K_q(z_2) = \begin{cases} J_{n-q}(z_1) \mathcal{H}_q^{(1)'}(z_2); & |z_1| < |z_2|, \\ \mathcal{H}_{n-q}^{(1)}(z_1) J'_q(z_2); & |z_1| > |z_2|, \end{cases}$$

$$F_q^m(x) = \begin{cases} -\ln \frac{1+x}{2}; & m = 0, \quad q = 0, \\ \frac{V_{m-1}^{-1}(x)}{m}; & m \neq 0, \quad q = 0, \\ \frac{V_{q-1}^{m-1}(x)}{q}; & q \neq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_q^{mj}(\dots) = \exp(i(q-m)(\pi(j-1) + \psi_j) - q\psi_{3j});$$

$$\Delta_m = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1}; & m = 0, \\ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 1}; & m > 0, \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1}; & m < 0. \end{cases}$$

Здесь a_q ($q = 1, 2$) — радиусы кривизны зеркал резонатора, b — радиус гиротропного цилиндра; $u_j = -\cos(\theta_j)$ ($j = 1, 2$), где $2\theta_j$ — угловые размеры зеркал ОР, а ψ_j — углы их ориентации (см., например, [6]); штрих

здесь над функциями Бесселя и Ханкеля обозначает дифференцирование данных функций по аргументу; параметры ℓ_{3j} , ψ_{3j} задают взаимное расположение зеркал ОР и гиротропного цилиндра; δ_m^n — символ Кронекера.

Выражения для $V_{q-1}^{m-1}(x)$ определены в [8, 9].

Свойства функции Бесселя [10] позволяют установить, что α_m не зависит от выбора ветви $\xi(k)$. Далее в качестве $\xi(k)$ выбрана ветвь, где $\operatorname{Im} \xi(k) < 0$.

Отметим также, что при $k \in R_k \setminus R_0$ функцию $J_m(z)$ следует заменить функцией $G_m^n(z) = (-1)^{mn} J_m((-1)^n z)$, а $\mathcal{H}_m^{(1)}(z)$ — функцией $F_m^n(z)$.

Используя асимптотики цилиндрических функций [10], можно показать, что при $|m| \gg |k|$ функции $G_m^n(z)$ и $F_m^n(z)$ ведут себя так, как и функции $J_m(z)$ и $\mathcal{H}_m^{(1)}(z)$.

Следовательно, при $|m| \gg |k|$ ($k \in R_k$) справедливы асимптотические оценки:

$$\alpha_m = |m| \left(kb \xi^2(k) \right)^{-1} \left(1 + \beta_m + O(m^{-2}) \right), \quad (8)$$

$$\left(\frac{\xi^2(k)}{1 - \xi^2(k) + \beta_m} \right) \frac{F_m(kb)}{J'_m(kb)} = 1 + O(m^{-2}). \quad (9)$$

При этом элементы диагональной матрицы $\|A_{mm}^{33}(k)\|$ при $|m| \rightarrow \infty$ стремятся к нулю как $O(m^{-2})$.

Из (8), (9) и асимптотики для $\|A_{mm}^{33}(k)\|$ при $|m| \rightarrow \infty$, согласно [6, 7], следует, что матрицы $\|A_{mn}^{j3}(k)\|$ и $\|A_{mn}^{3q}(k)\|$ ($j; q = 1, 2, 3$) в пространстве ℓ_2 задают ядерные, конечномероморфные на R_k оператор-функции. Причем, в случае (7) оператор-функции $A_{mn}^{j3}(k)$ и $A_{mn}^{3q}(k)$ имеют полюса в следующих точках:

$$k_{1,2} = 0,5 \left(k_c - i\hat{\nu} \pm \left((k_c - i\hat{\nu})^2 + 4k_p^2 \right)^{1/2} \right);$$

$$k_{3,4} = 0,5 \left(-k_c - i\hat{\nu} \pm \left((k_c + i\hat{\nu})^2 + 4k_p^2 \right)^{1/2} \right);$$

$$k_{5,6} = 0,5 \left(-k_c - i\hat{\nu} \pm \left((k_c + i\hat{\nu})^2 + 2k_p^2 \right)^{1/2} \right);$$

$$k_{7,8} = 0,5 \left(k_c - i\hat{\nu} \pm \left((k_c - i\hat{\nu})^2 + 2k_p^2 \right)^{1/2} \right),$$

а также в точках $k = k_0^n$ ($n = 1, 2, 3, 4$), где k_0^n — корни уравнения:

$$L_2(k) M_2(k) + k P_3(k) = 0.$$

Здесь

$$L_2(k) = k^2 - k(k_c - i\hat{\nu}) - k_p^2;$$

$$M_2(k) = k^2 + k(k_c + i\hat{\nu}) - k_p^2;$$

$$P_3(k) = k^3 + 2i\hat{\nu}k^2 - (k_p^2 + k_c^2 + \hat{\nu}^2)k - i\hat{\nu}k_p^2.$$

Поэтому, на основании изложенного выше, получаем, что $A(k)$ — ядерная оператор-функция, конечномероморфно зависящая от $k \in R_k$. Из ядерности $A(k)$ следует, что k_0 является характеристическим числом оператор-функции $I - A(k)$ (точкой спектра задачи (2)–(6)) тогда и только тогда, когда k_0 удовлетворяет уравнению

$$\det(I - A(k_0)) = 0, \quad (10)$$

где $\det(I - A(k))$ — бесконечный характеристический определитель оператор-функции $I - A(k)$ (см. [11]).

Поскольку $A(k)$ — конечномероморфная оператор-функция, то, согласно [11], следует дискретность и конечная кратность множества характеристических чисел оператор-функции $I - A(k)$ (а следовательно, и спектра собственных частот исследуемой электродинамической структуры) на R_k .

Пусть $(e_p)_{p=1}^{+\infty}$ — произвольный отнормированный базис в ℓ_2^3 . Построим последовательность конечномерных матриц

$$A_N(k) = \left\| \delta_p^q - (A(k) e_p, e_q) \right\|_{p,q=1}^N, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в ℓ_2^3 . Очевидно, что $A_N(k)$ — матричнозначные конечномероморфные функции на R_k .

Наряду с уравнением (10) рассмотрим последовательность уравнений следующего вида:

$$\det A_N(k) = 0, \quad N = 1, 2, 3, \dots. \quad (11)$$

Согласно свойствам $A(k)$ и операторному обобщению теоремы Рунге [12], получаем, что последовательность функций $\det A_N(k)$ сходится к $\det(I - A(k))$ равномерно по k на любом компакте из R_k , не содержащем особенностей $A(k)$. Таким образом, выбрав достаточно большое N , можно с любой наперед заданной точностью корни уравнения (10) аппроксимировать корнями уравнений (11). При этом справедлива асимптотическая оценка скорости сходимости:

$$|k_N - k| < C/N, \quad N \rightarrow \infty,$$

где C — константа, зависящая от плазменных и геометрических параметров исследуемой структуры.

3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Изложенный алгоритм реализован на ЭВМ в виде пакета прикладных программ. В качестве примера рассмотрен симметричный конфокальный резонатор с апертурой зеркал $s/a = 1,618$ ($a = \max(a_1, a_2)$), с включением в виде плазменного цилиндра кругового поперечного сечения. Выбору такого значения апертуры зеркал резонатора соответствует $\theta_n = 126^\circ$ ($n = 1, 2$).

Расчеты, проводившиеся с помощью метода Ньютона, показали, что для вычисления собственной частоты исследуемой структуры (корня системы (11)) с точностью 4–5 значащих цифр достаточно положить $N = \lceil |ka| \rceil + 10$, где [...] — целая часть числа.

Важно, что предлагаемый метод исследования спектральных характеристик ОР с указанного вида включениями позволяет проводить расчеты и в тех случаях, где существующие асимптотические модели [3, 4] неприменимы.

Выбором указанного значения s и соответствующих ему значений ka при $k_p a = k_c a = 0$ (случай пустого резонатора) настроим резонатор в режим “междутиповой связи” собственных колебаний H_{03^-} , H_{41} -типов. Здесь при возбуждении ОР на резонансной частоте, равной 10,0176, плоской H -поляризованной волной единичной амплитуды наблюдается чистое колебание H_{41} -типа, а на резонансной частоте 10,1503 — колебание, содержащее структуры полей как колебания H_{03} -типа, так и колебания H_{41} -типа, т. е. гибридное междутиповое колебание [13]. Далее колебания такого вида будем обозначать через ΓH_{03} , если ярко выраженным образом доминирует структура поля колебания H_{03} -типа, и в противном случае — ΓH_{41} .

Здесь и далее, под термином резонансная частота понимается значение $\text{Re}(ka)$, т. е. вещественная часть корня системы (11).

“Поместив” в центр ОР изотропный плазменный ($k_c a = 0$) круговой цилиндр с $b/a = 0,1$ и увеличивая затем значение $k_p a$, получаем зависимости резонансных частот и характеристик добротностей $Lg(Q)$ колебаний H_{41^-} , ΓH_{03^-} , H_{22} -типов (рис. 2). Здесь $Q = -\text{Re}(ka) \cdot (2 \text{Im}(ka))^{-1}$ — собственная добротность колебаний ($k \in R_0$), а классификация типов колебаний ОР с неоднородностями определена в [6, 7].

Видно, что резонансная частота колебаний H_{41} -типа практически не зависит от плазменной частоты, в то время как резонансные частоты колебаний ΓH_{03} - и H_{22} -типов с увеличением значений плазменной частоты смещаются в более коротковолновую область. Характерно также то, что с увеличением значения ($k_p a$) добротность собственных колебаний H_{41^-} , H_{22} -типов (рис. 2б) уменьшается, а добротность колебания типа ΓH_{03} растет.

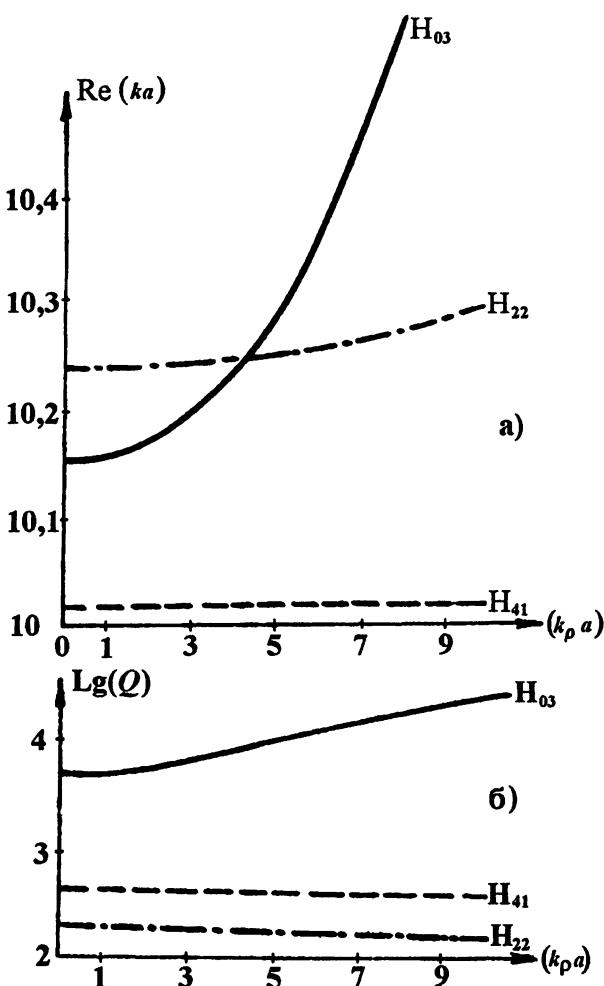


Рис. 2.

На рис. 3 приведены зависимости $\text{Re}(ka)$ и $\text{Lg}(Q)$ указанных колебаний при вариации (увеличении) диаметра плазменного цилиндра. При этом полагалось, что $k_p a = 5$. Исследования показали (рис. 3а), что с увеличением диаметра плазменного цилиндра резонансные частоты колебаний H_{41} , H_{22} и ΓH_{03} -типов, как и в предыдущем случае, смещаются в более коротковолновую область. Колебание ΓH_{03} -типа, как показано далее, трансформируется при этом в чистое колебание H_{03} -типа. Добротности этих собственных колебаний с увеличением значения диаметра плазменного цилиндра ведут себя так (рис. 3б), как и при увеличении значения плазменной частоты. Иными словами, для колебаний H_{41} - и H_{22} -типов с увеличением диаметра неоднородности характерно понижение добротности, а в случае ΓH_{03} — ярко выраженное увеличение.

Кроме задач на свободные колебания исследовались также характеристики вынужденных колебаний рассматриваемой электродинамической структуры. Графики распределений линий равных амплитуд $|H_z| = \text{const}$,

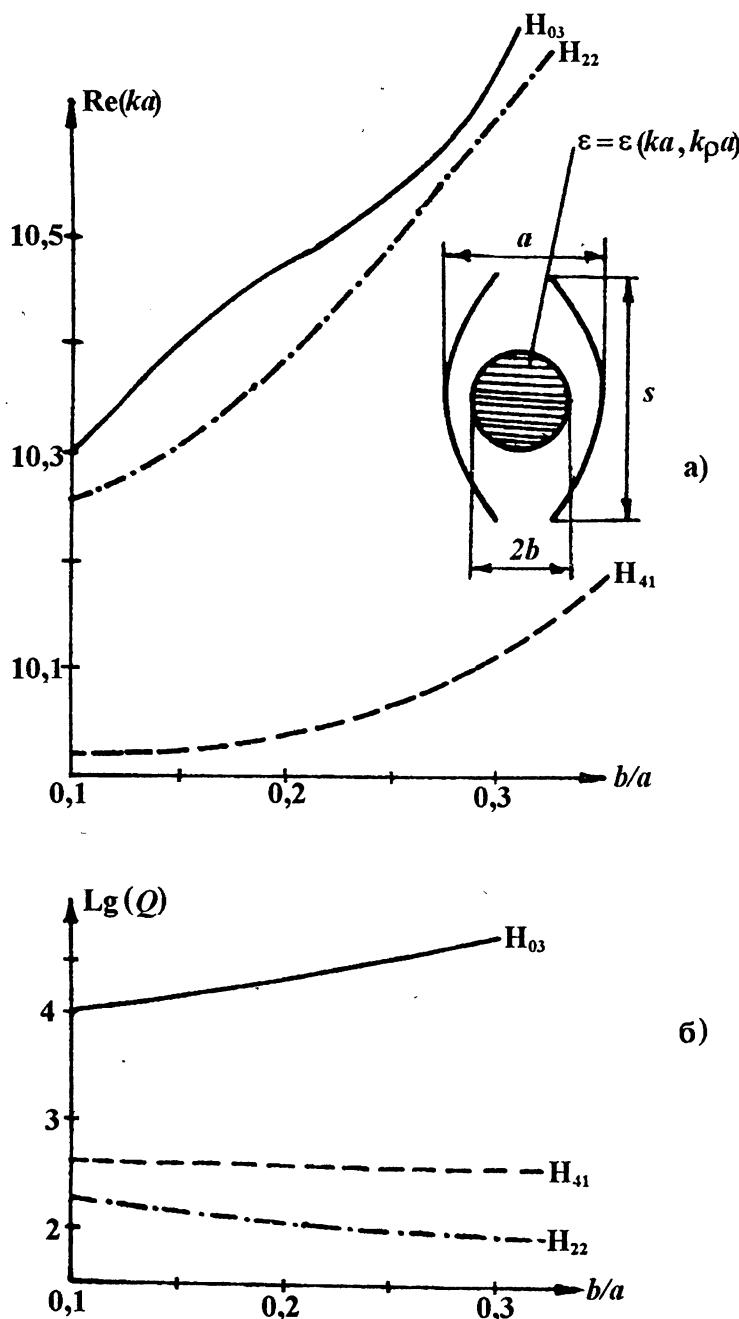


Рис. 3.

полученные в результате дифракции на ОР с плазменным цилиндром плоской однородной H -поляризованной волной единичной амплитуды (волна распространяется параллельно горизонтальной оси резонатора) на резонансных частотах, соответствующих значениям $2b/a = 0,2; 0,4; 0,6$ для колебаний H_{03} (ΓH_{03})-, H_{41} - и H_{22} -типов приведены на рис. 4–6.

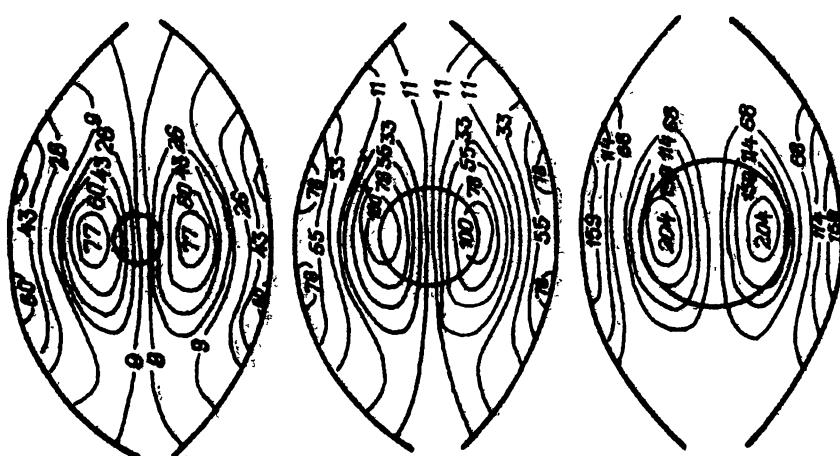


Рис. 4.

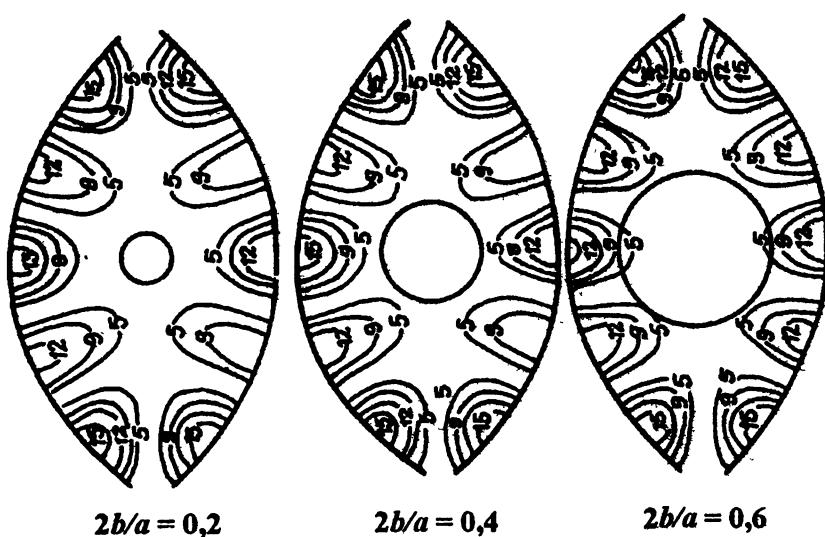


Рис. 5.

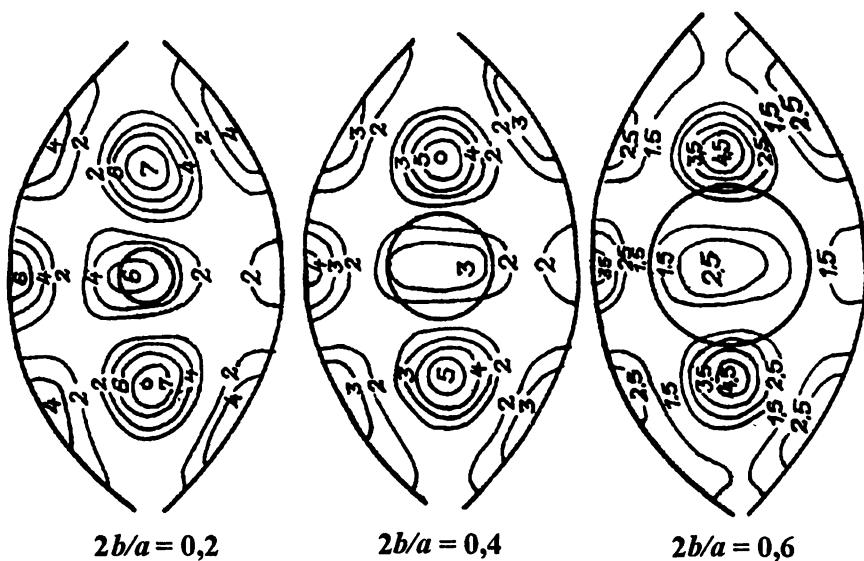


Рис. 6.

Видно (рис. 4), что относительно малые изменения диаметра, находящегося в ОР плазменного цилиндра, существенным образом изменяют структуру поля вынужденного колебания. Например, при $2b/a = 0,2$ и $2b/a = 0,4$ наблюдаемые картины полей H_z -компоненты имеют "гибридный" характер, а при $2b/a = 0,6$ имеем уже чистое колебание H_{03} -типа. При этом поля H_z -компоненты колебаний H_{41} - и H_{22} -типов (рис. 5, 6) от диаметра, находящегося в резонаторе плазменного цилиндра, практически не зависят.

На рис. 7 приведены зависимости резонансных частот и добротностей колебаний H_{03} - и H_{41} -типов от $(k_c a)$ при $k_p a = 5$; $2b/a = 0,4$ в режиме их "междупаровой связи". Из рисунка видно, что увеличение значения электронной циклотронной частоты плаэмы (рис. 7а) ($0 \leq k_c a < 10$) приводит к смещению резонансных частот структуры (ОР с плазменным цилиндром) на колебаниях данных типов в более коротковолновую область. Добротность собственного колебания H_{41} -типа при этом уменьшается, а колебание H_{03} -типа ведет себя осциллирующим образом. Такое поведение добротности собственного колебания H_{03} -типа обусловлено тем, что находящийся в ОР плазменный цилиндр сам является открытой резонансной структурой и обладает дискретным набором собственных частот. Поэтому увеличением k_c в заданном диапазоне частот можно исследуемую электродинамическую структуру настроить в собственный резонансный режим, что и происходит в данном случае. Наименьшее значение добротности собственного колебания H_{03} -типа исследуемой структуры $Q_{\min} = 3,23 \cdot 10^3$ здесь наблюдается при $\operatorname{Re}(ka) = 10,6606$; $k_c a = 5,5$, а наибольшее $Q_{\max} = 4,69 \cdot 10^4$ при $\operatorname{Re}(ka) = 11,1135$; $k_c a = 8$.

Для сравнения приведем значения добротности пустого резонатора

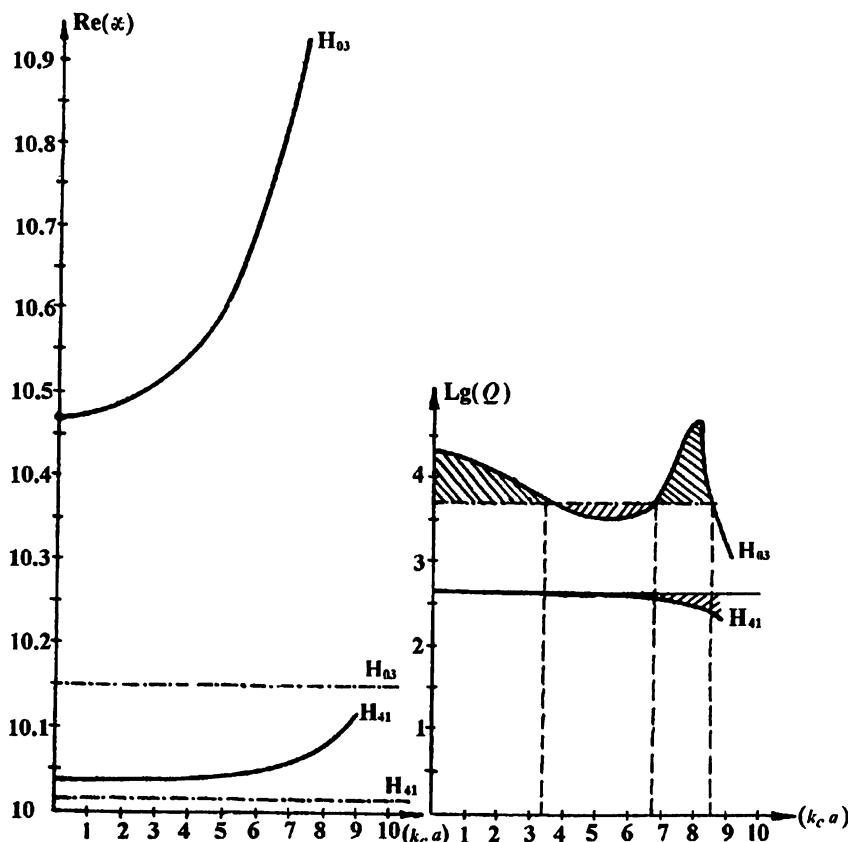


Рис. 7.

$Q_p = 4,99 \cdot 10^3$ (на рисунке характеристики пустого ОР отмечены штрих-пунктиром) и добротности ОР с круговым изотропным ($k_c a = 0$) плазменным цилиндром $Q_{из} = 2,01 \cdot 10^4$.

Иными словами, при $k_c a = 8$ ($k_c a = 1,6 k_p a$) добротность на порядок выше добротности пустого ОР и вдвое больше $Q_{из}$.

В заключение отметим, что приведенные выше результаты численного эксперимента справедливы только для случая, когда ось гиротропного плазменного цилиндра является пересечением продольной и попечерной плоскостей симметрии конфокального симметричного ОР (центр плазменного включения совпадает с центром резонатора) и могут быть использованы, например, при диагностике низкотемпературной электронной плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

- Москалев И. Н., Стефановский А. М. Диагностика плазмы с помощью открытых цилиндрических резонаторов. — М.: Энергоатомиздат,

1985. 145 с.

2. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. — М.: Наука, 1967. 460 с.
3. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966. 476 с.
4. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972. 456 с.
5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. 683 с.
6. Шестопалов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. — Киев: Наук. думка, 1987. 288 с.
7. Кошпарёнок В. Н., Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Шестопалов В. П. // Изв. вуз. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 10. С. 1311.
8. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана – Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. — Харьков: Гос. ун-т, 1971. 400 с.
9. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. — Киев: Наук. думка, 1983. 252 с.
10. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949. Ч. 1. 798 с.
11. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. — М.: Мир, 1982. Ч. 4. 428 с.
12. Гохберг И. Ц., Сигал Е. И. // Мат. сб. 1971. Т. 84. № 4. С. 607.
13. Шестопалов В. П. Морсовские критические точки дисперсионных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. 240 с.

Институт радиофизики и
электроники НАН Украины,
г. Харьков

Поступила в редакцию
15 марта 1996 г.

SPECTRAL AND DIFFRACTION CHARACTERISTICS OF OPEN RESONATORS WITH GYROTROPIC (PLASMA) INSERTIONS

A. V. Brovenko, P. N. Melezik, A. E. Poedinchuk, V. P. Shestopalov

It has been constructed a mathematically strict electrodynamic model describing the spectral characteristics of two-dimensional open resonators with circular plasma cylinders. As a result there has been developed and grounded a computational algorithm to calculate the spectra of natural frequencies of such type structures and an analysis has been made of oscillation processes of a two-dimensional two-mirror resonator with a circular plasma cylinder in frequency bands where there exist hybrid intertype oscillations.

УДК 537.52

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В 170 ГГц/1 МВт ГИРОТРОНЕ ДЛЯ ITER

M. Ю. Глясин, В. Е. Запевалов

Приводятся результаты численного моделирования переходных процессов на фронте импульса ускоряющего напряжения, когда наиболее вероятно возбуждение паразитных колебаний. Полученные результаты показывают возможность установления устойчивой одномодовой генерации с высоким КПД в гиротроне 170 ГГц/1 МВт для ITER.

В рамках разработки проекта международного ТОКАМАКА ITER [1, 2], предусматривается создание гиротронного комплекса, предназначенного для обеспечения электрон-циклотронного резонансного нагрева плазмы и управления током. Для эффективного взаимодействия излучения с плазмой выбрана частота 170 ГГц, при этом полная мощность гиротронного комплекса составит до 50 МВт. Естественно, при этом желательно использовать возможно меньшее число гиротронов, соответственно увеличивая их мощность.

Одной из наиболее простых возможностей увеличения мощности гиротронов является применение резонаторов большого объема при использовании в качестве рабочих высших типов колебаний. Принципиальное ограничение здесь состоит в сгущении спектра собственных частот резонатора, приводящем к необходимости селекции мод [3, 4]. Вопросы селекции мод довольно просто решаются при работе на низких модах. По мере увеличения числа мод, попадающих в полосу циклотронного резонанса, возможности селекции сужаются [5, 6]. Наиболее благоприятные условия для появления паразитной генерации создаются при включении гиротрона, на переднем фронте импульса ускоряющего напряжения. Первыми, при фиксированном магнитном поле, возбуждаются более высокочастотные моды, чем рабочая. Для определения типа колебаний, установившихся в резонаторе при рабочем напряжении, приходится решать задачу о нестационарных многомодовых процессах в резонаторе гиротрона. В настоящем сообщении приводятся результаты численного моделирования многомодовых процессов в мощном импульсном гиротроне, разрабатываемом в ИПФ РАН в рамках программы ITER.

Основные параметры двух планируемых вариантов данного гиротрона представлены в таблице.

Параметры гиротрона	Ед. изм.	Типы колебаний	
		ТЕ28.7	ТЕ31.8
Рабочая частота	ГГц	170	170
Длина волны λ ,	мм	1,763	1,763
Выходная мощность	МВт	1	1
Длительность импульса		нек.сек. или CW	нек.сек. или CW
Ускоряющее напряжение	кВ	80	80
Ток пучка	А	45	45
Магнитное поле в резонаторе	Т	$\approx 6,8$	$\approx 6,8$
Радиус резонатора	мм	15,86	17,9
Добротность резонатора		10^3	10^3
Плотность омических потерь в резонаторе	кВ/см ²	2,5	2,3
Питч-фактор		1,25	1,25

Для численного моделирования многомодового взаимодействия использовалась аксиально-симметричная модель гиротрона в приближении тонкого моноскоростного пучка в пренебрежении полями пространственного заряда. Нестационарные многомодовые процессы в гиротроне описываются самосогласованной системой уравнений, состоящей из укороченных уравнений движения электронов во внешнем магнитном поле и полях существующих в гиротроне мод, уравнений возбуждения мод и выражений, определяющих приведенные факторы возбуждения мод электронным пучком [7, 8]. В качестве временного параметра используется безразмерная переменная $\tau = tw/Q$, где t — реальное время, w — частота колебаний и Q — добротность резонатора. Продольная структура полей всех мод аппроксимировалась гауссовой функцией, близкой к реальной продольной структуре высокочастотного поля. Вычисления проводились по следующему алгоритму: после ввода технических параметров исследуемого гиротрона выбиралась оптимальная по КПД расстройка циклотронного резонанса, в окрестности рабочей моды выбирались моды с наибольшими структурными факторами (наименьшими стартовыми токами), для данной группы мод рассчитывались стартовые токи в первой точке на фронте импульса, мода с наименьшим стартовым током считалась "центральной" и далее решалась задача установления стационарной генерации при синхронном или несинхронном [5, 8] (в зависимости от густоты спектра взаимодействующих мод) взаимодействии мод. Поскольку время установления колебаний много меньше длительности фронта импульса ($t_F \ll t_{pulse}$), можно считать напряжение постоянным при расчете переходного процесса установления стационарных амплитуд взаимодействующих мод. Если амплитуды всех взаимодействующих мод достигали уровня 0.1 от стартового при отрицательной производной, происходил переход в следующую точку на фронте импульса, расчет стартовых токов

и т.д. Если после выхода на стационар амплитуды мод превышали стартовые значения, то стационарные значения амплитуд использовались как стартовые в следующей точке на фронте импульса. Поскольку сценарий переходного процесса существенно зависит от вольтамперной характеристики лампы при расчетах использовались типичные ВАХ реальных электронных пушек гиротронов [9].

На рис. 1 приведены зоны самовозбуждения рабочей и ближайших к ней паразитных мод для различных значений ускоряющего напряжения. Сплошной линией с точками изображен стартовый ток рабочей моды, штриховыми линиями — стартовые токи мод с тем же радиальным, но отличающимся на единицу азимутальным индексом, штрихпунктирными линиями — ближайшие паразитные моды с другим радиальным индексом. Как следует из анализа эволюции зон самовозбуждения мод при низких напряжениях наименьшим стартовым током обладает мода с тем же радиальным, но более высоким азимутальным индексом. В рабочем режиме при расстройке циклотронного резонанса, соответствующей оптимальному поперечному КПД (около 0.6), гиротрон находится в режиме жесткого самовозбуждения. Последнее обстоятельство существенно при анализе рабочего режима гиротрона, т.к. показывает необходимость расчета всего переходного процесса, а не только расчета значений стационарных амплитуд и КПД на вершине импульса.

Переходные процессы при подаче импульса ускоряющего напряжения для различных вариантов гиротрона изображены на рис. 2 на плоскости — безразмерная амплитуда ВЧ поля F , безразмерное время τ . При подаче импульса напряжения разыгрывается следующий сценарий: при напряжении соответствующем примерно половине рабочего происходит возбуждение моды с тем же радиальным индексом, но более высоким азимутальным индексом (более высокочастотная мода). Устойчивая одномодовая генерация этой моды наблюдается в полосе 10-15 кВ с КПД около 0.3, при дальнейшем увеличении напряжения амплитуда этой моды быстро спадает и, одновременно, происходит нарастание амплитуды колебаний рабочей моды, которая достигает наибольшего значения на полке импульса. Диапазон устойчивой одномодовой генерации рабочей моды по напряжению составляет около 15 кВ и положение этой зоны определяется значением расстройки циклотронного резонанса. При уменьшении расстройки зона сдвигается в область высоких напряжений, правда при этом наблюдается некоторое снижение КПД гиротрона. Проведенные расчеты показали, что отклонения напряжения и тока на фронте или на полке импульса (до 0.05 от рабочих значений) не приводят к срыву колебаний рабочей моды.

Из двух рассмотренных вариантов более предпочтительным представляется гиротрон на рабочей моде ТЕ31.8, т.к. в этом случае удается реализовать более высокий выходной КПД при меньших удельных тепло-

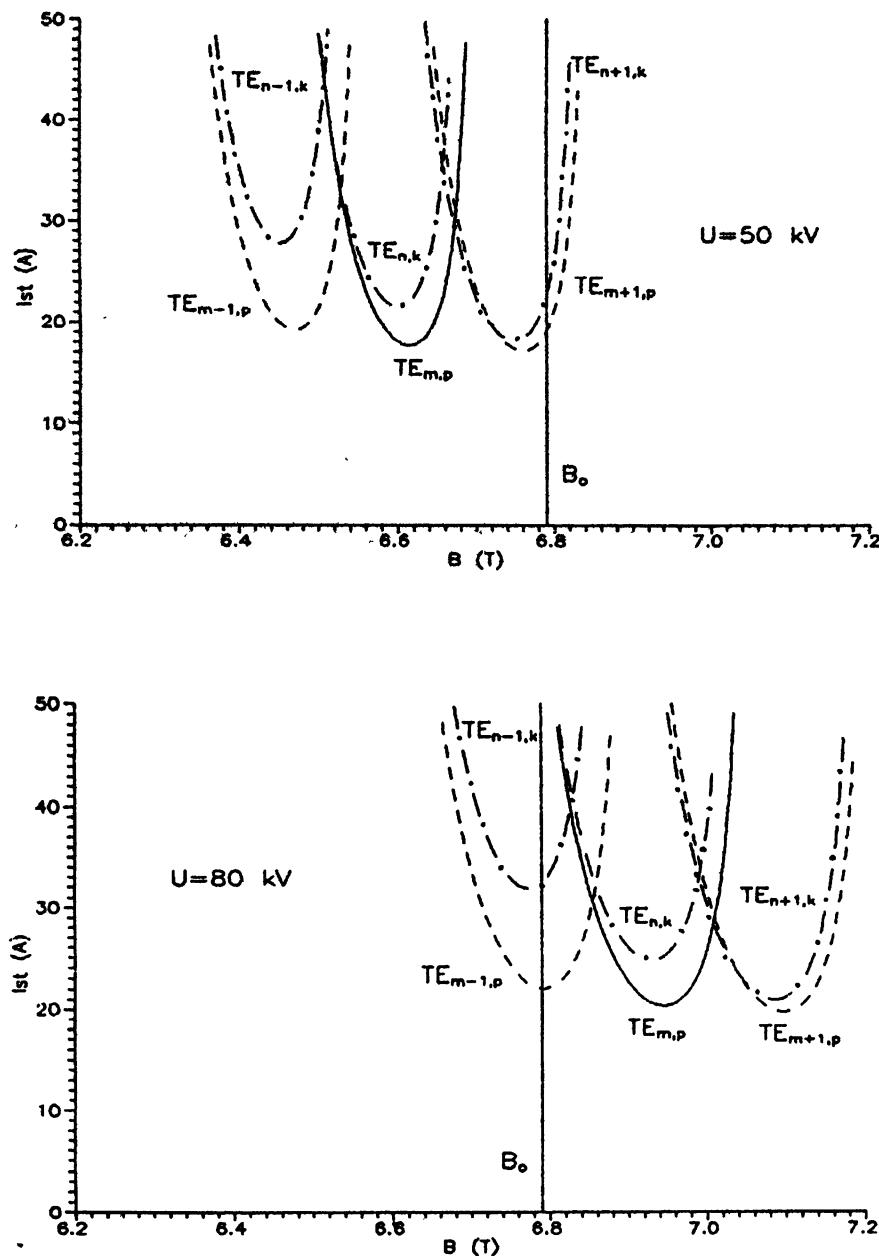


Рис. 1. Эволюция зон самовозбуждения рабочей и ближайших к ней паразитных мод (B_0 — рабочее значение магнитного поля).

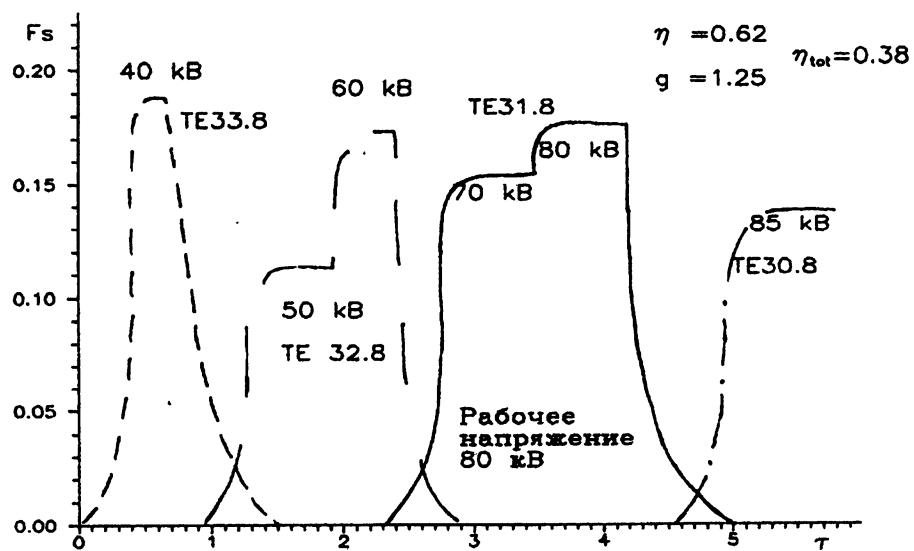
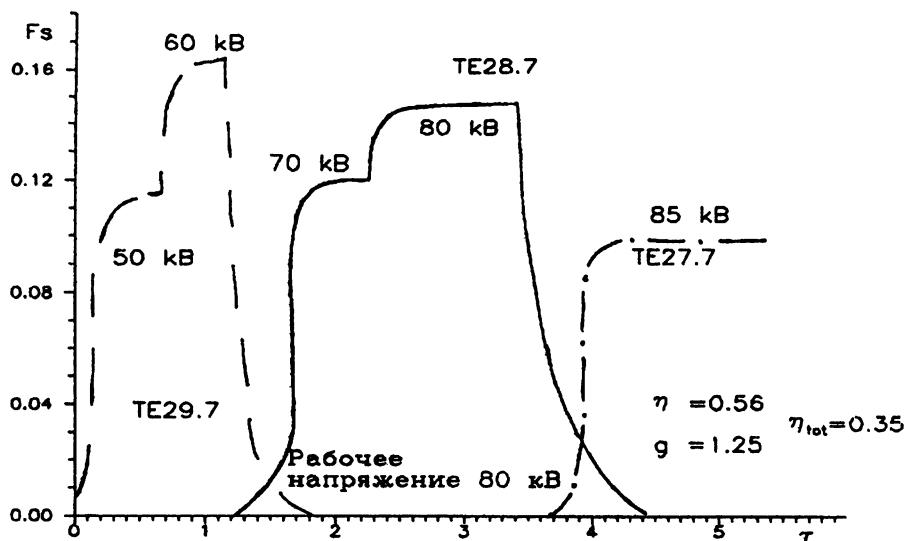


Рис. 2. Переходные процессы на переднем фронте импульса ускоряющего напряжения гиротрона.

вых нагрузках, однако габариты гиротрона и связанные с этим технологические трудности несколько возрастают. В рассмотренной электродинамической системе, представлявшей для моды TE28.7 отрезок гладкого волновода переменного сечения с длиной регулярного участка 5.1λ , что соответствует оптимальной длине взаимодействия электронов с ВЧ полем, область значений расстройки циклотронного резонанса, соответствующих наибольшему КПД, является неустойчивой и происходит перескок генерации на более низкочастотную моду с тем же радиальным индексом. Для обеспечения устойчивой одномодовой генерации моды TE28.7 при рабочих напряжениях выбираются значения расстройки циклотронного резонанса меньшие чем оптимальная, что, естественно, вызывает уменьшение КПД прибора. В этом случае возможно увеличить эффективность гиротрона за счет оптимизации профиля резонатора и длины пространства взаимодействия. Представляется желательным также уточнить расчетную модель за счет введения влияния полей пространственного заряда и расчета переходных процессов в приближении нефиксированной структуры ВЧ поля.

Полученные в рамках данной модели результаты свидетельствуют о возможности получения устойчивых одномодовых колебаний на модах TE28.7 и TE31.8 с высоким КПД, что позволяет надеяться на достижение выходной мощности более 1 МВт на частоте 170 ГГц при КПД гиротрона около 0.35.

Авторы признательны М.А.Моисееву за полезные обсуждения работы и замечания, сделанные при чтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Prater R. // J.Fusion Energy, 1990. V. 9. P. 19.
2. Thumm M. // Fusion Engineering and Design, 1995. V. 30. P. 139.
3. Петелин М. И. — В сб.: Гиротрон. — Горький, 1981. С. 77.
4. Carmel Y., Chu K. R., Dialetis D., Fliflet A., Read M. E., Kim K. I., Arfin B., Granatstein V. L. // Int.J. on Infrared and Millimeter Waves, 1982. V. 3. P. 645.
5. Моисеев М. А., Нусинович Г. С. // Изв. ВУЗов Радиофизика, 1974. Т. 17. № 11. С. 1709.
6. Запевалов В. Е., Нусинович Г. С. // Радиотехника и электроника, 1985. Т. 30. № 3. С. 563.
7. Глявин М. Ю., Нусинович Г. С. // Радиотехника и электроника, 1991. Т. 36. № 3. С. 512.
8. Глявин М. Ю. // Электроника СВЧ. Сер. 1. СВЧ-техника, 1994. Вып. 2(462). С. 33.

9. Венедиктов Н. П., Глявин М. Ю., Запевалов В. Е., Куфтин А. Н., Постникова А. С., Юлпатова М. В. // Изв. ВУЗов Радиофизика, в печати.

Институт физики микроструктур
РАН г. Н.Новгород

Поступила в редакцию
6 июня 1996 г.

**NUMERICAL SIMULATION OF TRANSIENT PROCESSES IN
170GHz/1MW GYROTRON FOR ITER**

M. Yu. Glyavin, V. E. Zapevalov

Numerical results are presented for simulation of transient processes at the background of the accelerated voltage pulse, when an excitation of parasitic oscillations is most probable. The results obtained show a possibility of settling of steady one-mode generation with a high efficiency in a 170GHz/1MW gyrotron for ITER.