

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Гом XXXIX N 7

Нижний Новгород

1996

С о д е р ж а н и е

- Троицкий В. С.**, Алёшин В. И. Наблюдательные свидетельства образования микроволнового фона через тепловое излучение звёзд метагалактики 817
- Пермяков В. А.** О трактовке распространения электромагнитных волн в изотропной неоднородной диэлектрической среде как в среде с эффективной анизотропией, описываемой тензором магнитной проницаемости 844
- Красовицкий В. Б., Прудских В. В.** Уединённые электромагнитные импульсы в замедляющей системе с электронно-ионным пучком 850
- Воробьев В. В.** Отражение сфокусированного светового пучка в среде с нелинейностью Керра. I. Оценки в приближении параксиальных пучков 867
- Алимов В. А., Рахлин А. В.** О модели искусственного F-spread в ионосфере 876
- Стрелков Г. М.** О влиянии длины волны излучения на эффективность возбуждения приповерхностного волновода 882
- Хоперсков А. В.** К вопросу об устойчивости сверхзвуковой МГД-струи 891
- Почерняев В. Н.** Тройники на частично заполненном прямоугольном волноводе 901
- Гущин В. В., Заславский Ю. М., Рубцов С. Н.** Трансформация спектра высокочастотного импульса при распространении в поверхностном слое грунта 910

Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Статистические свойства кросс-корреляционного функционала от двух нормальных марковских процессов	916
Вебер В. Л. Контраст изображений малоразмерных объектов при наблюдении через рассеивающую среду методом отражательной конфокальной микроскопии	926

УДК 524.85

НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ СВИДЕТЕЛЬСТВА ОБРАЗОВАНИЯ МИКРОВОЛНОВОГО ФОНА ЧЕРЕЗ ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВЁЗД МЕТАГАЛАКТИКИ

В. С. Троицкий, В. И. Алёшин

По мнению большинства, чтобы опровергнуть истинность космологии горячего взрыва, достаточно продемонстрировать другой, внушающий доверия, механизм образования микроволнового фона, приводящий к заключению, что фон не является строго чёрнотельным и (или) не может быть связан с веществом в ранней эпохе [1].

ВВЕДЕНИЕ

Идея объяснения микроволнового фона излучением источников различной природы не нова, но и не была конкретно разработана. В настоящей работе исследуется возможность объяснения наблюдаемого микроволнового фона тепловым излучением звёзд галактик. Для этого, как очевидно, необходимо использовать определённые космологические модели строения и эволюции Вселенной.

Ранее изучался вопрос о вкладе интегрального излучения звёзд в модели стандартной космологии. Первые исследования в этом направлении были выполнены Мак-Витти [2]. На методической основе этой работы Дорошкевич и Новиков [3] опубликовали результаты расчётов для различных моделей стандартной космологии. (Методы расчетов не излагались.) В частности, было показано, что на волне наблюдения $\lambda_0 > 1$ мм объёмная плотность энергии интегрального излучения звёзд метагалактики много меньше чёрнотельного излучения с температурой $T = 1$ К. В работе [4] было утверждение, что "... наблюдаемое реликтовое излучение нельзя объяснить интегральным излучением дискретных источников" в моделях стандартной космологии. Расчёт вклада излучения галактик, как справедливо заметили Зельдович и Новиков [5], "...особенно важен в горячей модели, так как это есть тот фон, на котором надо наблюдать реликтовое излучение самой модели".

Это весьма ценный, но неиспользованный до настоящего времени тест проверки теории реликтового происхождения фона. В последнее время возникают серьёзные экспериментальные доказательства, что стандартная космология не отражает реальное состояние вещества и излучения во

Вселенной (светимость галактик, их размеры и эволюция) [6–8]. В связи с этим и существующими альтернативными космологическими теориями становится важным объяснение микроволнового фона другими физическими причинами и, в частности, оптическим излучением звезд галактик, трансформирующимся в радиодиапазон, благодаря красному смещению излучения звезд по пути к наблюдателю.

В этой формулировке задача требует разработки физически обоснованных методов расчёта, чего до настоящего времени в полной мере нет. Метод расчёта и первые оценки, представленные ранее [8], показали, что в статической нерасширяющейся Вселенной трёхградусный фон может быть объяснён тепловым излучением звезд, если размеры стационарной Вселенной, по крайней мере, на один порядок больше существующих оценок. В настоящей работе даётся детальное физическое обоснование метода расчёта, который затем применяется к расчёту звездного фона для различных моделей Вселенной, в том числе стандартной. Проводится сравнение полученных для различных моделей результатов с наблюдаемыми характеристиками фонового радиоизлучения. Это может являться хорошим тестом для выбора той или иной теоретической модели наиболее адекватной с реальностью (см. [1, 9]). Всё сказанное вполне оправдывает постановку настоящей работы.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАЗОВАНИЯ ЗВЁЗДНОГО МИКРОВОЛНОВОГО ФОНА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Для определения этого излучения будем рассматривать Вселенную, как эвклидово пространство, заполненное веществом в виде галактик, представляющих собой скопление звезд различных спектральных классов. При этом будем считать, что распределение галактик в пространстве Метагалактики однородно и изотропно, а их средние параметры, по достаточно большому объёму, практически не зависят от расстояния. Предполагается также, что тепловое излучение звезд является чёрнотельным. Для начала рассмотрим решение задачи в упрощённом виде, полагая температуру всех звезд одинаковой во всей галактике. Пусть n — средняя объёмная плотность галактик (n гал/Мпк³), m — среднее число звезд в галактиках, r — их средний радиус и T — средняя температура их фотосферы. Учтём также, что звезды в галактиках практически не проектируются друг на друга.

Найдём спектральную плотность мощности потока теплового излучения от звезд на радиочастоте ν_0 в раскрыве приёмной антенны, имеющей диаграмму направленности Ω стерадиан. Полный поток излучения от галактик, находящихся на метрическом расстоянии R в элементе объёма $R^2 \Omega dR$, будет

$$d\Phi = F(\nu, T) \pi r^2 n m R^2 \Omega dR d\nu . \quad (1)$$

Здесь ν — частота излучения звёзд в их собственной системе отсчёта, $F(\nu, T)$ — функция Планка для спектральной плотности испускательной способности чёрного тела звезды [Вт/см²·Гц·ср]. В процессе распространения до антенны радиотелескопа этого излучения, испускаемого на частоте ν , оно будет испытывать три вида ослабления и трансформацию частоты вследствие красного смещения. Первое — это ослабление в R^2 раз, второе — поглощение энергии в среде распространения, которое мы будем описывать некоторой функцией $\gamma(R)$. Наконец, третий вид ослабления связан с красным смещением частоты ν излучения до частоты наблюдения $\nu_0 = \nu/(z + 1)$.

Для определения этого вида ослабления нет необходимости использовать какую-либо гипотезу о природе красного смещения, кроме экспериментального факта его существования. Рассмотрим излучение звезды в узкой полосе частот $d\nu$ на частоте ν , имеющей спектральную плотность $F(\nu, T)$. В пункте наблюдения весь этот спектр будет видется смещённым в сторону низких частот так, что его границы будут на частотах $\frac{\nu - 0,5\Delta\nu}{(z + 1)}$ и $\frac{\nu + 0,5\Delta\nu}{(z + 1)}$, а спектральная плотность $F(\nu_0, T)$ останется неизменной, так как её увеличение в $(z + 1)$ раз, за счёт сжатия спектра, компенсируется во столько же раз ослаблением энергии кванта $h\nu$ до $h\nu_0$. Таким образом, энергия смещённого спектра равна интегралу от $F(\nu, T)$ в полосе $\Delta\nu/(z + 1)$, т. е.

$$F(\nu, T) \Delta\nu/(z + 1) = F(\nu_0, T) \Delta\nu_0,$$

где $\Delta\nu_0 = \Delta\nu/(z + 1)$. Этот результат получается и при чисто квантовом подходе. Действительно, излучение $F(\nu, T) d\nu$ при очень узкой полосе $d\nu$ является практически монохроматическим и его мощность пропорциональна $h\nu$. В месте приёма это монохроматическое излучение будет иметь энергию, пропорциональную $h\nu_0$, т. е. уменьшенную в $(z + 1)$ раз по сравнению с излучённой. То же самое ослабление будет и в случае широкой полосы приёма, перекрывающей весь спектр наблюдаемого излучения. Действительно, найдём полную принимаемую энергию от источника, имеющего красное смещение z . Как и выше, примем, что в собственной системе источника излучение имеет планковский спектр. В этом случае у наблюдателя каждая частота всего спектра, простирающегося от $\nu = 0$ до $\nu \rightarrow \infty$, сместится к нулевой частоте, уменьшаясь в $(z + 1)$ раз.

Этот спектр примет вид

$$d\nu_0 F(\nu_0) = \frac{2h}{c^2} \nu_0^3 (z + 1)^3 \left(\exp \frac{h\nu_0(z + 1)}{kT} - 1 \right)^{-1} d\nu_0, \text{ [Вт/см}^2 \cdot \text{ср]},$$

где $\nu_0 = \nu/(z + 1)$ — частота в системе наблюдателя. Интегрируя по всем частотам ν_0 от 0 до ∞ и используя замену переменных $h\nu_0(z + 1)/(kT) = x$,

получаем аналог закона Стефана-Больцмана

$$P = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2 (z+1)} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \sigma T^4 / (z+1).$$

Таким образом, как и следовало ожидать, вся принимаемая энергия уменьшается в $(z+1)$ раз.

Надо отметить, что в стандартной космологии ослабление излучения галактик вследствие красного смещения за счет доплер-эффекта принимается равным $(z+1)^2$ раз, т.е. для планковского спектра излучения $F(\nu, T) d\nu$ принимаемый сигнал имеет мощность

$$F(\nu, T) d\nu / (z+1)^2 = F(\nu, T) d\nu_0 / (z+1).$$

Такое ослабление, полагается, происходит как за счёт уменьшения энергии кванта, так и уменьшения их числа (или иначе полосы). Похоже, что таким образом ослабление определяется дважды: сначала в $(z+1)$ раз за счёт уменьшения энергии кванта (квантовый подход) и затем ещё в $(z+1)$ раз за счёт уменьшения полосы (классический подход). Нам представляется такой подход необоснованным.

Итак, в пункте наблюдения, получаем освещённость от рассматриваемого элемента объёма, равную

$$dE = \pi r^2 n m \gamma(R) F(\nu_0(z+1), T) \Omega d\nu_0 dR, \quad [\text{Вт/см}^2 \cdot \text{ср}], \quad (2)$$

где

$$F(\nu_0(z+1), T) = \frac{2h\nu_0^3 (z+1)^3}{c^2 \{ \exp[h\nu_0(z+1)/(kT)] - 1 \}}, \quad [\text{Вт/см}^2 \cdot \text{ср} \cdot \text{Гц}].$$

Полная освещённость в раскрыве антенны от всех галактик, находящихся в телесном угле зрения радиотелескопа, будет

$$E = \pi r^2 n m d\nu_0 \Omega \int_0^{\infty} F(\nu_0(z+1), T) \gamma(R) dR. \quad (3)$$

Если $\gamma(R)$ таково, что при некотором $R = R_{\max}$, $\gamma(R_{\max}) = 0$, то верхний предел интеграла будет определённым и равным R_{\max} . Как очевидно, при заданном расстоянии R галактики её излучение на частоте ν попадает в полосу приёма на частоте $\nu_0 = \nu/(z+1)$, если красное смещение галактики равно z . Таким образом, для интегрирования выражения (3) необходимо использовать функциональную связь R с ν или, в конечном счёте, связь R и z .

Тогда заменяя в (3) dR на $dR = \frac{dR}{dz} dz$, $\gamma(R)$ на $\gamma(z)$, получим окончательно

$$E = \pi r^2 n m d \nu_0 \Omega \int_0^{z_m} F(\nu_0(z+1), T) \gamma(z) \frac{dR}{dz} dz, \quad [\text{Вт/см}^2 \cdot \text{ср}]. \quad (4)$$

В нашем случае излучение E целесообразно характеризовать эффективной температурой T_Φ , которая определяется как температура чёрного излучения, имеющего ту же спектральную мощность. Сравнивая (4) с излучением чёрной полости

$$E = 2h\nu_0^3 \Omega d\nu_0 / c^2 [\exp(h\nu_0 / (kT_\Phi)) - 1], \quad [\text{Вт/см}^2 \cdot \text{ср}]$$

получим искомое выражение для температуры фонового излучения Метагалактики

$$\pi r^2 n m \frac{2h\nu_0^3}{c^2} \int_0^{z_m} \frac{(z+1)^3 \gamma(R) \frac{dR}{dz} dz}{\exp[h\nu_0(z+1)/(kT)] - 1} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2 \{\exp[h\nu_0/(kT_\Phi)] - 1\}}. \quad (5)$$

Размерность (5) равна $[\text{Вт/см}^2 \cdot \text{ср} \cdot \text{Гц}]$. В безразмерной форме, обозначая $\nu_0 = c/\lambda_0$, имеем окончательно

$$\pi r^2 n m \int_0^{z_m} \frac{(z+1)^3 \gamma(R) \frac{dR}{dz} dz}{\exp[hc(z+1)/(kT\lambda_0)] - 1} = \left[\exp\left(\frac{hc}{k\lambda_0 T_\Phi}\right) - 1 \right]^{-1}. \quad (6)$$

Обозначая левую часть через x , получим для температуры фона

$$T_\Phi(\lambda_0) = \frac{hc}{k\lambda_0 \ln[(x+1)/x]}. \quad (7)$$

Выражение (6) упрощается, если, во-первых, при верхнем пределе интегрирования z_m выполняется условие $hc(z_0+1)/(\lambda_0 kT) \leq 0,1 - 0,2$ и, во-вторых, если при ожидаемой температуре фона T_Φ величина $hc/(\lambda_0 kT_\Phi) \leq 0,1 - 0,2$. При этом, ограничиваясь первым членом разложения экспоненциальных функций, получим

$$T_\Phi = r^2 n m T \int_0^{z_m} (z+1)^2 \gamma(z) \frac{dR}{dz} dz. \quad (8)$$

При $z_m = 3000$ и $T = 6 \cdot 10^3 \text{ К}$ первое условие выполняется для $\lambda_0 \geq 3 \text{ см}$, а второе при $T_\Phi \sim 3 \text{ К}$ выполняется для $\lambda_0 \geq 2,5 \text{ см}$.

Для интегрирования необходимо знать функцию расстояния $R(z)$ в интервале $0 \leq z \leq \infty$. Для этого можно использовать в первом приближении закон Хаббла $R = R_H \cdot z$, установленный экспериментально для $z \leq 0,02$ или закон $R = R_0 \sqrt{z}$, подтверждаемый наблюдениями галактик и квазаров в диапазоне $0 \leq z \leq 5$ [6, 8]. Далее для расчёта необходимо определить функции ослабления $\gamma(R)$. Это можно сделать на основе различных физических соображений. Мы предлагаем для начала простейшее, а именно: что начиная с некоторого расстояния R_m излучение источников из областей $R > R_m$ полностью экранируется (или поглощается) центральными частями галактик, лежащими на пути распространения волн. Это наступает тогда, когда проекции всех центральных областей галактик, находящихся в конусе зрения длиной R_m , сливаются и займут площадь ΩR_m^2 . Число галактик в конусе Ω до расстояния R равно

$$N = \frac{nR^3\Omega}{3}$$
 Общая площадь проекции их центральных частей диаметром ℓ кпк будет $S = 0,25n\Omega R^3\ell^2$. Эта площадь закроет часть площади сечения конуса ΩR^2 . Следовательно, через сечение пройдёт только часть излучения $\gamma(R) = 1 - 0,25Rn\ell^2$. Полное закрытие канала наступит при $\gamma(R) = 0$, т.е. при $R_m = \frac{1}{0,25n\ell^2}$, тогда $\gamma(R) = 1 - \frac{R}{R_m}$ или при $R = R_0\sqrt{z}$

имеем $\gamma(z) = 1 - \sqrt{\frac{z}{z_m}}$. Здесь функция ослабления (или экранирования) не зависит от длины волны, что практически имеет место для оптического излучения формирующего наблюдаемый фон. Примем для расчёта $\ell = 6$ кпк, $n = 2$, тогда $R_m \simeq 50000$ Мпк, $z_m \simeq 6 \cdot 10^3$.

В приведённом расчёте галактики и звёзды внутри галактик считались неподвижными относительно выбранной сферической системы координат с центром у наблюдателя. В действительности наблюдаются собственные движения галактик, а также и звёзд внутри них. Очевидно, что учёт этих движений не изменит полученный результат. Действительно, в достаточно большом объёме, скажем $\simeq 10^3$ Мпк³, содержащем несколько тысяч галактик, направления движений распределены изотропно, а величины скоростей распределены по нормальному закону при среднеквадратичной скорости ~ 300 км/с. Поэтому излучение галактик будет иметь сдвиг частот в среднем не более $\Delta\nu/\nu \simeq \pm v/c \simeq 10^{-3}$. Вследствие этого, видимая температура излучения от каждой галактики будет отличаться от средней на величину $\Delta T/T \leq \pm 10^{-3}$. Ввиду малости эффекта и его однородности при суммировании излучения большого числа галактик влияние этих хаотических скоростей на частоту и температуру принимаемого излучения будет взаимно компенсироваться. То же самое можно сказать и о влиянии дисперсии скоростей звёзд в галактиках. Итак, однородное и изотропное фоновое излучение фиксирует в статистическом смысле неподвижную систему координат, опирающуюся на все галактики видимой части Вселенной.

2. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ЗВЕЗДНОГО ФОНА МИКРОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТАГАЛАКТИКИ

В настоящем разделе даётся достаточно общее выражение для звёздного фона, пригодное в различных моделях Вселенной. При этом полагаем, что пространство заполнено галактиками однородно и изотропно, а их средняя светимость и размеры неизменны во времени и пространстве. Задача состоит в том, чтобы дать расчёт, учитывающий вклад звёзд различных спектральных классов, т. е. различной температуры фотосфер и различных размеров. Как известно, более 80% звёзд галактик составляют звёзды главной последовательности, которые, следовательно, будут определять в основном наблюдаемый звёздный фон. Для них требуемые нами параметры r и T даются через светимость звезды M , определяющий её спектральный класс, радиус и температуру фотосферы.

Для относительного радиуса звезды r/r_{\odot} используем известную формулу

$$\lg(r/r_{\odot}) = \frac{5000}{T} - 0,2M - 0,02, \quad (9)$$

где T — температура фотосферы звезды и M — её фотографическая величина. Связь $M - T$ даётся обычно в таблицах и для звёзд главной последовательности с достаточной точностью аппроксимируется функцией

$$T = \frac{26 \cdot 10^3}{0,37M + 2,4}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$\frac{r^2}{r_{\odot}^2} = 10^{-0,233M + 1,05}. \quad (11)$$

Распределение звёзд главной последовательности по светимости $\varphi(M)$ известно (см., например, [10]). Функция светимости $\varphi(M)$ даётся в виде таблицы в интервале $M \pm \frac{1}{2}$ около целочисленного значения от $M = -6$ до $M = 20$, что охватывает спектральные классы *B A F G K M*. Интервалы значений M указанных спектральных классов соответственно равны $(-4, -1)$, $(0, +3)$, $(+4, +6)$, $(+7, +9)$, $(+10, +19)$. Нами использована нормировка $\sum \varphi(M) = 1$. В результате полное излучение будет

$$\begin{aligned} \pi r_{\odot}^2 n m \sum_{-4}^{19} 10^{-0,233M + 1,05} \varphi(M) \int_0^{z_m} \frac{(z+1)^3 \gamma(z) \frac{dR}{dz} dz}{\exp\{hc(z+1)/(\lambda_0 kT)\} - 1} = \\ = \left[\exp \frac{hc}{k\lambda_0 T_{\Phi}} - 1 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь T определяется выражением (10). Функция dR/dz определяется принятой теоретической или экспериментальной зависимостью $R(z)$. Выражение (12) не зависит явно от принятой природы красного смещения. Она проявляется лишь через конкретные функции $R(z)$. Для экспериментальной статической модели Вселенной $R(z) = R_0\sqrt{z}$, для теоретической закрытой модели стандартной космологии $R(z) = cH^{-1}z/(z+1)$ и т. п.

3. ЗВЁЗДНЫЙ МИКРОВОЛНОВЫЙ ФОН ИЗЛУЧЕНИЯ В СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ

Рассмотрим статическую не расширяющуюся модель Вселенной. Заполнение пространства галактиками предполагается однородным и изотропным в масштабах, оцениваемых современными наблюдениями. Полагаем также, что средние размеры и светимость в тех же масштабах неизменны во времени и во всём пространстве Метагалактики. Важным является то, что эта модель вытекает из наблюдаемых средних (статистических) зависимостей видимой светимости $\overline{m}(z)$ и угловых размеров $\overline{\theta}(z)$ галактик и квазаров, которые позволяют определить реальную, существующую зависимость $R(z)$, равную $R = 600\sqrt{z}$ Мпк в интервале смещений $0 \leq z \leq 5$ [11]. Учитывая в (12), что $R = R_0\sqrt{z}$, где $R_0 = 600$ Мпк, получим

$$A \sum_{-4}^{19} 10^{-0,233 M + 1,05} \varphi(M) \int_0^{z_m} \frac{z^{-1/2}(z+1)^3 \gamma(z) dz}{\exp\{hc(z+1)/(\lambda_0 kT)\} - 1} =$$

$$= \left[\exp \frac{hc}{k\lambda_0 T_\Phi} - 1 \right]^{-1}. \quad (13)$$

Здесь T задаётся (10), $A = \frac{1}{2} \pi r_\odot^2 n m R_0$.

Для величины параметра A могут быть даны лишь допустимые пределы возможных значений, так как неизвестно точное среднее значение nm , т. е. число звёзд в кубическом мегаларсеке. По данным о населении Местной группы галактик, содержащем три большие галактики с числом звёзд $m = 10^{11} - 10^{12}$ и около двух десятков с числом звёзд на один-полтора порядка меньшим, можно положить $10^{10} \leq nm \leq 10^{11}$. Тогда при $R_0 = 600$ Мпк допустимое значение A лежит в интервале $10^{-12} \leq A \leq 10^{-10}$, который будет использоваться в расчётах фона. Далее, принимая средний размер центральной части галактик $\ell \simeq 6$ кпк, имеем $\gamma(z) = 1 - \sqrt{z/z_m}$, где $z_m \sim 5000 - 7000$. Результаты расчёта температуры фона приведены в табл. 1 и 2 в диапазоне волн от одного метра до долей микрона. Первая таблица рассчитана для закона $R = R_0\sqrt{z}$, вторая —

для сравнения, при Хаббловском линейном законе $R = R_H z$, экстраполированном за пределы его экспериментального обоснования, которое имеет место лишь в интервале $0 \leq z \leq 0,02$.

Т а б л и ц а 1

Звёздный фон радиоизлучения в модели статической Вселенной при $R = R_0 \sqrt{z}$ для различных комбинаций параметров A и z_m . Колонки 2-6 — относительный вклад в фоновое излучение от звёзд спектральных классов $B A F G K M$. Первая строка колонок 2-6 — относительное число звёзд данного спектрального класса

$A = 0,11488E - 10$ $MAX Z = 7000,0$

Волна (мм)	B/S	A/S	FG/S	K/S	M/S	$T_{\text{фона}}$
	0,013%	1,40%	7,47%	9,29%	81,82%	
0,0001	0,986	0,014	0,000	0,000	0,000	3668,36
0,001	0,219	0,560	0,195	0,023	0,003	520,08
0,010	0,238	0,543	0,189	0,025	0,005	71,95
0,100	0,231	0,547	0,191	0,025	0,005	11,88
1,000	0,165	0,568	0,228	0,032	0,006	3,09
10,000	0,061	0,480	0,358	0,075	0,025	2,56
30,000	0,053	0,454	0,373	0,086	0,034	2,73
100,000	0,050	0,445	0,378	0,090	0,037	2,81
200,000	0,050	0,443	0,379	0,090	0,038	2,83
400,000	0,050	0,442	0,379	0,091	0,039	2,84
800,000	0,049	0,442	0,379	0,091	0,039	2,85
700,000	0,049	0,442	0,379	0,091	0,039	2,85
1000,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,85

$A = 0,25633E - 10$ $MAX Z = 5000,0$

Волна (мм)	B/S	A/S	FG/S	K/S	M/S	$T_{\text{фона}}$
	0,013%	1,40%	7,47%	9,29%	81,82%	
0,0001	0,986	0,014	0,000	0,000	0,000	3740,04
0,001	0,220	0,560	0,193	0,023	0,003	535,29
0,010	0,237	0,543	0,190	0,025	0,005	74,92
0,100	0,228	0,549	0,193	0,026	0,005	12,68
1,000	0,141	0,570	0,245	0,036	0,007	3,53
10,000	0,057	0,469	0,365	0,080	0,028	2,72
30,000	0,052	0,450	0,375	0,087	0,035	2,73
100,000	0,050	0,444	0,378	0,090	0,038	2,74
200,000	0,050	0,442	0,379	0,091	0,038	2,74
400,000	0,049	0,442	0,379	0,091	0,039	2,74
800,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,75
700,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,75
1000,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,75

Продолжение табл. 1

$$A = 0,88421E - 10 \quad \text{MAX } Z = 3000,0$$

Волна (мм)	B/S	A/S	FG/S	K/S	M/S	$T_{\text{фона}}$
	0,013%	1,40%	7,47%	9,29%	81,82%	
0,0001	0,986	0,014	0,000	0,000	0,000	3857,52
0,001	0,222	0,561	0,191	0,023	0,003	560,66
0,010	0,235	0,544	0,191	0,025	0,005	80,00
0,100	0,220	0,551	0,197	0,026	0,005	14,13
1,000	0,108	0,558	0,281	0,044	0,010	4,31
10,000	0,054	0,458	0,371	0,084	0,032	2,89
30,000	0,051	0,447	0,377	0,089	0,037	2,73
100,000	0,050	0,443	0,379	0,090	0,038	2,67
200,000	0,050	0,442	0,379	0,091	0,039	2,66
400,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,65
800,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,65
700,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,65
1000,000	0,049	0,441	0,380	0,091	0,039	2,65

Т а б л и ц а 2

Звёздный фон радиоизлучения в модели статической Вселенной при Хаббловском законе $R = R_H \cdot z$ для различных комбинаций параметров A и z_m . Колонки 2–6 — относительный вклад в фоновое излучение от звёзд спектральных классов $B A F G K M$. Первая строка колонок 2–6 — относительное число звёзд данного спектрального класса

$$A = 0,11362E - 11 \quad \text{MAX } Z = 3000,0$$

Волна (мм)	B/S	A/S	FG/S	K/S	M/S	$T_{\text{фона}}$
	0,013%	1,40%	7,47%	9,29%	81,82%	
0,0001	0,994	0,006	0,000	0,000	0,000	3381,34
0,001	0,350	0,517	0,121	0,011	0,001	488,63
0,010	0,313	0,520	0,147	0,017	0,003	71,29
0,100	0,285	0,535	0,159	0,019	0,003	12,82
1,000	0,119	0,573	0,263	0,038	0,007	4,09
10,000	0,055	0,460	0,370	0,084	0,032	2,86
30,000	0,051	0,447	0,377	0,089	0,037	2,73
100,000	0,050	0,443	0,379	0,090	0,038	2,68
200,000	0,050	0,442	0,379	0,091	0,039	2,67
400,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,66
800,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,66
700,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,66
100,000	0,049	0,441	0,380	0,091	0,039	2,66

Продолжение табл. 2

$$A = 0,25601E - 12 \quad MAX \quad Z = 5000,0$$

Волна (мм)	B/S	A/S	FG/S	K/S	M/S	$T_{\text{фона}}$
	0,013%	1,40%	7,47%	9,29%	81,82%	
0,0001	0,994	0,006	0,000	0,000	0,000	3264,10
0,001	0,351	0,516	0,120	0,011	0,001	465,14
0,010	0,315	0,519	0,146	0,017	0,003	66,45
0,100	0,296	0,529	0,154	0,018	0,003	11,40
1,000	0,166	0,582	0,218	0,029	0,005	3,28
10,000	0,058	0,472	0,364	0,079	0,028	2,68
30,000	0,052	0,451	0,375	0,087	0,035	2,73
100,000	0,050	0,444	0,378	0,090	0,038	2,76
200,000	0,050	0,443	0,379	0,090	0,038	2,76
400,000	0,050	0,442	0,379	0,091	0,039	2,77
800,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,77
700,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,77
1000,000	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	2,77

Сравнение таблиц 1 и 2 показывает, что какой-либо существенной разницы в зависимости температуры фона от волны при этом не возникает. Из таблиц видно, что на волнах длиннее одного миллиметра ($\lambda > 1$ мм) фон определяется вкладом от спектральных классов AFG , а при $\lambda < 1$ мм — от BA и в ультрафиолете только классом B . Для проверки проводился также расчёт фона при ослаблении за счёт красного смещения в $(z + 1)^2$ раз. При этом зависимости остаются практически неизменными, но величина A на порядок превышает оценку верхней границы A как для закона $R = R_0\sqrt{z}$, так и Хаббловского.

Самым интересным и неожиданным результатом теории оказался рост температуры фона в субмиллиметровом диапазоне волн. Никакие попытки исключить его разумными, допустимыми способами не удались. В конце концов стало понятным, что этот рост возникает вследствие резкого отличия звёздного фона на субмиллиметровых и более коротких волнах от чёрнотельного. Это показано на рис. 1, где приведён звёздный спектр фона в сравнении с чёрнотельным при $T = 2,7$ К. Спектр теоретический и чёрнотельный при $T = 2,7$ К совпадают в релей-джинсовской области Планковского спектра фона и резко расходятся в Виновской области при $\lambda < 1$ мм. Здесь звёздный спектр является практически плоским и его спектральная плотность на много порядков превышает спектральную плотность планковского спектра при $T = 2,7$ К, что и вызывает рост эквивалентной температуры фона. Причиной расхождения спектров является то, что звёздный фон складывается, в основном, из релей-джинсовских частей спектров излучения звёзд, которые при высокой тем-

пературе звёзд простираются до оптических частот. Действительно, подынтегральное выражение в (13), как видно, с укорочением волны уменьшается экспоненциально и, следовательно, начиная с некоторого значения z , оно не даёт существенного вклада в интеграл (13). Можно считать, что это имеет место, когда $hc(z+1)/(k\lambda_0 T)$ более единицы и выражение $hc(z+1)/(k\lambda_0 T) = 1$ определяет при заданном T и λ_0 фактическую границу верхнего предела интегрирования. В результате для каждого спектрального класса звёзд для разных волн наблюдения имеется своя фактическая граница интегрирования по z , связанная, как очевидно, с обрезанием Планковского спектра звёзд в Виновской его области.

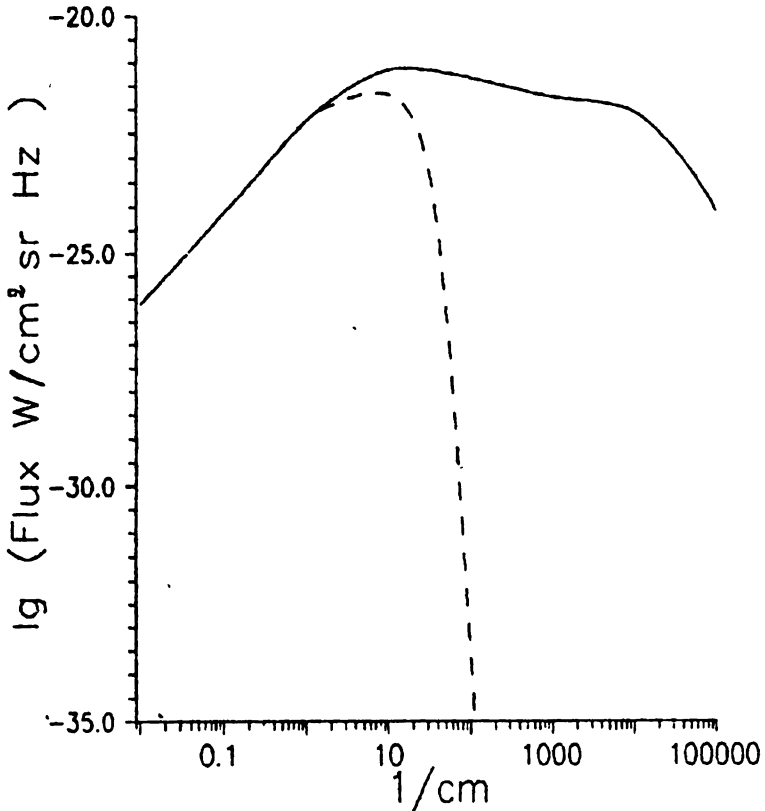


Рис. 1. Сравнение спектра звёздного фона излучения для статической модели Вселенной (сплошная кривая при $z_m = 5 \cdot 10^3 - 7 \cdot 10^3$) с чёрнотельным спектром при $T_\Phi = 2,73$ К (пунктир).

Таким образом, фоновое излучение складывается в основном из излучения звёзд в релей-джинсовской области. В табл. 3 приведено значение $z_{\text{оф}}$, которое характеризует размер слоя галактик $R = R_0 \sqrt{z_{\text{оф}}}$, в основном ответственного за наблюдаемое фоновое излучение на данной волне. Из таблицы видно, что на сантиметровых и более длинных волнах при $\lambda > (0,5 - 1)$ см интенсивность спектра фона ограничивается экраниров-

кой галактиками при $z_m \approx (5 - 7) \cdot 10^3$, а при $\lambda \leq 0,1$ см — падением интенсивности излучения звёзд в Виновской области их спектра. В итоге фоновое излучение в Виновской области волн определяется довольно тонким слоем галактик, излучающих в релей-джинсовской области спектра. Уменьшение числа галактик, ответственных за фон на $\lambda \leq 1$ мм, оказывается важным фактором, который приводит к значительному увеличению мелкомасштабных флуктуаций фона с укорочением волн, что подтверждается наблюдениями.

Т а б л и ц а 3

Зависимость эффективного расстояния действия звёзд различных спектральных классов от длины волны наблюдения

λ_0 см	$T = 25 \cdot 10^3$ К Z_e	$T = 10 \cdot 10^3$ К Z_e	$T = 6 \cdot 10^3$ К Z_e	$T = 4 \cdot 10^3$ К Z_e
10	$175 \cdot 10^3$	$70 \cdot 10^3$	$42 \cdot 10^3$	$28 \cdot 10^3$
1	$17,5 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$4,2 \cdot 10^3$	$2,8 \cdot 10^3$
0,1	1750	700	420	280
0,01	175	70	42	28
0,001	17,5	7	4,2	2,8
10	1,75	0,7	0,42	0,28

При расчёте звёздного фона исследовалось влияние на температуру фона увеличения температуры фотосферы звёзд на волнах длиннее 1 см. Для оценки этого влияния мы имеем единственный пример — Солнце. Его яркостная температура для $\lambda \leq 1$ м примерно может быть выражена формулой

$$T = T_0 + 5 \cdot 10^5 \lambda,$$

где $\lambda = \lambda_0 / (z + 1)$ в метрах. При этой температуре звёзд T_ϕ возрастает на волнах $\lambda_0 \geq 20$ см не более чем на 0,01 К.

Наконец, останавливаясь на процедуре расчёта, следует иметь в виду, что фоновая температура определяется двумя величинами A и z_m . За исходную величину бралось z_m на основании указанных выше расчётов предельной видимости, а точное значение A определялось из требования, чтобы при $\lambda_0 = 3$ см температура фона была 2,73 К. Эта величина A приводится в таблицах. Разумеется, при этом использовались те варианты расчёта, при которых A не выходило за указанные выше пределы.

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРЕДСКАЗАНИЙ ЗВЁЗДНОЙ ТЕОРИИ ФОНА С ИЗМЕРЕНИЯМИ

В настоящее время проведены обширные измерения фона вплоть до ближнего к оптике инфракрасного диапазона волн. Теория звёздного происхождения фона, по-видимому, может оказаться действенной вплоть до оптических волн, поэтому сравнение целесообразно провести, не ограничиваясь субмиллиметровым диапазоном. Кроме того, предлагаемая теория естественно объясняет наблюдаемые мелкомасштабные пространственные флюктуации интенсивности фона, а также загадочное до настоящего времени явление равенства интенсивности микроволнового фона с оптическим излучением средней галактики, в том числе и нашей. Эти вопросы подробно рассматриваются ниже.

4.1. Спектр звёздного фона и наблюдения

Как очевидно, сравнение теории с наблюдениями представляет интерес, прежде всего, в субмиллиметровом диапазоне. Измерения фона в этой области волн имеют четвертьвековую историю. Они были начаты с целью подтвердить чёрнотельный характер излучения на этих волнах, вытекающий из теории Большого Взрыва. Первые исследования на волнах $\lambda_0 < 1$ мм, проведённые тремя независимыми лабораториями в США на высотных баллонах и спутнике, дали противоречивые результаты: одни получили значения $T_{\text{ф}} = 2,7$ К, другие, после коррекции в сторону уменьшения, дали $T_{\text{ф}} = (3,6-5,5)$ К (см. [12]). Заметим, что измерения, приводящие к более высокой температуре, чем 2,7 К, подвергались и подвергаются сомнению и критике, так как противоречат теории стандартной космологии. Указанные данные, однако, потеряли своё значение ввиду неопределённости в величине волны наблюдения, из-за использования широкой полосы, сравнимой со средней частотой приёма.

В настоящее время имеются надёжные результаты в работе [13] на волнах 1,16; 0,7; 0,48; 0,137 и 0,1 мм, точность которых не хуже (3-5)%. По программе IRAS (инфракрасный астрономический спутник) выполнены измерения фона на волнах 0,1 мм и 0,6 мм, приведённые в работе [13] после коррекции. Большинство указанных результатов дано в величинах потока Вт/см²·ср·Гц за исключением данных на волнах 1,16; 0,7 и 0,48 мм, для которых были приведены также яркостные температуры фона. Значения температуры фона для остальных волн рассчитаны нами согласно соотношения $B(\nu) = 2h\nu_0^3 / \{c^2 [\exp(h\nu/kT_{\text{ф}}) - 1]\}$, где $B(\nu)$ — измеренный поток излучения в Вт/см²·ср·Гц. Проверочный расчёт температуры для указанных трёх волн показал правильность расчётов температуры по этому соотношению для остальных потоков.

Недавно на спутнике COBE (Cosmic Background Explorer) с помощью приёмника FIRAS (Far-Infrared Absolute Spectrofotometer) проведены измерения космического микроволнового фона в диапазоне волн (0,5–5) мм [14]. Получено, что в этом непрерывном диапазоне температура фона равна $T_{\phi} = 2,726 \pm 0,01$ К. Тоже на спутнике COBE по программе DIRBE (Diffuz Infra Red Background Experiment) получены верхние пределы значений фона в направлении южного полюса эклиптики на волнах 240; 143; 100 и 60 микрометров, приведённые в работе [15]. Там же дано значение верхнего предела космического фона на $\lambda = 154$ мкм. Мы использовали также обзор измерений фона на радиоволнах, приведённый в работе [16]. Наконец, для полноты картины спектра фона мы рискнули использовать для сравнения с теорией данные потоков излучения фона в световом диапазоне (0,3–0,8) мкм [10, 17], а также значения потока в ультрафиолете на волне 912 ангстрем [18]. В табл. 4 дана сводка всех указанных выше измерений фона, выраженных в единицах спектральной плотности потока излучения и яркостной температуры. На рис. 2 представлено сравнение этих данных с теоретическим выражением спектра фона, а на рис. 3 — с зависимостью яркостной температуры фона от длины волны.

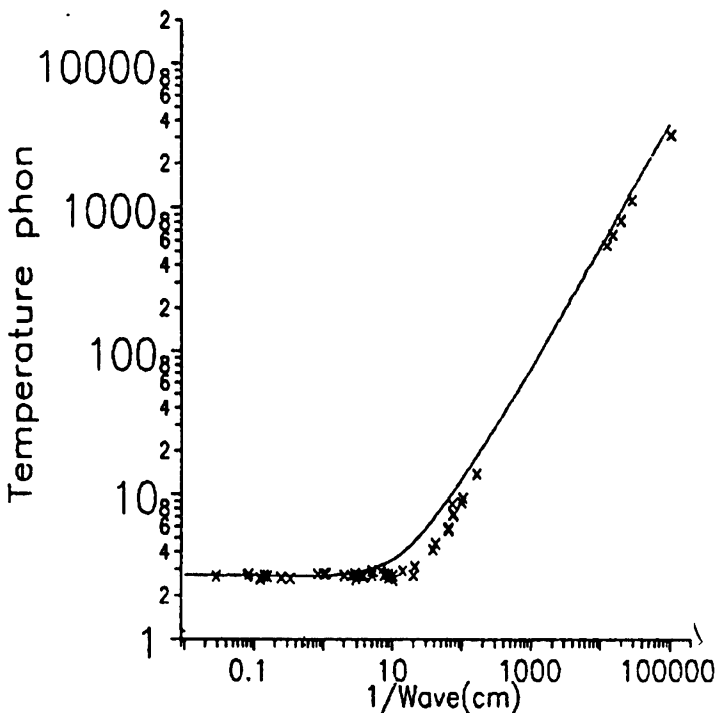


Рис. 2. Теоретическая зависимость яркостной температуры звёздного фонового от длины волны для модели статической Вселенной при $z_m = (5 - 7) \cdot 10^3$ в сравнении с данными измерений (крестики).

Т а б л и ц а 4

Экспериментальные данные измерений
спектральной плотности фонового излучения
и его яркостной температуры в зависимости
от длины волны

№	λ [мм]	$B(\nu) \cdot 10^{-24}$ $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{ср} \cdot \text{Гц}} \right]$	T_{Φ} [°K]	№	λ [мм]	$B(\nu) \cdot 10^{-24}$ $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{ср} \cdot \text{Гц}} \right]$	T_{Φ} [°K]
1	120,000	0,522	2,780	25	350,000	0,060	2,700
2	81,000	1,049	2,580	26	125,000	0,467	2,700
3	63,000	1,801	2,700	27	80,000	1,105	2,650
4	30,000	7,297	2,610	28	70,000	1,465	2,700
5	12,000	42,655	2,780	29	40,000	4,254	2,640
6	9,090	69,962	2,810	30	10,000	59,173	2,800
7	3,330	252,266	2,600	31	5,000	169,739	2,726
8	2,640	331,158	2,700	32	4,000	226,599	2,726
9	2,640	342,627	2,740	33	3,000	306,290	2,726
10	1,320	340,065	2,760	34	2,000	382,538	2,726
11	1,320	335,124	2,750	35	1,000	204,305	2,726
12	3,510	276,694	2,800	36	0,500	8,321	2,726
13	1,980	477,012	2,950	37	0,240	5,600	7,013
14	1,480	456,029	2,920	38	0,154	1,330	5,867
15	1,140	231,624	2,650	39	0,134	5,800	7,221
16	1,000	141,735	2,550	40	0,130	4,800	7,305
17	2,640	339,750	2,730	41	0,100	3,300	8,820
18	1,320	360,202	2,800	42	0,095	5,000	9,436
19	1,160	302,769	2,790	43	0,060	4,800	13,726
20	0,709	116,866	2,956	44	0,0008	0,650	554,560
21	0,481	29,404	3,179	45	0,00035	0,135	1126,722
22	0,262	3,678	4,125	46	0,0005	0,250	826,945
23	0,137	82,966	8,650	47	0,00065	0,450	662,294
24	0,102	3,7	8,740	48	0,00000912	0,0001	3181,021

Примечание: №№ 1–16 — Когут [16], 17–18 — Майер [19], 19–24 — Мацумото [13], 25–36 — Матер [14], 37–43 — Ковада [15], 44–46 — Лейнерт [17], 47 — Ленг [10], 48 — Вихлинин [18].

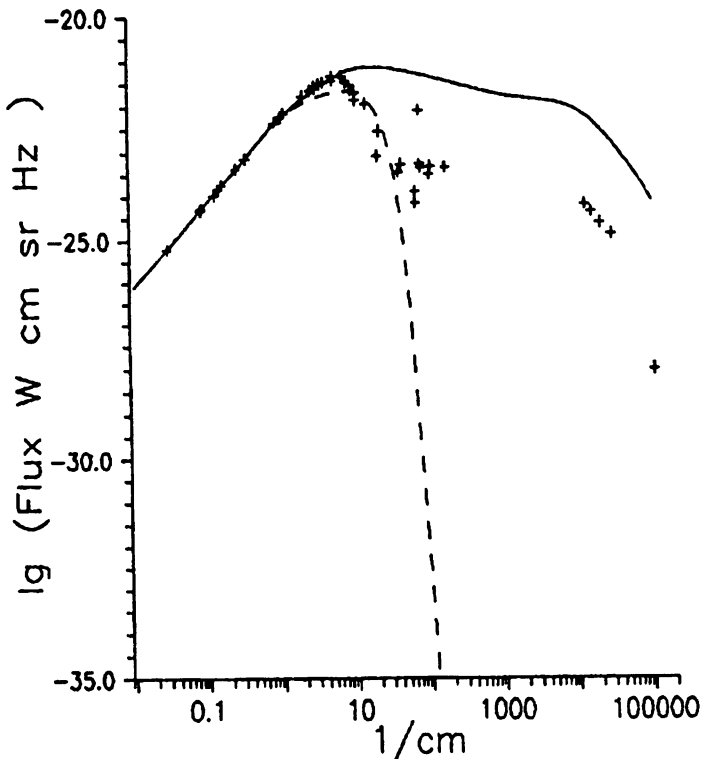


Рис. 3. Теоретический спектр звёздного фона при $z_m = (5 - 7) \cdot 10^3$ в сравнении с измерениями (крестики).

Как видно из рисунков, теоретические зависимости достаточно хорошо подтверждаются экспериментальными данными не только на инфракрасных волнах, но и в оптическом диапазоне и даже в ультрафиолете. Это абсолютно неожиданный результат. Некоторое расхождение зависимости $T_\Phi(\lambda)$ видно для субмиллиметрового диапазона. По нашему мнению, оно может являться следствием систематической ошибки измерений, авторы которых испытывают вполне естественное, подсознательное давление теоретических предубеждений. Заметим, однако, что, как показывают расчёты, отмеченное расхождение устраняется либо учётом нечёрнотельности излучения звёзд в виновской области, либо учётом межгалактического поглощения оптических волн, либо, наконец, небольшим уменьшением оценок относительного числа ярчайших звёзд, входящих в класс *B*. Приводимое в литературе значение 0,13%, использованное нами, может быть завышено вследствие наблюдательной селекции. Наконец, следует иметь в виду, что измерения фона на волнах короче 0,5 мм отягощено возможным влиянием излучения межпланетной и межзвёздной пыли. В литературе строятся гипотезы, что наблюдаемый фон на $\lambda \leq 0,1$ мм определяется в значительной степени пылью при $T \simeq 20$ К и т. п. Неопределённость поправок на это излучение естественно

объясняет большой разброс данных потоков космического происхождения. Однако, несмотря на это, можно сказать с полной определённой, что экспериментальные данные в широком диапазоне волн не подтверждают гипотезу реликтового происхождения фона, хорошо согласуясь со звёздной теорией фона.

За последнее время выполнены измерения фона по населённости уровней сверхтонкой структуры на миллиметровых волнах в облаках углерода, имеющих красное смещение $z = 1,776$ и $z = 2,9$ и находящихся около квазаров. В первом случае использовался первый уровень сверхтонкой структуры углерода и получена температура $T_{\phi}(1,7) = 13,5$ К [20, 21]. Этот результат формально соответствует теории Большого взрыва, дающей $T_{\phi}(z) = 2,73(z + 1)$. Однако, в объяснении этих экспериментов нельзя исключить возможную накачку энергии от излучения соседствующего квазара (в первом случае квазара Q1331+1700). В силу сказанного эти данные в табл. 4 не включены.

В заключение нельзя не отметить чрезвычайную устойчивость расчётного спектра фона к изменениям параметров расчёта A , $\varphi(M)$, z_m и её зависимости от волны $z_m(\lambda)$ и т.п. Оказалось даже, что спектр практически не изменяется, если для расчёта используется упрощённое выражение (6) для звёзд типа FG.

4.2. Загадочное равенство плотности энергии фона и энергии оптического излучения звёзд нашей галактики имеет простое объяснение

Как видно из (2)–(4), принимаемое радиотелескопом в достаточно узкой полосе $d\nu_0$ излучение складывается из излучений галактик, расположившихся на разных расстояниях R вдоль луча зрения. При этом каждая галактика даёт вклад только на частоте, соответствующей её расстоянию, т.е. $\nu(R) = \nu_0(z + 1)$. Никакое излучение галактики на других частотах её спектра не принимается радиотелескопом, настроенным на частоту ν_0 . Если спектр излучения галактик планковский, то вклад, каждой галактики определяется функцией Планка на частоте $\nu(R)$ и равен $F[\nu(R), T] d\nu_0$. Из (2)–(4) также видно, что сигнал на частоте ν_0 складывается из излучения одинакового эффективного числа галактик от каждого интервала. Это, как очевидно, происходит потому, что число галактик в каждом интервале R растёт как $nR^2\Omega dR$, а их энергия излучения у наблюдателя уменьшается в R^2 раз, следовательно, пропорциональна $n\Omega dR$, т.е. не зависит от расстояния, а только от dR . При этом мы можем выбрать dR таким, чтобы в каждом интервале была бы одна галактика. Тогда получается, что каждая галактика в луче зрения является как бы фонарём монохроматического оптического излучения разных цветов планковского спектра. Однако, с точки зрения наблюдателя, настроенного на частоту

ν_0 , они представляются одноцветными излучателями на частоте ν_0 и находящимися вблизи наблюдателя. В результате, вклад всех галактик в принимаемое на частоте ν_0 излучение будет равен сумме излучений на всех частотах планковского спектра от одной галактики. Отсюда следует, согласно (2)–(6), что поток энергии фона просто равен интегральному по частоте потоку энергии оптического излучения одной средней галактики.

Равенство плотности энергии фона с плотностью излучения звёзд нашей галактики было обнаружено более 15 лет назад и являлось, по утверждению Бербиджа [1], серьёзной теоретической проблемой, не получившей разрешения в модели реликтового происхождения фона. В противоположность этому указанный факт естественно вытекает из теории звёздного происхождения фона в безграничной стационарной и однородной по всем средним параметрам Вселенной. Ниже приводятся соответствующие расчёты для объёмной плотности энергии звёздного фона.

Выражение (5) даёт значение наблюдаемой спектральной плотности потока излучения. Умножая его на $d\nu_0$ и $4/c$ и интегрируя по частоте ν_0 от нуля до бесконечности, получим следующее выражение для объёмной плотности энергии фона

$$\begin{aligned} \pi r^2 n m \int_0^{\infty} \frac{8 h \nu_0^3}{c^3} d\nu_0 \int_0^{z_m} \frac{(z+1)^3 \gamma(z) dR}{\exp[h\nu_0(z+1)/(kT)] - 1} = \\ = \int_0^{\infty} \frac{8 \nu_0^3 h}{c^3} \frac{d\nu_0}{\exp[h\nu_0/(kT_\Phi)] - 1} = \frac{4}{c} \sigma T_\Phi^4. \end{aligned} \quad (14)$$

При $T_\Phi = 2,7$ К правая часть даёт для объёмной плотности излучения $\rho_\Phi = 0,24$ эВ/см³. Вычислим теперь объёмную плотность излучения звёзд нашей Галактики. При этом, как очевидно, нужно положить в (14) $z = 0$, а среднюю плотность звёзд nm равной $m/0,5\ell^3$, где ℓ — средний диаметр Галактики.

$$\rho_* = \frac{2r^2 m}{\ell^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{8\pi h \nu_0^3 d\nu_0}{c^3 \{\exp[h\nu_0/(kT)] - 1\}} = \left[\frac{2r^2 m}{\ell^2} \left(\frac{T^4}{T_\Phi^4} \right) \right] \frac{4}{c} \sigma T_\Phi^4.$$

При $T = 6000$ К, $\ell = 15$ кпк, $m = 10^{10}$, $T_\Phi = 2,7^\circ$ величина в квадратных скобках близка к единице и, следовательно, $\rho_* \simeq \frac{4}{c} \sigma T_\Phi^4 = \rho_\Phi = 0,24$ эВ/см³. Таким образом, примерное равенство объёмных плотностей энергии СВЧ фона и оптического излучения нашей галактики объясняется тождественностью природы фона и оптического излучения звёзд, а также тем, что наша Галактика близка к среднестатистической Галактике. Естественно, что это совпадение не могло быть объяснено с позиции реликтового происхождения фона, что специально отмечено в обзоре Бербиджа [1].

4.3. Мелкомасштабная анизотропия фона

Пространственные изменения интенсивности фонового излучения определяются изменением значения $x(\alpha)$ интеграла (5) в зависимости от направления α антенны. При этом, согласно (7),

$$T_{\Phi}(\alpha) = \frac{hc}{k\lambda_0 \ln(1 + 1/x)}.$$

Обычно $x^{-1} \gg 1$, тогда $\Delta T_{\Phi}/T_{\Phi}(\alpha) = \Delta x/x$. Далее находим производную от логарифма x в (6), получим $\Delta x/x = 2 \Delta r/r + \Delta n/n + \Delta m/m$, здесь Δr , Δn , Δm — дисперсии соответствующих величин. Величина r является средним размером, поэтому $\Delta r \simeq 0$. Дисперсия числа звёзд в галактиках, как известно, будет \sqrt{m} .

Для определения дисперсии n нужно учесть общее число галактик, попадающих в диаграмму направленности антенны до эффективного расстояния видимости $R_e(\lambda) \leq R_m$, зависящего от λ согласно табл. 3. В поле зрения антенны, равном Ω стерадиан, будет $N = 0,33 n R^3(\lambda) \Omega$ галактик с дисперсией $\Delta N = \sqrt{N} = \sqrt{0,33 n R^3(\lambda) \Omega}$. Тогда $\Delta n = \Delta N/[0,33 R_e^3(\lambda) \Omega]$ и $n = N/[0,33 R_e^3(\lambda) \Omega]$, откуда $\Delta n/n = \Delta N/N = 1/\sqrt{0,33 n R^3(\lambda) \Omega}$. Ввиду независимости случайных n и m $\Delta T/T = \sqrt{(\Delta n/n)^2 + (\Delta m/m)^2}$, откуда окончательно

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{m} \sqrt{1 + m^2/[0,33 n R^3(\lambda) \Omega]}. \quad (15)$$

Измерения флуктуаций температуры фона приведены в обзоре Парийского [22]. Эти результаты показаны на рис. 4 в виде зависимости $\lg \Delta T/T$ от $\lg \Omega$ в интервале $0 < \Omega \leq 2$, содержащем 73 данных. Измерения $\Delta T/T$ проводились в диапазоне волн $10^{-1} \leq \lambda_0 \leq 50$ см при различной ширине диаграммы антенны $0,02' \leq \sqrt{\Omega} \leq 3000'$. Все результаты измерений заключены в интервале $10^{-5} \leq \Delta T/T \leq 10^{-3}$. Выявить какую-либо закономерность зависимости $\Delta T/T$ от Ω по всем приведённым на рис. 4 данным невозможно из-за сильного разброса данных, составленных из измерений различными авторами и методами наблюдений. Однако, используя данные одних и тех же авторов, полученные при разных Ω , можно надеяться, что они наиболее свободны от относительных ошибок. К таким измерениям относятся результаты Парийского, а также Берлина. На рис. 4 по данным этих авторов получают чёткие зависимости $\Delta T/T$ от Ω . Там же приведена теоретическая зависимость, рассчитанная при $n = 2$, $m = 10^{10}$ и $R_e(\lambda) = 40 \cdot 10^3$ Мпк, действительном для $\lambda_0 > 1$ мм, которая, как видно, довольно хорошо соответствует экспериментальным данным Парийского и Берлина. Таким образом, наблюдаемая мелкомасштабная анизотропия фона объясняется дискретностью источников фонового излучения — звёзд галактик. Кроме того, приведённый расчёт предсказывает, согласно (15) и табл. 3, зависимость $\Delta T/T$ от волны наблюдения

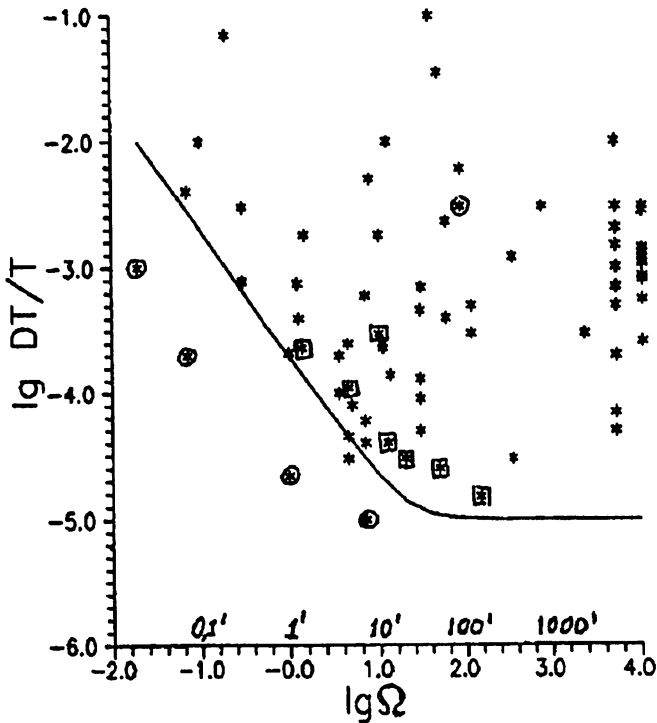


Рис. 4. Результаты измерений мелкомасштабных пространственных флуктуаций фона $\Delta T/T$ в функции ширины диаграммы радиотелескопа в минутах дуги: \circ — измерения Парийского, \square — измерения Берлина. Сплошная кривая — теоретическая.

через изменения размера эффективного слоя галактик, участвующих в формировании фона. Чтобы выявить эту зависимость, нужно исключить влияние Ω . Для этого выбирались из данных рис. 4 измерения в достаточно узкой полосе $0,8 \leq \lg \Omega \leq 1,2$ и других, для которых строилась зависимость $\Delta T/T$ от λ . На рис. 5 приведена характерная зависимость, подтверждающая предсказание. Искомая зависимость определялась также из всех данных. Нетрудно получить из (15) зависимость, исключая влияние Ω , а именно:

$$X = \left[\left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 - \frac{1}{m} \right] \Omega = \frac{m}{0,33 n R^3(\lambda)}.$$

Здесь $\Delta T/T$ и Ω — соответствующие экспериментальные данные из рис. 4. На рис. 6 приведена экспериментальная зависимость X от λ в сравнении с теоретической. Факт приличного их совпадения является сильным аргументом за доверие к приведённой теории образования звёздного фона излучения.

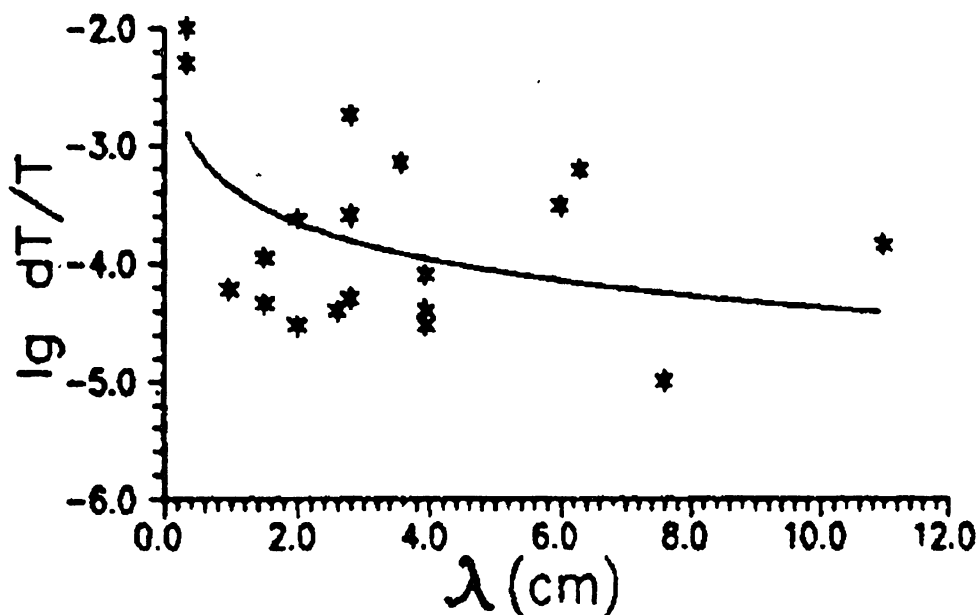


Рис. 5. Экспериментальная зависимость $\Delta T/T$ в функции от длины волны наблюдения.

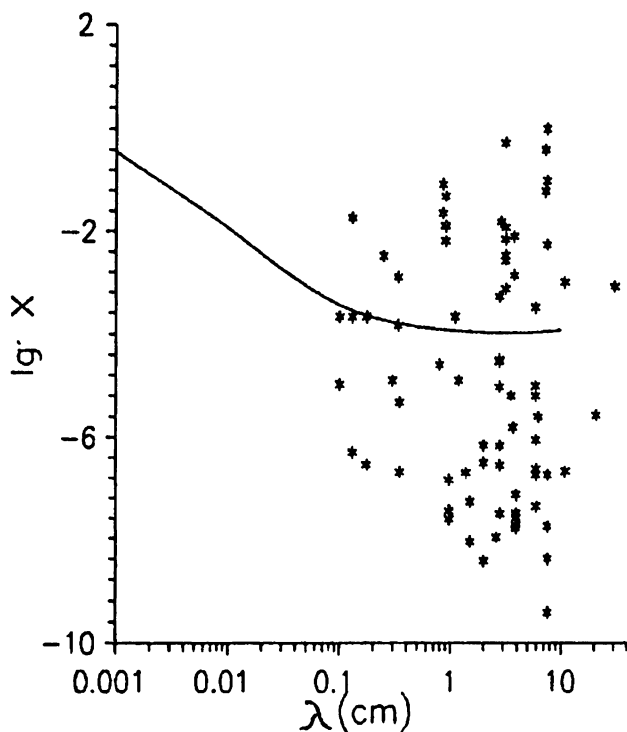


Рис. 6. Пространственная зависимость величины $X = [(\Delta T/T)^2 - m^{-1}]$ от длины волны (сплошная кривая) в сравнении с экспериментальными данными табл. 4 (точки). Пунктир — регрессия данных.

5. ЗВЁЗДНЫЙ МИКРОВОЛНОВЫЙ ФОН ИЗЛУЧЕНИЯ В МОДЕЛИ СТАНДАРТНОЙ КОСМОЛОГИИ И В АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ТЕОРИЯХ

Для расчёта фона в этом случае годится общая формула (12). Специфичным является для моделей стандартной космологии ограничение интервала интегрирования (12) до $z_m \leq 10$ вследствие ограниченного времени существования галактик в этой модели. Проводя расчёт для закрытой модели, мы должны принять теоретическое выражение связи расстояние — красное смещение, равное $R(z) = cH_0^{-1}z/(z+1)$, где $cH_0^{-1} = R_H$ — радиус Вселенной. При этом $dR/dz = R_H/(z+1)^2$ и общее выражение (12) для фона приобретает вид

$$A_H \sum_{-4}^{19} 10^{-0,233M+1,05} \varphi(M) \int_0^{10} \frac{(z+1)\gamma(z)dz}{\exp\{hc(z+1)/(\lambda_0 kT)\} - 1} =$$

$$= \left[\exp \frac{hc}{kT_\Phi \lambda_0} - 1 \right]^{-1}, \quad (16)$$

где $A_H = \pi r_\odot^2 n m c H_0^{-1}$. Примем для расчёта $H_0 = 75$ км/сек·Мпк и очевидное условие $\gamma(z) = 1$.

В табл. 5 приведён результат расчёта при самом минимальном значении A для двух значений $z_m = 5$ и 10 , из которого видно, что температура звёздного фона на субмиллиметровых волнах превосходит 2,7 К, а на миллиметровых — составляют заметную его часть. Отсюда однозначно следует, что наблюдаемый микроволновой фон должен состоять из суммы звёздного вклада и реликтового. Иначе говоря, для реликтового фона нет места на миллиметровых и особенно субмиллиметровых волнах. Отсюда, однозначно, следует несостоятельность объяснения наблюдаемого фона как следствие горячего Большого Взрыва в прошлом.

Из проведённого расчёта очевидно, что никакая модель с горячим началом не позволяет объяснить микроволновый фон оптическим излучением звёзд. При этом получается, что слишком мала область существования сформировавшихся галактик, ограниченная интервалом $z \leq 10$. К таким теориям относится инфляционная модель и модели на основе конформных метрик [23–25]. В особом положении находятся модели статической, т.е. не расширяющейся, неограниченной в пространстве и времени Вселенной. Сюда относится модель, объясняющая красное смещение “старением квантов”. В этом случае, как известно, предполагается экспоненциальное ослабление энергии кванта с расстоянием, что даёт $R = R_0 \ln(z+1)$. При этом наблюдаемый фон также объясняется оптическим излучением звёзд. В заключение отметим, что искажения микроволнового фона, связанные с взаимодействием релятивистских электронов с

фотонами и т. п., подробно рассмотренные в работах [25], остаются в силе и при звёздном происхождении фона.

Т а б л и ц а 5

Звёздная компонента фона для закрытой модели Вселенной
в стандартной космологии

$$A = 0,15000E - 11 \quad \text{MAX } Z = 10,0$$

Волна (мм)	B/S	A/S	FG/S	K/S	M/S	T _{фона}
	0,013%	1,40%	7,47%	9,29%	81,82%	
0,001	0,121	0,579	0,260	0,035	0,005	469,81
0,010	0,057	0,466	0,366	0,081	0,030	54,08
0,100	0,050	0,444	0,378	0,090	0,038	5,98
0,500	0,049	0,442	0,379	0,091	0,039	1,28
1,000	0,049	0,441	0,380	0,091	0,039	0,66
2,000	0,049	0,441	0,380	0,091	0,039	0,34
4,000	0,049	0,441	0,380	0,091	0,039	0,18
8,000	0,049	0,440	0,380	0,092	0,039	0,09
30,000	0,048	0,437	0,381	0,093	0,041	0,03
100,000	0,046	0,430	0,385	0,096	0,044	0,01
500,000	0,039	0,402	0,397	0,107	0,055	0,00
1000,000	0,034	0,385	0,405	0,114	0,062	0,00

$$A = 0,15000E - 12 \quad \text{MAX } Z = 10,0$$

Волна (мм)	B/S	A/S	FG/S	K/S	M/S	T _{фона}
	0,013%	1,40%	7,47%	9,29%	81,82%	
0,001	0,121	0,579	0,260	0,035	0,005	437,20
0,010	0,057	0,466	0,366	0,081	0,030	49,80
0,100	0,050	0,444	0,378	0,090	0,038	5,46
0,500	0,049	0,442	0,379	0,091	0,039	1,16
1,000	0,049	0,441	0,380	0,091	0,039	0,60
2,000	0,049	0,441	0,380	0,091	0,039	0,31
4,000	0,049	0,441	0,380	0,091	0,039	0,16
8,000	0,049	0,440	0,380	0,092	0,039	0,08
30,000	0,048	0,437	0,381	0,093	0,041	0,02
100,000	0,046	0,430	0,385	0,096	0,044	0,01
500,000	0,039	0,402	0,397	0,107	0,055	0,00
1000,000	0,034	0,385	0,405	0,114	0,062	0,00

Продолжение табл. 5

$$A = 0,15000E - 12 \quad \text{MAX } Z = 5,0$$

Волна (мм)	B/S	A/S	FG/S	K/S	M/S	$T_{\text{фона}}$
	0,013%	1,40%	7,47%	9,29%	81,82%	
0,001	0,116	0,578	0,265	0,036	0,005	436,06
0,010	0,055	0,460	0,370	0,083	0,032	49,35
0,100	0,050	0,443	0,379	0,090	0,038	5,39
0,500	0,049	0,441	0,379	0,091	0,039	1,15
1,000	0,049	0,441	0,380	0,091	0,039	0,59
2,000	0,049	0,441	0,380	0,091	0,039	0,30
4,000	0,049	0,440	0,380	0,091	0,039	0,16
8,000	0,049	0,439	0,380	0,092	0,040	0,08
30,000	0,048	0,434	0,383	0,094	0,042	0,02
100,000	0,044	0,422	0,388	0,099	0,047	0,01
500,000	0,035	0,387	0,404	0,113	0,061	0,00
1000,000	0,031	0,372	0,411	0,119	0,067	0,00

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все наблюдательные выводы теории звёздного происхождения космического фона излучения для стационарной, нерасширяющейся Вселенной подтверждаются всеми имеющимися экспериментальными данными. Полученный теоретический спектр фона подтверждается экспериментальными данными в широком диапазоне от дециметровых до инфракрасных и, вероятно, даже оптических волн. Это демонстрирует внушающий доверие механизм образования фона, приводящий к заключению, что фон не является строго чёрнотельным и не может быть связан с горячим веществом в ранней эпохе. Добавочным фактором доверия является объяснение причины загадочного равенства плотности энергии фона и плотности энергии оптического излучения звёзд Галактики, а также причины мелкомасштабной анизотропии фона, предсказанная величина которой и зависимость от ширины диаграммы антенны и длины волны наблюдения подтверждаются измерениями. Всё это является серьёзным свидетельством против идеи Большого взрыва в пользу гипотезы стационарной Вселенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burbidge G. // International Journal of Theoretical Physics, 1989. V. 28. № 9. P. 983.

2. McVittie. // *Phys. Rev.*, 1962. V. 128. № 6. P. 2871.
3. Дорошкевич А. Г., Новиков И. Д. // *ДАН СССР*, 1964. Т. 154. № 4. С. 809.
4. Парийский Ю. Н., Сюняев Р. А. — In: *Symposium IAU-1973 "Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data"*; Космология — теории и наблюдения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1978.
5. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. *Релятивистская астрофизика*. — М., 1967.
6. Segal E. // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1993. V. 90. P. 4798.
7. Troitskij V. S. // *Astrophys. Sp. Sc.*, 1993. V. 201. P. 203.
8. Троицкий В. С. // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1993. Т. 36. № 9. С. 857.
9. Барышев Ю. В. // *Итоги науки и техники. Том 4. Гравитация и космология*. — М., 1992.
10. Lang K. R. *Astrophysical Formulae*. — New York, 1974; *Астрофизические формулы / Пер. с англ. Ленг К.* — М.: Мир, 1978.
11. Троицкий В. С. // *УФН*, 1995. Т. 165. № 6. С. 703.
12. Bliter A. D. — In: *Symposium N 63, IAU "Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data"*, USA, 1974.
13. Matsumoto T., Hayakawa H., Matsyo H. et all. // *Ap. J.* 1988. V. 329. P. 567.
14. Mather J. C., Cheng E. S., Cottengham D. A. // *Ap. J.* 1994. V. 420. P. 439.
15. Kawada M., Bock J. J., Hristov V. V. et all. // *Ap. J.*, 1994. V. 425. P. L-89.
16. Kogut A., Beksanelli M., DeAmici G. et all. // *Ap. J.*, 1988. V. 325. P. 1.
17. Leinert E. H., Väsanen P., Lehtenen K. // *Astron. Astroph. Sup. Ser.*, 1995. V. 112. P. 99.
18. Вихлинин А. // *Письма в АЖ*, 1995. Т. 21. № 6. С. 413.
19. Meyer D. M., Black J. H., Chaffee F. H. et all. // *Ap. J. Letters*, 1986. V. 308. № 2. P. L-37.
20. Songaila A., Cowre L., Hogan C., Buggers M. // *Nature*, 1994. V. 368. P. 599.
21. Songaila A. et all. // *Nature*, 1994. V. 371. P. 43.
22. Царийский Ю. Н., Корольков Д. В. // *Итоги науки и техники. Сер. Астрономия*, 1986. Т. 31. С. 73.
23. Hoyle F. and Narlinkar J. V. // *MNRAS*, 1972. V. 155. № 3. P. 305.
24. Troitskij V. S. // *Astrophys. Sp. Sc.*, 1987. V. 139. P. 389 (*DAN*, 1986. V. 290. № 1).
25. Petit J. P. // *Modern Physics Letters A.*, 1988. V. 3. № 16. P. 1527.

26. Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Астрофизика и космическая физика / Под ред. Сюняева Р. А. — М.: Наука, 1982.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород

Поступила в редакцию
25 июня 1995 г.

**OBSERVATIONAL EVIDENCES OF MICROWAVE BACKGROUND
FORMATION BY THE THERMAL RADIATION OF METAGALAXY
STARS**

V. S. Troitsky, V. I. Aleshin

According to the viewpoint of many scientists, to disprove the validity of the hot Bang cosmology, it is sufficiently to demonstrate another confidential mechanism for the microwave background formation which leads to a conclusion, that the background is not strictly a black body one and /or cannot be associated with the matter in early epoch.

УДК 621.371

О ТРАКТОВКЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ КАК В СРЕДЕ С ЭФФЕКТИВНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ ТЕНЗОРОМ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В. А. Пермяков

Показано, что плоские E и H волны в плавно неоднородной изотропной плоскостой среде (плазме) можно рассматривать как нормальные волны в одноосной среде с изотропной диэлектрической проницаемостью и тензором эффективной магнитной проницаемости.

Известно, что линейно поляризованные электромагнитные волны в изотропной плоскостой среде (плазме) можно рассматривать как волны в среде с эффективной анизотропией [1–3]. В [1] обсуждение этого вопроса ограничено замечанием, что уравнение для продольной компоненты электрического поля E_z может быть сведено к эквивалентному волновому уравнению с эффективной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{\text{эфф}} = \epsilon(z) - \epsilon(0) \sin^2 \vartheta + \{\epsilon''/(2\epsilon) - 3[\epsilon'/(2\epsilon)]^2\} k_0^{-2}$. В [2] получены строгие дифференциальные уравнения для показателей преломления нормальных (E и H) волн, которые решены только в случае экспоненциального закона ϵ . В [3] показано, что E волна в изотропной плавно неоднородной плоскостой плазме может трактоваться локально, в приближении модифицированной геометрической оптики (МГО), как волна в среде с эффективной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{\text{эфф}}$, определённой формулой

$$\epsilon_{\text{эфф}} = \epsilon(z) + [\epsilon''/(2\epsilon) - (\epsilon'/\epsilon)^2] k_0^{-2}. \quad (1)$$

Однако введение эффективной диэлектрической проницаемости среды в поле E волны [1, 3] либо определение показателей преломления нормальных волн [2] ещё не решает вопроса об отыскании тензора эффективной проницаемости изотропной неоднородной среды. В частности, трактовка [1, 3] понятия эффективной диэлектрической проницаемости среды в поле E волны представляется нестрогой, поскольку в [1] она опирается только на уравнение для продольной компоненты электрического поля, а в [3] — относится не к исходному, а к приведённому волновому уравнению для магнитного поля, в результате выражения для электрического и магнитного полей зависят явно как от диэлектрической проницаемости изотропной среды, так и от эффективной проницаемости.

Рассмотрим этот вопрос более детально. Ограничимся случаем линейно поляризованных волн в освещённой области плавно неоднородной изотропной плазмы, предположив, что полное поле представлено суперпозицией E волны с компонентами H_x , E_y , E_z и H волны с компонентами E_x , H_y , H_z . Для H волн в приближении геометрической оптики очевидно, что их можно рассматривать как распространяющиеся в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью, равной единице. Обратимся к представлению E волн в приближении МГО, найденному в [3]. Выпишем для определённости падающее поле

$$H_x = A \exp(-ik_0\psi_E),$$

$$E_y = -\frac{A\sqrt{\epsilon_{\text{эфф}} - h^2}}{\epsilon} \exp(-ik_0\psi_E), \quad E_z = \frac{A h}{\epsilon} \exp(-ik_0\psi_E), \quad (2)$$

где

$$A = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt[4]{\epsilon_{\text{эфф}} - h^2}}, \quad \psi_E = \int_{z_i}^z \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}} - h^2} dz + hy, \quad h = \sin \vartheta,$$

$\epsilon_{\text{эфф}}$ дано в (1), z_i — вещественная точка поворота, определённая условием $\epsilon_{\text{эфф}} - h^2 = 0$, используется гауссова система единиц, временной множитель $\exp(i\omega t)$.

Представление (2) в соответствии с идеями геометрической оптики будем рассматривать локально как волну в эквивалентной однородной среде. Определим волновой вектор E волны как $\vec{k}_E = k_0 \nabla \psi_E$. Тогда из (2) следует

$$\nabla \psi_E = \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}} - h^2} \vec{z} + h \vec{y}, \quad |\nabla \psi_E| = \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}}, \quad \vec{k}_E = k_0 \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}} \vec{l}, \quad (3)$$

где \vec{y} , \vec{z} , \vec{l} — единичные векторы. Найдём теперь характеристический импеданс E волны в направлении \vec{k}_E , относительно которого E волна является чисто поперечной (T) волной

$$z_E = E_T / H_x = \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}} / \epsilon, \quad (4)$$

где $E_T = (|E_x|^2 + |E_y|^2)^{1/2} \exp(-ik_0\psi_E)$.

Будем рассматривать теперь E волну как T волну относительно направления \vec{k}_E в среде с новыми эффективными диэлектрической и магнитной проницаемостями $\epsilon_{\text{эфф}}^*$ и $\mu_{\text{эфф}}^*$. Выразим $k_E = |k_E|$ и z_E через $\epsilon_{\text{эфф}}^*$ и $\mu_{\text{эфф}}^*$ и сопоставим их с (3), (4)

$$k_E = k_0 \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}^* \mu_{\text{эфф}}^*} = k_0 \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}}, \quad z_E = \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}^* / \mu_{\text{эфф}}^*} = \epsilon / \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что

$$\varepsilon_{\text{эфф}}^* = \varepsilon, \quad \mu_{\text{эфф}}^* = \varepsilon_{\text{эфф}}/\varepsilon. \quad (6)$$

В дальнейшем для упрощения записи индекс "*" в $\mu_{\text{эфф}}^*$ опускаем.

В соответствии с (6) распространяющуюся в плавно неоднородной плазме E волну можно трактовать локально, как T волну в среде с диэлектрической проницаемостью ε и с отличной от единицы магнитной проницаемостью $\mu_{\text{эфф}}$.

Так как согласно (6) диэлектрические проницаемости для E и H волн одинаковы, а магнитные различаются, мы можем теперь трактовать E и H волны в неоднородной плоскостойкой плазме как волны в одноосной среде с тензором $\hat{\mu} = \{\mu_{\text{эфф}}, 1, 1\}$ в декартовой системе координат (x, y, z) , в которой E волна имеет компоненты H_x, E_y, E_z , а H волна — компоненты E_x, H_y, H_z . Проверим это. Рассмотрим аналогично [4] однородные плоские волны в среде со скаляром ε и тензором $\hat{\mu}$ указанного выше вида.

Предварительно преобразуем исходные уравнения Максвелла изотропной неоднородной среды

$$\text{rot } \vec{H} = ik_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = -ik_0 \vec{H}. \quad (7)$$

Запишем второе уравнение Максвелла изотропной среды (7) в виде

$$\text{rot } \vec{E} = -ik_0 \hat{\mu} \vec{H} - ik_0 \delta \hat{\mu} \vec{H}, \quad (8)$$

где $\delta \hat{\mu} = \hat{I} - \hat{\mu} = \{1 - \mu_{\text{эфф}}, 0, 0\}$, \hat{I} — единичный тензор. Учитывая, что $k_0 |1 - \mu_{\text{эфф}}| \approx k_0^{-1}$, можно искать представление E и H волн в плоскостойкой среде в виде МГО разложений, включая члены со слагаемым $k_0 \hat{\mu}$ в (8) в нулевое приближение, а со слагаемым $k_0 \delta \hat{\mu}$ — в последующие приближения. Это означает, в соответствии с идеями [6, 7], включение специфичных для E волн дифракционных эффектов, обусловленных поправками к ε порядка k_0^{-2} , но принципиальных в окрестности нуля ε (см. (1)), в уравнения МГО нулевого приближения.

С учётом сделанных замечаний уравнения (7) при построении нулевого приближения заменяются уравнениями

$$\text{rot } \vec{H} = ik_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = -ik_0 \hat{\mu} \vec{H}, \quad (9)$$

локально совпадающими с уравнениями однородной одноосной среды. Подставив в (9) представление плоской волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-ik\vec{l}\vec{r}), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp(-ik\vec{l}\vec{r}), \quad (10)$$

получаем систему уравнений для векторных амплитуд нулевого приближения \vec{E}_0 и \vec{H}_0

$$n[\vec{l}, \vec{E}_0] + \hat{\mu} \vec{H}_0 = 0, \quad n[\vec{l}, \vec{H}_0] - \varepsilon \vec{E}_0 = 0,$$

исключая из которой \vec{E}_0 , приходим к системе

$$[\vec{l}, [\vec{l}, \vec{H}_0]] + (\varepsilon \hat{\mu}/n^2)\vec{H}_0 = 0. \quad (11)$$

Приравнивая детерминант (11) нулю, получим биквадратное уравнение

$$A n^4 + B n^2 \varepsilon + C \varepsilon^2 = 0, \quad (12)$$

где $A = 1 - l_x^2 + \mu_{\text{офф}} l_x^2$, $B = l_x^2 - 1 - (1 + l_x^2)\mu_{\text{офф}}$, $C = \mu_{\text{офф}}$. Из (12) следует, что в одноосной среде с тензором $\hat{\mu} = \{\mu_{\text{офф}}, 1, 1\}$ существуют две независимые волны, постоянные распространения которых равны

$$k_1 = k_0 \{\varepsilon [1 - 0,5 l_x^2 (1 - \mu_{\text{офф}})]\}^{1/2}, \quad (13)$$

$$k_2 = k_0 \{\varepsilon \mu_{\text{офф}} [1 - 0,5 l_x^2 (1 - \mu_{\text{офф}})]\}^{1/2},$$

Для соответствия (13) E и H волнам в неоднородной изотропной среде необходимо положить в (13) $l_x = 0$, что отвечает поперечности волн относительно направления \vec{l} .

Структура поля E волны в одноосной среде принимает вид

$$H_x = A \exp(-ik_0 \psi_E),$$

$$E_y = -\frac{A \sqrt{\varepsilon \mu_{\text{офф}} - h^2}}{\varepsilon} \exp(-ik_0 \psi_E), \quad E_z = \frac{A h}{\varepsilon} \exp(-ik_0 \psi_E), \quad (14)$$

где $A = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt[4]{\varepsilon \mu_{\text{офф}} - h^2}}$, $\psi_E = \int_{z_i}^z \sqrt{\varepsilon \mu_{\text{офф}} - h^2} dz + hy$ в плавно неоднородной одноосной среде, $A = \text{const}$, $\psi_E = \sqrt{\varepsilon \mu_{\text{офф}} - h^2} z + hy$ в однородной одноосной среде. В случае неоднородной одноосной среды (14) совпадает после очевидных переобозначений с (2), в случае однородной одноосной среды (14) представляет собой локальное приближение (2).

Таким образом, мы получаем следующий результат: распространение линейно поляризованной электромагнитной волны, представленной суперпозицией E и H волн, в плавно неоднородной плоскостойкой плазме, в нулевом приближении МГО можно рассматривать как распространение двух независимых нормальных волн в эффективной однородной среде со скалярной диэлектрической проницаемостью ε и тензором магнитной проницаемости $\hat{\mu} = \{\mu_{\text{офф}}, 1, 1\}$, где $\mu_{\text{офф}} = \varepsilon_{\text{офф}}/\varepsilon$, а $\varepsilon_{\text{офф}}$ определено (1). При этом декартова система координат, в которой справедливо указанное представление, должна быть ориентирована специальным образом: координата x должна быть направлена вдоль компоненты магнитного поля E типа (или, что то же самое, вдоль компоненты электрического поля

Н типа), а координата z — в направлении неоднородности среды. Структура тензора $\hat{\mu}$ не меняется при вращении системы координат относительно оси x и усложняется при более общем повороте системы координат относительно её центра.

Предложенная трактовка распространения волн в неоднородной изотропной среде как в среде с тензором эффективной магнитной проницаемости, в отличие от прежней, использующей понятие эффективной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\text{эфф}}$, представляется последовательной, поскольку исчезает отмеченное выше и видное из формул (2) противоречивое описание поля E волны одновременно двумя диэлектрическими проницаемостями ϵ и $\epsilon_{\text{эфф}}$.

То обстоятельство, что тензор $\hat{\mu}$ принимает максимально простой вид в специальном образом выбранной системе координат, связанной со структурой поля, а не только со структурой среды, как в истинных анизотропных средах, и даёт основания называть эффективной анизотропию изотропной неоднородной плазмы.

Проведенное нами построение (см. решение уравнения (9)) показывает также, что учёт эффективной анизотропии снимает поляризационное вырождение E и H волн в изотропной среде.

Отметим, что зависимость $\mu_{\text{эфф}}$ через $\epsilon_{\text{эфф}}$ от волнового числа k_0 , наводит на мысль рассматривать МГО как своеобразный способ учёта пространственной дисперсии изотропной среды, обусловленной различиями E и H волн. В электродинамике чаще всего рассматривается случай слабой (низкочастотной) пространственной дисперсии, когда диэлектрическая проницаемость ищется в виде разложения по степеням $k_0 a$, где $k_0 a \ll 1$ — малый параметр, a — пространственный масштаб, определяющий “зернистость” структуры [1]. При этом предельный переход к среде без дисперсии соответствует $\lambda_0 \rightarrow \infty$. В нашем случае $\mu_{\text{эфф}}(\epsilon_{\text{эфф}})$ представляется в виде разложения по степеням $(k_0 L)^{-1}$, где $L \approx \epsilon/|\nabla\epsilon| \gg \lambda_0$ — масштаб неоднородности среды, то есть имеет место высокочастотная пространственная дисперсия, при которой предельный переход к среде без дисперсии соответствует $\lambda_0 \rightarrow 0$ или $L \rightarrow \infty$. Высокочастотная пространственная дисперсия рассматривалась в ряде работ Ю. А. Кравцова и др. (см. [5], стр. 260, 261 и цитированные там работы). В них учтены поправки к $\hat{\epsilon}$ первого порядка малости по параметру $\alpha \approx 1/(k_0 L)$. В рассматриваемом нами случае МГО E волн учтены поправки порядка α^2 . При этом формальный переход к среде без пространственной дисперсии, т.е. пренебрежение членом $(\nabla\epsilon/\epsilon)^2$ в $\epsilon_{\text{эфф}}$, как следует из анализа эталонной задачи для плоскостойкой плазмы [3], даёт некорректный результат для нормального падения плоской волны. Таким образом, учёт поправок второго порядка малости в $\mu_{\text{эфф}}(\epsilon_{\text{эфф}})$ принципиален для корректного предельного перехода к нормальному падению.

Отметим также, что хотя описание E волны как волны в среде с про-

нищаемостями $\epsilon_{\text{эфф}}^*$ и $\mu_{\text{эфф}}^*$ формально носит локальный характер в приближении МГО, нелокальность (пространственная дисперсия) вводится неявно через зависимость $\mu_{\text{эфф}}(\epsilon_{\text{эфф}})$ от производных ϵ .

Изложенная выше на примере плоскослоистой среды процедура описания изотропной неоднородной среды как среды с эффективной анизотропией, определенной тензором магнитной проницаемости, может быть использована для построения приближения модифицированной геометрической оптики произвольной плавно неоднородной плазмы как альтернатива построению, предложенному в [6, 7]. При этом естественно возникает, как и в случае неоднородных анизотропных сред [4], вопрос о критерии независимости E и H волн как нормальных волн в неоднородной среде с эффективной анизотропией. Критерий независимости E и H волн в произвольной неоднородной среде обсуждается нами в отдельной работе, где показано, что он имеет вид $L_H \approx (k_0)^{-2/3} |\nabla \epsilon|^{-1/3} \ll L_{\text{кр}} \approx |\kappa|^{-1}$, где κ — кручение луча.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. — 683 с.
2. Виноградова М. Б., Гусев В. Д. // Радиотехника и электроника, 1974. Т. 19. № 3. С. 482.
3. Пермяков В. А., Якушкин И. Г. // Физика плазмы, 1988. Т. 14. № 8. С. 943.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970. — 856 с.
5. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. — 304 с.
6. Пермяков В. А. — В сб.: XVI Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. Харьков, 1990. Тезисы докладов. Часть 1. С. 232.
7. Крестьянинов С. В., Пермяков В. А. // Радиотехника, 1991. № 2. С. 67.

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
8 июля 1993 г.

ON THE TREAT OF PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN ISOTROPIC INHOMOGENEOUS DIELECTRIC MEDIUM AS THAT IN MEDIUM WITH EFFECTIVE TENSOR PERMEABILITY

V. A. Permyakov

It is shown that plane E and H waves in a smoothly inhomogeneous isotropic plane-stratified medium (plasma) may be considered as normal waves in a uniaxial medium with isotropic permittivity and effective tensor permeability.

УДК 533.92:621.039.01

УЕДИНЁННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ИМПУЛЬСЫ В ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЕ С ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫМ ПУЧКОМ

В. Б. Красовицкий, В. В. Прудский

Рассмотрено распространение в замедляющей системе, заполненной плазмой, совместного электронно-ионного пучка в условиях циклотронного (аномальнодоплеровского) резонанса электронов с волной. Показана возможность существования резонансных электромагнитных солитонов, распространяющихся вдоль пучка. Определены нелинейный закон дисперсии и групповая скорость солитона. Особое внимание обращено на случай, когда важны эффекты, связанные с продольным поляризационным полем, возникающим при разделении зарядов в поле электромагнитного импульса. Путём численного интегрирования обнаружены решения типа уединённой волны, существующие для дискретного спектра параметров системы. В предельном случае разреженной плазмы, когда дискретный спектр переходит в непрерывный, решение найдено в адиабатическом приближении.

Известно [1–6], что излучение пучка электронов, распространяющегося вдоль магнитного поля B_0 в замедляющей системе со сверхсветовой скоростью $v > v_{ph} = c/N$ (N — эффективный показатель преломления, c — скорость света), описывается известным соотношением

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = N^2 - \frac{\omega_b^2(\omega - kv_0)}{\omega^2(\omega - kv_0 + \omega_B)}, \quad (1)$$

где ω и k — частота и волновое число малого монохроматического возмущения, $\omega_B = eB_0/(mc)$ и $\omega_b = (4\pi e^2 n_b/m)^{1/2}$ — циклотронная и ленгмюровская частоты, n_b — плотность пучка.

Максимальный инкремент $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, соответствующий пересечению циклотронной $\omega_0 = kv_0 - \omega_B$ и электромагнитной $\omega_0 = ck/N$ мод, равен

$$(\Delta\omega)^2 = -\frac{\omega_b^2 \omega_B}{2N_0^2 \omega_0}, \quad \omega_0 = \omega_B(\beta_0 N_0 - 1)^{-1}, \quad (2)$$

где $\beta_0 = v_0/c$ и $N_0 = N(\omega_0)$.

Насыщение роста амплитуды неустойчивой моды (расфазировка электронов с поперечным электрическим полем волны) возникает в результате продольного торможения пучка под действием силы отдачи со стороны излучения и сопровождается возникновением нелинейных регулярных колебаний амплитуды поля и скорости пучка [2, 3].

Рассмотренная в [2, 3] модель неограниченного пучка является физически корректной, если волновод заполнен достаточно плотной плазмой, нейтрализующей кулоновский заряд пучка. Альтернативным способом обеспечения зарядовой и токовой нейтральности системы, реализуемым при малой плотности (или в отсутствие) фоновой плазмы, является сопутствующий ионный пучок [4]. Возникающее при смещении электронов относительно ионов продольное поляризационное электрическое поле препятствует торможению электронного пучка и уменьшает роль высокочастотной нелинейности. Время синхронного взаимодействия электронов с волной возрастает и, как следствие, увеличивается плотность энергии излучения. В работе [4] аналитическое решение найдено в предельном случае $|\Delta\omega| \ll \omega_p$, когда поляризационное поле практически полностью компенсирует действие продольной составляющей силы Лоренца и электроны жёстко связаны с ионами. Поэтому при смещении поперёк магнитного поля реализуется электронная масса m , а в продольном движении эффективная масса электрона равна ионной M . Поэтому нелинейная стабилизация роста амплитуды поля соответствует торможению электронно-ионного пучка как целого, а плотность энергии поля увеличивается в M/m раз по сравнению со случаем плотной плазмы [2, 3] за счёт кинетической энергии ионов.

Формулы (2) соответствуют задаче с начальными условиями, когда медленная амплитуда колебаний $A(t)$ зависит только от времени, фиксированным является волновое число k , а нелинейность стабилизирует рост амплитуды колебаний по всей длине пучка. Альтернативным решением, рассмотренным в [7], является волна огибающей с несущими частотой и волновым числом, удовлетворяющими условиям резонанса (2), так что энергия волны в каждой точке пространства пополняется за счёт энергии пучка. Несовпадение групповой скорости волны со скоростью пучка и механизм нелинейной расфазировки [2, 3] создают условия для существования стационарных решений (солитонов) в неравновесной среде, поскольку энергия электрона пучка после пролёта через электромагнитный импульс остаётся неизменной.

Целью настоящей работы является исследование условий распространения уединённых электромагнитных импульсов в волноводе медленных волн с электронно-ионным пучком при произвольном соотношении между инкрементом (2) и ленгмюровскими частотами пучка и плазмы. Основное внимание уделено случаю, когда плотность фоновой плазмы невелика $n_p \leq n_b$ и поляризационное поле существенно изменяет нелинейную стадию неустойчивости. Использование численного интегрирования позволяет снять жёсткое ограничение работы [4] и найти решение в более широком диапазоне параметров системы. В предельном случае $|\Delta\omega| \gg \omega_p$ аналитическое решение, учитывающее быстрые нелинейные осцилляции электронов относительно ионного

фона, найдено в адиабатическом приближении.

Асимптотики нелинейных решений, описывающие периферийные области солитонов, определяются дисперсионным уравнением (1), в котором следует положить $k = k_0 + \Delta k$, $\omega = \omega_0 + u \Delta k$ и $\omega_0 - k_0 v_0 + \omega_B = \delta \omega_0$ (u — групповая скорость волны, $|\delta| \ll 1$). Выполняя разложение по степеням $|\Delta k|/k_0 \ll 1$, получаем соотношение

$$2c\omega_0(N - N_0 u/v_g)(u - v_0)\Delta k^2 + \omega_0^2[(N^2 - N_0^2)(u - v_0) + 2c(N - N_0 u/v_g)\delta]\Delta k + \omega_0^3(N^2 - N_0^2)\delta + \omega_B^2\omega_B = 0, \quad (3)$$

(где $N = ck_0/\omega_0$ и $v_g = c \left[\frac{d}{d\omega_0}(\omega_0 N_0) \right]^{-1}$), которое при $\delta = 0$ и $N = N_0$ совпадает с формулой [7]. В рассматриваемом нами более общем случае $\delta \neq 0$ максимальный пространственный инкремент

$$\Delta k^2 = -\frac{\omega_B^2\omega_B v_g}{2\omega_0 c(u - v_0)(N_0 u - N v_g)} + \frac{\omega_0^2 \delta^2}{(u - v_0)^2} \quad (4)$$

определяется условием:

$$2c(N - N_0 u/v_g)\delta + (N^2 - N_0^2)(u - v_0) = 0, \quad (5)$$

которое соответствует фазовому резонансу пучка с волной и связывает групповую и фазовую скорости как на линейной, так и на нелинейной стадии неустойчивости [8].

1. НЕЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА МЕДЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Самосогласованная система уравнений включает в себя уравнения Максвелла для поперечного электрического $E_{\perp} = E_x + iE_y$ и магнитного $B = B_x + iB_y$ полей в плазме

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_B \right) \left[\left(\frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_{\perp} + \frac{4\pi e}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (n_e v_{\perp}) \right] + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial E_{\perp}}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{i}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial E_{\perp}}{\partial z},$$

($\omega_B = eB_0/(mc)$ и $\omega_p = (4\pi e^2 n_p/m)^{1/2}$ — циклотронная и ленгмюровская частоты электронов, n_p — плотность плазмы) и систему нелинейных гидродинамических уравнений для скорости $v_{\perp} = v_x + iv_y$ и плотности n_e электронов пучка

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) v_{\perp} &= \frac{e}{m} \left[E_{\perp} + i \frac{v_z}{c} B \right] - i \omega_B v_{\perp}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) v_z &= \frac{e}{m} \left[\frac{1}{c} \operatorname{Im}(v_{\perp} B^*) + E_z \right], \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_e v_z) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Продольное поляризационное (низкочастотное) электрическое поле E_z удовлетворяет уравнению Пуассона, которое с учётом уравнений продольного движения электронов плазмы и ионного пучка может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \omega_p^2 E_z &= 4\pi e \frac{\partial}{\partial t}(n_e v_z - n_i v_i), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial z}\right) v_i &= -\frac{e}{M} E_z, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_i v_i) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем искать решение уравнений (6)–(8) в виде плоской монохроматической волны с зависящей от переменной $\xi = z - ut$ амплитудой

$$E_{\perp} = E(\xi) \exp(i\Phi), \quad v_{\perp} = V(\xi) \exp(i\Phi), \quad (9)$$

$$E_z(\xi) = -d\varphi/d\xi, \quad n_e = n_e(\xi), \quad n_i = n_i(\xi), \quad v_i = v_i(\xi),$$

где $\Phi = \omega_0 t - k_0 z$, а ω_0 и k_0 определены формулой (4). Для медленно изменяющихся ($d/d\xi \ll k_0$) комплексных амплитуд получаем следующую систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} (v_z - u) \left[2(N - N_0 u/v_g) E' - i \frac{\omega}{c} (N^2 - N_0^2) E \right] &= -\frac{4\pi e n_b}{c} (v_0 - u) V, \\ (v_z - u) V' + i \left[\omega \left(1 - N \frac{v_z}{c} \right) + \omega_B \right] V &= \frac{e}{m} \left(1 - N \frac{v_z}{c} \right) E, \\ (v_z - u) v_z' &= \frac{e}{m} \left(\frac{N}{c} \operatorname{Re}(V E^*) - \varphi' \right), \\ \varphi'' + \frac{\omega_p^2}{u^2} \varphi &= -4\pi e n_b (v_0 - u) \left(\frac{1}{v_z - u} - \frac{1}{v_i - u} \right), \\ (v_i - u) v_i' &= \frac{e}{M} \varphi', \end{aligned} \quad (10)$$

где $n_e(v_z - u) = n_b(v_0 - u)$, n_b — невозмущенная плотность пучка,

$$N_0^2 = n_0^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_B)}, \quad v_g = cN_0 / \left[N_0^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_B}{2(\omega_B + \omega)^2 \omega} \right].$$

Интегралы энергии и импульса системы (10) равны

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m n_b (|V|^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} M n_b v_i^2 + \frac{(N_0 u / v_g - N)c}{4\pi(u - v_0)} |E|^2 + \\ & + \frac{u}{(u - v_0)} \left(\frac{e^2 n_p}{2m u^2} \varphi^2 + \frac{\varphi'^2}{8\pi} \right) = W_0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$n_b(mv_z + Mv_i) + \frac{N(N_0 u / v_g - N)}{4\pi(u - v_0)} |E|^2 + \frac{1}{(u - v_0)} \left(\frac{e^2 n_p}{2m u^2} \varphi^2 + \frac{\varphi'^2}{8\pi} \right) = P_0,$$

где $W_0 = n_b(M + m)v_0^2/2$ и $P_0 = n_b(M + m)v_0$ — начальные значения плотности энергии и плотности импульса электронно-ионного пучка.

По аналогии с [6], где в предельном случае $u \rightarrow \infty$ (для задачи с начальными условиями) нелинейное изменение продольной скорости электронного пучка малой плотности невелико ($v_z = v_0 + \delta v$, $|\delta v| \ll v_0$), будем считать выполненным неравенство

$$|\delta v_{e,i}| \ll |v_0 - u|,$$

$$\delta v_e = -\frac{1}{\mu} \delta v_i - \frac{N_0(1 - u/v_g)}{4\pi n_b m (v_0 - u)} |E|^2, \quad \delta v_i = \frac{\mu e \varphi}{m(v_0 - u)},$$

и разложим уравнения (10) по степеням этих малых параметров.

Переходя к безразмерным переменным

$$\zeta = \omega \xi / (v_0 - u), \quad \varepsilon_\alpha = e E_\alpha / (m c \omega), \quad \beta_\alpha = v_\alpha / c,$$

$$\Phi = e \varphi / (m c^2), \quad \mu = m / M, \quad \beta_u = u / c,$$

получаем

$$\varepsilon' - i \delta \varepsilon = -\frac{q^2 \delta}{N^2 - N_0^2} \beta, \quad (12)$$

$$\beta' + i \left[\delta + N \Phi + \frac{N^2(N^2 - N_0^2)}{2q^2 \delta} |\varepsilon|^2 \right] \beta = (1 - N \beta_0) \varepsilon,$$

$$\Phi'' + \Omega^2 \Phi = -\frac{N^2 - N_0^2}{2\delta} N |\epsilon|^2, \quad (13)$$

$$\Omega^2 = q^2 \left[1 + \mu + \frac{n_p}{n_b} \left(1 - \frac{\beta_0}{\beta_u} \right)^2 \right].$$

При выводе уравнений (12) и (13) использовано условие (5) и опущены слабые следующего порядка малости по параметру $\delta = (\omega_0 + \omega_B - kv_0)/\omega_0$, пропорциональные Φ^2 и Φ'^2 . В то же время учтена малая ионная добавка μ к безразмерной ленгмюровской частоте пучка $q = \omega_b/\omega_0$, которая оказывается существенной в отсутствие плазмы [6].

Исключая β из уравнения для поля, представим (12) в виде

$$\epsilon'' + \left(N\Phi + \frac{N^2(N^2 - N_0^2)}{2q^2\delta} |\epsilon|^2 \right) (i\epsilon' + \delta) - \Gamma^2 \epsilon = 0, \quad (14)$$

где инкремент

$$\Gamma^2 = \frac{q^2 \delta (N\beta_0 - 1)}{N^2 - N_0^2} - \delta^2$$

совпадает с формулой линейной теории (4) (при выполнении (5)).

Представим комплексную амплитуду поля в виде $\epsilon = A \exp(i\vartheta)$ и разделим реальную и мнимую части уравнения (14):

$$A'' - A\vartheta'^2 - (\vartheta' - \delta) \left(\frac{N^2(N^2 - N_0^2)}{2q^2\delta} A^2 + N\Phi \right) A - \Gamma^2 A = 0, \quad (15)$$

$$A\vartheta'' + \left[2\vartheta' + N\Phi + \frac{N^2(N^2 - N_0^2)}{2q^2\delta} A^2 \right] A' = 0.$$

Интегрируя (15), получаем следующие уравнения для амплитуды поля

$$A'^2 = (\Gamma^2 + 2\delta\vartheta' - \vartheta'^2) A^2, \quad (16)$$

$$2\vartheta' = -\frac{N^2(N^2 - N_0^2)}{4q^2\delta} A^2 - N\Phi - \frac{\delta}{N^2 - N_0^2} \frac{1}{A^2} (\Phi'^2 + \Omega^2 \Phi^2), \quad (17)$$

которые совместно с уравнением для потенциала (13) составляют замкнутую систему медленных уравнений, описывающих распространение нелинейных резонансных электромагнитных импульсов в плазменной замедляющей системе с электронно-ионным пучком.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ СОЛИТОН

Рассмотрим асимптотическое решение в предельном случае малых инкрементов, когда $\Phi'' \ll \Omega^2$ ($\Gamma^2 \ll q^2$) и вторая производная от потенциала в уравнении (13) может быть опущена

$$\Phi = -\frac{N^2 - N_0^2}{2\delta\Omega^2} N A^2, \quad (18)$$

Исключая в формуле (17) переменную Φ и переходя к переменной

$$a^2 = \frac{A^2(N^2 - N_0^2)N^2}{2q^2\delta},$$

находим

$$\vartheta' = -\frac{\varkappa}{4} a^2, \quad \varkappa = \frac{\mu + \frac{n_p}{n_b} \left(1 - \frac{\beta_0}{\beta_u}\right)^2}{1 + \mu + \frac{n_p}{n_b} \left(1 - \frac{\beta_0}{\beta_u}\right)^2}. \quad (19)$$

После подстановки (19) в (16), получаем уравнение

$$a' = a \left(\Gamma^2 - \frac{\delta\varkappa}{2} a^2 - \frac{\varkappa^2}{16} a^4 \right)^{1/2}, \quad (20)$$

которое интегрируется в элементарных функциях

$$a(\zeta) = \left[\frac{(8\Gamma/\varkappa)(1 + \delta^2/\Gamma^2)^{1/2}}{e^{2\Gamma\zeta} + e^{-2\Gamma\zeta} [(1 + \delta^2/\Gamma^2)^{1/2} + (\delta/\Gamma)e^{2\Gamma\zeta}]^2} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Максимальная амплитуда солитона в точке $\zeta = 0$ равна

$$a_m^2 = (4\Gamma/\varkappa)[(1 + \delta^2/\Gamma^2)^{1/2} - \delta/\Gamma] \quad (22)$$

и определяет нелинейный закон дисперсии [8]. Возвращаясь к амплитуде поля A_m , получаем

$$\nu^2 Z^3 + 2\nu Z^2 + Z - 1 = 0, \quad (23)$$

где $Z = \delta(N^2 - N_0^2)/[q^2(N\beta_0 - 1)]$ и $\nu = \varkappa N^2(N\beta_0 - 1)A_m^2/(8\delta^3)$. График функции $Z(\nu)$ представлен на рис. 1. Область существования солитона ограничена неравенством $Z < 1$, следующим из условия $\Gamma^2 > 0$.

Асимптотические решения уравнения (23)

$$Z(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu \ll 1 \\ \nu^{-2/3}, & \nu \gg 1 \end{cases} \quad (24)$$

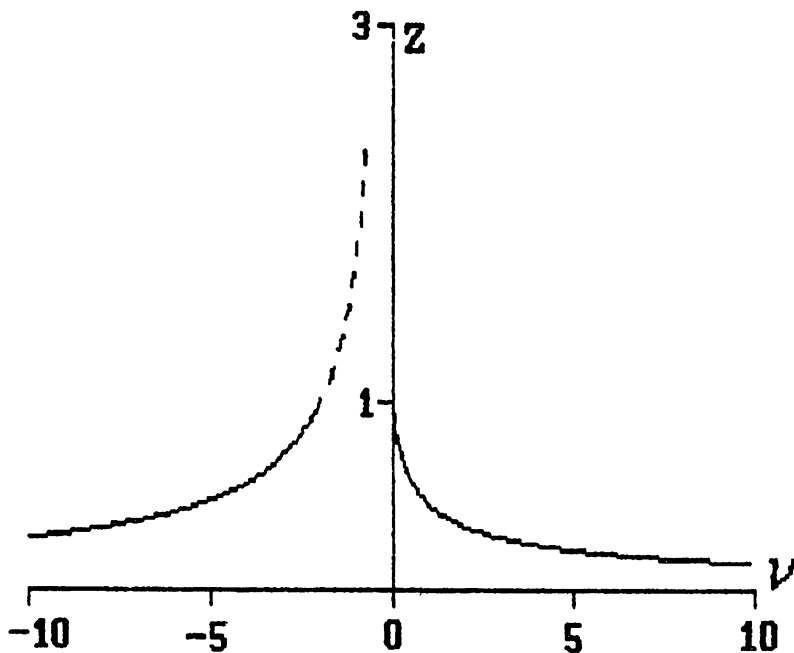


Рис. 1.

соответствуют линейному и сильнонелинейному приближению. В последнем случае нелинейное дисперсионное уравнение имеет вид

$$N^2 = N_0^2 + \frac{4q^2 \delta (N \beta_0 - 1)^{1/3}}{(N_0^2 A_m^2 \varkappa)^{2/3}}. \quad (25)$$

Выражение для групповой скорости волнового пакета, следующее из (5) и (25), есть

$$\beta_u = \beta_g \frac{\beta_0 \sigma - \varkappa^{3/2}}{\beta_g \sigma - \varkappa^{3/2}}, \quad \sigma = \frac{2q^2 (n \beta_0 - 1)^{1/3}}{N_0 (n_0 A_m)^{4/3}}, \quad (26)$$

и при произвольных параметрах замедляющей системы и пучка является алгебраическим уравнением относительно β_u , где функция $\varkappa(\beta_u)$ определяется формулой (19).

В плотной плазме ($n_p \gg n_b$, $\varkappa \cong 1$)*, когда влияние поляризационного поля на нелинейное торможение частиц пучка волной несущественно и обусловленная им расфазировка пучка с волной приводит к быстрому переходу электронов из замедляющей фазы в ускоряющую, решение (21) совпадает с полученным в [7]. Однако с уменьшением плотности плазмы её экранирующее воздействие на пучок ослабевает и возникающее продольное электрическое поле частично компенсирует действие продольной

*Наше рассмотрение справедливо, если характерное время изменения амплитуды поля мало по сравнению с инкрементом пучковой неустойчивости [9]: $u \Delta k \gg (\omega_b^2 \omega_p)^{1/3}$.

компоненты силы Лоренца и замедляет процесс торможения электронов. В результате коэффициент α в формуле (19) уменьшается и фазовый синхронизм резонансных частиц с волной затягивается. Одновременно происходит торможение ионного пучка и преобразование его энергии и импульса в энергию и импульс волны.

В разреженной плазме ($n_p \ll \mu n_b$, $\alpha \simeq \mu$), когда нейтрализация электронного тока, в основном, обеспечивается ионным пучком, поляризационное поле настолько велико, что торможение электронов под действием излучения происходит синхронно с ионами, поскольку в рассматриваемом случае малых инкрементов ($\Gamma^2 \ll q^2$) электронный пучок "вморожен" в ионный. Другими словами, возникает своеобразная анизотропия масс, так как в движении поперёк магнитного поля электроны ведут себя как частицы с массой m , а в движении вдоль поля их эффективная масса равна M . В результате из-за большей массы ионов амплитуда солитона оказывается в $(M/m)^{1/2}$ раз больше, чем в плотной плазме [6].

Отметим, что в предельных случаях плотной и разреженной плазмы параметр α не зависит от β_u и формула (26) определяет групповую скорость в явном виде. Кроме того, решением алгебраического уравнения (26) является $\beta_u = \beta_c$ при $\beta_0 = \beta_g$ и $\alpha = \mu/(1 + \mu)$.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рассмотренное выше "безинерционное" приближение $\Phi'' \ll \Omega^2$ нарушается при $\Gamma^2 \simeq q^2$, когда необходимо учитывать продольные колебания электронного пучка относительно ионного. Так как в этом случае динамика электронов пучка в поле электромагнитного импульса существенно усложняется, то исследование уравнений (13), (16) возможно лишь численными методами.

Для численного интегрирования удобно перейти к новым переменным

$$\Psi = \frac{N}{\delta} \Phi, \quad b^2 = \frac{N^2(N^2 - N_0^2)}{2q^2\delta^2} A^2, \quad Q^2 = \frac{\Gamma^2}{\delta^2}, \quad \zeta_1 = \delta \zeta$$

и представить систему уравнений в виде

$$\Psi'' + \frac{\Omega^2}{\delta^2} \Psi = -\frac{q^2}{\delta^2} b^2, \quad (27)$$

$$b'^2 = (Q^2 + 2\vartheta' - \vartheta'^2) b^2, \quad (28)$$

$$2\vartheta' = -\frac{b^2}{2} - \Psi - \frac{W}{b^2}, \quad W = \frac{\delta^2}{2q^2} \left(\Psi'^2 + \frac{\Omega^2}{\delta^2} \Psi^2 \right),$$

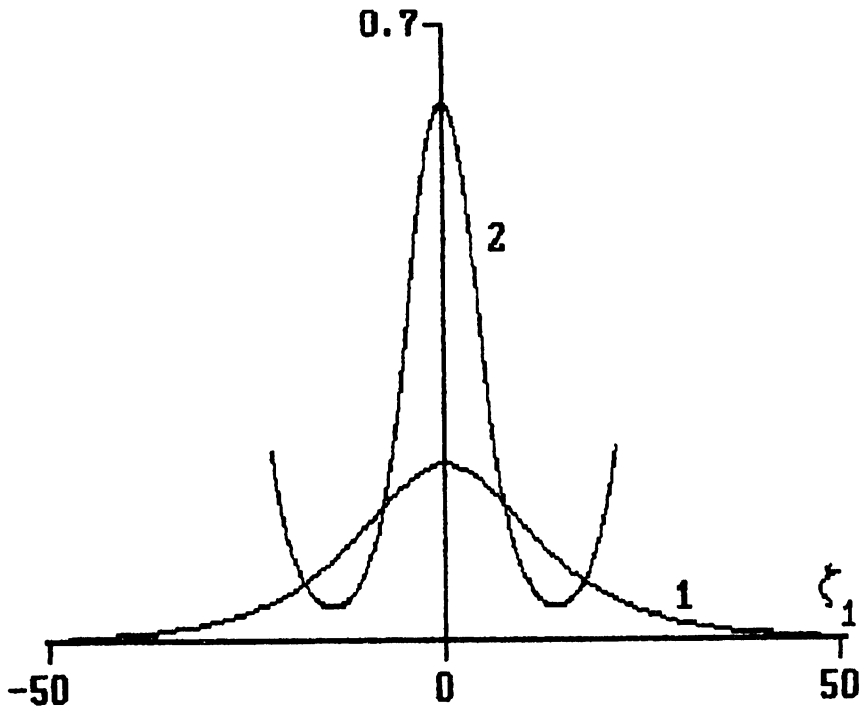


Рис. 2.

Система нелинейных уравнений (27) и (28) описывает связанные поперечно-продольные колебания электронов и ионов. Численное исследование уравнений (27), (28) показывает, что при $Q^2 \ll q^2/\delta^2$ реализуются решения (21). Однако с увеличением параметра $(Q\delta/q)^2$ роль продольных полей возрастает и их влияние приводит к срыву решений солитонного типа. Рис. 2 иллюстрирует искажение формы солитонного импульса ($q^2/\delta^2 = 0,5$, $\Omega^2/\delta^2 = 1$) с увеличением параметра Q^2 : $Q^2 = 0,01$ (кривая 1), и $Q^2 = 0,1$ (кривая 2). В общем случае в системе возбуждается регулярная стационарная волна, не имеющая нулевых асимптотик при $\zeta_1 \rightarrow +\infty$. Солитонные решения в этих условиях можно получить лишь при определённых соотношениях периодов для ленгмюровских и электромагнитных осцилляций. Методика поиска таких решений, применяемая в нашей задаче, принципиально не отличается от изложенной в работе [10].

Результаты численного интегрирования системы (27) и (28) представлены на рис. 3, который даёт форму уединённых импульсов для поля b (кривая 1) и потенциала Ψ (кривая 2) при $\Gamma^2 = 4$, $\Omega^2/\delta^2 = 1$ с изменением параметра q^2/δ^2 : 0,089507 (а), 0,157287 (б), 0,508552 (с). На периферии электромагнитного импульса ($|\zeta_1| \rightarrow -\infty$), когда амплитуда поля имеет вид $b \sim \exp(Q|\zeta_1|)$, роль кулоновских полей незначительна. Нелинейное торможение электронного пучка в голове импульса сопровождается разделением зарядов и возникновением продольных ленгмюровских колебаний

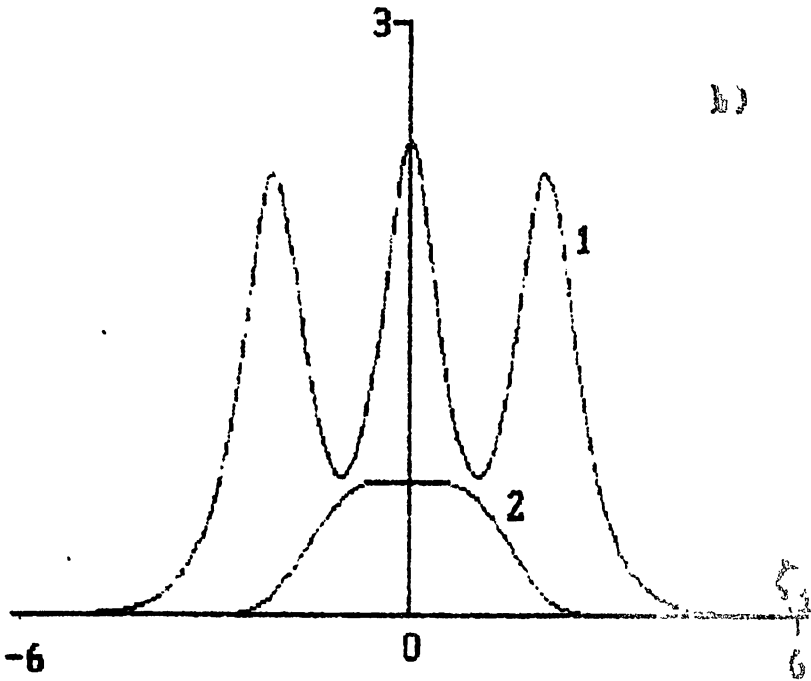
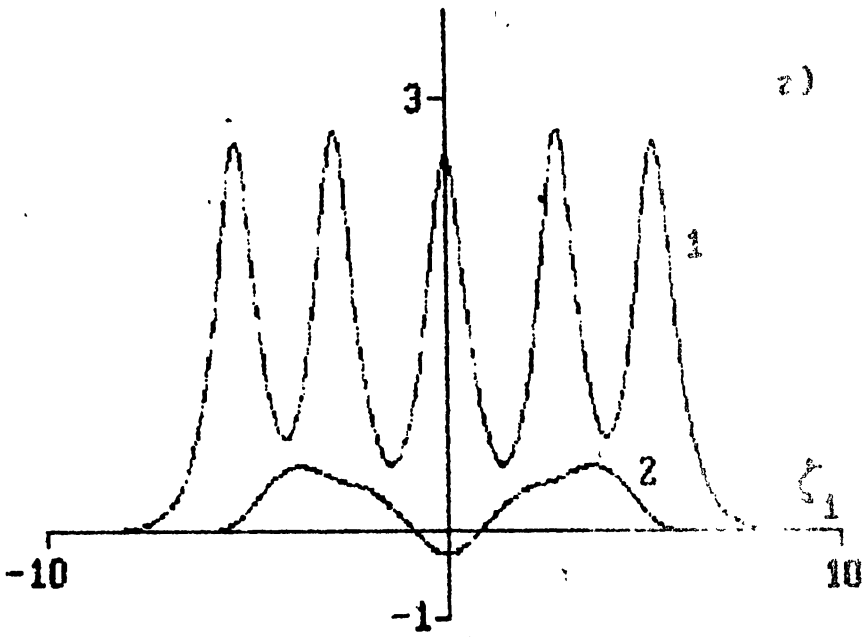


Рис. 3 а, б.

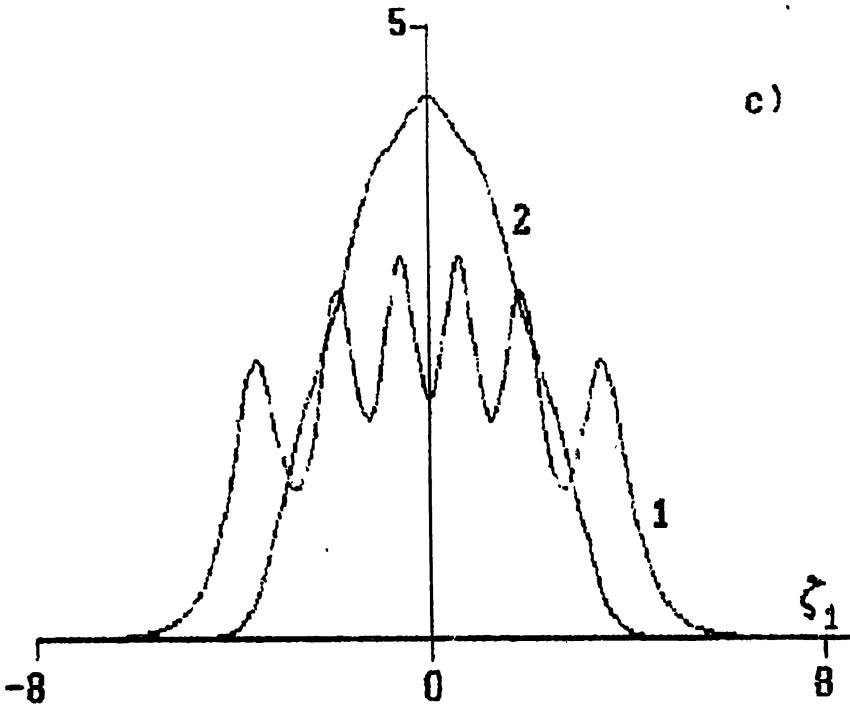


Рис. 3 с.

электронного пучка относительно ионного. Солитонные решения в этих условиях существуют при совпадении экстремумов функций b и Φ . Амплитуда нелинейных электромагнитных осцилляций увеличивается с ростом Q^2 . Предельный переход $Q^2 \rightarrow 0$ соответствует полученному ранее решению (21).

В таблице приведена сводка численных значений параметров задачи, при которых реализуются возвратные решения с $b(\pm\infty) = \Phi(\pm\infty) = 0$.

Возникновение нелинейных осцилляций амплитуды поля $b(\xi_1)$, представленных на рис. 3, качественно можно объяснить по аналогии с задачами механики [11], представляя формулу (28) в виде

Зависимость отношения числа колебаний потенциала $\Psi(m_x)$ к числу осцилляций поля $b(m_b)$ для уединённой волны при $\Gamma^2 = 4$, $\Omega^2/\delta^2 = 1$ от параметра q^2/δ^2

m_x/m_b	q^2/δ^2
2/5	0,089507
3/8	0,118728
1/3	0,157287
3/10	0,209972
2/7	0,242566
1/4	0,306216
2/9	0,373077
3/14	0,395710
1/5	0,422106
3/16	0,451650
2/11	0,471476
1/6	0,508552
2/13	0,545492
3/20	0,558581
1/7	0,573992
2/15	0,602349
1/8	0,624752
2/17	0,647078

$$b^2 + U(b) = E, \quad (29)$$

$$U(b) = (\Psi^2/4 + \Psi + W/4 - Q^2)b^2 +$$

$$+ (1 + \Psi/2)b^4/2 + b^6/16 + W^2/(4b^2),$$

$$E = -W(1 + \Psi/2),$$

где $U(b)$ — эффективная потенциальная яма, а E — энергия частицы.

Эволюция функции $U(b)$ при смещении из периферийной области к центру импульса (см. рис. 3 с) иллюстрируется рис. 4. Инфинитное движение частицы (рис. 4 а), соответствующее экспоненциальному росту амплитуды, сменяется финитным при появлении второй точки поворота (рис. 4 б).

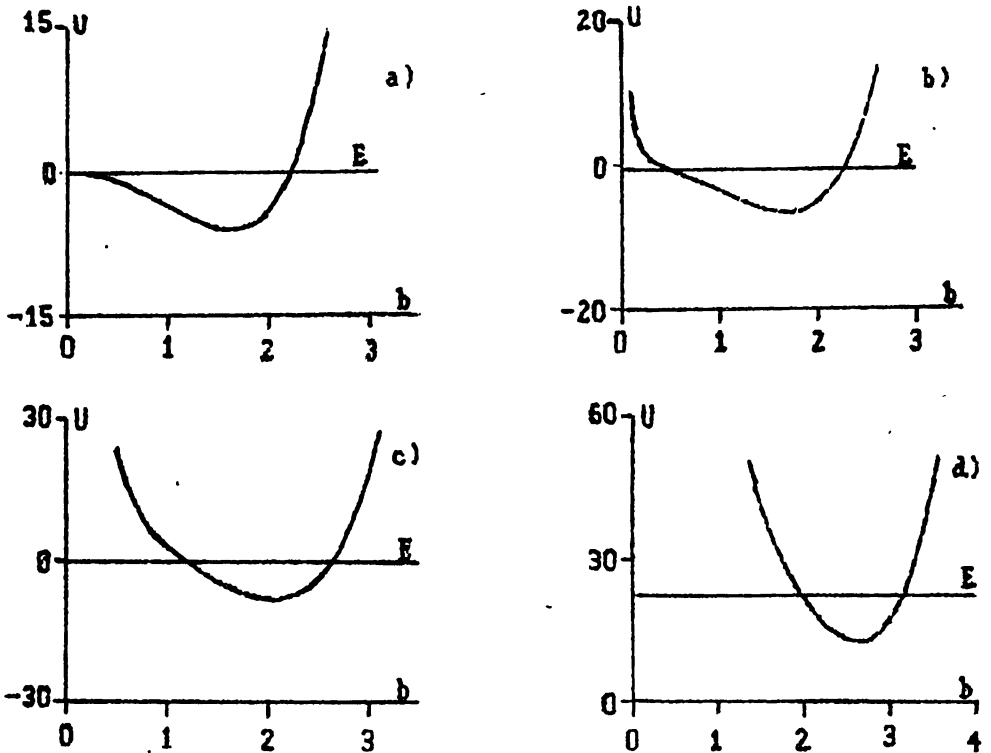


Рис. 4.

Укручение стенок потенциальной ямы сопровождается падением частицы на дно ямы и уменьшением периода нелинейных колебаний (рис. 4 с, d).

4. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Как показывает численное интегрирование (см. рис. 3,с), переход в область $(Q\delta/q)^2 \gg 1$ сопровождается увеличением периода ленгмюровских колебаний по сравнению с обратной нелинейной электронной частотой, что позволяет исследовать систему (27) и (28) в адиабатическом приближении.

Поскольку потенциал мало изменяется за период нелинейного колебания, то уравнение (28) может быть проинтегрировано при постоянных Ψ и Ψ' . Выполняя стандартные выкладки (см. ПРИЛОЖЕНИЕ), находим

$$b^2(\zeta_1, \Psi) = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 - x_2}{2} \frac{\lambda - \operatorname{cn} [(gh/4)^{1/2} \zeta_1, k]}{1 - \lambda \operatorname{cn} [(gh/4)^{1/2} \zeta_1, k]}, \quad (30)$$

где $\operatorname{cn}(x, k)$ — эллиптический косинус.

Период нелинейных осцилляций равен

$$T = \frac{4}{(gh)^{1/2}} K(k). \quad (31)$$

Усредняя уравнение (27) по периоду нелинейных колебаний (быстрой переменной ζ_1), находим (см. ПРИЛОЖЕНИЕ):

$$\Psi'' + \frac{\Omega^2}{\delta^2} \Psi = -\frac{q^2}{\delta^2} \langle b^2 \rangle, \quad (32)$$

$$\langle b^2 \rangle = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2} \frac{f + g}{f - g} \left(1 - \frac{\Pi(-\gamma, k)}{K(k)} \right).$$

Формула (32) описывает динамику кулоновского потенциала на нелинейной стадии взаимодействия пучка с волной. Сравнение асимптотических формул адиабатического приближения с результатами численного интегрирования иллюстрирует рис. 5. Здесь $\Gamma^2 = 4$, $\Omega^2/\delta^2 = 1$, $q^2/\delta^2 = 0,810326$; осциллирующая кривая $b(\zeta_1)$ найдена численным интегрированием системы (27) и (28), а монотонная $\langle b^2(\zeta_1) \rangle^{1/2}$ соответствует уравнению (32).

В заключение отметим, что переход к разреженной плазме сопровождается, как и в разд. 2, значительным увеличением амплитуды уединённого импульса.

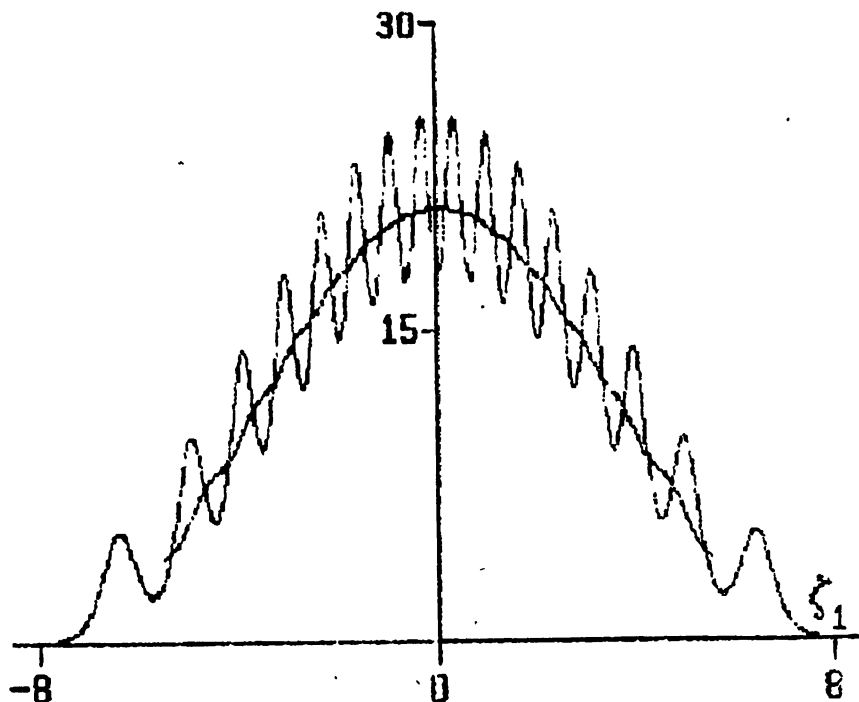


Рис. 5.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для получения формулы (30) проинтегрируем (29) при переменном верхнем пределе:

$$\frac{\zeta_1}{2} = \int_{x_1}^x \frac{dx'}{[E - U]^{1/2}}, \quad (\text{П.1})$$

где $x = b^2$. Корни выражения в знаменателе (П.1) есть [12]

$$x_{1,2} = y_1^{1/2} \pm 2 \operatorname{Re} y_2^{1/2}, \quad x_{3,4} = d + if,$$

$$d = -y_1^{1/2}, \quad f = 2 \operatorname{Im} y_2^{1/2},$$

причём y_1 и y_2 определяются выражениями

$$y_1 = -\frac{A_1}{6} + B + C, \quad y_2 = -\frac{A_1}{6} - \frac{B + C}{2} + i \frac{3^{1/2}}{2} (B - C),$$

$$B, C = \left[-C_2 + \frac{1}{6} A_1 B_2 - \left(\frac{A_1}{6} \right)^3 \pm R^{1/2} \right]^{1/3},$$

$$R = \frac{i}{27} \left(B_2 - \frac{A_1^2}{6} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(C_2 - \frac{1}{6} A_1 B_2 + \frac{2}{216} A_2^3 \right)^2,$$

$$B_2 = (A_1^2 - 4C_1)/16, \quad C_2 = -B_1^2/64,$$

$$A_1 = B - 3A^2/8, \quad B_1 = A^3/8 - AB/2 + C,$$

$$C_1 = -3A^4/256 + A^2B/16 - AC/4 + D,$$

$$A = 8(1 + \Psi/2), \quad B = 16(\Psi^2/4 + \Psi + W - Q^2),$$

$$C = 16W(1 + \Psi/2), \quad D = 4W^2.$$

Поскольку уравнение $E - U = 0$ содержит два действительных и два комплексных корня, для приведения интеграла (П.1) к нормальной форме Лежандра необходимо использовать подстановку [12]

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 - x_2}{2} \frac{\lambda - \cos \alpha}{1 - \lambda \cos \alpha}, \quad (\text{П.2})$$

где $\lambda = (g - h)/(g + h)$, $g, h = [(x_{1,2} - d)^2 + f^2]^{1/2}$.

С учётом последнего соотношения интеграл в правой части (П.1) преобразуется к виду

$$\int_{x_1}^x \frac{dx}{[E - U]^{1/2}} = \frac{1}{(gh)^{1/2}} F(\alpha, k), \quad (\text{П.3})$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(x_1 - d)(x_2 - d) + f^2}{gh} \right),$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{2(1 - \lambda)(x_1 - x)}{x_1(1 - \lambda) - x_2(1 + \lambda) + 2x\lambda},$$

$F(\alpha, k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода. Подставляя (П.3) в (П.1) с учётом (П.2), придём к формуле (30).

Среднее значение квадрата амплитуды поля определяется формулой

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x' dx'}{[E - U]^{1/2}}. \quad (\text{П.4})$$

Вычисляя интеграл (П.4)

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{x' dx'}{[E - U]^{1/2}} = \frac{1}{(gh)^{1/2}} \left[\frac{gx_1 - hx_2}{g - h} K(k) - \frac{x_1 - x_2}{2} \frac{g + h}{g - h} \Pi(-\gamma, k) \right],$$

где $K(k)$ и $\Pi(-\gamma, k)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода, $\gamma = (f - g)^2/(4fg)$, придём к выражению (31).

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняков В. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1960. Т. 3. С. 57.
2. Красовицкий В. Б., Курилко В. И. // ЖЭТФ, 1965. Т. 49. № 6. С. 1831.
3. Красовицкий В. Б. // ЖЭТФ, 1974. Т. 66. № 1. С. 154.
4. Бачин И. В., Красовицкий В. Б. // Укр. физ. журн., 1983. Т. 28. № 3. С. 371.
5. Богданов А. Т., Кузелев М. В., Рухадзе А. А. // Изв. вузов. Радиофизика, 1986. Т. 29. С. 1431.
6. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука, 1990. — 325 с.
7. Бачин И. В., Красовицкий В. Б. // ЖЭТФ, 1980. Т. 79. № 2. С. 472; // Физика плазмы, 1983. Т. 9. № 2. С. 278.
8. Красовицкий Д. В. // Физика плазмы, 1983. Т. 12. № 11. С. 1394.
9. Шалиро В. Д., Шевченко В. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1976. Т. 19. № 5–6. С. 767.
10. Дорофеенко В. Г., Красовицкий В. Б., Фомин Г. В. // ЖЭТФ, 1990. Т. 98. № 2. С. 419.
11. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976. — 239 с.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1977. — 831 с.

Ростовский государственный
университет

Поступила в редакцию
11 октября 1993 г.

**SOLITARY ELECTROMAGNETIC PULSES IN A SLOW DOWN SYSTEM
WITH AN ELECTRON-ION BEAM**

V. B. Krasovitskiy, V. V. Prudskikh

There has been considered the propagation of a joint electron-ion beam in a slow down system filled with plasma under the conditions of the cyclotron (abnormal Doppler) resonance of electrons with the wave. A possibility has been shown of the existence of resonance electromagnetic solitons propagating along the beam. The dispersion nonlinear law and soliton group velocity have been determined. A special attention is paid to the case essential due to the effects associated with a longitudinal polarization field arising at the charge separation in the field of the electromagnetic pulse. By digital integration we have found solutions of a solitary wave type existing for a discrete spectrum of system parameters. For the limit case of a rarefied plasma when the discrete spectrum becomes continuous the solution has been found in the adiabatic approximation.

УДК 621.378.9

ОТРАЖЕНИЕ СФОКУСИРОВАННОГО СВЕТОВОГО ПУЧКА В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ КЕРРА. I. ОЦЕНКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ*

В. В. Воробьев

В приближении параксиальных падающего и отражённого световых пучков, рассчитывается интенсивность отражения в слое нелинейного диэлектрика. Показано, что отражение определяется, в основном, скачками показателей преломления на границах. В отличие от отражения линейным диэлектрическим слоем, отражение от нелинейного происходит с уменьшением в три раза эффективной площади отражения и соответствующим уширением углового спектра. Интенсивность отражённой волны сравнима с интенсивностью падающей при мощности в пучке, близкой к критической.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при описании распространения световых пучков в среде с нелинейностью Керра в приближении параксиальной оптики (параболического уравнения) существуют решения в виде пучков, схлопывающихся в точку [1–3]. В области вблизи точки схлопывания возникают большие возмущения показателя преломления и можно ожидать, что это может привести к рассеянию падающего излучения под большими углами, в том числе и в направлении назад. Целью представляемой работы было оценить эту интенсивность. Проведённое аналитическое и численное исследование показало, однако, что обратное рассеяние, если и возможно, то не ощутимо на фоне более интенсивного отражения от границ нелинейного диэлектрика, исследование которого представляет самостоятельный интерес.

1. УРАВНЕНИЯ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ВОЛН

Будем исходить из волновых уравнений для описания изменения электрического поля E волны вне и внутри нелинейного слоя

*Частично результаты работы представлены на PIERS-1995 (Progress in Electromagnetics Research Symposium) Сиэтл, США.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \Delta_{\perp} E + k^2 E = 0 \text{ при } z < 0 \text{ и } z > H; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \Delta_{\perp} E + k^2(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2|E|^2)E = 0 \text{ при } 0 \leq z \leq H,$$

где z — координата вдоль направления распространения пучка, k — волновое число в среде вне слоя.

Разложим поле E и функцию $F = |E|^2 E$ в интеграл Фурье по поперечным координатам

$$E(\vec{r}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\vec{\alpha}, z) \exp(i\vec{\alpha}\vec{r}) d^2\alpha, \quad F(\vec{r}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\vec{\alpha}, z) \exp(i\vec{\alpha}\vec{r}) d^2\alpha$$

и будем находить решение для спектральных компонент $\tilde{E}(\vec{\alpha}, z)$ в виде

$$\tilde{E}(\vec{\alpha}, z) = [A + \tilde{u}(\vec{\alpha}, z)] \exp(ipz) + [B + \tilde{v}(\vec{\alpha}, z)] \exp(-ipz) \text{ при } 0 \leq z \leq H;$$

$$\tilde{E}(\vec{\alpha}, z) = A_0 \exp(iqz) + B_0 \exp(-iqz) \text{ при } z < 0; \quad (2)$$

$$\tilde{E}(\vec{\alpha}, z) = A_2 \exp(iqz) \text{ при } z > H,$$

где $\vec{r}(x, y)$ — поперечный радиус-вектор, $q = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$, $p = \sqrt{k^2(1 + \varepsilon_1) - \alpha^2}$, A_0 — амплитуды компонент спектра падающей волны. (Величины A_0 , A , A_2 , B_0 , B зависят от величины α , но для упрощения записи эта зависимость здесь и далее явно не указывается).

Будем рассматривать случай линейно-поляризованного излучения с вектором \vec{E} , параллельным границе раздела. Граничные условия в этом случае эквивалентны условиям непрерывности поля E и его производной dE/dz . С учётом этого из системы уравнений (1) следует:

$$A = C \left\{ \frac{2q}{p+q} A_0 + \frac{p-q}{p+q} \left[\tilde{v}(\vec{\alpha}, 0) + \frac{p-q}{p+q} \tilde{u}(\vec{\alpha}, H) \exp(2ipH) \right] \right\}, \quad (3)$$

$$B = \frac{p-q}{p+q} [A + \tilde{u}(\vec{\alpha}, H)] \exp(2ipH), \quad C = \left\{ 1 - \left[\frac{p-q}{p+q} \exp(ipH) \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (4)$$

$$B_0 = A - A_0 + B + \tilde{v}(\vec{\alpha}, 0), \quad (5)$$

$$A_2 = [A + \tilde{u}(\vec{\alpha}, H)] \exp[i(p-q)H] + B \exp[-i(p+q)H],$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dz} = \frac{i}{2p} k^2 \varepsilon_2 \tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\alpha}, z) \exp(-ipz), \quad \tilde{u}(\tilde{\alpha}, 0) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d\tilde{v}}{dz} = -\frac{i}{2p} k^2 \varepsilon_2 \tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\alpha}, z) \exp(ipz), \quad \tilde{v}(\tilde{\alpha}, H) = 0. \quad (7)$$

Будем в дальнейшем функции $\tilde{U} = A + \tilde{u}$ и $\tilde{V} = B + \tilde{v}$ называть, соответственно, прямой и обратной волной. Отметим, что терминам прямая и обратная волны точно соответствуют только волны вне слоя, однозначно определяемые соответственно распределениями на границах: $A2(\tilde{\alpha}, H)$ для прошедшей и $B0(\tilde{\alpha}, 0)$ для обратной волн. В нелинейном же слое каждая из функций \tilde{U} и \tilde{V} может, в общем случае, быть комбинацией волн бегущих в противоположных направлениях. (Подробно данный вопрос обсуждается в книге [5].)

2. ОЦЕНКИ ОТРАЖЕНИЯ ОТ ОБЛАСТИ СХЛОПЫВАНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ

Корректное решение уравнений (6), (7) с учётом соотношений (2)–(5), возможно, как нам представляется, только численными методами. Для практического их применения, выбора характерных значений большого числа параметров, определяющих обратную волну и её взаимодействие с прямой, целесообразно иметь хотя бы грубые оценки эффектов. Мы воспользуемся для этого приближением параксиальных пучков и методом возмущений по интенсивности обратной волны. Рассмотрим для простоты случай $\varepsilon_1 = 0$, когда слой не отражает волну малой интенсивности, так что нелинейные эффекты в отражении проявляются в чистом виде.

Параксиальное приближение соответствует формальной замене величины p на k в знаменателях правых частей уравнений (6) и (7) и на $p = k - \alpha^2/(2k)$ в экспонентах. Метод возмущений по интенсивности обратной волны соответствует пренебрежению зависимостью функции \tilde{F} от \tilde{V} . Прямая волна в этих приближениях является решением параболического уравнения, обратная — вычисляется как интеграл

$$v(\vec{r}, z) = \frac{k^2 \varepsilon_2}{4\pi} \int_z^H \frac{d\zeta}{\zeta - z} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{ik(\vec{r} - \vec{\rho})^2}{2(\zeta - z)} + 2ik\zeta \right] |U(\vec{\rho}, \zeta)|^2 U(\vec{\rho}, \zeta) d^2\rho. \quad (8)$$

Последнее соотношение легко получить и непосредственно (без перехода к спектрам) из уравнений (1), воспользовавшись методикой, предложенной в работе [4] для расчёта волны, отражённой от турбулентной среды. Для оценок выберем распределение поля U в прямой волне в виде гауссова пучка

$$U(\rho, z) = E_0 \frac{a(0)}{a(z)} \exp \left[-\frac{\rho^2 [1 + iks(z)]}{2a^2(z)} - ik\varphi(z) \right] \quad (9)$$

с функциями

$$a(z) = a_0 \sqrt{\left(1 - \frac{z}{F_0}\right)^2 + \frac{C_1 z^2}{k^2 a_0^4}}, \quad (10)$$

$$s(z) = \frac{da^2}{dz}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{C_2}{k^2 a^2},$$

где $a(z)$ — радиус пучка, $a_0 = a(0)$, F_0 — радиус кривизны фазового фронта волны на входе нелинейного слоя, C_1, C_2 — постоянные коэффициенты. Решения в виде (9), (10) являются точными решениями линейного параболического уравнения, при этом $C_1 = 1, C_2 = 1$. Для нелинейного параболического уравнения эти формулы являются приближёнными решениями [6] с $C_1 = 1 - \beta, C_2 = 1 - 3\beta/2$, где $\beta = k^2 \varepsilon_2 E_0^2 a_0^2 / 4$ — отношение мощности в падающем пучке к критической мощности, т.е. мощности, при которой $C_1 = 0$, и пучок может схлопываться в точку.

Проинтегрировав выражение (8) с заданным распределением $U(z, \rho)$ по поперечным координатам, получим

$$v(r, z) = 2\beta E_0 a_0 \int_z^H \frac{d\zeta}{a(\zeta) D(z, \zeta)} \exp \left[-\frac{ikr^2}{2D(z, \zeta)} G(\zeta) + 2ik\zeta - ik\varphi(\zeta) \right], \quad (11)$$

где

$$D(z, \zeta) = ik a^2(\zeta) - (\zeta - z)[3 + ikS(\zeta)], \quad G(\zeta) = 3 + ikS(\zeta). \quad (12)$$

Рассмотрим поле на оси пучка ($r = 0$). Основной вклад в интеграл (11) вносят точки стационарной фазы и границы интегрирования. Условием существования точек стационарной фазы является $\varphi' = C_2 / (k^2 a^2) = 2$. Это условие может выполняться только при $C_2 > 0$ (т.е. $\beta < 2/3$). При этом минимальный размер пучка a должен быть меньшим, чем $\lambda / (2^{3/2} \pi)$, где λ — длина световой волны. Это условие реально не может выполняться. Поэтому хорошей оценкой для поля обратной волны на оси является первый член формального разложения интеграла в ряд по обратным степеням волнового числа k

$$v(0, z) = -\frac{i\beta E_0 a_0}{k} \left[\frac{\exp[2ikH - ik\varphi(H)]}{a(H)D(z, H)} - \frac{\exp[2ikz - ik\varphi(z)]}{a(z)D(z, z)} \right]. \quad (13)$$

Из соотношений (12), (13) следует, что поле обратной волны на границе нелинейной среды ($z = 0$) максимально в том случае, когда пучок фокусируется на выходную границу нелинейной среды ($F_0 = H$). Если при этом выполняются соотношения

$$F_0 / (ka_0^2) \ll 1, \quad 0 < C_1 \leq 1, \quad (14)$$

тогда

$$\left| \frac{v(0,0)}{E_0} \right| \simeq \frac{\beta a_0^2}{3F_0^2} C_1^{-1/2}. \quad (15)$$

При сдвиге фокальной области внутрь нелинейного слоя поле $v(0,0)$ уменьшается обратно пропорционально кубу величины радиуса пучка на границе $z = H$.

Мы не проводили анализа подынтегрального выражения (11) на наличие в нём точек стационарной фазы и точек перевала в общем случае ($r \neq 0$). Прямое численное интегрирование выражения (11) показало, что асимптотическое выражение вида (13), а именно:

$$v(r,0) = -\frac{i\beta E_0 a_0}{k} \left\{ \frac{\exp[2ikH - ik\varphi(H) + ikr^2 G(H)/2D(0,H)]}{a(H) D(0,H)} - \frac{\exp[ikr^2 G(0)/2D(0,0)]}{a(0) D(0,0)} \right\} \quad (16)$$

хорошо выполняется и для поля вне оси. (С графической точностью представленные ниже результаты численного интегрирования и результаты расчётов по формуле (16) неразличимы.) Рис. 1, 2 представляют поперечные распределения интенсивности в отражённой волне при фокусировке пучка на границу ($F_0 = H$) при различных значениях радиуса падающего пучка a_0 и отношения F_0/a_0 . При $F_0 = H$ из формулы (16) следует

$$\frac{v(r,0)}{\beta^2 E_0} = \frac{1}{k^2 a_0^2} \exp \left[-\frac{r^2}{2a_0^2} \left(3 + \frac{ika_0^2}{F_0} \right) \right] + \frac{i(a_0^2/F_0^2)}{3 - 2iC_1 F_0/(ka_0^2)} \times \\ \times \exp \left[-\frac{C_1 r^2}{6a_0^2} \frac{1 + 2iC_1 F_0/(3ka_0^2)}{1 + 4C_1^2 F_0^2/(9k^2 a_0^4)} + 2ikH - ik\varphi(H) \right]. \quad (17)$$

Отражённая волна представляет собой суперпозицию полей двух гауссовых пучков, отражённых от передней и задней границ нелинейного слоя. Причём квадрат эффективного радиуса пучка, отражённого передней границей (первый член в правой части (17)), в три раза меньше чем a_0^2 , отражённого же задней границей (после прохождения до передней) при условиях $C_1 \cong 1$, $F_0/(ka_0^2) \ll 1$, — соответственно, в три раза больше чем a_0^2 . Очевидно, что и уменьшение первого размера и увеличение второго обусловлено уменьшением эффективной площади отражения от границы нелинейной среды. Это основное отличие отражения от линейного и нелинейного диэлектрических слоёв.

Величины интенсивностей отражённых волн $|v|^2$ на рисунках нормированы на величину $|v_2|^2$ — значение интенсивности на оси в волне, отражённой от границы $z = H$.

$$|v_2|^2 = \frac{a_0^4}{9F_0^4} \frac{1}{1 + 4C_1^2 F_0^2/(9k^2 a_0^4)}. \quad (18)$$

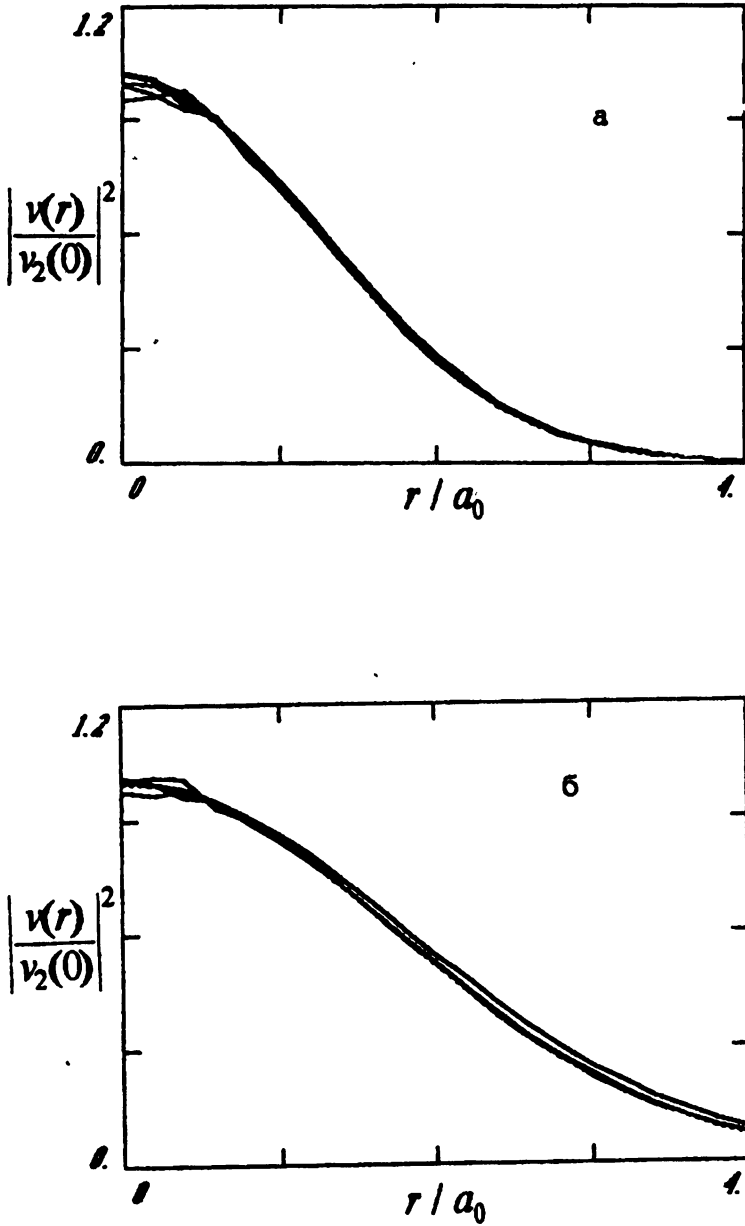


Рис. 1. Относительное распределение интенсивности в отражённой волне при фокусировке пучка на границу $F_0 = H$ при значениях параметров: $a_0/\lambda = 50$; $\beta \rightarrow 0$ (а) и 0,5 (б). Приведены по 4 кривых для значений параметра $H/a_0 = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi$.

Рис. 1 представляет распределение интенсивности в отражённом пучке в том случае, когда поперечный размер падающего много больше длины волны ($a_0/\lambda = 50$) на фокусных расстояниях $F_0 = 2\pi a_0, 4\pi a_0, \dots, 8\pi a_0$. Отражённое поле в данном примере определяется, в основном, отражением от задней границы, относительное распределение при заданной нелинейности (параметра β) слабо меняется при изменении толщины слоя. С увеличением нелинейности уменьшается размер пучка на границе $z = H$ и отражённый пучок уширяется.

При малых размерах падающего пучка (рис. 2) распределение интенсивности более сложное, что обусловлено интерференцией полей, отражённых от передней и задней границ.

Из того результата, что численные расчёты подтвердили корректность асимптотики (16), определяемой только распределениями падающей волны на границах слоя, можно сделать вывод, что область фокусировки или схлопывания пучка, если она находится вдали от границ, заметного вклада в обратную волну не вносит. Этот вывод справедлив, однако, только для волны вне слоя. Рассмотрим, например, поле v вблизи фокальной плоскости ($z \rightarrow F_0, F_0 < H$). Из соотношений (11), (12) в этом случае следует

$$\frac{v(r, z)}{\beta E_0} = C_1^{-3/2} \frac{ka_0^2 a_0^2}{F_0 F_0^2} \exp \left[-\frac{3r^2}{2a_F^2} + \frac{ikr^2}{F_0} + 2ikz - ik\varphi(F_0) \right] - \frac{ia_0 \exp[2ikH - ik\varphi(H) + ikr^2 G(H)/2D(0, H)]}{k a(H) D(0, H)}, \quad (19)$$

где a_F — радиус пучка в фокальной плоскости, $a_F = \sqrt{C_1} [F_0 / (ka_0^2)]$.

Из сравнения первого слагаемого в правой части этого выражения со вторым слагаемым выражения (17) следует, что величина $|v(r, F_0)| \gg |v(r, 0)|$ при $ka_0^2/F_0 \gg 1, C_1 \leq 1$. Таким образом, возмущения в области схлопывания, обусловленные влиянием “обратной” волны, могут намного превышать те, которые проявляются вне слоя. Именно здесь, однако, наглядно проявляется некорректность терминов “прямая” и “обратная” волна, которая была отмечена ранее, и заключающаяся в данном случае в том, что рассматриваемая компонента функции $V(r, z) = v(r, z) \exp(-ikz)$ является волной, бегущей вперёд.

Формулы (15), (17), (19) показывают, что значительных эффектов отражения следует ожидать при фокусировке широкоапертурных пучков ($a_0 \cong F_0$) при мощностях порядка критической ($\beta \rightarrow 1, C_1 \rightarrow 0$). Справедливость полученных оценок в этих случаях сомнительна, так как сомнительна возможность описания фокусировки широкоапертурных пучков, и описания поля вблизи области схлопывания в приближении парааксиальных пучков. Тем не менее, как показали численные расчёты, методика и результаты которых изложены во второй части работы, основные ка-

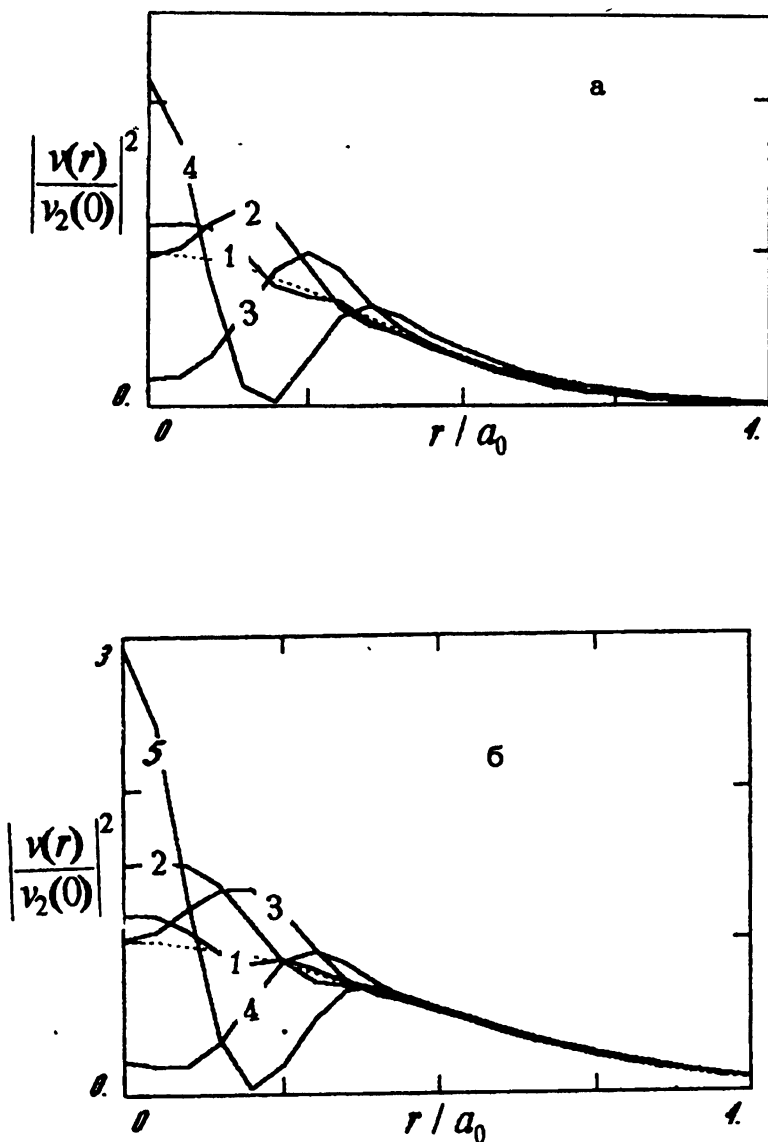


Рис. 2. То же, что на рис. 1, но при $a_0/\lambda = 5$. Пунктиром нанесена зависимость интенсивности $|v_2(r)/v_2(0)|^2$ в волне, отражённой от задней границы слоя. Значения параметров $H/a_0 = 2\pi$ (1), 4π (2), 6π (3), 8π (4), 10π (5).

чественные выводы остаются справедливыми и при нарушении условий применимости данного приближённого рассмотрения. Это выводы о том, что: обратная волна вне нелинейного слоя полностью определяется отражением на его границах; эффективная площадь отражения от границ нелинейного слоя в три раза меньше площади падающего пучка; локальные возмущения в области схлопывания не дают заметного вклада в отражение, но могут существенно сказаться на распространении прямой волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного Научного Фонда и Правительства Российской Федерации (проекты MR1000 и MR1300).

ЛИТЕРАТУРА

1. Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1966. Т. 9. С. 410.
2. Захаров В. Е., Соболев В. В., Сынах В. С. // ЖЭТФ, 1971. Т. 60. С. 136.
3. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1971. Т. 14. С. 1353.
4. Осташев В. Е., Татарский В. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1978. Т. 21. С. 714.
5. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986. — 256 с.
6. Воробьев В. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1970. Т. 13. С. 1905.

Институт физики атмосферы
им. А. М. Обухова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию
21 февраля 1996 г.

REFLECTION OF A FOCUSED LIGHT BEAM IN A KERR MEDIUM. I. ESTIMATIONS IN PARAXIAL BEAMS APPROXIMATION

V. V. Vorob'ev

An intensity of light reflected in a nonlinear dielectric layer is calculated. This reflection, as it has been shown, is determined in the main, by the boundary refraction index discontinuities. The difference of the nonlinear reflection from a linear one is in the decrease of the effective reflection area and in expansion of its angle spectrum. The reflected beam intensity is noticeable if the incident beam power is near to the power needed for beam collapse.

УДК 621.371

О МОДЕЛИ ИСКУССТВЕННОГО F-SPREAD В ИОНОСФЕРЕ

В. А. Алимов, А. В. Рахлин

С использованием метода рефракционного рассеяния радиоволн проанализированы результаты комплексного эксперимента по синхронному наблюдению за сигналами геостационарного ИСЗ и за отраженными КВ сигналами станции ВЗ во время воздействия на ионосферу мощным КВ радиоизлучением. Показано, что основные положения известной стохастической теории явления F-spread в ионосфере могут быть использованы при построении модели искусственного F-spread. В частности, явление искусственного F-spread может быть описано как многолучевое распространение коротких радиоволн в модифицированной мощным радиоизлучением ионосфере, распределение электронной концентрации которой представляет собой случайный локально стационарный по пространству и времени процесс.

Явление искусственного F-spread, возникающего при воздействии на ионосферу мощным КВ радиоизлучением, известно уже 25 лет [1]. Однако, несмотря на многочисленные экспериментальные исследования, вопрос о модели этого явления остается открытым до настоящего времени, хотя попытки создания такой модели ранее делались. Но даже в работе [2], непосредственно посвященной этой проблеме, рассматривается лишь некоторая идеализированная регулярная модель мелкомасштабных неоднородностей ионосферы, которая лишь односторонне и весьма приближенно описывает явление искусственного F-spread в ионосфере. Вместе с тем, в последнее время была разработана стохастическая модель явления F-spread в ионосфере [3]. Ниже мы покажем, что основные положения этой теории в полном объеме могут быть использованы при построении модели искусственного F-spread.

Действительно, как и в случае естественного F-spread, в формировании отраженного многолучевого КВ сигнала во время искусственного F-spread участвует весь спектр крупномасштабных неоднородностей электронной концентрации модифицированной ионосферы в диапазоне от нескольких сотен метров до нескольких десятков километров. Наиболее отчетливо это обстоятельство проявилось в экспериментах по искусственной модификации ионосферы мощным КВ радиоизлучением с использованием сложных режимов нагрева околоземной плазмы [4]. В условиях применения сложной модуляции мощного КВ радиоизлучения изменения

в низкочастотной составляющей спектра ионосферных неоднородностей с размерами в единицы–десятки километров приводят к коренным изменениям структуры многолучевого отраженного КВ сигнала [4], что находится в полном соответствии с моделью [3].

В качестве примера применения теории [3] к явлению искусственного F-spread в ионосфере рассмотрим результаты комплексного эксперимента в 1985 г. в Душанбе по синхронным наблюдениям за сигналами геостационарного ИСЗ SIRIO ($f = 136$ МГц) и за отраженными КВ сигналами на ионосферной станции ВЗ при воздействии на ионосферу мощным КВ радиоизлучением нагревного стенда "Гиссар" [5]. Во время этого эксперимента возбуждались искусственные неоднородности в ионосфере только в вечерние и ночные часы, когда критические частоты F2 слоя и, соответственно, частоты нагрева ионосферы составляли $f_k = (4 \div 6)$ МГц [5]. При наличии мерцаний сигналов ИСЗ, вызванных искусственными неоднородностями, наблюдался развитой F-spread на ионограммах, который сохранялся и в течение паузы работы мощного передатчика (нагрев — $5 \div 6$ мин; пауза — $5 \div 10$ мин [5]), что, как справедливо отмечалось в [5], является прямым доказательством того, что основной вклад в искусственный F-spread дают неоднородности с размерами $l > (1 \div 2)$ км.

Согласно [3] основным параметром, характеризующим возмущения отраженного КВ сигнала, вносимые случайными неоднородностями ионосферной плазмы, является средний квадрат флуктуаций фазы радиоволны $\overline{s^2}$. В теории рефракционного рассеяния радиоволн для случая ВЗ ионосферы выражение для величины $\overline{s^2}$, с учетом [3, 6], имеет вид¹

$$\overline{s^2} = 2k_0^2 \int_0^{\ell_{\text{отр}}} d\ell \Gamma_\epsilon(0, 0, \ell) \int_{\ell/2}^{\ell_{\text{отр}} - \ell/2} \frac{d\bar{\ell}}{\sqrt{\bar{\epsilon}(\bar{\ell} - \ell/2)\bar{\epsilon}(\bar{\ell} + \ell/2)}}, \quad (1)$$

где $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число (λ — длина волны излучения), $\Gamma_\epsilon(0, 0, \ell)$ — корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости окружающей ионосферной плазмы, $\bar{\epsilon}(\bar{\ell})$ — лучевой профиль средней диэлектрической проницаемости ионосферы, $\ell_{\text{отр}}$ — длина пути вдоль луча до точки отражения радиоволны.

Для случая толстого слоя с неоднородностями, когда длина пути $\ell_{\text{отр}}$ много больше внешнего масштаба ℓ_0 ионосферной турбулентности, соотношение (1) можно записать в следующем приближенном виде

$$\overline{s^2} \simeq 2k_0^2 \Gamma_\epsilon(0, 0, 0) \ell_0 L_{\text{эфф}}(\ell_0), \quad (2)$$

¹Здесь и ниже, также как и в [3], анализ проводится для каждого луча отраженного многолучевого КВ сигнала отдельно.

где

$$\ell_0 = \frac{1}{\Gamma_\varepsilon(0, 0, 0)} \int_0^\infty \Gamma_\varepsilon(0, 0, \ell) d\ell \quad (3)$$

характерный продольный (вдоль направления распространения радиоволны) масштаб ионосферной турбулентности,

$$L_{\text{офФ}}(\ell_0) = \int_{\ell_0/2}^{\ell_{\text{отр}}} \frac{d\bar{\ell}}{\sqrt{\bar{\varepsilon}(\bar{\ell} - \ell_0/2)\bar{\varepsilon}(\bar{\ell} + \ell_0/2)}} \quad (4)$$

эффективная длина отражающей области ионосферы.

В случае линейного профиля ($\bar{\varepsilon}(\bar{\ell}) = 1 - \frac{\bar{\ell}}{L}$; L^{-1} — градиент средней диэлектрической проницаемости ионосферы в области отражения сигнала) (см. также [3]):

$$L_{\text{офФ}}(\ell_0) \simeq L \ln\left(\frac{4L}{\ell_0}\right). \quad (5)$$

В интересующем нас случае искусственной турбулентности плазмы, создаваемой при воздействии на ионосферу мощным КВ радиоизлучением, спектр искусственных неоднородностей имеет вид [5]

$$\Phi_N(\vec{\kappa}) = \Phi_N(\vec{\kappa}_\perp) \exp\left(-\frac{\kappa_\parallel^2 \ell_{0\parallel}^2}{4}\right), \quad (6)$$

где κ_\perp , κ_\parallel — волновые числа неоднородностей в ортогональной к магнитному полю Земли \vec{H}_0 плоскости и вдоль направления \vec{H}_0 соответственно; $\ell_{0\parallel} \simeq (5 \div 10)$ км — характерный продольный (вдоль направления \vec{H}_0) масштаб неоднородностей [5];

$$\Phi_N(\vec{\kappa}_\perp) = \left[1 + \left(\frac{\kappa_\perp \ell_{0\perp}}{2}\right)^2\right]^{-p/2}; \quad \ell_{0\perp} \simeq (1 \div 2) \text{ км} \quad (7)$$

характерный поперечный масштаб неоднородностей (см. также [3]).

Подставляя соотношение (6) в формулу (3) и проводя необходимые преобразования, несложно получить следующее простое соотношение:

$$\ell_{0\parallel} \geq \ell_0 \geq \ell_{0\perp}, \quad (7)$$

где левое равенство соответствует случаю распространения сигнала в области отражения вдоль направления \vec{H}_0 , правое — перпендикулярно направлению \vec{H}_0 .

Итак, средний квадрат флуктуаций фазы отраженного КВ сигнала при ВЗ искусственно модифицированной ионосферы можно оценить из следующего соотношения (см. (2), (5), (7)):

$$\overline{s_1^2} \simeq 2k_0^2 (\overline{\Delta\varepsilon})_{01}^2 \ell_0 L \ln\left(\frac{4L}{\ell_0}\right), \quad (8)$$

где $\overline{(\Delta\varepsilon_{01})^2} = \Gamma_\varepsilon(0, 0, 0) = \left(\frac{f_p}{f_1}\right)^4 \left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2$ — средний квадрат флуктуаций диэлектрической проницаемости ионосферы; f_p/f_1 — отношение плазменной частоты ионосферного слоя к частоте излучения; $\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2$ — средний квадрат относительных флуктуаций электронной концентрации неоднородностей.

В соотношении (8) единственным неизвестным параметром является величина относительных флуктуаций электронной концентрации. Она может быть определена из результатов синхронных наблюдений за амплитудными мерцаниями сигналов ИСЗ SIRIO во время эксперимента [5]. Индекс амплитудных флуктуаций составлял $S_{4A} \simeq 0, 2 \div 0, 3$ [5]. В соответствии с [7] такая же величина флуктуаций была присуща и фазовым вариациям принимаемого излучения ИСЗ, обусловленным искусственными неоднородностями с размерами $\ell_{\perp 1}$, меньшими масштаба зоны Френеля. Эта величина характеризуется средним квадратом флуктуаций фазы волны, для которого с учетом геометрии эксперимента [5] можно записать следующее выражение:

$$\overline{s_2^2} \simeq \frac{k_{02}^2}{2} (\overline{\Delta\varepsilon_{02}})^2 \ell_{0\parallel} L_H, \quad (9)$$

где k_{02} — волновое число для излучения с частотой сигнала ИСЗ $f_2 = 136$ МГц; $\overline{(\Delta\varepsilon_{02})^2} = \left(\frac{f_p}{f_2}\right)^4 \left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2$ — средний квадрат флуктуаций диэлектрической проницаемости ионосферного слоя на частоте f_2 ; L_H — толщина неоднородного слоя вдоль направления трансionoсферного распространения сигналов ИСЗ (в случае эксперимента [5] $L_H \simeq 3L \simeq 150$ км).

Подставляя в соотношение (9) все указанные выше значения входящих в него параметров, находим $\sqrt{\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2} \leq 5 \cdot 10^{-3}$. В свою очередь подставляя это значение в соотношение (8), с учетом других параметров, входящих в эту формулу, находим $30 \leq \overline{s_1^2} \leq 10^2$.

Таким образом, быстрые флуктуации фазы отраженных КВ сигналов во время искусственного F-spread в [5] были достаточно интенсивными. При этом должны были наблюдаться релеевские замирания для отдельных составляющих (лучей) в результирующем многолучевом КВ сигнале [3]. Но радиус частотной корреляции флуктуаций в отдельных

составляющих (лучах) отраженного КВ сигнала, по оценкам с использованием [3], был $\Delta f_{\text{кор}} \geq 25$ кГц, так что искажения отдельных импульсных КВ посылок станции ВЗ "Гиссар" ($\tau_{\text{и}} = 100$ мксек) за счет быстрых флуктуаций отраженных сигналов были незначительными. Искусственная многолучевость, наблюдавшаяся во время эксперимента [5], как и в условиях естественного среднеширотного F-spread [3], была обусловлена развитой крупномасштабной неоднородной структурой (искусственными неоднородностями с размерами в несколько единиц—десятков километров) ионосферной плазмы.

Итак, явление искусственного F-spread в ионосфере может быть описано как распространение коротких радиоволн в среде с крупномасштабными искусственными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Без учета поляризационных эффектов соответствующее волновое уравнение имеет вид (ср. [3])

$$\Delta E + k_0^2 [\bar{\epsilon}(\vec{r}, E_b(\vec{r})) + \Delta \epsilon(\vec{r}, E_b(\vec{r}))] E = 0, \quad (10)$$

где $E_b(\vec{r})$ — пространственное распределение поля волны накачки, определяющее изменения в структуре диэлектрической проницаемости ионосферы при нагреве ее мощным КВ радиоизлучением [8]. Как и в условиях естественного F-spread, распределение электронной концентрации модифицированной F-области ионосферы является случайным локально стационарным по пространству и времени процессом, допускающим многолучевое распространение коротких радиоволн (решение уравнения (10) в виде многолучевой структуры, см. также [3]). Принципиальное отличие явления искусственного F-spread определяется лишь спецификой как средних, так и флуктуационных характеристик диэлектрической проницаемости искусственно модифицированной ионосферы (см. (10) и выше).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-02-03716 РФФИ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Utlaut W. F., Cohen R. // Science. 1971. V. 174. № 4006. P. 245.
2. Kuo S. P., Lee M. C., Kuo S. C. // Radio Sci. 1985. V. 20. № 3. P. 546.
3. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1995. Т. 38. № 12. С. 1227.
4. Ерухимов Л. М., Митякова Э. Е. — В сб.: Динамика ионосферы. Ч. 3. Алма-Ата, 1991. С. 18.
5. Ерухимов Л. М. и др. // Геом. и аэронавигация. 1988. Т. 28. № 5. С. 745.
6. Денисов Н. Г., Ерухимов Л. М. // Геом. и аэронавигация. 1966. Т. 6. № 4. С. 695.

7. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. — М.: Наука, 1984.
8. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Нижний Новгород

Поступила в редакцию
20 июля 1995 г.

ON THE MODEL OF ARTIFICIAL F-SPREAD IN THE IONOSPHERE

V. A. Alimov, A. V. Rakhlin

The results of the complex experiment on synchronous observation of geostationary satellite signals and reflected HF-signals of an ionospheric vertical sounding station when modifying the ionosphere by powerful HF radiation have been analysed by the radio wave refraction scattering method. It has been shown that the main statements of the known stochastic theory of the F-spread phenomenon in the ionosphere can be utilized in construction of the artificial F-spread model. In particular, the artificial F-spread phenomenon can be described as multi-ray propagation of short radio waves in the ionosphere modified by a powerful radio emission where the electron density distribution is a random process locally-stationary in space and time.

УДК 621.371:551.510

О ВЛИЯНИИ ДЛИНЫ ВОЛНЫ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРИПОВЕРХНОСТНОГО ВОЛНОВОДА

Г. М. Стрелков

Приведены результаты численного анализа зависимости характеристик распространения узконаправленного радиопучка в приповерхностном волноводе, образовавшемся над спокойным морем, от длины волны излучения. Для интервала длин волн $0,8 \div 10$ см и вертикального профиля показателя преломления, близкого к реально наблюдаемым в атмосфере, найдены эффективность возбуждения волновода, понимаемая как приходящая на него доля текущей мощности пучка, и скорость потерь мощности волноводом, обусловленная эффектом дифракционного высвечивания.

Теоретическому изучению особенностей приземного распространения радиоволн, обусловленных образованием тропосферных волноводных структур, посвящены многочисленные публикации (см., например, [1–9]). Однако многие вопросы, имеющие принципиальное значение для формирования адекватных требований к вновь создаваемым системам связи и локации сантиметрового и миллиметрового диапазонов волн, до настоящего времени практически не изучены. К таким вопросам относится и взаимосвязь длины волны излучения и характеристик распространения радиоизлучения в тропосферных волноводах различных типов, протяжённость которых, например, в морских условиях составляет сотни километров [10]. Среди единичных публикаций на эту тему укажем на [2], где оценки декремента затухания излучения сантиметрового диапазона в приподнятом волноводе получены в рамках метода нормальных волн на основе вычисления нескольких первых корней дисперсионного уравнения. От длины волны λ зависят несколько параметров, влияющих на пространственное распределение поля в волноводе. Это коэффициент поглощения атмосферы α , диэлектрическая проницаемость поверхности $\tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon''$, дифракционная длина L_d и (или) угловая расходимость пучка $\Delta\theta$ и его частей. Если принять во внимание также и значительную изменчивость волноводных профилей показателя преломления атмосферы n (или $N = 10^6(n - 1)$), то постановка соответствующих исследований вполне оправдана.

В [11] (см. также [7]) предложен новый подход к анализу волноводного распространения радиоволн и на его основе найдены, в частности, характеристики процесса распространения узконаправленного радиопучка

в сильном приповерхностном волноводе. Показано, что варьирование высоты h и угла места φ излучателя может приводить к заметным изменениям мощности, захватываемой волноводной структурой. Одним из преимуществ подхода является возможность визуализации пространственного распределения излучаемой мощности. Его использование снимает необходимость отдельного рассмотрения случаев различного взаимного расположения передатчика, приёмника и волноводного слоя, что является характерным для имеющихся методов расчёта волноводного распространения. Ниже изложены некоторые результаты применения подхода [11] к анализу зависимости от λ характеристик распространения узконаправленного радиопучка в приповерхностном волноводе, образовавшемся над спокойным морем.

Постановка задачи и методика ее решения те же, что и в [11]. В диапазонах сантиметровых и миллиметровых волн всегда выполняется неравенство $a \gg \lambda$ (a — радиус излучающей апертуры), что позволяет говорить об узконаправленных радиопучках. Распространение пучка описывается параболическим уравнением для комплексной амплитуды поля E :

$$2in_0 \frac{\partial E'}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 E'}{\partial \bar{x}^2} + \left[2(ka)^2 [n(\bar{r}) - n_0] - iL_d(\lambda) [\alpha(\bar{r}, \lambda) - \alpha_0(\lambda)] \right] E'. \quad (1)$$

Здесь $E' = (E/E_0) \exp[i(ka)^2 n_0 \bar{z} + L_d(\lambda) \alpha_0(\lambda) \bar{z}/2]$, $E_0 = E(0, 0)$, $k = 2\pi/\lambda$, $\bar{z} = z/L_d$, z — направление распространения, $L_d = ka^2$, $\bar{x} = x/a$, x — поперечная координата, $\bar{r} = r/a$, r — высота над поверхностью, $\alpha(\bar{r}, \lambda) = \alpha_{\text{H}_2\text{O}}(\bar{r}, \lambda) + \alpha_{\text{O}_2}(\bar{r}, \lambda) = \alpha_{\text{H}_2\text{O}}(0, \lambda) \exp(-\bar{r}/1500) + \alpha_{\text{O}_2}(0, \lambda) \exp(-\bar{r}/5300)$, $\alpha_0(\lambda) = \alpha_{\text{H}_2\text{O}}(0, \lambda) + \alpha_{\text{O}_2}(0, \lambda)$, $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}(0, \lambda)$ и $\alpha_{\text{O}_2}(0, \lambda)$ — коэффициенты поглощения водяного пара [12] и кислорода [13] на уровне моря, $n_0 = n(0)$. Начало (т. О) прямоугольной системы координат (x, z) совмещено с центром передающей апертуры и находится на высоте h над поверхностью. Величина угла места задаётся соответствующим отклонением оси z от местной горизонтали. При $\bar{z} = 0$ задаётся гауссовское распределение поля по излучающей апертуре $E(\bar{x}, 0) = \exp(-\bar{x}^2/2)$, а на сферической земной поверхности задаётся импедансное граничное условие:

$$\left. \frac{\partial E'}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=0} = ika B(\lambda) E', \quad (2)$$

где $B = \sqrt{\bar{\epsilon}(\lambda)}$ и $1/\sqrt{\bar{\epsilon}(\lambda)}$ для горизонтальной и вертикальной поляризации поля E' соответственно.

В таблице приведены длины волн, для которых было получено решение (1), и значения зависящих от λ параметров задачи.

λ	ϵ'	ϵ''	L_d ($a=1$ м)	$\alpha_{\text{H}_2\text{O}}(0, \lambda)$	$\alpha_{\text{O}_2}(0, \lambda)$	$\alpha_0(\lambda)$	$\alpha_B(h=29 \text{ мм},$ $a=1 \text{ м}, \varphi=0^\circ)$
см	-	-	м	км ⁻¹	км ⁻¹	км ⁻¹	км ⁻¹
0,8	20,5	30,4	785,4	$2,31 \cdot 10^{-2}$	$1,14 \cdot 10^{-2}$	$3,45 \cdot 10^{-2}$	0
1	26,6	33,7	628,3	$3,04 \cdot 10^{-2}$	$5,83 \cdot 10^{-3}$	$3,62 \cdot 10^{-2}$	0
2	49,8	35,6	314,2	$1,52 \cdot 10^{-2}$	$2,50 \cdot 10^{-3}$	$1,77 \cdot 10^{-2}$	$1,44 \cdot 10^{-5}$
3	60,6	31,0	209,4	$4,00 \cdot 10^{-3}$	$2,12 \cdot 10^{-3}$	$6,12 \cdot 10^{-3}$	$4,44 \cdot 10^{-5}$
4	65,7	27,3	157,1	$1,96 \cdot 10^{-3}$	$1,99 \cdot 10^{-3}$	$3,95 \cdot 10^{-3}$	$2,37 \cdot 10^{-4}$
5	68,4	24,8	125,7	$1,18 \cdot 10^{-3}$	$1,93 \cdot 10^{-3}$	$3,12 \cdot 10^{-3}$	$4,95 \cdot 10^{-4}$
6	70,0	23,3	104,7	$7,98 \cdot 10^{-4}$	$1,89 \cdot 10^{-3}$	$2,69 \cdot 10^{-3}$	$5,30 \cdot 10^{-4}$
7	71,0	22,5	89,8	$5,76 \cdot 10^{-4}$	$1,86 \cdot 10^{-3}$	$2,44 \cdot 10^{-3}$	$8,02 \cdot 10^{-4}$
8	71,6	22,1	78,5	$4,36 \cdot 10^{-4}$	$1,84 \cdot 10^{-3}$	$2,27 \cdot 10^{-3}$	$1,42 \cdot 10^{-3}$
9	72,1	22,1	69,8	$3,42 \cdot 10^{-4}$	$1,81 \cdot 10^{-3}$	$2,16 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{-3}$
10	72,4	22,3	62,8	$2,76 \cdot 10^{-4}$	$1,79 \cdot 10^{-3}$	$2,07 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \cdot 10^{-3}$

Величины $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}(0, \lambda)$ и $\alpha_{\text{O}_2}(0, \lambda)$ рассчитаны для давления 760 мм рт.ст. и температуры воздуха 300 К, при которой плотность насыщенного водяного пара равна $26,4 \text{ г}\cdot\text{м}^{-3}$. Диэлектрическая проницаемость солёной воды находилась по [14] для температуры 300 К и солёности 0,2 г-моль/л или 11,6 г/л.

Модель приповерхностного волновода. Вертикальный профиль приведённого показателя преломления N , на котором основан выполненный анализ, дан на рис. 1 (пунктир — профиль $N(r)$ для стандартной радиоатмосферы, $dN/dr = \gamma = -0,04 N$ -ед./м). Аналитическое описание профиля приведено в [11]; в интервале высот от $h_1 = 30$ м до $h_2 = 41$ м вертикальный градиент показателя преломления равен $-2,666 N$ -ед./м, что отражает основную особенность волноводной структуры атмосферы, экспериментально зарегистрированный в [15]. В точках излома кривой $N(r)$ величины N равны: $N(0) = 320$; $N(30) = 327$; $N(41) = 297,7$ и $N(48) = 307$.

Пространственное распределение мощности радиопучка. На примере $\lambda = 10$ см, $a = 1$ м, $\varphi = 0^\circ$ и $h = 29$ м (излучатель находится у нижней границы слоя с $\gamma < 0$) рис. 2 иллюстрирует характер распределения поля в пределах волноводной структуры и над ней. Трём снижающимся уровням тушёвки отдельных областей рисунка отвечают значения нормализованной плотности потока мощности излучения $|E'|^2$, лежащие в пределах интервалов $(0 \div -9)$ дБ, $(-9 \div -18)$ дБ и $(-18 \div -27)$ дБ. Пунктирные горизонталы ограничивают интервал высот между h_1 и h_2 . Качественно приведённое распределение можно интерпретировать, представляя излучаемый пучок как совокупность лучевых трубок, расходя-

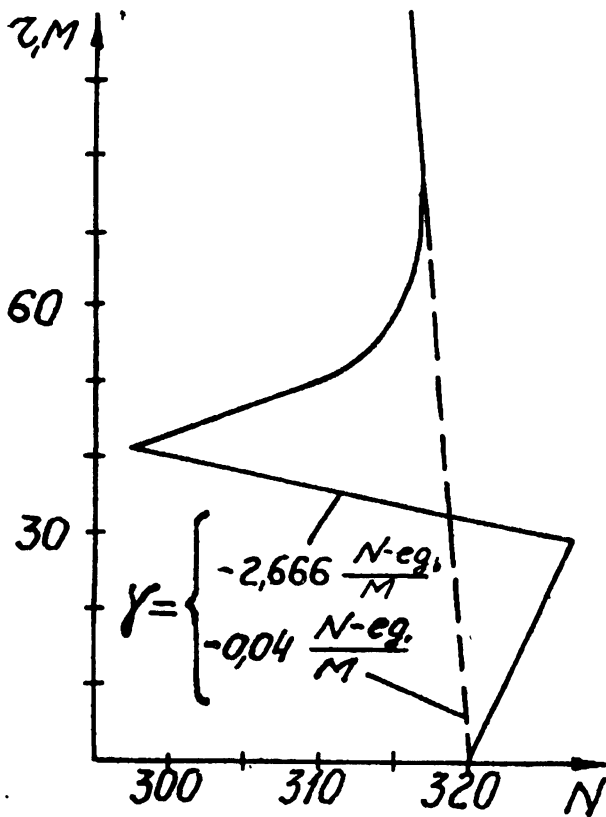


Рис. 1. Вертикальный профиль приведённого показателя преломления в приповерхностном волноводе.

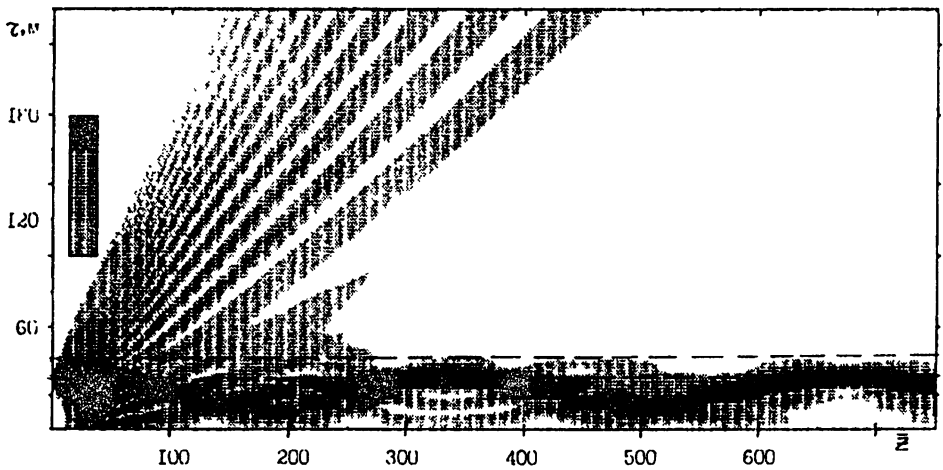


Рис. 2. Распределение нормализованной плотности потока мощности излучения $|E'|^2$ в приповерхностном волноводе и над ним ($\lambda = 10$ см).

щихся из т. О в пределах угла, равного характерному углу расходимости гауссовского пучка с диаметром $2a$, т.е. $\Delta\theta = \lambda/2a \simeq 172'$. Некоторая часть верхних лучевых трубок выходит из т. О под углами $\theta > 0$, достаточными для пересечения слоя с отрицательным γ . Ещё одна часть трубок, уже нижних, выходит из т. О под такими углами $\theta < 0$, что после отражения от поверхности они также пересекают слой с $\gamma < 0$. Вне пределов волновода происходит когерентное сложение полей, переносимых в двух совокупностях трубок. В результате, как оказывается, мощность, ушедшая из волновода, "расслаивается" по высоте и по трассе. Лучевые трубки, приходящиеся на центральную часть пучка, остаются в пределах волновода или, что то же самое, обеспечивают его возбуждение. Последующее медленное уменьшение удерживаемой волноводом мощности пучка в рамках рассматриваемой постановки задачи обусловлено эффектами атмосферного поглощения и дифракционного высвечивания. Приведённая интерпретация основана, конечно, на геометрикооптических представлениях. В методе нормальных волн, например, описанный процесс распространения мог бы быть интерпретирован как излучение в волновод бесконечного числа дифракционных, слабозатухающих и захватываемых модов [6, 8], причём первые из них связываются с быстрым уходом мощности из волновода и вторые — с дифракционным высвечиванием мощности. К сожалению, соответствующее аналитическое описание имеется лишь для простейших постановок задачи, в частности, включающих в качестве излучателя элементарный диполь (см. [1, 2, 4–6, 8, 9] и цитированные в них источники). Из сказанного выше следует, что с укорочением длины волны и при прочих равных условиях поле над волноводом должно ослабевать. Это подтверждает рис. 3, отличающийся от рис. 2 только величиной λ , равной теперь 4 см ($\Delta\theta = 69'$). Другой особенностью распределения $|E'|^2$ на рис. 3 является заметное уменьшение поля вблизи поверхности. При $\lambda < 1,5$ см пучок захватывается полностью и локализуется вблизи уровня h_1 (см. также [11]).

Эффективность возбуждения волнующего слоя. Детальный анализ распределений $|E'|^2$ показывает, что удерживаемая вблизи поверхности мощность неравномерно распределена между слоем с $\gamma < 0$ (часто называемым захватывающим слоем [5]) и находящимся ниже слоем с отрицательной рефракцией. При удалении от источника слои периодически обмениваются частью содержащейся в них мощности, что и является основной особенностью стационарного процесса распространения радиоволн в приповерхностном волноводе. Поэтому более последовательно трактовать интервал высот, включающий указанные слои, как единый волнующий слой. Количественно эффект удержания мощности излучения вблизи поверхности опишем аналогично [11], вычисляя эффективность возбуждения волнующего слоя

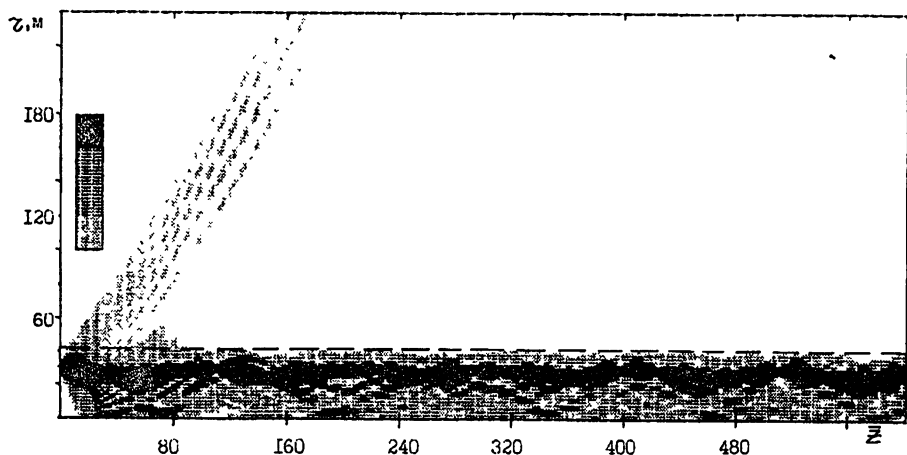


Рис. 3. Распределение нормализованной плотности потока мощности излучения $|E'|^2$ в приповерхностном волноводе и над ним ($\lambda = 4$ см).

$$\delta(z, \lambda) = \int_0^{h_2} |E'|^2 dr / \int_0^{\infty} |E'|^2 dr,$$

равную приходящейся на него доле текущей мощности пучка. Результаты соответствующих расчётов приведены на рис. 4. Кривые $\delta(z, \lambda)$ имеют по два участка с разной скоростью убывания, что отвечает двум разным механизмам потери мощности слоем. Вначале из слоя уходит мощность, приходящаяся на лучевые трубки в верхней и нижней частях пучка (см. выше), далее происходит медленное убывание захваченной мощности, обусловленное дифракционным высвечиванием. Представляет интерес сопоставить скорости убывания мощности в слое, вызываемые эффектом молекулярного поглощения и дифракционного высвечивания. По аналогии с законом Бугера участки относительного медленного убывания величин $\delta(z, \lambda)$ на рис. 4 аппроксимируем соотношением $\delta(z, \lambda) = \delta(z', \lambda) \exp[-\alpha_B(z - z')]$, где α_B — эффективный декремент затухания, обусловленный потерями мощности волноведущим слоем из-за дифракционного высвечивания. Величины α_B , найденные по результатам расчётов $\delta(z, \lambda)$, приведены в таблице. Как и следовало ожидать, величина α_B возрастает вместе с λ , а её обращение в нуль для $\lambda = 0,8$ см и 1 см означает, что пучки на этих длинах волн захватываются полностью. В интервале значений $\lambda = (2 \div 10)$ см зависимость α_B от λ приближённо аппроксимируется соотношением $\alpha_B(\lambda) = (\lambda/2)^3 \alpha_B(\lambda=2 \text{ см})$. Сопоставление величин α_B и $\alpha_0(\lambda)$ показывает, что только вблизи $\lambda = 10$ см они сравнимы и при этом весьма малы. С укорочением λ молекулярное поглощение превалирует.

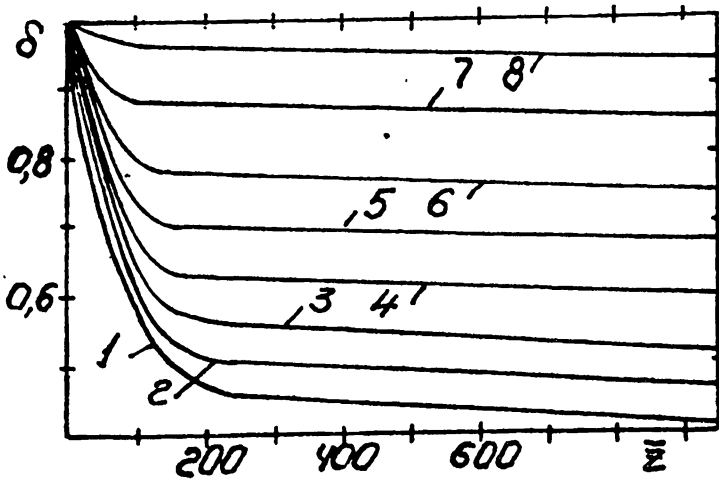


Рис. 4. Изменение по трассе эффективности возбуждения волнующего слоя ($a = 1$ м; $h = 29$ м; $\varphi = 0^\circ$;
 1 — $\lambda = 10$ см; 2 — $\lambda = 9$ см; 3 — $\lambda = 8$ см; 4 — $\lambda = 7$ см;
 5 — $\lambda = 6$ см; 6 — $\lambda = 5$ см; 7 — $\lambda = 4$ см; 8 — $\lambda = 3$ см.)

Рассеяние на турбулентных пульсациях показателя преломления атмосферы вызывает дополнительное ослабление излучения, распространяющегося в тропосферных волноводах [3, 6]. Полезно представлять соотношение между величиной декремента затухания α_p , связанного с этим механизмом, и величинами α_B и $\alpha_0(\lambda)$. Применительно к приповерхностным волноводам влияние турбулентности не изучалось, однако для сравнения по порядку величины можно воспользоваться оценками α_p для билинейного волновода испарения [16, 17], согласно которым

$$\alpha_p = 0,264k^{8/9}C_\varepsilon / [\varepsilon^{3/5}(2|\gamma|^{5/9})] \quad (3)$$

(C_ε и ε — структурная постоянная и параметр анизотропии флуктуаций диэлектрической проницаемости атмосферы). Для $\varepsilon = 0,1$ [6], $C_\varepsilon = 0,36$ (N-ед.) $^2 \cdot \text{см}^{-2/3}$ [17] и $\gamma = -2,666$ N-ед./м из (3) получаем $\alpha_p(\lambda=10 \text{ см}) = 3,21 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$ и $\alpha_p(\lambda=0,8 \text{ см}) = 3,03 \cdot 10^{-2} \text{ км}^{-1}$, что близко к соответствующим величинам $\alpha_0(\lambda)$.

Выводы. Численный анализ, результаты которого приведены в работе, выполнен для выяснения вопроса об особенностях процесса распространения узконаправленного пучка сантиметрового диапазона волн в приповерхностном волноводе, обусловленных длиной волны излучения. Для вертикального профиля показателя преломления, близкого для реально наблюдаемых в атмосфере, и излучателя, расположенного в пределах волновода, в работе получены пространственные распределения излучаемой мощности. Из них следует, что на начальном участке трассы можно ожи-

дать разделения пучка на две части, причём одна из них остаётся в волноводе, а другая его покидает. Варьирование λ в пределах рассмотренного диапазона значений (и при прочих равных условиях) значительно изменяет как пространственные структуры поля в обеих частях пучка, так и распределение между ними излучаемой мощности. При этом скорость потерь мощности волноводом, обусловленная эффектом дифракционного высвечивания, может изменяться на порядки величины.

Автор благодарит Деркача А. Ю. и Санталова Н. П. за помощь при проведении расчётов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. // Радиотехника и электроника, 1956. Т. 1. № 5. С. 560.
2. Wait J. R., Spies K. P. // Radio Sci., 1969. V. 4. № 4. P. 319.
3. Каневский М. Б. // Изв. вузов. Радиофизика, 1975. Т. 18. № 3. С. 447.
4. Биргер Е. С., Конюхова Н. Б. // Радиотехника и электроника, 1969. Т. 14. № 7. С. 1147.
5. Hitney H. V., Richter J. H., Pappert R. A., Anderson K. D., Baumgartner G. B. // Proc. IEEE, 1985. V. 73. № 2. P. 265.
6. Кукушкин А. В., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1987. Т. 30. № 7. С. 811.
7. Стрелков Г. М., Тагер Е. А. Распространение радиоволн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. / Сб. научных трудов. — Харьков: ИРЭ АН УССР, 1989. С. 45.
8. Ishihara T., Felsen L. B. // IEEE Trans. on Ant. Propagat., 1991. V. 39. № 6. P. 780–788; 789–797.
9. Саликов С. П., Шейпук И. Н. // Радиотехника и электроника, 1991. Т. 36. № 6. С. 1214.
10. Глушенкова А. А., Слуцкий В. И. — Сб.: XIV Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. Тез. докладов. — М.: Наука, 1984. Ч. 2. С. 81.
11. Стрелков Г. М., Санталов Н. П. // Изв. вузов. Радиофизика, 1995. Т. 38. № 6. С. 493.
12. Борин В. П., Наумов А. П. // Радиотехника и электроника, 1979. Т. 24. № 1. С. 44.
13. Liebe H. J., Gimmestad G. G., Hopponen J. D. // IEEE Trans. on Ant. Propagat., 1977. V. AP-25. № 3. P. 327.
14. Stogyn A. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, 1971. V. MTT-19. № 8. P. 733.
15. Cartwright N. E., Tattersall R. L. O. // Electron. Letts., 1977. V. 13. № 7. P. 208.

16. Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1981. Т. 24. № 4. С. 408.
17. Иванов В. К., Лановой В. Н., Фрейлихер В. Д. // Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 32. № 3. С. 255.

Институт радиотехники
и электроники РАН, г. Фрязино,
Москва

Поступила в редакцию
26 апреля 1994 г.

ON THE INFLUENCE OF RADIATION WAVELENGTH ON THE EXCITATION EFFICIENCY OF NEAR-SURFACE WAVEGUIDE

G. M. Strelkov

The results of numerical analysis of a dependence of narrow radiobeam propagation characteristics on the wavelength in a near-surface waveguide formed over a calm sea are presented. For the wavelength values within interval $0.8 \div 10$ cm and a vertical profile of refraction index close to a real atmospheric one there has been found the excitation efficiency determined as a trapped beam power fraction and the waveguide transmission loss rate due to the effect of diffraction de-excitation. The latter is increased as λ^3 .

УДК 533.9

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХЗВУКОВОЙ МГД-СТРУИ

А. В. Хоперсков

В рамках линейной теории исследована устойчивость плоской симметричной сверхзвуковой МГД-струи. Помимо известных неустойчивых ветвей колебаний, связанных с быстрыми магнитоакустическими волнами, получены неустойчивые решения для медленных магнитоакустических волн (ММВ). Численно получены решения дисперсионного уравнения при различных параметрах модели. Обсуждаются условия стабилизации неустойчивости ММВ.

Введение. Возможность отражения звуковых волн от существенно сверхзвукового тангенциального разрыва скорости (ТР) с усилением по амплитуде (эффект сверхотражения) была продемонстрирована в работах [1, 2]. За счёт этого эффекта в модели плоской струи может развиваться неустойчивость типа акустического резонанса. Линейный анализ устойчивости и численное нелинейное газодинамическое моделирование сверхзвуковых струй находится в согласии с экспериментальными данными и, в частности, позволяют понять некоторые свойства наблюдаемой структуры астрофизических струй — галактических и звёздных джетов [3]. Исследованию механизмов усиления амплитуды волн при наличии областей резкого изменения параметров сверхзвукового течения посвящено большое количество работ [4–7]. Эффект сверхотражения для ТР при наличии магнитного поля исследовался в работе [8]. В целом структура известных неустойчивых гармоник в плоской струе при включении в рассмотрение магнитного поля качественно не меняется. Неустойчивые гармоники классифицируют на симметричные (S -) моды (изгибные колебания) и антисимметричные (AS -) моды (пинч-колебания) (см. рис. 1). Наряду с двумя фундаментальными гармониками имеется произвольное число отражательных гармоник, число которых увеличивается с ростом продольного волнового числа k и числа Маха M . Неустойчивыми являются быстрые магнитозвуковые ветви [9, 10]. Данные неустойчивые гармоники являются коротковолновыми (поперечное волновое число $\varkappa \gtrsim 1/h$, $\varkappa \propto k$, h — полутолщина струи) и каждая из отражательных гармоник стабилизируется при $k = k_s$, а в области $k < k_s$ две нейтральные ветви стремятся к значениям $\omega = \vec{k}\vec{u} \pm \omega_1$ (ω_1 и ω_2 — соответственно частоты быстрых (БМВ) и медленных (ММВ) магнитозвуковых волн в

однородной среде). Поскольку всегда выполняется условие $\omega_1 \geq \omega_2$, то решение, соответствующее знаку "+", должно пересекать ветвь ММВ (см. рис. 1а). Плотность потока энергии у этих ветвей колебаний имеет равный знак, поэтому в области пересечения должна возникать новая область с комплексно-сопряжёнными решениями, одно из которых с $\text{Im}(\omega)$ даёт неустойчивость.

В данной заметке продемонстрируем возможность развития неустойчивости в МГД-струе, обусловленной наличием медленных магнитозвуковых ветвей колебаний. Рассмотрим как данная неустойчивость зависит от параметров модели. Особо обсудим ситуации, когда происходит стабилизация основной неустойчивости на быстрых магнитозвуковых волнах, но ММВ остаются неустойчивыми.

Модель. Пусть идеальное равновесное МГД-течение однородно по x и y координатам, а неоднородность равновесных параметров имеется только вдоль z -координаты. В линейном приближении для возмущений вида $\propto f(z) \cdot \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y)$ амплитуды возмущённых полного давления $P_1(z)$ (с учётом магнитного давления и газодинамического давления p) и смещения среды в z направлении $\xi(z)$ описываются уравнениями

$$\frac{dP_1}{dz} = \rho(\hat{\omega}^2 - \Omega^2)\xi, \quad (1)$$

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{\hat{\omega}^2 - \Omega^2} \left\{ k^2 - \frac{\hat{\omega}^4}{\hat{\omega}^2(c^2 + V^2) - c^2\Omega^2} \right\} \frac{P_1}{\rho}, \quad (2)$$

где $\Omega^2 = (\vec{k}\vec{B})^2/(4\pi\rho)$, $V^2 = B^2/(4\pi\rho)$, $\hat{\omega} = \omega - \vec{k}\vec{u}$, $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ — адиабатическая скорость звука, γ — показатель адиабаты. Условие стационарного баланса равновесных давлений накладывает связь

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const}. \quad (3)$$

Рассмотрим два плоскопараллельных тангенциальных разрыва МГД-среды, расположенных в плоскости xy и находящихся на расстоянии $2h$ друг от друга. Будем считать, что внутренний слой покоится, а внешние движутся со скоростью $\vec{u} = u\vec{e}_x$. На ТР могут терпеть скачки равновесные параметры системы (плотность вещества ρ , адиабатическая скорость звука c , магнитное поле $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y$, газодинамическое давление p , индексы "ex" и "in" будем относить соответственно к внешним и внутренней областям). Условие (3) удобно записать в виде

$$s = \frac{c_{\text{in}}^2}{c_{\text{ex}}^2} = \frac{2R}{2 + \gamma(a_{\text{in}}^2 - Ra_{\text{ex}}^2)}, \quad (4)$$

где введены безразмерные параметры $R = \frac{\rho_{ex}}{\rho_{in}}$, $a_{in,ex} = \frac{B_{in,ex}}{\sqrt{4\pi\rho_{in,ex}c_{in}}}$. Решения системы (1), (2) во внутренней области $-h < z < h$ ищем в виде $\alpha D_1 \exp(\alpha_{in}z) + D_2 \exp(-\alpha_{in}z)$, а во внешних — $\exp(-\alpha_{ex}|z|)$. Условие невозрастания амплитуды возмущений при $z \rightarrow \pm\infty$ накладывает на поперечное волновое число требование $\text{Re}(\alpha_{ex}) > 0$.

Условие непрерывности решений уравнений (1), (2) на ГР приводит к дисперсионному уравнению

$$\text{th}(2kh\beta_{in}) = -2 \frac{Z_{in}Z_{ex}}{Z_{in}^2 + Z_{ex}^2}, \quad (5)$$

где $Z_{in} = \frac{W^2 - A_{in}^2}{W\beta_{in}}$, $Z_{ex} = R \frac{(W - M)^2 - A_{ex}^2}{W\beta_{ex}}$ — импедансы соответствующей среды, $W = \frac{\omega}{kc_{in}}$ — безразмерная частота, $\beta_{in}^2 = \frac{\alpha_{in}^2}{k^2} = 1 - \frac{W^4}{W^2(1 + a_{in}^2) - A_{in}^2}$, $\beta_{ex}^2 = \frac{\alpha_{ex}^2}{k^2} = 1 - \frac{s(W - M)^4}{(W - M)^2(1 + sa_{ex}^2) - A_{ex}^2}$, $A_{in,ex} = \frac{\vec{k}\vec{B}_{in,ex}}{\sqrt{4\pi\rho_{in,ex}kc_{in}}}$, $M = \frac{\vec{k}\vec{u}}{kc_{in}}$ — эффективное число Маха.

В (5) должны выполняться условия $\text{Re}(\beta_{in,ex}) \geq 0$. Все зависимости, представленные ниже на рисунках, получены в результате численного решения уравнения (5).

Типы колебаний. В модели плоской струи малые возмущения неустойчивы для любого волнового числа k . В случае существенно сверхзвукового течения ($M > 2$) может возбуждаться любое (в зависимости от значений k и M) число неустойчивых гармоник. Эти гармоники отличаются друг от друга значениями волновых чисел в z -направлении $\alpha = k\beta$. Выделяют симметричную (или изгибную) моду, для которой возмущённое давление в среднем слое является чётной функцией, и антисимметричную (AS -) или пинч-моду. В зависимости от числа узлов функции возмущённого давления между разрывами η гармоники возмущений принято подразделять на фундаментальные ($\eta = 0$ для S -моды и $\eta = 1$ для AS -моды) и отражательные ($\eta \geq 2$). При этом $\eta = 2n$ для S -моды, $\eta = 2n + 1$ для AS -моды, где n — номер гармоники. На рис. 1 (а, б) показана общая структура собственных частот системы с параметрами $M = 5$, $a_{ex} = 1$, $a_{in} = 0,5$, $A_{ex} = 0,9$, $A_{in} = 0,5$, $s = 1$. Цифры на рисунке указывают номер гармоники.

Неустойчивость фундаментальных гармоник ($\eta = 0, 1$) имеет место и в слабосжимаемой среде ($M \ll 1$), её называют неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца [11]. Для несжимаемой МГД-жидкости в случае одиноч-

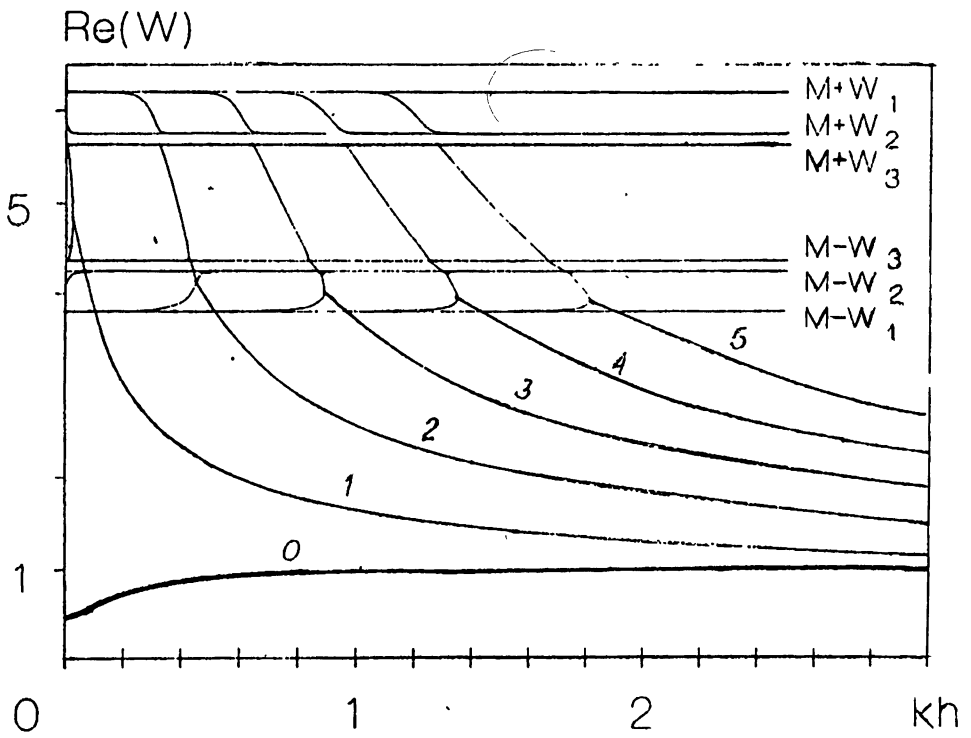


Рис. 1а.

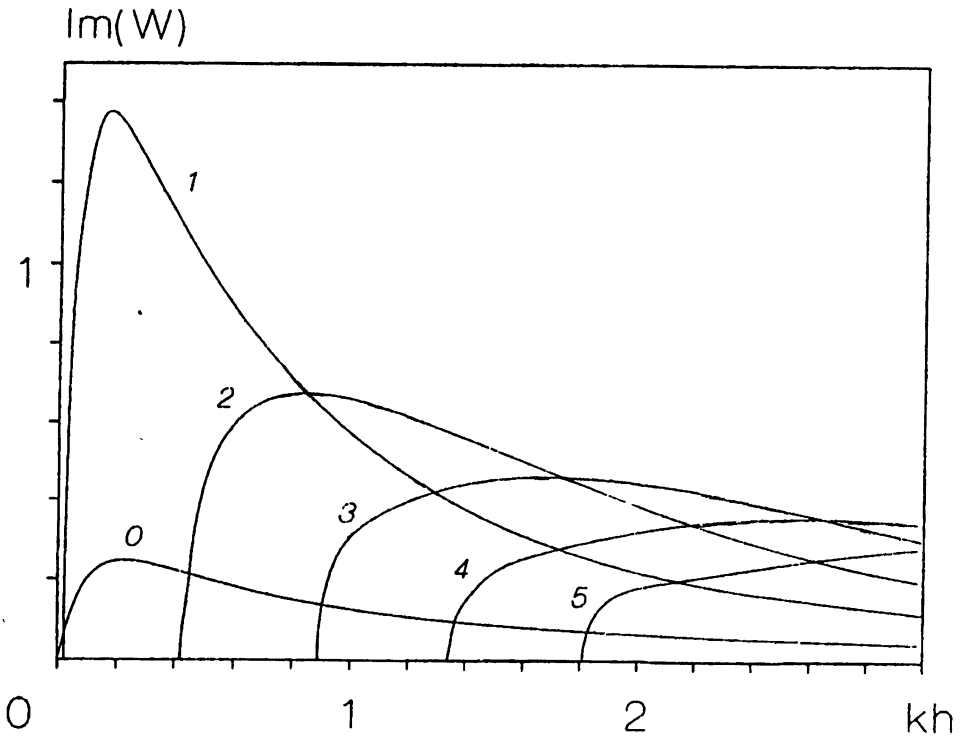


Рис. 1 б.

ного ТР хорошо известно условие устойчивости [12]

$$[\vec{B}_{in} \times \vec{B}_{ex}]^2 \geq \frac{4\pi\rho_{ex}}{1+R} \{ [\vec{B}_{ex} \times \vec{u}]^2 + [\vec{B}_{in} \times \vec{u}]^2 \}, \quad Ra_{ex}^2 + a_{in}^2 > \frac{R}{1+R} \frac{u^2}{c^2}.$$

С увеличением эффективного числа Маха M при фиксированных значениях других параметров происходит стабилизация. Этот эффект аналогичен известному для случая без магнитного поля, когда при $u < 2\sqrt{2}c$ неустойчивы возмущения с произвольной ориентацией вектора \vec{k} , а при $u > 2\sqrt{2}c$ неустойчивыми остаются лишь возмущения с $\vec{k}\vec{u} < 2\sqrt{2}ck$. В струе, для которой простейшей моделью являются два плоскопараллельных тангенциальных разрыва скорости, фундаментальные моды остаются неустойчивыми и при $M \gg 1$ вследствие эффекта сверхотражения.

Устойчивость фундаментальных мод МГД-струи чрезвычайно сильно зависит от взаимной ориентации векторов \vec{k} , \vec{B}_{ex} , \vec{B}_{in} , \vec{u} . В качестве примера на рис. 2 приведена зависимость $\text{Im } W(a_{ex})$ при $M = 1/2$, $kh = 1$, $s = 1$ (кривые: 1 — $A_{in} = a_{in} = A_{ex} = 0$; 2 — $A_{in} = a_{in} = 0$, $A_{ex} = 0,5a_{ex}$; 3 — $A_{in} = a_{in} = 0$, $A_{ex} = a_{ex}$; 4 — $a_{in} = 1$, $A_{in} = 0$, $A_{ex} = 0$; 5 — $a_{in} = 1$, $A_{in} = 0$, $A_{ex} = 0,1a_{ex}$). Магнитное поле не стабилизирует возмущения, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю ($A_{ex} = A_{in} = 0$). Наличие продольной компоненты является стабилизирующим фактором.

$\text{Im}(W)$

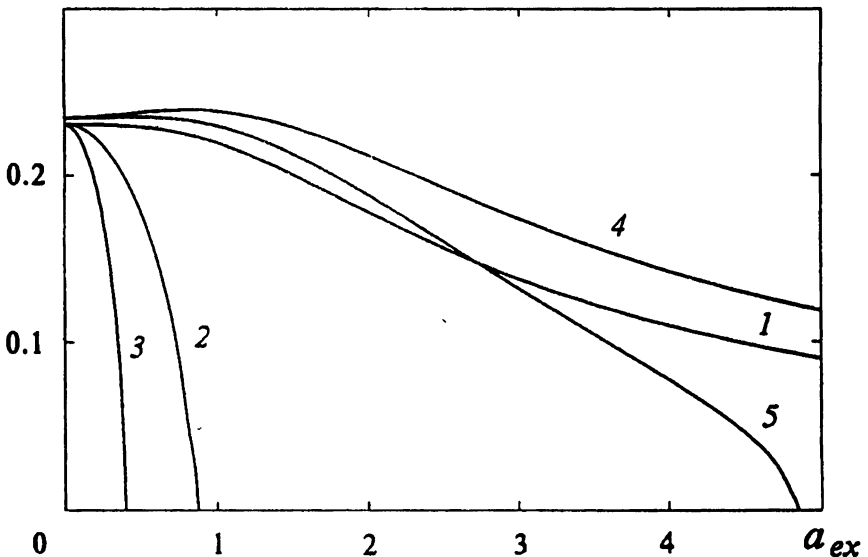


Рис. 2.

Причиной раскочки отражательных гармоник ($\eta \geq 2$), в первую очередь, является резонансное взаимодействие *быстрых магнитозвуковых волн* с потоком. Данные неустойчивые гармоники достаточно подробно

исследованы [9, 10]. Отметим их стабильностью при достаточно больших значениях внешнего магнитного поля, когда при $s \sim 1$ из (4) имеем большой перепад плотности $R \ll 1$ [10]. Данную неустойчивость будем условно называть неустойчивостью БМВ.

Неустойчивость медленных магнитозвуковых волн. Законы дисперсии БМВ и ММВ для однородной среды с параметрами внешних областей струи даёт условие $Z_{ex} = 0$, из которого следует

$$W_{1,2}^2 = \frac{1 + sa_{ex}^2 \pm \sqrt{(1 + sa_{ex}^2)^2 - 4A_{ex}^2 s}}{2s}, \quad (6)$$

где для частоты БМВ W_1 необходимо брать знак "+", для частоты ММВ W_2 — знак "-". Уравнение (5) инвариантно относительно замены $Z \rightarrow 1/Z$ и имеется еще одна характерная частота W_3 , для которой $1/Z_{ex} = 0$, и

$$W_3 = \frac{A_{ex}}{\sqrt{1 + sa_{ex}^2}}. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что выполняется $W_1 \geq W_2 \geq W_3$. Каждая из отражательных гармоник стабилизируется при некотором значении волнового числа k_s , а при $k < k_s$ расщепляется на две нейтральные ветви (см. рис. 1а). Более низкочастотная гармоника имеет асимптотику $M - W_1$, а другая стремится к $M + W_1$. Однако на этом пути последняя должна пересечь медленную магнитозвуковую ветвь $M - W_2$. Поскольку плотность потока энергии этих ветвей имеет разный знак, то ветви взаимодействуют друг с другом с возникновением неустойчивости. Для низших гармоник стабилизация БМВ может происходить при значениях k_s , при которых $W(k_s) > M - W_3$, и, в этом случае, неустойчивость ММВ для данной гармоника не возникает (см. на рис. 1 вторую гармонику). Поскольку неустойчивая область длин волн является узкой, а инкременты малы $\text{Im}(W) \ll 1$, то можно приближённо определить её, положив в (5) $W = W_0 = M - W_2$. В результате имеем для волнового числа

$$kh \simeq \frac{\pi}{2} \frac{n}{2|\beta_{in}(W_0)|}. \quad (8)$$

Численные расчёты показывают, что в точке kh , определяемой (8), величина инкремента с хорошей точностью достигает своего максимального значения. На рис. 3 в крупном масштабе показаны области взаимодействия ветвей колебаний, где $\text{Im}(W) > 0$ (тонкими линиями показаны инкременты, параметры модели тождественны принятым для рис. 1). Значение W_3 является особым и оно обходится выходом в комплексную плоскость, поэтому ширина неустойчивой области зависит от ширины запрещённой для нейтральных колебаний зоны $\Delta W = W_2 - W_3$. Макси-

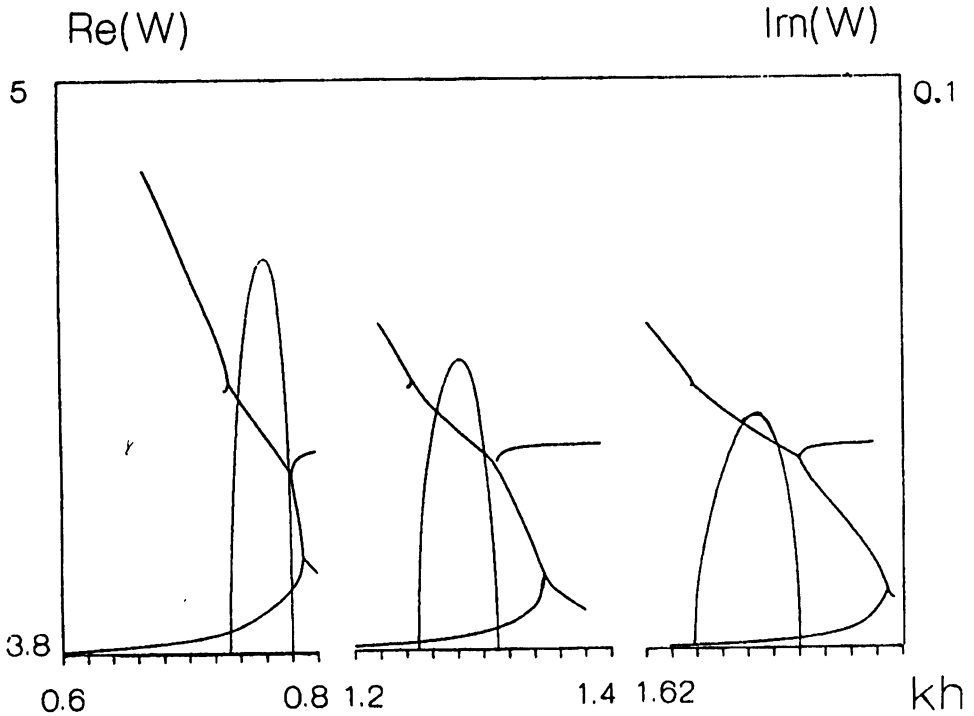


Рис. 3.

малые значения инкрементов для определённой гармоники пропорциональны ширине зоны ΔW . После перехода через указанную запрещённую область происходит стабилизация с расщеплением на две вещественные ветви колебаний (см. рис. 3). С дальнейшим уменьшением волнового числа k одна из ветвей приближается к ММВ с частотой $W = M + W_2$, однако поскольку плотность потока энергии у этих решений одного знака, то неустойчивость не возникает.

В коротковолновом пределе ($kh \gg 1$) ветви, соответствующие корням $W = M + W_1$, стремятся к значению частоты быстрых магнитозвуковых волн для среднего слоя

$$W_4 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + a_{in}^2 + \sqrt{(1 + a_{in}^2)^2 - 4A_{in}^2} \right\}. \quad (9)$$

Поэтому при выполнении условия

$$M > W_2 + W_4 \quad (10)$$

всегда существует диапазон неустойчивых длин волн. Критерий (10) является более мягким по сравнению с условием неустойчивости БМВ (инкременты показаны на рис. 1 б), для которых необходимо $M > W_1 + W_4 > 2$. Действительно, поскольку из (6) следует $0 < W_2$, а

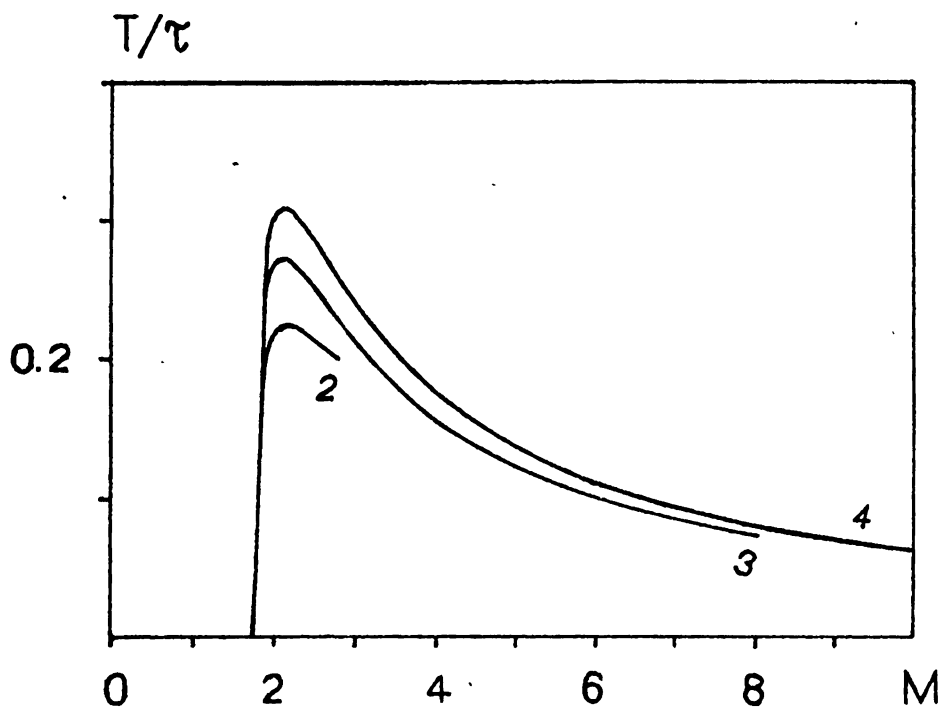


Рис. 4.

из (8) $W_4 \geq 1$, то при определённых соотношениях параметров неустойчивость может иметь место при $1 < M < 2$.

Обсудим зависимость инкрементов от числа Маха. Характерное время нарастания возмущений для каждой из гармоник $\tau = 1/\max\{\text{Im}(\omega)\}$ удобно нормировать на величину T — время прохождения звуковой волны расстояния $2h$ ($T = 2h/c_{in}$). На рис. 4 показано типичное поведение величины $T/\tau = \max(\text{Im } W)2kh$ от числа Маха для различных гармоник при параметрах системы, аналогичных рис. 1, 3. Отметим, что для условий рис. 1, 3, 4 скорость распространения быстрой магнитозвуковой волны во внутреннем слое равна c_{in} . Цифрами отмечены первые три отражательные гармоники. Возмущения стабилизируются при малых числах Маха в соответствии с (10). С ростом M для каждой гармоники зависимость инкремента от числа Маха обрывается. Этот эффект связан с тем, что область неустойчивости БМВ с ростом M захватывает всё более длинноволновые возмущения. Величина k_z уменьшается так, что в запрещённой области частот $M - W_2 < W < M - W_3$ мнимая часть частоты обусловлена раскачкой БМВ (см. на рис. 1а гармонику 2).

Представляет интерес область значений параметров, при которых неустойчивость БМВ стабилизируется, однако неустойчивость ММВ остаётся. Помимо упомянутого выше случая малых чисел Маха ($1 < M < 2$) имеется другая возможность, связанная с эффектом стабилизации отра-

жательных гармоник БМВ при $a_{in} \lesssim 1$, $s \sim 1$, $R \lesssim 1/M^2 \ll 1$, для чего в соответствии с (4) необходимо $a_{ex}^2 \gtrsim 1/R$. При достаточно большом внешнем магнитном поле выполняется $M - W_1 < W_4$, и неустойчивость БМВ исчезает, однако при этом, условие (10) может оставаться справедливым и раскочка возмущений, связанных с ММВ остаётся. Отметим, что поскольку эффективное число Маха $M = \vec{k}\vec{u}/(kc_{in})$, то для данной длины волны $\lambda = 2\pi/k$ всегда существует направление распространения возмущений в сверхзвуковой струе, при которой выполняется $1 < M < 2$.

В заключение автор благодарит В. В. Мусцевого за полезные обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miles J. W. // J. Acoustic. Soc. Amer., 1957. V. 29. № 2. P. 226.
2. Ribner H. S. // J. Acoustic. Soc. Amer., 1957. V. 29. № 4. P. 435.
3. Численное моделирование в астрофизике / Под ред. Сентрелла Дж., Лебланка Дж., Бауэrsa Р. — М.: Мир, 1988. С. 95.
4. Островский Л. А., Рыбак С. А., Цимринг Л. Ш. // Усп. физ. наук, 1986. Т. 150. № 3. С. 417.
5. Фабрикант А. Л. // Изв. вузов. Радиофизика, 1987. Т. 30. № 2. С. 275.
6. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989.
7. Морозов А. Г., Мусцевой В. В. // Мех. жидк. и газов, 1991. № 3. С. 3.
8. Acheson D. J. // J. Fluid Mech., 1967. V. 77. P. 433.
9. Ferrari A., Massaglia S., Trussoni E. // Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 1982. V. 198. P. 1065.
10. Hoperskov A. V., Mustsevoj V. V., Mustsevaya Yu. V. // Astr. and Space Science, 1992. V. 195. P. 373.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.

Волгоградский государственный
университет

Поступила в редакцию
5 октября 1994 г.

ON THE STABILITY OF A SUPERSONIC MHD-JET*A. V. Hoperskov*

The stability of a flat symmetric supersonic MHD-jet is investigated in the frame of the linear theory. The unstable solutions for the slow magnetic acoustic wave (SMAW) have been obtained in addition to the usual oscillation instabilities associated with the fast magnetic acoustic waves. The dispersion equation has been solved numerically for the different parameters of the model. The conditions of the stabilization of the SMAW instability are discussed.

ТРОЙНИКИ НА ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

В. Н. Почерняев

Аналитически решена задача об определении внешних параметров T -образных E - и H -тройников на частично заполненных прямоугольных волноводах. Решение проверено на частном случае для E - и H -тройников на полых прямоугольных волноводах и сопоставлено с известным, полученным численным методом. Результаты расчета имеют хорошее совпадение. Приводятся численные результаты для тройников на частично заполненных прямоугольных волноводах.

Волноводные тройники широко применяются в технике СВЧ в качестве устройств сложения или разделения двух сигналов одной частоты и одной поляризации, элементов антенных переключателей, загораживающих фильтров и поляризационных селекторов. При решении многих практических радиофизических задач целесообразным является применение частично заполненных прямоугольных волноводов (ЧЗПВ), работающих на основной волне квази- H_{10} . Целью работы является определение внешних параметров T -образных E - и H -тройников на ЧЗПВ для общего случая, когда диэлектрик не касается стенок волновода.

Рассмотрим H -тройник на ЧЗПВ (рис. 1), согласованный с обоих боковых плеч. Коэффициент отражения в сечении условной границы на основании [1] следующий:

$$S_0 = \left(2/(1 + \tilde{y})\right) - 1, \quad \tilde{y} = Y^{H(E)}/Y_0, \quad (1)$$

где Y^H — проводимость со стороны основного волновода (H -плечо считаем отрезком вспомогательного волновода); Y_0 — характеристическая проводимость волны квази- H_{10} .

Формула для определения проводимости Y^H имеет следующий вид:

$$Y^H = - \sum_m Y_m \left[(\alpha_m^2 + \gamma_m^2) / \gamma_m^2 \right] \int_S \bar{\Theta}_H \bar{\epsilon}_m dS, \quad (2)$$

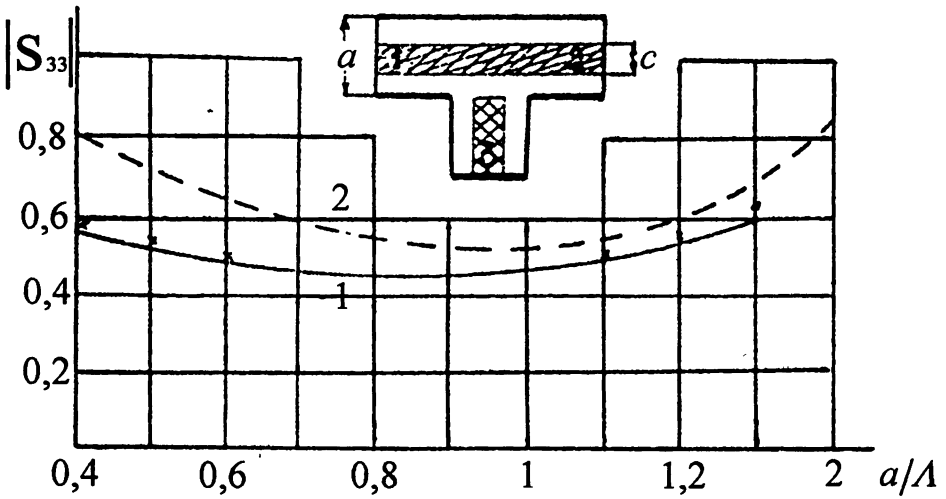


Рис. 1.

где S — площадь поперечного сечения ЧЗПВ, являющегося отверстием связи; m — индекс суммирования по волнам типа квази- H_{m0} ($m = 1$ соответствует волне квази- H_{10}); \bar{E}_H — координатная функция; $\bar{E}, \alpha_m, \gamma_m, Y_m$ — собственная векторная функция, поперечное волновое число, постоянная распространения, характеристическая проводимость соответствующей волны типа квази- H_{m0} . В отличие от H -тройника на полых прямоугольных волноводах интегрирование в (2) ведется по обеим координатам, т. к. поле волны квази- H_{10} имеет зависимость по двум координатам.

Координатная функция, аппроксимирующая электрическое поле на условной границе, представляет собой сумму поперечных электрических собственных векторных функций ЧЗПВ. Поскольку рассматриваемое соединение имеет отверстие, совпадающее с поперечным сечением вспомогательного волновода (H -плеча), то в качестве координатной функции выберем сумму поперечных электрических собственных векторных функций ЧЗПВ для волн квази- H_{10} и квази- H_{30} .

Поперечные электрические собственные векторные функции ЧЗПВ выражаются через функции Матье [2]:

$$\bar{E}_{hmn} = N_{hmn} Ce_m(q, \xi) Ce_n(p, \eta),$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{emn} = N_{emn} \text{Se}_m(q, \xi) \text{Se}_n(p, \eta),$$

где N_{hmn} , N_{emn} — нормирующие множители; Ce_m , Ce_n , Se_m , Se_n — четные и нечетные функции Матье.

Функции Матье могут быть представлены в виде рядов по тригонометрическим функциям, сходимость которых исследована в [3]. Достаточная для практики точность вычислений может быть получена при выполнении условия $q^2/2(m^2 - 1) \ll m^2$ ($p^2/2(n^2 - 1) \ll n^2$). Это условие выполняется для ЧЗПВ с $\varepsilon_r \lesssim 10$ (ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрической пластины) при небольших заполнениях.

Запишем собственные векторные функции для волн квази- H_{m0} в развернутом виде, используемом в вычислительном алгоритме:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{h10} = & (M_1/\varepsilon_{h10}) \left[(p\tau \cos \delta x \sin 2\tau y - (qp\tau/8) \cos \delta x \sin 2\tau y) \bar{x}^0 + \right. \\ & + (\delta \sin \delta x - (p\delta/2) \sin \delta x \cos 2\tau y - \\ & \left. - (3q\delta/8) \sin 3\delta x + (3qp\delta/16) \sin 3\delta x \cos 2\tau y) \bar{y}^0 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{h20} = & (M_1/\varepsilon_{h20}) \left[(p\tau \cos 2\delta x \sin 2\tau y - (qp\tau/8) Q_1 \sin 2\tau y) \bar{x}^0 + \right. \\ & + (2\delta \sin 2\delta x - p\delta \sin 2\delta x \cos 2\tau y - (q\delta/3) \sin 4\delta x + \\ & \left. + (qp\delta/6) \sin 4\delta x \cos 2\tau y) \bar{y}^0 \right], \end{aligned}$$

$$Q_1 = \frac{2}{3} \cos 4\delta x - 2,$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{h30} = & (M_1/\varepsilon_{h30}) \left[(p\tau \cos 3\delta x \sin 2\tau y - (qp\tau/16) Q_2 \sin 2\tau y) \bar{x}^0 + \right. \\ & + (3\delta \sin 3\delta x - (3p\delta/2) \sin 3\delta x \cos 2\tau y - (q\delta/8) Q_3 + \\ & \left. + (qp\delta/16) Q_3 \cos 2\tau y) \bar{y}^0 \right], \end{aligned}$$

$$Q_2 = \cos 5\delta x - 2 \cos \delta x, \quad Q_3 = \frac{5}{2} \sin 5\delta x - \sin \delta x,$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{h40} = & (M_1/\varkappa_{h40}) \left[(p\tau \cos 4\delta x \sin 2\tau y - (q\tau/4) Q_4 \sin 2\tau y) \bar{x}^0 + \right. \\ & + (4\delta \sin 4\delta x - (q\delta/2) Q_5 - 2p\delta \sin 4\delta x \cos 2\tau y + \\ & \left. + (qp\delta/4) Q_5 \cos 2\tau y) \bar{y}_0 \right], \end{aligned}$$

$$Q_4 = \frac{1}{5} \cos 6\delta x - \frac{1}{3} \cos 2\delta x, \quad Q_5 = \frac{3}{5} \sin 6\delta x - \frac{1}{3} \sin 2\delta x,$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{h50} = & (M_1/\varkappa_{h50}) \left[(p\tau \cos 5\delta x \sin 2\tau y - (q\tau/8) Q_6 \sin 2\tau y) \bar{x}^0 + \right. \\ & + (5\delta \sin 5\delta x + (qp\delta/16) Q_7 \cos 2\tau y - (q\delta/8) Q_7 - \\ & \left. - (5p\delta/2) \sin 5\delta x \cos 2\tau y) \bar{y}_0 \right], \end{aligned}$$

$$Q_6 = \frac{1}{3} \cos 7\delta x - \frac{1}{2} \cos 3\delta x, \quad Q_7 = \frac{7}{3} \sin 7\delta x - \frac{3}{2} \sin 3\delta x,$$

$$M_1 = (128/ab(64 + q^2 + p^2 + q^2p^2))^{1/2}, \quad \delta = \pi/a, \quad \tau = \pi/b,$$

где a, b — размеры широкой и узкой стенок волновода соответственно; \varkappa_{hmo} — поперечные волновые числа; q, p — параметры уравнения Матье, определенные в [2].

Коэффициенты матрицы рассеяния для H -тройки на ЧЗПВ следующие:

$$\begin{aligned} S_{11} &= -\operatorname{Re} \tilde{y}/(1 + \tilde{y}), & S_{11} &= S_{22}, \\ S_{21} &= (1 + \operatorname{Im} \tilde{y})/(1 + \tilde{y}), & S_{21} &= S_{12}, \\ S_{31} &= -j\tilde{m}/(1 + \tilde{y}), & S_{31} &= S_{13}, \\ S_{33} &= (1 - \tilde{y})/(1 + \tilde{y}), & S_{23} &= S_{32} = S_{13} = S_{31}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{Re} \tilde{y} = \tilde{m}^2/2$ — действительная часть нормированной проводимости \tilde{y} ; $\operatorname{Im} \tilde{y} = jb$ — мнимая часть нормированной проводимости \tilde{y} , которая определяется реактивными проводимостями местных полей. В численных расчетах величина b определялась через проводимости волн квази- H_{20} , квази- H_{30} , квази- H_{40} и квази- H_{50} .

Рассмотрим E -тройник на ЧЗПВ (рис. 2), согласованный с обоих боковых плеч. Для определения коэффициента отражения в сечении условной

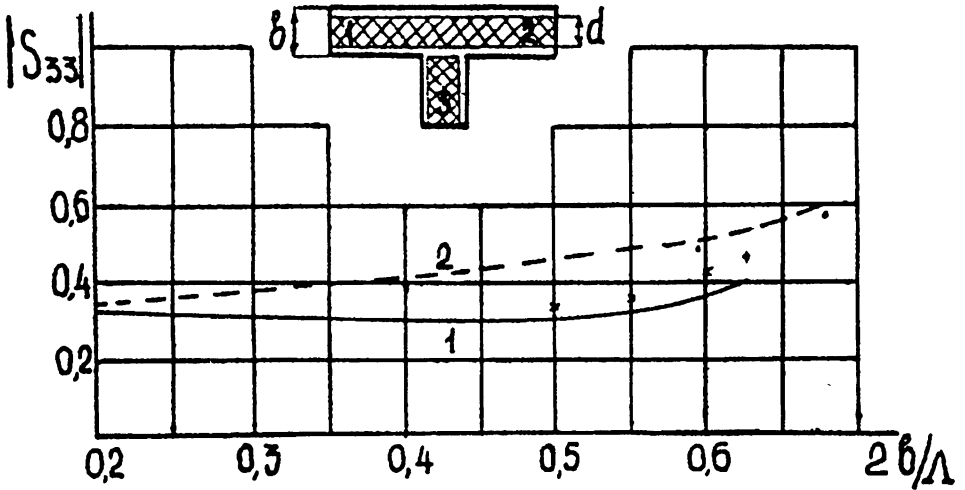


Рис. 2.

границы воспользуемся формулой (1), для которой проводимость найдем следующим образом:

$$Y^E = \sum_k Y_k \int_S \bar{\Theta}_E \bar{\mathcal{E}}_k dS, \quad (3)$$

где $\bar{\Theta}_E$ — координатная функция, аппроксимирующая электрическое поле на условной границе; k — индекс суммирования по волнам типа квази- H_{1n} и квази- E_{1n} (для квази- H волн $n = 0, 1, 2, \dots$, а для квази- E волн $n = 1, 2, 3, \dots$). Координатная функция $\bar{\Theta}_E$ в (3) представляет собой также сумму поперечных электрических собственных векторных функций ЧЗПВ, но т.к. рассматриваемое соединение имеет отверстие в широкой стенке основного волновода, совпадающее с поперечным сечением вспомогательного волновода (E -плечо), то координатная функция выбрана следующей:

$$\bar{\Theta}_E = \bar{\mathcal{E}}_{h10} + \bar{\mathcal{E}}_{h11} + (a/b) \bar{\mathcal{E}}_{e11}.$$

Также, как и в (2), интегрирование в (3) ведется по обеим координатам. Запишем развернутые выражения для собственных векторных функций ЧЗПВ учитываемых волн:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{h11} = & (M_2/\varkappa_{h11}) \left[\left((3\pi\tau/8) \cos \delta x \sin 3\tau y - \tau \cos \delta x \sin \tau y + \right. \right. \\ & \left. \left. + (q\tau/8) \cos 3\delta x \sin \tau y - (3q\pi\tau/64) \cos 3\delta x \sin 3\tau y \right) \bar{x}^0 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\delta \sin \delta x \cos \tau y - (p\delta/8) \sin \delta x \cos 3\tau y - \right. \\
& \left. - (3q\delta/8) \sin 3\delta x \cos \tau y + (3qp\delta/64) \sin 3\delta x \cos 3\tau y \right) \bar{y}^0 \Big], \\
\bar{\mathcal{E}}_{h12} = & (M_2/\alpha_{h12}) \Big[(E_1 p \cos \delta x - 2\tau \cos \delta x \sin \tau y + \\
& + (q\tau/4) \cos 3\delta x \sin 2\tau y - (qp/8) F_1 \cos 3\delta x) \bar{x}^0 + \\
& + \left(\delta \sin \delta x \cos 2\tau y - (p\delta/4) F_2 \sin \delta x - \right. \\
& \left. - (3q\delta/8) \sin 3\delta x \cos 2\tau y + (3qp\delta/32) F_2 \sin 3\delta x \right) \bar{y}^0 \Big], \\
F_1 = & \frac{\tau}{3} \sin 4\tau y - \frac{1}{4}, \quad F_2 = \frac{1}{3} \cos 4\tau y - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{E}}_{e11} = & (M_2/\alpha_{e11}) \Big[(\delta \cos \delta x \sin \tau y - (p\delta/8) \cos \delta x \sin 3\tau y - \\
& - (3q\delta/8) \cos 3\delta x \sin \tau y + (3qp\delta/64) \cos 3\delta x \sin 3\tau y) \bar{x}^0 + \\
& + \left(\tau \sin \delta x \cos \tau y - (3p\tau/8) \sin \delta x \cos 3\tau y - \right. \\
& \left. - (q\tau/8) \sin 3\delta x \cos 2\tau y + (3qp\tau/64) \sin 3\delta x \cos 3\tau y \right) \bar{y}^0 \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{E}}_{e12} = & (M_2/\alpha_{e12}) \Big[(\delta \cos \delta x \sin 2\tau y - (p/12) \cos \delta x \sin 4\tau y - \\
& - (3q\delta/8) \cos 3\delta x \sin 2\tau y + (qp\delta/32) \cos 3\delta x \sin 4\tau y) \bar{x}^0 + \\
& + \left(2\tau \sin \delta x \cos 2\tau y - (p/12) \sin \delta x \cos 4\tau y - \right. \\
& \left. - (q\tau/4) \sin 3\delta x \cos 2\tau y + (qp\tau/24) \sin 3\delta x \cos 4\tau y \right) \bar{y}^0 \Big],
\end{aligned}$$

$$M_2 = 16 / \left(ab(64 + q^2 + p^2 + q^2 p^2) \right)^{1/2}.$$

Коэффициенты матрицы рассеяния для E -тройника на ЧЗПВ следующие:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \operatorname{Re} \bar{y}/(1 + \bar{y}), & S_{22} &= S_{11}, \\ S_{21} &= (1 + \operatorname{Im} \bar{y})/(1 + \bar{y}), & S_{12} &= S_{21}, \\ S_{31} &= \bar{m}/(1 + \bar{y}), & S_{13} &= S_{31}, \\ S_{33} &= (1 - \bar{y})/(1 + \bar{y}), & S_{23} &= S_{32} = -S_{13} = -S_{31}. \end{aligned}$$

В численных расчетах мнимая часть нормированной проводимости определялась через проводимости волн квази- H_{11} , квази- E_{11} , квази- H_{12} и квази- E_{12} .

Коэффициенты матрицы рассеяния E -тройника отражают тот факт, что при возбуждении плеча E электрические поля в боковых плечах 1 и 2 на равных расстояниях от сочленения находятся в противофазе (магнитные поля на равных расстояниях от той же плоскости отсчета находятся в фазе). Обратная картина имеет место в H -тройнике: при возбуждении H -плеча электрические поля в боковых плечах 1 и 2 на равных расстояниях от сочленения находятся в фазе, что и видно из записи коэффициентов матрицы рассеяния (магнитные поля на равных расстояниях от той же плоскости отсчета находятся в противофазе). Для обоих тройников величина S_{33} в точности соответствует выражению (1).

Результаты расчета $|S_{33}|$ в нормированном диапазоне длин волн представлены на рис. 1 для H -тройника и на рис. 2 для E -тройника. Кривые 1 соответствуют расчету тройников на ЧЗПВ сечением $a \times b = 23 \cdot 10 \text{ мм}^2$, $c/a = 0,2$ и $d/b = 0,8$, где c , d — поперечные размеры диэлектрической пластины относительно широкой и узкой стенок волновода соответственно. Крестиками отмечено изменение хода кривой 1 при использовании координатной функции $\bar{E} = \bar{E}_{h10}$ вместо приведенных выше. Незначительные отличия полученных значений модуля коэффициента отражения при упрощении координатных функций объясняется тем, что внешние параметры тройников являются функционалами аппроксимирующих функций. Даже, если аппроксимирующая функция сравнительно сильно отличается от истинного хода функции на условной границе, то это может не вызывать заметного изменения функционала [1]. Использование в качестве аппроксимирующей функции \bar{E}_{h10} дает не только правильную качественную оценку, но и вполне удовлетворительные для практики количественные соотношения. Например, точность вычисления модуля коэффициента отражения для E -тройника на полых прямоугольных волноводах (ПВ) при $N = 1$ на 8% хуже по сравнению с вычислением при $N = 20$, где N — число уравнений СЛАУ [4].

В настоящей работе была осуществлена проверка на частный случай для тройников на полых ПВ. Кривые 2 соответствуют этому расчету для волновода того же поперечного сечения и длины волны $\lambda = 3 \text{ см}$. При

$q = 0$, $p = 0$, что имеет место при $c = 0$, $d = 0$ [2], все приведенные выше формулы для ЧЗПВ переходят в формулы для полого ПВ. Данная проверка на частный случай позволила сравнить полученные результаты с результатами работы [5, гл. 5], полученных методом АМБ. Точками нанесены данные, взятые из рис. 5.2, 5.6 указанной работы. Как следует из таблиц 5.1, 5.2 [5], характеризующих сходимость метода АМБ, достаточно высокая точность расчета достигнута при учете тех же волн, что и у нас. Из графиков на рис. 1, 2 следует, что результаты, полученные применением приведенных в работе координатных функций, хорошо совпадают с результатами, полученными методом АМБ. Это может служить ориентиром при оценке результатов расчета тройников на ЧЗПВ и подтверждением достоверности приведенных графических результатов.

В заключение отметим, что знание внешних параметров позволяет определить расстояние ℓ для расположения короткозамкнутых пластин в плечах З, при которых мощность из одного бокового плеча в другое передается без отражений. Так, для тех параметров ЧЗПВ получим: для H -тройника $a/\ell = 0,85$, для E -тройника $b/\ell = 0,43$. Из графиков также видно, что меньшие значения величины $|S_{33}|$ могут быть достигнуты в тройниках на ЧЗПВ в более широком диапазоне волн. Это позволит их использовать в широкополосных многоканальных системах ВЧ диапазона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Машковцев Б. М., Цибизов К. Н., Емелин Б. Ф. Теория волноводов. — М.: Наука, 1966. 351 с.
2. Почерняев В. Н., Скрыпник Л. В. Собственные функции частично заполненного прямоугольного волновода // Изв. вузов. Радиофизика, 1990. № 12. С. 1385.
3. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матъе. — М.: ИЛ, 1953. 475 с.
4. Кеванишвили Г. Ш. К теории волноводного тройника // Изв. вузов. Радиофизика, 1978. № 11. С. 1669.
5. Никольский В. В., Никольская Т. И. Декомпозиционный подход в задачах электродинамики. — М.: Наука, 1983.

Институт связи и управления,
г. Киев, Украина

Поступила в редакцию
16 июня 1995 г.
После переработки
6 февраля 1996 г.

E*-, *H*-TEES OF PARTIALLY FILLED RECTANGULAR WAVEGUIDEV. N. Pochernyaev*

External parameters of *E*-, *H*-tees of partially filled rectangular waveguide are defined analytically. Numerical results are presented for tees of the partially filled rectangular waveguide and the hollow rectangular waveguide as its special case.

УДК 534.222+550.834

ТРАНСФОРМАЦИЯ СПЕКТРА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИМПУЛЬСА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ГРУНТА

В. В. Гуцин, Ю. М. Заславский, С. Н. Рубцов

В экспериментах по распространению высокочастотных объёмных волн в грунте иногда наблюдается аномально высокое затухание колебаний и появление в спектре сигнала низкочастотных составляющих, не присутствующих в исходном процессе.

Различные проявления этого эффекта описаны в [1–3], причём в [3] отмечается его рост с увеличением пористости среды. Во всех случаях наблюдаемый эффект объяснялся авторами работ нелинейными характеристиками грунта.

Так как в работах [1–3] контроль за процессом проводился только в начальной и конечной точках трассы, то наблюдаемые явления можно объяснить нелинейным преобразованием сигнала не в грунте, а на контакте излучатель–грунт, с последующим ростом низкочастотных составляющих из-за селективного затухания.

Целью настоящей работы было выяснение, где происходит нелинейное преобразование сигнала — на контакте излучатель–грунт или при распространении колебаний в самом грунте.

Для этого при “прозвучивании” грунта импульсными сигналами приёмники под излучателем были размещены на разных глубинах, что позволило контролировать динамику процесса на трассе распространения. Эксперимент проводился на реальном грунте (влажносодержащий суглинок) и дублировался в насыпном грунте (сухой суглинок) лабораторного геобассейна [4]. Сигнал излучался расположенным на грунте пьезокерамическим стержневым вибратором, подгруженным весом около 50 кг, и запитываемым электрическим импульсом с несущей частотой 2,9 кГц, длительностью 0,689 мс (два периода колебания) и мощностью в импульсе около 1 кВт. Узкополосный излучатель (полоса частот 200 Гц по уровню 0,7) преобразовывал электрический импульс в затухающее колебание длительностью в несколько миллисекунд. Максимальная амплитуда переменного давления на грунт, создаваемая излучателем, равнялась при этом 10^3 Па.

Контроль сейсмоакустических импульсов осуществлялся сейсмоприёмниками–акселерометрами типа ПАМТ 4БШ (чувствительность $4 \text{ мВ} \cdot \text{с}^2 / \text{м}$, полоса рабочих частот 10 Гц – 5 кГц), размещёнными соосно под центром

вибратора на глубинах 0,0; 0,30; 0,50; 0,60; 0,75 м. Сигналы с акселерометров подавались через коммутатор на усилитель и цифровой накопитель, в котором суммировалось до 100 реализаций сигнала с каждого приёмника. Процесс контролировался осциллографом до накопителя и регистрировался с его выхода двухкоординатным самописцем.

Спектральный анализ зарегистрированных осциллограмм показал, что по мере распространения сейсмоакустических импульсов в их спектре возникают компоненты на более низких частотах, чем несущая, и происходит увеличение энергии в низкочастотной части спектра. Оценка относительной энергии, находящейся вне полосы излучаемого сигнала ($2220 \div 4500$) Гц показала, что если у колебаний, принятых вблизи поверхности, вне этой полосы находится около 4% энергии — энергия шумов квантования, возникающих при вычислении спектра, то доля энергии в низкочастотной области спектра на глубинах ($0,6 \div 0,7$) м составляет более 90% для влажного суглинка и около 40% для менее влажного грунта геобассейна.

На рис. 1 показаны спектры излучаемого импульса (рис. 1а — эксперимент на реальном грунте; рис. 1б — в геобассейне), спектры сигналов, принятых с глубины 0,3 м (рис. 1в — реальный грунт; рис. 1г — геобассейн) и с глубины 0,75 м (рис. 1д — реальный грунт; рис. 1е — геобассейн). Спектр излучаемого сигнала имеет кроме составляющей на основной частоте излучения, ряд спадающих с увеличением частоты спектральных компонент с интервалом между ними около 450 Гц, что объясняется конструктивными особенностями вибратора. Низкочастотные компоненты в спектрах сигналов заглубленных датчиков либо кратны 450 Гц, либо их частоты равны разности основной частоты и гармоник 450 Гц. Такой характер низкочастотных составляющих свидетельствует о том, что происходит нелинейное преобразование сейсмического сигнала. Уровень низкочастотных составляющих в сигнале, принятом с глубины 0,3 м, в сухом грунте (рис. 1г) выше, чем в сигнале с той же глубины во влажном грунте (рис. 1в). Если допустить, что их появление вызвано нелинейной трансформацией волны на контакте излучатель—грунт, что вероятно из-за малого пути распространения, то это говорит о лучшем контакте вибратора с влажным грунтом.

Для выяснения источника нелинейности был проведён пересчёт сигнала с глубины в 0,3 м на глубину 0,75 м в предположении, что существует только частотно-зависимое поглощение волны. При проведении пересчёта первоначально были взяты значения декремента затухания $\theta = 0,37$ и $\theta = 0,27$. Первое рассчитано по ослаблению сигнала в грунте на частоте 2,9 кГц, второе — усреднённое значение, полученное авторами в ходе эксперимента по затуханиям слабых тональных сигналов на разных частотах. В обоих случаях интенсивность расчётного сигнала оказалась значительно меньше реального. Интенсивности расчётного и

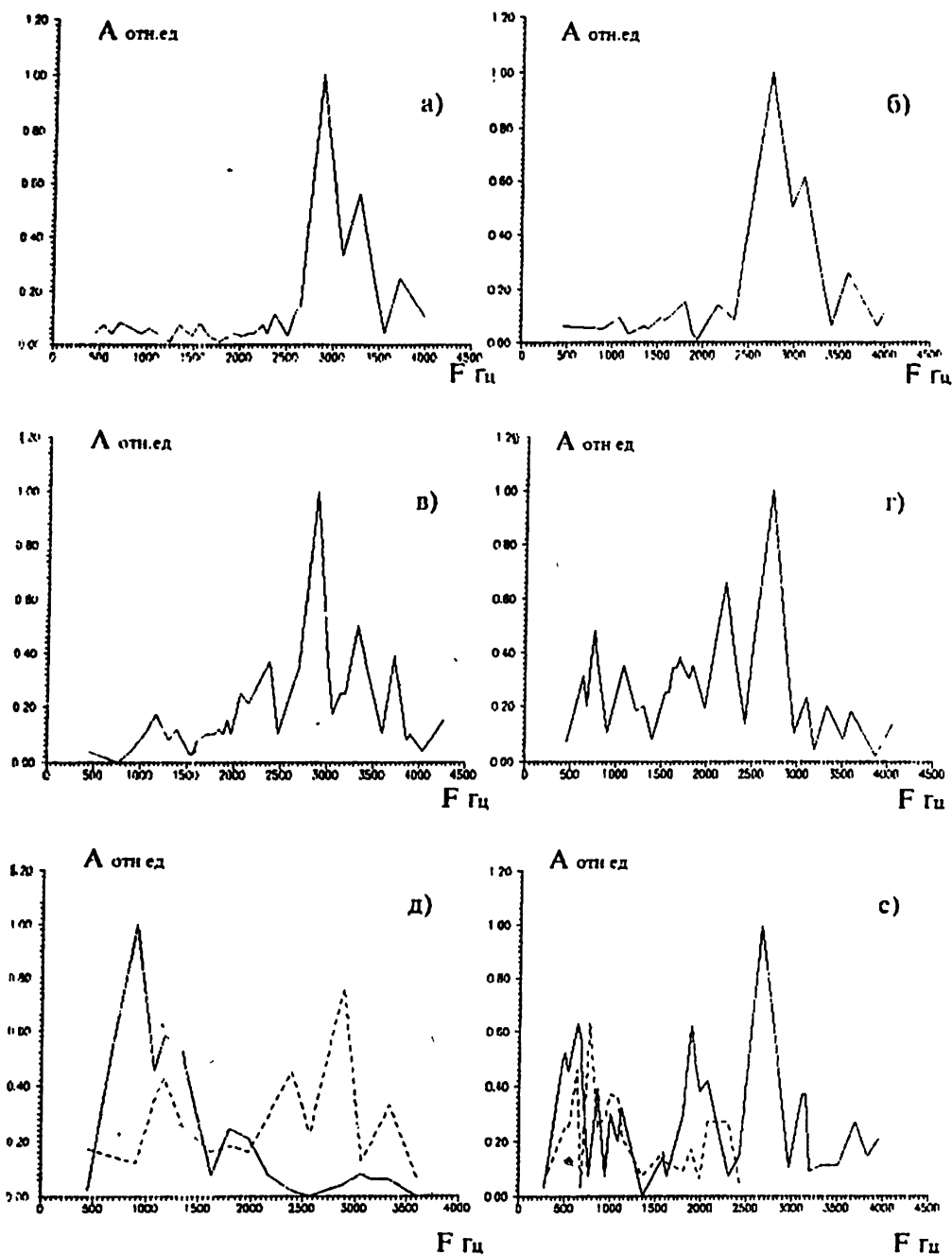


Рис. 1.

экспериментально снятого сигнала сравниваются при пересчёте со значением $\theta = 0,14$, полученным в экспериментах в геобассейне.

Результат пересчёта для влажного грунта при этом значении θ приведён на рис. 1д. Экспериментально снятый спектр изображён сплошной линией, а расчётный — штриховой. Из рисунка видно, что линейная теория не объясняет подъёма в низкочастотной области спектра сигнала, который может быть объяснён только нелинейными преобразованиями сигнала на трассе распространения. Это подтверждается и прямыми измерениями.

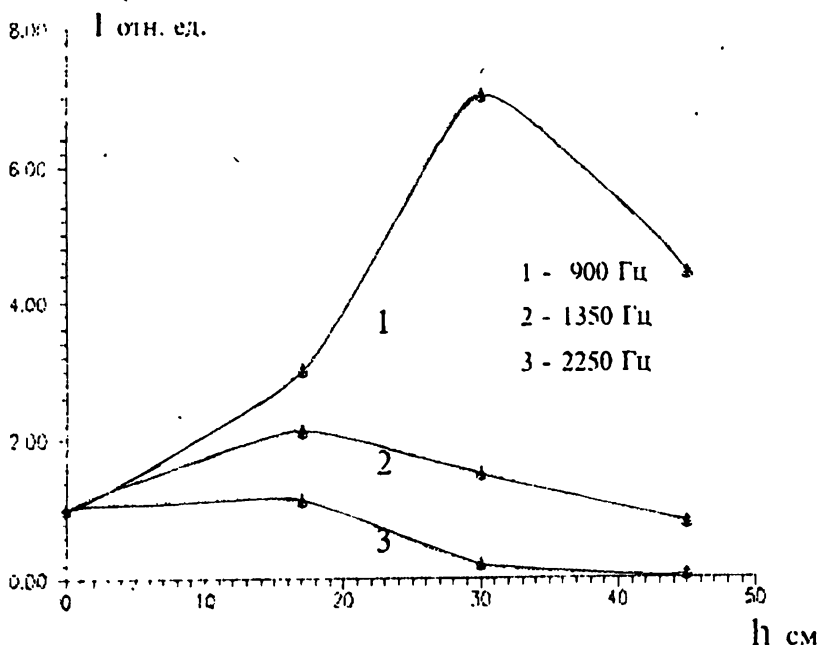


Рис. 2.

На рис. 2 приведён характер относительного изменения с глубиной уровня спектральных составляющих сигнала, кратных 450 Гц, при распространении колебаний во влажном грунте. За исходный при этом взят уровень спектральных компонент на глубине 0,3 м. Из графиков видно, что в процессе распространения идёт подкачка энергии в эти компоненты и эта подкачка тем значительнее, чем ниже частота спектральной составляющей. Несколько иную картину даёт пересчёт для экспериментов, проведённых в геобассейне на сухом грунте. В спектре волнового цуга в этом случае присутствуют те же составляющие, что в натурном эксперименте, но их динамика с глубиной отлична от динамики во влажном грунте. Пересчёт спектра импульса, зарегистрированного на глубине 0,3 м, на уровень 0,75 м показывает, что расчётная интенсивность низкочастотных

составляющих заметно превышает их интенсивность в реальном сигнале. Объяснить это можно, предположив, что нелинейная трансформация импульса происходит, в основном, на контакте излучатель-грунт, а в при распространении в сухом грунте преобладает частотно-селективное поглощение. При этом высокочастотные колебания распространяются прожекторным пучком, а для низкочастотных, при расчёте их ослабления, необходимо учитывать расходимость. На рис. 1е показан результат пересчёта спектра сигнала с уровня 0,3 м на уровень 0,75 м для сухого грунта с учётом потерь на расходимость для низкочастотных составляющих спектра. Обозначения кривых такие же, как на рис. 1д. Реальный и расчётный спектры на рис. 1е почти совпадают по уровню в низкочастотной области, а это значит, что нелинейные преобразования сигнала при распространении его в сухом грунте либо отсутствуют, либо незначительны по сравнению с нелинейностью на контакте излучатель-грунт.

Таким образом, проведённые эксперименты показали, что при определённых условиях возможны нелинейные преобразования сейсмических колебаний при их распространении в грунте, причём проявление нелинейных эффектов зависит не только от пористости грунта (в нашем случае насыпной грунт был более пористым, чем реальный), но в основном от его влагосодержания. Полученные экспериментальные результаты имеют несомненное значение как для уточнения теории распространения волн в пористых влагонасыщенных средах, так и для прикладных вопросов, возникающих при разработке геолокаторов высокого разрешения.

В заключение коснёмся количественной характеристики нелинейности. Так, оценка нелинейного параметра влажного грунта, сделанная с учётом реализованных фактически уровней амплитуды и значений частоты и длительности зондирующих посылок, даёт величину порядка $10^4 \div 10^5$, что согласуется с литературными данными [5]. Столь высоким его значением и объясняется проявление нелинейных эффектов даже при амплитуде первичной волны, составляющей в нашем случае только 10^3 Па.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильчинская Н. А., Николаевский В. Н. // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1984. № 5. С. 91.
2. Гуцин В. В., Заславский Ю. М., Новиков Б. В., Рубцов С. Н. Эффект детектирования P -волн в грунте на килогерцовых частотах. — Сб.: Труды XI Всесоюзной акустической конференции. — М., 1991. С. 45.
3. Логинов К. И., Верещагина Т. Н., Логинов И. В. Нелинейные акустические свойства пористых проницаемых флюидонасыщенных сред. — В сб.: Физические основы сейсмического метода. (Нетрадиционная геофизика). — М.: Наука, 1991. С. 134.

4. Гущин В. В., Заславский Ю. М., Рубцов С. Н. Трансформация спектра высокочастотного импульса при распространении в поверхностном слое грунта. // Препринт № 395. — Н. Новгород: НИРФИ, 1994. 20 с.
5. Беляева И. Ю., Зайцев В. Ю., Островский Л. А. // Акустический журнал 1993. Т. 39. Вып. 1. С. 25.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Нижний Новгород

Поступила в редакцию
22 июня 1995 г.
После переработки
30 апреля 1996 г.

**TRANSFORMATION OF HIGH-FREQUENCY PULSE SPECTRUM
WHEN PROPAGATION IN SURFACE GROUND LAYER**

V. V. Gushchin, Yu. M. Zaslavskij, S. N. Rubtsov

УДК 519.216

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРОСС-КОРРЕЛЯЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ДВУХ НОРМАЛЬНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ю. П. Вирченко, А. С. Мазманишвили

Рассмотрен кросс-корреляционный функционал, используемый в схемах сравнения и принятия решений. Для такого функционала от траекторий двух независимых скалярных комплекснозначных нормальных марковских процессов найдена характеристическая функция. Проанализированы свойства плотности распределения вероятностей значений кросс-корреляционного функционала.

1. В ряде радиофизических задач (например, синтез схем сравнения, см. [1, 2]) возникает необходимость рассмотреть величину, являющуюся кросс-корреляционным функционалом от двух случайных процессов

$$I(\tau) = \int_0^T \xi(t) \eta(t - \tau) dt, \quad (1)$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — стационарные случайные процессы и T — время наблюдения. Случайная величина $I(\tau)$ описывает результат на выходе фильтра-перемножителя, на вход которого поступают два статистически независимых процесса $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Статистические свойства функционала (1) от случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ тесно связаны со свойствами функционала

$$J(\tau) = \operatorname{Re} \int_0^T \mathbf{x}(t) \mathbf{y}^*(t - \tau) dt, \quad (2)$$

где $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ — стационарные случайные комплекснозначные процессы, полученные комплексификацией процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$. А именно, если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два экземпляра статистически независимых процесса, эквивалентных процессу $\xi(t)$, а $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ — два экземпляра статистически независимых процессов, эквивалентных процессу $\eta(t)$, то для процессов $\mathbf{x}(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$, $\mathbf{y}(t) = \eta_1(t) + i\eta_2(t)$ характеристическая функция (ХФ) случайной величины $J(\tau)$ является квадратом ХФ случайной величины $I(\tau)$. Это следует из статистической независимости слагаемых $\xi_1(t)\eta_1(t - \tau)$ и $\xi_2(t)\eta_2(t - \tau)$.

В настоящей работе мы вычисляем ХФ для величины $I(\tau)$ и соответственно для величины $J(\tau)$ в случае, когда процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ являются скалярными, нормальными, марковскими процессами с декрементами ν_x, ν_y и интенсивностями σ_x, σ_y соответственно.

2. Вычисляемая далее характеристическая функция

$$Q(\lambda) = \langle \exp\{i\lambda J(\tau)\} \rangle \quad (3)$$

(λ — действительный параметр), благодаря предположению о независимости процессов $x(t)$ и $y(t)$, не зависит от параметра временного сдвига τ , который поэтому далее будет опущен, $J = J(0)$,

$$J = \int_0^T x(t) y^*(t) dt.$$

В самом деле, процесс $\{J(\tau)\}$ является стационарным в сильном смысле [3], так как процессы $x(t)$ и $y(t)$ стационарны,

$$\begin{aligned} \langle J(\tau_1) J(\tau_2) \dots J(\tau_m) \rangle &= \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T \langle x(t_1) x(t_2) \dots x(t_m) \rangle \times \\ &\times \langle y^*(t_1 - \tau_1) y^*(t_2 - \tau_2) \dots y^*(t_m - \tau_m) \rangle dt_1 dt_2 \dots dt_m = \\ &= \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T \langle x(t_1) x(t_2) \dots x(t_m) \rangle \times \\ &\times \langle y^*(t_1 - \tau_1 + \tau) y^*(t_2 - \tau_2 + \tau) \dots y^*(t_m - \tau_m + \tau) \rangle dt_1 dt_2 \dots dt_m = \\ &= \langle J(\tau_1 - \tau) J(\tau_2 - \tau) \dots J(\tau_m - \tau) \rangle, \end{aligned}$$

и, следовательно, одноточечное распределение вероятностей $p(J)$ процесса $\{J(\tau)\}$ не зависит от τ .

3. На основании уравнений, определяющих нормальные марковские процессы [1, 2], $\dot{x} = -\nu_x x + \varphi_x$, $\dot{y} = -\nu_y y + \varphi_y$, введём вектор $z(t)$ и матрицу V (матрица наблюдения)

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\dot{z}(t) = -(Az)(t) + \varphi(t), \quad (5)$$

и тогда $J = \int_0^T z(t) V z^*(t) dt$.

Все рассматриваемые (и обозначаемые скобками $\langle \cdot \rangle$) далее в работе усреднения являются безусловными математическими ожиданиями по мере процесса $z(t)$. Ввиду его гауссовости воспользуемся для нахождения среднего (3) методом Карунена-Люэва [1]. Алгоритм этого метода включает вычисление характеристических чисел интегрального оператора с соответствующим корреляционным ядром $K(t, t')$

$$f(t) = \lambda \int_0^T K(t, t') V f(t') dt', \quad (6)$$

где $f(t) = (f_x(t), f_y(t))^T$,

$$K(t, t') = \langle z(t) \otimes (z^*(t'))^T \rangle = \text{diag}(K_x(t, t'), K_y(t, t')).$$

Здесь интенсивности шумов φ_x, φ_y выбраны таким образом, что $K_n(t, t') = \sigma_n \exp(-\nu_n |t - t'|)$, $n = x, y$. Детерминант Фредгольма $D(\lambda)$ ядра $K(t, t')$ выражается через характеристические числа $\{\lambda_n\}$ в виде разложения Адамара

$$D(\lambda) = \prod_n (1 - \lambda/\lambda_n)^{-1},$$

что даёт для характеристической функции

$$Q(i\lambda) = 1/D(-\lambda). \quad (7)$$

С целью вычисления детерминанта Фредгольма введём матрицы

$$R^2 = A^2 - 2\lambda AVS, \quad A = \text{diag}(\nu_x, \nu_y), \quad S = \text{diag}(\sigma_x, \sigma_y). \quad (8)$$

Нахождение характеристических чисел можно свести к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая формулируется следующим образом. Введём вектор-функции

$$p(t) = \int_0^t \exp[-A(t-t')] V f(t') dt',$$

$$q(t) = \int_t^T \exp[-A(t'-t)] V f(t') dt',$$

а также функцию $g(t) = p(t) + q(t)$, где $g = S^{-1}f$. Тогда имеем $\dot{g} = -A(p - q)$ и $\dot{g} = A^2g - 2\lambda AVSg$, т.е. $\ddot{g} = R^2g$. Собственные функции находятся из общего решения этих уравнений

$$g(t) = \text{ch}(Rt)g_0 + R^{-1} \text{sh}(Rt)\dot{g}_0, \quad (9)$$

а значения постоянных g_0 и \dot{g}_0 вытекают из граничных условий, связанных с уравнением (6): $\dot{g}(0) = Ag(0)$ в точке $t = 0$, $g(T) = -A\dot{g}(T)$ в точке $t = T$. Эти условия дают систему линейных однородных уравнений, условие разрешимости для которой

$$\left(R \text{sh}(RT) + \text{ch}(RT)A + A \text{ch}(RT) + AR^{-1} \text{sh}(RT)A \right) g_0 = 0$$

приводит к дисперсионному уравнению

$$\Phi(\lambda) \equiv \det \left(R \text{sh}(RT) + AR^{-1} \text{sh}(RT)A + \text{ch}(RT)A + A \text{ch}(RT) \right) = 0.$$

Набор нулей $\Phi(\lambda)$ отвечает набору характеристических чисел $\{\lambda_n\}$ интегрального ядра $K(t, t')$. Это даёт для искомой ХФ выражение

$$Q(i\lambda) = \Phi(0)/\Phi(\lambda) = \det \left(4A \exp(AT) \right) \times \\ \times \det \left(R_+ \exp(RT) R^{-1} R_+ - R_- \exp(-RT) R^{-1} R_- \right)^{-1}, \quad (10)$$

где обозначено $R_+ = R + A$, $R_- = R - A$.

Формула (10) является основным результатом настоящей работы. Он в представленном виде остаётся справедливым и в более общем случае, если рассматривать функционал (2) для векторных нормальных марковских процессов $x(t)$ и $y(t)$ произвольной размерности, заменяя при этом функционал J на функционал $\int_0^T (z(t), Vz(t)) dt$ с произвольной эрмитовой матрицей V , где комплексный векторный нормальный марковский процесс определяется стохастическим векторным уравнением типа (5) с размерностью, совпадающей с размерностью вектора $z(t)$, а эрмитова матрица S и гурвицева матрица A коммутируют.

Отметим, что вычисление математического ожидания от функционала (2) не сводится к алгоритму, изложенному в [4], т.к. матрица V не представима в виде $V = CC^+$ с некоторой матрицей C .

Найденная ХФ (10) (или (12)) полностью описывает статистические характеристики кросс-корреляционного функционала (2) для двух комплекснозначных нормальных марковских процессов. Зависимости для плотности распределения $p(J)$ можно найти из (10) на основе численного обращения преобразования Фурье. На рисунке приведены зависимости для $p(J)$.

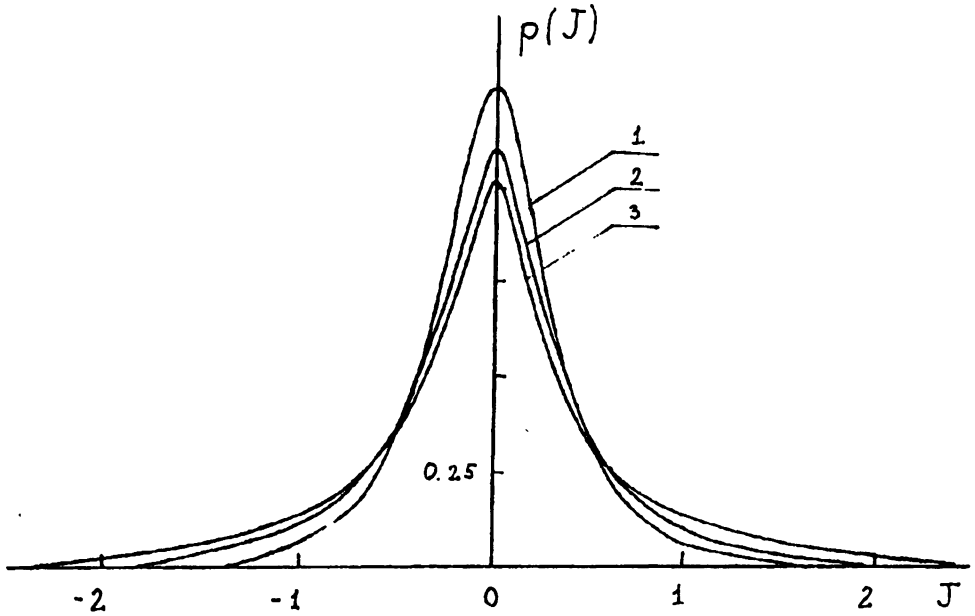


Рис. 1. Плотность распределения кросс-корреляционного функционала, $\nu_y = 1, \sigma_x = 1, \sigma_y = 1, T = 1$; 1 — $\nu_x = 10$, 2 — $\nu_x = 10^{1/2}$, 3 — $\nu_x = 1$.

Можно показать, что найденная плотность распределения значений кросс-корреляционного функционала обладает всеми свойствами, характерными для интегральных квадратичных функционалов от нормальных гауссовских процессов, такими, как экспоненциальная асимптотика на периферии и наличие двух точек перегиба [4].

4. В случае размерности $d = 2$ вектора $z(t)$ выражение (10) для характеристической функции $Q(\lambda)$ допускает явное представление в терминах инвариантов входящих в него матриц. (С точки зрения организации числовых расчётов более удобной оказывается матричная форма.) Ниже приводится результат приведения ХФ $Q(\lambda)$ к скалярной форме (детали приведены в Приложении). Введём с этой целью следующие инварианты

$$G = \frac{1}{2}[(\nu_x - \nu_y)(r_+ + r_-) - \Delta(\nu_x + \nu_y)(r_+ - r_-)/\rho], \quad (11)$$

$$B_{\pm} = (\nu_x \pm r_+)(\nu_y \pm r_-) - [\lambda(r_+ - r_-)/\rho]^2 \nu_x \nu_y \sigma_x \sigma_y, \quad (12)$$

$$H_{\alpha} = \left[\text{ch}(\Omega T) + r_3 \text{sh}(\Omega T)/\Omega + \alpha \exp(-r_0 T) B_+^{-1} (r_+ r_- - \nu_x \nu_y - G) \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\operatorname{ch}(\Omega T) - r_3 \operatorname{sh}(\Omega T) / \Omega + \alpha \exp(-r_0 T) B_+^{-1} (r_+ r_- - \nu_x \nu_y + G) \right] - \\ & - [(\lambda / \rho) (r_+ - r_-)]^2 \nu_x \nu_y \sigma_x \sigma_y \left[\Omega^{-1} \operatorname{sh}(\Omega T) + 2\alpha \nu_x B_+^{-1} \exp(-r_0 T) \right] \times \\ & \times \left[\Omega^{-1} \operatorname{sh}(\Omega T) + 2\alpha \nu_y B_+^{-1} \exp(-r_0 T) \right], \quad \alpha = \pm, \end{aligned} \quad (13)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \Delta^2 + 4\lambda^2 \nu_x \nu_y \sigma_x \sigma_y, & \Delta &= (\nu_x^2 - \nu_y^2) / 2, \\ r_{\pm}^2 &= (\nu_x^2 + \nu_y^2) / 2 \pm \rho, & r_0 &= (r_+ + r_-) / 2, \\ r_3 &= \Delta (r_+ - r_-) / 2\rho, & \Omega &= (r_+ - r_-) / 2. \end{aligned} \quad (14)$$

В терминах введённых инвариантов искомая ХФ равна

$$Q(i\lambda) = 16\nu_x \nu_y r_+ r_- \exp[T(\nu_x + \nu_y)] / (B_+ B_- H_+ H_-). \quad (15)$$

Вычисленная нами характеристическая функция (15) фактически является математическим ожиданием типа $\langle \exp(i\lambda J) \rangle$ для двумерного нормального марковского процесса. Отметим, что ранее в работах [5, 6] была рассмотрена задача определения характеристического функционала выходного процесса применительно к системам, содержащим нелинейности общего квадратичного вида, и представлены явные выражения для искомых характеристик в операторной форме, позволяющей производить исчерпывающий анализ. Настоящая работа содержит пример полного конструктивного решения для конкретного функционала вида (1). Нам известен только один результат такого типа (при $d = 2$) [7], относящийся к гармоническому марковскому процессу.

Мы благодарим акад. А. И. Ахиезера за поддержку работы.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Получим формулу для ХФ (11)–(15) в терминах инвариантов матриц A , R для случая двумерного процесса $\{z(t)\}$, когда матрицы V , A , S определяются формулами (4), (8).

Вычисление разобьём на этапы: 1) вычисление матрицы R ; 2) разложение функции $\Phi(\lambda)$ на множители; 3) вычисление множителей, составляющих $\Phi(\lambda)$, в терминах инвариантов матриц.

В вычислениях удобно использовать эрмитовы матрицы Паули

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

алгебра которых определяется формулой умножения $\tau_k \tau_l = i \varepsilon_{klm} \tau_m$. Эти матрицы в совокупности с единичной матрицей E образуют базис в линейном пространстве комплексных 2×2 матриц, т.е. любую 2×2 матрицу C можно представить в виде линейной комбинации $C = c_0 E + c_k \tau_k$ (по повторяющемуся индексу здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование с $k = 1, 2, 3$). При этом справедливы следующие формулы

$$c_0 = \text{Sp}(C)/2, \quad c_k = \text{Sp}(C\tau_k)/2, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\det(C) = c_0^2 - c_k^2, \quad (\text{П.1})$$

$$C^{-1} = (c_0 E - c_k \tau_k) / \det(C), \quad (\text{П.2})$$

$$\exp(C) = \exp(c_0) [E \text{ch}(|C|) + c_k \tau_k \text{sh}(|C|)/|C|], \quad (\text{П.3})$$

где $|C|^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$. Формула умножения матрицы C на матрицу C' , заданную разложением $C' = c'_0 + c'_k \tau_k$ имеет вид

$$CC' = (c_0 c'_0 + c_k c'_k) + (c_0 c'_k + c_k c'_0 + i \varepsilon_{klm} c_l c'_m) \tau_k. \quad (\text{П.4})$$

1) Так как $(AVS)^2 = \sigma_x \sigma_y \nu_x \nu_y E$, то матрицу R можно выбрать в виде

$$R = [(r_+ + r_-)\rho + (r_+ - r_-)(\Delta\tau_3 - 2\lambda AVS)]/2\rho, \quad (\text{П.5})$$

что проверяется непосредственной подстановкой в соотношение (8). Конкретный выбор матрицы R из множества возможных матриц, удовлетворяющих соотношению (8), не влияет на конечный ответ, так как в формулу (10) входит только матрица R в чётной степени. Из (П.5) сразу следует, что r_0, r_3 имеют вид, указанный в (14). Кроме того, так как $V = \tau_1, S = s_0 E + s_3 \tau_3, A = a_0 E + a_3 \tau_3$, то $VS = s_0 \tau_1 - i s_3 \tau_2$ и поэтому $(AVS)_0 = (AVS)_3 = 0$. Следовательно,

$$r_k = (\lambda/\rho)(r_- - r_+)(AVS)_k, \quad k = 1, 2;$$

$$(AVS)_1^2 + (AVS)_2^2 = -\det(AVS) = \sigma_x \sigma_y \nu_x \nu_y$$

и поэтому

$$r_1^2 + r_2^2 = (\lambda/\rho)^2 (r_+ - r_-)^2 \sigma_x \sigma_y \nu_x \nu_y. \quad (\text{П.6})$$

На основе этой формулы и выражений для r_0, r_3 и ρ (14) получаем

$$\Omega^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_+ - r_-)^2/4,$$

$$\det R = r_0^2 - \Omega^2 = r_+ r_-.$$

Используя (П.1) и выражения для коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3

$$a_0 = (\nu_x + \nu_y)/2, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = (\nu_x - \nu_y)/2,$$

находим

$$\det(R_{\pm}) = (a_0 \pm r_0)^2 - (a_k \pm r_k)^2 = B_{\pm}, \quad (\text{П.7})$$

так как $(\nu_x \pm r_+)(\nu_y \pm r_-) = (a_0^2 \pm r_0^2) - (a_3^2 \pm r_3^2)$. Выпишем, наконец, используя (П.3), формулу для экспоненты

$$\exp(RT) = \exp(r_0 T) [E \operatorname{ch}(\Omega T) + r_k \tau_k \operatorname{sh}(\Omega T) / \Omega]. \quad (\text{П.8})$$

2) Представим определитель $\Phi(\lambda)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \det(R) \det[(E + L) \exp(RT)(E + L) - (E - L) \exp(-RT)(E - L)] = \\ &= \det(R) \det(E + L) \det(E - L) \det(M - M^{-1}), \end{aligned}$$

где $L = R^{-1}A$, $M = \exp(RT)(E + L)(E - L)^{-1}$ (так как $(E - L)$ и $(E + L)^{-1}$ перестановочны). Раскладывая на множители $(M - M^{-1}) = (M - E)(M + E)M^{-2}$ и преобразуя $\det[\exp(RT)] = \exp[\operatorname{Sp}(RT)] = \exp(2r_0 T)$, получим

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \exp(-4r_0 T) \det(R) \det(E + L) \det(E - L) \times \\ &\times \det[\exp(RT) + (E - L)(E + L)^{-1}] \det[\exp(RT) - (E - L)(E + L)^{-1}], \end{aligned}$$

или, так как $R(E - L)(E + L)^{-1}R^{-1} = R_-R_+^{-1}$, то

$$\Phi(\lambda) = B_+ B_- H_+ H_- / (r_+ r_-), \quad (\text{П.9})$$

где

$$H_{\alpha} = \exp(-2r_0 T) \det[\exp(RT) + \alpha R_- R_+^{-1}], \quad \alpha = \pm. \quad (\text{П.10})$$

3) Используя формулы (П.1), (П.2), (П.7) и $\det(R) = r_+ r_-$, $\det(A) = \nu_x \nu_y$, находим

$$R_+^{-1} = B_+^{-1} [r_0 + a_0 - \tau_k (r_k + a_k)],$$

$$R_- R_+^{-1} = B_+^{-1} [r_+ r_- - \nu_x \nu_y + 2(a_0 r_k - r_0 a_k) \tau_k + 2i \varepsilon_{klm} a_l r_m \tau_k]. \quad (\text{П.11})$$

Тогда, разлагая

$$\exp(-r_0 T) [\exp(RT) + \alpha R_- R_+^{-1}] = H_0 + H_k \tau_k,$$

получим на основании (П.1), (П.8), (П.11)

$$H_{\alpha} = (H_0 - H_3)(H_0 + H_3) - (H_1 + iH_2)(H_1 - iH_2), \quad (\text{П.12})$$

где

$$H_0 = \operatorname{ch}(\Omega T) + \alpha (r_+ r_- - \nu_x \nu_y) \exp(-r_0 T) B_+^{-1},$$

$$H_k = (r_k/\Omega) \operatorname{sh}(\Omega T) + 2\alpha \exp(-r_0 T)(a_0 r_k - a_3 r'_k) B_+^{-1}, \quad k = 1, 2, 3,$$

при этом $r'_1 = ir_2$, $r'_2 = -ir_1$, $r'_3 = r_0$. Составим выражения

$$H_0 \pm H_3 = \operatorname{ch}(\Omega T) \pm r_3 \operatorname{sh}(\Omega T)/\Omega + \alpha(r_+ r_- - \nu_x \nu_y \mp G) \exp(-r_0 T) B_+^{-1},$$

так как $2(a_0 r_3 - a_3 r_0) = -G$, и выражения

$$H_1 \pm iH_2 = [\operatorname{sh}(\Omega T)/\Omega + 2\alpha \nu_{\mp} \exp(-r_0 T) B_+^{-1}](r_1 \pm ir_2),$$

где $\nu_+ = \nu_x$, $\nu_- = \nu_y$. Подставляя эти выражения в (П.12), получим формулу (13) для H_α , которая совместно с (П.7), (П.9) и

$$\det[A \exp(AT)] = \det(A) \exp[\operatorname{Sp}(AT)] = \nu_x \nu_y \exp[T(\nu_x + \nu_y)],$$

доказывает формулу (15) для искомой характеристической функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. — М.: Сов. радио, 1969.
2. Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. — М.: Радио и связь, 1986.
3. Гихман И. И., Скороход А. Д. Теория случайных процессов. Т. 1. — М.: Наука, 1973.
4. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. // Кибернетика и системный анализ, 1992. № 2. С. 174.
5. Клячкин В. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1974. Т. 17. № 1. С. 134.
6. Клячкин В. И., Иоффе М. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1975. Т. 18. № 5. С. 707.
7. Slepian D. Fluctuations of Random Noise Power // BSTJ, 1958. № 1.

Харьковский государственный
политехнический университет

Поступила в редакцию
23 февраля 1995 г.

THE STATISTICAL PROPERTIES OF THE CROSS-CORRELATION FUNCTIONAL OF TWO NORMAL MARKOVIAN PROCESSES

Yu. P. Virchenko, A. S. Mazmanishvili

The cross-correlation functional which is used for the comparison schemes and decision-making is considered. The characteristic function of this functional of two independent scalar markovian normal complex-valued processes is calculated. The properties of the probability distribution density of cross-correlation functional values have been analyzed.

УДК 535.361

КОНТРАСТ ИЗОБРАЖЕНИЙ МАЛОРАЗМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ЧЕРЕЗ РАССЕЙВАЮЩУЮ СРЕДУ МЕТОДОМ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ КОНФОКАЛЬНОЙ МИКРОСКОПИИ

В. Л. Вебер

На основе теории видения в рассеивающих средах разработана модель наблюдения неоднородностей в биологических тканях методом отражательной конфокальной микроскопии. Выведены общие формулы для расчёта контраста изображения локальной неоднородности с синусоидальным распределением коэффициента отражения, находящейся в однородной рассеивающей среде. Проведён анализ влияния параметров системы наблюдения на предельную глубину видимости неоднородностей.

В последнее время наблюдается быстрый рост числа публикаций, посвящённых исследованию возможностей оптического наблюдения внутренней структуры тканей и органов человеческого тела в терапевтическом “окне” прозрачности (длины волн 0,6–1,2 мкм). Разрабатываются методы и средства импульсной фемтосекундной томографии, видения с помощью фемтокоррелированного излучения. В качестве перспективных оптических методов обнаружения патологий в слоях ткани рассматриваются различные варианты методов конфокальной микроскопии [1–4]. Эти методы и средства в ближайшем будущем могут найти применение в медицине для раннего обнаружения опухолей молочной железы, диагностики кожного покрова, сетчатки глаза и т.д.

Полученные экспериментальные результаты говорят о больших потенциальных возможностях разрабатываемых методов, однако, проблема количественной оценки и анализа этих возможностей на основе современной теории видения в мутных средах вплоть до настоящего времени, по существу, остаётся открытой. Цель данной работы — создание физической модели, описывающей процесс формирования изображения объекта в рассеивающей среде применительно к одной из возможных схем наблюдения — отражательной конфокальной микроскопии.

1. Формула переноса изображения. Рассмотрим схему наблюдения, приведённую на рис. 1. Система наблюдения (СН), содержащая линзу диаметром d_s , с фокусным расстоянием f , а также расположенные на её

оси на расстоянии H от неё источник и приёмник (совмещённые) диаметром d_1 и d_2 , соответственно, освещает и визирует находящийся в однородной рассеивающей среде на глубине h плоский непрозрачный ламбертов объект с распределением коэффициента отражения $R_0(\vec{r})$. Процесс наблюдения осуществляется посредством регистрации отражённого объектом светового излучения при поперечном (в плоскости xy) перемещении СН.

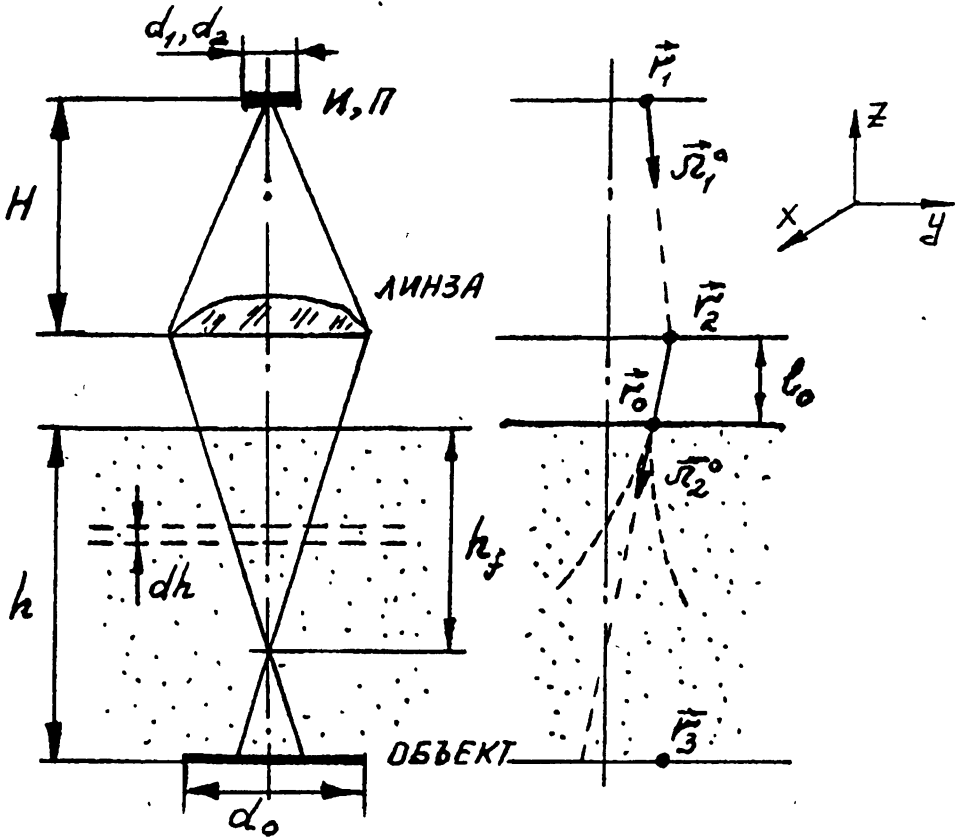


Рис. 1. Схема наблюдения.

Мощность светового излучения источника, попадающего в фотоприёмник СН после отражения от поверхности объекта, описывается соотношением:

$$P_i(\vec{r}) = \frac{B_0}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} R_0(\vec{r}_3 - \vec{r}) E_1(\vec{r}_3) E_2(\vec{r}_3) d\vec{r}_3, \quad (1)$$

где B_0 — яркость источника, $E_{1(2)}$ — распределение освещённости, создаваемое источником (приёмником) в плоскости объекта, \vec{r} — координата точки наблюдения.

Формула (1) справедлива для произвольной системы наблюдения (см., например, [5, 6]). Конкретизируем её для конфокальной схемы, приведённой на рис. 1. В дальнейших рассуждениях будем пользоваться обозначениями рис. 1.

Распределение яркости светового поля, создаваемого источником непосредственно за линзой, описывается формулой:

$$B(r_2, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} D_1(\vec{r}_1, \vec{\Omega}_1) G_a(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2, \vec{\Omega}_1) \cdot \Pi(\vec{r}_2) G_s(\vec{\Omega}_1 \rightarrow \vec{\Omega}_2, \vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{\Omega}_1, \quad (2)$$

где $G_a(\cdot)$ — функция Грина воздушного слоя между источником и линзой (в пренебрежении рассеянием в воздухе $G_a = \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 - H\vec{\Omega}_1)$), $\Pi(\cdot)$ — функция амплитудного пропускания линзы, $G_s(\cdot)$ — функция Грина линзы, описывающая изменение направления луча, падающего на линзу; в результате преломления — в пренебрежении дифракционными эффектами $G_s(\cdot) = \delta(\vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1 - \vec{r}_2/f)$ — при учёте дифракции на оправе линзы δ функция заменяется на некоторую конечную функцию G_d , ширина которой зависит от освещённой площади линзы; векторы $\vec{\Omega}_i$ — проекции единичных векторов $\vec{\Omega}_i^0$ на плоскость $z = \text{const}$.

Распределение яркости на границе рассеивающей среды:

$$B(\vec{r}_0, \vec{\Omega}_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} B(\vec{r}_2, \vec{\Omega}_2) \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_2 - l_0\vec{\Omega}_2) d\vec{r}_2. \quad (3)$$

Распределение освещённости в плоскости объекта:

$$E_1(\vec{r}_3) = \iint_{-\infty}^{\infty} B(\vec{r}_0, \vec{\Omega}_2) e_c(\vec{r}_3 - \vec{r}_0 - h\vec{\Omega}_2, h) d\vec{r}_0 d\vec{\Omega}_2, \quad (4)$$

где $e_c(\cdot)$ — распределение освещённости от точечного мононаправленного источника в рассеивающей среде, находящегося в точке \vec{r}_0 и излучающего в направлении $\vec{\Omega}_2^0$, на расстоянии h от него. Объединяя формулы (2)–(4), получим выражение для освещённости E_1 :

$$E_1(\vec{r}_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} D_1(\vec{r}_1, \vec{\Omega}_1) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 - H\vec{\Omega}_1) \Pi(\vec{r}_2) \times \\ \times G_{d1}(\vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1 - \vec{r}_2/f) e_c(\vec{r}_3 - \vec{r}_2 - z\vec{\Omega}_2, h) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{\Omega}_1 d\vec{\Omega}_2, \text{ где } z = h + l_0.$$

Перейдём от пространственного описания к более удобному частотному описанию. Пространственный спектр освещённости от источника в

плоскости объекта имеет следующий вид

$$F_{E_1}(\vec{\kappa}) = F_{d_1}(\vec{\kappa}z) F_c(\vec{\kappa}, h) F_1^\circ(\vec{\kappa}), \quad (5)$$

где

$$F_1^\circ(\vec{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int F_1(\vec{\omega}, \vec{\kappa}z + \vec{\omega}H) F_s(\vec{\omega} + \beta\vec{\kappa}) d\vec{\omega}, \quad (6)$$

$\beta = \frac{z}{f} - 1$; F_{d_1} , F_c , F_1 , F_s — фурье-образы функций G_{d_1} , e_c , D_1 , Π .

Совершенно аналогично записывается выражение для распределения освещённости от приёмника $E_2(\vec{r}_3)$ и его пространственного спектра $F_{E_2}(\vec{\kappa})$, с заменой индекса "1" на "2".

Мощность светового излучения, формирующего изображение объекта, выраженная через спектры входящих в (1) функций, описывается соотношением:

$$P_i(\vec{r}) = \frac{B_0}{\pi} (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{\infty} \int \dots \int F_{ob}(\vec{\kappa}_1 + \vec{\kappa}_2) F_{E_1}(\vec{\kappa}_1) F_{E_2}(\vec{\kappa}_2) e^{i(\vec{\kappa}_1 + \vec{\kappa}_2)\vec{r}} d\vec{\kappa}_1 d\vec{\kappa}_2, \quad (7)$$

где $F_{ob}(\cdot)$ — пространственный спектр распределения коэффициента отражения объекта.

2. Модели источника, приёмника, линзы, объекта и среды.

В качестве оптических передаточных функций источника и приёмника воспользуемся гауссовыми функциями:

$$F_{1(2)}(\vec{\kappa}, \vec{p}) = \Sigma_{1(2)} \Delta_{1(2)} \exp\left(-\frac{\Sigma_{1(2)}}{4\pi} \kappa^2 - \frac{\Delta_{1(2)}}{4\pi} p^2\right), \quad (8)$$

где $\Sigma_{1(2)}$ — площадь апертуры источника (приёмника), $\Delta_{1(2)}$ — телесный угол излучения (приёма).

Для описания пространственного спектра функции пропускания линзы также используем гауссовую функцию:

$$F_s(\vec{\kappa}) = \Sigma_s \exp\left(-\frac{\Sigma_s}{4\pi} \kappa^2\right), \quad (9)$$

где Σ_s — площадь линзы.

Подставляя соотношения (8), (9) в выражение (6), в результате преобразований получим:

$$F_1^\circ(\vec{\kappa}) = \frac{\Sigma_1 \Delta_1 \Sigma_s}{S_1^\circ} \exp\left\{-\frac{\kappa^2}{4\pi S_1^\circ} \left[\Sigma_1 (\Delta_1 z^2 + \beta^2 \Sigma_s) + (z - \beta H)^2 \Delta_1 \Sigma_s\right]\right\},$$

где

$$S_1^\circ = \Sigma_s + \Delta_1 H^2 + \Sigma_1.$$

Запишем это выражение в безразмерных переменных:

$$F_1^\circ(\vec{\kappa}) = \frac{\Sigma_1 \Delta_1}{\sigma_1^\circ} \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 \Sigma_s}{4\pi \sigma_1^\circ} \left[\sigma_1 (\alpha^2 \mu_1 + \beta^2) + \mu_1 (\alpha \beta)^2 \right] \right\}, \quad (10)$$

где

$$\sigma_1^\circ = 1 + \mu_1 + \sigma_1, \quad \sigma_1 = \Sigma_1 / \Sigma_s, \quad \mu_1 = \Delta_1 H^2 / \Sigma_s, \quad \alpha = z / H.$$

Отметим здесь два момента: а) величина μ_1 определяет относительную величину освещённой поверхности линзы; при максимальном использовании поверхности линзы $\mu_1 = 1$; б) выражение (10) существенно упрощается в том случае, когда объект расположен в плоскости, сопряжённой плоскости источника, при этом выполняется равенство $\alpha = \beta$ или $H^{-1} + z^{-1} = f^{-1}$ (формула линзы).

В качестве оптической передаточной функции рассеивающей толщи воды используем фурье-образ автомодельного решения уравнения переноса излучения для распределения освещённости в среде с анизотропным рассеянием [7]:

$$F_c(\vec{\kappa}, h) = e^{-\alpha h} \sum_{i=1}^2 C_i \exp \left(-\frac{g_i}{4\pi} \Sigma_s \kappa^2 \right), \quad (11)$$

где $C_1 = \exp(-\sigma h)$ — амплитуда нерассеянной компоненты излучения, $C_2 = 1/\text{ch } \xi - \exp(-\sigma h)$ — амплитуда рассеянной компоненты, $g_1 = 0$, $g_2 = \frac{4\pi}{\Sigma_s} (\xi - \text{th } \xi) / \{ \alpha^2 \Omega_\infty [1 - \text{ch } \xi \exp(-\sigma h)] \}$ — площадь сечения узкого пучка света в рассеивающей среде на расстоянии h от источника, $\xi = \frac{1}{2} \Omega_\infty \alpha h$, $\Omega_\infty = \sqrt{2\sigma\gamma^2/\alpha}$, σ — коэффициент рассеяния воды, α — коэффициент поглощения, γ^2 — дисперсия индикатрисы рассеяния.

Оптическая передаточная функция, описывающая дифракционные эффекты на апертуре освещённой части поверхности линзы, определяется выражением:

$$F_{d_1}(\vec{\kappa}z) = \exp \left(-\frac{\sigma_{d_1}}{4\pi} \Sigma_s \kappa^2 \right), \quad (12)$$

где $\sigma_{d_1} = (\lambda z / d_s^2)^2 / \mu_1$ — относительная площадь дифракционного пятна на глубине h .

Оценку возможностей различных систем видения удобно производить по контрасту изображения деталей объектов определённого класса (тест-объектов). В качестве таких объектов могут служить объекты с синусоидальным распределением коэффициента отражения (миры Фуко). В соответствии с этим выберем в качестве тест-объекта миру с распределением коэффициента отражения

$$R_{\text{об}}(\vec{r}) = R_0 \exp \left(-\frac{\pi r^2}{\Sigma_0} \right) \left(1 + K_0 \sin(\vec{\omega}_0 \vec{r}) \right),$$

где R_0 — среднее значение коэффициента отражения, $\vec{\omega}_0$ — пространственная частота полос на объекте, K_0 — исходный контраст полос, Σ_0 — площадь объекта.

Пространственный спектр объекта описывается выражением:

$$F_{\text{об}}(\vec{\kappa}) = R_0 \Sigma_0 \left\{ \exp\left(-\frac{\Sigma_0}{4\pi} \kappa^2\right) + \frac{K_0}{2i} \left[\exp\left(-\frac{\Sigma_0}{4\pi} (\vec{\kappa} - \vec{\omega}_0)^2\right) - \exp\left(-\frac{\Sigma_0}{4\pi} (\vec{\kappa} + \vec{\omega}_0)^2\right) \right] \right\}. \quad (13)$$

3. Изображение объекта в конфокальном микроскопе. Подставляя соотношения (5), (10)–(13) в формулу (7), получим после проведения громоздких, но, в принципе, несложных выкладок следующее выражение для распределения яркости в изображении объекта, наблюдаемого посредством конфокального микроскопа через слой рассеивающей среды:

$$P_i(\vec{r}) = P_0 \frac{\Delta_2}{\pi} R_0 \frac{\sigma_1 \sigma_0}{\sigma_1^o \sigma_2^o} e^{-2z\alpha h} \sum_{i,j=1}^2 C_i C_j \frac{1}{b(a_1 + a_2)} \cdot \exp\left(-\frac{\pi r^2}{b\Sigma_s}\right) \cdot \left[1 + K_0 K_s \sin\left(\vec{\omega}_0 \vec{r} \frac{\sigma_0}{b}\right) \right], \quad (14)$$

где $P_0 = B_0 \Sigma_1 \Delta_1$ — мощность излучения источника,

$$K_s = \exp\left[-\left(\frac{\pi N}{4}\right)^2 \frac{a_{12}}{a_{12} + \sigma_0}\right],$$

$$a_1 = \eta_1 + g_i + \sigma_{d_1}, \quad a_2 = \eta_2 + g_j + \sigma_{d_2},$$

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{\sigma_{1,2}^o} [\sigma_{1,2}(\alpha^2 \mu_{1,2} + \beta^2) + \mu_{1,2}(\alpha - \beta)^2],$$

$$\sigma_0 = \Sigma_0 / \Sigma_s, \quad b = a_{12} + \sigma_0, \quad a_{12} = a_1 a_2 / (a_1 + a_2),$$

N — число светлых и тёмных полос на объекте.

Формула (14) является основной в последующих рассуждениях. Поясним физический смысл наиболее важных параметров, входящих в неё. Поперечное (по \vec{r}) разрешение СН определяется параметрами $a_{1,2}$ — чем они меньше по величине, тем выше разрешение. Эти параметры представляют собой безразмерные площади фокусной “перетяжки” для источника и приёмника соответственно. Входящие в $a_{1,2}$ параметры $\eta_{1,2}$ характеризуют геометрические площади, $g_{i,j}$ — площади рассеяния, а $\sigma_{d_{1,2}}$ — дифракционные площади.

В том случае, когда объект расположен в сопряжённой источнику (приёмнику) плоскости — при этом источник (приёмник) проецируется на поверхность объекта наиболее “резко” — выполняется равенство $\alpha = \beta$.

При этом параметры $\eta_{1,2}$, входящие в (14), определяются следующим выражением:

$$\eta_{1,2} = \alpha_0^2 \sigma_{1,2} (1 + \mu_{1,2}) / \sigma_{1,2}^0, \quad (15)$$

где $\alpha_0 = f / (H - f)$.

В этом случае параметры $a_{1,2}$ получают минимальные значения, а это, в свою очередь, обеспечивает системе наблюдения наилучшее разрешение по координате \vec{r} .

4. Контраст изображения. Как уже говорилось выше, оценку возможностей различных систем видения можно проводить по контрасту изображения тест-объекта типа миры Фуко. В качестве критерия видимости объекта в теории видения в рассеивающих средах часто используют критерий Джонсона (см., например, [8]). В основе этого критерия лежит экспериментально установленный факт соответствия характера распознавания реальных объектов и тест-объектов с набором чередующихся светлых и тёмных полос, причём каждому уровню видения соответствует определённое число разрешаемых полупериодов эквивалентной миры. В частности, уровню “различение деталей” на реальном объекте соответствует разрешение (по контрасту) 8-и полос на тест-объекте.

Обратимся к определению контраста полос в изображении (14). Выражение для контраста изображения имеет следующий вид:

$$K_i = (P_{\max} - P_{\min}) / (P_{\max} + P_{\min}),$$

где P_{\max} , P_{\min} — максимальное и минимальное значения яркости изображения. Ограничиваясь исследованием контраста для центральной части изображения, получим на основании (14):

$$P_{\max} = P'_0 \sum_{i,j=1}^2 \frac{C_i C_j}{b(a_1 + a_2)} (1 + K_0 K_s),$$

$$P_{\min} = P'_0 \sum_{i,j=1}^2 \frac{C_i C_j}{b(a_1 + a_2)} (1 - K_0 K_s),$$

где через P'_0 обозначено произведение множителей в (14), стоящих перед знаком суммы.

В итоге выражение для контраста изображения $P_i(\vec{r})$ принимает следующий вид:

$$K_i = K_0 \frac{\Delta P_i}{\bar{P}_i}, \quad (16)$$

где

$$\Delta P_i = \frac{1}{2} (P_{\max} - P_{\min}) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{C_i C_j}{b(a_1 + a_2)} K_s,$$

$$\bar{P}_i = \frac{1}{2}(P_{\max} + P_{\min}) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{C_i C_j}{b(a_1 + a_2)}.$$

Формула (16) позволяет производить расчёт контраста изображения полос на объекте для произвольной глубины расположения объекта.

5. Помеха обратного рассеяния. Контраст с учётом помехи.

На качество изображения объекта при наблюдении через слой рассеивающей среды существенное влияние оказывает помеха обратного рассеяния (ПОР) или, как её называют, дымка. Эта дымка снижает видимый контраст объекта и уменьшает дальность видимости.

Формулу для расчёта помехи обратного рассеяния в нашей схеме наблюдения можно получить путём модификации выражения (14). Коэффициент отражения тонкого слоя рассеивающей среды толщиной dh : ρdh , где $\rho = \sigma_\pi/4$, σ_π — коэффициент обратного рассеяния среды [9]. Подставляя в (14) вместо R_0 величину ρ , а также используя соотношения $K_0 = 0$ и $\sigma_0 \rightarrow \infty$, получим выражение для мощности дифференциальной ПОР (помехи от элементарного слоя рассеивающей среды):

$$p(h) = P_0 \frac{\Delta_2}{\pi} \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1^0 \sigma_2^0} e^{-2\alpha h} \sum_{i,j=1}^2 \frac{C_i C_j}{a_1 + a_2}. \quad (17)$$

Полная (интегральная) мощность ПОР описывается выражением:

$$P_{bs} = \int_0^{h_0} p(h) dh, \quad (18)$$

где h_0 — глубина расположения объекта.

Контраст изображения полос на объекте с учётом помехи обратного рассеяния определяется соотношением:

$$K = K_i / (1 + P_{bs} / \bar{P}_i). \quad (19)$$

Как следует из (19), учёт ПОР приводит к уменьшению контраста изображения объекта.

6. Анализ результатов численного моделирования. Полученные в предыдущих разделах соотношения позволяют провести анализ зависимости контраста от всех физических факторов задачи. Ниже излагаются результаты численных расчётов контраста изображения для следующих значений параметров: длина волны излучения $\lambda = 600$ нм, диаметры источника и приёмника $d_1 = d_2 = 4$ мкм, диаметр линзы $d_s = 4$ мм,

фокусное расстояние $f = 4$ мм, относительные площади освещённых источником и приёмником областей $\mu_1 = \mu_2 = 1$, высота размещения источника и приёмника $H = 160$ мм, диаметр объекта $d_0 = 0,1$ мм, коэффициент отражения объекта $R_0 = 0,5$, контраст полос на объекте $K_0 = 1$, число полос $N = 8$, коэффициент рассеяния среды $\sigma = 20$ мм⁻¹, коэффициент поглощения $\alpha = 0,02$ мм⁻¹, коэффициент обратного рассеяния $\sigma_\pi = 0,8$ мм⁻¹, дисперсия индикатрисы рассеяния $\overline{\gamma^2} = 0,04$.

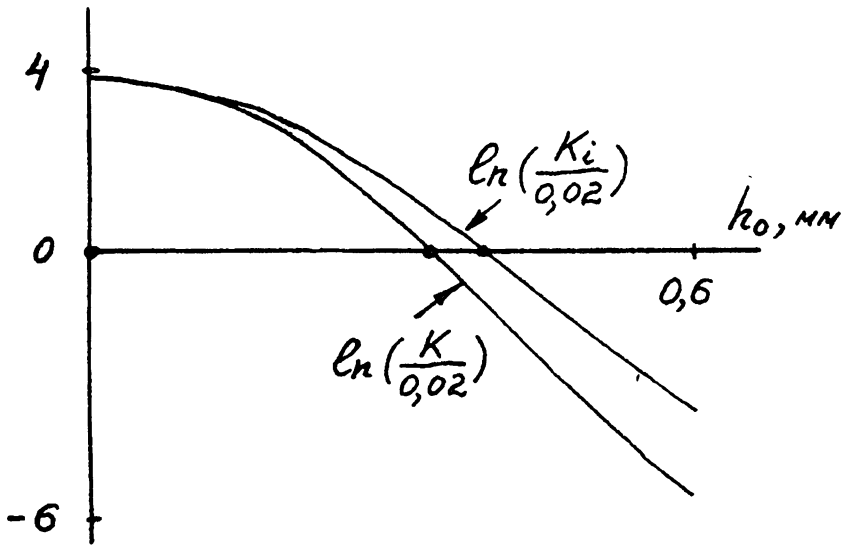


Рис. 2. Зависимость контраста изображения полос на объекте от глубины расположения объекта.

Перейдём к обсуждению полученных результатов. На рис.2 приведены рассчитанные по формулам (14), (19) зависимости контраста от глубины расположения объекта при соблюдении условия оптического сопряжения плоскостей, в которых располагаются источник света (приёмник) и объект. Эти зависимости имеют монотонно спадающий характер. Для определения предельной глубины видимости (разрешения полос в изображении объекта) необходимо задаться пороговым значением контраста — мы принимаем его равным 0,02 (контрастная чувствительность глаза). Точка пересечения графика $\ln(K/0,02)$ с осью абсцисс определяет значение предельной дальности видимости — в данном случае она равна 0,42 мм. Здесь и далее мы приводим, наряду с зависимостью $K(h)$, зависимость $K_i(h)$. Зависимость $K_i(h)$ полезна тем, что она определяет характеристики видения “идеальной” СН, т.е. системы, в которой приняты меры по отсечке ПОР (например, использован импульсный источник света в сочетании с временным стробированием фотоприёмника).

Прежде, чем перейти к анализу зависимости предельной глубины ви-

димости от различных параметров СН, остановимся на вопросе о помехе обратного рассеяния.

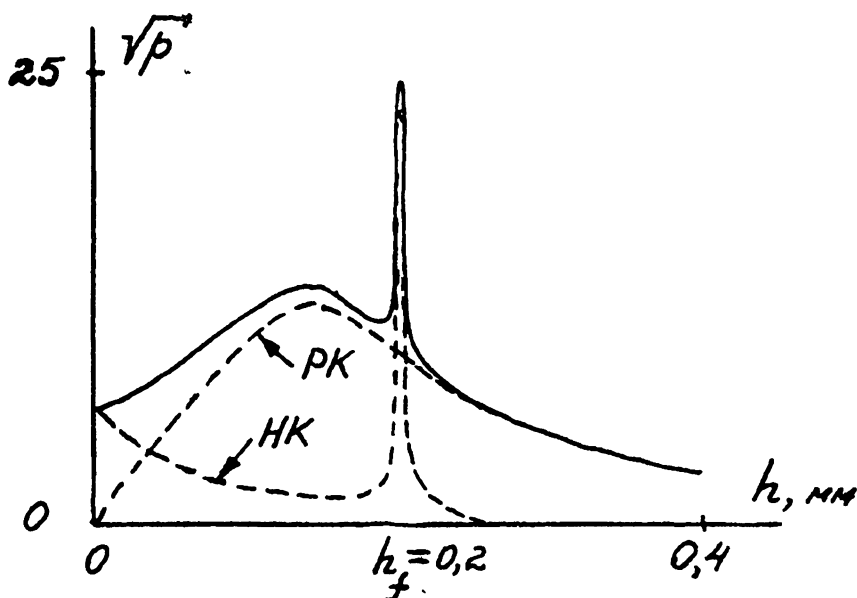


Рис. 3. Зависимость мощности дифференциальной ПОР от глубины.

На рис. 3 приведены зависимости дифференциальной ПОР от глубины зондируемого слоя среды (глубина сопряжённой источнику плоскости $h_f = 0,2$ мм). Пунктирными линиями проведены зависимости $p(h)$, соответствующие разделному учёту рассеянной и нерассеянной компонентам излучения в среде, сплошной линией — суммарная зависимость. Обращает на себя внимание сложный немонотонный характер приведённых зависимостей с отчётливо выраженной особенностью на глубине фокусировки h_f , хотя, напомним, здесь речь идёт об однородной среде. К рассматриваемой нами задаче вопрос о дифференциальной ПОР не имеет особого отношения, однако, для методов лоцирования среды с использованием фемтосекундного излучения учёт такого рода особенностей в сигнале обратного рассеяния важен, т.к. они могут быть ошибочно приняты за сигнал от объекта (локальной неоднородности в среде).

На рис. 4 приведена зависимость величины интегральной ПОР от глубины расположения объекта при $h_f \equiv h_0$. За исключением небольшого начального участка глубин (~ 5 мкм) эта зависимость имеет монотонно спадающий характер. Такое поведение ПОР объясняется тем, что основная её часть поступает из области глубин вблизи h_f (глубины фокусировки), причём по мере увеличения h_f освещённость среды в этой области уменьшается из-за энергетического ослабления нерассеянной компоненты излучения и одновременного увеличения поперечного сечения освещаю-

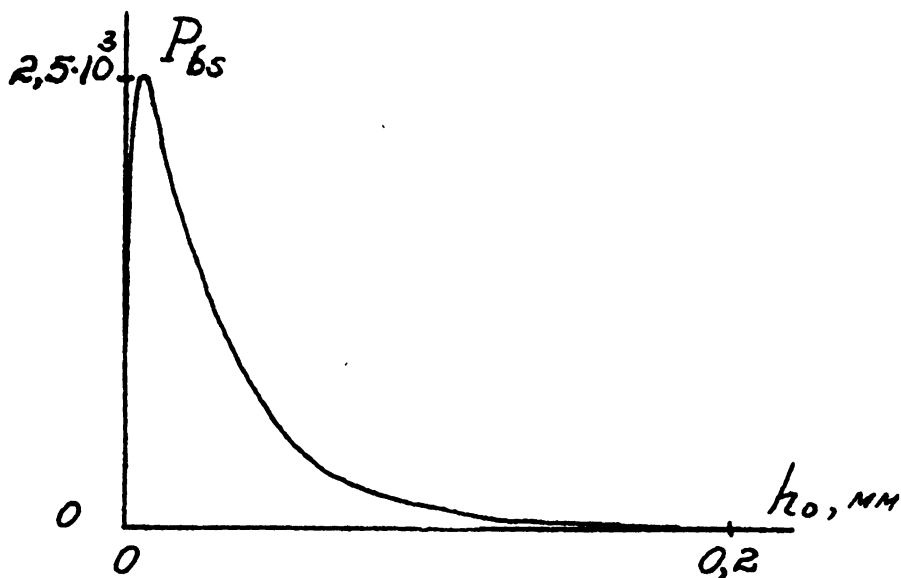


Рис. 4. Зависимость мощности интегральной ПОР от глубины расположения объекта.

щего пучка вследствие рассеяния в среде. Отметим, что при переходе к диффузной подсветке объекта ($d_1 \rightarrow \infty$) зависимость ПОР от h_0 становится монотонно возрастающей.

На рис. 5 представлены зависимости глубины видимости объекта от размеров объекта. Общий возрастающий характер этих зависимостей легко объясним — при увеличении d_0 и соответствующем увеличении пространственного периода полос на объекте увеличивается контраст изображения. Для объектов, размеры которых превышают 1 мм, расчёт контраста можно производить, учитывая только рассеянную компоненту излучения в среде. При размерах объекта, меньших 0,35 мм, отмечено “аномальное” поведение контраста изображения и, соответственно, глубины видимости объекта — они растут с уменьшением d_0 . Эта область зависимости $h_{\max}(d_0)$ характеризуется переходом к видению по нерассеянной компоненте; рассеянная компонента здесь практически не участвует в формировании изображения полос, создавая лишь постоянную “засветку” в изображении объекта. Явление улучшения видимости с уменьшением размеров объекта достаточно известно — в частности, оно исследовано в теории подводного видения [5].

На рис. 6 приведены зависимости глубины видимости объекта от расстояния между источником света и линзой. Монотонно возрастающий характер этих зависимостей обусловлен уменьшением площади фокусной “перетяжки” на глубине h_f , которая определяется величиной параметра a_{12} (см. формулы (14), (15)) и, соответственно, улучшением разрешаю-

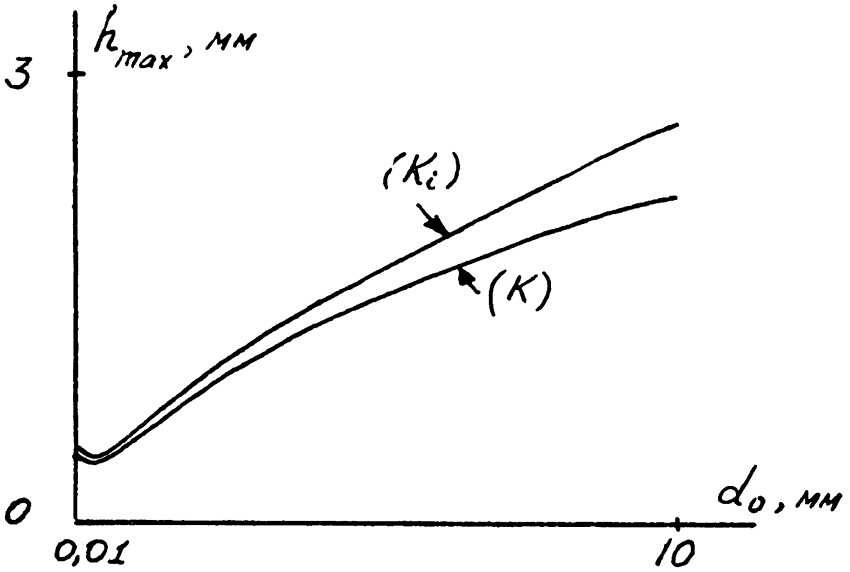


Рис. 5. Зависимость глубины видимости объекта от его диаметра.

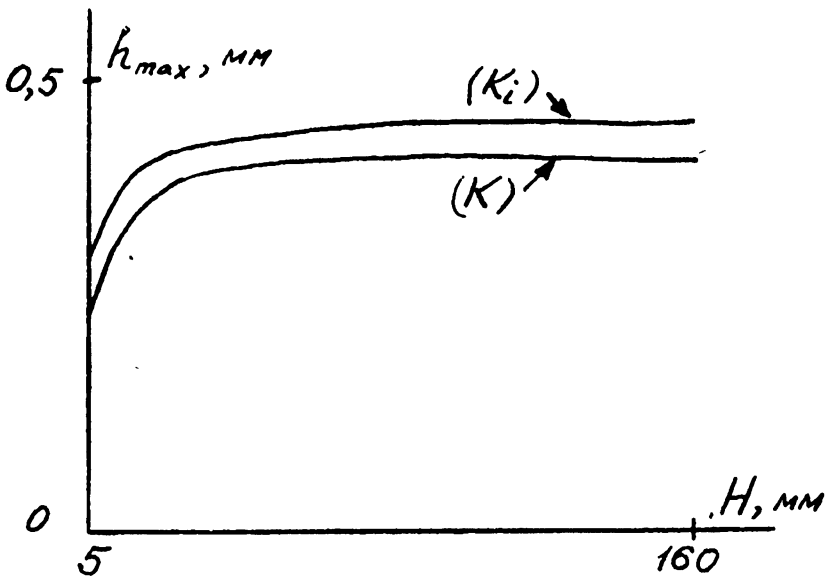


Рис. 6. Зависимость глубины видимости объекта от расстояния линза-источник света (приёмник).

щей способности системы видения с увеличением H . Этими же причинами объясняется поведение зависимостей дальности видимости от диаметра линзы (рис. 7) и относительных размеров "освещенной" приёмником части поверхности линзы (рис. 8) (см. формулы (12), (15)).

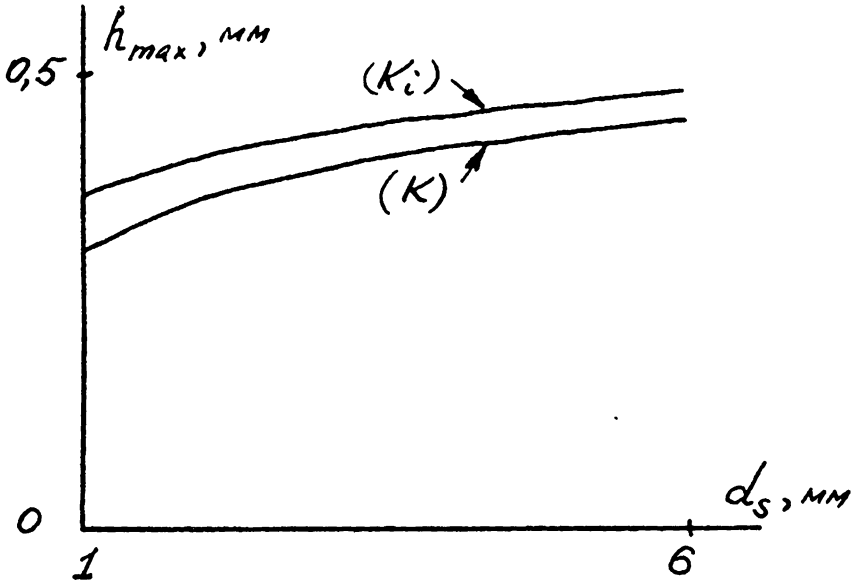


Рис. 7. Зависимость глубины видимости объекта от диаметра линзы.

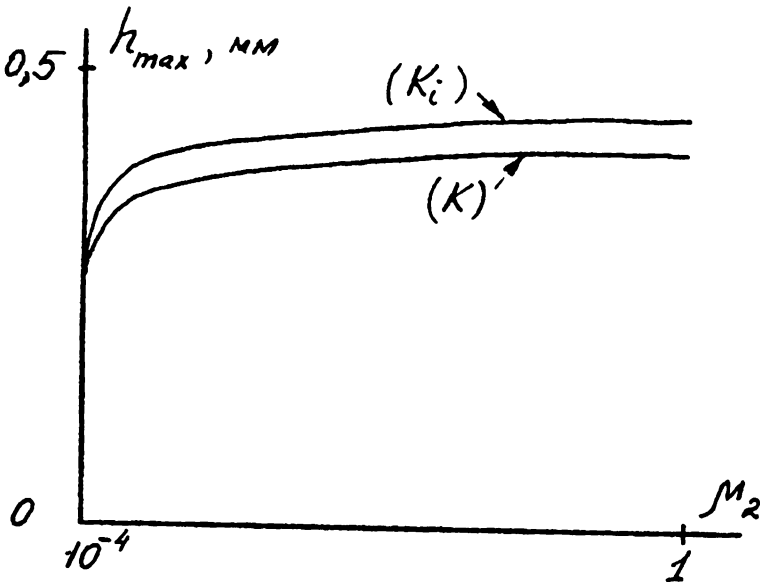


Рис. 8. Зависимость глубины видимости объекта от относительной площади "освещенной" приёмником части поверхности линзы.

Зависимость глубины видимости от способа подсветки объекта представляет особый интерес с точки зрения оценки преимуществ использования конфокальной схемы наблюдения по сравнению с традиционной микроскопией. На рис. 9 представлены зависимости глубины видимости объекта от размеров источника света. Эти зависимости — монотонно спадающие и имеющие участки насыщения при $d_1 \lesssim d_2$ и $d_1 \gtrsim 10$ мм. Переход от малых значений d_1 к большим соответствует переходу от конфокальной микроскопии к обычной, или от активного видения к пассивному. Как следует из полученных данных, выигрыш (по дальности видимости) при использовании конфокальной схемы составляет примерно 2:1. Это соотношение уменьшается при наблюдении крупных объектов и составляет, например, для $d_0 = 2$ мм — 1,2:1. Последнее можно объяснить тем, что видение крупных объектов осуществляется почти исключительно за счёт рассеянной компоненты излучения, для которой различие между направленным и диффузным освещением малосущественно.

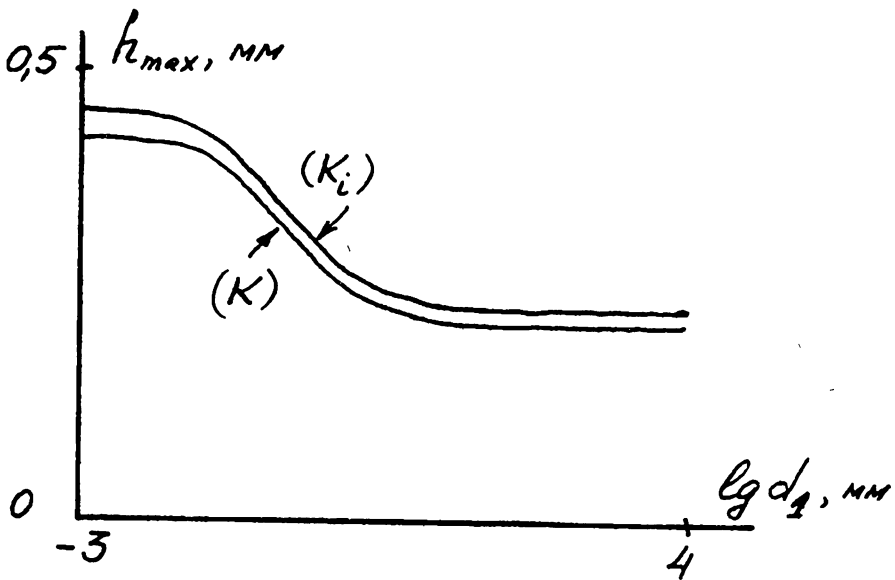


Рис. 9. Зависимость глубины видимости объекта от диаметра источника.

Зависимость наблюдаемого контраста полос на объекте от величины вертикального смещения СН позволяет судить о глубине резкости конфокальной схемы. Анализ, проведённый на основе формулы (14), показывает, что глубина резкости конфокальной СН имеет величину порядка 30 мкм. Более внимательное рассмотрение этого вопроса позволяет выявить тонкие особенности в поведении контраста — в зависимости контраста от глубины фокусировки h_f имеется узкий “пичок” на глубине расположения объекта h_0 . Этот “пичок”, локализованный в пределах единиц мкм, хорошо виден на графике, построенном в логарифмическом (по

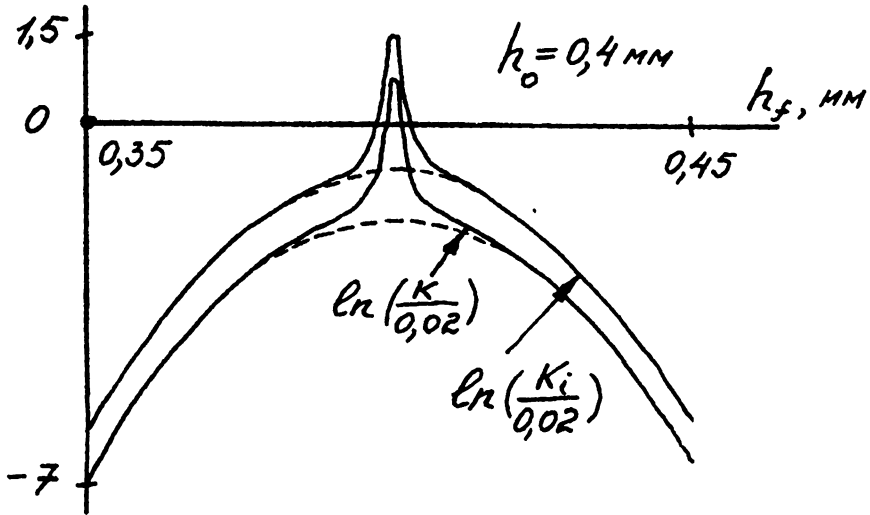


Рис. 10. Зависимость контраста изображения полос на объекте от глубины фокусировки.

оси ординат) масштабе (см. рис. 10). Наличие этой особенности в зависимости $K(h_f)$ связано с сильной фокусировкой нерассеянной компоненты излучения. Зависимости контраста от h_f , проведённые на рис. 10 пунктирными линиями, рассчитаны по формуле (14) без учёта квадрата амплитуды нерассеянной компоненты ($C_2^2 = 0$). Нетрудно убедиться, что эти зависимости не имеют особенности. То, что появление “пичка” связано с нерассеянной компонентой излучения, подтверждается и тем, что он отсутствует на предельных глубинах видимости крупных ($\gtrsim 1$ мм) объектов, а также в случае использования источника света больших размеров, т.е. при диффузной подсветке.

Мы не приводим данных о зависимости предельной глубины видимости объекта от оптических характеристик среды; скажем лишь, что увеличение коэффициента рассеяния ведёт к снижению контраста изображения полос и, соответственно, к уменьшению глубины видимости объекта.

Автор благодарен Л. С. Долину, А. Г. Лучинину, И. А. Сергиевской за полезное обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты: 95-02-5797, 94-02-03913).

ЛИТЕРАТУРА

1. Carlsson K. and Aslund N. // Appl. Opt., 1987. V. 26. P. 3232.

2. Amos W. B., White J. G., and Fordham M. // *Appl. Opt.*, 1987. V. 26. P. 3239.
3. Massig J. H., Preissler M., Wegener A. R., and Gaida G. // *Appl. Opt.*, 1994. V. 33. №4. P. 690.
4. Бонч-Бруевич А. М., Николаев С. Д., Старобогатов И. О., Васильев В. И. // *Письма в ЖЭТФ*, 1994. Т. 20. №11. С. 42.
5. Браво-Животовский Д. М., Долин Л. С., Лучинин А. Г., Савельев В. А. // *Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана*, 1969. Т. 5. № 7. С. 672.
6. Вебер В. Л. // *Изв. РАН, Физика атмосферы и океана*, 1993. Т. 29. № 2. С. 222.
7. Долин Л. С. // *Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана*, 1983. Т. 19. № 4. С. 400.
8. Зеге Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. *Перенос изображения в рассеивающей среде*. — Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.
9. Долин Л. С., Савельев В. А. // *Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана*, 1971. Т. 7. № 5. С. 505.

Институт прикладной физики
РАН, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию
26 июля 1995 г.

**THE IMAGE CONTRAST OF SMALL-SIZE OBJECTS
AT THE OBSERVATION THROUGH A SCATTERING MEDIUM
BY THE METHOD OF REFLECTED CONFOCAL MICROSCOPY**

V. L. Weber

The model of the observation of inhomogeneities in biological tissues by the method of reflected confocal microscopy has been worked out on the basis of the vision theory in dispersive media. General formulas for the calculation of the image contrast of a local inhomogeneity with sinusoidal distribution of the reflection coefficient being in anisotropic scattering medium are presented. The analysis of the influence of observation system parameters on the maximum vision depth of inhomogeneities has been carried out.