

О П Е Ч А Т К И

В статье Е. А. Мареева и В. Ю. Трахтенгерца "О проблеме электрического динамо", опубликованной в № 6, том 39 за 1996 год (стр. 797-814):

1. на стр. 801 строку 11 сверху вместо "операции и rot к уравнению (1):" следует читать:

"операции div и rot к уравнению (1):";

2. на стр. 801 формулы (2) и (4) следует читать:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = D\Delta\rho - \frac{\sigma}{c\epsilon} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho - \frac{\chi}{c} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad (4)$$

3. на стр. 802 формулы (5) и (7) следует читать:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_a \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

$$\rho_a \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_a (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f}^{\text{em}} + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (7)$$

4. на стр. 806 строку 19 сверху вместо "...рывности (5) имеем:  $\mathbf{v} = -\frac{\partial \rho'_a}{\partial t} / \rho_{a0}$  (масштаб рассматриваемых возму-" следует читать:

"...рывности (5) имеем:  $\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{\partial \rho'_a}{\partial t} / \rho_{a0}$  (масштаб рассматриваемых возму-";

5. на стр. 806 формулу (23) следует читать:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + 4\pi\sigma\rho' = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\rho_0}{\rho_{a0}} \frac{\partial \rho'_a}{\partial t}. \quad (23)$$

6. на стр. 810 формулы (34) и (36) следует читать:

$$c^2 (\Delta \mathbf{E} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{E}) = \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (4\pi\sigma \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{E}) - \chi \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]. \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 4\pi\sigma\rho + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} - D\Delta\rho = q - \frac{\sigma}{c} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad (36)$$

7. на стр. 810 строку 11 сверху вместо " $\mathbf{v} = 0, v_{1z} = E_{1z} = 0, \mathbf{E}_{1\perp} = 0$ . Уравнение для возмущений электрического" следует читать:

" $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, v_{1z} = E_{1z} = 0, \operatorname{div} \mathbf{E}_{1\perp} = 0$ . Уравнение для возмущений электрического";

8. на стр. 810 строку 16 сверху вместо "скорости распространения электромагнитных волн в диэлектрике  $c\sqrt{\epsilon}$ ." следует читать:

"скорости распространения электромагнитных волн в диэлектрике  $c/\sqrt{\epsilon}$ .";

9. на стр. 811 строку 17 сверху вместо "В уравнении для плотности заряда положим  $\rho \mathbf{v} = 0$  и пренебрежём" следует читать:

"В уравнении для плотности заряда положим  $\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$  и пренебрежём";

*Редакция приносит свои извинения авторам этой статьи и читателям журнала за допущенные опечатки.*

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XXXIX N 6

Нижний Новгород

1996

С о д е р ж а н и е

- Гольденберг А. Л., Денисов Г. Г., Запечалов В. Е., Литвак А. Г., Флягин В. А. Мазеры на циклотронном резонансе. Состояние и проблемы.....635
- Литвак А. Г., Миронов В. А., Абрамян Л. А. Нестационарное самовоздействие волновых полей в ускорителе на биениях.....671
- Власов С. Н., Копосова Е. В., Павельев А. Б., Хижняк В. И. Гиротроны с эшелетными резонаторами.....691
- Трахтенгерц В. Ю. Мазер на циклотронном резонансе как возможный триггер солнечной вспышки.....699
- Бабин А. А., Ким А. В., Киселев А. М., Сергеев А. М., Степанов А. Н. Взаимодействия сверхсильных лазерных полей с веществом: эффекты и возможные приложения.....713
- Громов Е. М., Таланов В. И. Короткие солитоны огибающей (комбинированное нелинейное уравнение).....735
- Рабинович М. И. Хаос и нейродинамика.....757
- Жислина В. Г., Хандохин П. А., Ханин Я. И. Коррелированы ли источники естественных флуктуаций в отдельных модах лазера?.....771
- Абрашкин А. А., Зенькович Д. А., Якубович Е. А. Матричная формулировка гидродинамики и трехмерные обобщения птоломеевских течений.....783
- Мареев Е. А., Трахтенгерц В. Ю. О проблеме электрического динамо.....797



Когда-то достаточно давно, еще в те годы, когда члены первой редколлегии журнала "Радиофизика" были достаточно молоды для того, чтобы думать о своих юбилеях, и обладали решительностью, позволяющей пренебречь юбилеями других, они специальным решением Редколлегии постановили не публиковать в журнале персоналии. При этом не делать исключение ни для кого и никогда.

Но настало время, когда все престижные журналы России публикуют к юбилеям членов редколлегии нашего журнала статьи, освещающие их путь и вклад в науку, а "Радиофизика" хранит молчание. Не сделает она исключение и сегодня, хотя вклад нынешнего юбиляра в становление и развитие журнала, в тематику, в нем освещаемую, трудно переоценить.

Десять лет тому назад, однако, мы нашли неплохой (на наш взгляд) выход из создавшегося положения. Мы решили публиковать в специализированных выпусках статьи на темы, в развитие которых юбиляры внесли определяющий или большой вклад. Поэтому о персональном характере выпусков можно судить лишь по ссылкам и благодарностям, за выбор которых несут ответственность прежде всего авторы.

Таким образом, мы заставили членов редколлегии журнала даже в дни их юбилеев работать на журнал, на его читателей, которым предоставляется уникальная возможность познакомиться как с оригинальными, так и с обзорными работами по некоторым современным направлениям радио-

физики, на его авторов, особенно молодых, которым так необходимы в наше "грантовое время" срочные публикации.

Этой традиции следует и настоящий выпуск журнала. Он основан на исследованиях сотрудников института, в становлении и в современных успехах которого определяющая роль принадлежит ученому, с чьей биографией вы можете ознакомиться на страницах нескольких Российских научных журналов ( см., например [1, 2]).

Часть из публикуемых материалов основана на пионерских исследованиях Юбиляра. Другая часть написана теми, кто решил посвятить свою статью Юбиляру, кто по праву числится его учеником или почитает Юбиляра в числе своих учителей, ибо его заслуги в семинарских обсуждениях проблем, умение быстро войти в суть предлагаемого, найти ошибку, сделать оригинальное предложение или указать на нетривиальное приложение результатов трудно переоценить.

И тем не менее нам не удалось, следуя предписанным рамкам выпуска, включить в него часть обзоров — они будут опубликованы позднее.

Редакция журнала "Известия ВУЗов — Радиофизика" выражает глубокую признательность Юбиляру за столь приятную возможность в формировании данного выпуска\*.

7 июня 1996 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. УФН, № 6, 1996 г.
2. Акустический журнал, № 4, 1996 г.

---

\*Помещенная на предыдущей странице черно-белая фотография выполнена при использовании современного цветного сканнера и приведена здесь, чтобы продемонстрировать авторам и читателям возможности нашего журнала передавать сложные в тонном отношении иллюстрации к статьям.

УДК 621.373

## МАЗЕРЫ НА ЦИКЛОТРОННОМ РЕЗОНАНСЕ: СОСТОЯНИЕ И ПРОБЛЕМЫ

*А. Л. Гольденберг, Г. Г. Денисов, В. Е. Запесалов,  
А. Г. Литвак, В. А. Флягин*

Мазеры на циклотронном резонансе – гиротроны и гироспиральники – как источники излучения большой энергии полностью доминируют в диапазоне миллиметровых волн и всё ещё имеют значительные резервы дальнейшего повышения мощности и КПД. Современные задачи создания непрерывных мегаваттных гиротронов сопряжены с решением ряда проблем, среди которых ключевой является проблема выходного окна. Приведены новые результаты исследования гиротронов и гироспиральников в России и параметры различных модификаций гиротронов для нагрева плазмы и технологических применений и гироспиральников для радаров диапазона миллиметровых волн.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Механизм неустойчивости, на котором основана работа мазеров на циклотронном резонансе (МЦР), был открыт почти 40 лет назад несколькими авторами в разных странах, независимо и почти одновременно, но лишь один из первооткрывателей – А. В. Галонов–Грехов – занялся последовательным воплощением новой идеи в электронику больших мощностей. В настоящее время МЦР, прежде всего генераторы – гиротроны, намного превосходят все другие источники излучения диапазона миллиметровых волн по выходной мощности и эффективности. Благодаря современным задачам, таким как создание генераторов мегаваттного уровня мощности в непрерывном режиме, гиротроны до сих пор остаются объектом интенсивного исследования. Предлагаемый обзор основан, главным образом, на исследованиях и разработках МЦР, выполненных в Институте прикладной физики (Нижний Новгород) и Научно–производственном предприятии “ГИКОМ” (Нижний Новгород – Москва).

#### 1.1. Принципы

Общее название мазеры на циклотронном резонансе используется для генераторов, основанных на индуцированном циклотронном излучении электронов, вращающихся в однородном статическом магнитном поле [1].

МЦР работают на частоте, близкой к циклотронной частоте (гирочастоте)

$$\omega_B = \frac{eB}{m_0\gamma} \quad (1)$$

или ее второй, третьей, ... гармонике. В (1)  $e$  и  $m_0$  — заряд и масса покоя электрона,  $B$  — магнитное поле,  $\gamma$  — релятивистский фактор Лоренца ( $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , где  $v$  — скорость электрона и  $c$  — скорость света). Характерной особенностью МЦР является то, что в нём электронный пучок взаимодействует с быстрой (незамедленной) волной, фазовая скорость которой  $v_{ph} > c$ . Высокочастотное излучение возбуждается или усиливается благодаря группировке электронов в такой фазе их вращения в магнитном поле, в которой это вращение тормозится высокочастотным полем, отбирающим часть энергии вращения электронов. Фазовая группировка электронов в однородном магнитном поле происходит благодаря релятивистской зависимости массы электрона от его скорости, приводящей к ускорению вращения электрона, теряющего свою энергию, и, напротив, к замедлению вращения электрона, приобретающего энергию, как это иллюстрируется рис. 1.

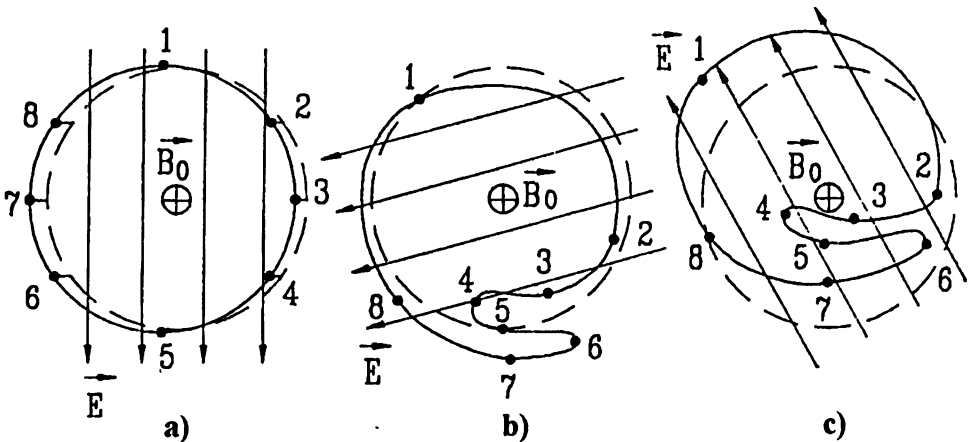


Рис. 1. Стадии взаимодействия электронов с вращающимся ВЧ полем в условиях циклотронного резонанса, когда частота излучения  $\omega \approx \omega_B$ . Для наглядности электроны представлены вращающимися вокруг одного центра. Вначале все электроны имеют одинаковую вращательную энергию (одинаковый радиус вращения) и равномерно распределены по фазе вращения, находясь на штриховой окружности. Изменение направления ВЧ поля от стадии к стадии означает, что  $\omega$  немного меньше, чем  $\omega_B$ . а) Начальная модуляция по энергии вращения; б) Образование фазового сгустка; в) Торможение фазового сгустка.

Такое взаимодействие может быть осуществлено в ВЧ поле практически произвольной структуры, например, в поле объёмного резонатора или

волновода, поэтому МЦР способны генерировать на коротких волнах значительно большие мощности, чем приборы с электродинамическими системами, имеющими характерные размеры, меньше чем рабочая длина волны, т.е. работающие на поверхностных волнах или колебаниях в малых зазорах. Разумный диапазон частот мощных непрерывных МЦР — от нескольких гигагерц до примерно 300 ГГц (на основной гирочастоте), с верхней границей, определяемой доступностью сверхпроводящих магнитов с магнитным полем более 10 Т. Для пояснения способности МЦР генерировать большие мощности рассмотрим работу генератора-гиротрона, схема которого показана на рис. 2.

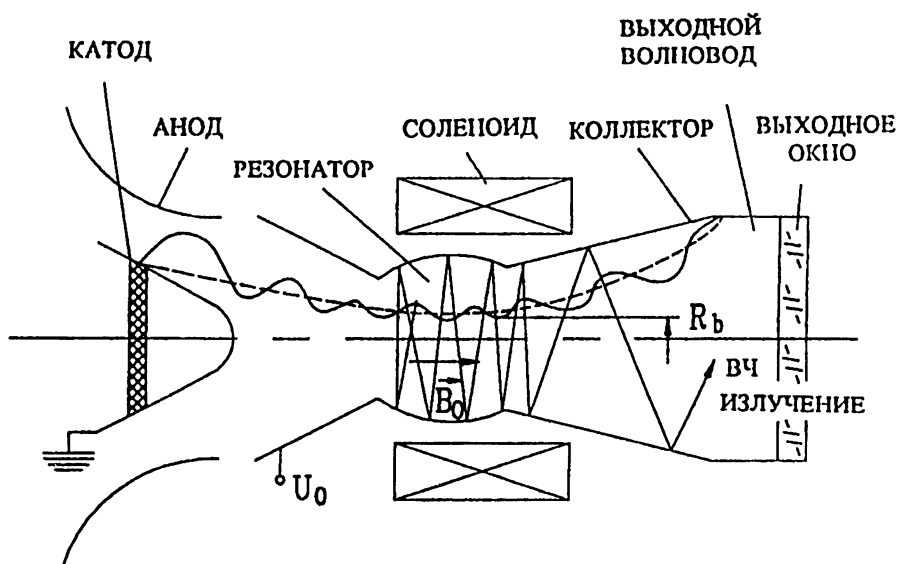


Рис. 2. Простейшая схема гиротрона (без преобразования рабочей моды). Штриховая линия — линия магнитного поля;  $R_b$  — средний радиус трубчатого электронного пучка;  $U_0$  — напряжение пучка. Траектория электрона показана волновой линией (исключая азимутальный дрейф), а ломаной линией — один из лучей, формирующих рабочую моду резонатора и волну выходного волновода.

В нём взаимодействие электронного пучка с ВЧ полем происходит в резонаторе, находящемся в области однородного участка магнитного поля соленоида. Электронный пучок формируется электронной пушкой магнетронного типа, находящейся в относительно слабом поле соленоида. Начальная вращательная скорость выходящих из прикатодной области электронов

$$v_{\perp c} = \frac{|\vec{E}_c \vec{B}_c|}{B_c^2} \quad (2)$$

увеличивается адиабатически

$$v_{\perp} = v_{\perp c} \sqrt{B/B_c} \quad (3)$$

по мере их движения к резонатору. Резонатор возбуждается на частоте на какой-либо  $TE_{mpq}$  его моде, удовлетворяющей условию синхронизма

$$1 - \frac{n\omega_B}{\omega} \pm \frac{v}{v_{ph}} \ll 1 \quad (4)$$

( $n = 1, 2, \dots$  — номер гармоники гирочастоты). В принципе рабочая мода может быть очень высокой с обоими индексами,  $m$  и  $p$ , много большими единицы. (Причины, позволяющие селективно возбудить определённую высокую моду  $TE_{mpq}$  среди десятков и сотен других мод резонатора, будут пояснены позже). Этим ослабляются обычные для других приборов ограничения на размеры электронного пучка и резонатора гиротрона, чем обеспечивается его большое преимущество по выходной мощности на коротких волнах. Из резонатора излучение выводится в виде волны  $TE_{mp}$ , сохраняющей поперечную структуру рабочей моды. Электроны, отдавшие часть своей энергии, оседают на охлаждаемом коллекторе, в котором распределение магнитного поля и профиль поверхности подобраны с учётом допустимой тепловой нагрузки. По своему устройству каждому прибору типа МЦР может быть поставлен в соответствие один из приборов с прямолинейным электронным пучком.

#### СОЛЕНОИД

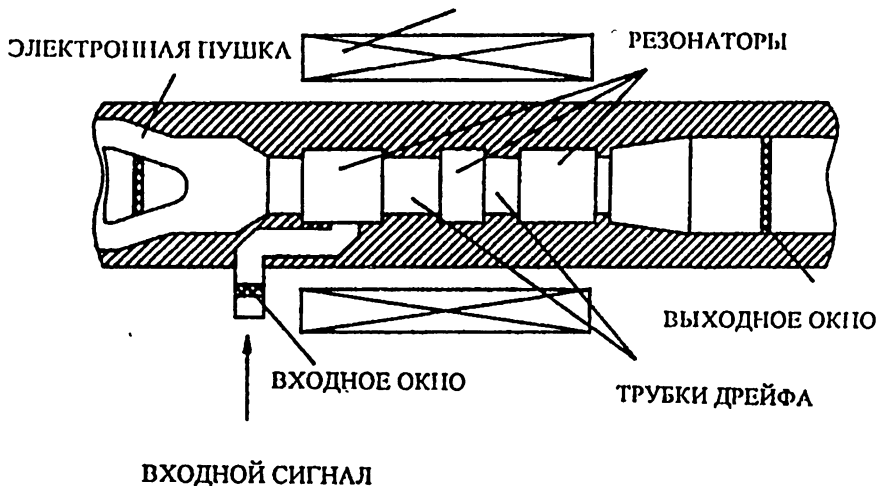


Рис. 3. Схема трёхрезонаторного гироклистрона. Все резонаторы работают на моде с одинаковой поперечной структурой поля. В первом резонаторе происходит модуляция электронного пучка, второй обеспечивает его эффективную группировку, в третьем — генерируется усиленное ВЧ излучение.

Таким образом, аналогом гиротрона является монотрон, но также существуют гироклистрон (рис. 3), гиро-ЛБВ и пр. Среди них гиротрон и гироклистрон выделяются тем, что полнее исследованы и разработаны для промышленного производства. Хотя гиротрон и гироклистрон основаны



на релятивистском эффекте, их естественный диапазон энергии электронов — слаборелятивистский, поскольку при электронных скоростях  $v$ , близких к  $c$ , сравнительно небольшие изменения энергии электронов в процессе их взаимодействия с ВЧ полем приводят к нарушению условия синхронизма (4) и, следовательно, к низкому КПД. Специфические проблемы МЦР, работающих в условиях сильного релятивистского эффекта при  $\gamma \geq 2$ , в данном обзоре не рассматриваются.

## 1.2. Краткая история

Механизм циклотронной мазерной неустойчивости был открыт независимо и почти одновременно в 1958–1959 гг. Твиссом, Шнейдером и Галоновым [2] и вскоре подтверждён в электронных экспериментах, проведённых группой Галонова [3]. Этот начальный период исследования МЦР описан в обзорах [1, 4]. В последующие годы Галонов и его сотрудники выполнили обширные теоретические и экспериментальные исследования МЦР, особенно гиротронов и гироклистронов (см. обзоры [5, 6]). После первых экспериментов при переходе от самых низких рабочих мод резонатора  $TE_{11}$  или  $TE_{01}$  к более высоким модам мощных приборов требовалось обеспечить их устойчивое селективное возбуждение. Это заставило обратиться к новым электродинамическим решениям в виде квазиоптических систем, свободно излучающих любую распространяющуюся моду. Практически каждый элемент мощного МЦР принципиально отличается или работает в режиме отличном от элементов других мощных электронных приборов, поэтому на стадии перехода от исследований к разработкам особое внимание было уделено методам расчёта и экспериментальной оптимизации электронной пушки, резонатора, магнитной системы, внутренней и внешней электродинамической системы, включая выходное окно, и коллектора. Вскоре основные принципы создания мощных гиротронов были разработаны. В начале 70-х годов в Нижнем Новгороде были изготовлены первые промышленные гиротроны для экспериментов по нагреву плазмы на электронно-циклотронном резонансе в термоядерных установках в Москве и Санкт-Петербурге. Это способствовало оживлению интереса к гироприборам в США и Европе. В 70-х годах стал образовываться мировой рынок гиротронов, прежде всего, предназначенных для термоядерных экспериментов. Первыми на него вышли американские фирмы Varian и Hughes Aircraft. В начале 90-х российская фирма «ГИКОМ» начала предлагать гиротроны, превосходившие по своим параметрам американские. В настоящее время российские промышленные гиротроны используются в 15 лабораториях в Германии, Японии, Италии, Швейцарии, США и других странах. Продолжающиеся исследования и разработка мощных МЦР в США, Японии, Франции и других странах стимулируются целым рядом новых перспективных приложений.

### 1.3. Приложения

По уже сложившейся традиции гиротроны используются в диапазоне миллиметровых волн, когда необходима средняя ВЧ мощность порядка или выше 1–10 кВт. Их применяют благодаря специфическим свойствам излучения этого диапазона, а именно:

- возможности распространения в относительно плотной плазме с концентрацией электронов  $n_e \geq 10^{13} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и взаимодействия с ней;
- возможности концентрации и дистанционного управления посредством зеркал подобно световому излучению;
- значительному поглощению практически во всех конденсированных средах, в том числе и в чистых кристаллических материалах.

Благодаря этому мощные непрерывные или квазинепрерывные гиросприборы могут быть использованы для нагрева термоядерной плазмы, плазмохимии, дальней (космической) радиолокации, высокотемпературной обработки ряда материалов, спектроскопии сверхвысокого разрешения и ряда других применений [7]. Электронно-циклотронный нагрев (ЭЦН) плазмы в термоядерных установках, практически невозможный без гиротронов, является главной областью их применения. Он устанавливает наиболее высокие требования в отношении мощности и эффективности на частотах примерно от 100 ГГц до 170 ГГц. Например, по программе “Международный термоядерный экспериментальный реактор” (ITER) для системы ЭЦН плазмы с непрерывной выходной мощностью около 100 МВт требуется разработать непрерывный гиротрон на частоте 170 ГГц с выходной мощностью 1 МВт и КПД около 40%. Новыми областями применения мощных гиротронов и гироклистронов может явиться локация космического мусора (частей спутников) и крупномасштабный, вплоть до глобального, мониторинг атмосферной активности [7].

## 2. ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ МЦР

Основные проблемы гиросприборов, прежде всего гиротронов, связаны с получением большой выходной мощности. Эти проблемы наиболее важны для гиротронов систем ЭЦН при уровне мощности около 1 МВт в непрерывном или квазинепрерывном режиме, в которых почти каждый узел (катод, резонатор, выходное окно и коллектор) должен работать при тепловых нагрузках, близких к предельным. Более того, высокий уровень мощности заставляет уделять большое внимание и эффективности всей

системы как при преобразовании энергии электронов в ВЧ излучение, так и при транспортировке и использовании излучения.

### 2.1. Электронная пушка

Электронная пушка (см. рис. 2 и 3) формирует трубчатый моноэнергетический пучок вращающихся электронов [8].

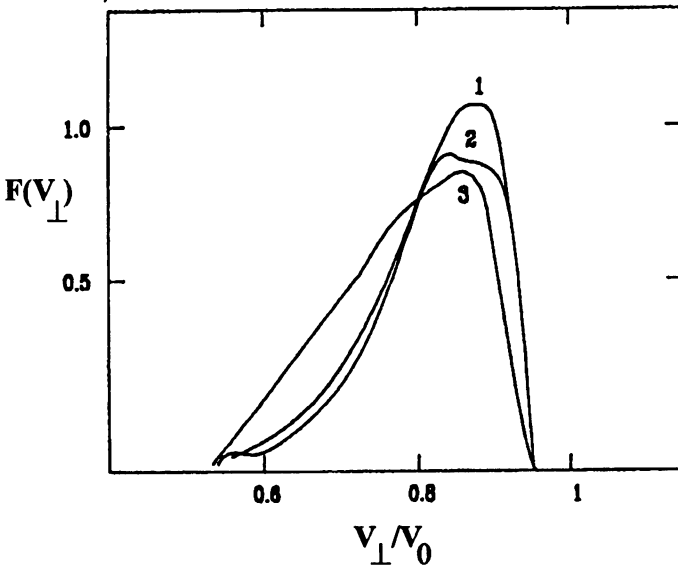


Рис. 4. Функции распределения электронов  $F(v_{\perp})$  в гиротроне при различных токах пучка: 1 — 4,4 А, 2 — 20 А, 3 — 49 А. Увеличение разброса скоростей  $\Delta v_{\perp}$ , ведущее к снижению КПД, является результатом трудно контролируемых процессов при большой плотности пространственного заряда, вероятно включающих неустойчивости, обусловленные провисанием потенциала пучка, отражением электронов от магнитной пробки и захватом их в ловушку, диокотронным эффектом и эффектом отрицательной массы [10].

Поскольку в МЦР именно энергия, связанная с вращательным (осцилляторным) движением электронов, преобразуется в ВЧ излучение, вращательные скорости электронов  $v_{\perp}$  должны значительно превышать их поступательные скорости  $v_{\parallel}$ . Это обеспечивается адиабатической накачкой осцилляторной энергии электронов согласно (2) на их пути к максимальному магнитному полю в резонаторе. Но величина  $v_{\perp}/v_{\parallel}$  ограничена сверху, прежде всего, из-за разброса вращательных скоростей в интервале  $\left[ \bar{v}_{\perp} - \frac{\Delta v_{\perp}}{2}, \bar{v}_{\perp} + \frac{\Delta v_{\perp}}{2} \right]$ , являющегося неотъемлемым свойством пучков такого типа. Разброс скоростей  $\Delta v_{\perp}$  обусловлен рядом причин, среди

которых наиболее важны неоднородности электрических и магнитных полей на катоде, шероховатость его поверхности (существенна даже неоднородность порядка 1 мкм) и эффекты, связанные с пространственным зарядом электронного пучка. Типичная функция распределения  $F(v_{\perp})$  и её эволюция при увеличении тока пучка показаны на рис. 4. Из-за разброса скоростей  $\Delta v_{\perp}$  электроны попадают в область максимального поля в резонаторе с большим разбросом поступательных скоростей  $v_{\parallel}$ . Электроны, имеющие максимальные начальные скорости  $v_{\perp c}$ , могут даже отразиться от магнитной пробки. При отсутствии отражённых частиц соотношение

$$t_{\perp} = \frac{\bar{v}_{\perp}^2}{v_0^2} \leq \frac{1}{1 + \Delta v_{\perp} / \bar{v}_{\perp}}, \quad (5)$$

( $v_0 = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}$  — полная скорость электронов) определяет эффективность электронной пушки. Поскольку гиротроны обычно работают в режимах, когда соотношение (5) близко к равенству, небольшая часть электронов всё же отражается от магнитной пробки и оказывается запертой в ловушке между пробкой и катодом. В этой области они могут накапливаться и вызывать некоторые виды неустойчивостей электронного пучка, приводящие к ухудшению, а иногда и к нарушению нормальной работы. Для того, чтобы избежать этих нежелательных явлений или минимизировать их, приходится уменьшать эффективность пушки  $t_{\perp}$ . Некоторые другие отрицательные эффекты разброса скоростей рассматриваются в подразделах 2.3 и 2.6. Разброс скоростей является основной причиной, по которой КПД гиротронов обычно не превышает 40% вместо 50÷60% теоретически возможных при моноскоростном ( $\Delta v_{\perp} = 0$ ) пучке [10]. Возможности оптимизации электронной пушки гиротрона ограничены тем, что катод работает в режиме температурного ограничения тока эмиссии (не ограничения тока пространственным зарядом пучка как в традиционных электронных приборах), вследствие чего локальная плотность тока эмиссии зависит от состояния поверхности эмиттера и, в принципе, от времени. При заданном диаметре катода максимальный ток электронной пушки практически слабо зависит от рабочей частоты гиротрона. Разработаны надёжные катоды, обеспечивающие получение пучков с мощностью более 3 МВт в непрерывном режиме, для мегаваттных гиротронов на частотах до 170 ГГц.

## 2.2. Резонатор

В резонаторе электронный пучок возбуждает одну из его мод  $TE_{mnpq}$  и отдаёт ей часть своей осцилляторной энергии. В простейшем случае излучение из цилиндрического или слабонерегулярного резонатора [11] гиротрона, изображённого на рис. 2, обладает структурой волноводной

моды  $TE_{mp}$ . Обычно в таких цилиндрических резонаторах возбуждается наиболее высокодобротная мода с одной продольной вариацией поля  $TE_{mp1}$ . Кроме более высокой добротности, чем моды с  $q \geq 2$ , моды с  $q = 1$  менее чувствительны к разбросу скоростей электронов, как это следует из (4), поскольку при их большей фазовой скорости  $v_{ph} = \pi/qL$  (где  $L$  — длина резонатора) доплеровское уширение циклотронного резонанса практически несущественно. Высокая эффективность взаимодействия электронного пучка с ВЧ полем может быть обеспечена только при достаточно большой длине резонатора  $L$ , обычно от 4 до 10 длин волны [12]. Выбор рабочей моды и длины резонатора определяется условием, связывающим заданные частоту  $\omega$ , выходную мощность  $P_{out}$  и максимальную допустимую плотность омических потерь в резонаторе

$$P_{ohm} \leq \frac{5\chi dL}{\lambda^2 R_{cav}^2 [1 - (m/kR)^2]} P_{out}, \quad (6)$$

где эмпирический коэффициент  $\chi \cong 1,5$ ,  $\lambda$  — длина волны,  $\alpha$  — глубина скин-слоя,  $R_{cav}$  — радиус резонатора,  $k = \omega/c$  — волновое число. В резонаторе могут возбуждаться либо симметричные  $TE_{op1}$ , либо несимметричные  $TE_{mp1}$  моды (см. рис. 5).

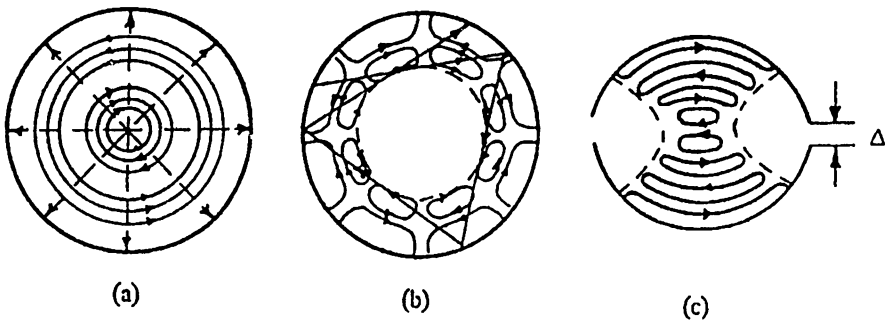


Рис. 5. Поперечные сечения резонаторов и структуры ВЧ электрического поля различных мод: а) симметричная мода (здесь  $TE_{02}$ ) образуется лучами, проходящими через центр резонатора. б) Несимметричная мода (здесь  $TE_{42}$ ) формируется лучами касательными к внутренней каустике. Трубочатый пучок наилучшим образом связан с такой модой, когда его радиус  $R_b$  близок к радиусу каустики  $R_{caus} = m\lambda/2\pi$ . в) Мода  $TE_{14}$  в щелевом резонаторе. Гиротрон с таким резонатором плавно перестраивается по частоте при изменении ширины щели  $\Delta$ .

Симметричные моды имеют минимальные ВЧ омические потери и преимущественно используются в гиротронах умеренной мощности на сравнительно низких частотах. В мощных высокочастотных лампах, в которых радиус электронного пучка  $R_b \gg \lambda$ , коэффициент его связи

$$G_{mp} = \frac{J_{m\pm 1}^2(kR_b)}{(k^2 R_{cav}^2 - m^2) J_m^2(kR_{cav})} \quad (7)$$

с любой симметричной модой много меньше, чем с несимметричной модой, имеющей радиус каустики  $R_{\text{caus}} = m/k$ , близкий к  $R_b$ . Знаки “-” и “+” в уравнении (5) означают, что возбужденная несимметричная мода вращается либо в направлении вращения электронов, либо в обратном направлении, соответственно. Несимметричные моды с индексами  $m \gg 1$  и  $p > 1$  используются в гиротронах мегаваттного уровня мощности. Изменяя магнитное поле резонатора соленоида и напряжение пучка, можно возбудить несколько соседних мод одну за другой со скачком рабочей частоты. Излучение резонатора, имеющее сложную структуру поля, для дальнейшей его транспортировки должно быть преобразовано в волновой пучок. Это осуществляется внутри гиротрона посредством встроенного квазиоптического преобразователя мод. В резонаторе с продольными щелями наивысшей добротностью (рис. 5с) обладают моды  $TE_{1p1}$ . Щелевой резонатор превращается в квазиоптический (типа Фабри-Перо) при ширине щелей в несколько длин волн. В гиротронах с такими резонаторами возможна плавная регулировка частоты путём изменения расстояния между половинами резонатора.

**2.2.1. ВЧ мощность и КПД.** Как уже отмечалось ранее, в МЦР электронный КПД  $\eta_e$  определяется эффективностью преобразования вращательной энергии электронного пучка в ВЧ излучение  $\eta_{\perp}$  и КПД электронной пушки  $t_{\perp}$  так, что

$$\eta_e = \eta_{\perp} t_{\perp}. \quad (8)$$

Общий КПД  $\eta$  включает, кроме того, коэффициент, определяющий омические ВЧ потери, потери на преобразование мод и их транспортировку. Рассмотрим условия высокоэффективного возбуждения в резонаторе рабочей моды  $TE_{mp1}$ , предполагая отсутствие взаимодействия с любой другой модой. Это означает, что электронный пучок достаточно хорошо связан с рабочей модой (см. (7)), отстройка циклотронной частоты  $\omega_B$  от её резонансной частоты  $\omega$  оптимальна (несколько процентов), и хотя бы одно из этих условий, совмещение которых обеспечивает самовозбуждение, не выполняется для любой другой моды резонатора. Зоны самовозбуждения и высокоэффективной работы гиротрона показаны на рис. 6 на плоскости “напряжение пучка  $V$  – ток пучка  $I$ ”. После включения точка пучка движется из начала координат [ $V = 0, I = 0$ ] к рабочей точке, соответствующей высокоэффективному режиму. Типичные экспериментальные зависимости выходной мощности и КПД мощного гиротрона показаны на рис. 7. Выходная мощность лампы ограничена тепловой перегрузкой либо резонатора (нарушающей неравенство (6)), либо другого узла, либо ухудшением качества электронного пучка при большом токе.

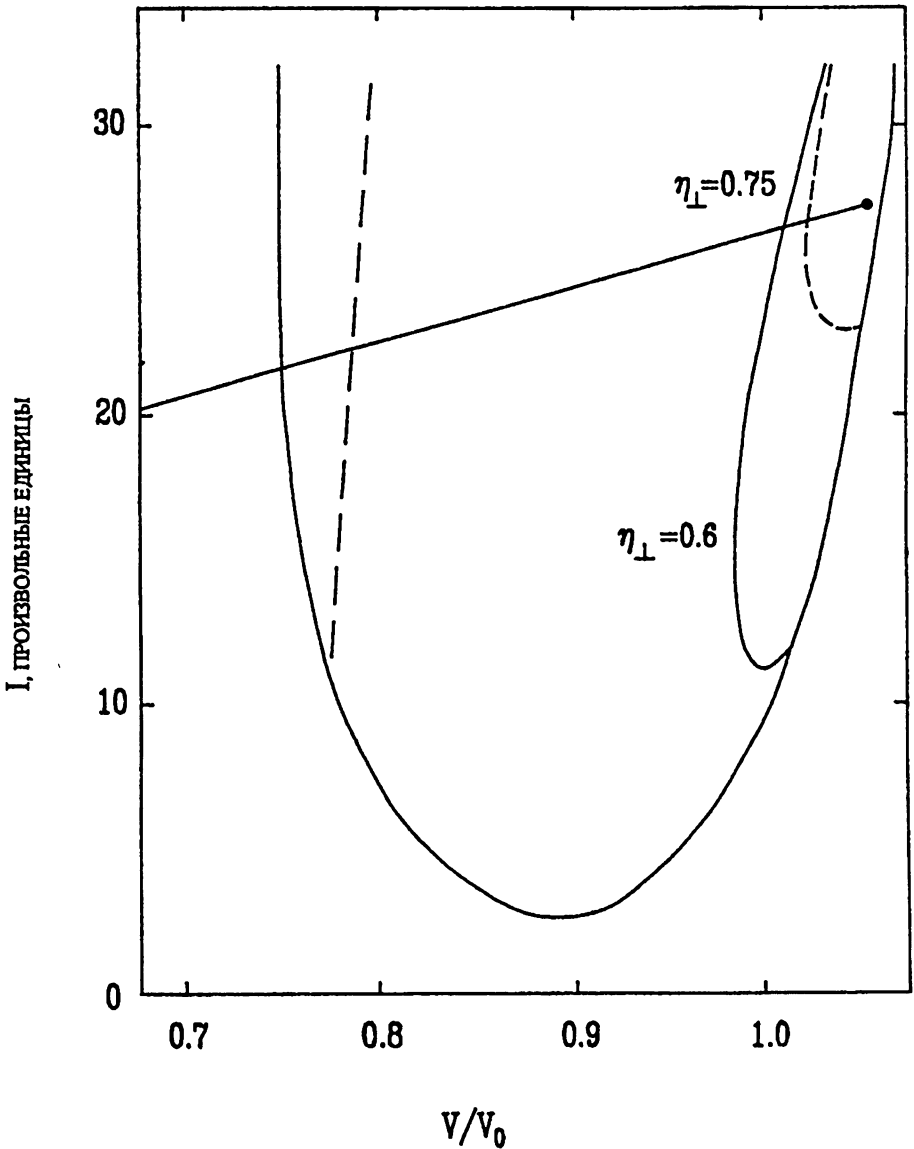


Рис. 6. Расчётная зона возбуждения рабочей моды на частоте  $\omega_0$ , изображённая на плоскости «напряжение пучка  $V$  – ток пучка  $I$ ». Внутри её сплошной линией выделена область высокоэффективной генерации с поперечным КПД  $\eta_{\perp} \geq 60\%$  (соответствует электронному КПД  $\eta \approx 45\%$ ) и точка максимального КПД  $\eta_{\perp \max} = 75\%$ . Наклонная линия изображает изменение параметров пучка при включении гиротрона. Штрихованными линиями показаны те области, из которых рабочая мода вытесняется паразитными модами, близкими по структуре поля к рабочей и отличающимися от неё резонансными частотами  $\omega_{p1} = 0,985\omega_0$  и  $\omega_{p2} = 1,015\omega_0$ .

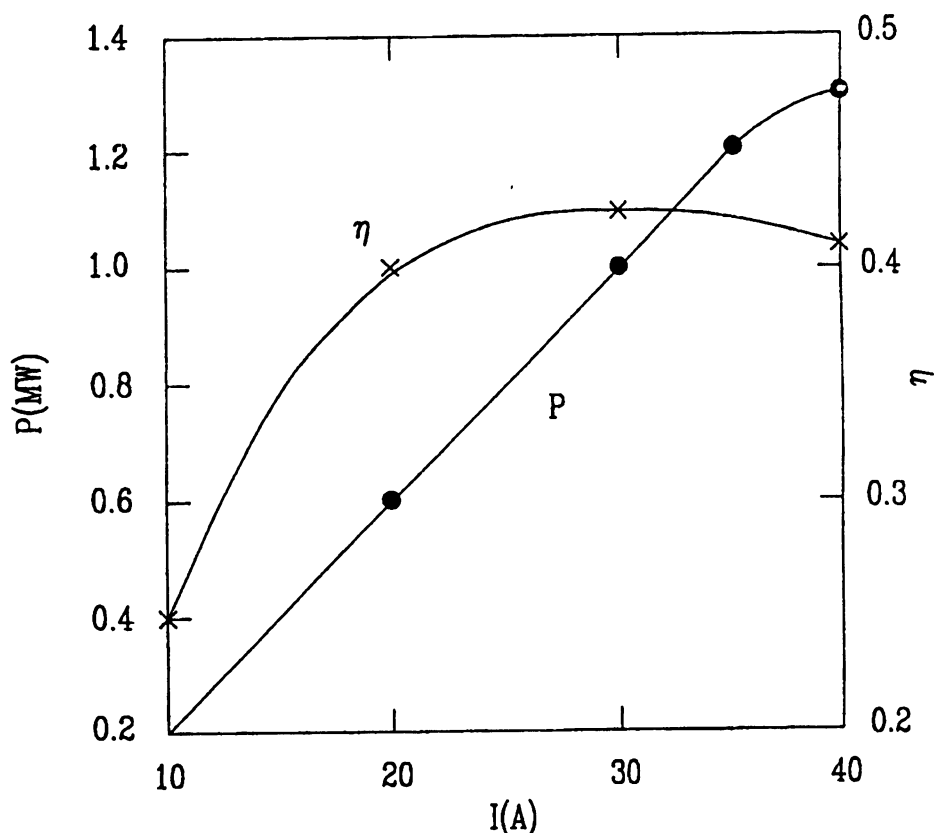


Рис. 7. Зависимость выходной мощности КПД от тока пучка в гиротроне с встроенным преобразователем мод, полученная при испытаниях гиротрона на частоте 110 ГГц при длительности ВЧ импульса 2 с.

Другой причиной, которая может ограничить КПД и выходную мощность лампы, является возбуждение паразитной моды, если селективность резонатора недостаточна.

**2.2.2. Селекция мод.** Общее число мод  $TF_{mр}$ , распространяющихся в волноводе с радиусом  $R_{cav}$ , составляет

$$N \cong \left( \frac{kR_{cav}}{2} \right)^2. \quad (9)$$

В мощных высокочастотных гиротронах  $N$  достигает сотен мод. Однако существует ряд факторов, обеспечивающих эффективную селекцию мод в обычном гиротроне, а именно:

- электронно-циклотронные мазерные колебания возбуждаются только в полосе частот  $\Delta\omega_B$ , определяемой временем пролёта электронов через резонатор, обычно  $\Delta\omega_B/\omega_B \leq 5\%$ ;



- возбуждаться могут только моды  $TE_{mp}$ , критические (резонансные) частоты которых находятся в пределах полосы  $\Delta\omega_B$ ;
- условие эффективной связи моды с электронным пучком в соответствии с уравнением (7) практически определяет азимутальный индекс  $m$  рабочей моды.

Чем выше частота и ВЧ мощность гиротрона, тем больше должно быть отношение радиуса резонатора к длине волны  $R_{cav}/\lambda$  и, соответственно, гуще спектр его собственных мод, так что зоны генерации соседних мод могут перекрываться, как показано на рис. 6. Тогда зона рабочей моды сужается с обеих сторон: и с низко-, и с высокoeffективной. Результаты измерения выходной мощности гиротрона на высокой моде резонатора, в котором было возможно одновременное самовозбуждение двух или более резонаторных мод, показывают, что КПД колебаний в рабочей моде весьма низок (ср. кривую 1 на рис. 8 с другими).

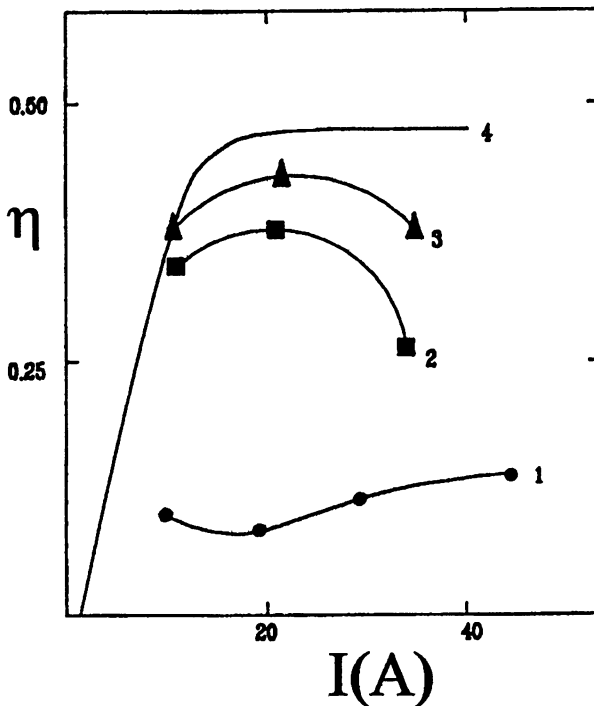


Рис. 8. Зависимость КПД от тока пучка в гиротроне с коаксиальным резонатором на моде  $TE_{20,13}$ . Кривая 1, снятая без центрального стержня, показывает низкую эффективность генерации из-за конкуренции между рабочей и паразитными модами.

Для обеспечения одномодовой генерации в гиротронах могут использоваться дополнительные методы электродинамической и электронной селекции мод. Электродинамическая селекция направлена на снижение до-

бротности паразитных мод, а электронная — на ослабление их связи с электронным пучком. Взаимодействие мод в гиротроне при токе пучка меньше или порядка оптимального, как правило, имеет характер конкуренции и даже при небольшом преимуществе в инкременте рабочей моды над паразитными, последние эффективно подавляются. Известны несколько методов дополнительной селекции, обеспечивающих повышенную добротность единственной рабочей моды из числа прочих с близкими частотами. Одним из наиболее эффективных из них является использование коаксиального резонатора. Специально подобранная форма центрального стержня позволяет значительно снизить добротность нежелательных мод, в то время как добротность рабочей моды остаётся практически такой же, как в полном цилиндрическом резонаторе. Рис. 8 иллюстрирует такую селекцию мод в режиме работы на больших мощностях. В экспериментах с короткими импульсами в коаксиальных гиротронах был достигнут максимальный уровень выходной мощности 2,1 МВт [14]. В настоящее время коаксиальные гиротроны считаются потенциальными источниками излучения выходной мощностью около 2 МВт на частотах близких к 150 ГГц и более 1 МВт на частотах около или более 200 ГГц.

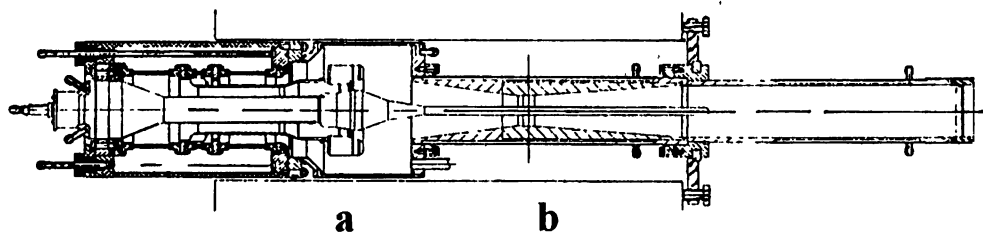


Рис. 9. Экспериментальный короткоимпульсный гиротрон с коаксиальным резонатором и обращённой электронной пушкой. а) Электронная пушка с анодом внутри катода. б) Центр резонатора.

Рис. 9 представляет новый вариант гиротрона, который рассматривается как прототип промышленного коаксиального гиротрона с выходной мощностью более 1 МВт на частоте 140 ГГц. В первых короткоимпульсных экспериментах с такими гиротронами в ИПФ и Центре исследований Карлсруэ (Германия) были получены выходные мощности до 1,5 МВт. В других вариантах гиротронов с дополнительной селекцией мод применяется секционирование электронных пучков (в многолучевых гиротронах [15]) или области взаимодействия с ВЧ полем (в гиротронах со связанными резонаторами [16]), синхронизация внешним сигналом [17] и пр.

### 2.3. Квазиоптические системы

ВЧ излучение низкочастотных гиротронов умеренной мощности, работающих на сравнительно низких модах  $TE_{mp1}$ , где  $m$  равно 0 или 1, обычно выводится в виде волноводной моды  $TE_{mp}$ . В гиротронах, работающих с более высокими модами, предпочтительно преобразовывать рабочую моду гиротрона в узконаправленный волновой пучок непосредственно внутри лампы, как показано на рис. 10, иллюстрирующем идею квазиоптического встроенного преобразователя. Оснащение коротковолновых гиротронов квазиоптическим преобразователем мод [18] было принципиальным шагом в их разработке. Квазиоптический преобразователь дает возможность:

- использовать очень высокие рабочие моды, необходимые для получения мощного коротковолнового излучения;
- трансформировать рабочую моду в параксиальный волновой пучок, удобный для использования;
- развести в пространстве электронный и волновой пучки и таким образом решать проблемы коллектора и выходного окна практически независимо.

Практически все институты и фирмы, имеющие дело с разработкой мощных гиротронов, используют сейчас весьма похожие схемы их электродинамических систем, включающие резонатор, волноводный переход-излучатель со специальным срезом, квазипараболическое зеркало, формирующее узконаправленный волновой пучок с линейной поляризацией и несколько зеркал для дополнительной коррекции волнового пучка и вывода его через выходное окно. Однако, вместе с квазиоптической (КО) схемой пришли и некоторые проблемы. Во-первых, схема является открытой линией передачи с присущими ей дифракционными потерями. Встроенный квазиоптический преобразователь подразумевает некоторую часть излучения, оставленную внутри лампы из-за дифракции на рефлекторах конечной апертуры и окне. Это излучение может, в принципе, вызывать пробой внутри лампы и перегрев отдельных элементов. При использовании простейших вариантов КО излучателя и последующих квадратичных зеркал эти потери были относительно высоки  $10 \div 20\%$ . В современных длинноимпульсных (непрерывных) мощных гиротронах эти потери не должны превышать  $3 \div 5\%$ . Во-вторых, в большинстве практических случаев выходной волновой пучок гиротрона должен либо иметь высокое содержание выбранной моды внешней линии передачи (гауссов волновой пучок, волна  $HE_{11}$ ) или легко трансформироваться в такую волну. Отметим что для простейших вариантов КО преобразователей в нужной моде содержится приблизительно  $80\%$  излучаемой мощности.

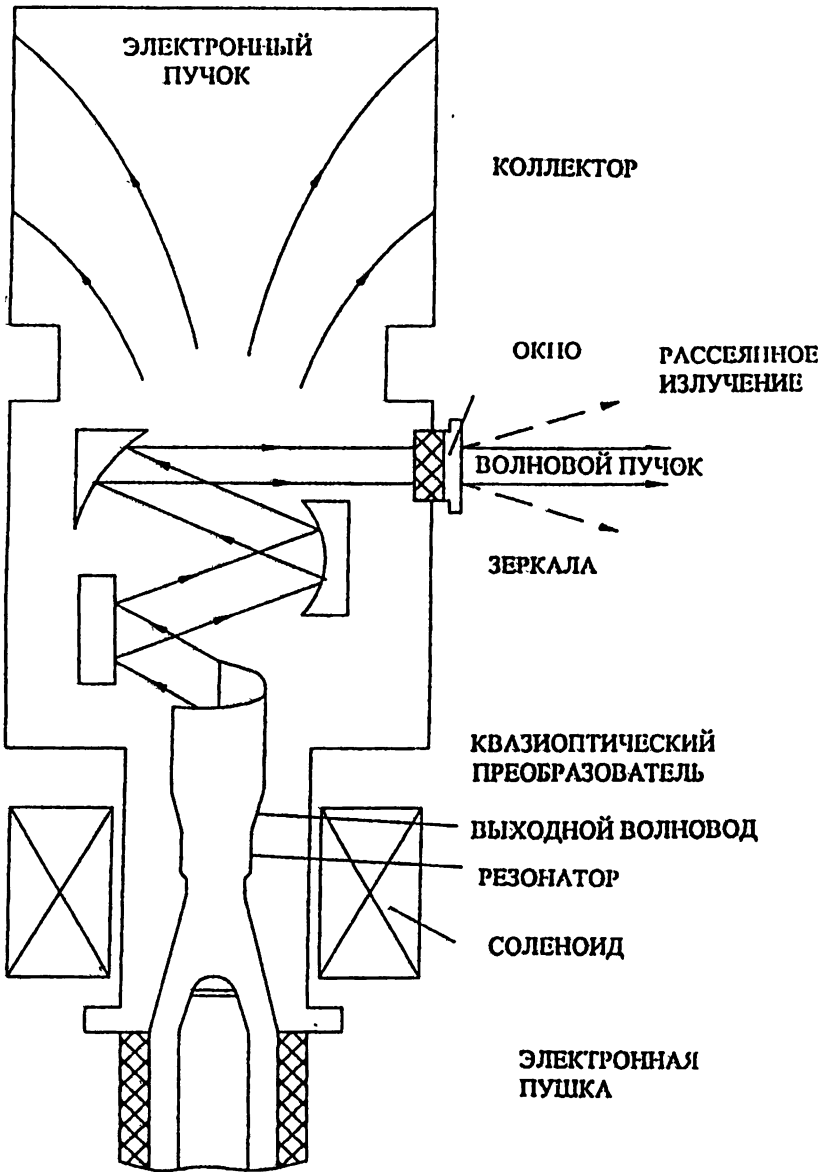


Рис. 10. Схема мощного гиротрона с встроенным преобразователем рабочей моды в волновой пучок.

Современные фазовые корректоры позволяют не только снизить дифракционные потери, но и повысить этот коэффициент примерно до 95%. В-третьих, одним из самых критичных узлов гиротрона является выходное окно. Структуры ВЧ поля с равномерным распределением по поверхности окна или сконцентрированным у его края наиболее выгодны для охлаждения окна в длинном импульсном или непрерывном режиме. Оба последних распределения весьма существенно отличаются от пространственных распределений поля на срезе излучателя и полей собственных волн линий передачи. Поэтому необходимо оптимизировать распределение интенсивности излучения по окну с учётом тепловых и механических характеристик окна и его режима работы. В-четвёртых, волновой пучок большого поперечного размера очень чувствителен к возмущению его фазового фронта. Волновой пучок внутри гиротрона отражается от нескольких зеркал и проходит через окно. Все эти элементы неидеальны из-за неточностей изготовления, небольших смещений при сборке и отжиге лампы, неоднородности материала окна и пр. Волновой пучок, распространяясь по электродинамической системе, “аккумулирует” все эти незапланированные коррекции фазового фронта. Плавные возмущения фазового фронта “проявляются” на значительном расстоянии (несколько метров) от выходного окна гиротрона, где модуляция фазового фронта превращается в амплитудную. По этой причине структура волнового пучка может существенно отличаться от расчётной, и её необходимо определять экспериментально для того, чтобы при необходимости обеспечить дополнительную коррекцию волнового пучка. В последние годы разработаны эффективные методы преобразования высших волноводных мод в параксиальные пучки с оптимизированными распределениями полей [19] и адекватные методы измерения их параметров [20].

**2.3.1. Высокоэффективные преобразовали волн. Синтез зеркальных корректоров.** Известны два основных принципа повышения эффективности КО преобразователей. Первый принцип использует предварительное “приготовление” — коррекцию профиля излучения (“прешэйпинг”) внутри волноводного перехода перед его излучением со среза волновода [19]. Для этой цели на конечную часть волноводного перехода наносится неглубокая спиральная деформация, постепенно трансформирующая высшую волноводную волну в локализованный пучок, отражающийся от стенок волновода (см. рис. 11). Приготовленное таким образом излучение выводится через срез волновода практически без рассеяния на кромках среза, что резко снижает (в два–три раза) дифракционные потери внутри прибора. Второй принцип базируется на использовании зеркальных корректоров сложной формы для оптимизации пространственной структуры волнового пучка как внутри гиротрона, так и после прохождения им вакуумного окна. Сформулированная в [21] идея синтеза

квазиоптических фазовых корректоров по заданной структуре поля была выполнена на основе адекватного программного обеспечения и сейчас используется при разработке квазиоптических систем [22].

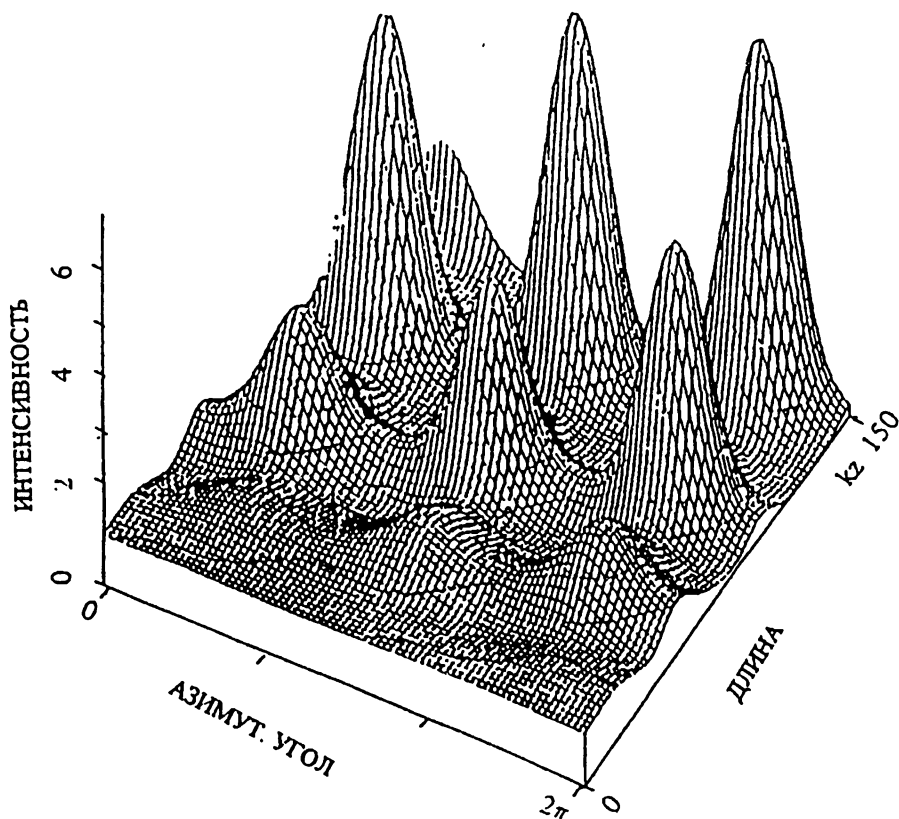


Рис. 11. Интенсивность ВЧ излучения на моде  $TE_{15,4}$  в выходном гофрированном волноводе после резонатора. Поверхность волновода развёрнута с воображаемой линией разреза при  $\varphi = 0$ , совпадающей с  $\varphi = 2\pi$ . Первоначально однородное поле при  $kz = 0$  и  $\varphi = 0$ , ВЧ поле постепенно трансформируется в волновой пучок. Чтобы выпустить этот пучок в свободное пространство с минимальными дифракционными потерями, продолжение волновода следует отрезать по линиям, вдоль которых расчётная интенсивность ВЧ поля наиболее близка к нулю.

Рис. 12 показывает профили корректирующих зеркал и структуры полей одного из гиротронов.

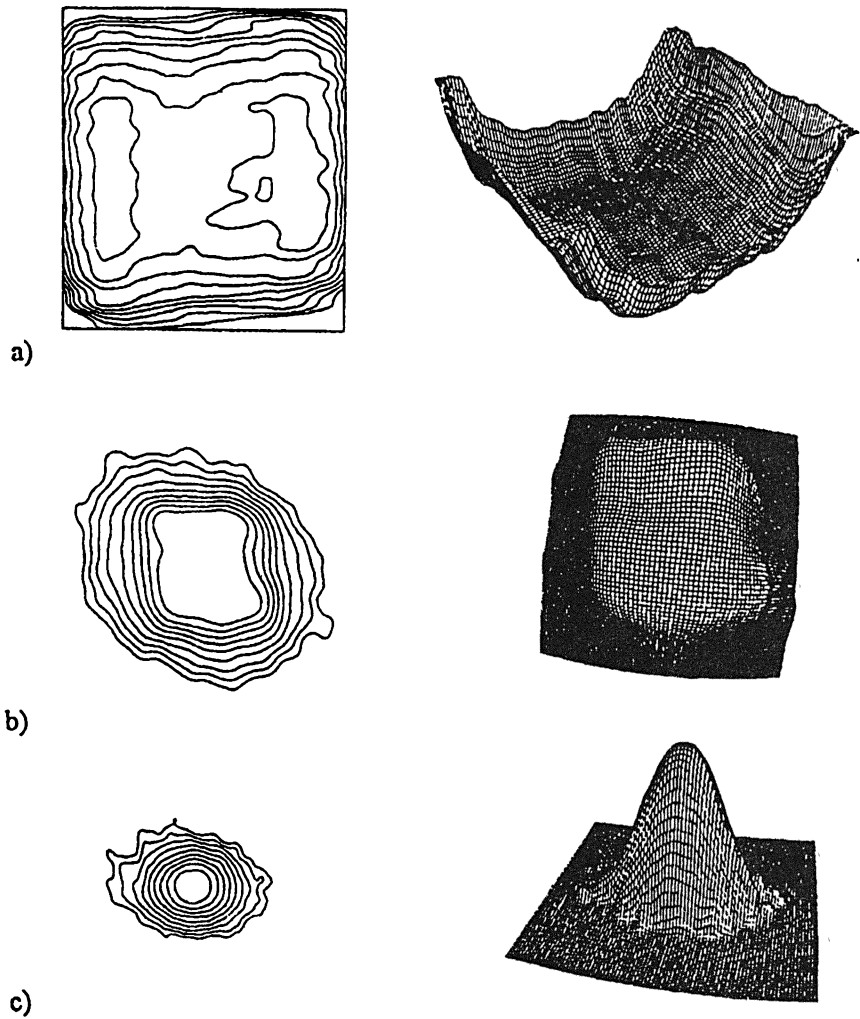


Рис. 12. Синтез заданных структур полей в квазиоптическом гиротронном преобразователе. а) Профиль поворотного зеркала, повышающего содержание гауссовой компоненты поля при одновременном уменьшении интенсивности поля на окне и дифракционных потерь внутри гиротрона. б) Измеренное распределение интенсивности поля на окне гиротрона. в) Измеренное распределение интенсивности поля на дистанции 1040 мм от окна.

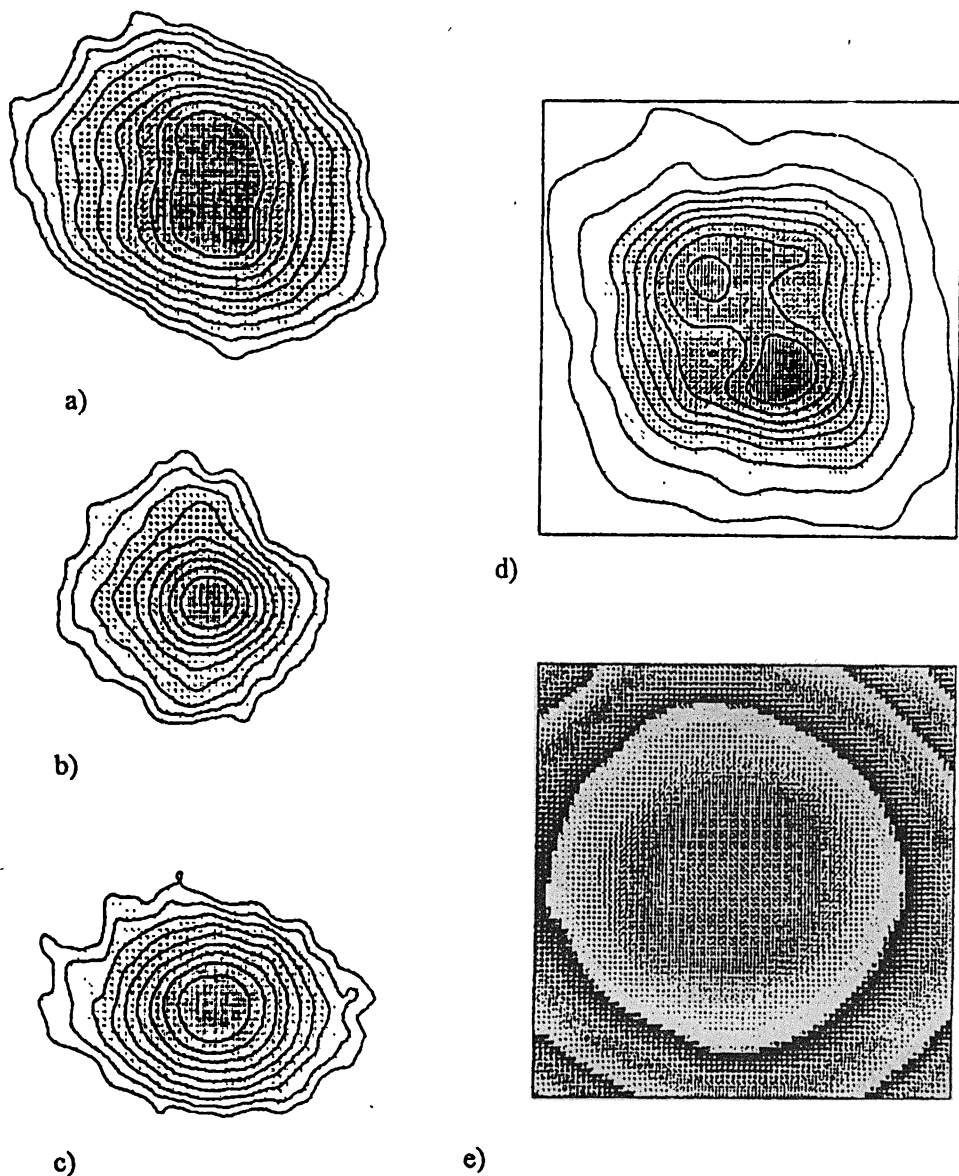


Рис. 13. Реконструкция волнового пучка гиротрона 140 ГГц по тепловизионным измерениям интенсивности в нескольких поперечных сечениях. а), б), с) Амплитудные распределения, измеренные на дистанциях 380 мм, 640 мм и 1040 мм от окна гиротрона. д) Амплитудное распределение на выходе гиротрона, реконструированное по трём сечениям. е) Реконструированное фазовое распределение на выходе гиротрона.



**2.3.2. Измерение амплитудных и фазовых распределений волновых пучков. 3D-реконструкция поля.** Волновой пучок на выходе гиротрона имеет очень высокую плотность мощности (от 10 до 100 кВт/см<sup>2</sup>), что делает весьма сложным измерение детальных характеристик амплитудного и фазового пространственных распределений. Наиболее часто используются измерения в режиме относительно коротких импульсов 0,1 ÷ 1 мсек или в ответвлённом с помощью металлической дифракционной решётки луче малой мощности, составляющей 10<sup>-2</sup> ÷ 10<sup>-5</sup> полной мощности излучения. Распределение интенсивности можно измерить путём регистрации термоизображений инфракрасной камерой [20] или детектором в ответвлённом канале. Реконструкция фазового фронта волнового пучка возможна также двумя методами. Первый базируется на использовании канала с опорным волновым пучком с хорошо известным распределением амплитуды и фазы [23] и предполагает относительно большую мощность в нём (например, часть излучения того же гиротрона). Этот метод требует тщательной юстировки компонентов и значительного места для их размещения. Очень перспективным представляется другой метод, не требующий опорного канала и основанный на измерении распределений интенсивности пучка в трёх поперечных сечениях его и последующем численном синтезе фазового фронта [24]. Пример применения последнего метода показан на рис. 13.

#### 2.4. Выходное окно

Проблемы, связанные с выходным окном, являются главным препятствием при создании мегаваттного непрерывного гиротрона. ВЧ потери в согласованном (резонансном) окне  $P_W$  растут вместе с рабочей частотой, согласно

$$P_W = \frac{(\epsilon^2 + 1)}{2} \operatorname{tg} \delta \cdot k d_W P_{out}, \quad (10)$$

вследствие как большей оптической толщины диска окна  $\frac{\sqrt{\epsilon} d_W}{\lambda}$ , так и более высокого параметра потерь,  $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{Im} \epsilon / \operatorname{Re} \epsilon$ . Наряду с низким уровнем потерь на высоких частотах диэлектрические материалы, используемые для производства окна, должны иметь высокие прочность и теплопроводность, а также быть приспособленными для пайки. В настоящее время для окон мощных гиротронов используются только диски из сапфира и нитрида бора. Два варианта выходных окон современных гиротронов для ЭЦН показаны на рис. 14. В двухдисковых окнах используется сапфир. На частоте 140 ГГц оценки максимальной непрерывной мощности передачи для таких окон дают величину 300 кВт, ограниченную закипанием жидкого хладагента (обычно применяется FC-75). Нитрид бора

(BN) используется для однодисковых окон. По сравнению с сапфировыми окнами они менее чувствительны к термическим напряжениям и могут выдерживать более высокие температуры. BN диск диаметра 100 мм способен поглотить без перегрева более 50 кДж энергии. На частоте 140 ГГц это обеспечивает передачу импульсной энергии 1,5 МДж.

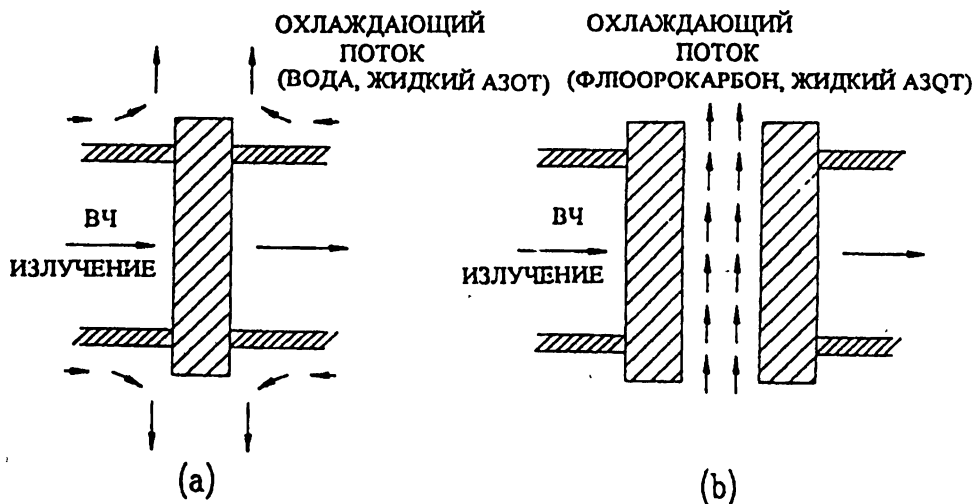


Рис. 14. Два типа выходных окон мощных гиротронов. а) Однодисковое окно; б) Двухдисковое окно ( $LN_2$  — сжиженный азот).

Ни одно из существующих окон не применимо для 0,5–1 мегаваттных гиротронов непрерывного действия, предназначенных для ЭЦН. Такое положение является предпосылкой для новых подходов к проблеме окна, включая поиск новых материалов, рабочих режимов и вариантов конструкции, направленных на снижение потерь, улучшение теплоотвода и оптимизацию структуры ВЧ поля (см. 2.3). В частности, несколько лет назад было предложено использовать сапфировое окно, охлаждённое до температуры жидкого азота или ещё более низкой. Это предложение основано на сильной температурной зависимости параметров сапфира — уменьшении  $tg\delta$  и повышении теплопроводности при глубоком охлаждении. В экспериментах, проведённых совместно ИПФ и Курчатовским институтом, исследовались такие криогенные окна при начальной температуре 80 К, облучаемые волновым пучком с частотой 140 ГГц в трёхсекундных импульсах с интенсивностью ВЧ поля, подобной интенсивности в мегаваттном волновом пучке. Эти эксперименты подтвердили ожидания. Расчёт температурного режима однодискового окна с охлаждением по краю показывает возможность реализации рабочих режимов с непрерывной мощностью около 1 МВт на частоте 140 ГГц.

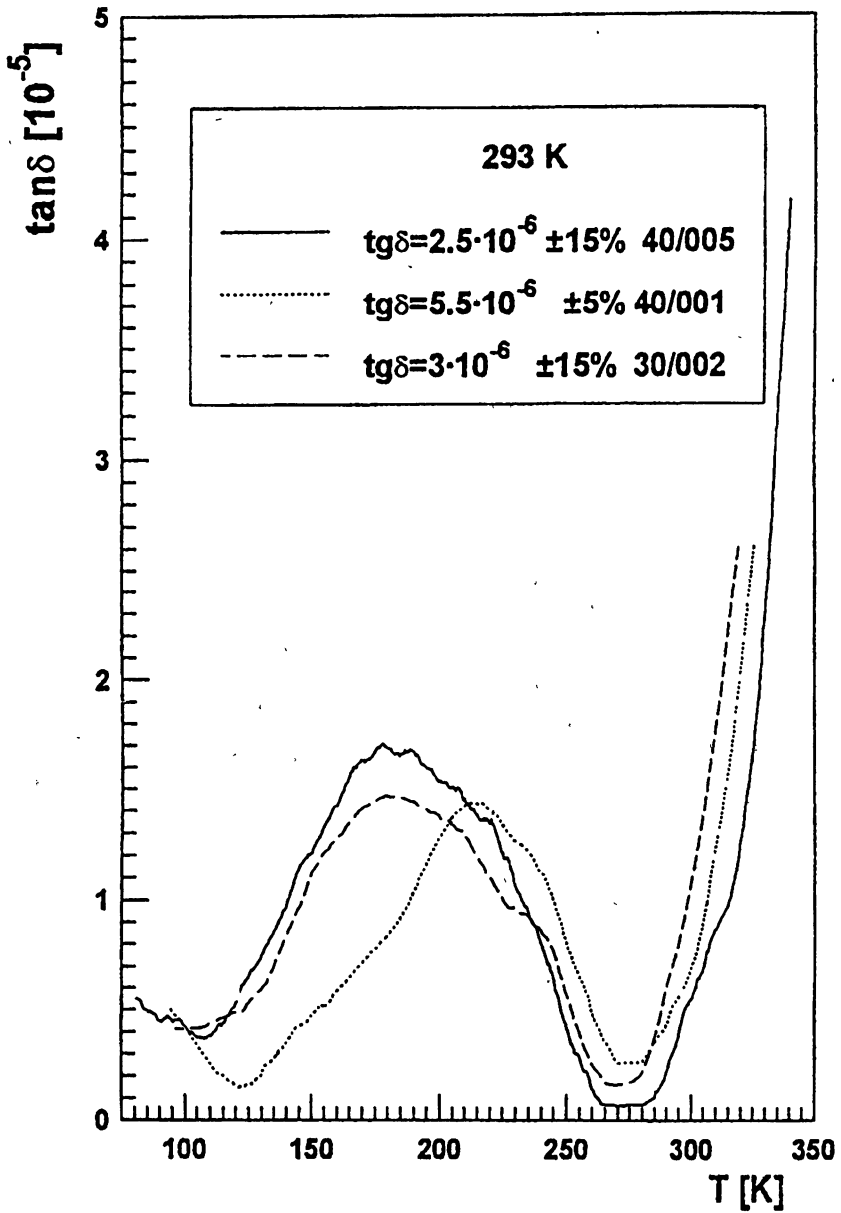


Рис. 15. Температурные зависимости  $\text{tg}\delta$  трёх легированных кремниевых дисков на частоте 170 ГГц.

Недавно появилось сообщение об испытаниях фирмой Thompson гиротрона на частоте 118 ГГц с криогенным окном, выходная мощность которого в импульсах длительностью до 2 с превышала 400 кВт [25]. Однако криогенные окна весьма сложны по конструкции и в эксплуатации. Кремний с компенсированной электрической проводимостью и, соответственно, крайне низким  $\text{tg}\delta$ , рассматривается в качестве альтернативы. Температурные зависимости  $\text{tg}\delta$  образцов кремния на рис. 15 показывают, что в лучших из них  $\text{tg}\delta$  близок к  $10^{-6}$ . Недостатком кремния является быстрое возрастание ВЧ потерь при умеренном нагреве до 350 К; тем не менее, этот недостаток может быть компенсирован неглубоким охлаждением окна на  $30 \div 50^\circ\text{C}$  ниже комнатной температуры. Оценки максимальной выводимой ВЧ мощности до 1 МВт при непрерывной работе для кремниевое окно весьма благоприятны даже для частоты 170 ГГц, как видно из рис. 16.

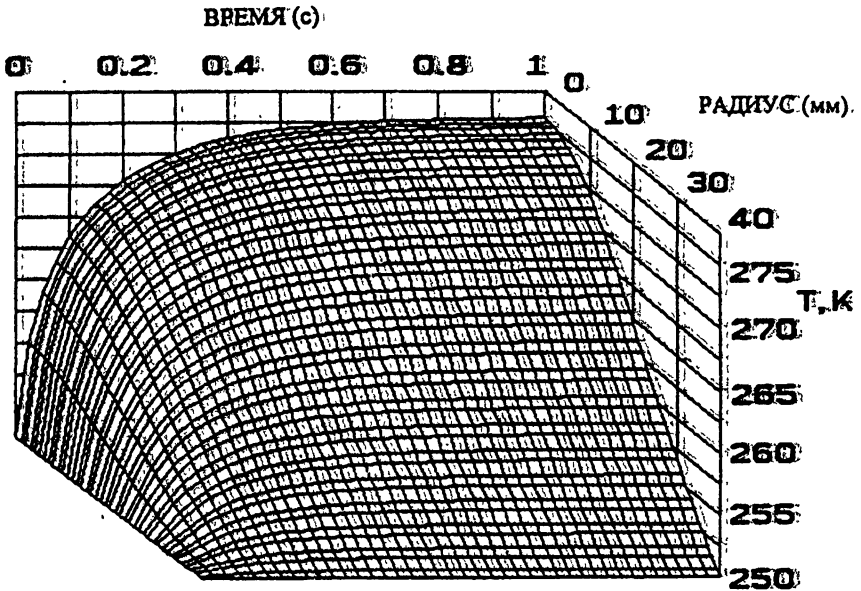


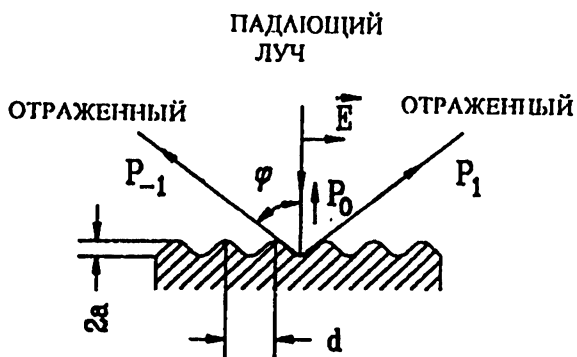
Рис. 16. Выходной узел двухоконного гиротрона. Лучи, формирующиеся волновые пучки, показаны ломаными линиями. а) Расщепитель волнового пучка на основе дифракционной решётки; при оптимальных размерах зеркально отражённая мощность  $P_0 = 0$ . б) Поперечное сечение квазиоптической системы.

Вероятно вскоре модели кремниевых окон могут быть испытаны при большой мощности излучения. Лучшим материалом для окна является алмаз, который характеризуется минимальным уровнем ВЧ потерь и наивысшей теплопроводностью при комнатной температуре. Большие поликристаллические алмазные пластины могут быть получены путём осажде-

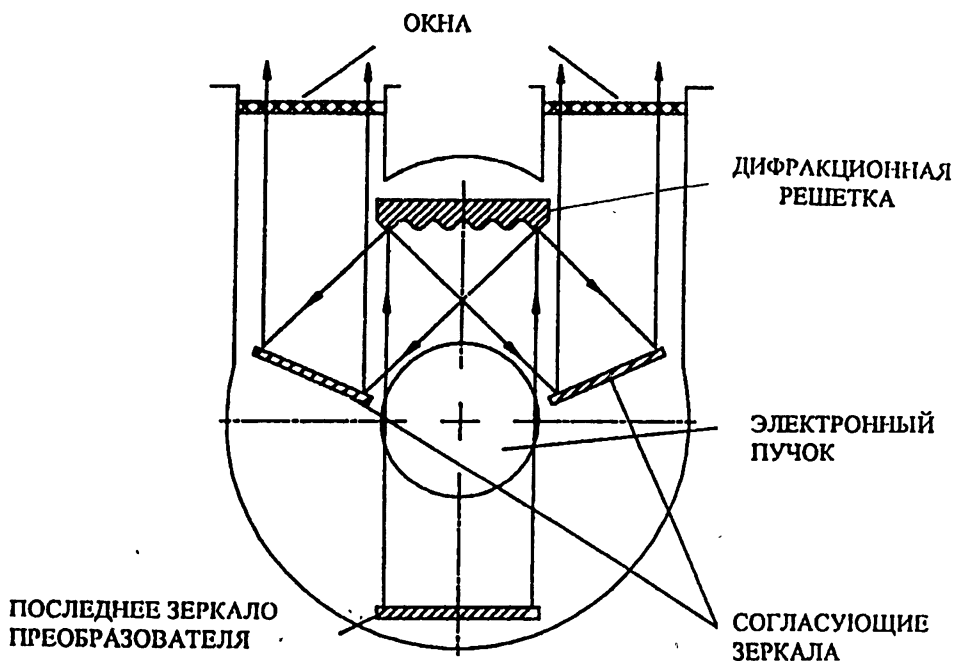
ния из газовой фазы. Лучшие современные образцы алмазных дисков имеют  $\text{tg}\delta$  в несколько раз меньше, чем сапфир, и дальнейшее развитие технологии алмазных окон может привести к радикальному решению проблемы окна гиротрона. Если выходная мощность разделяется на  $n$  пучков, выводимых через отдельные окна, то при ограничении мощности пропускной способностью выходного окна это позволяет повысить ВЧ мощность лампы (или энергию излучения в одном импульсе) соответственно в  $n$  раз. Электродинамическая система такого двухоконного гиротрона изображена на рис. 17. На протяжении нескольких лет другой вариант подхода к конструкции многооконной лампы разрабатывается в фирме General Atomics (США). Он представляет собой так называемое "распределённое окно", составленное из перемежающихся пластинок сапфира и металлических трубок специальной формы [27]. Недавно экспериментальное распределённое окно было испытано при плотности ВЧ излучения, соответствующей 1 МВт выходу энергии гиротрона на частоте 110 ГГц. Однако, потери ВЧ мощности в таком распределённом окне должны быстро увеличиваться с ростом частоты излучения.

## 2.5. Коллектор

В гиротронах значительная часть энергии электронного пучка должна рассеиваться в коллекторе. В длинноимпульсных гиротронах или гиротронах непрерывного действия коллектор представляет собой наиболее массивную часть лампы, но в его работе нет принципиальных проблем. Интерес к коллекторным системам оживлён недавним успехом экспериментов с коллектором с рекуперацией электронного пучка в Японии [28]. На изолированный коллектор было подано напряжение примерно на 30% ниже напряжения пучка, что позволило получить КПД гиротрона в некоторых случаях более 50%. Позже этот эксперимент был повторен в других лабораториях с похожими результатами. В ИПФ совместно с НПП "ГИКОМ" в гиротроне на частоте 110 ГГц с коллектором, имевшим пониженный потенциал, в режиме коротких импульсов при выходной мощности около 1 МВт был достигнут КПД 65%. Расчётные функции распределения энергии отработанных электронов (после их взаимодействия с ВЧ полем в резонаторе), показанные на рис. 18, подтверждают, что в некоторых случаях в отработанном пучке на самом деле нет электронов с энергиями ниже 30% их начальной энергии, и, таким образом, эта часть энергии электронов может быть возвращена в источник питания путём соответствующего снижения потенциала коллектора. Гиротроны с такими коллекторами могут оказаться весьма полезными в больших системах ЭЦН непрерывного действия с мощностью в несколько мегаватт, поскольку предоставляют возможность использования источников питания с пониженным напряжением.

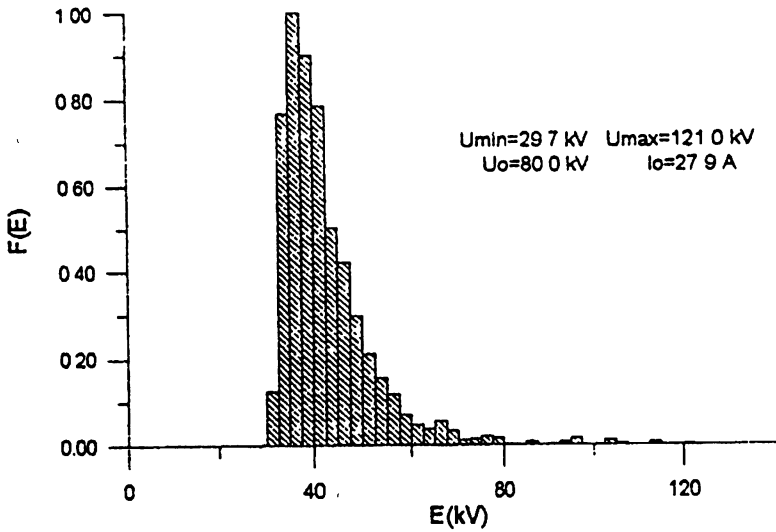


(a)

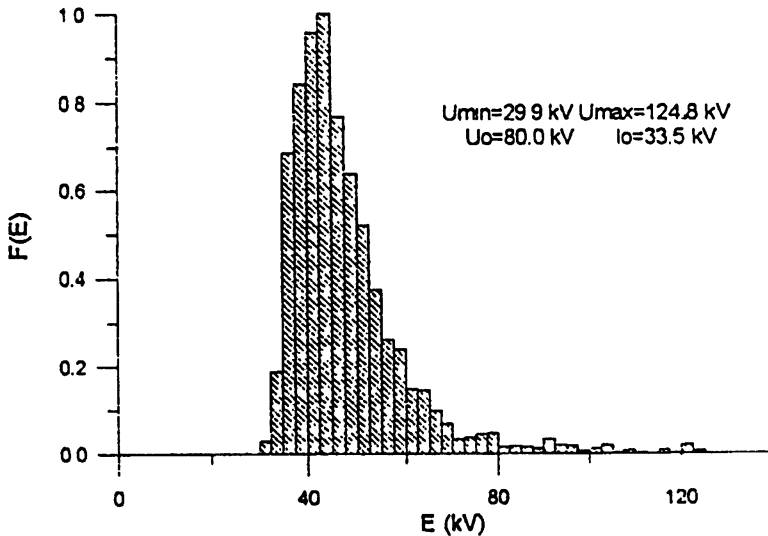


(b)

Рис. 17. Выходной узел двухоконного гиротрона. Лучи, формирующиеся волновые пучки, показаны ломаными линиями. а) Расщепитель волнового пучка на основе дифракционной решётки; при оптимальных размерах зеркально отражённая мощность  $P_0 = 0$ . б) Поперечное сечение квазиоптической системы.



а)



б)

Рис. 18. Расчётные энергетические распределения отработанных электронов  $F(\epsilon)$  при различных начальных разбросах скоростей электронов в гиротроне, длина резонатора которого оптимизирована для получения максимального КПД при выходной мощности 1 МВт. а) Оптимистическая оценка:  $\Delta v_{\perp}/v_{\perp} = 20\%$ , эффективность взаимодействия электронов с ВЧ полем в резонаторе  $\eta_e = 45\%$ , в одноступенчатом коллекторе с пониженным потенциалом можно повысить эффективность до  $\eta_{CPD} = 73\%$ . б) Осторожная оценка:  $\Delta v_{\perp}/v_{\perp} = 30\%$ . Соответствующие результаты:  $\eta_e = 39\%$  и  $\eta_{CPD} = 62\%$ .

## 3. ГИРОТРОНЫ ДЛЯ ЭЦН

С начала 70-х годов гиротроны использовались для ЭЦН плазмы в экспериментах по ядерному синтезу. Все российские гиротроны для ЭЦН производятся с встроенными преобразователями типов волн, как показано на рис. 10. Состояние дел в разработке и производстве гиротронов для ЭЦН иллюстрируется табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Экспериментальные и промышленные гиротроны для ЭЦН плазмы

Частота, ГГц	Выходная мощность	КПД %	Длительность импульса с	Мода резонатора / выходная мода	Институт или фирма
8	1.0	45	1	TE <sub>51</sub> /TE <sub>51</sub>	Thompson
8	0.5	33	1	TE <sub>21</sub> /TE <sub>10</sub>	VARIAN
28	0.34	37	CW	TE <sub>02</sub> /TE <sub>02</sub>	VARIAN
28	0.5	40	0.1	TE <sub>42</sub> /ЛП*	ГИКОМ
35	0.2	35	CW	TE <sub>02</sub> /TE <sub>02</sub>	VARIAN
53	0.5	40	0.2	TE <sub>83</sub> /ЛП	ГИКОМ
83	0.5	35	2	TE <sub>10</sub> /ЛП	ГИКОМ
	0.9	32	0.3		
84	0.4		10	/ЛП	VARIAN-NIFS**
100	2.1	30	3·10 <sup>-3</sup>	TE <sub>25 13</sub> /TE <sub>25 13</sub> (коакс <sup>†</sup> )	Институт прикладной физики РАН
110	0.5 0.35	27	10 <sup>2</sup>	TE <sub>22</sub> /ЛП	VARIAN
110	1.3 1.0	40 65(CPD)	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-4</sup>	TE <sub>19</sub> /ЛП	ГИКОМ
110	0.9	40	2	TE <sub>19</sub> /ЛП	ГИКОМ
110	0.35	48(CPD <sup>‡</sup> )	5	TE <sub>10</sub> /ЛП	TOSHIBA
118	0.4	25	2	TE <sub>22</sub> /ЛП	Thompson-FZK <sup>§</sup>
140	0.55	42	3.0	TE <sub>22</sub> /ЛП	ГИКОМ
140	0.9	39	1	TE <sub>22</sub> /ЛП	ГИКОМ
168	0.5	30	0.7	TE <sub>19</sub> /ЛП	ГИКОМ
170	1	28	10 <sup>-3</sup>	TE <sub>31</sub> /TE <sub>31</sub> §	TOSHIBA-JAERI***

\* Гауссов пучок

† Коаксиальный резонатор

‡ Коллектор с пониженным потенциалом

§ Исследовательский центр в Карлсруэ

\*\* Национальный центр термоядерных исследований (Нагоя)

\*\*\* Японский институт исследований по атомной энергии



Из неё видно, что сейчас уровень выходной мощности 0,5 МВт обычен для таких гиротронов, а некоторые лампы обеспечивают выходную мощность около 1 МВт. Все российские лампы оснащены выходными окнами из нитрида бора, перегрев которых налагает ограничения на энергию в импульсе. Такие гиротроны, работающие на частотах от 28 до 168 ГГц, используются или готовятся для использования на 15 установках ядерного синтеза во всём мире. В США, Японии, Франции и Германии разрабатываются гиротроны для ЭЦН по той же схеме [29, 30]. Одна из задач этой деятельности поставлена программой ITER, для которой необходим гиротрон непрерывного действия на частоте 170 ГГц с выходной мощностью 1 МВт. Успешная разработка такого гиротрона может придать ЭЦН статус неизбежного и важного компонента в сценариях включения и поддержания реакторов ядерного синтеза. Ещё более важное значение придаётся ЭЦН в программе стелларатора. Новые большие стеллараторы LHD в Японии и W7-X в Германии разрабатываются вместе с системами ЭЦН, ВЧ мощности которых составляют несколько мегаватт в импульсах длительностью порядка и более 10 с.

#### 4. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ГИРОТРОНЫ

В числе многих возможных технологических применений гиротронов одним из наиболее активно разрабатываемых сейчас является спекание керамики. Исследования в этой области основаны на физической концепции объёмного нагрева в любом чистом материале, который не может быть осуществлён никаким другим источником энергии. Экспериментальное и теоретическое исследование особенностей воздействия миллиметрового излучения на диэлектрические материалы продемонстрировало возможности разработки новых эффективных технологических процессов для спекания высококачественной керамики (см. [7], стр. 319). В таких экспериментах используются гиротроны, работающие на частоте более 20 ГГц со средней выходной мощностью до 30 кВт. В отличие от гиротронов для ЭЦН, унифицированных по своей конструкции, технологические гиротроны производятся и разрабатываются в нескольких модификациях в зависимости от типа их магнитной системы. Их выходные параметры приведены в табл. 2. Технологические гиротроны со сверхпроводящими магнитными системами весьма похожи на гиротроны для ЭЦН. Они работают на основной частоте и имеют на выходе гауссов волновой пучок. Максимальная выходная мощность таких российских гиротронов при работе в непрерывном режиме — более 20 кВт при КПД более 30%. Гиротроны с нормальными соленоидами и выходной мощностью порядка 10 кВт преимущественно работают на второй циклотронной гармонике. Рабочей модой одного из таких гиротронов, работающего на частоте 30 ГГц, является мода  $TE_{021}$ . Его излучение в виде волноводной моды

$TE_{02}$  затем может быть преобразовано в моду  $TE_{11}$ . Другим вариантом технологических гиротронов является гиротрон с постоянным ферромагнитом, в котором может быть получено максимальное соленоидоподобное магнитное поле несколько ниже 1 Т. На практике максимальная частота таких ламп ограничена 15 ГГц на основной гирочастоте и 30 ГГц на её второй гармонике.

Т а б л и ц а 2

Технологические гиротроны, выпускаемые в России

Частота, ГГц	Выходная мощность кВт	КПД %	Напряжение кВ	Выходная мода	Магнитное поле, Т	Магнитная система
37.5	20	35	30	ГП <sup>1</sup>	1.45	СПМ <sup>5</sup>
83	20	30	30	ГП	3.2	СПМ
30	10	23	20	$TE_{02}$	0.55	НС <sup>6</sup>
35	10	50	25	$TE_{02}$	1.3	СПМ

Гауссов пучок  
Сверхпроводящий магнит  
Нормальный соленоид

## 5. ПЕРЕСТРАИВАЕМЫЕ ГИРОТРОНЫ

Все гиротроны с круглыми резонаторами, описанные выше, представляют собой узкополосные генераторы, частота которых  $\omega$  может плавно изменяться лишь в пределах их резонансной кривой в полосе порядка  $10^{-4}\omega$ . Изменением магнитного поля резонатора их частота может быть перестроена скачками от одной моды к другой. Значительная плавная перестройка возможна при использовании резонатора, показанного на рис. 5с, путём изменения расстояния между половинами резонатора. Чтобы изменить частоту более чем на 1%, приходится также подстраивать магнитное поле в резонаторе. Гиротрон непрерывного действия с таким резонатором был построен специально, чтобы проверить возможности спектрометрии со сверхвысоким разрешением на миллиметровых длинах волн [31]. Перестраиваемые гиротроны имели следующие основные параметры: частота с плавной перестройкой от 32 до 34,5 ГГц, выходная мощность в непрерывном режиме около 1 кВт, КПД от 30% до 50%. Наряду со спектрометрией, перестраиваемые гиротроны других типов могут использоваться в качестве задающих генераторов мощных усилителей миллиметрового диапазона длин волн – гироклистронов.

## 6. ГИРОКЛИСТРОНЫ

### 6.1. Особые свойства

Исследование гиросклизтронов началось вскоре после начала исследования гиросклизтронов [5]. В первых экспериментах с гиросклизтроном непрерывного действия на частоте 10 ГГц была достигнута выходная мощность 2 кВт при усилении 20 дБ и КПД 70%. Результаты дальнейшего исследования и разработки гиросклизтронов в России не публиковались, за исключением нескольких теоретических работ. Последние работы по гиросклизтронам на частотах 35 и 94 ГГц [32] представляют результаты долгого периода разработок. Проблемы, описанные в разделе 2, имеют отношение и к гиросклизтронам; более того, у гиросклизтронов есть свои специфические проблемы, вызванные тем, что их рабочие режимы и электродинамические системы характеризуются большей сложностью. В результате таких отличий от гиросклизтронов гиросклизтроны более требовательны к качеству электронного пучка, то есть в них КПД сильнее зависит от разброса скоростей, вызванного статическими или динамическими эффектами (неустойчивостью). В частности, эта чувствительность гиросклизтронов является следствием таких причин, как начальная модуляция электронного пучка в менее мощных ВЧ полях, чистая инерционная группировка в достаточно длинных трубках дрейфа (в отличие от группировки в интенсивных полях резонатора в гиросклизтронах), и более выраженным эффектом Доплера вследствие меньшей длины резонаторов. В дополнение к основным параметрам гиросклизтрона (рабочая частота, выходная мощность, КПД и длительность импульса) гиросклизтрон должен обеспечивать заданное усиление и достаточно большую моментальную полосу частот. Последнее свойство может быть достигнуто ценой снижения КПД и выходной мощности. Значительным препятствием для повышения выходной мощности любого усилителя является самовозбуждение в какой-либо части его достаточно сложной электродинамической системы на рабочей моде или на любой паразитной. Чтобы обеспечить достаточную перестройку частоты, резонаторы должны обладать низкой добротностью, то есть быть короче, чем в гиросклизтронах. Количество резонаторов, их форма и распределение магнитного поля в области резонаторов гиросклизтрона оптимизируются для удовлетворения частично противоречивых требований к более высокой выходной мощности, КПД, усилению и полосе частот и повышению устойчивости к самовозбуждениям.

### 6.2. Гиросклизтроны для радаров

В последнее время были разработаны гиросклизтроны на частотах 35 и 94 ГГц, большей частью предназначенные для возможного примене-

ния в различных радарных системах. Разнообразные требования к этим лампам потребовали разработки нескольких модификаций, отличающихся по конструкции и основным выходным характеристикам. Их параметры представлены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

## Российские гироклистроны для радиолокационных систем

Параметры	Лампы				
	1	2	3	4	5
Центральная частота, ГГц	35.2	35.0	35.12	93.2	91.6
Гармоника гирочастоты	1	1	2	1	1
Мощность насыщения, кВт	750	230	205	65	2.5
Усиление в режиме насыщения, дБ	20	31	16	35	31
Мгновенная ширина полосы, ГГц	0 210	0.500	0 035	0.28	0.33
КПД, %	24	33	15	26	25
Выходная мода	TE <sub>02</sub>	TE <sub>01</sub>	TE <sub>02</sub>	TE <sub>01</sub>	TE <sub>01</sub>
Число резонаторов	2	3	2	4	4
Напряжение пучка, кВ	74	50	65	55	22
Длительность импульса, мкс	100	100	100	100	CW
Частота повторения, Гц	5	100	5	5	-

Наиболее мощные гироклистроны на частоте 35 ГГц со сверхпроводящими магнитами были разработаны для крупномасштабных стационарных радаров. Одним из их возможных применений является обнаружение космического мусора [7]. Лампа 3 разработана на основе обычной магнитной системы. Гироклистроны на частоте 94 ГГц разрабатывались для систем воздушного и космического базирования. Их несущая частота сильно поглощается в земной атмосфере, что, вместе с узкой направленностью их излучения, обеспечивает защиту от противодействия и помех. Гироклистроны такого типа пригодны также и для систем крупномасштабного мониторинга состояния атмосферы [7]. Оценки показывают, что гироклистроны перспективны для нижнегибридного нагрева плазмы в экспериментах по ядерному синтезу как источники излучения на частотах от 5 до 10 ГГц с выходной мощностью порядка 1 МВт в непрерывном режиме, высоким КПД и управляемой фазой.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одной из предпосылок разработок мощных МЦР послужило то, что тогда, в 60-е годы, средние мощности наиболее мощных источников излучения быстро уменьшались с увеличением частоты от десятков и сотен киловатт на частотах ниже 10 ГГц до нескольких ватт на частотах около 100 ГГц. Это позволило говорить о "провале", простиравшемся до дальнего ИК диапазона. Создание МЦР позволило ликвидировать часть этого провала примерно до 200 ГГц, где либо уже существуют, либо несомненно могут быть созданы непрерывные источники излучения мегаваттного уровня мощности. Освоение более высоких частот, в принципе, возможное с помощью МЦР со средней мощностью десятки и сотни киловатт, сдерживается высокой стоимостью сверхпроводящих магнитных систем с полями выше 10 Т и отсутствием таковых выше 18 Т, а также в какой-то мере и тем, что излучение субмиллиметрового диапазона длин волн пока не находит достаточно важных применений. Будущее МЦР в значительной мере зависит от развития новых технологий, например, термоядерной энергетики. Гиротроны используются в экспериментальных термоядерных установках и продемонстрированная ими надёжность и управляемость стимулировали растущий интерес к их применению для высокотемпературной обработки материалов, прежде всего для спекания высококачественной керамики. Уже разработаны гиротроны и гироклистроны, охватывающие широкий спектр рабочих частот и выходных мощностей, которые могут быть использованы для различных приложений. Разработка мощных МЦР в России основывается на хорошо развитой теоретической базе и обширном арсенале расчётных и экспериментальных методов, необходимых для их детального исследования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Галонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. // Изв. вузов. Радиофизика, 1967. Т. 10. № 9–10. С. 1414.
2. R.O.Twiss R. O. // Aust. J. Phys., 1958. V. 4. P. 567;  
Scheinder J. // Phys. Rev. Letts, 1959. V. 12. P. 504;  
Галонов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1959. Т. 5. С. 836.
3. Антаков И. И., Боков В. М., Васильев Р. П., Галонов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1960. Т. 6. С. 1033.
4. Hirshfield J. L. and Granatstein V. L. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1977. V. MTT-25. P. 522.
5. Andronov A. A., Flyagin V. A., Gaponov A. V., Goldenberg A. L., Petelin M. I., Usov V. G., and Yulpatov V. K. // Infrared Phys., 1978. V. 6. P. 385.

6. Flyagin V. A. and Nusinovich G. S. // Proc. IEEE, 1988. V. 6. P. 76.
7. Applications of High Power Microwaves /Eds. A. V. Gaponov-Grekhhov and V. L. Granatstein. — Artech House, 1994.
8. Гольденберг А. Л., Лыгин В. К., Мануилов В. Н., Петелин М. И., Цимринг Ш. Е. // В сб.: Гиротрон /Под ред. В. А. Флягина. — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981. С. 86.
9. Tsimring Sh. E. — In: Abstracts of 16-th Int. Conf. on IR & MM Waves /Ed. M. Q. Tran. — Bellingham: SPIE, 1991;  
Bonderson A. and Antonsen T. M. // Int. J. Electron., 1968. V. 61. P. 1623.
10. Ергаков В. С. и Моисеев М. А. // В сб.: Гиротрон /Под ред. В. А. Флягина. — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981. С. 53.
11. Власов С. Н., Жислин Г. М., Орлова И. М., Петелин М. И., Рогачева Г. Г. // Изв. вузов. Радиофизика, 1969. Т. 12. № 8. С. 1236.
12. Нусинович Г. С. и Эрм Р. Э. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1972. № 8. С. 55.
13. Петелин М. И. // В сб.: Гиротрон /Под ред. В. А. Флягина. — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981. С. 77.
14. Гольденберг А. Л., Павельев А. Б., Хижняк В. И. // В сб.: Гиротрон /Под ред. В. А. Флягина. — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1989. С. 98.
15. А. с. 786677 СССР. /Запевалов В. Е. и др. Заявл. 25.07.79. Оpubл. в 1989. Бюл. № 7;  
Запевалов В. Е., Цимринг Ш. Е. // Изв. вузов. Радиофизика, 1990. Т. 33. № 11. С. 1288;  
Запевалов В. Е., Малыгин С. А., Мануилов В. Н., Цимринг Ш. Е. // Изв. вузов. Радиофизика, 1994. Т. 37. № 3. С. 384.
16. Запевалов В. Е., Малыгин С. А., Павельев В. Г., Цимринг Ш. Е. // Изв. вузов. Радиофизика, 1984. Т. 27. № 12. С. 1194.
17. Нусинович Г. С. // Изв. вузов. Радиофизика, 1975. Т. 18. № 11. С. 1689;  
Ергаков В. С., Моисеев М. А., Эрм Р. Э. // Изв. вузов. Радиофизика, 1976. Т. 19. № 3. С. 453.
18. Власов С. Н., Орлова И. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1974. Т. 17. № 1. С. 148.
19. Denisov G. G., Petelin M. I., Vinogradov D. V. // WO 90/0780 h01p1/16, PCT Gazette, 1990. V. 16. P. 47.
20. Denisov G. G., Kuftin A. N., Malygin V. I., Venediktov N. P., Vinogradov D. V., Zapevalov V. E. // Int. J. Electronics, 1992. V. 72. № 5–6. P. 1079.
21. Каценеленбаум Б. З., Семенов В. В. // Радиотехника и электроника, 1967. С. 244.

22. Bogdashov A. A., Chirkov A. V., Denisov G. G., Vinogradov D. V., Kuf-tin A. N., Malygin V. I., Zapevalov V. E. // *Int. J. IR&MM Waves*, 1995. V. 16. P. 735.
23. Alexandrov N. L., Chirkov A. V., Denisov G. G., Vinogradov D. V., Kas-parek W., Preterebner J., Wagner D. // *Int. J. IR&MM Waves*, 1992. V. 13. № 9. P. 1369.
24. Chirkov A. V., Denisov G. G., Alexandrov N. L. // *Optics Communica-tions*, 1995. V. 115. P. 449.
25. Garin F., Bon Mardion G., Pain M. et al. — In: *Abstracts of 20-th Int. Conf. on IR & MM Waves*, Orlando, USA, 1995. — P. 271.
26. Heidinger R., Molla J., and Parshin V. — In: *Abstracts of 21-th Int. Conf. on IR & MM Waves*, Berlin, 1996.
27. Moeller C. P., Doane J. L., and DiMartino M. — In: *Abstracts of 20-th Int. Conf. on IR & MM Waves*, Sendai, 1994. — P. 279.
28. Sakamoto K., Tsuneoka M., Ksugai A. et. al. — In: *Abstracts of 20-th Int. Conf. on IR & MM Waves*, Sendai, 1994. — P. 63.
29. Felch L., Huey H., and Jory H. // *J. Fusion Energy*, 1990. V. 9. P. 59.
30. Thumm M. *State of the Art of High Power Gyro-devices and Free Electron Masers* // Preprint FZKA 5728. — Forschungszentrum Karsrue, March 1996.
31. Антаков И. И., Власов С. Н., Гинцбург В. А., Загрядская Л. И., Нико-лаев Л. В. // *Электронная техника. Сер.1. Электроника СВЧ*, 1975. № 8;  
Антаков И. И., Белов С. П., Герштейн Л. И., Гинцбург В. А., Круп-нов А. Ф., Паршин Г. С. // *Письма в ЖЭТФ*, 1974. Т. 19. № 10.
32. Antakov I. I., Zasyupkin E. V., Sokolov E. V., Moiseev M. A. — In: *Ab-stracts of 18-th Int. Conf. on IR & MM Waves*, Colchester, England, 1993. — P. 336;  
Antakov I. I., Gel'vich E. A., Spektor Kh. I., Sokolov E. V. — In: *Ab-stracts of 18-th Int. Conf. on IR & MM Waves*, Colchester, England, 1993. — P. 446.

Институт прикладной физики  
РАН, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию  
30 мая 1996 г.

**CYCLOTRON MASERS: STATE OF THE ART**

*A. L. Goldenberg, G. G. Denisov, V. E. Zapevalov,  
A. G. Litvak, V. A. Flyagin*

Electron cyclotron masers – gyrotrons and gyrocystrons – dominate in millimeter wavelength range as high energy sources and still have considerable resources for further increase in power and efficiency. The present-day challenge of creating CW megawatt gyrotrons is associated with a number of problems, among which the window problem is a key one. New results of investigation of gyrotrons and gyrokystrons in Russia are given. State of the art of gyrotrons for plasma heating in fusion installations and technological applications as well as gyrokystrons for millimeter wavelength radars is observed.



УДК 537.87

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В УСКОРИТЕЛЕ НА БИЕНИЯХ

*А. Г. Литвак, В. А. Миронов, Л. А. Абрамян*

Аналитически и численно исследуются нестационарные процессы самовоздействия волновых полей при возбуждении плазменных колебаний. Предполагается, что самовоздействие определяется релятивистским эффектом зависимости массы электрона от амплитуды осцилляций в плазменной волне, возбуждаемой на частоте биений. Проанализированы особенности динамики самовоздействия волновых полей в среде с таким типом релаксации нелинейного отклика. Показано существование точных автомодельных решений нестационарных уравнений в виде сжимающихся (однородных волновых каналов) нитей. На основе этих решений найдены оценки для максимальных амплитуд плазменной и электромагнитной волн. Получено численное подтверждение качественных соотношений и выводов. Рассмотрено нестационарное самовоздействие при учёте каскадных процессов рассеяния электромагнитных волн на плазменной волне. Показано, что оценка для максимального значения амплитуды плазменной волны сохраняется.

Интерес к исследованию самовоздействия электромагнитного излучения, связанного с релятивистской зависимостью массы электронов от их колебательной энергии, возник ещё при становлении теории нелинейных волн. Эффекты стационарной самофокусировки пучков электромагнитных волн в плазме были впервые рассмотрены в работах [1, 2], а затем обсуждались в [3, 4]. В этих, а также в последующих многочисленных статьях (см., например, [5] и цитируемую там литературу) было показано, что, если мощность волнового пучка  $P$  превышает так называемую критическую мощность самофокусировки  $P_{cr}$ , составляющую для случая релятивистской нелинейности величину  $P_{cr} = 17 \frac{w^2}{w_p^2}$  ГВт, то происходит фокусировка пучка до размеров, определяемых эффектами насыщения нелинейности, и последующий захват электромагнитного излучения в режим нелинейного оптического гидирования [3–5]. Однако детальное изучение самовоздействия при релятивистской нелинейности началось после работы [6], в которой было предложено использовать резонансное возбуждение плазменной волны биениями двух электромагнитных волн для генерации сильных электромагнитных полей в плазме. Дальнейшее стимулирующее влияние оказали идеи возбуждения плазменной волны коротким

(по сравнению с плазменной длиной волны) импульсом для целей ускорения высокоэнергичных частиц [7, 8] и преобразования частоты вверх по спектру [9]. Успехи в генерации мощных коротких импульсов сделали реальной возможность экспериментального исследования самовоздействия электромагнитного излучения. Перспективы получения высокой концентрации энергии в нелинейной фокальной области при нестационарной самофокусировке представляют интерес и в такой важной проблеме как создание активной среды для усиления рентгеновского излучения. При этом возникает задача исследования особенностей динамического самовоздействия волновых полей в разреженной плазме при релятивистской нелинейности. Так или иначе они связаны с возбуждением плазменных волн.

Резонансное возбуждение плазменной волны биениями двух электромагнитных волн рассматривается как один из наиболее перспективных способов генерации сильных электрических полей. Несмотря на понимание общей физической картины резонансного взаимодействия, здесь открываются новые возможности, связанные с достижением в плазменной волне (более низкочастотной) осцилляторных движений со скоростью, сравнимой со скоростью света, даже в случае нерелятивистских движений в волне накачки. Эффективность преобразования электромагнитного излучения в электростатическое определяется нелинейными процессами. В одномерном случае довольно подробно рассматривались различные механизмы насыщения плазменного поля: возникновение многопоточности при движении осциллирующих в поле волны электронов (иногда называемое опрокидыванием волны) [10, 11], развитие параметрических неустойчивостей [12, 13], изменением собственной частоты плазменных колебаний из-за релятивистского нарастания массы электронов [10, 11]. Эти процессы, фактически, определяют “полезную” длительность импульса или длину взаимодействия электромагнитных волн. Очевидно, что эффект самофокусировки может способствовать возбуждению более сильных плазменных полей при меньшей длительности импульса. Наряду с “энергетической выгодностью” следует ожидать хорошо известного при нестационарной самофокусировке заметного расширения фокальной области по сравнению с линейным случаем [14, 15].

Возможны две постановки задачи. Для импульсов, длиной заметно превышающей размеры среды, мы, естественно, приходим к исследованию нестационарной самофокусировки двух волновых пучков при возбуждении плазменной волны. При этом вряд ли можно рассчитывать на получение рекордных значений плазменного поля. Однако, такая ситуация реализуется при экспериментальном моделировании процессов в ускорителе на биениях [16–18]. Рассмотрение пространственно-временной эволюции волновых полей в такой постановке проведено численно в работе [19], используя метод частиц в ячейках.

При исследовании нестационарного самовоздействия “реального” им-

пульсного излучения возникают новые особенности, связанные с тем, что передний фронт волнового поля распространяется как в линейной среде, испытывая дифракционную расходимость.

В данной работе, используя методы исследования пространственно-временных коллапсов [20] и численные расчёты, представлены результаты детального исследования динамического самовоздействия волновых полей при резонансном возбуждении плазменной волны. Сначала рассмотрена нестационарная самофокусировка волновых пучков, в том числе и при учёте каскадных процессов рассеяния электромагнитных волн на плазменных колебаниях, затем исследованы особенности динамики самовоздействия импульсного излучения.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для описания эволюции поперечного распределения поля двух лазерных пучков:

$$\vec{E}_1 = E_1(r_1, z, t)\vec{y}_0 \exp[i\omega_1(t - z/c)], \quad \vec{E}_2 = E_2(r_1, z, t)\vec{y}_0 \exp[i\omega_2(t - z/c)], \quad (1)$$

при генерации в однородной плазме продольной волны на частоте биений  $\omega_p = \omega_2 - \omega_1$  ( $\omega_p \ll \omega_1, \omega_2$ )

$$\vec{E}_p = \vec{z}_0 E_p(r_1, z, t) \exp[i\omega_p(t - z/c)], \quad (2)$$

воспользуемся следующей системой уравнений

$$-2ik_{1,2} \left( \frac{\partial e_{1,2}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial e_{1,2}}{\partial t} \right) + \Delta_{\perp} e_{1,2} + \frac{3}{2} |e_p|^2 k_{1,2}^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_{1,2}^2} e_{1,2} = 0, \quad (3)$$

$$-2i\omega_p^{-1} \frac{\partial e_p}{\partial t} - 3|e_p|^2 e_p = -2i \frac{\omega_p^2}{\omega_1 \omega_2} e_1^* e_2. \quad (4)$$

При выводе этой системы предполагается, что волновые пучки — “широкие” в масштабе длины электромагнитной волны, нелинейность плазмы связана только с зависимостью массы электронов от скорости осцилляций в поле плазменной волны, групповая скорость плазменной волны равна нулю. Релятивизм считается слабым, поля нормированы на характерное для релятивистских нелинейных эффектов поле  $E_T = 2m\omega_p c/e$  ( $e = E/E_T$ ). Насыщение амплитуды плазменных колебаний определяется нелинейным сдвигом частоты.

Для простоты сначала рассмотрим ситуацию, когда интенсивности и формы лазерных пучков одинаковы. При этом исходная система уравнений принимает стандартный для исследования нестационарного самовоздействия вид

$$-i \left( \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial z} \right) + \Delta_{\perp} e + |n|^2 e = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + i|n|^2 n = |e|^2, \quad (6)$$

где

$$z_{\text{н}} = \left(\frac{\omega_{\text{p}}}{\omega}\right)^{5/3} \frac{kz}{2}, \quad t_{\text{н}} = \frac{6^{3/2}}{4} \left(\frac{\omega_{\text{p}}}{\omega}\right)^{4/3} \omega_{\text{p}} t, \quad (7)$$

$$r_{\text{н}} = \frac{1}{k} r_{\perp} \left(\frac{\omega_{\text{p}}}{\omega}\right)^{5/6}, \quad n = \left(\frac{6\omega^2}{\omega_{\text{p}}^2}\right)^{1/3} e_{\text{p}}.$$

Здесь и выше в (3), (4) пренебрежено взаимодействием электромагнитных волн при возбуждении плазменной волны. Далее при исследовании каскадных процессов мы вернёмся к рассмотрению этого эффекта в приближении параосиальной оптики.

## 2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ САМОФОКУСИРОВКА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Если характерный продольный размер плазмы много меньше длины импульса, то распределение поля можно считать квазистационарным ( $\partial e/\partial z \gg \partial e/\partial t$ ) и можно пренебречь временной производной в уравнении (5). При этом мы приходим к системе уравнений того же типа, что описывают нестационарную самофокусировку в среде, в которой нелинейный отклик определяется материальным соотношением (6) для комплексной функции.

$$-i \frac{\partial e}{\partial z} + \Delta_{\perp} e + |n|^2 e = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + i|n|^2 n = |e|^2. \quad (9)$$

Отсутствие плазменных волн в начальный момент времени приводит к начальному условию  $n(t=0) = 0$ . Уравнения (8), (9) имеют обычный интеграл

$$\int |e|^2 d\vec{r} = P, \quad (10)$$

соответствующий сохранению полного потока энергии в пучке

$$\dot{P} = P_0 P, \quad P_0 = \left(\frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}\right)^{1/6} \frac{4m^2 c^5}{e^2}. \quad (11)$$

Заметим что характерная для самовоздействия при резонансном возбуждении плазменной волны мощность  $P_0$  слабо зависит от отношения  $\frac{\omega_{\text{p}}}{\omega}$ .

Опираясь на результаты теории нестационарной самофокусировки [20] можно представить следующую качественную картину эволюции поперечной структуры волнового пучка. На начальном этапе возбуждения плазменной волны  $\left(\frac{\partial n}{\partial t} \gg |n|^2 n\right)$  исследование устойчивости плоской волны в нестационарном режиме (подобно тому, как это делалось ранее, см., например, [21]) показывает, что инкремент неустойчивости не зависит от волнового числа возмущения. Отсутствие оптимального масштаба неустойчивости даёт основание для формирования автомодельной структуры

$$e = \frac{1}{a} \epsilon(\xi) \exp\left(iA \int \frac{dz}{a^2}\right), \quad n = \frac{N(\xi)}{a}, \quad \xi = \frac{r}{a}, \quad (12)$$

соответствующей локализованным решениям системы уравнений

$$\Delta_{\perp} \epsilon + (N^2 - A)\epsilon = 0, \quad (13)$$

$$\xi \frac{dN}{d\xi} + N^3 = \epsilon^2. \quad (14)$$

Как и в случае диффузионной релаксации нелинейности [20], эта система уравнений описывает, наряду со схлопывающимися за конечное время однородными волноводными каналами  $a \sim (t_0 - t)$ , и более широкий класс структур, бегущих к границе (навстречу падающему излучению) особенностей типа фокуса ( $a \sim z/v - t + t_0$ ). Очевидно, что при скорости фокального пятна  $v \rightarrow \infty$  приходим к однородным каналам. Применение линзового преобразования к исходной системе уравнений (8), (9) показывает, что рассматриваемые автомодельные структуры оказываются строго локализованными. В отличие от случая диффузионной релаксации нелинейного отклика излучение моды (13), (14) в окружающий фон отсутствует.

Для оценки амплитуды плазменной волны воспользуемся автомодельной структурой, соответствующей однородным схлопывающимся каналам. Аппроксимируем распределение поля плазменной волны вблизи оси ( $r = 0$ ):  $N = N_0 + N_2 \xi^2$ , тогда из (13) нетрудно получить следующее выражение

$$|e| = \frac{(3/2)^{1/4}}{\sqrt{b(t_0 - t)}} \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2(t_0 - t)^2}\right). \quad (15)$$

Оно зависит от одного параметра  $b$ , значение которого выберем таким, чтобы в начальный момент времени ( $t = 0$ ) пространственная ширина волнового пучка гауссовой формы была равна  $a_0$ , т.е.  $b = a_0/t_0$ . При этом из закона сохранения потока энергии (10) получаем  $t_0 = (3/2)^{1/2} \pi a_0/P$ .

По мере схлопывания ( $t \rightarrow t_0$ ) нелинейный сдвиг частоты ( $\sim |n|^2$ ) возрастает и процесс коллапса стабилизируется. Амплитуда плазменной волны достигает максимального значения в момент времени

$t = t_{\max}$  определяемый из соотношения  $\frac{\partial n}{\partial \eta} \simeq |n|^2 n$ . Отсюда находим

$t_{\max} = t_0 - \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{P}\right)^2$ , что, в свою очередь, позволяет получить следующие оценки для максимальных амплитуд плазменных и электромагнитных волн

$$e_{p \max} = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^{2/3} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{P}{\pi}, \quad |e_{\max}| = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/4} \left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2}. \quad (16)$$

Отсутствие особенности, очевидно, связано с тем, что в рассматриваемом случае нелинейность "слабее", чем кубичная ( $|n|^2 = |e|^{4/3}$ ).

По мере установления стационарной картины можно ожидать и расслоения волнового поля. Традиционное исследование пространственной (по  $z$ ) неустойчивости однородности поля (плоской волны) с амплитудой  $e_0$  в стационарном случае ( $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ ), показывает, что инкремент неустойчивости достигает своего максимального значения для характерного размера

$$L_{\perp} \simeq 6^{3/2} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{5/3} \frac{\lambda}{2|e_0|^{2/3}}. \quad (17)$$

Это означает, что волновые пучки с характерным поперечным масштабом  $L_n \simeq L_{\perp}$  по мере распространения (по  $z$ ) разбиваются на набор более узких пучков с  $l_n \simeq L_{\perp}$ . В результате можно ожидать формирования (в поперечном направлении) последовательности квазиволноводных структур, как в [21].

### 3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ САМОФОКУСИРОВКИ

Численное интегрирование уравнений (8), (9) приводилось в аксиально-симметричном случае для заданного на границе плазмы ( $z = 0$ ) коллимированного пучка гауссовой формы  $e = e_0 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$ . На рис. 1 показана динамика поля электромагнитной ( $e$ ) и плазменной волны ( $n$ ). При  $e_0 = 1,3$ ,  $a = 1$  качественно эволюция соответствует описанной выше картине. Новым является формирование на малых временах ( $t \leq 1$ ) вблизи границы плазмы ( $z \sim 0$ ) области, в которой поле максимально, и распространение её в глубь нелинейной среды. Этот эффект является, видимо, типичным для начальной стадии динамического самовоздействия волнового пучка. Впервые он наблюдался при численном исследовании нестационарной самофокусировки в условиях релаксации нелинейности, определяемой звуковым уравнением [22].

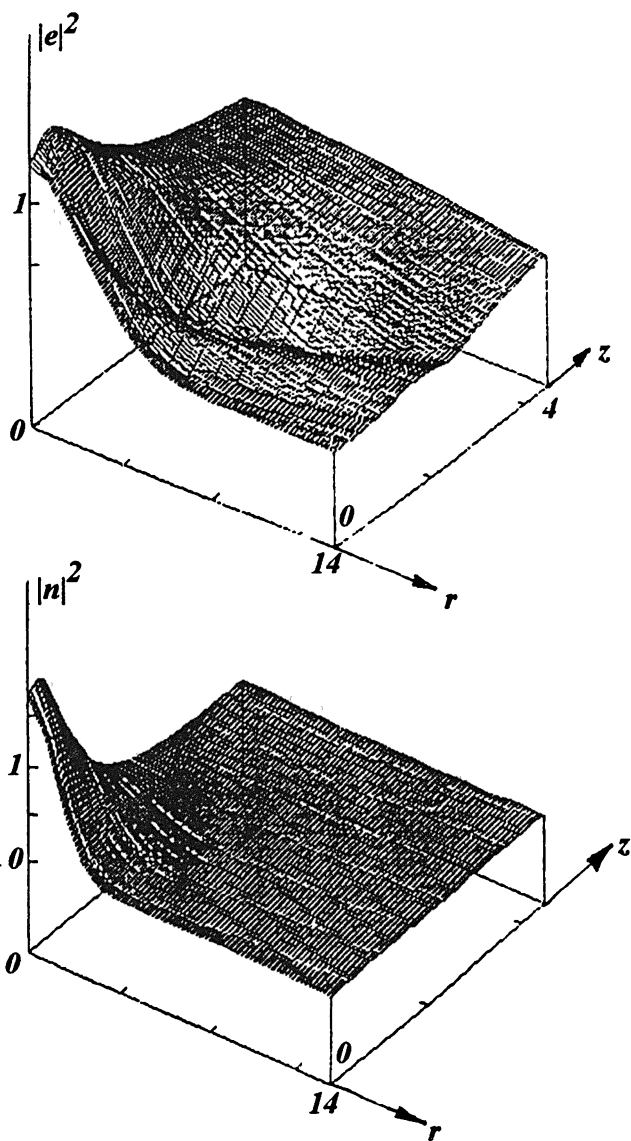


Рис. 1 а.

Эту стадию самовоздействия удаётся описать аналитически в приближении параксиальной оптики. Аппроксимируя распределение поля плазменной волны вблизи оси ( $r \simeq 0$ ) параболой ( $n = n_0 - n_2 r^2$ ), для ширины волнового пучка квазигaussianной формы

$$e = \frac{P}{a} \exp \left( -\frac{r^2}{2a^2} - i \frac{a_z}{4a} r^2 \right), \quad (18)$$

нетрудно получить уравнение

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \frac{1}{a^3} - 2n_0 n_2 a. \quad (19)$$

В этом же приближении из (9) можно найти

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{P}{a^2}, \quad \frac{\partial n_2}{\partial t} = \frac{P}{a^4}. \quad (20)$$

Естественно заметить, что уравнения (19), (20) допускают аналогичную автомодельную подстановку ( $a \sim t - t_0$ ).

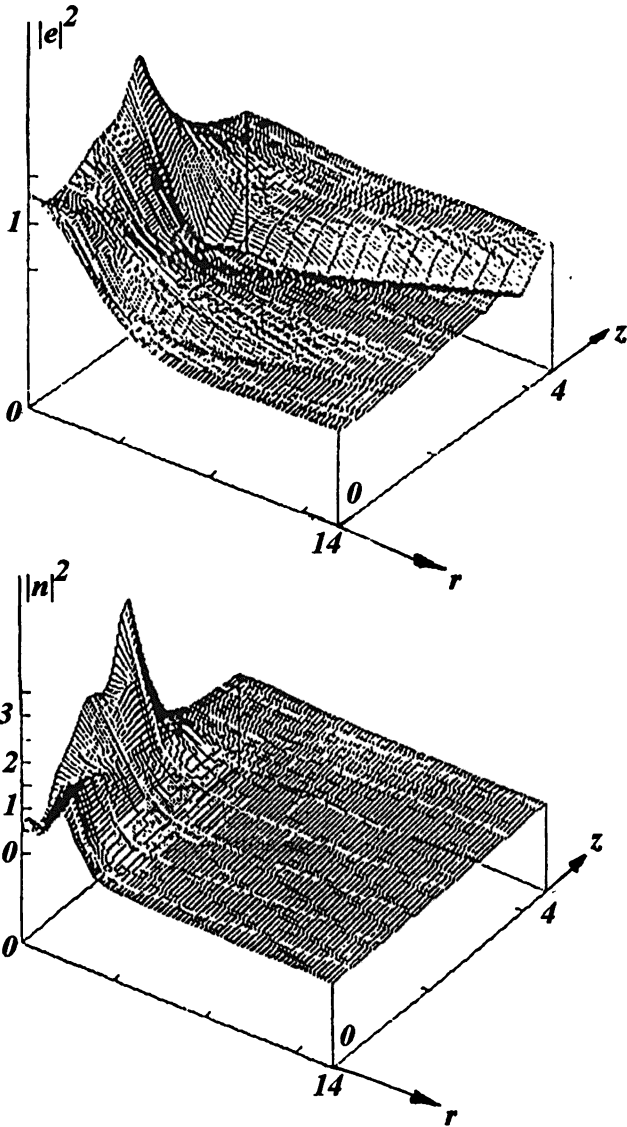


Рис. 1 б.

На начальной стадии представим выражение для квадрата ширины



волнового пучка в виде ряда

$$a^2 = 1 + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \Big|_{z=0,t} \frac{z^2}{2} + \frac{\partial^4 a^2}{\partial z^4} \Big|_{z=0,t} \frac{z^4}{24}. \quad (21)$$

Отсюда нетрудно получить уравнение, описывающее движение координаты максимума поля  $\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)$

$$z_{\max}^2 = -\frac{6(a^2)_{zz}}{(a^2)_{zzzz}}. \quad (22)$$

Пространственные производные от квадрата ширины пучка вычисляются при  $z = 0$ , где ширина его остаётся постоянной во времени (перенормировкой переменных в системе (19), (20) её можно сделать равной единице). Это позволяет найти явные выражения для них. В результате получаем следующие уравнения движения максимума поля

$$z_{\max}^2 = 6(2P^2 t^2 - 1). \quad (23)$$

Отсюда, прежде всего, видно существование критической энергии импульса  $P\tau \simeq W_{\text{кр}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , при превышении которой эффекты нелинейной рефракции преобладают над дифракционными. В результате вблизи границы нелинейной среды ( $z \sim 0$ ) появляется максимум поля. Усиливаясь, он распространяется вглубь нелинейной среды с уменьшающейся скоростью. Численные расчёты показывают, что стационарная картина формируется при обратном движении фокальной области навстречу падающему излучению. Отличительной особенностью картины нестационарного самовоздействия в рассматриваемом случае является наличие заметных aberrаций (см. рис. 1). В стационарном режиме ( $t > 5$ ) видно формирование только одного нелинейного фокуса, а не последовательности фокусов, что, обычно, имеет место для нелинейности фокусирующего типа. Этот эффект мы наблюдали ранее [23] при моделировании процессов в одномерном (по поперечному направлению) случае с нелинейностью более высокого порядка, чтобы сохранить на начальной стадии автомодельные структуры типа (12). Формирование сильно aberrационной "линзы" (см. на рис. 1 распределение возмущения показателя преломления  $|n|^2$ ) на трассе распространения волнового пучка приводит к высвечиванию излучения из области фокуса и, следовательно, очень медленному спадающему электромагнитного поля в поперечном направлении (по  $r$ ). Результаты, приведённые на рис. 1, получены на интервале по  $r$ , в два раза большем, чем там указано. Надёжность расчётов сильно уменьшалась с увеличением мощности, поэтому нам не удалось проверить полученные аналитически зависимости (16). Однако они находятся в хорошем качественном соответствии с результатами численных расчётов.

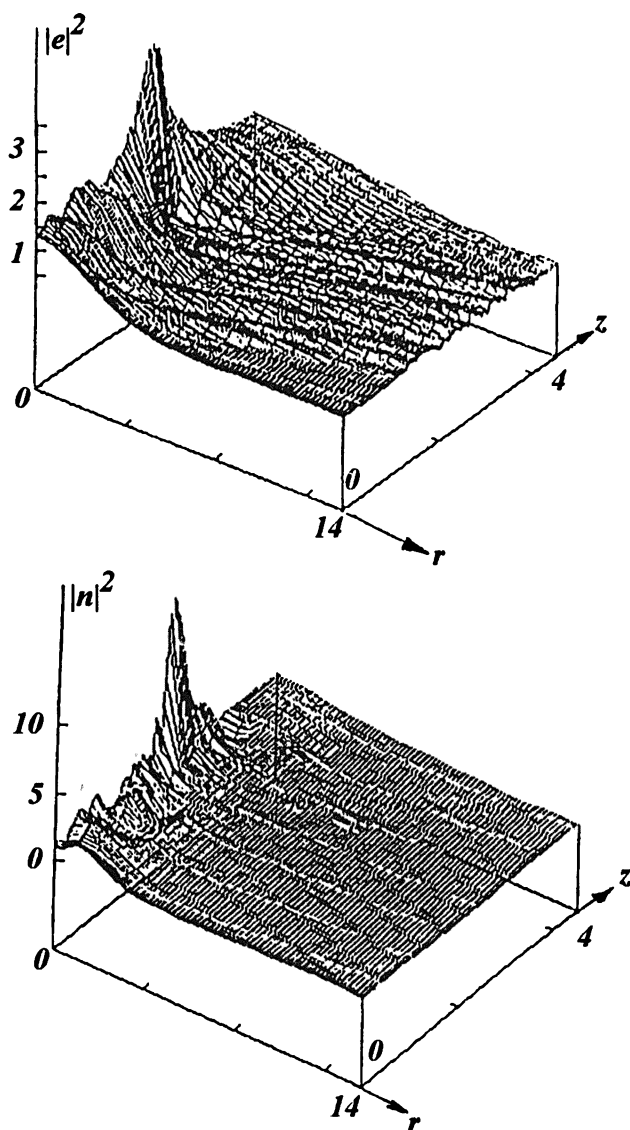


Рис. 1 с.

#### 4. ВЛИЯНИЕ КАСКАДНЫХ ПРОЦЕССОВ НА САМОФОКУСИРОВКУ

Другим процессом, сопровождающим самовоздействие излучения, является конверсия электромагнитных волн на возбуждаемых плазменных колебаниях. В одномерном случае каскадные процессы исследовались в [13]. Рассмотрим конкуренцию самовоздействия и взаимодействия волновых пучков в приближении парааксиальной оптики. Для получения

уравнений используем вариационный принцип. В рассматриваемом случае удобно применить подход, связанный с понятием локального потенциала [24]. "Неполный" лагранжиан, описывающий динамику самовоздействия волнового поля при конверсии электромагнитных волн на "заданном" уровне плазменных колебаний

$$2\omega_p^{-1} \frac{\partial e_p}{\partial t} + i3|e_p|^2 e_p = 2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \sum e_m e_{m-1}^*, \quad (24)$$

имеет вид

$$L = \sum ik_0 \left( e_m \frac{\partial e_m^*}{\partial z} - \text{к.с.} \right) + |\nabla_{\perp} e_m|^2 - \frac{3}{2} |e_p|^2 \frac{\omega_p^2}{c^2} |e_m|^2 - \\ - i \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2}{c^2} \left[ e_m^* (e_{m-1} e_p - e_p^* e_{m+1}) - \text{к.с.} \right], \quad (25)$$

в котором  $e_p$  является неварьируемой (заданной) функцией. Здесь  $e_m$  — поле электромагнитной волны с частотой  $\omega_m = \omega_0 + m\omega_p$ , нормированное, как и выше (3), на характерное для релятивистских эффектов поле. Для максимального упрощения конечных выражений везде, кроме условий синхронизма, предполагается, что  $\omega_m = \omega_0$ . В рассматриваемом приближении не учтены каскадные процессы более высокого порядка, связанные с возбуждением гармоник плазменной волны и рассеянием электромагнитных волн на них.

Далее будем считать, что электромагнитные волновые пучки имеют одинаковую пространственную структуру и распределение фазы

$$e_m = \frac{A_m}{a} \exp \left( -\frac{r^2}{2a^2} + i\Psi r^2 + i\Psi_0 \right) \quad (26)$$

и различаются только амплитудным значением поля. Это оправдано тем, что волновые поля (26) распространяются в самосогласованном "потенциале" (24), определяемом полным полем. Подставляя (26) в (25) и интегрируя по  $d\vec{r}$  приходим к укороченному лагранжиану

$$L = ik_0 \left( A_m \frac{\partial A_m^*}{\partial z} - \text{к.с.} \right) + |A_m|^2 \left( k_0 \Psi_z a^2 + \frac{1}{a^2} + k_0 \Psi_{0z} + 4\Psi^2 a^2 \right) - \\ - \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{|A_m|^2}{a^2} \int |\epsilon|^2 \exp \left( -\frac{r^2}{a^2} \right) dr^2 - i \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{1}{a^2} \cdot \\ \cdot \left[ A_m^* A_{m-1} \int \epsilon \exp \left( -\frac{r^2}{a^2} \right) dr^2 - A_m^* A_{m+1} \int \epsilon^* \exp \left( -\frac{r^2}{a^2} \right) dr^2 - \text{к.с.} \right]. \quad (27)$$

Отсюда стандартным способом можно найти уравнения для величин, описывающих поле, в предположении, что  $\epsilon = e_p$  является заданной (неварьируемой) функцией. Рассмотрим сначала уравнение для амплитуды

$m$ -ой волны. Фазой поля распорядимся таким образом, чтобы получить уравнения в том же виде, что и для плоских волн

$$k_0 \frac{\partial A_m}{\partial z} = \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2}{c^2 a^2} \left[ A_{m-1} \int \epsilon \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) dr^2 - A_{m+1} \int \epsilon^* \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) dr^2 \right]. \quad (28)$$

Система уравнений (28) имеет большое количество интегралов, которые являются следствием сохранения потока энергии в волновом пучке. Два из них, необходимые нам в дальнейшем, имеют вид

$$\sum |A_m|^2 = \text{const} = |A_0|_{z=0}^2 + |A_{-1}|_{z=0}^2, \quad (29)$$

$$\sum A_m A_{m-1}^* = \text{const} = A_0|_{z=0} A_{-1}^*|_{z=0}. \quad (30)$$

Используя их, найдём из (27) следующее уравнение для ширины волнового поля

$$a_{zz} = \frac{4}{k_0^2} \left[ \frac{1}{a^3} - \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2}{c^2 a^3} \int \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) |\epsilon|^2 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) dr^2 \right]. \quad (31)$$

Полагая распределение поля в плазменной волне и возмущение показателя преломления параболическим:

$$\epsilon = e_p = \epsilon_0 + \epsilon_2 r^2, \quad |e_p|^2 = |\epsilon_0|^2 + (\epsilon_0 \epsilon_2^* + \text{к.с.}) r^2, \quad (32)$$

для самосогласованных (с полем электромагнитной волны) значений коэффициентов  $\epsilon_0 \epsilon_2$

$$2\omega_p^{-1} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial t} + i3|\epsilon_0|^2 \epsilon_0 = 2 \frac{\omega_p^2}{a^2 \omega_0^2} A_0|_{z=0,t} A_{-1}^*|_{z=0}, \quad (33)$$

$$2\omega_p^{-1} \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} + i3(\epsilon_0 \epsilon_2^* + 2\epsilon_0^* \epsilon_2) \epsilon_0 = -2 \frac{\omega_p^2}{a^4 \omega_0^2} A_0|_{z=0,t} A_{-1}^*|_{z=0,t}, \quad (34)$$

получаем уравнение для ширины волнового поля

$$a_{zz} = \frac{4}{k_0^2} \left( \frac{1}{a^3} - \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2}{c^2} (\epsilon_0 \epsilon_2^* + \epsilon_0^* \epsilon_2) a \right). \quad (35)$$

Таким образом система уравнений (33)–(35), описывающих динамическое самовоздействие, в рассматриваемом приближении оказывается той же самой, что и в отсутствии каскадных процессов. Следовательно, для максимальной амплитуды плазменной волны, возбуждаемой волновыми пучками с одинаковой мощностью и поперечной структурой, остаются справедливыми приведенные выше оценки (16).

## 5. САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ ИМПУЛЬСОВ

В случае импульсного излучения в системе координат ( $z = z$ ,  $\tau = t - z/c$ ), движущейся с групповой скоростью импульса, имеем ту же самую систему уравнений, что описывает нестационарную самофокусировку при возбуждении плазменной волны. В частности, из системы уравнений (33)–(35) при замене  $t$  на  $\tau$  следуют в параксиальном приближении аналогичные выводы о роли каскадных процессов для импульсов. Заметим, что эта система координат несколько более удобна, чем использованная в [25]:  $t = t$ ,  $\tau = t - z/c$ , для описания самовоздействия импульсов, входящих в область взаимодействия с границы ( $z = 0$ ). При этом оказывается достаточно задать форму импульсов на границе ( $z = 0$ ) нелинейной среды, а далее распределение поля на переднем фронте естественным образом оказывается тем же, что и в линейной (невозмущённой) среде. При другом выборе системы отсчёта ( $t = t$ ,  $\tau = t - z/c$ ) в рассматриваемой задаче это распределение поля приходится задавать на переднем фронте ( $t = 0$ ) (с учётом изменения его в результате “линейной” дифракции на трассе распространения импульса). Начальная задача в предположении фиксированной структуры поля исследовалась в [25]. Результаты, полученные в ней, очевидно, относятся только к линейной фокальной области, в которой изменение распределения поля по мере его распространения можно не учитывать.

Рассмотрим особенности самовоздействия в наиболее простом случае импульсов одинаковой амплитуды, формы и длительности. Система уравнений имеет вид

$$-i \frac{\partial e}{\partial z} + \Delta_{\perp} e + |n|^2 e = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + i |n|^2 n = |e|^2.$$

Если пренебречь нелинейным сдвигом частоты для плазменной волны ( $\frac{\partial n}{\partial t} \gg |n|^2 n$ ), видно, что система уравнений (30) имеет обсуждавшееся выше автомодельное решение

$$e \simeq \frac{1}{\tau_0 - \tau} \varepsilon \left( \frac{r}{\tau_0 - \tau} \right) \exp \left( i \frac{Az}{(\tau_0 - \tau)^2} \right), \quad (37)$$

$$n = \frac{1}{\tau_0 - \tau} N \left( \frac{r}{\tau_0 - \tau} \right), \quad \xi = \frac{r}{\tau_0 - \tau}. \quad (38)$$

Схлопывающимся за конечное время  $\tau_0$  распределениям поля соответствуют локализованные решения системы уравнений (13), (14) для автомодельных функций  $\varepsilon(\xi)$ ,  $N(\xi)$ . В случае импульса прямоугольной формы

при его распространении в линейной фокальной области этим автомодельным решением можно воспользоваться для получения аналогичных оценок для времени схлопывания и амплитуд плазменной и электромагнитной волн

$$\tau_0 = \frac{(3/2)^{1/2} \pi a}{P}. \quad (39)$$

Для импульсов длительностью  $\tau_n$ , меньшей чем время схлопывания  $\tau_0$ , можно найти следующее значение для амплитуды плазменной волны на оси

$$n_0 = \frac{1}{\tau_0 - \tau} \frac{(3/2)^{1/2} \pi}{P}, \quad (40)$$

где  $P$  — локальный поток энергии в импульсе (10).

При  $\tau_n \rightarrow \tau_0$  интенсивность плазменной волны возрастает. Однако коллапса не происходит, как отмечалось выше, поскольку нелинейность “слабее”, чем кубическая (в стационарном случае  $|n|^2 \sim |e|^{4/3}$ ). Из сравнения членов  $\frac{\partial n}{\partial t}$  и  $|n|^2 n$  нетрудно оценить время  $\tau_n$ :  $(\tau_0 - \tau_n) \simeq \left[ \frac{\pi}{P} \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} \right]^2$ , при котором амплитуда плазменной волны достигает максимального значения

$$n_0 \simeq \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} P. \quad (41)$$

Несколько более сильно зависит от мощности  $P$  амплитуда электромагнитной волны при длительности импульса, превышающей  $\tau_0$ :

$$e_0 \simeq \left[ \frac{P}{\pi} \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} \right]^{3/2}. \quad (42)$$

Одновременно с увеличением по степенному закону максимальных полей в плазменной  $\sim P$  и электромагнитной волне  $\sim P^{3/2}$  с ростом мощности происходит уменьшение характерного поперечного размера области “следа”.

Численное интегрирование уравнений (36) проводилось для заданного на границе плазмы ( $z = 0$ ) сходящегося гауссова пучка шириной  $a_0$  и сходимостью  $\left( \frac{\partial a}{\partial z} \Big|_{z=0} = a'_0 \right)$ , определяемой расстоянием до линейного фокуса  $z_f$ . Так как наибольший интерес представляет исследование сфокусированных импульсов, отметим, что обсуждавшаяся выше роль абберационных искажений оказалась здесь, особенно в фокальной области, ещё более существенной. Поэтому, приведённые ниже численные результаты носят иллюстративный характер.

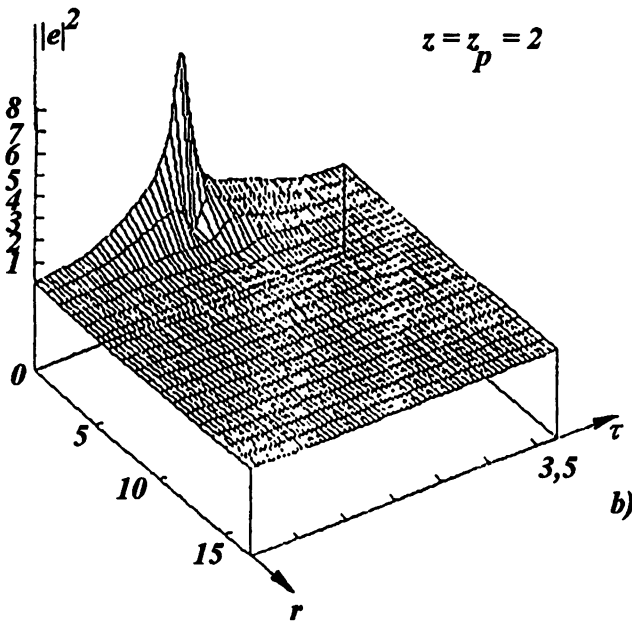
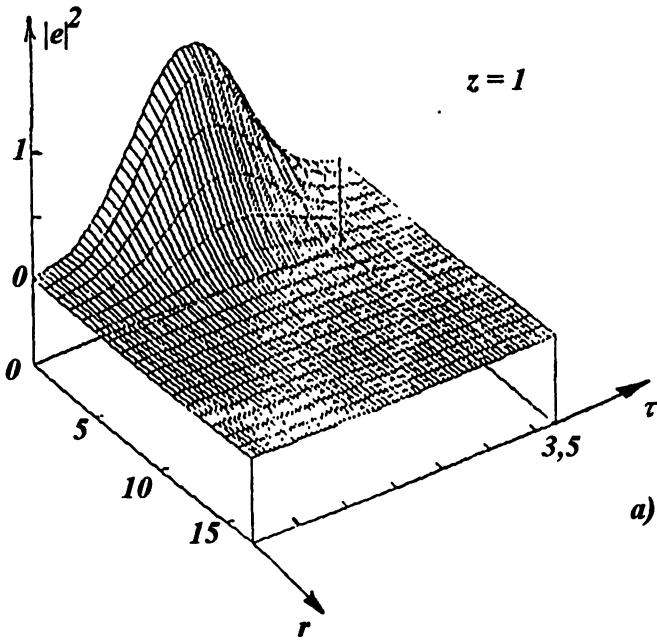


Рис. 2 а, б.

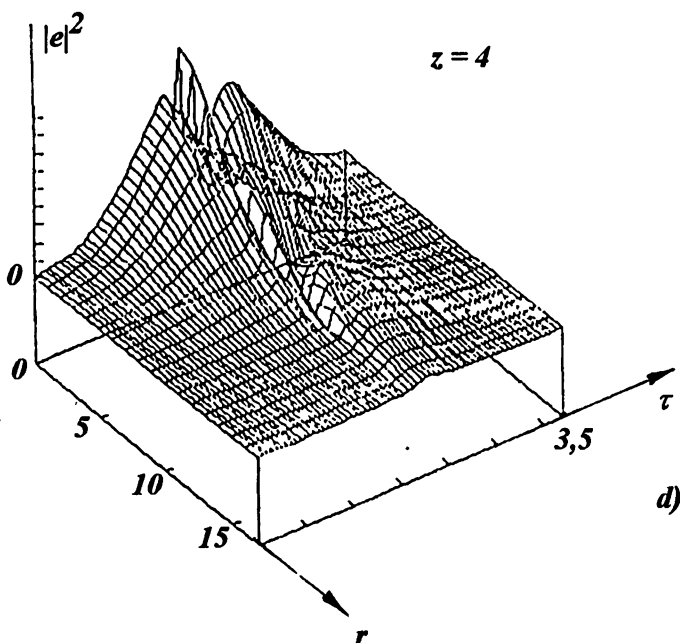
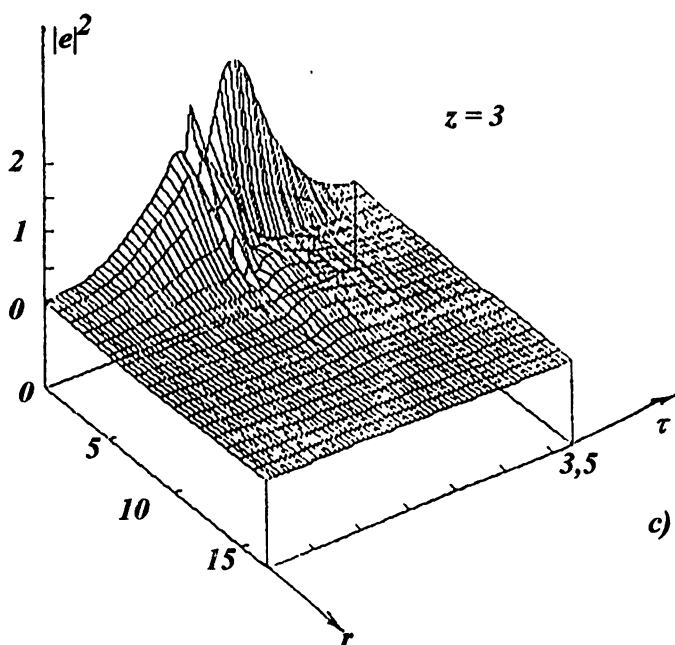


Рис. 2 с, d.

На рис. 2, 3 показана эволюция импульса гауссовой формы  $|e| = e_0 \exp\left(-\frac{(\tau - \bar{\tau})^2}{2\pi_0^2}\right)$ . Параметры выбраны следующие:  $e_0 = 0,7$ ,  $\tau_0 = 0,5$ ,  $\bar{\tau} = 1,5$ ,  $z_f = 2$ . Продольный размер каустики в линейном случае составлял  $z_L = 2$ . Видно, что основные искажения пространственно-временной структуры импульса происходят после прохождения линейного



фокуса  $z \sim z_L$  (см. рис. 2). Распределение поля электромагнитной волны в центральной части импульса становится двухмасштабным. Распределение поля плазменной волны заметно более плавное (см. рис. 3).

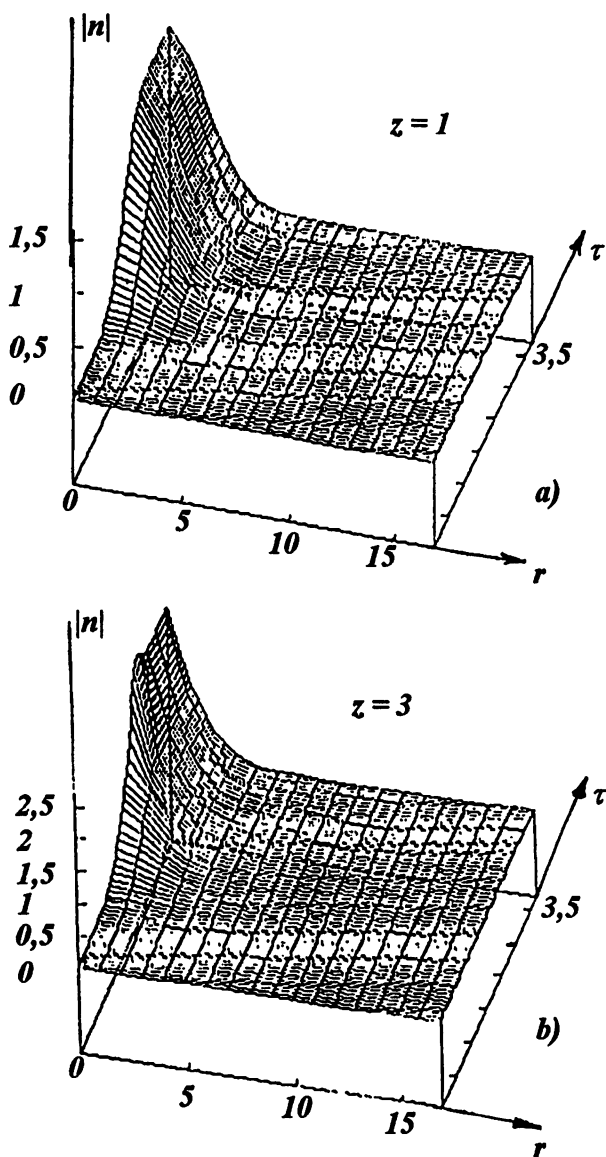


Рис. 3.

Связанное с полем плазменной волны возмущение показателя преломления среды локализовано вблизи оси системы и приводит к абберационным искажениям волнового поля. Приосевая часть электромагнитного излуче-

ния "захвачена" возмущением показателя преломления. Периферийная часть связана с утечкой электромагнитного излучения из канала. В результате "утечки" самоканализирование ограничено практически продольным размером фокальной области.

Проведённое исследование показывает, что нестационарное самовоздействие электромагнитных волновых пучков и пространственно ограниченных импульсов при возбуждении плазменной волны биениями заметно отличается от аналогичного процесса при других механизмах релаксации нелинейного отклика [20–22]. Самофокусировка электромагнитного излучения приводит к самосогласованной усиленной генерации плазменной волны. Автомодельность этого процесса позволила оценить максимальные амплитуды полей плазменной и электромагнитной волн. Особенность нестационарного самовоздействия в рассматриваемом случае связана с формированием сильно абберационного распределения возмущения показателя преломления среды. Это приводит к тому, что электромагнитные волны высвечиваются из нелинейной фокальной области и канализации излучения не происходит. В приложении для ускорения частиц рассматриваемые процессы способствуют усилению эффективности взаимодействия заряженных частиц с полем, поскольку увеличивают амплитуду плазменной волны и практически не меняют область взаимодействия.

Авторы признательны Е. И. Раковой за помощь при оформлении работы.

Численные расчеты были выполнены на рабочей станции, предоставленной Commission of the European Communities-DG III/ESPRIT-Project ACTCS 9282.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-02-19482) и МНФ (грант N R8K300).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Литвак А. Г. // ЖЭТФ, 1969. Т. 57. С. 629.
2. Max C., Arons J., and Langdon A. B. // Phys. Rev. Lett., 1974. V. 33. P. 209.
3. Schmidt G., Horton W. // Comments Plasma Phys., 1985. V. 9. P. 85.
4. Гаручава Д. П., Ростомашвили З. И., Цинцадзе Н. Л. // Физика плазмы, 1986. Т. 12. С. 1341.
5. Borisov A. B., Borovskiy A. V., Shiryayev O. B. et. al. // Phys. Rev. A, 1992. V. 45. P. 5830.
6. Tajima T. and Dawson J. M. // Phys. Rev. Lett., 1979. V. 43. P. 267.
7. Горбунов Л. М., Кирсанов В. И. // ЖЭТФ, 1987. V. 93. P. 509.
8. Sprangle P., Esarey E., Ting A., and Joyce G. // Appl. Phys. Lett., 1988. V. 53. P. 1246.

9. Wilks S. C., Dawson J. M., Mori W. B. et. al. // *Phys. Rev. Lett.*, 1989. V. 62. P. 2600.
10. Файнберг Я. Б. // *Физика плазмы*, 1987. Т. 13. Вып. 5. С. 607.
11. Leemans W., Joshi C., Mori W. B. et. al. // *Phys. Rev. A*, 1992. V. 46. P. 5112.
12. Богомолов Я. Л., Литвак А. Г., Фейгин А. М. // *Письма в ЖЭТФ*, 1987. Т. 45. Вып. 1. С. 12.
13. Salomas R. R. E., Karttunen S. J. // *Phys. Scripta*, 1986. V. 33. P. 370.
14. Sprangle P., Esarey E., Krall J. and Joyce G. // *Phys. Rev. Lett.*, 1992. V. 69. P. 2200.
15. Абрамян Л. А., Литвак А. Г., Миронов В. А., Сергеев А. М. // *ЖЭТФ*, 1992. Т. 102. С. 1816.
16. Bogomolov Ya. L., Brodsky Yu. Ya., Feigin A. M., Litvak A. G. et. al. // *Physica Scripta*, 1994. V. 52. P. 51.
17. Joshi C., Clayton C. E., Chen F. // *Phys. Rev. Lett.*, 1982. V. 48. P. 874.
18. Amiranoff F., Bernard D., Cros B. et. al. // *Phys. Rev. Lett.*, 1995. V. 74. P. 5220.
19. Mori W. B., Joshi C., Dawson J. M. et. al. // *Phys. Rev. Lett.*, 1988. V. 60. № 13. P. 1298.
20. Litvak A. G., Mironov V. A., and Sergeev A. M. // *Phys. Scripta*, 1990. V. 30. P. 57.
21. Ванин Е. В., Миронов В. А., Пянькина Е. А. и др. // *Физика плазмы*, 1991. Т. 17. С. 841.
22. Андреев Н. Е., Горбунов Л. М., Зыков А. И. и др. // *ЖЭТФ*, 1995. Т. 106. С. 1676.
23. Abramyan L. A., Litvak A. G., Mironov V. A. — In: 17 th European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Heating, Amserdam 1990. — *Contributed Papers, IV-1844 (poster)*.
24. Глендорф Г., Пригожин И. *Термодинамическая теория структуры, неустойчивости и флуктуаций*. — М.: Мир, 1973. С. 176.
25. Gibbon P. // *Phys. Fluids B*, 1990. V. 2(9). P. 2196.

Институт прикладной физики  
РАН, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию  
30 мая 1996 г.

**NONSTATIONARY SELF-EFFECT OF WAVE FIELDS IN BEAT  
ACCELERATORS**

*A. G. Litvak, V. A. Mironov, L. A. Abramyan*

Nonstationary processes of self-effect of wave fields during excitation of plasma oscillations are studied analytically and numerically. It is supposed that the self-effect is determined by the relativistic electron mass dependence on the amplitude of oscillations in the plasma wave excited at the beat frequency. Peculiarities of dynamics of the wave field self-effect are analyzed for the medium with such type of relaxation of the nonlinear response. It is shown that there are exact self-similar solutions of nonstationary equations in the form of compressing filaments (homogeneous wave channels). Basing on these solutions; maximum amplitudes of electromagnetic and plasma waves are estimated. Qualitative relations and conclusions have been confirmed numerically. Nonstationary self-effect was considered with account of the cascade processes of electromagnetic wave scattering by a plasma wave. It is shown that cascading does not change the estimate for the maximum amplitude of a plasma wave.

УДК 621.385.69

## ГИРОТРОНЫ С ЭШЕЛЕТТНЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ

*С. Н. Власов, Е. В. Копосова, А. Б. Павельев, В. И. Хижняк*

Рассматриваются гиротроны с эшелеттными резонаторами, образованными дифракционными решётками на внутренних стенках конической поверхности со штрихами, перпендикулярными оси конуса. Выбором параметров решётки обеспечивается управление добротностью рабочей моды резонатора. Селективные свойства резонатора определяются зависимостью от частоты коэффициента отражения от решётки в антизеркальном направлении. Такие резонаторы имеют при высокой селекции существенно более эффективную связь с выходным трактом, чем цилиндрические, что даёт возможность увеличения мощности гиротронов. В силу высокой селективности эшелеттных резонаторов, их можно использовать в гиротронах на гармониках гирочастоты, не опасаясь возбуждения низших гармоник. Определяются пусковые токи и эффективность гиротрона с эшелеттным резонатором. Проведенные экспериментальные исследования гиротронов с эшелеттными резонаторами подтвердили возможность существенного разрежения спектра генерации гиротрона.

Традиционно в гиротронах используются резонаторы в виде труб с переменным сечением. Для увеличения мощности гиротрона необходимо увеличивать диаметр поперечного сечения резонатора, что приводит к сгущению спектра колебаний и препятствует получению колебаний с регулярной пространственно-временной структурой. Селекция колебаний в гиротронах затрудняется тем, что рабочие моды гиротронов имеют минимальную дифракционную добротность [1]

$$Q_{\min} \approx 4\pi L^2/\lambda^2 = k^2 L^2/\pi, \quad (1)$$

( $L$  — длина резонатора,  $\lambda$  — длина волны,  $k = 2\pi/\lambda$ ), а добротность паразитных мод должна быть ниже. В настоящей работе обсуждаются гиротроны с эшелеттными резонаторами, причём последние имеют при высокой селекции существенно более низкую, чем (1), добротность рабочей моды.

Эшелеттные резонаторы образованы дифракционными решётками на внутренних стенках конической поверхности со штрихами, перпендикулярными оси конуса (рис. 1). Параметры решётки подбираются так, чтобы падающая на неё волна рассеивалась в двух направлениях: обратном (для организации рабочей моды) и зеркальном (для вывода излучения из резонатора). Отношение энергий между обратным и зеркальным лучом определяется амплитудой гофра при выбранной его форме [2–4], чем обеспечивается управление добротностью рабочей моды резонатора. Класс

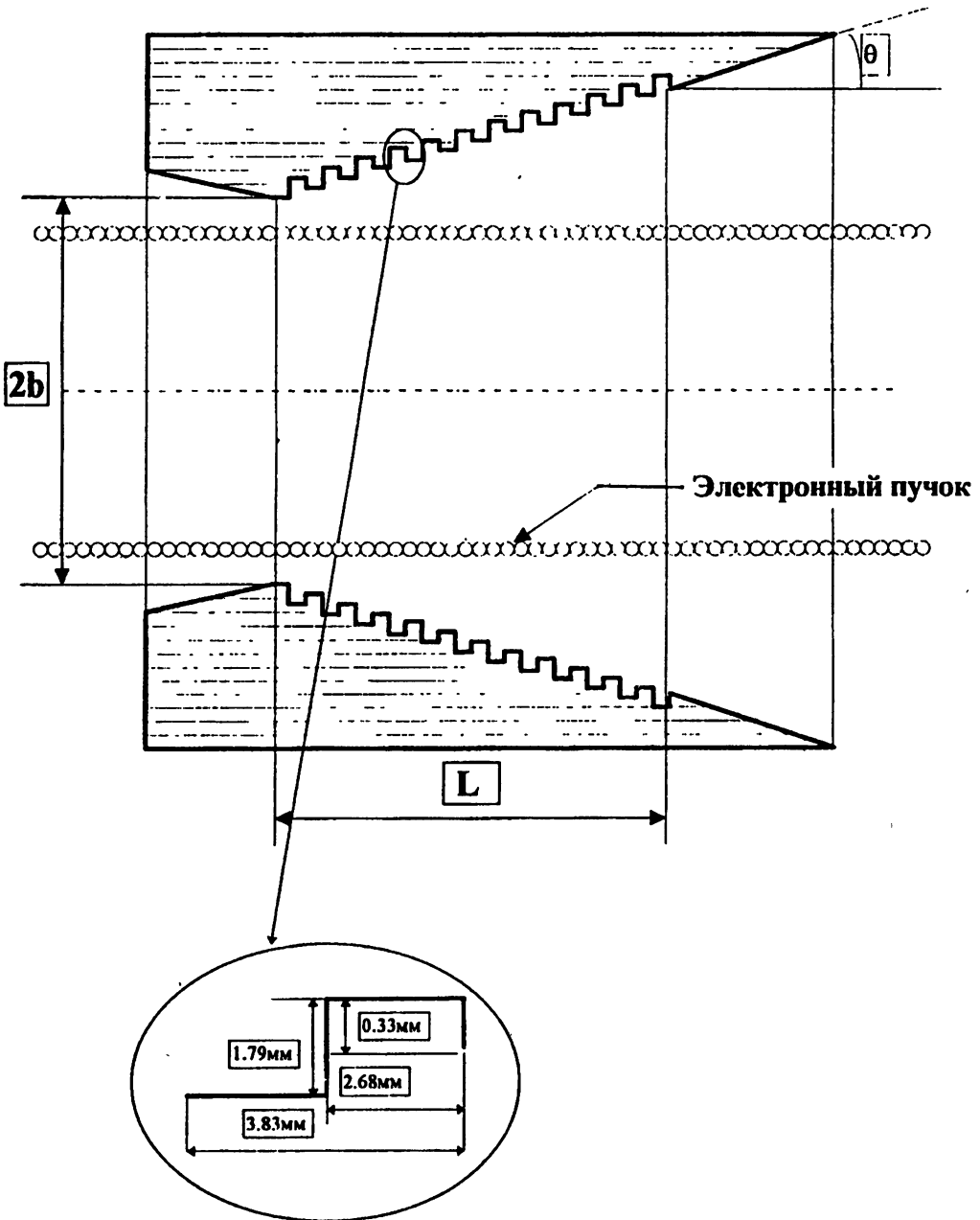


Рис. 1. Аксиально-симметричный резонатор с эшелеттом в качестве боковой стенки.

форм гофра, при которых имеет место достаточно полное отражение падающего излучения в обратном направлении, очень широк. Форма, выбранная нами (вставка, рис. 1), является одной из простейших в изготовлении.

Селективные свойства резонатора определяются зависимостью коэффициента отражения  $R(\omega)$  в обратном направлении от частоты [2-4], близкого к единице только на рабочей частоте  $\omega_0$ , и появлением угла перекоса [2]

$$\gamma \simeq 0,5\xi(\omega - \omega_0)/\omega_0$$

между падающим и отраженным лучом на нерабочих частотах  $\omega$ .<sup>\*</sup> Расчёт аксиально симметричных резонаторов эшелеттного типа проводится в квазиоптическом приближении [5-7], используя результаты численного анализа задачи дифракции плоской волны на идеально проводящих решётках, полагая радиус  $b$  — расстояние от оси до вершины ближайшего зубца эшелеттной поверхности — и длину  $L$  резонатора существенно превосходящими длину волны  $\lambda$  и период гофра  $d$ .

В таком резонаторе имеются моды с продольной составляющей магнитного поля ( $H$ -моды) и с продольной составляющей электрического поля ( $E$ -моды). В гиротронах используются  $H$ -моды. Их собственные частоты определяются из выражения

$$\ln |D| + i \arg D + \ln |R(\omega)| + i \arg R(\omega) - i\Phi = 2i\pi p, \quad (2)$$

где  $p \gg 1$  — радиальный индекс моды,  $D$  — собственное значение интегрального уравнения [6]:

$$D\Psi(z_2) = \sqrt{\frac{ik}{4\pi b_m}} \int_{-L/2}^{L/2} \exp[-ik(z_1 - z_2)^2/(4b_m) - i\gamma k z_1] \Psi(z_1) dz_1, \quad (3)$$

$$R(\omega) = |R_0(\omega)R_{ohm}|e^{i(k\gamma z + \Phi)}, \quad (4)$$

где  $R_0(\omega)$  — коэффициент отражения в обратном направлении от плоской решётки с тем же профилем гофра,  $R_{ohm}$  — омический коэффициент отражения от решётки, который по порядку величины равен омическому коэффициенту отражения от гладкой поверхности,  $\Phi$  — фаза коэффициента отражения от эшелеттной поверхности относительно ближайшей к оси точке зубца,  $b_m = (b + Ltg\theta/2)\sqrt{1 - m^2/(kb)^2}$ ,  $m$  — азимутальный индекс моды. Множитель  $e^{i\gamma k z}$  введен для учёта угловой дисперсии эшелетта.

Применяя асимптотику Дебая для цилиндрических функций и ограничиваясь первым членом, получим выражение для действительной  $k'$  и

<sup>\*</sup>В антенной технике параметр  $\xi$  часто называется углочастотной чувствительностью.

мнимой  $k''$  частей волнового числа собственных колебаний:

$$k' = \frac{1}{b_m} \left\{ \pi (m/2 + p - 3/4) - m^2/2\pi (m/2 + p - 3/4) + \delta \right\}, \quad (5a)$$

$$\delta = \frac{1}{2} [\arg R + \arg D],$$

$$k'' \approx - \{ \ln |D| + \ln |R_0(\omega)| + \ln |R_{0hm}| \} / (2b_m), \quad (5b)$$

Поскольку  $\delta$  мало и относительно слабо зависит от частоты, то волновые числа мод резонатора являются почти эквидистантными по индексу  $p$  со средним расстоянием  $\Delta\omega = \pi c/b_m$ , близким к спектру цилиндрического резонатора с радиусом  $b_m$ .

При  $|D| \approx |R_0| \approx |R_{0hm}| \approx 1$  добротности мод можно представить как  $Q = k'/2k'' = 2kb_m/(\Delta_r + \Delta_g + \Delta_{0hm})$ , где  $\Delta_r \approx 1 - |D|^2$  — дифракционные потери на излучение за время прохождения волной расстояния  $2b_m$ , связанные с конечностью размеров эшелеттной поверхности по координате  $z$ ,  $\Delta_{0hm}$  — омические потери за то же время,  $\Delta_g \approx 1 - |R_0|^2$  — потери на излучение, обусловленные неполным отражением волны от эшелетта в обратном направлении [2-4].

Величины  $\Delta_{0hm}$ ,  $\Delta_r$  связаны с нежелательными потерями. Их необходимо иметь как можно меньше.  $\Delta_{0hm}$  — омические потери в миллиметровом диапазоне длин волн при отражении от меди составляет доли процента.  $\Delta_r$  — дифракционные потери являются функцией параметра  $M = kL/\sqrt{2\nu(1 - m^2/\nu^2)}$ , где  $\nu = kb_m$ , и при длинах резонатора  $L \approx (10-20)\lambda$ ,  $\nu \approx 50$  потери на излучение могут быть уменьшены до величин порядка долей процента.

Селективные свойства эшелеттного резонатора связаны с достаточно сильной зависимостью величины  $\Delta_g$  от частоты и профиля решётки\*. Сравнение значений "полезных" потерь  $\Delta_g(\omega)$  с аналогичной величиной для цилиндрического резонатора показывает, что нагруженная добротность эшелеттного резонатора может быть примерно на порядок ниже нагруженной добротности цилиндрического резонатора при достаточно высокой селекции [8].

Рассмотрим работу МЦР-приборов с резонаторами эшелеттного типа. Отметим, что в силу высокой селективности эшелеттного резонатора, их можно использовать в гиротронах на гармониках гирочастоты, не опасаясь возбуждения низших гармоник. Структуры полей в них вблизи электронного пучка близки к структурам полей в цилиндрическом резонаторе. Основываясь на этом и следуя [9], мы определим пусковые токи  $I_{st}^{\min}$  гиротрона с эшелеттным резонатором. Поскольку структура поля в зависимости от продольной координаты имеет колоколообразный вид с

\*Подбором профиля решётки можно сделать полосу коэффициента отражения достаточно узкой [12].



характерной шириной  $L$ , то для определения пускового тока  $I_{st}^{\min}$  моды, находящейся в центре линии усиления, получим следующее выражение

$$2^{1/2} \pi^{3/2} e^{-1/2} \{e^0 / mc^3\} \{n^n / (2^n n!)\}^2 \cdot \\ \cdot \beta_{\perp}^{2n} \beta_{\parallel}^{-3} I_{st}^{\min} Q k L^2 J_{m-n}^2(kr_b) \{b + Ltg\theta/2\}^{-1} = 1, \quad (6)$$

где  $e^0$  — модуль величины заряда электрона,  $m$  — масса электрона,  $c$  — скорость света,  $n$  — номер гармоники,  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$  и  $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$ ,  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$  — поперечная и продольная составляющие скорости электрона на входе в резонатор,  $Q$  — добротность моды,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $J_{m-n}$  — функция Бесселя,  $r_b$  — расстояние центров вращения электронов от оси. При условии  $m \ll kr_b$  формула для  $I_{st}^{\min}(A)$ , измеряемого в амперах, упрощается

$$I_{st}^{\min}(A) = 0,2 \cdot 10^4 \cdot \beta_{\parallel}^3 \beta_{\perp}^{-2n} \{2^n n! / n^n\}^2 \Delta r_b \lambda / L^2, \quad (7)$$

где  $\Delta = \Delta_r + \Delta_g + \Delta_{ohm}$ .

Определённые таким образом пусковые токи гиротрона с эшелеттным резонатором показывают, что они составляют величины порядка нескольких ампер для гиротронов на первых двух гармониках гирочастоты. В гиротронах на более высоких гармониках гирочастоты пусковые режимы при приемлемых значениях токов достигаются только при существенном увеличении длины резонатора.

На основе работ [10, 11] могут быть определены оптимальные значения токов и длин резонаторов, необходимых для достижения максимальной эффективности. В предположении близости структуры поля к колоколообразной, которая, в свою очередь, заменяется гауссовой с обрезанием вытянутых крыльев последней [1], для оптимальной величины тока  $I_s$  имеем:

$$I_s \approx K I_{st}^{\min} \mu^3, \quad (8)$$

где  $\mu = \pi \beta_{\perp}^2 L / \lambda \beta_{\parallel}$ , а коэффициент  $K$  слабо зависит от номера гармоники. Для  $n = 1, 2, 3$   $K \approx 0,015$  при оптимальной длине  $\mu \approx 17$ . Необходимо иметь в виду, что максимальная эффективность достигается не в центре линии усиления, а при значительной отстройке от неё. Расчёты по (8) дают, что на первых двух гармониках при приемлемых токах достижима высокая эффективность работы, сравнимая с эффективностью гиротронов с традиционными резонаторами. На более высоких гармониках при приемлемых токах генерация может иметь место только при более низкой эффективности. Однако этот вопрос требует дополнительного исследования.

Эксперименты с гиротронами с эшелеттными резонаторами проводились при рабочем напряжении  $U \approx 80$  кВ и длительности импульса

$\tau = 40$  мксек. В экспериментах была испытана серия из шести резонаторов, рассчитанных на симметричную моду  $H_{0,6,1}$  с длиной волны  $\lambda \approx 3$  мм, возбуждаемую на первой гармонике гирочастоты. Радиальный индекс  $p$  мы относим ко входному наименьшему диаметру эшелетт-ного резонатора. Все резонаторы имели профиль, показанный крупным планом на рис. 1, и отличались друг от друга внутренним диаметром  $2b$ , причём входной диаметр менялся от  $2b = 23,75$  мм до  $2b = 23,95$  мм с шагом 0,04 мм. Геометрия профиля была выбрана на основе расчётов [12] с учётом возможности контроля точности изготовления резонатора. Относительно большая длина  $L \approx 12\lambda$  определялась надёжностью получения генерации, поскольку при более длинном резонаторе генерация достигается легче.

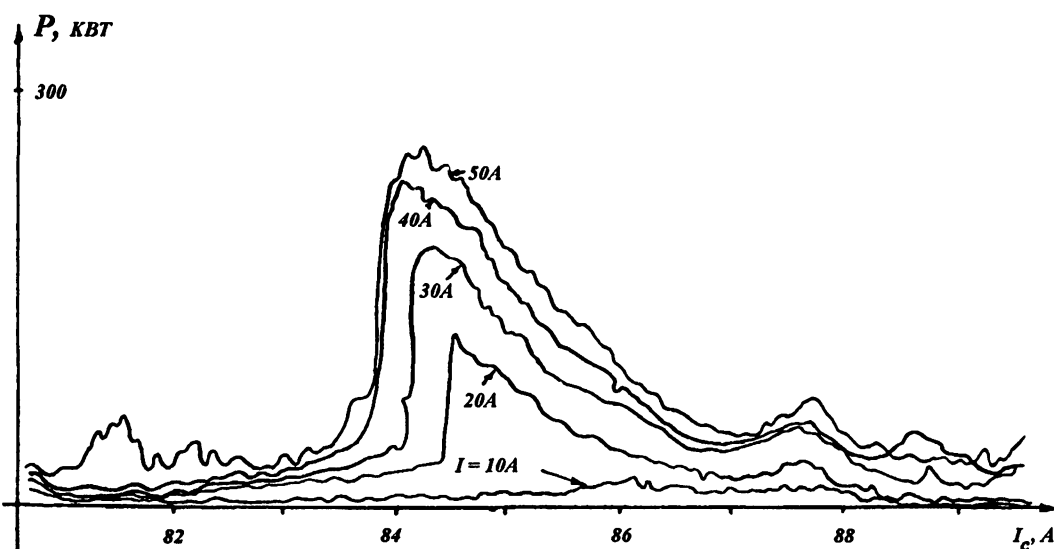


Рис. 2. Зависимость мощности гиротрона от магнитного поля.

Результаты экспериментальных исследований зависимости мощности от тока сверхпроводящего соленоида (пропорционального величине статического магнитного поля) при различных значениях тока электронного пучка для резонатора с  $2b = 23,87$  мм\* представлены на рис. 2\*\*. В широком интервале изменения величины статического магнитного поля  $\Delta H/H \approx 10\%$  возбуждалась практически одна рабочая мода. Единственная из низкочастотных (по отношению к рабочей) паразитных мод, конкуренция со стороны которых и препятствует получению эффективной

\*Для остальных резонаторов получены близкие, но несколько худшие — меньшие по мощности и КПД на 10–15% — результаты.

\*\*Сравнительно большая изрезанность кривых обусловлена недостатками используемого нами самописца.

генерации в гиротронах с цилиндрическими резонаторами, заметно проявлялась лишь при токе  $I \approx 50$  А, существенно превышающем оптимальные значения. Большая величина стартового тока паразитных колебаний свидетельствует об их низкой добротности и согласуется с теоретическими оценками. Во всех экспериментах наблюдалась низкая эффективность, нигде не превышающая величины 15%. Это может объясняться как слишком большой длиной резонатора, так и "провисанием" потенциала электронного пучка в эшелеттных резонаторах.

Проведённые исследования гиротронов с эшелеттными резонаторами подтвердили возможность существенного разрежения спектра генерации гиротрона. Даже при полученной эффективности они являются перспективными на длина волн  $\lambda \approx 1$  мм, где использование традиционных резонаторов затруднительно.

Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда по проекту R8Y300 Theoretical and experimental study of eshelle-type resonators for high power gyrotrons и Российского фонда фундаментальных исследований, грант 93 – 02 – 15423.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галонов А. В., Гольденберг А. Л., Григорьев Д. П. и др. // Изв. вузов. Радиофизика, 1975. Т. 18. № 2. С. 281.
2. Косарев Е. Л. // Письма в ЖЭТФ, 1966. Т. 3. № 7. С. 295.
3. Electromagnetic Theory of Grating /Ed. by R. Petit. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1980.
4. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решётки. — Киев: Наукова думка, 1986.
5. Авербах В. С., Власов С. Н., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1967. Т. 10. № 9–10. С. 1333.
6. Goubau G., Schwering F. — In: Electromagnetic wave theory, Proceedings of a Symposium held at Delft, Netherlands. Part 1. — Pergamon Press, 1967. P. 531.
7. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966. С. 476.
8. Власов С. Н., Копосова Е. В. Аксиально–симметричные резонаторы эшелеттного типа // ЖТФ, 1966. Т. 66. № 2.
9. Петелин М. И. — В кн.: Гиротрон. Сб. научн. тр. /Под ред. А. В. Галонова–Грехова. — Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 77.
10. Юлпатов В. К. — Гиротрон. Сб. научн. тр. /Под ред. А. В. Галонова–Грехова. — Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 26.

11. Белоусов В. И., Ергаков В. С., Моисеев М. А. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1978. № 9. С. 41.
12. Копосова Е. В. Эшелетт для волн  $E$ -поляризации: ступенчатые поверхности с прямоугольной канавкой на ступеньке // ЖТФ, 1995. Т. 65. № 3.

Институт прикладной физики  
РАН, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию  
29 января 1996 г.

### GYROTRONS WITH ECHELETTE RESONATORS

*S. N. Vlasov, E. V. Kuposova, A. B. Pavelyev, V. I. Khizhnyak*

The gyrotrons with echelette resonators formed by grating on inner surface of cone are considered. The grating ribs are perpendicular to the cone axis. The quality factor of the working mode is controlled by choosing the grating parameters. The selection is determined by the dependence of the anti-mirror reflection coefficient on the frequency. Such resonators have a higher selection and they are more effective by coupled with the output waveguide than cylindrical resonators that permits to increase the gyrotron power. The echelette resonators can be used in gyrotrons at higher harmonics of the cyclotron frequency due to their high selection. The starting currents and efficiency of the gyrotron with echelette resonator have been found. The experimental investigations of gyrotrons with echelette resonators confirmed the possibility to rarefy significantly the spectrum of gyrotron generation.

УДК 523.985

## МАЗЕР НА ЦИКЛОТРОННОМ РЕЗОНАНСЕ КАК ВОЗМОЖНЫЙ ТРИГГЕР СОЛНЕЧНОЙ ВСПЫШКИ

*В. Ю. Трахтенгерц*

Предложен новый механизм солнечной вспышки, который основан на взрывных явлениях, возникающих в магнитных ловушках в присутствии двухкомпонентной плазмы, состоящей из энергичных электронов с анизотропным распределением по скоростям и плотной холодной фоновой плазмы с достаточно высокой степенью ионизации. Предполагается, что такая плазма формируется в коронарной магнитной ловушке на предвспышечной стадии. При определённых условиях эта система, представляющая собой по существу мазер на циклотронном резонансе, становится неустойчивой, причём циклотронная неустойчивость развивается взрывным образом сначала в очень локальной области и сопровождается интенсивным прогревом фоновой плазмы и сбросом энергичных электронов на торцы ловушки. При этом энергия быстрых частиц собирается со всего объёма магнитной ловушки и локализуется в виде тепла в области взрыва, от которой распространяются тепловые и ударные волны. Модель позволяет количественно объяснить основные проявления солнечной вспышки.

Данная работа основана на идее, которая впервые была высказана в статье А. В. Гапонова-Грехова и др. "Мазер на циклотронном резонансе (МЦР) с фоновой плазмой", опубликованной в 1981 году [1]. В ней обращалось внимание на важную роль холодной плазмы в МЦРе как нелинейного поглощающего элемента, который может служить причиной взрывных явлений в магнитных ловушках, сопровождаемых вспышкой электромагнитного излучения, импульсным сбросом энергичных частиц на торцы ловушки и резким прогревом фоновой плазмы. В работе [2], написанной в 1986 году по следам [1], содержалось подробное обсуждение лабораторных экспериментов по вспышкам электромагнитного излучения в магнитных ловушках, в том числе эксперимент [3], наиболее близкий по постановке к естественным условиям. В этом эксперименте вспышки возникали при адиабатическом магнитном сжатии плазмы, сопровождавшемся её дополнительной ионизацией и появлением энергичных электронов. На определённой фазе сжатия возникала вспышка электромагнитного излучения на частотах ниже минимальной гирочастоты электронов в ловушке. Одновременно наблюдалось интенсивное объёмное оптическое свечение, свидетельствовавшее о сильном импульсном прогреве фоновой плазмы. И, наконец, в 1996 году идея МЦРа с фоновой плазмой достигла

солнечной короны (между прочим, все юбилейные даты: 1981, 1986, 1996). Как увидит читатель, космические масштабы солнечной плазмы вносят свою очень важную для данных приложений специфику, связанную с формированием в процессе работы солнечного МЦРа сильно нелинейных тепловых и ударных волн в фоновой плазме. Тем не менее исходная идея всё та же и восходит к 1981 году.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Солнечная вспышка представляет собой наиболее яркое проявление солнечной активности, которое обнаруживается во всех диапазонах волн, начиная от радиоволн и кончая рентгеновским и гамма излучением. Одновременно вспышка сопровождается интенсивным ускорением заряженных частиц, генерацией тепловых и ударных волн и не редко выбросом большого количества горячего вещества в межпланетное пространство (смотри, например, монографии [4, 5]). Наблюдения последних лет, особенно с помощью космических платформ с высоким пространственным и временным разрешением, позволили выделить наиболее характерные черты солнечных вспышек. Особенно богатая информация содержится в наблюдениях мягкого и жесткого рентгеновского излучения [6, 7]. Энергетика и структура вспышек чрезвычайно разнообразны и, по-видимому, во многом определяются структурой магнитного поля в активной области. В простом случае петлевой вспышки почти одновременно вспыхивают локальная область в центральной части петли (в мягком и жестком рентгене) и у основания петли в области фотосферы (в жестком рентгене). Начальная фаза вспышки очень короткая и длится от 0,1 до 10 сек, средняя продолжительность отдельной вспышки  $\lesssim$  нескольких минут. Характер спектра мягкого рентгеновского излучения говорит о том, что его источником является тепловое излучение плазмы, нагретой до температур  $T \sim (1-5) \cdot 10^7$  К. Жесткое рентгеновское излучение свидетельствует о присутствии во вспышечной петле энергичных электронов с энергией  $W \geq 20$  кэВ. Высыпаясь в плотные слои хромосферы, эти электроны приводят к появлению жесткого рентгена, обусловленного тормозным излучением. Перед вспышкой, как правило, наблюдаются довольно быстрые (с характерным временем  $\tau \sim 10^2 - 10^3$  сек) изменения магнитного поля и подъем вещества в верхнюю часть магнитной силовой трубки. В результате плотность плазмы во вспышечной петле довольно высокая и достигает значений  $N_e \sim 10^{10} - 10^{12}$  см<sup>-3</sup>. Предвспышечная стадия с тем же характерным временем, что и изменение магнитного поля, обнаруживается в дециметровом радиоизлучении и мягком рентгене.

В настоящее время высказан ряд гипотез, пытающихся объяснить наблюдаемый комплекс явлений на основе процессов магнитного пересоединения либо протекания интенсивного тока вдоль вспышечной петли. Оба

эти процесса могут в принципе приводить к генерации электрического поля, способного одновременно греть плазму и вызывать появление ускоренных (“убегающих”) электронов. Однако до сих пор указанные принципиальные возможности не были воплощены в конкретную модель, описывающую пространственно-временное поведение вспышки. Целью данной работы является построение именно такой модели, которая основана на некотором универсальном поведении двухкомпонентной плазмы в магнитной ловушке, состоящей из плотной, холодной плазмы с относительно высокой степенью ионизации и малого по концентрации, но достаточно энергоёмкого добавка энергичных электронов, захваченных в магнитную ловушку.

## 2. КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА ВСПЫШКИ

Предположим, что двухкомпонентная плазма образуется во вспышечной области за время  $\tau_0$  на предварительной фазе вспышки. Такая ситуация возможна, например, при магнитном сжатии плазмы, если в объём магнитной силовой трубки поступает холодное вещество, которое ионизуется в процессе магнитного сжатия. В принципе, магнитное сжатие первоначально горячей корональной плазмы может приводить не к нагреву, а к её охлаждению за счёт роста потерь на излучение, связанного с увеличением плотности плазмы [4, 8]. При этом одновременно может возникать “хвост” ускоренных (убегающих) электронов. Принципиальная возможность такого сценария подтверждается лабораторным экспериментом [2], а также теоретическими оценками [2, 9].

Энергичные электроны, захваченные в магнитную ловушку, обладают поперечной анизотропией в распределении по скоростям, поэтому возможно развитие плазменных неустойчивостей, которые будут препятствовать накоплению энергичных частиц в ловушке [10]. Принципиальным моментом, с точки зрения вспышечного протекания процесса, является то обстоятельство, что порог неустойчивости определяется, при наличии фоновой плазмы, частотой электрон-ионных соударений  $\nu_{ei}$  и достигается при выполнении неравенства [1]

$$\gamma = \nu, \quad (1)$$

где  $\gamma$  — инкремент неустойчивости,  $\nu$  — затухание волн, пропорциональное  $\nu_{ei}$ . Наиболее эффективной в двухкомпонентной плазме является циклотронная неустойчивость на плазменной (верхнегибридной) либо электромагнитной (свистовой) моде. Практические оценки для обоих случаев мало чем отличаются. Далее мы рассмотрим электромагнитную неустойчивость, которая согласно [10] более эффективна для достаточно энергичных электронов с энергией  $W \geq 10$  кэВ. В этом случае равенство (1) может быть представлено в виде [1, 10]:

$$0,2\alpha \left( \frac{N_h}{N_c} \right) \omega = \left( \frac{\omega}{\omega_H} \right) \nu_{ei}, \quad (2)$$

где  $N_h$  и  $N_c$  — концентрация энергичных и холодных электронов соответственно, коэффициент анизотропии  $\alpha = W_{\perp 0}/W_{\parallel 0}$ ,  $W_{\perp 0}$  и  $W_{\parallel 0}$  — средние энергии быстрых электронов поперёк и вдоль магнитного поля,  $\omega_H$  — электронная гирочастота, характерная частота волн  $\omega$  равна:

$$\omega \sim (1 - \alpha^{-1}) \omega_H. \quad (3)$$

Частота соударений  $\nu_{ei}$  падает с ростом температуры  $T$  фоновой плазмы по закону:

$$\nu_{ei} \approx 50 N_c T^{-3/2}, \quad (4)$$

где нужно подставлять  $N_c$  в  $\text{см}^{-3}$  и  $T$  в градусах К.

Соотношения (2)–(4) дают максимальную концентрацию энергичных электронов  $N_{hm}$ , которая может накопиться в ловушке к моменту включения неустойчивости. Это значение равно

$$N_{hm} = \frac{50 N_c^2}{0,2\alpha\omega_H T^{3/2}}. \quad (5)$$

Подставляя в соотношение (5) в качестве примера  $N_c \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $T \sim 6 \cdot 10^4 \text{ К}$ ,  $\alpha \sim 1,5$ ,  $H \sim 20 \text{ Гс}$  и  $W_0 \sim 20 \text{ кэВ}$ , будем иметь

$$\left( \frac{N_h}{N_c} \right) \sim 10^{-3}, \quad \beta_0 = \frac{8\pi N_h W_0}{H^2} \sim 0,07, \quad S_0 \sim 7 \cdot 10^9 \text{ эрг/см}^2\text{с}. \quad (6)$$

Здесь мы подошли к ключевому моменту, лежащему в основе предлагаемой модели вспышки. Дело в том, что после достижения в процессе сравнительно медленного накопления энергичных электронов в магнитной ловушке порога неустойчивости (1) дальнейшее развитие неустойчивости приобретает характер взрыва. Это обусловлено прогревом плазмы волнами в месте развития неустойчивости и уменьшением  $\nu$ , что соответствует нелинейному росту результирующего инкремента неустойчивости  $\gamma - \nu$ . В простейшей конфигурации в виде магнитной петли раньше всего порог достигается в центральном сечении магнитной силовой трубки, где  $N_h$  максимально, а  $N_c$  минимально. Из-за очень малых времён развития неустойчивости (в реальных условиях при  $N_c \geq 10^{10} \text{ см}^{-3}$   $\gamma(t=0) \geq 10^4 \div 10^5 \text{ с}^{-1}$ ) область неустойчивости быстро (за время  $\sim \gamma^{-1}$ ) локализуется в малой окрестности вблизи центра, где происходит накопление энергии волн и растёт температура плазмы. Далее тепло будет распространяться за счёт теплопроводности преимущественно вдоль магнитного поля в виде нелинейной тепловой волны от плоского источника с мгновенным включением.



Действие источника не прекращается до тех пор, пока через фронт тепловой волны поступают энергичные электроны с анизотропным распределением по скоростям, то есть энергия собирается со всего объёма петли в очень локальной области, заключённой между двумя расширяющимися от центра ловушки фронтами температурного скачка. В зависимости от начальных условий плотность кинетической энергии, которая накапливается в сгустке фоновой плазмы, заключённой между тепловыми фронтами, может превысить давление внешнего магнитного поля, и тогда начнётся расширение и всплывание сгустка в сторону убывания магнитного поля. Эта фаза соответствует выбросу горячей плазмы в межпланетное пространство. В следующих разделах даётся количественное описание приведённой выше качественной картины вспышки.

### 3. КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ

Количественное описание вспышки по приведённому выше сценарию опирается на систему квазилинейных уравнений для функции распределения энергичных электронов и спектральной плотности энергии свистовых волн, а также систему уравнений магнитогидродинамики для температуры, плотности и магнитного поля фоновой плазмы, где в качестве источника выступает энергия волн. В строгом виде решение этих связанных систем уравнений не представляется возможным. Мы ограничимся анализом развития циклотронной неустойчивости и формирования тепловых нелинейных волн, оставляя в стороне вопросы искажения профиля плотности плазмы и структуры магнитного поля, а также генерации ударных волн. Для этого есть основания, поскольку указанные эффекты возникают на более поздней стадии по сравнению с развитием циклотронной неустойчивости и прогревом плазмы.

При сделанных предположениях исходные уравнения включают кинетическое уравнение для функции распределения  $F$  энергичных электронов по скоростям

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial z} = G(v, u, E_\omega) F, \quad (7)$$

уравнение переноса для спектральной плотности  $E_\omega$  энергии свистовых волн

$$\frac{\partial E_\omega^\pm}{\partial t} \pm v_g \frac{\partial E_\omega^\pm}{\partial z} = (\gamma - \nu) E_\omega^\pm \quad (8)$$

и гидродинамическое уравнение для температуры  $T$  фоновой плазмы

$$\frac{3}{2} N_c \frac{\partial T}{\partial t} = q - Q N_c^2 + \frac{\partial}{\partial z} \chi \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (9)$$

В уравнениях (7)–(9) использованы следующие обозначения:  $z$  — координата вдоль силовой линии магнитного поля,  $v$  и  $u$  — компоненты

скорости энергичного электрона вдоль и поперек магнитного поля,  $G$  — оператор квазилинейной диффузии в магнитном поле [10–11],  $v_g$  — групповая скорость свистовых волн,  $Q$  — функция потерь, определяющая энергетические потери плазмы в солнечной короне (см. [4], стр. 121), источник нагрева  $q$  и коэффициент электронной теплопроводности  $\chi$  определяются выражениями

$$q = \int \nu E_\omega d\omega, \quad \chi = N_c v_{Te}^2 / \nu_{ei}, \quad v_{Te}^2 = 2T/m. \quad (10)$$

Функция потерь  $Q$  важна на предвспышечной стадии, когда параметры фоновой плазмы и энергичных электронов эволюционируют достаточно медленно (за время  $\tau_0 \geq 1$  мин), при этом, несмотря на энергозложения, температура фоновой плазмы поддерживается на достаточно низком уровне. На этой стадии инкремент неустойчивости  $\gamma$  медленно растёт (за счёт, например, магнитного сжатия), достигая порога неустойчивости (1). В случае простой конфигурации магнитного поля порог неустойчивости достигается, в первую очередь, в центральном сечении магнитной ловушки, после чего неустойчивость развивается взрывным образом. Строгое решение системы (7)–(10) сложно, однако грубые оценки начальной фазы могут быть сделаны на основе более простых соотношений. Дело в том, что временной масштаб развития неустойчивости очень мал, и на начальной стадии можно учитывать лишь два основных процесса: медленный рост  $\gamma$  в пространстве и во времени на стадии предвспышечной эволюции и неоднородный прогрев фоновой плазмы возникающими волнами, пренебрегая в уравнениях (8)–(9) нелинейным насыщением амплитуды свистовых волн и пространственными эффектами (групповое распространение волн и теплопроводность). В этом приближении развитие неустойчивости описывается двумя уравнениями:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \gamma_0(z, t)E - \left( \frac{\omega \nu_{ei}}{\omega_H} \right) E, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left( \frac{2\omega \nu_{ei}}{3\omega_H N_c} \right) E, \quad (12)$$

где  $\nu_{ei}$  зависит от  $T$  согласно (4). Для наглядности мы ограничимся случаем  $(T - T_0)/T < 1$  и  $\partial\gamma/\partial t = \text{const}$ . В этом случае система (11)–(12) преобразуется к одному уравнению:

$$\frac{\partial \ln E}{\partial t} = \gamma_0(z, t) - \nu_0 + \frac{\nu_0^2}{N_c T_0} \int_0^t E dt, \quad (13)$$

где  $T_0$  и  $\nu_0(T_0)$  — температура плазмы и затухание волн в момент достижения порога неустойчивости, когда  $\gamma_0(z=0, t=0) = \nu_0$ . Следует заметить, что (13) корректно описывает генерацию волн, начиная лишь с

момента достижения порога неустойчивости, разного в разных точках по  $z$ . В нашем случае  $\partial\gamma_0/\partial t \sim \text{const}$ , и решение (13) имеет вид:

$$\int_0^e \frac{dx}{\sqrt{ax + b(\exp\{x\} - 1)}} = \nu_0 t \sqrt{2}, \quad (14)$$

где  $e = \ln(E/E_0)$ ,  $a = (\gamma_0\tau)^{-1}$ ,  $\tau^{-1} = \partial \ln \gamma_0 / \partial t$ ,  $b = E_0/(N_c T_0)$ ,  $E_0$  — начальная плотность энергии волн (в устойчивой плазме). Уравнение (13) справедливо, когда  $(b/a) \ll 1$ , что в реальных условиях, как правило, выполняется. Согласно (14), вспышка излучения протекает как бы в два этапа. При  $ax > b(\exp\{x\} - 1)$  имеем из (14):

$$\frac{E}{E_0} \sim \exp \left\{ \frac{\nu_0 t^2}{2\tau} \right\}. \quad (15)$$

Затем при  $b(\exp\{x\} - 1) > ax$  энергия волн растёт взрывным образом:

$$E^{-1/2} = E_1^{-1/2} - \nu_0 t (2N_c T_0)^{-1/2}, \quad E_1 = N_c T_0 / (\nu_0 \tau). \quad (16)$$

Согласно (17) плотность энергии волн становится бесконечной за конечное время

$$t_{\text{вз}} = (2\tau/\nu_0)^{1/2}. \quad (17)$$

При этом очевидно, что волны сосредотачиваются в окрестности точки, где раньше всего достигается порог неустойчивости, и время (18) определяет передний фронт вспышки. Полагая, в частности,  $\nu_0 \sim 3 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$  (что соответствует  $N_c \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_0 \sim 6 \cdot 10^4 \text{ К}$  и  $\alpha \sim 1,5$ ) и  $\tau \sim 10^3 \text{ сек}$ , получим  $t_{\text{вз}} \sim 0,3 \text{ сек}$ .

#### 4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕПЛОВАЯ ВОЛНА

Согласно предыдущим оценкам после включения неустойчивости развитие вспышки происходит как тепловой взрыв от локализованного в экваториальном сечении вспышечной петли плоского источника с практически мгновенным включением. Мы будем интересоваться асимптотическим поведением такой волны, когда два тепловых фронта ушли от центра достаточно далеко друг от друга и можно использовать автомодельное решение. Схематически такая тепловая волна изображена на рис. 1. Как уже отмечалось, подпитка тепловой волны не прекращается до тех пор, пока энергичные электроны с неравновесным (анизотропным) распределением по скоростям поступают через фронты внутрь тепловой волны. Таким образом, энергия в тепловой волне собирается со всего объёма петли, причём источник не прекращает своего действия и после полного

пробега энергичными электронами магнитной ловушки, поскольку анизотропия частично восстанавливается благодаря наличию конуса потерь. Степень вторичной анизотропии при большом пробочном отношении  $\sigma$  не велика ( $\alpha \sim \sigma^{-1}$ ), однако в общем балансе энергии этот процесс может оказаться существенным.

Итак, наша задача — найти закон эволюции нелинейной тепловой волны с учётом подпитки энергией от поступающих через фронты энергичных электронов. Нас будет интересовать случай сильного прогрева, когда температура за фронтом  $T \ll T_0$  — температуры газа перед фронтом, и последнюю можно положить равной нулю. Подвод тепла осуществляется за счёт диссипации волн, возбуждаемых энергичными электронами, в очень узкой области в окрестности фронта тепловой волны ( $\Delta Z \sim v_g/\nu_0 \leq 1$  км). За счёт высокой теплопроводности эта энергия быстро распределяется внутри тепловой волны. С учётом сказанного мы будем отыскивать автомодельное решение уравнения (9) без источника, а подпитку тепла через фронты учтём с помощью закона сохранения энергии в системе энергичные электроны + фоновая плазма.

При анализе нелинейной тепловой волны в уравнении (9) можно пренебречь выхолаживанием ( $N_e^2 Q$ ) по сравнению с нагревом ( $q$ ). Соответствующие оценки будут даны ниже. С учётом выражения (10) для  $\chi$  уравнение теплопроводности (9) примет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi_0 \theta^{5/2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (18)$$

где безразмерная переменная  $\theta = T/T_0$ ,  $\chi_0 = 2v_{T0}^2/(3\nu_{ei0})$ , индекс "0" относится к начальным значениям величин в момент  $t = 0$ .

Решение уравнения (19) будем искать в классе автомодельных решений. Следуя [12], выберем в качестве автомодельной переменной

$$\xi = z - v_\Phi t. \quad (19)$$

Тогда решение (19) при  $T_0 \rightarrow 0$  запишется следующим образом [12]:

$$\theta = \left( \frac{5v_\Phi}{2\chi_0} |z_\Phi - z| \right)^{2/5}, \quad (20)$$

где  $v_\Phi$  связано с  $z_\Phi$  соотношением:  $dz_\Phi/dt = v_\Phi$ . Решение (21) описывает структуру двух симметричных тепловых фронтов, распространяющихся от центральной плоскости  $z = 0$  в  $\pm z$  направлениях (рис. 1). Зависимость координаты фронта от времени найдём, исходя из закона сохранения энергии, который в данном случае формулируется следующим образом. Поток энергичных электронов с анизотропной функцией распределения, пересекая фронт, становится неустойчивым в области тепловой волны и

передаёт часть энергии циклотронным волнам. Эти волны полностью поглощаются на границе с ещё не прогретым газом. В процессе развития неустойчивости функция распределения энергичных электронов изотропизуется.

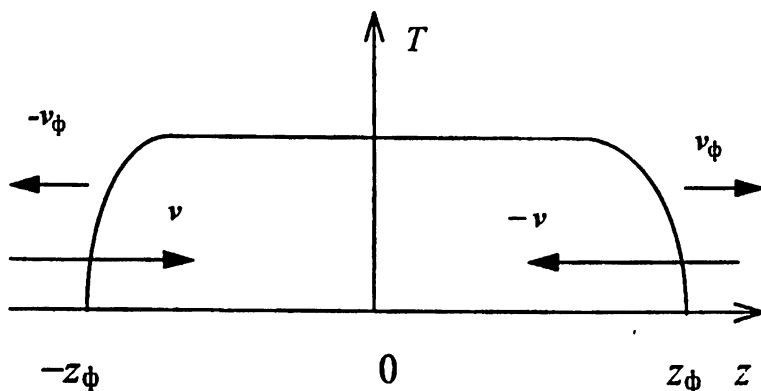


Рис. 1. Схематическое изображение нелинейной тепловой волны, распространяющейся в виде двух тепловых фронтов от области включения циклотронной неустойчивости  $z = 0$ .

Таким образом, интегрируя (19) по пространству и времени и учитывая поступление энергии в объём тепловой волны от быстрых частиц, найдём для фронта, движущегося в  $-z$  направлении:

$$\frac{3}{2} N_c T_0 \int_{-z_\phi}^{z_\phi} \theta(z) dz = |S_0 - S_I| t, \quad (21)$$

где  $\theta(z)$  описывается решением (21),  $S_0$  — плотность потока энергии энергичных электронов с анизотропной функцией распределения, движущихся в  $-z$  направлении,  $S_I$  — та же величина после изотропизации, причём  $S_0$  и  $S_I$  должны вычисляться с учётом сохранения плотности потока энергичных электронов. Например, в случае начальной функции распределения с анизотропией температур

$$F_0 = \frac{N_h}{\pi^{3/2} v_0 u_0^2} \exp \left\{ -\frac{u^2}{u_0^2} - \frac{v^2}{v_0^2} \right\} \quad (22)$$

будем иметь ( $v > 0$ ):

$$S_0 = \int v \frac{m}{2} (v^2 + u^2) F_0 d^3 v = \frac{m N_h v_0}{4\sqrt{\pi}} (v_0^2 + u_0^2), \quad (23)$$

где  $v_0$  и  $u_0$  — средние скорости вдоль и поперёк магнитного поля соответственно.

Учтём далее сохранение плотности потока частиц ( $v > 0$ )

$$\int F_0 v d^3 v = \int F_I v d^3 v, \quad (24)$$

а также то обстоятельство, что диффузия на волнах при развитии циклотронной неустойчивости происходит вдоль линий [10, 11]

$$w \equiv \frac{1}{2} \left( u^2 + v^2 \frac{\omega_H}{\omega_H - \omega} \right) = \text{const}, \quad (25)$$

где  $\omega$  — характерная частота возбуждаемых волн. Для нахождения функции распределения энергичных частиц в конечном состоянии  $F_I$  нужно в (23) перейти к переменным  $w$  и  $v$  и усреднить по  $v$ . Нормировка  $F_I$  определяется соотношением (25). После указанных преобразований в пределе  $w \ll \omega_H$  найдём:

$$S_I - S_0 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} S_0 \equiv \delta S_0, \quad (26)$$

где, как и раньше,  $\alpha = u_0^2/v_0^2$ . Заметим, что  $S_I > S_0$ , и закон сохранения потока энергии обеспечивается генерацией волн, распространяющихся против потока энергичных электронов ( $v_g \uparrow \downarrow v$ ). Все соотношения (23)–(27) справедливы и для теплового фронта, распространяющегося в  $+z$  направлении, поэтому источник тепла в (21) с учётом обоих фронтов просто удваивается.

После интегрирования (22) с учётом (21) получается соотношение:

$$z_\Phi^{7/2} \frac{dz_\Phi}{dt} = \frac{2\chi_0}{5} (\delta S_0)^{5/2} t^{5/2}. \quad (27)$$

Интегрируя далее по времени, имеем:

$$z_\Phi = \left( \frac{18\chi_0}{35} \right)^{2/9} \left( \frac{\delta S_0}{N_c T_0} \right)^{5/9} t^{7/9}, \quad (28)$$

причём, как легко видеть, зависимость от  $T_0$  выпадает. Формулу (29) удобно представить в виде:

$$\eta \equiv \frac{z_\Phi}{v_0 t} = \left( \frac{\delta_1 N_h}{N_c} \right)^{5/9} \left( \frac{N_c v_0^3}{\omega_p^4 t} \right)^{2/9}, \quad (29)$$

где  $\omega_p = (4\pi e^2 N_c / m)^{1/2}$  — плазменная частота фоновой плазмы,  $\delta_1 = 0,5(\alpha - 1)$ . Температура  $T$  и отношение газокINETического давления плазмы к магнитному  $\beta = (8\pi N_c \kappa T / H^2)$  выражаются следующим образом через переменную  $\eta$ :

$$\kappa T = (\delta_1 / \eta) (N_h / N_c) W_0, \quad W_0 = m v_0^2 / 2, \quad (30)$$

$$\beta = (\delta_1/\eta) \beta_0, \quad \beta_0 = (8\pi N_h W_0/H^2), \quad (31)$$

где  $\kappa$  — постоянная Больцмана.

В заключение данного раздела оценим роль выхолаживания на стадии формирования тепловой волны. Выхолаживанием можно пренебречь, если средний по объёму тепловой волны источник нагрева  $\langle q \rangle \sim \delta S_0/z_\Phi$  превышает потери:

$$\delta S_0 z_\Phi^{-1} > N_c^2 Q, \quad (32)$$

где, как и раньше,  $z_\Phi$  — координата теплового фронта (рис. 1).

Используя те же исходные параметры, что и раньше,  $N_c \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $N_h/N_c \sim 10^{-3}$ ,  $W_0 \sim 20 \text{ кэВ}$ ,  $\delta \sim 0,5$  и принимая  $Q$  равным  $10^{-34,5} \text{ Вт} \cdot \text{м}^3$  [4], найдём, что в соответствии с (33) размер области  $z_\Phi$  не должен превышать  $z_\Phi \sim 5 \cdot 10^4 \text{ км}$ , что сравнимо с размером вспышечной петли.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Соотношения (30)–(32) позволяют установить динамические особенности и энергетику вспышки. Фактически вспышка состоит из двух стадий. Первая стадия проявляет себя, в первую очередь, в жёстком рентгеновском излучении, приходящем из погружённых в хромосферу оснований вспышечной петли. Источником этого излучения служат энергичные электроны, которые в процессе развития циклотронной неустойчивости испытывают сильное пич-угловое рассеяние и через конус потерь высыпаются в плотные слои солнечной атмосферы. Нагрев фоновой плазмы в центральной части ловушки имеет некоторую задержку по отношению к высыпаниям энергичных частиц. Общая закономерность, которая следует непосредственно из исходной системы уравнений (7)–(10), состоит в том, что поток высыпающихся энергичных частиц пропорционален плотности энергии волн, а температура плазмы растёт как интеграл по времени от энергии волн. Соответствующая задержка будет между мягким рентгеновским излучением от нагретой плазмы в вершине силовой линии и жёстким рентгеном, возникающим при взаимодействии высыпающихся энергичных электронов с атмосферой. Такое поведение подтверждается экспериментальными данными [13].

По мере развития вспышки растёт  $\beta$ , которое в принципе может превысить единицу за счёт высокой концентрации энергии в малом объёме тепловой волны. Но пока  $\beta < 1$ , вспышка носит одномерный характер, расширяясь вдоль магнитной силовой трубки. Оценим  $T$  и  $\beta$  в конце первой стадии вспышки, используя соотношения (30)–(32). Выбирая те же исходные параметры, что и раньше (см, например, оценки (6)), можно записать безразмерную переменную  $\eta$  в виде:

$$\eta = 0,01 (50/t)^{2/9}. \quad (33)$$

В соответствии с (32)  $\beta$  достигнет значения единицы через  $t_{кр} \sim 0,15$  сек. При этом  $T \sim 3,6 \cdot 10^6$  К и размер тепловой волны  $2Z_{\Phi} \sim 10^3$  км. При  $t \sim 2$  сек  $T \sim 7 \cdot 10^6$  К.

Оценим степень анизотропии функции распределения энергичных электронов, которая обусловлена существованием конуса потерь. При заданном пробочном отношении  $\sigma$  эта анизотропия равна [1]:

$$\alpha_c = \frac{\sigma + 0,5}{\sigma - 1}, \quad \delta \approx \frac{3}{2\sigma}. \quad (34)$$

При  $\sigma \gg 1$  этот источник менее интенсивный, но и более продолжительный, его действие определяется временем жизни энергичных электронов в ловушке, которое равно:

$$\tau_{ж} \approx (l/v_0)\sigma, \quad (35)$$

где  $l$  — размер вспышечной петли. При  $\sigma \sim 10$  и  $l/v_0 \sim 2$  сек  $\tau_{ж} \sim 20$  сек.

На второй стадии вспышки начинается возбуждение ударной волны и расширение области вспышки поперёк магнитных силовых линий, если  $\beta$  становится больше единицы. При этом в тепловой взрыв вовлекаются энергичные электроны из соседних магнитных силовых трубок, и начинается выброс горячего вещества в межпланетное пространство. Рассмотрение этой стадии выходит за рамки данной работы, однако грубую оценку энергетики вспышки можно дать, исходя из следующих соображений. Через  $t \sim 10$  сек в соответствии с (30) размер тепловой волны вдоль магнитного поля достигнет  $2z_{\Phi} \sim 10^5$  км, а температура  $T \sim 8 \cdot 10^6$  К. Поперечный размер  $l_{\perp}$  можно оценить, полагая при  $\beta > 1$   $l_{\perp} \sim V_A \cdot t$ , где  $V_A$  — альвеновская скорость. При  $V_A \sim 2 \cdot 10^3$  км/сек имеем  $l_{\perp} \sim 2 \cdot 10^4$  км. Тогда энергия вспышки равна:

$$W_{\Sigma} \sim N_c T_m 2\pi l_{\perp}^2 z_{\Phi} \sim 4 \cdot 10^{30} \text{ эрг}. \quad (36)$$

На основе проведённого выше рассмотрения можно сделать следующие выводы.

1. Предлагаемый новый сценарий вспышки, когда накопление энергии происходит на предвспышечной стадии в виде энергичных частиц, захваченных в солнечную магнитную ловушку, существенно ослабляет требования к источнику энергии. Практически любая даже сравнительно медленная ( $\gtrsim 10$  минут) перестройка магнитного поля, сопровождаемая магнитным сжатием плазмы, может приводить к появлению и накоплению в солнечной короне ускоренных частиц.
2. Характер динамики тепловой волны, возникающей при включении циклотронной неустойчивости, позволяет в зависимости от начальных параметров вспышечной области объяснить большое многообразие солнечных вспышек.



3. Эффект аккумуляции энергии энергичных электронов в малом объёме тепловой волны объясняет естественным образом генерацию ударной волны и выброс горячего вещества в межпланетное пространство.
4. С точки зрения предлагаемого механизма вспышки дальнейшее развитие теории и эксперимента должно быть направлено, в первую очередь, на более глубокое изучение предвспышечной стадии. Каковы наиболее вероятные сценарии накопления энергичных электронов в больших объёмах короны с повышенной концентрацией вещества и низкой температурой? Какие обнаружимые явления следуют из факта существования двухкомпонентной плазмы (энергичные электроны и фоновая плазма) при значениях параметров, необходимых для протекания вспышки?

В заключение автор выражает благодарность В. В. Зайцеву за полезное обсуждение и ценные советы. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 96-02-16473-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грегов А. В., Глаголев В. М., Трахтенгерц В. Ю. // ЖЭТФ, 1981. Т. 80. С. 2198.
2. Демехов А. Г., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика, 1986. Т. 29. С. 1117.
3. Perkins W. A., and Barr W. L. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fusion Res., 1966. V. 2. IAEA, Vienna. P. 115.
4. Прист Э. Р. Солнечная магнитогидродинамика. — М.: Мир, 1985. — 585 с.
5. Zirin H. Astrophysics of the Sun. — Cambridge Univ. Press, 1988. — 433 p.
6. Flare Physics in Solar Activity Max 22, Proceedings, Tokyo, 1990. — 360 p.
7. Proceedings of Kofu Symposium, Sept. 6–10, 1993. NRO Report № 360, 1994. / Ed. by S. Enome and Hirayama.
8. Ходаченко М. Л. // Изв. вузов. Радиофизика, 1996. Т. 39. С. 53; // Астроном. ж., 1996. Т. 73. № 2.
9. Богомолов Я. Л., Демехов А. Г., Трахтенгерц В. Ю., Шер Э. М., Юнаковский А. Д. // Физика плазмы, 1988. Т. 14. С. 539.
10. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. Альвеновские мазеры. — Горький, 1986. 190 с.
11. Trakhtengerts V. Yu. — In: Basic Plasma Physics II. — New York: Elsevier Sci., 1984. P. 519.

12. Зельдович Я. Б. и Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
13. Dennis B. R. — In: Flare Physics in Solar Activity Max 22, Proceedings, Tokyo, 1990. P. 89.

Институт прикладной физики  
РАН, г.Н.Новгород

Поступила в редакцию  
30 мая 1996 г.

### CYCLOTRON RESONANCE MASER AS A POSSIBLE TRIGGER OF A SOLAR FLARE

*V. Yu. Trakhtengerts*

A new mechanism of the solar flare has been proposed which is based on explosive phenomena arising in magnetic traps in the presence of two-component plasma consisted of energetic electrons with anisotropic velocity distribution and a dense cool background plasma with a sufficiently high degree of ionization. It is suggested that such plasma is formed in a coronal magnetic trap at a preflare stage. Under definite conditions this system in fact representing itself a cyclotron resonance maser has become unstable the cyclotron instability being developed explosively first in a very local area and is accompanied by an intense warming of the background plasma and the release of energetic electrons on trap faces. The energy of fast particles therewith is collected from the whole volume of the magnetic trap and is localized as heat in the explosion area from which thermal and shock waves are propagated. The model makes it possible to explain quantitatively the main effects of the solar flare.

УДК 533.9

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХСИЛЬНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПОЛЕЙ С ВЕЩЕСТВОМ: ГИПОТЕЗЫ, ЭФФЕКТЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ

*А. А. Бабин, А. В. Ким, А. М. Киселев, А. М. Сергеев,  
А. Н. Степанов*

Представлен обзор исследований и результатов по некоторым направлениям в области физики сверхсильных лазерных полей. Он включает вопросы формирования нелинейного отклика атомных систем под действием сверхсильных полей, анализ свойств возникающей лазерной плазмы, обсуждение экспериментов по генерации гармоник оптического поля при ионизации газов фемтосекундным излучением и по возбуждению сильных ленгмюровских волн лазерными импульсами в плазме.

За последние несколько лет произошло формирование одного из интереснейших и многообещающих направлений современной физики — изучение взаимодействий сверхсильных оптических полей с веществом на сверхкоротких временных интервалах. Прогресс в этом направлении во многом связан с созданием компактных тераваттных фемтосекундных лазерных комплексов на основе новых твердотельных широкополосных активных сред типа Ti:Sa (сапфира с ионами титана). Такие системы обладают значительными преимуществами по сравнению, например, с разработанными ранее для генерации сильных полей красительно-экцимерными системами, благодаря своей компактности, надёжности и возможности получать, по крайней мере, на порядок более короткие (до 10–20 фс) импульсы. Как это видно уже сейчас, Ti:Sa лазерные комплексы становятся экспериментальной базой для развития новых направлений в атомной физике, термоядерных исследованиях, физике ускорителей заряженных частиц, в исследованиях по короткоимпульсным источникам и лазерам рентгеновского и УФ диапазонов частот. Они являются также основой для проведения обширных исследований по спектроскопии сверхвысокого временного разрешения и материаловедению.

Создание компактных тераваттных источников излучения (так называемые “Т<sup>3</sup>-системы” — “table-top terawatt laser systems”) обусловлено двумя важными открытиями в области оптических технологий. В 1985 г. в работе [1] был предложен метод усиления сверхкоротких лазерных импульсов до высоких энергий, позволяющий в значительной мере устранить основное препятствие на пути повышения мощности излучения в усилительных системах — самофокусирующую неустойчивость света.

Было предложено расширять исходный фемтосекундный импульс, поступающий с задающего генератора, в несколько тысяч раз (до длительностей порядка сотен пикосекунд) в оптической дисперсионной системе, усиливать полученный частотно-модулированный (“чирпованный”) сигнал в широкополосной активной среде и затем компрессировать его до минимально возможной длительности. Данный метод усиления чирпованных импульсов используется сейчас во всех тераваттных лазерных установках.

Второе открытие заключалось в создании нового класса лазерных кристаллов с исключительно широкой полосой усиления в ближнем ИК диапазоне [2]. Основным представителем этого класса является кристалл  $\text{Ti:Sa}$ , активная полоса которого перекрывает значительную часть ближнего ИК диапазона (0,7–1,05 мкм) и потенциально позволяет генерировать лазерные импульсы с длительностью в 2–3 периода оптического поля. Применение метода синхронизации мод за счёт индуцированной керровской линзы и тщательная компенсация волновой дисперсии в лазерном резонаторе привели в настоящее время к созданию  $\text{Ti:Sa}$  генераторов света с длительностью излучения до 10 фс [3, 4]. Такие источники рассматриваются как наиболее перспективные задающие генераторы в схемах усиления чирпованных импульсов до уровня мощностей в несколько десятков тераватт.

В настоящее время в мире существует около 10 тераваттных фемтосекундных лазерных комплексов (полностью на основе  $\text{Ti:Sa}$  либо с использованием  $\text{Cr:LiSAF}$  или  $\text{Nd:glass}$  активных элементов в оконечных каскадах усиления) и появляются первые мультитераваттные системы (с мощностью  $> 10^{13}$  Вт и интенсивностью излучения до  $10^{20}$  Вт/см<sup>2</sup>). Наиболее интересными и перспективными, с точки зрения объявленной экспериментальной программы, представляются установки в университете Сан-Диего [5], Мичиганском университете [6], Ливерморской национальной лаборатории [7] и исследовательском центре в Палезо (Франция) [8], где поставлена задача достижения в ближайшие годы интенсивностей излучения  $10^{21}$  Вт/см<sup>2</sup>. Открывшийся благодаря созданию источников тераваттного излучения фронт научных исследований настолько велик, что позволяет выполнять практически на каждой установке оригинальную экспериментальную программу и получать уникальные физические результаты. Основные направления работ включают исследования фундаментальных процессов в атомной физике, создание сверхкороткоимпульсных источников когерентного и некогерентного излучения в рентгеновском и УФ диапазонах частот, разработку лазерно-плазменных методов ускорения заряженных частиц и изучение средствами фемтосекундной оптики свойств веществ, находящихся в экстремальных физических состояниях.

В данной работе представлен обзор исследований и результатов по некоторым научным направлениям в области сверхсильных полей, отража-

ющий интересы авторов и связанный с выполнением соответствующей программы работ в Институте прикладной физики РАН. Он включает вопросы формирования нелинейного отклика атомных систем под действием сверхсильных полей, анализ свойств возникающей лазерной плазмы и обсуждение экспериментов по генерации гармоник оптического поля при ионизации газов фемтосекундным излучением и по возбуждению сильных ленгмюровских ("кильватерных") волн лазерным импульсом в плазме.

**1. Отклик среды на воздействие мощного излучения** содержит в себе информацию как о нелинейных свойствах отдельных атомов, так и о коллективных процессах, развивающихся в веществе. В достаточно разреженных газах, где взаимодействие между частицами несущественно за время прохождения импульса через среду, нелинейный отклик определяется, в основном, свойствами отдельных атомов. Эта информация может быть извлечена при анализе характеристик электромагнитного излучения, прошедшего через газ. Одним из макроскопических проявлений нелинейной динамики атома служит модификация спектра лазерного импульса в процессе взаимодействия. Установление соответствия между спектральными характеристиками излучения и особенностями микродинамики атома является важной проблемой, изучаемой в физике сверхсильных полей.

Напряжённости лазерных электрических полей с интенсивностями  $\geq 10^{16}$  Вт/см<sup>2</sup> сравнимы или превосходят соответствующие атомные значения для наружных электронных оболочек. Это означает, что доминирующим фактором в формировании нелинейного отклика атома в сверхсильном оптическом поле является его ионизация, которая происходит в течение нескольких периодов электромагнитных колебаний на переднем фронте лазерного импульса. Именно в этот сравнительно небольшой промежуток времени нелинейная поляризация атома становится наиболее сильной и особенности микроскопической динамики должны быть наиболее отчётливо представлены в спектрах возбуждаемого атомом излучения. Это излучение является по природе тормозным и возникает при освобождении электрона из внутриатомного потенциала либо при соударениях ускоренного лазерным полем электрона с атомами и ионами.

В случае разреженного газа, когда взаимодействием освободившихся электронов с соседними атомами за время прохождения сверхкороткого импульса можно пренебречь, особую роль приобретают так называемые возвратные соударения с родительскими ионами. Как показывает классический анализ движения возникающих свободных электронов в линейно-поляризованном оптическом поле, около половины этих частиц возвращаются назад к родительским ионам и взаимодействуют (соударяются) с ними хотя бы ещё один раз. Если средняя осцилляторная энергия

$U_p = \frac{e^2 E_0^2}{4\pi\omega_0^2}$ , которую набирает электрон, двигаясь свободно в лазерном поле с амплитудой  $E_0$  и частотой  $\omega_0$ , превосходит потенциал ионизации атома  $U_i$ , возвратные соударения характеризуются излучением высокоэнергетичных квантов и являются причиной возникновения своеобразного высокочастотного плато в спектре нелинейного поляризационного отклика атома. Природа этого плато находит объяснение в известных свойствах тормозного излучения заряженной частицы при рассеянии на притягивающем кулоновском центре (см. например [9]). Максимальная частота испускаемого кванта, очевидно, должна соответствовать максимально возможной энергии электронов при возвратных соударениях. Эта простая закономерность выражается в знаменитой теперь формуле для частоты обрезания плато  $3,2U_p + U_i$  и подтверждается многочисленными экспериментальными наблюдениями [10]. В случае линейно поляризованного лазерного импульса, благодаря повторяемости с периодом оптического поля актов ионизации, происходящих с различными атомами в каждом физически малом объёме, излучение атомной системы, соответствующее плато, сфазировано во времени и представляет собой набор высоких нечётных гармоник частоты лазерного поля. Ясно, что спектры гармоник служат эффективным инструментом для наблюдения особенностей микродинамики атома посредством макроскопических измерений оптического излучения.

Другой важной особенностью атомной нелинейности в сверхсильных полях является её сильная зависимость от поляризации оптического поля [11]. Хорошо известно, например, что высокие гармоники отсутствуют в нелинейном отклике атома на циркулярно-поляризованное поле. Если же основной вклад в генерацию гармоник вносит тормозное излучение при возвратных соударениях, эффективность этого процесса должна драматически падать даже в присутствии малой циркулярно-поляризованной компоненты на фоне сильного линейно-поляризованного поля. Причина этого заключается в отклонении вновь родившихся электронов при движении вне атома от прямолинейной траектории за счёт действия поперечной компоненты поля и исчезновении возвратных соударений. На рис. 1 представлены фрагменты эволюции  $\Psi$ -функции волнового пакета электронов и спектры поляризационного отклика, полученные при численном моделировании квантомеханической задачи о динамике одноэлектронного атома с двумерным потенциалом  $V = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 0,01}}$  в зависимости от поляризации оптического поля в лазерном импульсе (здесь переменные измеряются в атомных единицах потенциала  $V_a = \frac{me^4}{\hbar^4}$ , длины  $r_a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ , поля  $E_a = \frac{m^2 e^5}{\hbar^4}$  и частоты  $\omega_a = \frac{me^4}{\hbar^3}$ ). В случае линейно-поляризованного

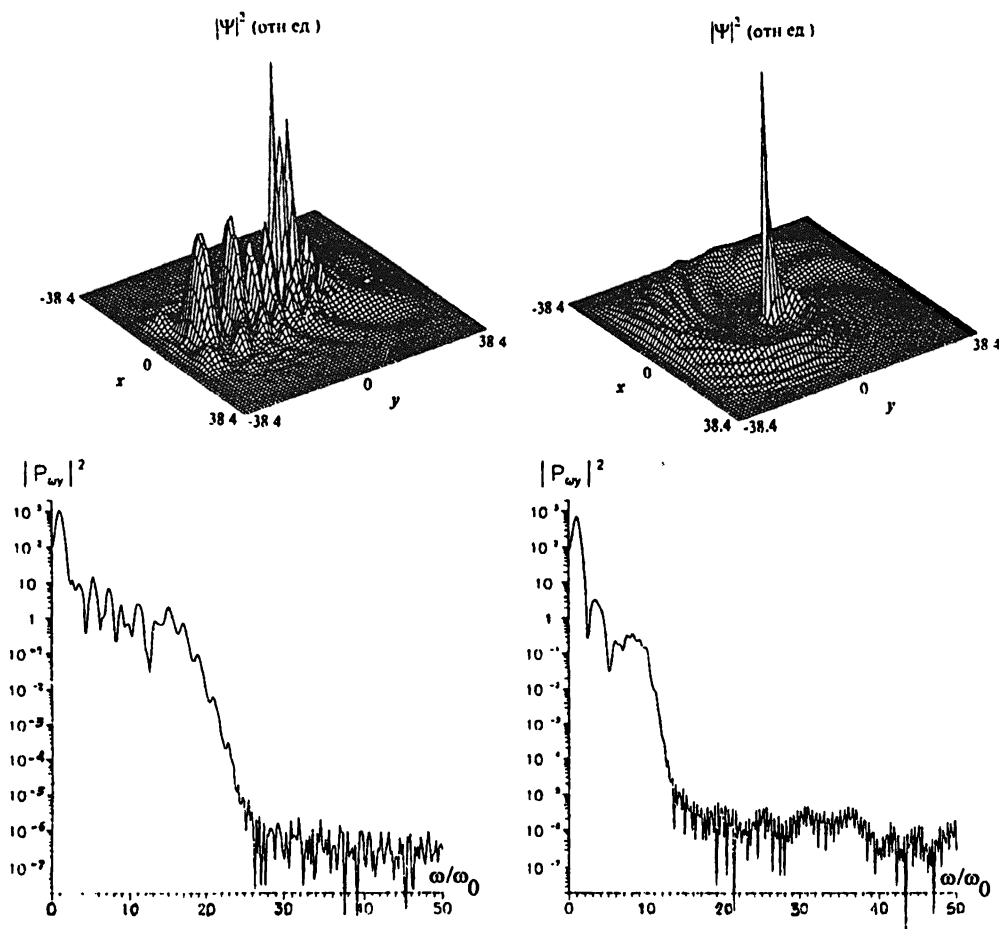


Рис. 1. Пространственные распределения волновой функции электронов при ионизации атома в сверхсильном поле с линейной (вдоль  $y$ ) (а) и циркулярной (б) поляризацией. Соответствующие спектры отклика (в) и (г), зависящие от номера гармоники оптического поля, существенно различаются в области высоких частот. Пространственные переменные измеряются в атомных единицах  $\frac{\hbar^2}{me^2}$ , плотность вероятности и спектральная плотность — в относительных единицах.

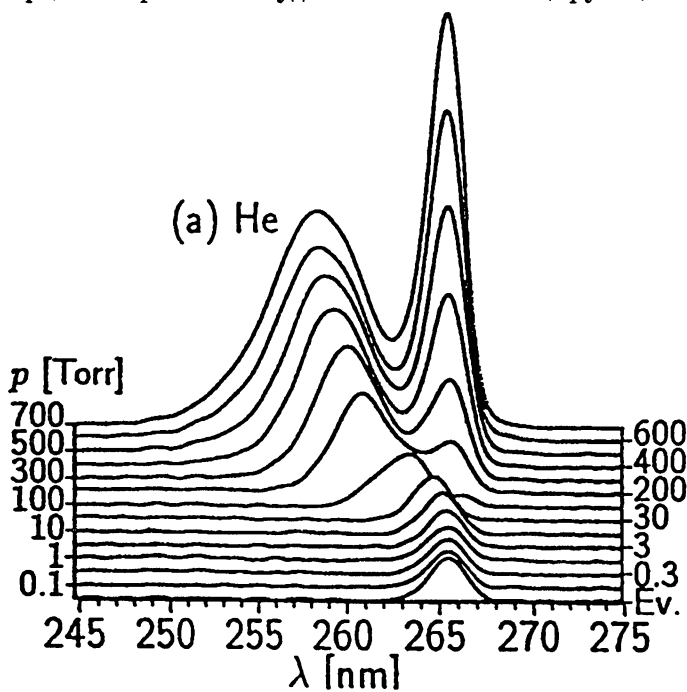
поля с единичной амплитудой разрушение атома происходит за 3–4 периода поля с частотой  $\omega_0 = 0,4\omega_a$ , причём значительная часть волнового пакета электронов, освобождаемых внутриатомным потенциалом, возвращается назад и вновь рассеивается на нём. В результате в спектре отклика наблюдается медленно убывающий высокоэнергичный хвост вплоть до частот  $\omega \simeq 10\omega_a$ . В случае лазерного импульса с той же энергией, но циркулярной поляризацией поля,  $\Psi$ -функция волнового пакета освобождённых электронов имеет форму спирали, раскручивающейся с течением времени от атомного центра, т.е. возвратные соударения отсутствуют. В спектре отклика, соответственно, исчезает высокочастотная часть и остаются только черты, обусловленные тормозным излучением электронов при вылете из потенциала. Таким образом, применение света различной поляризации позволяет подчеркнуть или ослабить отдельные черты нелинейного отклика атома и в результате селективно диагностировать микропроцессы в атоме в присутствии сверхсильного лазерного поля.

При увеличении плотности газа в спектрах излучения появляются, а затем могут стать и доминирующими особенности, связанные с коллективными процессами в веществе. Поскольку в сверхсильных полях происходит быстрая ионизация атомов, эти особенности отражают, прежде всего, нелинейную динамику короткоживущей лазерной плазмы. Такая плазма представляет интерес для широкого круга задач, включая создание источников короткоимпульсного когерентного и некогерентного излучения в УФ и рентгеновском диапазонах частот и разработку лазерно-плазменных ускорителей заряженных частиц. С целью таких приложений в физике сверхсильных полей определился целый ряд коллективных нелинейных эффектов, являющихся в последние годы объектом интенсивных исследований. Среди них — трансформация спектров лазерного излучения в плотных газах, возбуждение сильных ленгмюровских волн в лазерной плазме, создание протяжённых плазменных образований с масштабами, многократно превосходящими дифракционную длину лазерного пучка.

**2. Модификация спектров мощных фемтосекундных лазерных импульсов при взаимодействии с газами и плазмой является предметом серьёзного экспериментального изучения. Уже первые эксперименты по воздействию фемтосекундного излучения с интенсивностью  $> 10^{15}$  Вт/см<sup>2</sup> на инертные газы [12, 13] показали наличие большого числа нечётных гармоник в спектре излучения, выходящего из плазмы. Распределение интенсивности гармоник от их номера  $n$  после быстрого спадания на начальном участке переходило в длинное плато. В работе [12] оно простиралось почти до  $n = 100$  и резко обрывалось при  $n = 110$ . Эти наблюдения продемонстрировали возможность получения очень коротких (менее 7 нм) длин волн за счёт процесса генерации гармоник. Структура спек-**



тра гармоник качественно анализировалась в работах [12–14], но наиболее детально исследовалась в [15]. Здесь на примере наиболее длинноволновой (третьей) была проведена характеристика её спектрального и пространственного распределения с помощью фотоэлектрических датчиков и оптики ближнего УФ диапазона. Лазерная установка была сконструирована на основе общепринятого сейчас [1] принципа усиления чирпованных импульсов и состояла из фемтосекундного задающего генератора на Ti:Sa [16], дисперсионной системы временного удлинения импульса, регенеративного усилителя на активном элементе из Ti:Sa и системы сжатия для восстановления первоначальной длительности импульса. Параметры излучения на выходе установки составляли: энергия в импульсе — до 1,5 мДж, длительность импульса — 80 фс, частота повторения — 30 Гц. Это излучение фокусировалось в вакуумной камере, а затем коллимировалось с помощью двух слегка развёрнутых относительно нормали высокоотражающих сферических зеркал с фокусным расстоянием 50 мм. При максимальной энергии импульса вакуумная интенсивность в фокальной плоскости составляла величину порядка  $10^{16}$  Вт/см<sup>2</sup>. Параллельный пучок на выходе из камеры направлялся на входную щель 275 мм спектрометра с последующей регистрацией диодной линейкой или анализировался с помощью кварцевой призмы на удалённом люминесцирующем экране.



Спектрограммы излучения, полученные при различных давлениях  $p$  для инертных газов He, Ne и Ar, приведены на рис. 2.

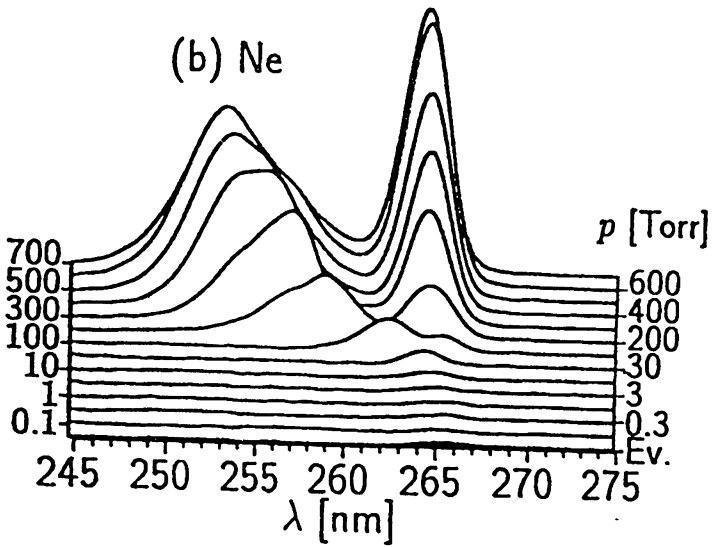


Рис. 2 б.

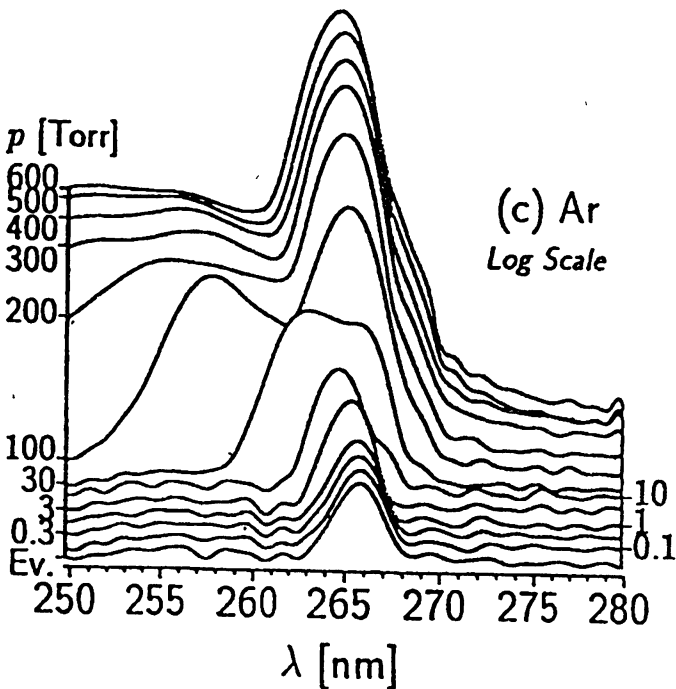


Рис. 2 с.

Спектр излучения третьей гармоники, полученный для инертных газов Ne, Ne и Ar при различных давлениях.

Как видно из этих рисунков, при  $p > 50$  Торр спектр излучения третьей гармоники становится двугорбым, причём более низкочастотная компонента имеет максимум на частоте  $\omega^*$ , точно соответствующей значению  $\omega^* = 3\omega_0$ . Положение этой составляющей спектра не зависит от давления для всех исследуемых газов. Сдвинутая в синюю сторону относительно  $3\omega_0$  компонента имеет максимум, зависящий от давления, причём ширина спектра этой составляющей также увеличивается с ростом  $p$ .

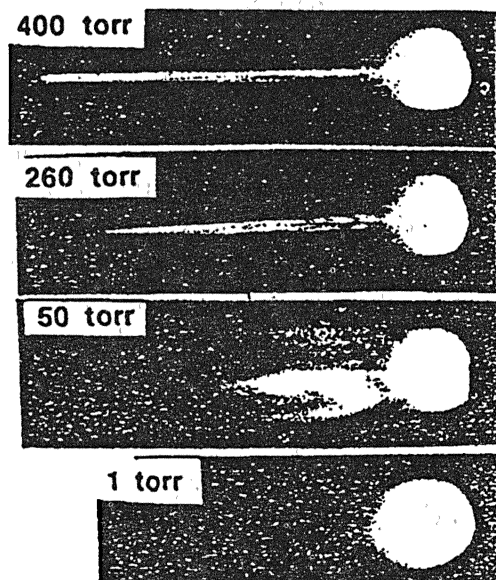


Рис. 3. Спектрально-пространственное распределение третьей гармоники для Ar.

На рис. 3 приведены фотографии поперечного сечения пучка 3-ей гармоники, прошедшего через кварцевую призму после выходного окна вакуумной камеры, сделанные на расстоянии в несколько метров от дисперсионного элемента. Это — пространственные спектрограммы распределения пучка третьей гармоники, генерируемой в аргоне при различных давлениях. Видно, что несмещённая компонента имеет близкий к гауссовому пространственный профиль, в то время как смещённая составляющая сфокусирована в пространстве и является существенно более широкополосной по частоте. Исследования показали, что положение максимума и ширина спектра этой компоненты очень резко зависят от интенсивности падающего излучения, увеличиваясь с её ростом.

По всей вероятности несмещённая часть спектра третьей гармоники генерируется за счёт взаимодействия сильного электромагнитного поля с нейтральными атомами в условиях несимметричной фокусировки.\*

\*Как известно, в условиях симметричной фокусировки в однородной среде эффективность преобразования падающего излучения в третью гармонику на кубичной не-

Источником широкополосной смещённой в синюю область спектра компоненты является область ионизации на переднем фронте импульса. Известно, что при распространении в ионизирующемся газе фемтосекундный лазерный импульс испытывает синий сдвиг несущей частоты [18, 19], что отражается и на смещении спектрального положения всех генерируемых высоких гармоник. Пространственное обужение этой компоненты при увеличении давления может быть обусловлена двумя факторами. Во-первых, с ростом давления область ионизации смещается от фокальной плоскости в сторону падающего излучения, что приводит к формированию изображения этой области колимирующим зеркалом. Оценки показывают [15], что для условий нашего эксперимента это изображение оказывается на расстоянии  $\sim 10$  м от фокальной плоскости фокусирующего зеркала. Другим возможным механизмом поперечного сжатия (каналирования) пучка может быть процесс конкуренции между само- и дефокусировкой излучения в газе и плазме, соответственно (см. раздел 4). Необходимо отметить, что существенное уширение спектра третьей гармоники может свидетельствовать о соответствующем укорочении, по сравнению с падающим, длительности генерируемого импульса.

Это наблюдение представляет значительный интерес, с точки зрения гипотезы о создании источников когерентного субфемтосекундного излучения на основе взаимодействия сверхсильных полей с быстро ионизируемыми атомами [20, 21].

**3. Возможность использования плазменных волн (волн плотности заряда) для ускорения заряженных частиц** давно привлекает внимание исследователей в связи с потенциально достижимыми темпами ускорения, на несколько порядков превосходящими предельные характеристики традиционных линейных ускорителей [22, 23]. Широко обсуждаются две основные схемы (резонансная и нерезонансная) лазерного возбуждения ленгмюровских волн, предлагаемых для использования в плазменных ускорителях. В резонансной схеме возбуждение осуществляется в так называемом ускорителе на биениях в поле двухчастотного лазерного импульса. В случае, если частоты лазерного излучения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  отличаются друг от друга на величину, равную плазменной частоте,  $\omega_1 - \omega_2 = \omega_0$ , происходит эффективная генерация ленгмюровской волны. Эксперименты с  $\text{CO}_2$  [24–26] и Nd [27, 28] лазерами продемонстрировали возможность получения величин электрических полей в плазме порядка  $E = 1$  ГВ/м или более. Однако в силу резонансного характера возбуждения этот метод налагает весьма жёсткие требования на однородность используемой плазмы. Поэтому нерезонансный метод генерации

---

линейности атомов или молекул пренебрежимо мала, если длина среды существенно превышает длину перетяжки [17].

“кильватерной” ленгмюровской волны короткими лазерными импульсами с длительностью порядка обратной плазменной частоты вызывает повышенный интерес. К настоящему времени был выполнен целый ряд теоретических расчётов [29, 30] и экспериментов по проблеме нерезонансного возбуждения плазменных волн.

Остановимся более подробно на изложении экспериментальных результатов, тем более что в последние два–три года здесь были достигнуты значительные успехи. В работе [31] наблюдалось терагерцовое электромагнитное излучение из плазмы в диапазоне частот плазменных колебаний, что явилось первым экспериментальным подтверждением возбуждения кильватерных волн мощным фемтосекундным лазерным импульсом. Электроны, ускоренные до энергий 44 МэВ, были обнаружены при облучении газовой струи водорода или гелия толщиной в 1 мм тераваттным лазерным излучением [32]. Оценки возбуждаемых плазменных полей дали величину ускоряющих полей  $E = 1$  ГВ/см. Сверхбыстрое ускорение при инжектировании электронного пучка с энергией  $W = 1$  МэВ наблюдалось в работе [33]. Максимальные ускоряющие поля составили по оценкам величину  $E = 0,3$  ГВ/см.

Следующим шагом в экспериментальном изучении кильватерных волн большой амплитуды, предназначенных для ускорения электронов, явилась работа [34], в которой впервые наряду с определением величин плазменных полей были представлены результаты исследования их пространственной структуры. Основные черты экспериментальной установки были следующими. Лазерная система на основе Ti:Sa кристаллов генерировала линейно-поляризованные мощные импульсы с энергией  $\sim 20$  мДж, длительностью  $\sim 100$  фс и частотой повторения 30 Гц и ортогонально поляризованные пробные импульсы, распространяющиеся коллинеарно с мощным импульсом с регулируемой относительной временной задержкой. Лазерные импульсы фокусировались внеосевым параболоидом с фокусным расстоянием 5 см в вакуумной камере, заполненной гелием при давлении  $p = 2 \div 12$  Торр, при этом пиковая интенсивность излучения достигала величины  $4,5 \cdot 10^{17}$  Вт/см<sup>2</sup>. Мощный импульс ионизовал газ и за счёт пондермоторного давления возбуждал плазменную волну, которая распространялась с фазовой скоростью, равной групповой скорости мощного возбуждающего импульса. Распространяющиеся следом пробные импульсы испытывали сдвиг фазы, пропорциональный локальному значению электронной концентрации в плазменной волне. После прохождения через плазменную область лазерные импульсы реколлимировались и их спектры регистрировались одновременно со спектрами опорных импульсов, не прошедших через плазму, на спектрографе, оснащённом двойной диодной линейкой. Таким образом, измерив методом спектральных интерферограмм [35] разность фаз двух пробных импульсов, помещённых в разных точках плазменной волны, можно определить величину флук-

туаций электронной концентрации в волне в зависимости от положения пробных импульсов относительно мощного, т.е. "прописать" структуру плазменной волны.

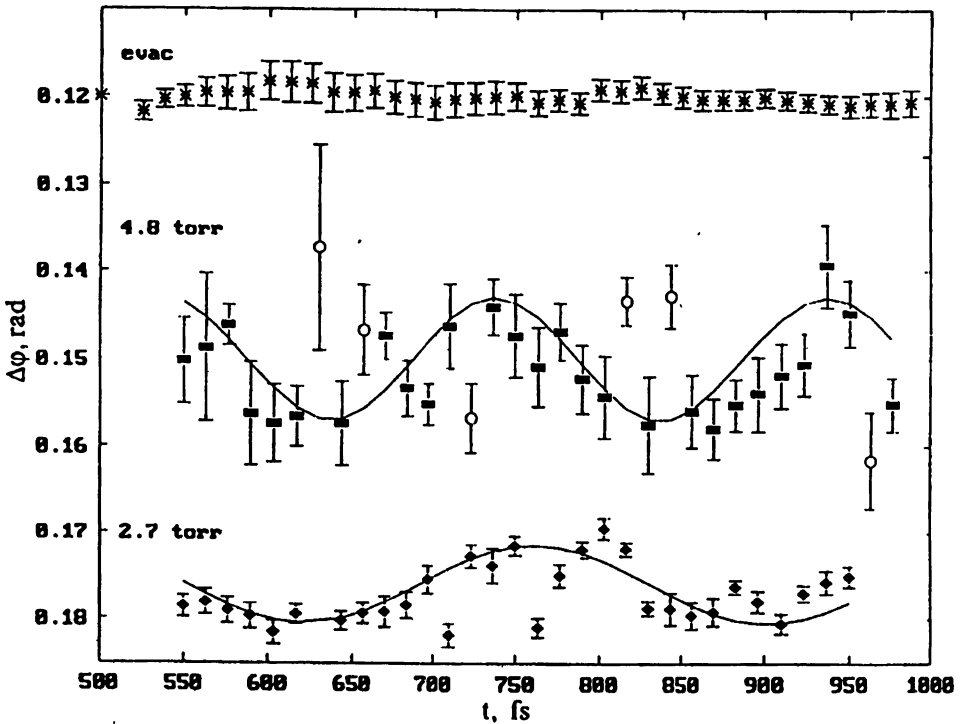


Рис. 4. Зависимость осцилляций плазменных волн от времени в гелии для давления  $p = 4,8$  Торр и  $2,7$  Торр. Сплошная линия — результат численного расчёта.

Эксперименты были выполнены при давлении гелия, соответствующем условию эффективного возбуждения плазменных волн,  $\omega_0 T \approx 1$ , где  $T$  — длительность лазерного импульса. В экспериментах варьировалась задержка между мощным возбуждающим импульсом и парой пробных импульсов, следующих за ним. На рис. 4 представлены осцилляции плазменной волны для давления гелия  $p=4,8(2,7)$  Торр (соответствующая концентрация электронов в полностью ионизованной плазме  $3(1,7) \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ). Для  $p = 4,8$  Торр задержка между пробными импульсами составляла 2,2 пс. Мощный импульс с энергией 10 мДж исходно располагался с опережением 550 фс перед вторым пробным импульсом, а затем задержка увеличивалась. Для  $p = 2,7$  Торр между пробными импульсами задержка была выбрана равной 1,5 плазменным периодам, и оба пробных импульса следовали за импульсом, генерирующим плазменную волну. Чтобы оценить уровень шумов, в верхней части рисунка приведены данные для откачанной вакуумной камеры ( $p = 10^{-3}$  Торр).

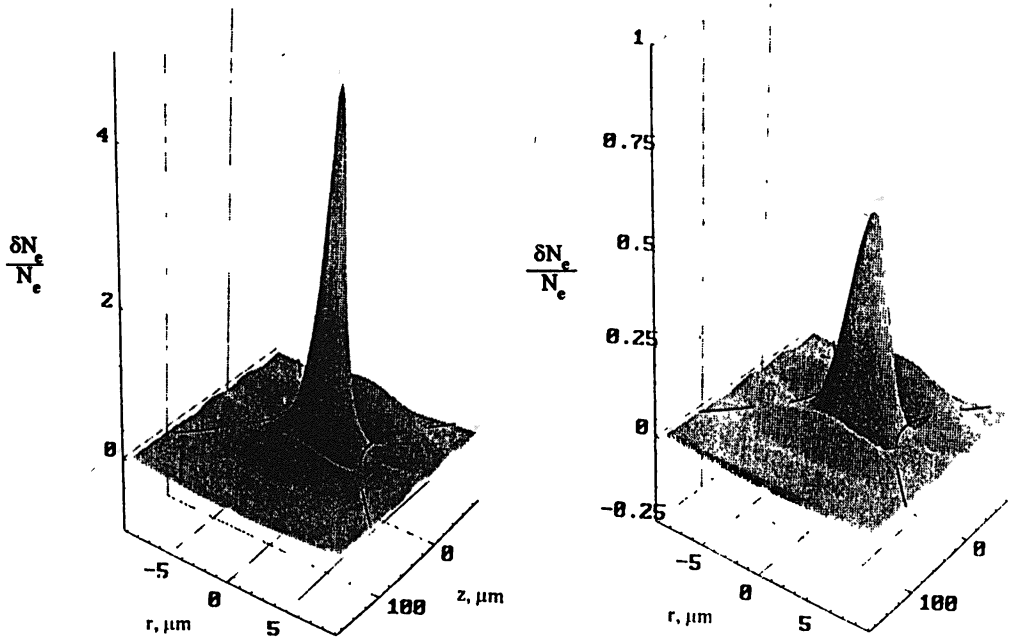


Рис. 5. Результаты двумерного численного моделирования плазменных волн. Энергия мощного импульса  $E = 10$  мДж (а),  $E = 2,5$  мДж (б), электронная концентрация  $N_e = 3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ .

Период осцилляций поля плазменной волны составил  $T_p = 220 \pm 25$  фс для  $p = 4,8$  Торр и  $T_p = 270 \pm 10$  фс для  $p = 2,7$  Торр, что хорошо соответствует оценке, согласно которой период колебаний определяется плазменной частотой,  $T_p = 2\pi/\omega_p = 200(267)$  фс, и задаётся только концентрацией плазмы. Из измеренной разности фаз, принимая во внимание геометрию эксперимента, можно оценить вариацию плотности плазмы  $\frac{\delta N_e}{N_e} \approx 1$  в области фюкуса, что согласуется с аналитической двумерной моделью, приведенной в работе [36]. Отметим, что радиальное поперечное давление в наших экспериментах примерно в десять раз больше аксиального. Максимальное значение продольного электрического поля, соответствующего наблюдаемым в эксперименте флюктуациям плотности, составило  $E = 10$  ГВ/м. Величина  $\frac{\delta N_e}{N_e} \sim 1$  свидетельствует о том, что в фюкусе плазменная волна существенно нелинейна. В целях прояснения нелинейной картины генерации плазменных волн было предпринято численное моделирование уравнений “холодной гидродинамики” с использованием двумерной многосеточной модели. На рис. 5 приведены результаты расчёта структуры плазменной волны для фюкальной геометрии и энергий в лазерном импульсе, использованных в эксперименте. Для энергии 10 мДж вычисления чётко показали возбуждение нелинейной плазменной волны с  $\frac{\delta N_e}{N_e} \approx 5$ . Плазменные колебания живут в течение нескольких (как минимум 5) периодов после прохождения возбуждающего лазерного импульса. Численные расчёты подтверждают величину максимальной разности фаз  $\approx 10$  мрад, которую мы получили в эксперименте.

Таким образом, за последние годы было экспериментально продемонстрировано не только эффективное возбуждение интенсивных плазменных полей с амплитудами до 1 ГВ/см под действием мощных фемтосекундных лазерных импульсов, но и была изучена их пространственно-временная структура, что чрезвычайно важно для развития лазерно-плазменных методов ускорения заряженных частиц.

**4. Одним из ярких и неожиданных эффектов, обнаруженных в последнее время в экспериментах со сверхсильными полями, является самоканалирование и сверхдальнее распространение мощного ультракороткого импульса при ионизации газа.** Впервые в работе [37] было показано, что фемтосекундные импульсы Ti:Sa лазера с длительностью 200 фс и энергией  $\geq 3$  мДж способны оставлять плазменный след в атмосферном воздухе протяжённостью более 30 м. При этом пороговая для наблюдения данного эффекта мощность хорошо согласуется с критической для самофюкусировки на керровской нелинейности в нейтральном газе, в частности, для воздуха на длине волны  $\approx 1$  мкм она составляет  $P_{кр} = 15$  ГВт. При мощности, заметно превышающей  $P_{кр}$ , след пред-



ставляет собой набор плазменных каналов, что качественно согласуется с классическими представлениями о самофокусировочной неустойчивости лазерного импульса. Детальные исследования показали [38], что плазменный канал представляет собой достаточно однородно ионизованное образование с поперечным размером 70–100 мкм и концентрацией электронов порядка  $10^{16}$  см<sup>-3</sup>, что говорит о весьма малой степени ионизации газа. В каждом канале транспортируется энергия в несколько миллиджоулей, что при данной длительности импульса соответствует интенсивности излучения на уровне  $10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>. При такой интенсивности формирование плазменного канала происходит за счёт механизма туннельной ионизации газа.

Одним из замечательных свойств обнаруженного эффекта является возможность его использования для генерации широкополосного континуума фемтосекундного излучения. Протяжённая трасса нелинейного взаимодействия в сочетании с высоким уровнем интенсивности поля позволяет надеяться на высокую энергетическую эффективность спектральной трансформации. В недавней работе [39] по взаимодействию излучения Ti:Sa лазера (длительность импульсов 125 фс, энергия до 250 мДж) с инертными газами (Xe, Kr и Ar) наблюдалось сверхуширение спектра с практически равной эффективностью на уровне  $10^8$ – $10^9$  Вт/нм вплоть до 200 нм. Эти результаты заметно отличаются от предыдущих исследований по аномальному уширению в газах, прежде всего, эффективностью спектральной трансформации в ультрафиолетовую часть спектра, что позволяет рассматривать полученное таким способом излучение как уникальный источник широкополосного света.

В сильных полях ультракоротких импульсов эволюция электронной плотности подчиняется простейшему уравнению

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = \gamma(|E|)N_a,$$

в котором скорость полевой ионизации  $\gamma$  является заданной функцией амплитуды электрического поля  $|E|$  [40], а  $N_a$  — концентрация нейтрального газа. Данное уравнение должно рассматриваться совместно с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. Скорость полевой ионизации обладает чрезвычайно резкой (экспоненциальной) зависимостью от действующего поля и способностью приводить к образованию плотной плазмы за время, много меньшее длительности импульса, что в совокупности позволяет рассматривать характер ионизационного процесса как пороговый. Поэтому для простоты описания примем следующую упрощённую модель для функции ионизации  $\gamma(|E|)$ :

$$\gamma(|E|) = \begin{cases} \infty, & |E| > E_{\text{пор}} \\ 0, & |E| \leq E_{\text{пор}} \end{cases},$$

в которой величина порогового поля  $E_{\text{пор}}$  зависит как от сорта газа, так и параметров лазерного излучения, несущей частоты и поляризации поля. Для количественной характеристики  $E_{\text{пор}}$  можно определить пороговое поле как значение  $|E|$  в точке наиболее быстрого нарастания скорости туннельной ионизации, в частности, для линейно-поляризованного излучения инфракрасного диапазона ( $\lambda \sim 1$  мкм) она лежит в интервале значений вблизи  $E_{\text{пор}} \sim 0,1 E_a$ , где  $E_a$  — характерное атомное поле на электронной орбите, подвергаемой ионизации. Неограниченная величина скорости ионизации в данной модели означает, что при превышении полем порогового уровня электронная плотность мгновенно (в масштабе длительности импульса) становится достаточно высокой. Ограничение её нарастания может быть связано с двумя факторами: либо во всей области пространства, где  $|E| > E_{\text{пор}}$  — среда полностью ионизована (т.е.  $N_a$  обращается в 0), либо во всей ионизованной области благодаря рефракции излучения произошло ограничение амплитуды поля на пороговом уровне. Важным параметром, определяющим тот или иной путь развития, является плотность газа. Если она мала, то мы имеем первый вариант решения. В противном случае, когда давление газа достаточно, чтобы обеспечить требуемую концентрацию свободных электронов, реализуется режим взаимодействия, который можно описать в рамках своеобразной электродинамической задачи:  $|E| = E_{\text{пор}}$  при  $N_e > 0$ , и  $|E| < E_{\text{пор}}$  при  $N_e = 0$ .\*

Возможность самоканалирования (или “гидрирования”) импульса в обоих этих случаях не представляется очевидной, поскольку возникающая в области сильного поля плазма уменьшает диэлектрическую проницаемость, что должно способствовать прямо противоположному эффекту, а именно, рефракции излучения на плазменном объекте. Однако удаётся найти необычные решения этой проблемы.

В первом случае гидрирование сверхкороткого импульса возможно в режиме квазилокализованной моды внутри плазменного цилиндра (слоя) с резкими в масштабе поперечного размера пучка границами. Поле в таком волноводе испытывает утечку и поэтому характеризуется декрементом затухания  $h$  вдоль трассы распространения. Так, для плотного плазменного слоя толщиной  $2d$  и достаточно высокой концентрацией электронов  $\frac{N_e}{N_{\text{кр}}} > (k_0 d)^{-2}$  (“квaziмода диэлектрической пластины”) имеем:

$$h \approx - \frac{\pi^2}{4k_0^2 d^3 \sqrt{N_e/N_{\text{кр}}}},$$

где  $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$  и  $N_{\text{кр}} = \frac{m\omega_0^2}{4\pi e^2}$  — критическая концентрация плазмы.

\* Впервые такая постановка электродинамической задачи рассматривалась в работе [41] применительно к проблеме неравновесного высокочастотного разряда.

Очевидно, что для импульса с достаточно сильным полем ( $|E| \gg E_{\text{пор}}$ ) на границе с газом можно ожидать, что поперечный размер однородно ионизированной (из-за насыщения ионизации!) области  $d$  будет превосходить пятно фокусировки  $a$ , в результате чего продольный размер  $z^* \sim 1/h$  канала может быть существенно больше рэлеевской длины дифракции в свободном пространстве:  $\frac{z^*}{z_d} \approx k_0 d \frac{d^2}{a^2} \sqrt{N_e/N_{\text{кр}}} \gg 1$ . Эта модель самоканалирования при полной ионизации газа была проверена нами в детальном численном расчёте. По-видимому, наиболее близкие условия для её реализации (энергия лазерного импульса  $\sim 10^2$  мДж и низкое давление газа) были осуществлены в экспериментальной работе [42], где действительно наблюдался захват излучения в плазменный канал с длиной, превосходящей рэлеевскую.

Во втором случае (плотный газ и неполная ионизация) самоканалирование может быть осуществлено при наличии, наряду с ионизационной, керровской нелинейности на нейтральных атомах газа [43]. Эта ситуация ближе к описанному выше эксперименту в воздухе. При этом, с точки зрения возмущения показателя преломления  $\delta n$ , в центре плазменного канала доминирует ионизация ( $\delta n = -\frac{N_e}{2N_{\text{кр}}}$ ), а на периферии — керровская линза ( $\delta n = \alpha|E|^2$ ,  $\alpha > 0$  — параметр керровской нелинейности), препятствующая рефракции излучения на плазме. В качестве простейшего примера, позволяющего получить строгие аналитические результаты, приведём решение для одномерного по поперечной координате ( $x$ ) распределения плазмы, поддерживаемой бегущей вдоль продольной оси электромагнитной волной:

$$N_e = \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha E_{\text{пор}}^2 N_{\text{кр}}, & |x| \leq d \\ 0, & |x| > d \end{cases};$$

$$|E| = \begin{cases} E_{\text{пор}}, & |x| \leq d \\ E_{\text{пор}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{1}{2} \alpha E_{\text{пор}}^2} (x - d) \right), & |x| > d \end{cases}.$$

Положение границы ионизированной области, точнее её размер  $d$ , определяется мощностью пучка и, как следует из приведённого выше решения, имеется пороговая мощность, необходимая для поддержания одномерного плазменного канала. Её физическая природа достаточно проста и обусловлена тем, что локализованное решение для поля вне плазмы должно обладать вполне определённой амплитудой, а именно, равной пороговому уровню для ионизации.

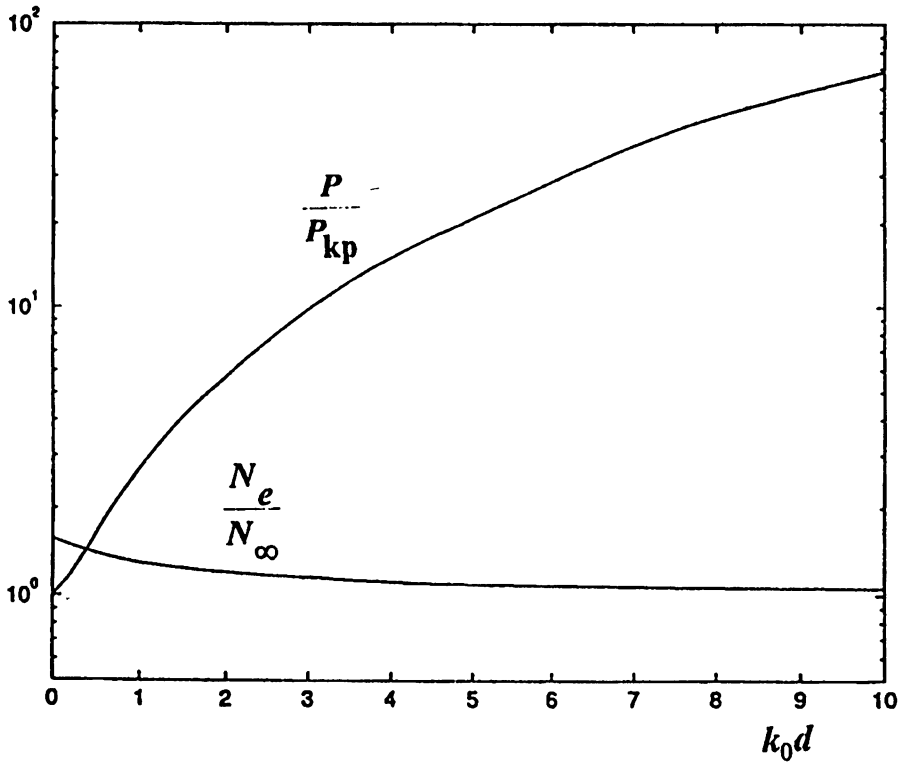


Рис. 6. Зависимости плотности  $N_e$  и радиуса  $d$  плазменного канала от мощности, необходимой для его создания. Нормировочная постоянная  $N_\infty = \frac{1}{2} N_{кр} \alpha E_{пор}^2$  соответствует значению плотности  $k_0 d \gg 1$ .

В наиболее важном аксиально-симметричном случае плазменный канал поддерживается локализованной структурой поля, которая может быть названа модифицированной таунсовской модой, совпадающая с ней при мощности пучка, равной критической для самофокусировки [44]. Таким образом, пороговая мощность, необходимая для создания плазменного канала, совпадает с  $P_{кр}$ . При  $P > P_{кр}$  формируется канал, ширина которого возрастает с увеличением мощности в пучке, а концентрация электронов по порядку величины составляет  $N_e = N_{кр} \alpha E_{пор}^2$ . На рис. 6 показаны зависимости параметров плазменного канала, концентрации электронов и его радиуса от мощности, полученные в результате численных расчётов аксиально-симметричных плазменно-полевых структур. В случае, когда  $P \gg P_{кр}$ , можно ожидать, что вначале из-за самофокусировочной неустойчивости будет происходить разбиение первоначально гладкого волнового пучка на "вторичные" пучки с мощностями порядка  $P_{кр}$ , каждый из которых затем подвергается самофокусировке с последующим образованием своего плазменного канала. Похожий сценарий и наблюдался в эксперименте [37].

Приведём некоторые численные оценки для рассмотренного эффекта самоканализирования. Для плотных газов в диапазоне давлений  $10^2 - 10^3$  Торр критическая мощность для самофокусировки на длине волны  $\lambda \sim 1$  мкм лежит в интервале 10–100 ГВт [45]. При длительности импульса 100 фс для этого необходима энергия  $W = 1 \div 10$  мДж, что является весьма доступной для существующих мощных лазерных систем. Длина плазменного канала определяется фактически энергетическими затратами на его создание и, следовательно, может быть оценена как  $z^* = W/U_i N_e d^2$ . Используя выражение для электронной плотности в канале и  $E_{пор} \sim 0,1 E_a$ , нетрудно получить для газа атмосферного давления и используемых в [37] параметров лазерного излучения (20 мДж в импульсе длительностью 200 фс)  $z^* = 20$  м, что весьма неплохо согласуется с экспериментальными наблюдениями.

**Подводя итоги этого краткого обзора, ещё раз отметим, что достижения в технике генерации сверхсильных полей и результаты изучения их взаимодействий с веществом открывают многообещающие перспективы для приложений. Возможные области использования результатов включают:**

- лазерное приборостроение с целью создания источников света с рекордно короткой длительностью (до 10 фс) и рекордно высокой интенсивностью (до  $10^{20}$  Вт/см<sup>2</sup>) излучения;
- разработку методов измерений быстро протекающих процессов в физических, химических и биологических системах с временным разрешением  $< 10$  фс;

- создание источников короткоимпульсного (менее 1 пс) когерентного и некогерентного ВУФ и рентгеновского излучения;
- разработку методов рентгеновской спектроскопии и томографии с использованием пикосекундного и субпикосекундного излучения;
- разработку новых методов ускорения заряженных частиц рекордно высокими полями ( $> 1$  ГВ/см);
- моделирование процессов в веществе, находящемся в экстремальных физических состояниях (недра звёзд и планет).

Новые эффекты, интереснейшие гипотезы и многообещающие приложения — всё это делает физику сверхсильных полей одним из наиболее притягательных и бурно развивающихся направлений современной науки.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований в рамках грантов 94-02-03849, 94-02-05908; 95-02-05936 и 96-02-18940. Авторы выражают благодарность М. Д. Чернобровцевой, М. Ю. Рябикину и К. И. Правденко за помощь в проведении численных расчётов и подготовке статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Strickland D. and Mourou G. // *Opt. Commun.*, 1985. V. 56. P. 219.
2. Moulton P. F. // *JOSA B*, 1986. V. 3. P. 125.
3. Asaki M. T. et al. // *Opt. Lett.*, 1993. V. 18. P. 977.
4. Stingl A. et al. // *Opt. Lett.*, 1994. V. 19. P. 204.
5. Barty C. P. J., Gordon III C. L., Lemoff B. E., et al. // *Proc. SPIE*, 1995. V. 2377. P. 311.
6. Du D. et al. // *Opt. Lett.*, 1995. V. 20. P. 2114.
7. Perry M. et al. // *Opt. Lett.*, 1994. V. 19. P. 2149.
8. Le Blanc C. et al. Report at "Photonics West -96", Jan. 1996. — San Jose.
9. Зельдович Я. Б. и Райзер Ю. П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. — М.: Наука, 1966.
10. Corkum P. B. // *Phys. Rev. Lett.*, 1993. V. 71. P. 1994.
11. Budil K. S. et al. // *Phys. Rev. A.*, 1993. V. 48. P. R3437.
12. Macklin J. et al. // *Phys. Rev. Lett.*, 1993. V. 70. P. 766.
13. Wahlstrom C.-G. et al. // *Phys. Rev. A.*, 1993. V. 48. P. 4709.
14. L'Huillier A. et al. // *Phys. Rev. A.*, 1992. V. 46. P. 2778.
15. Siders C. W. et al. // *JOSA B.*, 1996. V. 13. P. 330.
16. Siders C. W. et al. // *Rev. Sci. Instrum.*, 1994. V. 65. P. 3140.
17. Bjorklund G. C. // *IEEE J. Quant. Elect.*, 1975. V. 11. P. 287.
18. Wood W. M. et al. // *Opt. Lett.*, 1988. V. 13. P. 984.

19. Гильденбург В. Б. и др. // Письма в ЖЭТФ, 1990. Т. 51. С. 91.
20. Ванин Е. В. и др. // Письма в ЖЭТФ, 1993. Т. 58. С. 964.
21. Vanin E. V. et al. // In: High field interactions and short wavelength generation, OSA Technical Digest Series, 1994. V. 16. P. 130.
22. Файнберг Я. Б. // Физика плазмы, 1987. Т. 13. С. 607.
23. Tajima T. and Dawson J. M. // Phys. Rev. Lett., 1979. V. 43. P. 267.
24. Clayton C. E. et al. // Phys. Rev. Lett., 1985. V. 54. P. 2343.
25. Martin F. and Johnston T. W. // Phys. Rev. Lett., 1985. V. 55. P. 1651.
26. Katagava Y. et al. // Phys. Rev. Lett., 1992. V. 68. P. 48.
27. Dangor A. E. et al. // Phys. Scripta, 1990. V. T30. P. 107.
28. Amiranoff F. et al. // Phys. Rev. Lett., 1995. V. 74. P. 5220.
29. Chiou I. C. et al. // Phys. Plasma, 1995. V. 2(1). P. 30.
30. Андреев Н. Е. и др. // Физика плазмы, 1995. Т. 21. С. 1099.
31. Hamster H. et al. // Phys. Rev. E., 1994. V. 49. P. 671.
32. Modena A. et al. Communication at 22nd Plasma Physics Conf. — Oxford, 1995.
33. Nakajima K. et al. // Phys. Rev. Lett., 1995. V. 74. P. 4428.
34. Siders C. W. et al. // Phys. Rev. Lett., 1996. V. 76. P. 3570.
35. Geindre J. P. et al. // Opt. Lett., 1994. V. 19. P. 1997.
36. Bell A. R. et al. // Phys. Controlled Fusion, 1988. V. 30. P. 1319.
37. Braun A. et al. // Opt. Lett., 1995. V. 20. P. 73.
38. Nibbering E. T. J. et al. // Opt. Lett., 1996. V. 21. P. 62.
39. Nishioka H. et al. // Opt. Lett., 1995. V. 20. P. 2505.
40. Келдыш Л. В. // ЖЭТФ, 1964. Т. 47. С. 1945.
41. Гильдебург В. Б., Голубев С. В. // ЖЭТФ, 1974. Т. 67. С. 89.
42. Sullivan A. et al. // Opt. Lett., 1994. V. 19. P. 1544.
43. Anderson D. et al. // Phys. Rev. E., 1995. V. 52. P. 4564.
44. Chiao K. Y. et al. // Phys. Rev. Lett., 1964. V. 13. P. 479.
45. Lehmeier H. J. et al. // Opt. Commun., 1985. V. 56. P. 67.

Институт прикладной физики  
РАН, г.Н.Новгород

Поступила в редакцию  
30 мая 1996 г.

**INTERACTIONS OF SUPERSTRONG LASER FIELDS WITH MATTERS:  
HYPOTHESES, EFFECTS, AND APPLICATIONS**

*A. A. Babin, A. V. Kim, A. M. Kiselev, A. M. Sergeev, A. N. Stepanov*

A review of research results in physics of superstrong laser fields is given. It includes an analysis of the nonlinear atom response in superstrong optical fields and a discussion of the properties of the femtosecond laser-produced plasma. A description of new experiments on high-order harmonic generation, plasma wake-field excitation by high intense laser pulses, and ultrashort pulse self-channelling due to ionization is presented.



УДК 530.1

## КОРОТКИЕ СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ (КОМБИНИРОВАННОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ)

*Е. М. Громов, В. И. Таланов*

В рамках нелинейного уравнения третьего порядка построено единое описание солитонов огибающей малой протяжённости (порядка нескольких длин волны) и видео солитонов (без высокочастотного заполнения) в диспергирующих средах различной природы. Полученное решение включает в себя хорошо известные солитоны огибающей нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), модифицированного уравнения Хироты, комбинированного нелинейного уравнения в точке нулевой линейной дисперсии и видео солитоны модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ). Для неоднородных сред в рамках нелинейного уравнения третьего порядка линейным профилем потенциала найдены солитоны, обобщающие солитоны Чена. В качестве примеров рассмотрены солитоны огибающей электромагнитных и ленгмюровских волн в изотропной плазме и короткие оптические солитоны в кубично нелинейных изотропных оптических средах. В изотропной плазме скорость движения солитонов в рамках нелинейного уравнения третьего порядка, в отличие от солитонов НУШ, зависит от его амплитуды. Для нелинейных оптических сред протяжённость солитонов нелинейного уравнения третьего порядка мала по сравнению с протяжённостью солитонов НУШ той же амплитуды, что даёт возможность увеличения информационной ёмкости волоконно-оптических линий связи при переходе на более короткий базовый импульс.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение солитонов огибающей волновых пакетов  $\varphi = \psi(x, t) \exp(i\omega_0 t - ik_0 x)$  в нелинейных диспергирующих средах обычно анализируется во втором (квазиоптическом) приближении теории нелинейной дисперсии [1]. Это приближение соответствует разложению нелинейного дисперсионного соотношения  $\omega = \omega(k, |\psi|^2)$  в ряд в окрестности точки  $\omega_0 = \omega(k_0, 0)$  до членов второго порядка малости по параметру  $\Delta k = k - k_0$  и  $|\psi|$

$$\omega - \omega_0 = \omega'_k (k - k_0) + \frac{1}{2} \omega''_{kk} (k - k_0)^2 + \alpha |\psi|^2, \quad (1)$$

где  $\omega'_k = (\partial\omega/\partial k)|_{k=k_0, |\psi|=0} = V_g^L$  — линейная групповая скорость,  $\omega''_{kk} = \partial^2\omega/\partial k^2|_{k=k_0, |\psi|=0}$  — параметр линейной дисперсии и  $\alpha =$

$= \left( \partial\omega / \partial |\psi|^2 \right) \Big|_{k=k_0}$  — нелинейный параметр. Огибающая  $\psi(x, t)$  в этом приближении описывается хорошо известным НУШ [2]

$$2i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \omega''_{kk} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2\alpha |\psi|^2 \psi = 0, \quad (2)$$

где  $\xi = x - V_g^L t$ . Уравнение (2) может быть реконструировано из “параболического” разложения (1) с помощью операционных преобразований

$$\omega - \omega_0 \iff -i \frac{\partial}{\partial t}, \quad k - k_0 \iff i \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3)$$

без обращения к исходным уравнениям движения среды. Возможность подобной реконструкции делает второе приближение довольно притягательным при решении различных задач и к настоящему времени это приближение изучено довольно подробно [3]. В частности, при  $\alpha \omega''_{kk} < 0$  из НУШ следует хорошо известное солитонное решение [2]. Для безразмерных переменных НУШ

$$2i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (4)$$

солитонное решение имеет вид [2]

$$\psi(\xi, t) = \frac{A_0}{\text{ch}(\xi A_0 / \sqrt{2})} \exp\left(i \frac{A_0^2}{4} t\right). \quad (5)$$

Для НУШ с неоднородным линейным потенциалом

$$2i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2 \psi + px\psi = 0 \quad (6)$$

солитонное решение имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \\ &= \frac{\psi_0}{\text{ch}[(x - t - pt^2/4) \psi_0 / \sqrt{2}]} \exp \left[ i \left( \frac{\psi_0^2}{4} t + xp \frac{t}{2} + p \frac{t^2}{4} + p^2 \frac{t^3}{24} \right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Второе приближение теории нелинейной дисперсии корректно описывает солитоны огибающей при достаточно малой ширине временного и пространственного спектров солитонов ( $\Delta\omega$  и  $\Delta k$ ) и, соответственно, малой нелинейности  $|\psi|$

$$\nu \sim \left( \frac{\Delta\omega}{\omega} \right)^{1/2} \sim \frac{\Delta k}{k} \sim |\psi| \ll 1. \quad (8)$$

Однако, для солитонов малой протяжённости  $\Delta$  (порядка нескольких длин волн) второе приближение этой теории не корректно, и необходимо учитывать в уравнении для огибающей члены следующих приближений, обусловленные, в частности, нелокальностью и нестационарностью нелинейности среды. Вследствие этого уравнение для огибающей солитонов в высших приближениях теории дисперсии не может быть однозначно реконструировано из нелинейного дисперсионного соотношения. Однако, с учётом членов только третьего порядка малости по параметру  $\nu$  (8) уравнение для огибающей пакета в исходно однородных средах может быть представлено в достаточно общем виде

$$2i \frac{\partial \psi}{\partial t} + q \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \alpha |\psi|^2 \psi = -2i \left( \beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \mu \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \xi} \right) - i \gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3}. \quad (9)$$

Уравнение (9) в левой части содержит члены второго порядка, а в правой — третьего порядка малости по параметру  $\nu$ . Первый и второй члены с коэффициентами  $\beta$  и  $\mu$  в правой части отвечают зависимости локальной групповой скорости от интенсивности пакета  $|\psi|^2$  (нелинейная дисперсия). Слагаемое с третьей пространственной производной (с параметром  $\gamma$ ) отвечает отклонению дисперсионной зависимости  $\omega = \omega(k, |\psi|^2)$  в окрестности  $\omega_0 = \omega(k_0, 0)$  от параболической (линейная абберрация). При  $\beta = \gamma = \mu = 0$  уравнение (9) переходит в хорошо известное НУШ [2, 4, 5], описывающее солитоны огибающей; при  $\alpha = q = 0$  и действительной функции  $\psi$  уравнение (9) является модифицированным уравнением КдВ [6–8], описывающим видео солитоны (без высокочастотного заполнения). При  $\mu = 0$  и  $2q\beta = 3\gamma\alpha$  уравнение (9) изучено Хиротой [9]. В этих случаях (НУШ, модифицированное уравнение КдВ и уравнение Хироты) проанализированы методом обратной задачи рассеяния [10] найдены точные  $N$ -солитонные решения. В [18] найдены солитоны комбинированного нелинейного уравнения (9) в точке перегиба линейного дисперсионного соотношения (точка нулевой линейной дисперсии), отвечающего условию  $q = 0$ . Вследствие того, что уравнение (9) является основным уравнением третьего приближения теории нелинейной дисперсии и объединяет нелинейные уравнения, описывающие как солитоны огибающей, так и видео солитоны, назовём его комбинированным нелинейным уравнением или нелинейным уравнением третьего порядка.

В плавно неоднородных средах солитоны огибающей анализировались в рамках низших порядков теории дисперсии [3, 11–13], а в [17] в рамках нелинейного уравнения Клейна–Гордона. К настоящему времени некоторые результаты исследований коротких солитонов огибающей представлены в [14, 15] для однородной изотропной плазмы.

В данной работе рассмотрены солитоны комбинированного нелинейного уравнения (нелинейного уравнения третьего порядка) как для однородных, так и неоднородных сред применительно к изотропной плазме

со стрикционной нелинейностью и к нелинейным изотропным оптическим средам. Для однородных сред в рамках нелинейного уравнения третьего порядка получены решения, объединяющие как солитоны огибающей НУШ, модифицированного уравнения Хироты, комбинированного нелинейного уравнения в точке нулевой линейной дисперсии, так и видео солитоны модифицированного уравнения КдВ при произвольных значениях параметров этих уравнений. Для неоднородных сред с линейным профилем потенциала найдено точное решение в виде солитона огибающей, движущегося с переменной скоростью с сохранением своей формы.

## 2. ОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

Уравнение (9) имеет решение в виде стационарных нелинейных волн при произвольных значениях его параметров. Для демонстрации этого решения перейдем в (9) в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $V$ :  $\zeta = \xi - Vt$ ,  $t' = t$ , — и решение вновь полученного уравнения представим в виде (штрих в дальнейшем опустим)

$$\psi(\zeta, t) = A(\zeta) \exp(i\Omega t + i\varphi(\zeta)). \quad (10)$$

Для амплитуды  $A(\zeta)$  и фазы  $\varphi(\zeta)$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d^3 A}{d\zeta^3} + 2(\beta + 2\mu) A^2 \frac{dA}{d\zeta} + \left( 2q \frac{d\varphi}{d\zeta} - 2V - 3\gamma \left( \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2 \right) \frac{dA}{d\zeta} + \\ + \left( q - 3\gamma \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} A = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left( q - 3\gamma \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) \frac{d^2 A}{d\zeta^2} + \left( \alpha - 2\beta \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) A^3 - 3\gamma \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} \frac{dA}{d\zeta} + \\ + \left[ \gamma \left( \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^3 - q \left( \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2 + 2V \frac{d\varphi}{d\zeta} - 2\Omega - \gamma \frac{d^3 \varphi}{d\zeta^3} \right] A = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Будем интересоваться стационарными солитонами с линейной фазовой модуляцией  $d\varphi/d\zeta = k = \text{const}$ . В этом случае, интегрируя (11) по  $\zeta$  при нулевых условиях на бесконечности  $A(\zeta \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$  и  $A''(\zeta \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$ , получим:

$$\frac{d^2 A}{d\zeta^2} + \frac{2(\beta + 2\mu)}{3\gamma} A^3 + \frac{2(qk - V) - 3\gamma k^2}{\gamma} A = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 A}{d\zeta^2} + \frac{(\alpha - 2\beta k)}{(q - 3\gamma k)} A^3 + \frac{(2Vk - qk^2 + \gamma k^3 - 2\Omega)}{(q - 3\gamma k)} A = 0. \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) совместны при равенстве коэффициентов

$$\frac{2(\beta + 2\mu)}{3\gamma} = \frac{(\alpha - 2\beta k)}{(q - 3\gamma k)}, \quad (15)$$

$$\frac{2(qk - V) - 3\gamma k^2}{\gamma} = \frac{(2Vk - qk^2 + \gamma k^3 - 2\Omega)}{(q - 3\gamma k)} \quad (16)$$

и имеют решение в виде одиночного солитона с линейной фазовой модуляцией, параметр  $k$  которой из (15) составляет

$$k = \frac{2q(\beta + 2\mu) - 3\alpha\gamma}{12\mu\gamma}. \quad (17)$$

Соотношение (16) при заданной фазовой модуляции определяет скорость движения солитона относительно групповой скорости линейных волн

$$V = \frac{\Omega\gamma + k(q - 2\gamma k)^2}{2(q - 2\gamma k)}. \quad (18)$$

Уравнение для амплитуды  $A$  в этом случае может быть представлено в виде

$$\frac{d^2 A}{d\zeta^2} + \frac{2(\beta + 2\mu)}{3\gamma} A^3 - \left( \frac{2\Omega}{q - 2\gamma k} - k^2 \right) A = 0$$

и имеет солитонное решение

$$A^2(\zeta) = \frac{3\gamma [2\Omega / (q - 2\gamma k) - k^2]}{2(\beta + 2\mu) \operatorname{ch}^2 \left[ \zeta \sqrt{2\Omega / (q - 2\gamma k) - k^2} \right]}. \quad (19)$$

Это решение существует при выполнении соотношений

$$\frac{2\Omega}{(q - 2\gamma k)} - k^2 > 0, \quad \gamma(\beta + 2\mu) > 0.$$

Полученное решение сводится в частных случаях к солитонам огибающей НУШ [2] и уравнения Хироты [7] и видео солитонам модифицированного уравнения КдВ [8].

## 2.1. Модифицированное уравнение Хироты

Если параметры уравнения (9) удовлетворяют соотношению

$$2q(\beta + 2\mu) = 3\alpha\gamma, \quad (20)$$

фазовая модуляция исчезает ( $k = 0$ ), и солитонное решение (19) примет вид

$$\psi(\xi, t) = \frac{2\sqrt{\Omega/\alpha}}{\operatorname{ch} \left[ (\xi - Vt) \sqrt{2\Omega/q} \right]} \exp(i\Omega t), \quad V = \frac{\gamma\Omega}{2q}. \quad (21)$$

Огибающая  $A(\zeta)$  решения (21) совпадает с решением для солитона НУШ

$$A(\zeta) = \frac{2\sqrt{\Omega/\alpha}}{\operatorname{ch}[\zeta\sqrt{2\Omega/q}]}, \quad (22)$$

однако скорость этого солитона зависит от величины линейной абберации и его амплитуды  $V = \gamma\Omega/(2q) = \alpha\gamma\Psi_0^2/(4q)$ . Соотношение (20) сводится к условию Хироты существования солитонного решения при  $\mu = 0$ . Вследствие этого соотношение (20) можно определить как модифицированное условие Хироты, а нелинейное уравнение (9) с параметрами (20) — как модифицированное уравнение Хироты.

## 2.2. Модифицированное уравнение КдВ

При  $\alpha = q = 0$  и действительной функции  $\psi$  высшее нелинейное уравнение (9) сводится к модифицированному уравнению КдВ

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\beta + 2\mu)\psi^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\gamma}{2}\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} = 0. \quad (23)$$

В этом случае в соотношении (10) для удовлетворения требованию действительности функции  $\psi = \psi^* \equiv A$  необходимо положить  $k = \Omega = 0$ . Тогда все коэффициенты уравнения (16) обратятся в нуль и параметры солитона будут определяться лишь уравнением (13) при  $k = 0$

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \frac{2(\beta + 2\mu)}{3\gamma}\psi^3 - \frac{2V}{\gamma}\psi = 0. \quad (24)$$

Его решение также может быть получено из общего солитонного решения (19) при  $k = 0$  предельным переходом

$$\frac{2\Omega}{q} \rightarrow \frac{2V}{\gamma}$$

при  $\Omega \rightarrow 0$  и  $q \rightarrow 0$  и имеет вид видео солитона (без высокочастотного заполнения)

$$\psi(\xi, t) = \frac{\psi_0}{\operatorname{ch}\left[(\xi - Vt)\psi_0\sqrt{2(\beta + 2\mu)/\gamma}\right]}, \quad (25)$$

скорость движения которого определяется лишь нелинейной дисперсией  $V = (\beta + 2\mu)\psi_0^2$ .

### 2.3. Нелинейное уравнение Шредингера

При отсутствии членов нелинейной дисперсии и линейной абберации ( $\beta = \mu = \gamma = 0$ ) нелинейное уравнение (9) сводится к НУШ, а решение (19) сводится, соответственно, к солитону НУШ с линейной фазовой модуляцией

$$A^2(\zeta) = \frac{2(2\Omega - k^2)}{\alpha \operatorname{ch}^2 \left[ \zeta \sqrt{2\Omega/q - k^2} \right]}, \quad V = k. \quad (26)$$

### 2.4. Комбинированное нелинейное уравнение в точке нулевой линейной дисперсии

Комбинированное нелинейное уравнение в точке нулевой линейной дисперсии ( $q = 0$ ) при  $\alpha = 1$  имеет вид

$$2i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \mu \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \xi} \right) + i\gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (27)$$

В этом случае из (19) при  $q = 0$  получим

$$A^2(\zeta) = \frac{3\gamma [4\mu\Omega/\gamma - 1/16\mu^2]}{(\beta + 2\mu) \operatorname{ch}^2 \left[ \zeta \sqrt{4\mu\Omega/\gamma - 1/16\mu^2} \right]}. \quad (28)$$

Параметр фазовой модуляции  $k$  и скорость солитона  $V$  при этом составляют

$$k = -\frac{1}{4\mu}, \quad V = \Omega\mu - \frac{\gamma}{16\mu^2}. \quad (29)$$

Данное решение, впервые полученное в [18], не сводится ни к солитонам НУШ, ни к солитонам уравнения Хироты и существует при выполнении соотношений  $\gamma(\beta + 2\mu) > 0$  и  $\Omega > \gamma/64\mu^3$ .

### 2.5. Комбинированное нелинейное уравнение без кубичной нелинейности

Комбинированное нелинейное уравнение без кубичной нелинейности из (9) при  $\alpha = 0$  имеет вид

$$2i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \mu \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \xi} \right) + q \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + i\gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} = 0, \quad (30)$$

а его солитонное решение (19)

$$A^2(\zeta) = \frac{3\gamma [2\mu\Omega/(q(\mu - \beta)) - k^2]}{(\beta + 2\mu) \operatorname{ch}^2 \left[ \zeta \sqrt{6\mu\Omega/(q(\mu - \beta)) - k^2} \right]}. \quad (31)$$

Параметр фазовой модуляции  $k$  и скорость солитона  $V$  при этом составляют

$$k = -\frac{q(\beta + 2\mu)}{6\mu\gamma}, \quad (32)$$

$$V = \frac{q^2(\beta + 2\mu)(\mu - \beta)}{18\mu^2\gamma} + \frac{3\gamma\mu\Omega}{q(\mu - \beta)}. \quad (33)$$

Солитонное решение в этом случае существует при  $\beta \neq \mu \neq 0$ .

Рассмотренные выше солитонные решения обладают линейной пространственной фазовой модуляцией. Отдельного рассмотрения требует НУШ, модифицированное членами нелинейной дисперсии, решение которого не сводится к рассмотренным выше.

## 2.6. Комбинированное нелинейное уравнение без линейной абберации

$$2i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \mu \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + |\psi|^2 \psi = 0 \quad (34)$$

имеет решение в виде стационарных фазомодулированных солитонов, распределение фазы которых зависит от локальной амплитуды поля. Решение (34) представим в форме стационарной волны (10). В результате получим систему двух уравнений для амплитуды  $A$  и фазы пакета  $\varphi$

$$A \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} + 2 \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{dA}{d\zeta} + 2(A^2 \Theta - V) \frac{dA}{d\zeta} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{d^2 A}{d\zeta^2} - A \left( \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2 + A^3 - 2A\Omega + 2A \frac{d\varphi}{d\zeta} (V - \beta A^2) = 0, \quad (36)$$

где  $\zeta = \xi - Vt$ ,  $\Theta = \beta + 2\mu$ . Интегрируя (35), получим для фазы пакета  $\varphi$

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{1}{2} A^2 \Theta + V. \quad (37)$$

Подставляя (37) в (36), имеем уравнение для огибающей пакета  $A$

$$\frac{d^2 A}{d\zeta^2} = (2\Omega - V^2) A - A^3 (1 - 2\beta V) - \Theta \left( \beta - \frac{\Theta}{4} \right) A^5. \quad (38)$$

Рассмотрим отдельно случаи: 1.  $(2\Omega - V^2)(1 - 2\beta V) \neq 0$ , 2.  $(1 - 2\beta V) = 0$  и 3.  $(2\Omega - V^2) = 0$ .



1. В первом случае для  $(2\Omega - V^2)(1 - 2\beta V) \neq 0$ , заменой

$$\rho = \varsigma \sqrt{2\Omega - V^2}, \quad B = A \sqrt{\frac{1 - 2\beta V}{2\Omega - V^2}} \quad (39)$$

уравнение (38) приводится к виду

$$\frac{d^2 B}{d\rho^2} = B - B^3 - \tau B^5 \quad (40)$$

с одним параметром

$$\tau = \Theta \left( \beta - \frac{\Theta}{4} \right) \frac{(2\Omega - V^2)}{(1 - 2\beta V)^2},$$

учитывающим нелинейную дисперсию. Солитонное решение (40) имеет вид:

$$B^2(\rho) = \frac{4}{1 + (1 + 16\tau/3)^{1/2} \operatorname{ch}(2\rho)}. \quad (41)$$

Как следует из (41), солитонное решение существует при  $\tau > -3/16$ . Отметим, что и при наличии нелинейной дисперсии, стремящейся сместить максимум к переднему или заднему фронту импульса, солитон сохраняет симметричную форму: нелинейный сдвиг максимума компенсируется соответствующей фазовой модуляцией пакета (37). Зависимость огибающей солитона  $B$  и его фазы  $\varphi$  от координаты  $\rho$  при различных значениях  $\tau$  приведены на рисунке.

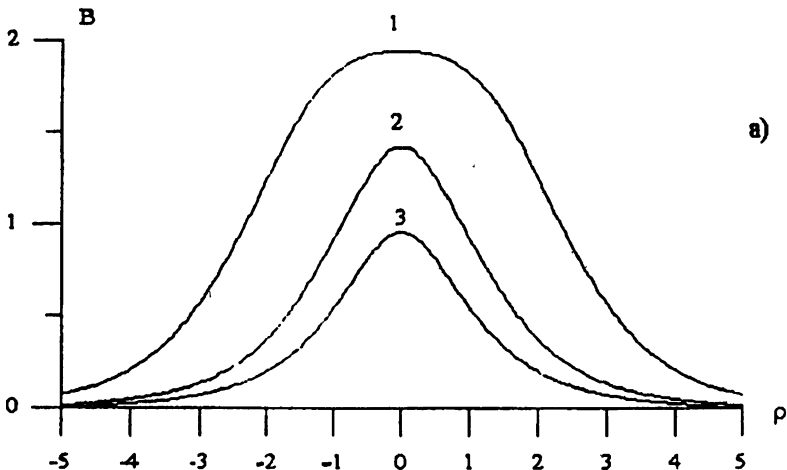


Рис. 1 а.

Рисунок а) соответствует огибающей  $B$ , рисунок б) — фазе  $\varphi$ . Кривые 1 соответствуют величине  $\tau = -2990/16000$ , 2 —  $\tau = 0$ , 3 —  $\tau = 2$ . Амплитуда солитона  $B_0 = \dot{B}(0)$  и его протяжённость  $\Delta$  растут с ростом параметра  $\tau$ . В предельном случае  $\tau = 0$ , отвечающем отсутствию нелинейной

дисперсии и  $V = 0$ , соотношения для амплитуды и фазы принимают значения, отвечающие солитонам НУШ.

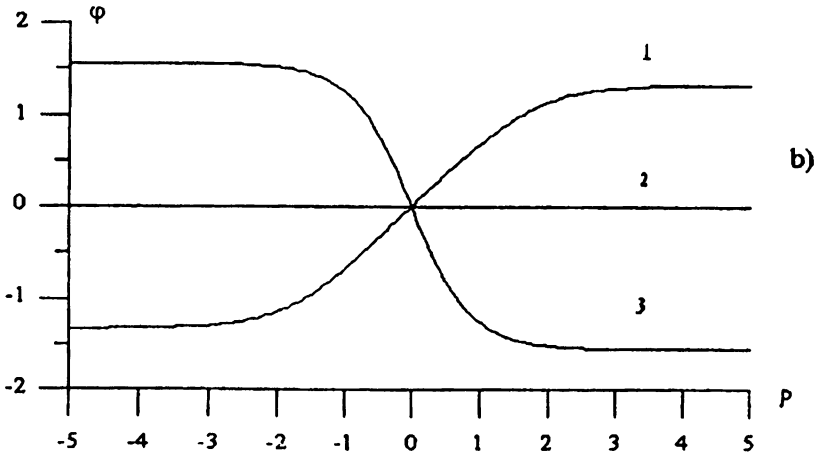


Рис. 1 б.

2. Во втором случае при  $1 - 2\beta V = 0$  заменой переменных

$$\rho_1 = \varsigma \sqrt{2\Omega - \frac{1}{4\beta^2}}, \quad B_1 = A \left( \frac{\Theta(\beta - \Theta/4)}{3(2\Omega - 1/4\beta^2)} \right)^{1/4}, \quad (42)$$

уравнения (37), (38) примут вид

$$\frac{d\varphi}{d\rho_1} = -q_1 B_1^2 + \frac{1}{2\beta} \sqrt{2\Omega - \frac{1}{4\beta^2}}, \quad (43)$$

$$\frac{d^2 B_1}{d\rho_1^2} = B_1 - 3B_1^5, \quad (44)$$

где

$$q_1 = \sqrt{\frac{3\Theta}{(\beta - \Theta/4)}}.$$

Уравнение (44) при нулевых граничных условиях на бесконечности для амплитуды поля и его производной  $B_1(\rho_1 \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$  и  $B_1'(\rho_1 \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$  имеет решение

$$B_1(\rho_1) = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}(2\rho_1)}}. \quad (45)$$

Распределение фазы в данном солитонном решении из (43) удовлетворяет соотношению

$$\varphi(\rho_1) = \frac{\rho_1}{2\beta} \sqrt{2\Omega - \frac{1}{4\beta^2}} - \frac{q_1}{2} \arctg(\text{sh}'(2\rho_1)). \quad (46)$$

3. В третьем случае при  $(2\Omega - V^2) = 0$  замена переменных

$$\eta_{\pm} = \varsigma \sqrt{2(2\beta V_{\pm} - 1)}, \quad D_{\pm} = A \sqrt{\frac{3(2\beta V_{\pm} - 1)}{\theta(\beta - \theta/4)}}, \quad (47)$$

где  $V_{\pm} = \pm\sqrt{2\Omega}$ , приводит (38) к виду

$$\frac{d^2 D_{\pm}}{d\eta_{\pm}^2} = 2D_{\pm}^3 - 3D_{\pm}^5. \quad (48)$$

При нулевых условиях на бесконечности для амплитуды поля и его производной,  $D_{\pm}(\eta_{\pm} \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$  и  $D'_{\pm}(\eta_{\pm} \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ , полученное уравнение имеет солитонное решение

$$D_{\pm}(\eta_{\pm}) = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}(2\eta_{\pm})}}. \quad (49)$$

### 3. НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

Учёт неоднородности среды в нелинейном уравнении третьего порядка приводит к ограничениям на параметры уравнения, при которых существует солитонное решение. В качестве примера рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка с линейным профилем неоднородного потенциала  $U = px$

$$\begin{aligned} 2i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + V_g^L \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + q \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha |\psi|^2 \psi = \\ = -2i \left( \beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial x} \right) - i\gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - px\psi. \end{aligned} \quad (50)$$

Перейдем в (50) в систему отсчёта, движущуюся со скоростью  $V(t)$

$$\xi = x - \int_0^t V(\bar{t}) d\bar{t}, \quad t' = t. \quad (51)$$

В (51) принято, что центр солитона в начальный момент времени  $t = 0$  находится в точке  $x|_{t=0} = 0$ . Представляя решение полученного уравнения в виде

$$\psi(\xi, t) = \Psi(\xi) \exp \left[ i \left( \frac{p}{2} \xi t + \Omega t + Q(t) \right) \right], \quad (52)$$

получим

$$2i \left( -v \frac{d\Psi}{d\xi} + \beta |\Psi|^2 \frac{d\Psi}{d\xi} + \mu \Psi \frac{d|\Psi|^2}{d\xi} + \frac{\gamma d^3\Psi}{2 d\xi^3} \right) - 2\Omega\Psi + \alpha |\Psi|^2 \Psi + q \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - \\ - \Psi \left[ 2 \dot{Q}(t) + [V_g - V(t) - \delta]pt + \frac{q}{4}(pt)^2 - p \int_0^t V(\bar{t}) d\bar{t} - \frac{\gamma}{8}(pt)^3 \right] = \quad (53)$$

$$-i \frac{d\Psi}{d\xi} \left( 2[V(t) - V_g - v] - qpt + \frac{3\gamma}{4}(pt)^2 \right) - pt \left( \frac{3\gamma}{2} \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \beta |\Psi|^2 + \delta \Psi \right) = 0.$$

Здесь  $\delta$  — неопределённый параметр. Будем интересоваться решениями, удовлетворяющими соотношениям

$$2(V(t) - V_g - v) - qpt + \frac{3\gamma}{4}(pt)^2 = 0, \quad (54)$$

$$2 \dot{Q}(t) + (V_g - V(t) - \delta)pt + \frac{q}{4}(pt)^2 - p \int_0^t V(\bar{t}) d\bar{t} - \frac{\gamma}{8}(pt)^3 = 0, \quad (55)$$

$$\frac{3\gamma}{2} \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \beta |\Psi|^2 \Psi + \delta \Psi = 0. \quad (56)$$

Соотношение (54) описывает траектории движения стационарных нелинейных волн в плавнонеоднородной среде и после двукратного дифференцирования по времени примет довольно простой вид

$$\ddot{V} = -\frac{3}{4}\gamma p^2 = \text{const}. \quad (57)$$

Функция  $Q(t)$  из (55) с учётом (54) следующая:

$$Q(t) = \frac{1}{4}(\delta + V_g + 2v)pt^2 + \frac{q}{12}p^2t^3 - \frac{3}{64}\gamma p^3t^4. \quad (58)$$

В этом случае уравнение (53) принимает вид

$$2i \left( -v \frac{d\Psi}{d\xi} + \beta |\Psi|^2 \frac{d\Psi}{d\xi} + \mu \Psi \frac{d|\Psi|^2}{d\xi} + \frac{\gamma d^3\Psi}{2 d\xi^3} \right) + \\ + \left( q \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - 2\Omega\Psi + \alpha |\Psi|^2 \Psi \right) = 0. \quad (59)$$

Совместное решение (59) и (56) представим в виде  $\Psi(\xi) = A(\xi) \exp(i\varphi(\xi))$ . Тогда из (59) имеем для амплитуды  $A(\xi)$  и фазы  $\varphi(\xi)$

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{d^3 A}{d\xi^3} + 2(\beta + 2\mu) A^2 \frac{dA}{d\xi} + \left( 2q \frac{d\varphi}{d\xi} - 2v - 3\gamma \left( \frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 \right) \frac{dA}{d\xi} + \\ & + \left( q - 3\gamma \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} A = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} & \left( q - 3\gamma \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \frac{d^2 A}{d\xi^2} + \left( \alpha - 2\beta \frac{d\varphi}{d\xi} \right) A^3 - 3\gamma \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} \frac{dA}{d\xi} + \\ & + \left[ \gamma \left( \frac{d\varphi}{d\xi} \right)^3 - q \left( \frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 + 2V \frac{d\varphi}{d\xi} - 2\Omega - \gamma \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3} \right] A = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

и из (56)

$$\frac{3\gamma}{2} \frac{d^2 A}{d\xi^2} + \beta A^3 + \left( \delta - \frac{3\gamma}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 \right) A = 0. \quad (62)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} A + 2 \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{dA}{d\xi} = 0. \quad (63)$$

Полученные соотношения могут быть совместны лишь в случае стационарных нелинейных волн без фазовой модуляции  $d\varphi/d\xi = 0$ , когда все члены уравнения (63) равны нулю. Тогда, интегрируя (60) по  $\xi$  от  $\xi$  до  $+\infty$  при нулевых условиях на бесконечности для амплитуды поля и его второй производной,  $A(\xi \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$  и  $A''(\xi \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$ , получим три уравнения

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} + \frac{2(\beta + 2\mu)}{3\gamma} A^3 - \frac{2v}{\gamma} A = 0, \quad (64)$$

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} + \frac{\alpha}{q} A^3 - \frac{2\Omega}{q} A = 0, \quad (65)$$

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} + \frac{2\beta}{3\gamma} A^3 + \frac{2\delta}{3\gamma} A = 0. \quad (66)$$

Условия совместности этих уравнений имеют вид

$$\frac{2\beta}{3\gamma} = \frac{\alpha}{q}, \quad \frac{2v}{\gamma} = \frac{2\Omega}{q} = -\frac{2\delta}{3\gamma}, \quad \mu = 0. \quad (67)$$

Скорость  $v$  и параметр  $\delta$  из (67) составят

$$v = \gamma \frac{\Omega}{q}, \quad \delta = -3\gamma \frac{\Omega}{q}. \quad (68)$$

В итоге солитонное решение уравнения (50) примет вид

$$\psi(\xi, t) = \frac{2\sqrt{\Omega/\alpha}}{\text{ch}(\xi\sqrt{2\Omega/q})} \exp \left[ i \left( \Omega t + \frac{p}{2}\xi t + Q(t) \right) \right], \quad (69)$$

где

$$\xi = x - \left( V_g + \gamma \frac{\Omega}{q} \right) t - \frac{qp}{4} t^2 + \frac{\gamma p^2}{8} t^3,$$

$$Q(t) = \left( V_g - \gamma \frac{\Omega}{q} \right) \frac{p}{4} t^2 + \frac{qp^2}{12} t^3 - \frac{3\gamma p^3}{64} t^4.$$

В частном случае при  $\gamma = 0$  полученное решение сводится к солитону Чена (7) [4].

В качестве примера коротких солитонов огибающей волн в диспергирующих средах рассмотрим солитоны линейно-поляризованных электромагнитных и ленгмюровских волн в изотропной плазме со стрикционной нелинейностью и оптические солитоны огибающей в кубично нелинейных изотропных оптических средах.

#### 4. ИЗОТРОПНАЯ ПЛАЗМА

##### 4.1. Основные уравнения

Исходной в этом случае является система уравнений [16]

$$V^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \omega_p^2 \left( 1 + \frac{\delta n}{N} \right) E = 0, \quad (70)$$

$$c_s^{-2} \frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta n}{\partial z^2} = \frac{c_s^2}{16\pi T_e} \frac{\partial^2 (\bar{E}^2)}{\partial z^2}, \quad (71)$$

где  $E$  — напряжённость электрического поля,  $\delta n$  — отклонение концентрации плазмы от равновесного значения  $N$ ,  $c_s$  — скорость ионно-звуковых волн,  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m_e$ , параметр  $V$  в (70) соответствует скорости света  $c$  для электромагнитных волн и тепловой скорости электронов  $V_{T_e}$  для ленгмюровских волн. Волнистая черта в правой части (71) отвечает усреднению ВЧ поля во времени. Перейдем к безразмерным переменным

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \eta = \frac{z}{l}, \quad \Psi = \frac{E}{\bar{E}}, \quad \text{где } \omega_p T = 1, \quad l = \frac{V}{\omega_p}, \quad \bar{E} = \sqrt{16\pi N T_e}, \quad (72)$$

в которых система уравнений (70), (71) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - (1 + n) \Psi = 0, \quad (73)$$

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 n}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 (\bar{\Psi}^2)}{\partial \eta^2}, \quad (74)$$

где  $\sigma = V/c_s \gg 1$ . Представим решение (73), (74) в виде квазимонохроматического волнового пакета

$$\Psi(\eta, \tau) = \psi(\eta, \tau) \exp(-i\omega_0 \tau + ik_0 \eta), \quad (75)$$

где  $\omega_0$  и  $k_0$  связаны линейным дисперсионным соотношением  $\omega_0^2 = 1 + k_0^2$ . В полученных соотношениях перейдем в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью линейных ВЧ волн  $v \equiv V_g^L = \partial \omega_0 / \partial k_0 = k_0 / \omega_0$ :  $\xi = \eta - v\tau$ ,  $\tau' = \tau$ . В этом случае для  $\psi(\xi, \tau)$  и  $n(\xi, \tau)$  получим уравнения

$$2i\omega_0 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - n\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau'^2} - 2v \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}, \quad (76)$$

$$(v^2 \sigma^2 - 1) \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 (|\psi|^2)}{\partial \xi^2} = -\sigma^2 \left( \frac{\partial^2 n}{\partial \tau'^2} - 2v \frac{\partial^2 n}{\partial \tau \partial \xi} \right). \quad (77)$$

Левые части (76), (77) отвечают второму приближению теории дисперсии, приводящему к НУШ для огибающей пакета ВЧ поля  $\psi$

$$2i\omega_0 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - n\psi = 0, \quad (78)$$

где

$$n = -\frac{|\psi|^2}{1 - v^2 \sigma^2} \quad (79)$$

изменение концентрации плазмы в поле стационарной волны. Для получения следующего приближения подставим производную  $\partial \psi / \partial \tau$  из (78) и  $n$  из (79) в правые части уравнений (76), (77) и выделим главные члены. Тогда будем иметь

$$2i\omega_0 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - n\psi = -i \frac{v}{\omega_0^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + \frac{v |\psi|^2}{2\omega_0^2 (1 - v^2 \sigma^2)} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{v}{2\omega_0} \left( \frac{\psi}{(1 - v^2 \sigma^2)} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \xi} + \frac{|\psi|^2}{(1 - v^2 \sigma^2)} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right), \quad (80)$$

$$n = -\frac{|\psi|^2}{1 - v^2 \sigma^2} - \frac{2\sigma^2 v}{2\omega_0^2 (1 - v^2 \sigma^2)^2} \frac{1}{2i} \left( \varphi^* \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \psi \frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} \right), \quad (81)$$

где вариация концентрации  $n$  теперь имеет поправку к стационарному значению. Члены в правой части (80) и поправка к стационарному значению вариации концентрации в (81) имеют третий порядок малости по

$\nu = |\psi / (\partial\psi/\partial\xi)|^{-1} \sim |\psi|$ . Объединяя (80) и (81), придём к уравнению третьего приближения для  $\psi$

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \frac{1}{\omega_0^3} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{|\psi|^2}{\omega_0(1-\nu^2\sigma^2)}\psi = \\ = -2i \left( \beta |\psi|^2 \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \mu \psi \frac{\partial|\psi|^2}{\partial\xi} \right) - i \frac{\nu}{\omega_0^4} \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3}, \end{aligned} \quad (82)$$

где в правой части выписаны члены третьего порядка малости по  $\nu$  с параметрами

$$\beta = \frac{\nu}{2\omega_0^2(1-\nu^2\sigma^2)} \left( 1 - \frac{2\sigma^2}{\omega_0^2(1-\nu^2\sigma^2)} \right), \quad (83)$$

$$\mu = \frac{\nu}{2\omega_0^2(1-\nu^2\sigma^2)} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\omega_0^2(1-\nu^2\sigma^2)} \right). \quad (84)$$

Из полученных соотношений видно, что поправки третьего приближения существенны вблизи группового синхронизма ВЧ и низкочастотных волн  $\sigma\nu \sim 1$ .

#### 4.2. Солитоны ВЧ волн

В качестве иллюстрации влияния эффектов третьего порядка рассмотрим солитоны ВЧ интенсивных плоских волн в дозвуковом режиме  $\sigma\nu < 1$ . Уравнение (82) имеет структуру высшего нелинейного уравнения с параметрами  $\beta$  и  $\mu$ , определяемыми соотношениями (83) и (84) и с

$$q = \frac{1}{\omega_0^3}, \quad \gamma = \frac{\nu}{\omega_0^4}, \quad \alpha = \frac{1}{\omega_0(1-\nu^2\sigma^2)}.$$

Отсюда следует, что данное уравнение имеет решение в виде стационарной фазомодулированной нелинейной волны, движущейся со скоростью  $V$ :  $\psi(\zeta, \tau) = A(\zeta) \exp(i\Omega\tau + ik\zeta)$ , где  $\zeta = \xi - V\tau$ . Соотношения (17) и (18), определяющие условие существования локализованных нелинейных волн (солитонов), для уравнения (82) имеют вид

$$k \equiv 0, \quad V = \frac{\gamma\Omega}{2q} = \frac{k_0}{2(1+k_0^2)}\Omega. \quad (85)$$

В этом случае соответствующее солитонное решение имеет вид

$$\psi(\xi, \tau) = \frac{2\sqrt{\Omega/\alpha}}{\text{ch}\left(\frac{(\xi - V\tau)\sqrt{2\Omega/q}}{2}\right)} \exp(i\Omega\tau). \quad (86)$$



В отличие от хорошо известных электромагнитных солитонов в параболическом приближении скорость движения солитонов нелинейного уравнения третьего порядка отличается от групповой скорости линейных ВЧ волн и зависит от нелинейного сдвига частоты  $V \sim \Omega$ , пропорционального их амплитуде.

## 5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СРЕДЫ

### 5.1. Основные уравнения

Рассмотрим плоские линейно поляризованные электромагнитные волны в нелинейной изотропной среде

$$-c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 PL}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 PNL}{\partial t^2} = 0, \quad (87)$$

где  $P^L$  и  $P^{NL}$  — линейная и нелинейная поляризуемости, соответственно. Для квазимонохроматических пакетов волн  $E(z, t) = E_0(z, t) \exp(i\omega t - ikz)$  величина линейной поляризации  $P^L$  в третьем приближении теории дисперсии имеет вид  $P^L = P_0^L \exp(i\omega t - ikz)$ , где

$$P_0^L = \left( \vartheta E_0 - i \frac{\partial \vartheta}{\partial \omega} \frac{\partial E_0}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \frac{i}{6} \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \omega^3} \frac{\partial^3 E_0}{\partial t^3} \right), \quad (88)$$

$\vartheta(\omega)$  — линейная восприимчивость среды на частоте  $\omega$ , удовлетворяющая линейному дисперсионному соотношению  $\omega^2(1 + 4\pi\vartheta(\omega)) = c^2 k^2$ . Для кубично нелинейных сред нелинейная поляризация в третьем приближении удовлетворяет соотношению

$$P^{NL} \equiv P^{(3)} = \frac{3}{8} \left( \chi^{(3)} |E_0|^2 E_0 - i \frac{\partial \chi^{(3)}}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} (|E_0|^2 E_0) \right) \exp(i\omega t - ikz), \quad (89)$$

где  $\chi^{(3)}$  — нелинейная кубичная восприимчивость среды. Подставляя линейную  $P^L$  и нелинейную поляризуемости  $P^{(3)}$  в (87) и удерживая члены третьего порядка по параметру

$$\nu \sim \left| \frac{1}{\omega E_0} \frac{\partial E_0}{\partial t} \right| \sim |E_0|,$$

затем переходя в систему отсчёта, движущуюся с групповой скоростью линейных волн  $V_g^L$ :  $\tau = t - z/V_g^L$ ,  $z' = z$ , получим уравнение, опуская в дальнейшем ',

$$2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} + k \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \tau^2} - \frac{3\pi \omega^2 \chi^{(3)}}{2 c^2} |E_0|^2 E_0 = -\frac{2}{V_g^L} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \tau \partial z} - i \frac{3\pi}{2} \frac{\partial(\omega^2 \chi^{(3)})}{c^2 \partial \omega} \frac{\partial}{\partial \tau} (|E_0|^2 E_0) + i \frac{2\pi}{3} \frac{\partial^3(\omega^2 \vartheta)}{\partial \omega^3} \frac{\partial^3 E_0}{\partial \tau^3}. \quad (90)$$

В левой части (90) выписаны члены второго порядка, а в правой части — третьего порядка малости по параметру  $\nu$ . Подставляя  $\partial E_0/\partial z$  из левой части уравнения в его правую часть, получим уравнение для огибающей пакета в третьем приближении теории нелинейной дисперсии для кубично нелинейных оптических сред

$$2i \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \tau^2} - \frac{3\pi \omega^2 \chi^{(3)}}{2 c^2 k} |E_0|^2 E_0 = i \frac{3\pi \omega}{2 c^2 k} \left[ 2\chi^{(3)} \left( \frac{V_f}{2V_g} - 1 \right) - \omega \frac{\partial(\chi^{(3)})}{\partial \omega} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} (|E_0|^2 E_0) + \frac{i}{3} \frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3} \frac{\partial^3 E_0}{\partial \tau^3}, \quad (91)$$

где в правой части уравнения собраны члены третьего порядка малости по  $\nu$ ,  $V_f = \omega/k$  — фазовая скорость. Для дальнейшего рассмотрения примем  $\chi^{(3)} > 0$  и  $k''_{\omega\omega} < 0$ . В этом случае заменой переменных

$$\eta = -zk_0, \quad \theta = \frac{\tau}{T}, \quad \psi = \frac{E_0}{E_c}, \quad (92)$$

где

$$T = \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}}, \quad E_c^2 = \frac{2}{3\pi} \frac{c^2 k^2}{\omega^2 \chi^{(3)}} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} > 0,$$

получим из (91) уравнение в безразмерных переменных

$$2i \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial}{\partial \theta} (|\psi|^2 \psi) \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + |\psi|^2 \psi + i\gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^3} = 0 \quad (93)$$

с параметрами

$$\beta = \frac{1}{2\omega} \left( \frac{V_f}{V_g^L} - \frac{(\omega^2 \chi^{(3)})'_\omega}{\omega \chi^{(3)}} \right) \sqrt{\frac{k}{-k''_{\omega\omega}}}, \quad \gamma = \frac{k'''_{\omega\omega\omega} \sqrt{k}}{3(-k''_{\omega\omega})^{3/2}}. \quad (94)$$

Остановимся на анализе солитонного решения уравнения (93).

## 5.2. Короткие оптические солитоны

Представим решение (93) в виде нелинейной фазомодулированной стационарной волны, движущейся со скоростью  $v$

$$\psi(\theta, \eta) = A \left( \theta - \frac{\eta}{v} \right) \exp \left( i\Omega_h \eta + iK \left( \theta - \frac{\eta}{v} \right) \right). \quad (95)$$

В системе отсчёта, связанной со стационарной волной  $\Theta = \theta - \eta/v$ ,  $\eta' = \eta$  имеем из (93) для  $A(\Theta)$ , аналогично (13) и (14) два уравнения

$$\frac{d^2 A}{d\Theta^2} + \frac{2\beta}{\gamma} A^3 + \frac{2K - 2v^{-1} - 3\gamma K^2}{\gamma} A = 0, \quad (96)$$

$$\frac{d^2 A}{d\Theta^2} + \frac{(1 - 2\beta K)}{(1 - 3\gamma K)} A^3 + \frac{(2v^{-1}K - K^2 + \gamma K^3 - 2\Omega_h)}{(1 - 3\gamma K)} A = 0. \quad (97)$$

Эти уравнения совпадают при условии

$$\frac{2\beta}{\gamma} = \frac{(1 - 2\beta K)}{(1 - 3\gamma K)}, \quad (98)$$

$$\frac{2K - 2v^{-1} - 3\gamma K^2}{\gamma} = \frac{(2v^{-1}K - K^2 + \gamma K^3 - 2\Omega_h)}{(1 - 3\gamma K)}. \quad (99)$$

Параметр фазовой модуляции  $K$  и скорость волны  $v$  из (98) и (99) следующие

$$K = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\beta}, \quad \frac{1}{v} = 2\beta\Omega_h + \frac{(\varepsilon - 1)}{4\beta\varepsilon}, \quad (100)$$

где  $\varepsilon = 2\beta/\gamma$ . С учетом (100) имеем для амплитуды  $A$  следующее уравнение

$$\frac{d^2 A}{d\Theta^2} = (2\Omega_h\varepsilon - K^2) A - \varepsilon A^3, \quad (101)$$

которое имеет при  $\varepsilon > 0$  и  $2\Omega_h\varepsilon - K^2 > 0$  локализованное в пространстве ( $A(\Theta \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ ) решение (солитон)

$$A_h^2(\Theta) = \frac{2(2\Omega_h\varepsilon - (\varepsilon - 1)^2/16\beta^2)}{\varepsilon \operatorname{ch}^2 \left[ \Theta \sqrt{2\Omega_h\varepsilon - (\varepsilon - 1)^2/16\beta^2} \right]}. \quad (102)$$

Энергия данного солитона пропорциональна величине

$$W_h = \int_{-\infty}^{+\infty} A_h^2 d\Theta = \frac{4}{\varepsilon} \sqrt{2\Omega_h\varepsilon - \frac{(\varepsilon - 1)^2}{16\beta^2}}.$$

Полученные соотношения совпадают с параметрами солитона НУШ в случае  $\varepsilon = 1$ . Солитонное решение (102) существует при условии  $\varepsilon > 0$ , соответствующем в начальных размерных переменных с учётом  $-k''_{\omega\omega} > 0$  соотношению

$$\frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3} \left( \frac{V_f}{V_g^L} - \frac{(\omega^2 \chi^{(3)})'_\omega}{\omega \chi^{(3)}} \right) > 0. \quad (103)$$

В ряде прикладных задач нелинейной оптики существует проблема уменьшения как длительности, так и энергии нелинейных оптических импульсов, способных распространяться без искажений. Для этого сравним

величины протяжённостей и энергий новых солитонов (102) и солитонов НУШ

$$A_{NSE}^2(\Theta) = \frac{4\Omega_{NSE}}{\text{ch}^2(\Theta\sqrt{2\Omega_{NSE}})} \quad (104)$$

с равными амплитудами  $A_h(0) = A_{NSE}(0)\Omega_h\epsilon - K^2 = 2\Omega_{NSE}$ . Отношение протяжённостей нового солитона и солитона НУШ составит

$$\frac{\Delta_{NSE}^2}{\Delta_h^2} = \epsilon. \quad (105)$$

При  $\epsilon > 1$  протяжённость новых фазомодулированных солитонов меньше протяжённости "классического" солитона НУШ той же амплитуды. Градиент фазы в коротких солитонах положителен  $K > 0$ . Энергия коротких солитонов  $W_h$  меньше энергии соответствующих солитонов НУШ  $W_h = W_{NSE}/\epsilon < W_{NSE}$ .

### 5.2.1. Нормальные диспергирующие среды

В качестве примера рассмотрим прозрачные среды с нормальным законом дисперсии

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 1. \quad (106)$$

В этом случае с учетом (94) получим

$$\epsilon = 1 - n^2(2 + \Sigma), \quad \Sigma = \omega \frac{(\chi^{(3)})'}{\chi^{(3)}}. \quad (107)$$

Здесь  $\Sigma$  — параметр нелинейной дисперсии. Условие существования солитонного решения,  $\epsilon > 0$ , для этих сред приводит к ограничению нелинейной дисперсии  $\Sigma < n^{-2} - 2$ , а для коротких оптических солитонов ( $\epsilon > 1$ ) ограничение на дисперсию нелинейности, естественно, более сильное  $\Sigma < -2$ . Таким образом, короткие оптические солитоны реализуются в средах с достаточно сильной отрицательной нелинейной дисперсией. Для дальнейших оценок параметра нелинейной дисперсии примем следующую модель нелинейной восприимчивости

$$\chi^{(3)} = \frac{\delta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^3}. \quad (108)$$

В этом случае параметр нелинейной дисперсии равен  $\Sigma = 6\omega^2/(\omega_0^2 - \omega^2)$ . В области, достаточно близкой к резонансу, при  $\omega \geq \omega_0$  модуль этого параметра может стать значительным, что приводит к значениям параметра  $\epsilon$  много больше единицы. В достаточно далёкой от резонанса области,  $\omega \gg \omega_0$ , параметр нелинейной дисперсии  $\Sigma$  близок к  $-6$  и  $\epsilon$  в этом

случае составляет  $\epsilon = 1 + 4n^2$ . Максимальная величина  $\epsilon$  достигается при  $n \simeq 1$  и равна 5.

Таким образом, короткие интенсивные оптические солитоны могут быть реализованы в кубично нелинейных нормально диспергирующих средах. В области, достаточно близкой к резонансной, протяжённость солитонов комбинированного нелинейного уравнения может быть много меньше протяжённости солитонов НУШ, а при удалении от этой области протяжённость солитонов высшего нелинейного уравнения меньше протяжённости солитонов НУШ в  $\sqrt{5}$  раз. Очевидно, что использование данных солитонов в качестве базовых импульсов в волоконно-оптических линиях связи взамен используемых в настоящее время солитонов НУШ приведёт к увеличению информационной ёмкости этих линий как минимум в 2,3 раза.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описание распространения коротких солитонов огибающей в диспергирующих средах может быть построено при учёте следующего за параболическим приближения в теории нелинейной дисперсии в рамках нелинейного уравнения третьего порядка, содержащего члены нелинейной дисперсии и линейной абберации. В рамках этого уравнения построено единое описание солитонов огибающей и видео солитонов без высокочастотного заполнения. Полученное общее солитонное решение включает, как частные случаи, солитоны огибающей НУШ, модифицированного уравнения Хироты и видео солитоны модифицированного уравнения КдВ.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (Грант № 96-02-19609). Проведение исследований, описанных в данной статье, стало возможным частично благодаря Гранту No. 2429 Civilian R&D Фонда США для независимых государств бывшего Советского Союза.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградова М. В., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
2. Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1964. Т. 7. С. 345.
3. Scott A. C., Chu F. Y. E., MacLaughlin D. N. // Proc. IEEE, 1973. V. 61.
4. Chen H. H. and Liu Cts S. // Phys. Fluids, 1978. V. 21. P. 377.
5. Захаров В. Е. // ЖЭТФ, 1966. Т. 51. С. 1107.
6. Wadati M. // J. Phis. Soc. Jap., 1972. V. 32. P. 1681.
7. Hirota R. // J. Phis. Soc. Jap., 1972. V. 33. P. 1456.
8. Miura R. M. // J. Math. Phys., 1968. V. 9. P. 1202.

9. Hirota R. // J. Math. Phys., 1973. V. 14. P. 805.
10. Захаров В. Е., Шабат А. В. // ЖЭТФ, 1972. Т. 62. С. 62.
11. Чукбар К. В., Яньков В. В. // Физика плазмы, 1977. Т. 3. С. 1398.
12. Громов Е. М., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. С. 380.
13. Громов Е. М., Пискунова Л. В., Таланов В. И. // ЖЭТФ, 1995. Т. 81. С. 19.
14. Gromov E.M. and Talanov V.I. In book: Nonlinear waves. Synchronization and Patterns. Part 1. /Edited by M.I.Rabinovich.— Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Press, 1995. P. 23.
15. Громов Е. М., Таланов В. И. // ЖЭТФ, 1996. Т. 109. С. 1.
16. Захаров В. Е. // ЖЭТФ, 1972. Т. 61. С. 1745.
17. Ванин Е. В., Смирнов А. И. // ЖЭТФ, 1996. Т. 109. № 9 (принята к печати).
18. Frantzeskakis D. J., Hizanidis K., Tombras G. S., and Belia I. // IEEE J. Quantum Elecrton., 1995. V. 31. P. 183.

Институт прикладной физики  
РАН, г.Н.Новгород

Поступила в редакцию  
30 мая 1996 г.

**SHORT SOLITON-ENVELOPE  
(COMBINED NONLINEAR EQUATION)**

*E. M. Gromov, V. I. Talanov*

General description of both short soliton-envelope (of the order of few wavelengths) and video-solitons of different nature in dispersive media in the frames of the general third-order nonlinear equation of the nonlinear dispersion theory is constructed. This solution include, as particular cases, the well-known soliton-envelope of the nonlinear Schrödinger equation (NSE), modified equation of Hirota, nonlinear equation at the zero-dispersion point (ZDP), and video soliton of modified equation of Kortevveg-de Vrise (KdV). Explicit soliton solution in inhomogeneous media in the frames of the third-order nonlinear equation with a linear profile of potential is obtained. This solution may be reduced, in the special case, to the well-known Chen-soliton solution. Then, the examples of short intense solitons of electromagnetic and Langmuir waves an in isotropic plasma, as well as optic solitons in nonlinear optic media are considered. In the isotropic plasma the soliton velocity in the third-order approximation of the nonlinear dispersion theory depends on the intensity. For cubic nonlinear isotropic optic media the short intense phase-modulated optic solitons are obtained. The length of these solitons is less than the length of NSE-solitons.

## ХАОС И НЕЙРОДИНАМИКА

*М. И. Рабинович*

Рассматривается работа малых нервных систем (центральных генераторов ритма), управляющих ритмическим поведением животных. Обсуждаются механизмы, обеспечивающие регулярность, надёжность и пластичность такого поведения (плавание, бег, ходьба и прочее). С помощью методов нелинейной динамики получены новые данные о природе регулярного кооперативного поведения нейронов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Ровно пятнадцать лет назад в кабинете А. В. Гапонова мы обсуждали с ним и А. А. Андроновым работу “О применении фрактальной размерности к анализу систем с хаотической динамикой”, написанную мною совместно с аспирантом А. Угодчиковым и новосибирским физиком Ф. Израилевым [1]. В процессе разговора Андронов предложил использовать фрактальную размерность для анализа электроэнцефалограмм. Если бы оказалось, что размерность конечна, а точнее, невелика, то можно было бы предположить, что кажущиеся шумовыми электроэнцефалограммы могут продуцироваться маломерной динамической системой. Эта идея представлялась очень привлекательной.\* Здесь я заметил, что подобная идея сейчас реализуется в связи с анализом электрокардиограмм, и мы тоже начали этим заниматься. Тогда только что появилась в *Science* статья Гласса и соавторов о хаотической динамике сердечных клеток [4], мы вспомнили и о работах Мэя по хаотической динамике популяций [5]. И тут Гапонов задал вопрос, на который никто из нас тогда ответить не смог: “А зачем вообще живому хаос?”

Прошли годы. Судьба и Перестройка свели меня в Калифорнийском университете Сан-Диего с замечательным нейрофизиологом, экспериментатором Аллом Сильверстоном. Мы с ним занимаемся не мозгом, а гораздо более простыми объектами — малыми нервными системами, которые ответственны за моторную ритмическую активность организмов (так называемые “центральные генераторы ритма”). И вот только сейчас

---

\*Подобные исследования были проведены и проводятся сейчас в различных научных центрах (см., например, [2, 3]).

я могу сформулировать свою точку зрения в ответ на вопрос, заданный тогда Андреем Викторовичем.

Напомню, что речь идёт о вопросе “Зачем...?”, а не о вопросе “Откуда...?”, то есть “Какова природа динамического хаоса в биологических системах?” Последний вопрос, как и ответ на него, сегодня кажется даже несколько банальным. Действительно, когда речь идёт о динамике сложных (с большим числом степеней свободы) нелинейных неравновесных систем, каковыми являются нервные системы и, даже, один нейрон, то выделить механизмы рождения хаоса является лишь делом техники.

Вопрос же “зачем?” очевидно ассоциируется с биологической целесообразностью, т.е. ради чего эволюция сохранила динамический хаос в качестве достаточно типичной формы поведения больших и малых нервных систем. Этот вопрос гораздо более трудный и неоднозначный. Возможно, бесспорный ответ на него и отсутствует.

## 2. ТОЧКА ЗРЕНИЯ

Как мне представляется, ответ на вопрос “Зачем...?” звучит так: сам по себе динамический хаос живым системам, возможно, и не нужен. Однако, богатство регулярных режимов, которые могут реализоваться в динамических системах, потенциально способных генерировать хаос, по видимому, является одним из основных признаков, которые реализует Природа на различных уровнях организации нервных ансамблей.

Другими словами, не хаос принципиален для нормальной работы различных нервных структур, а тот факт, что эти структуры работают на границе (а зачастую, и за границей) неустойчивости. Это даёт им исключительные возможности в адаптивности, быстрые переходы с одной моды поведения на другую и, конечно, само разнообразие этих мод.

Можно сказать, что динамический хаос — это неизбежная плата за подобную адаптивность нервных систем и многообразие их активности.

В процессе эволюции выработались разнообразные способы самоконтроля или самоуправления в нервных ансамблях, состоящих из хаотических элементов. Эти способы, с одной стороны, сохраняют все преимущества неустойчивых систем и систем со сложной динамикой (малые времена переходных процессов, множественность периодических и непериодических режимов) и, в то же время, обеспечивают предсказуемость поведения.

Ниже, на примере центральных генераторов ритма мы покажем, как реализуются сформулированные выше принципы в малых нервных системах.



## 3. ЭКСПЕРИМЕНТ

Обсудим, прежде всего, что изменилось за последние 15 лет, и на какие ключевые эксперименты мы можем опираться сегодня.

Самое основное, что появилось — это результаты по анализу поведения индивидуальных нейронов и нейронных ансамблей, подтверждающие тот факт, что динамика нейронов в коллективе более регулярна, чем их индивидуальная динамика. Это справедливо и для малых нервных систем, таких как центральные генераторы ритма [6, 7], и для нейронов коры головного мозга [8, 9], где роль отдельных элементов ансамбля играют структуры, состоящие из большого числа нейронов, связанных друг с другом по признаку “все со всеми”.

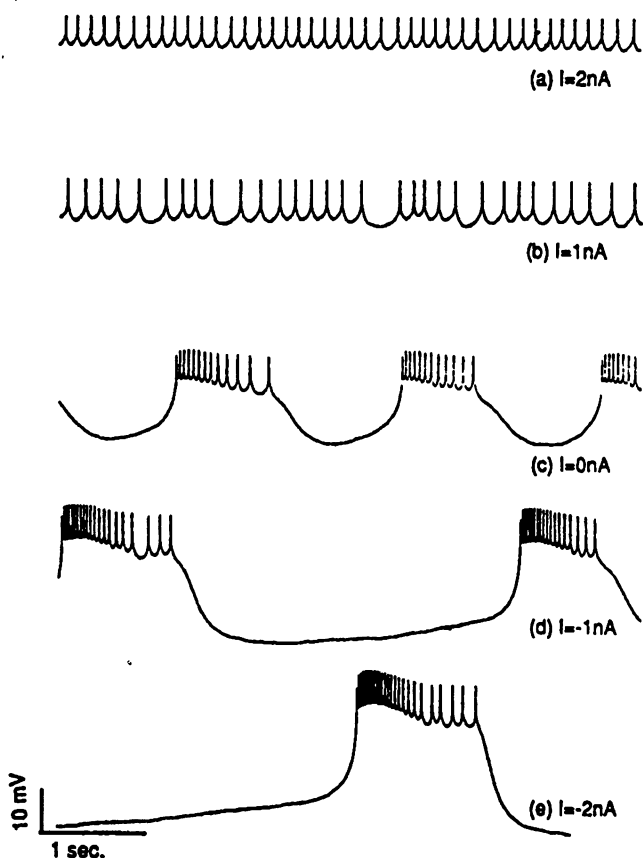


Рис. 1. Хаотические пульсации мембранного потенциала LP нейрона лобстера при различных значениях внешнего тока.

Другой важный результат, который следует из недавних экспериментов (лабораторных и модельных), заключается в следующем. Хаотические нейроны в ансамбле не только упорядочивают поведение друг друга,

но и легко меняют форму своего поведения (адаптивность) под действием управляющих параметров. Такими управляющими параметрами могут быть, например, величина связи между нейронами (определяемая концентрацией нейромедиаторов), температура и др. [10].

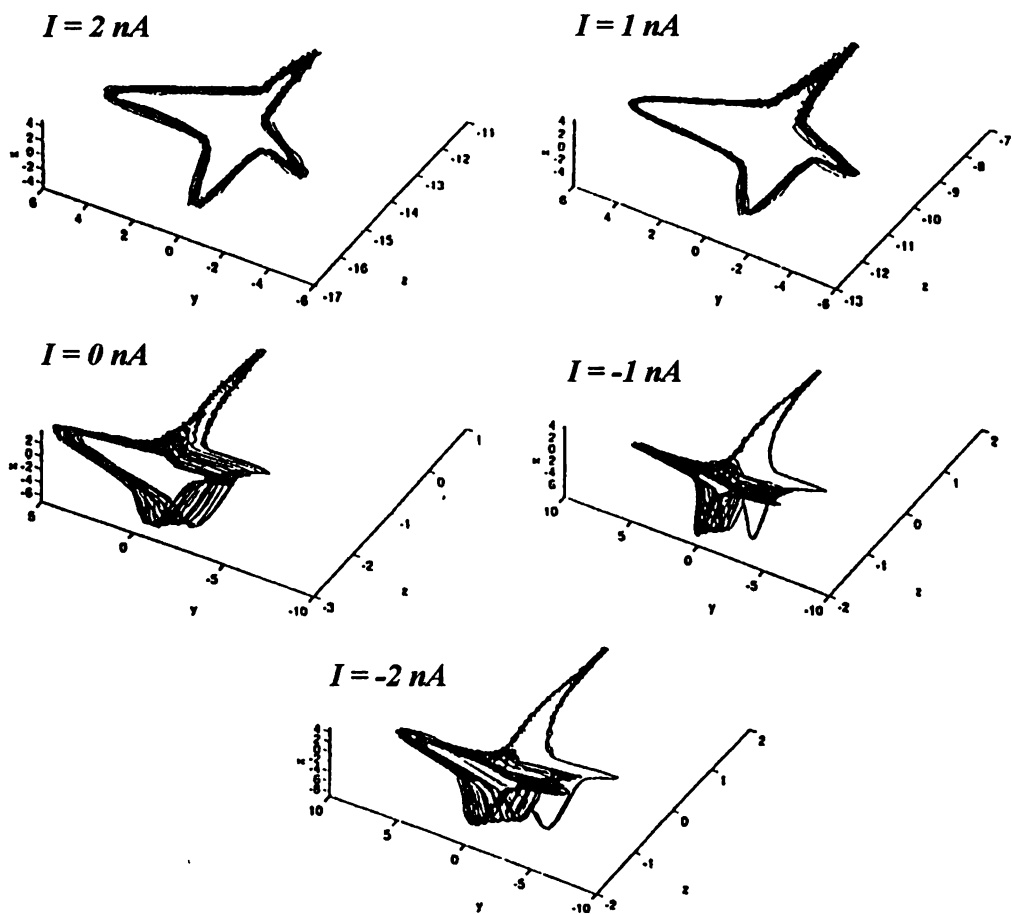


Рис. 2. Фазовые портреты странного аттрактора, восстановленного по длинной временной реализации ( $\sim 2$  млн.), аналогичной рис. 1.

Обсудим здесь некоторые из экспериментов. Прежде всего проиллюстрируем тот факт, что нерегулярные пульсации индивидуального нейрона, действительно, могут быть описаны маломерной динамической системой [11].

На рис. 1 приведены осциллограммы пульсаций LP-нейрона пилорического генератора ритма лобстера. Параметром  $I$  в данном случае является внешний ток, подаваемый через микроэлектрод в живую нервную клетку.

Достаточно длительные записи нейронной активности обрабатывались на предмет вычисления ляпуновских показателей, определения минимальной размерности динамической системы способной генерировать подобный сигнал (embedding dimension) и т.д. На рис. 2 представлены фазовые портреты предельного множества, восстановленные методом временного сдвига (см. [12]) по наблюдаемым данным. При  $I = 0$  нА,  $I = -1$  нА и  $I = -2$  нА восстановленное предельное множество — странный аттрактор. Размерность погружения, как показали вычисления, равна трём, а ляпуновская размерность  $D_\lambda = 2,75$ . Значения ляпуновских показателей ясны из рис. 3 — лишь один из них положителен  $\lambda_+ \approx 0,8$ .

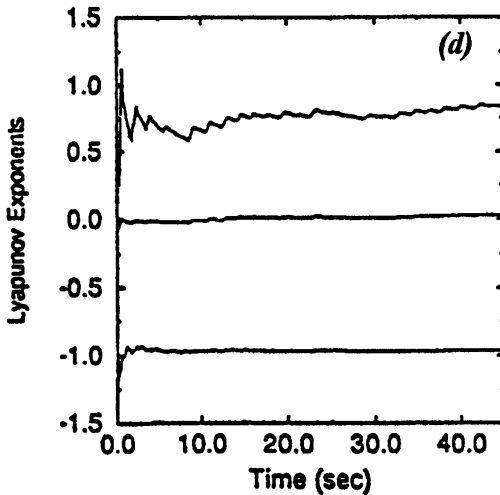


Рис. 3. Поведение ляпуновских экспонент, восстановленных по осциллограмме колебаний живого LP нейрона, фармакологически изолированного от других ( $I = 0$ ).

Как следует из приведенных данных, индивидуальная динамика LP-нейрона, действительно, является хаотической и маломерной. Подобная динамика может быть смоделирована всего лишь трёхмерной динамической системой. Адекватной в данном случае является модель, предложенная в 1984 году Хиндмаршем и Розе [13], а также различные её обобщения [14, 15]. В простейшем варианте эти уравнения имеют вид:

$$\dot{x} = y + ax^2 - bx^3 - z + I,$$

$$\dot{y} = c - dx^2 - y, \quad (1)$$

$$\dot{z} = r[s(x - x_0) - z], \quad r \ll 1,$$

Здесь  $x(t)$  — мембранный потенциал нервной клетки,  $y(t)$  — переменная,

характеризующая восстановление концентраций быстрых ионов (обычно это  $\text{Na}^+$  и  $\text{K}^+$ ), а  $z(t)$  — медленная переменная, определяемая концентрацией ионов  $\text{Ca}^{++}$ . При значениях параметров  $a = 3$ ,  $b = 5$ ,  $I = 3,281$ ,  $x_0 = -1,6$ ,  $s = 4,0$ ,  $r = 0,0021$  эта система генерирует такие же хаотические последовательности, как и живой нейрон (см. рис. 4), и типичный аттрактор в фазовом пространстве системы (1) (см. рис. 5) имеет такую же топологию, как и аттракторы на рис. 2, восстановленные по наблюдаемым данным, снятым с живого нейрона.

В пространстве параметров системы (1) область динамического хаоса не столь уж велика. Однако основная информация, которая нам существенна для дальнейшего, заключается в том, что характер регулярных движений, потенциально реализуемых этой моделью, чрезвычайно разнообразен.

Как поведут себя хаотические нейроны (живые или модельные), когда они объединяются в нейронную сеть? Всё зависит от вида связи. Оговоримся сразу, что связь между хаотическими генераторами, традиционно рассматриваемая при анализе электронных цепочек, химической турбулентности и т.д., обычно является диссипативной или диффузионной. Такая связь пропорциональна рассогласованию переменных в связанных генераторах —  $\epsilon(x_1(t) - x_2(t))$  ( $\epsilon$  — величина связи) и, естественно, стремится уменьшить сигнал ошибки до нуля. Если диссипативная связь достаточно велика (по сравнению с инкрементом разбегания хаотических траекторий), то хаотические генераторы полностью синхронизируются и функционируют как один хаотический генератор [16, 17]. Если же связь слабая, то режим хаотической синхронизации  $x_1(t) \equiv x_2(t)$  неустойчив, и динамика пары становится ещё более сложной — число положительных ляпуновских экспонент удваивается, размерность предельного хаотического множества возрастает и т.д.

Подобная электрическая (диссипативная) связь встречается и в нейронных сетях (см. обзор [18]). Однако гораздо более типичной является связь через химический синапс. Как видно из данных, представленных на рис. 6 [18] и рис. 7 [11], и в реальных нейронных парах, и в модельных динамика индивидуального нейрона значительно более нерегулярна, чем в синаптически связанной паре. Можно сказать, что синаптическая связь подавляет хаос. Этот феномен качественно отличает динамику нейронных ансамблей от динамики, скажем, традиционно рассматриваемых сетей электронных генераторов [19].

Синаптическая связь — это нелинейная связь, для которой характерно наличие порога и насыщения (простейшая модель химического синапса выражается ступенчатой функцией на плоскости переменных “вход–выход”). Такая связь (как возбуждающая — деполяризирующая мембрану нервной клетки, так и подавляющая — гиперполяризирующая мембрану) усредняет нерегулярную динамику спайков. Подобное усреднение

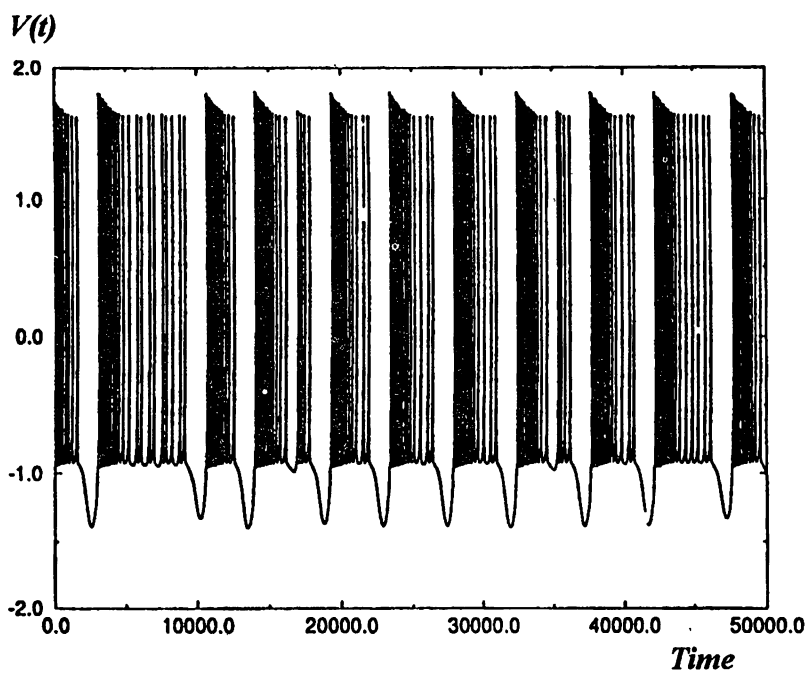


Рис. 4. Временная реализация, генерируемая динамической системой (1) (параметры указаны в тексте).

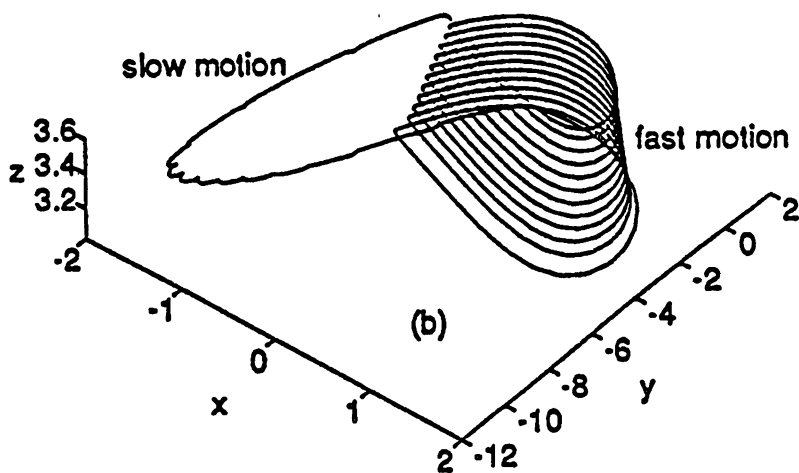


Рис. 5. Типичный аттрактор системы (1) (в данном случае это сложный предельный цикл).

при взаимных синаптических связях между нейронами и приводит к подавлению хаоса.

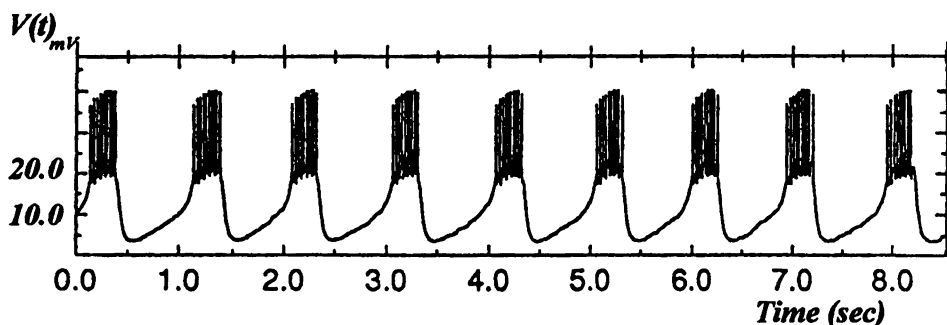


Рис. 6. Различные моды регулярной активности модельных нейронов в системе из двух хаотических нейронов, связанных взаимной подавляющей связью: 1) колебания с малым сдвигом фаз; 2) синфазные колебания (полная синхронизация); 3) противофазная синхронизация; 4) "почти" противофазная синхронизация.

Чтобы проиллюстрировать идею об адаптивности и многовариантности поведения нейронных ансамблей, состоящих из синаптически связанных хаотических элементов, мы приведём здесь результаты только одного эксперимента с модельными нейронами.\*

Рассмотрим работу центрального генератора сердечного ритма медицинской пиявки (*leech*). Блок-схема этого центрального генератора показана на рис. 8 [20]. Будем моделировать динамику индивидуального нейрона с помощью уже знакомой нам модели (1). Эта модель хорошо имитирует реальный нейрон, продуцирующий серии быстрых спайков на фоне медленных и довольно интенсивных пульсаций мембранного потенциала (ср. рис. 1). Основным результатом компьютерного эксперимента выражает рис. 9 [21]. Как видно, период центрального генератора сердечного ритма медицинской пиявки очень чувствительно зависит от величины синаптической связи. Увеличение связи (которое может быть вызвано изменением концентрации соответствующих нейромедиаторов) приводит к ступенчатому увеличению числа спайков в каждом периоде колебаний и соответствующему уменьшению ритма сердечных пульсаций.

Замечательно, что бифуркации внутри режима синхронизации хаотических нейронов, наблюдаемые при изменении величины синаптической связи, в обсуждаемой нейронной цепочке повторяют бифуркации, обна-

\*Сейчас в лаборатории А. Сильверстона проводятся аналогичные эксперименты с живыми нейронами. Предварительные результаты выглядят весьма обнадеживающими.

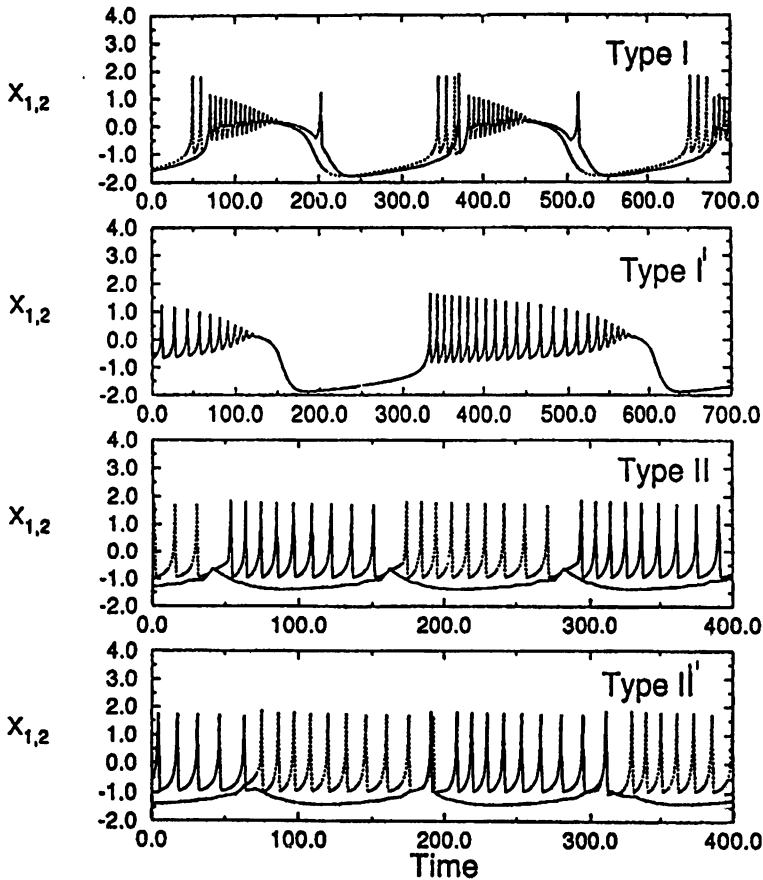


Рис. 7. Различные моды регулярной активности модельных нейронов в системе из двух хаотических нейронов, связанных взаимной подавляющей связью: 1) колебания с малым сдвигом фаз; 2) синфазные колебания (полная синхронизация); 3) противофазная синхронизация; 4) "почти" противофазная синхронизация.

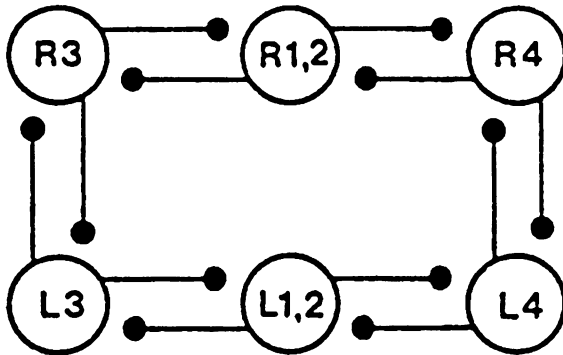


Рис. 8. Принципиальная схема центрального генератора сердечного ритма медицинской пиявки. Чёрные кружки означают подавляющую синаптическую связь.

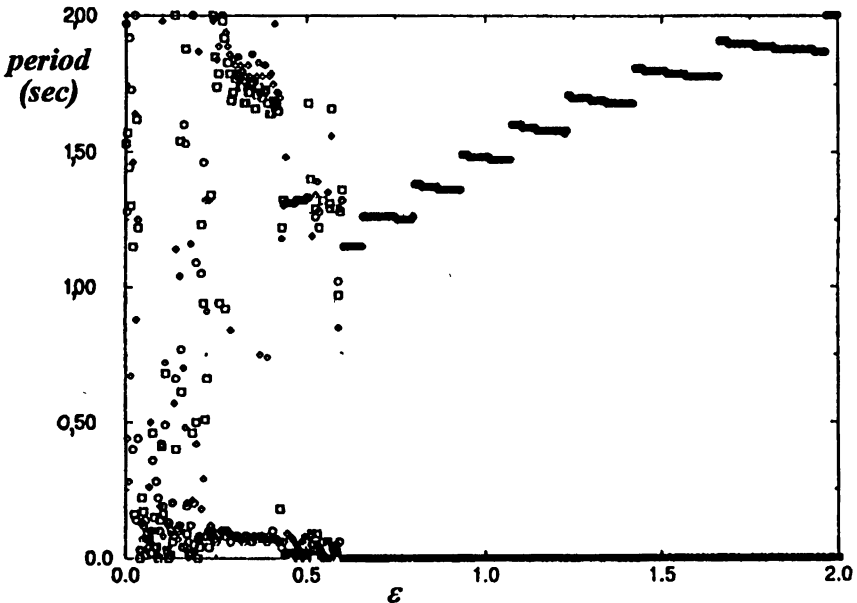


Рис. 9. Изменение периода сердечного ритма в модельном центральном генераторе, состоящем из хаотических нейронов (как на рис. 4) при объединении их в цепочки, как на рис. 8. При величине синаптической связи  $\epsilon < 0.5$  синхронизация отсутствует.



руженные в поведении одного нейрона при изменении его параметров [22]. Таким образом потенциальные возможности сложной индивидуальной динамики нейрона не только не пропадают даром, но целенаправленно используются для реализации принципа адаптивности и регулируемости в нейронном ансамбле.

Как недавно было показано [23], полученный результат сохраняется и при изменении вида модели, и, даже, увеличении её размерности. Важно лишь, чтобы модель правильно отражала качественные особенности деятельности нервной клетки, такие как генерацию пачек спайков и зависимость характерного периода пульсаций от внешнего тока (ср. с рис. 1).

#### 4. О РОЛИ ШУМОВ

Ясно, что получить достаточно длинные записи стационарной активности нейронов, например, мозга, и провести их детальную обработку подобно тому, как это было сделано для LP нейрона лобстера, исключительно трудно. Поэтому природа нерегулярного поведения многих видов нейронов ещё не выяснена. В подобной ситуации совсем не простым является вопрос о роли шумов в поведении малых и больших нейронных ансамблей.

Действие шума также может объяснить нерегулярность пульсаций нейронов-генераторов, особенно, если они работают в режиме, близком к порогу генерации [24]. В связи с этим возникает вопрос: играет ли шум конструктивную роль в функционировании нейронных ансамблей, или он просто является "спусковым крючком", реализующим разнообразные механизмы неустойчивости?

Конечно, в различных ситуациях действие шума может быть разным. Однако трудно себе представить, что объединение шумовых генераторов в ансамбли может привести к упорядочиванию их поведения, как это происходит с модельными хаотическими нейронами и наблюдается в экспериментах. В то же время, если считать, что нейроны — это генераторы со сложной динамикой, можно предсказать два важных эффекта, которые реализуются благодаря действию шума.

Дело в том, что системы, способные к генерации динамического хаоса, обладают очень сложной структурой фазового пространства. Наряду с различными аттракторами (периодическими или странными), важную роль в разнообразии их динамики играют и непритягивающие траектории. Например, седловые предельные циклы, расположенные вне областей притяжения аттракторов. Как показали наши эксперименты с системой Хиндмарша-Роэе [11] (в правую часть уравнений (1) добавлялся слабый гауссовский шум), действие шума приводит к увеличению размерности хаотического множества, росту энтропии Колмогорова-Синая и, как следствие, к более богатому спектру поведения одиночного нейрона. При объ-

единении же таких нейронов в ансамбль с синаптическими связями шум в значительной степени подавляется за счёт эффекта синхронизации. Разнообразие же поведения сохраняется.

Другая, более или менее очевидная, сторона действия шума заключается в том, что за счёт усреднённого действия шум убивает разного рода “патологические” аттракторы, которые характеризуются малыми областями притяжения в фазовом пространстве и, следовательно, “ненадёжны в эксплуатации” [11].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенно интересным и сложным является вопрос о динамическом поведении больших нейронных ансамблей. Динамика таких ансамблей, по-видимому, маломерна (если не считать случаев патологической синхронизации, как это наблюдается при эпилепсии). Такие ансамбли могут продуцировать как более или менее регулярные пространственно-временные паттерны, так и пространственно-временной хаос. Конечно, мозг не является маломерной динамической системой, и с сегодняшних позиций размерностный анализ электроэнцефалограмм не столь уж принципиален. Однако сам подход к нервным ансамблям с позиций нелинейной динамики уже принёс много ярких результатов и сегодня представляется очень перспективным.

Возвращаясь к исходному вопросу, ещё раз подчеркнём, что развитый хаос ни Природе, ни обществу не нужен. Многообразие же форм поведения сложных систем — это основа существования живого.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Izrailev F. M., Rabinovich M. I., and Ugodchikov A. // *Phys. Lett. A.*, 1981. V. 68. P. 321.
2. *Proceedings of the Second Annual Conference on Nonlinear Dynamical Analysis of the EEG.* Singapore, 1992. /Eds. Janssen B. H. and Brandt M. E. — Singapore: World Scientific, 1993.
3. Elbert T. et al. // *Physiol. Rev.*, 1994. V. 74. P. 1.
4. Glass L., Quevara M. R., and Shrier A. // *Science*, 1981. V. 214. P. 1350.
5. May R. M. *Stability and Complexity in Model Ecosystems.* — Princeton: Princeton University Press, 1973.
6. Meyrand P., Simmers J., and Moulines M. // *Nature*, 1991. V. 351. P. 60.
7. *Dynamic Biological Networks: The Stomatogastric Nervous System.* /Eds. Harris-Warrick R. M., Marder E., Selverston A. I., and M. Moulines. — Cambridge: MIT Press, 1992.

8. Hansel D. and Sompolinsky H. // *Journal of Comput. Neuroscience*, 1996. V. 3. P. 7.
9. Connors B. W., Gutnick M. J., and Prince D. A. // *J. Neurophysiol.*, 1982. V. 48. P. 1302.
10. Armstrong C. M. // *Physiol. Rev.*, 1992. V. 72. P. 55.
11. Abarbanel H. D. I. et al. // *Neural Computation*, 1996. V. 8. P. 234.
12. Афраймович В. С., Рейман А. М. — В кн.: *Нелинейные волны: динамика и эволюция* / Под ред. А. В. Галонова-Грехова, М. И. Рабиновича. — М.: Наука, 1987.
13. Hindmarsh J. L. and Rose R. M. // *Proc. R. Soc. Lond.*, 1984. V. B221. P. 87.
14. Wang X. J. and Rinzal J. — In: *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks* / Ed. M. A. Arbib. — Cambridge: MIT Press, 1995. P. 686.
15. Rabinovich M. I. et al. // *Proc. Nat. Sci.*, 1996 (submitted).
16. Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И. // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1986. Т. 29. С. 795.
17. Rul'kov N. F. // *Chaos*, 1996 (accepted).
18. Абарбанель Г. и др. // *УФН*, 1996. Т. 166. № 4.
19. Афраймович В. С., Некоркин В. И., Осипов Г. В., Шалфеев В. Д. *Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации.* — Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
20. Calabrese R. L., Nadim F., and Olsen O. H. // *Journal of Neurobiology*, 1995. V. 27. P. 390.
21. Rabinovich M. I. et al. // *Neural Comput.* (submitted).
22. Huerta R., Bazhenov M., Rabinovich M. I. // *Phys. Rev. E* (in preparation).
23. Мольков В. И., Рабинович М. И., Сущик М. М. — В сб.: *Вестник Нижегородского университета* (в печати).
24. *Proc. of the NATO Workshop on Stochastic Resonance and Biology* / Guest Eds. F. M. Moss, A. Bulsara, and M. Shlesinger // *J. Stat. Phys.*, 1993. № 1–2.

Институт прикладной физики  
РАН, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию  
30 мая 1996 г.

## CHAOS AND NEURODYNAMICS

*M. I. Rabinovich*

Small neural networks (central pattern generators) controlling rhythms of animals' behavior are considered. The mechanisms providing regularity, reliability and plasticity of this behavior (swimming, running, walking, etc.) are analyzed. New data on the origin of regular cooperative behavior of neurons are obtained using methods of nonlinear dynamics.

УДК 621.378

## КОРРЕЛИРОВАНЫ ЛИ ИСТОЧНИКИ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ В ОТДЕЛЬНЫХ МОДАХ ЛАЗЕРА?

*В. Г. Жислина, П. А. Хандохин, Я. И. Ханин*

Теоретически исследуются флуктуации интенсивности в многомодовом лазере с медленно релаксирующей инверсией в активной среде. В рамках двухуровневой модели лазера с однородным уширением и пространственно неравномерным насыщением среды численными методами найдены спектры флуктуаций интенсивности, отвечающие различным значениям коэффициента корреляции источников шума, возбуждающих разные моды. Сопоставление рассчитанных спектров с экспериментальными приводят к выводу о том, что источники шума в модах коррелированы.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Появление данной работы мотивировано двумя обстоятельствами. Во-первых, в литературе по предмету не удалось обнаружить сколько-нибудь надёжной информации о корреляции источников шума, присутствующих в отдельных модах многомодового лазера. Работы, затрагивающие этот вопрос, начали появляться лишь в самое последнее время [1]. Но говорить на основании работы [1] о наличии ненулевой корреляции этих источников, строго говоря, можно только по отношению к системе мод с аномальной неортогональностью, каковыми, например, являются поперечные моды неустойчивых резонаторов. Вместе с тем, хотелось бы знать, сохраняет ли силу это утверждение в случае устойчивых резонаторов и попытаться найти другие причины корреляции, более фундаментальные нежели неортогональность мод. Во-вторых, весьма заманчивой представляется возможность решения тонких проблем квантовой оптики, основываясь на низкочастотных свойствах лазерного излучения. Такая возможность существует благодаря тому, что лазеры с медленно релаксирующей инверсией (класса В) наряду с оптическими модами обладают набором собственных низкочастотных мод, которые обычно называются релаксационными колебаниями.

Одно из первых теоретических исследований влияния шума на низкочастотные процессы в одномодовом твердотельном лазере было предпринято в 1965 г. Беспаловым и Галоновым [2], которые осуществили

классический колебательный анализ простейшей балансной модели и установили, в частности, что спонтанный шум не может рассматриваться в качестве причины пиковой генерации. В 1966 г. Мак Камбер показал, что релаксационные колебания одномодового лазера проявляются в виде резонансного пика в спектре флуктуаций интенсивности лазерного излучения [3]. До настоящего времени именно это обстоятельство наиболее часто используется для экспериментального изучения релаксационных колебаний.

В многомодовых лазерах, где ситуация намного богаче, можно исследовать не только общую интенсивность, а также и интенсивности индивидуальных мод. Спектры флуктуаций интенсивности (иногда их называют спектрами мощности) отдельных мод многомодового лазера класса В были рассчитаны в работе [4]. Выяснилось, что соотношения между амплитудами резонансных пиков меняются от моды к моде, и, что особенно интересно, заметное влияние на ситуацию оказывает то, являются ли источники шума (ланжевенковские силы) коррелированными или нет. К сожалению, десять лет назад сравнение результатов численного и натурального экспериментов было невозможно в силу отсутствия надёжного экспериментального материала. Сейчас, благодаря усилиям Отсуки и соавторов [5, 6], такой материал имеется, что и побудило авторов вернуться к проблеме корреляции источников шума в лазерах. В отличие от довольно грубого приближения большого числа генерирующихся мод, в данной работе мы старались держаться максимально близко к условиям эксперимента, поставленного Отсукой. Это открыло возможность детального сопоставления теоретических и экспериментальных результатов.

## 2. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛАЗЕРА И ЕЁ ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

Известно несколько разновидностей динамических теорий лазера. Они различаются степенью общности и характером используемых приближений. Будем ниже придерживаться балансного подхода (одного из самых простых в лазерной динамике), который адекватен лазерам класса В, включающим твердотельные, полупроводниковые и  $\text{CO}_2$  лазеры.

Балансный подход базируется на ясных физических принципах. Во-первых, очень большая скорость релаксации допускает адиабатическое исключение поляризации активной среды. Во-вторых, поле излучения может быть представлено как совокупность оптических мод резонатора. Это приводит к двухуровневой модели многомодового лазера, которая была сформулирована Тангом, Статцем и Демарсом в 1963 г. [7]:

$$\frac{dm_k}{d\tau} = Gm_k \left[ \mathcal{L} \int_0^1 n(x, y, z, \tau) \psi_k^2(x, y, z) dx dy dz - 1 - C_k \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = A - n \left( 1 + \sum \mathcal{L}_j \psi_j^2 m_j \right).$$

Здесь  $m_k$  — нормированные интенсивности мод;  $n$  — нормированная инверсия;  $\tau = t\gamma_{\parallel}$  — время, измеряемое в единицах времени релаксации инверсии  $\gamma_{\parallel}^{-1}$ ;  $x, y, z$  — пространственные координаты, отнесённые к длине резонатора  $L$ ;  $\mathcal{L}(\omega)$  — форма линии усиления;  $\psi_k(x, y, z)$  — собственная функция резонатора;  $C_k$  представляет относительное отклонение потерь  $k$ -ой моды от потерь эталонной моды;\*  $A$  — параметр накачки.

Результатом неоднородного насыщения активной среды многомодовым полем излучения является сложная пространственная структура, которая представляет собой набор решёток инверсии, наведённых как аддитивным действием отдельных мод, так и совместным действием разных мод. В используемой нами простейшей версии уравнений баланса во внимание принимаются только решётки первого типа. Такое приближение имеет силу, когда частоты межмодовых биений больше скорости релаксации инверсии населённостей, благодаря чему амплитуды колебаний решёток второго типа очень малы.

Для того, чтобы более продуктивно использовать концепцию решёток, ограничим рассмотрение продольными модами

$$\psi_j(z) = \sqrt{2} \sin(\pi q_j z).$$

и разложим инверсию в ряд Фурье. В результате этих действий уравнения (1) преобразуются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dm_k}{d\tau} &= Gm_k(n_0 + n_k - 1 - C_k), \\ \frac{dn_0}{d\tau} &= A - n_0 \left( 1 + \sum_{j=1}^N m_j \right) - \sum_{j=1}^N n_j m_j, \\ \frac{dn_k}{d\tau} &= -n_k \left( 1 + \sum_{j=1}^N m_j \right) - \frac{1}{2} n_0 m_k, \end{aligned} \quad (2)$$

\*Поскольку  $\mathcal{L}_k = 1/(1 + \Delta_k^2)$ , где  $\Delta_k$  — относительная отстройка  $k$ -ой моды от центра линии, появляется возможность включить  $\Delta_k^2$  в  $C_k$  и пренебречь незначительным отличием от единицы коэффициента при производных  $dm_k/d\tau$  от единицы. Таким образом, параметр  $C_k$  характеризует дискриминацию мод как по потерям, так и по усилению, благодаря чему член  $\mathcal{L}_k$  можно опустить.

где новые переменные

$$n_0 = \int_0^1 n dz, \quad n_j = - \int_0^1 n \cos(2\pi q_j z) dz \quad (3)$$

являются амплитудами решёток. Фазы в этих уравнениях отсутствуют.

Далее можно найти стационарные состояния системы (2), что было сделано в работе [10], и проанализировать их на устойчивость. Основные результаты этого анализа сводятся к следующему:

- существует только одно устойчивое стационарное решение уравнений (2) и (1), причем, устойчивость глобальна [8, 9];
- число пар комплексно-сопряженных характеристических корней не может быть больше числа генерирующихся оптических мод [10, 11].

### 3. РАСЧЁТ СПЕКТРОВ МОЩНОСТИ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Наиболее впечатляющие результаты были получены Отсукой (рис. 1а) в экспериментах с чрезвычайно коротким твёрдотельным лазером с накачкой от аргонового ионного лазера [5, 6]. Изучая экспериментальный спектр можно прийти к выводу о том, что

- имеется только один пик в спектре полной интенсивности и он соответствует наивысшей релаксационной частоте;
- другие релаксационные колебания видны только в спектрах флуктуаций отдельных мод;
- общее число релаксационных колебаний равно числу генерирующихся мод;
- соотношение между амплитудами резонансных пиков в спектрах мощности различно для разных мод.

Достаточно очевидно, что шум можно рассматривать как слабое возмущение стационарного решения. Это предположение позволяет пользоваться теорией линейного приближения. Вначале линеаризуем уравнения (2) в окрестности стационарного решения  $(\bar{n}_k, \bar{n}_0, \bar{n}_k)$ , найденного в [10], а затем исключим все материальные переменные. Только на следующей ступени вводим в модель источники шума, применяя метод замещения случайных начальных условий эквивалентными движущими силами\*.

\*Разумеется при таком способе рассуждений из рассмотрения выпадают источники флуктуаций инверсии. Однако это не страшно, поскольку их интенсивность относится к интенсивности источников флуктуаций поля как  $1/G^2$ . В этом можно убедиться, обратившись к работе [13]. Для рассматриваемого нами класса лазеров  $1/G$  — малый параметр, чего не скажешь о газовых лазерах класса А.



Описание этого метода можно найти в книге Ахманова, Дьякова и Чиркина [12]. Последующие преобразования приводят к системе линейных уравнений с ланжевенновскими силами в правой части\*

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d^3}{d\tau^3} + (S + 1 + \bar{m}_k) \frac{d^2}{d\tau^2} + G\bar{m}_k \left( \frac{1}{2}\bar{n}_0 + \bar{n}_k + C_k \right) \frac{d}{d\tau} + \right. \\ & \left. + G\bar{m}_k \left( \frac{1}{2}\bar{n}_0 + \bar{n}_k + C_k \left( S - \frac{1}{2}\bar{m}_k \right) \right) \right] \rho_k(\tau) + \\ & + \bar{m}_k \sum_{q \neq k}^N \left[ \frac{d^2}{d\tau^2} + G(\bar{n}_k + C_q) \frac{d}{d\tau} + \right. \\ & \left. + G \left( \bar{n}_k + C_q \left( S - \frac{1}{2}\bar{m}_k \right) \right) \right] \rho_q(\tau) = \xi_k(\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi_k(\tau) = & \sum_{j=1}^N \left\{ \rho_k(\tau_j) \left[ \frac{d^2}{d\tau^2} + (S + 1) \frac{d}{d\tau} + \frac{1}{2} G\bar{m}_k \bar{n}_0 + S \right] + \right. \\ & \left. + \bar{m}_k \sum_{q=1}^N \rho_q(\tau_j) \left[ \frac{d}{d\tau} + G \left( C_k + S - \frac{1}{2}\bar{m}_k \right) \right] \right\} \delta(\tau - \tau_j) - \end{aligned} \quad (5)$$

случайная вынуждающая сила, и  $\rho_k = m_k - \bar{m}_k$ ;  $S = 1 + \sum \bar{m}_k$ . Величина

$$\rho_k(\tau_j) = \delta m + 2(m_k \delta m)^{1/2} \cos \theta_k^{(j)} \quad (6)$$

представляет собой прирост интенсивности моды в ответ на то, что в момент  $\tau_j$  имел место единичный акт спонтанного испускания в соответствующую моду [13]. Здесь  $\delta m$  — нормированная энергия фотона и  $\theta_k^{(j)}$  — случайный фазовый угол.

Выполняя преобразование Фурье, мы приходим в итоге к линейным уравнениям

$$\sum_{k=1}^N M_{qk} m_k = \xi_q(\Omega), \quad (7)$$

в которых  $M_{qk}$  — матрица линейной системы уравнений с коэффициентами

\*Численными методами проверено, что эти преобразования не приводят к появлению новых комплексных характеристических корней, а значит, и к дополнительным пикам в спектрах мощности.

$$M_{qk} = -m_k \left\{ -\Omega^2 + i\Omega G(\bar{n}_k + C_q) + G \left[ \bar{n}_k + C_q \left( S - \frac{1}{2} m_k \right) \right] \right\},$$

$$(q \neq k)$$
(8)

$$M_{kk} = -i\Omega^3 - \Omega^2(S + \bar{m}_k) + i\Omega G \bar{m}_k \left( \frac{1}{2} \bar{n}_0 + \bar{n}_k + C_k \right) +$$

$$+ G \bar{m}_k \left[ \frac{1}{2} \bar{n}_0 + \bar{n}_k + C_k \left( S - \frac{1}{2} m_k \right) \right].$$

Корреляторы случайных сил, стоящих в правых частях уравнений (7), имеют вид:

$$\langle \xi_k(\Omega) \xi_q(\Omega) \rangle = \bar{m}_k R_{kq} \left[ -\Omega^2 + i\Omega(S + 1) + \frac{1}{2} G \bar{m}_k n_0 + S \right] \times$$

$$\times \left[ -\Omega^2 + i\Omega(S + 1) + \frac{1}{2} G \bar{m}_q n_0 + S \right] + \left[ \sum_{p=1}^N R_{pk} \left( \Omega + GC_p + S - \frac{1}{2} \bar{m}_p \right) \right]^2 +$$

$$+ \sum_{p=1}^N R_{pk} \left( i\Omega + GC_p + S - \frac{1}{2} \bar{m}_p \right) \left[ -\Omega^2 + i\Omega(S + 1) + \frac{1}{2} G(\bar{m}_k + \bar{m}_q) \right]. \quad (9)$$

Входящая в (9) величина

$$R_{qk} = 2 \langle \cos(\theta_q) \cos(\theta_k) \rangle$$

имеет смысл коэффициента корреляции источников шума в модах.

Спектральные плотности флуктуаций интенсивности отдельных мод  $I_k = |m_k(\Omega)|^2$  и суммарной интенсивности  $I_\Sigma = |\sum m_k(\Omega)|^2$  рассчитывались как в условиях полной корреляции ( $R_{qk} = 1$ ), так и в отсутствие корреляции ( $R_{qk} = \delta_{qk}$ ). В последнем случае использовался следующий приём. Фурье-образ флуктуирующей части интенсивности  $k$ -ой моды представлялся в виде

$$\rho_k(\Omega) = \sum_{p=1}^N \rho_k^{(p)},$$

где  $\rho_k^{(p)}$  — вклад в спектр мощности  $k$ -ой моды от источника шума в  $p$ -ой моде. Величины  $\rho_i^{(p)}$  удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{i=1}^N M_{ki} \rho_i^{(p)} = \xi_k^{(p)}, \quad k = 1, \dots, N \quad (10)$$

с правыми частями

$$\xi_k^{(p)} = \begin{cases} \xi_k & \text{при } p = k, \\ 0 & \text{при } p \neq k. \end{cases}$$

Решение линейной системы уравнений (7) удовлетворяет принципу суперпозиции и, следовательно, может быть представлено в виде суммы решений системы (9), каждое из которых отвечает присутствию источника только в какой-то одной моде. Тогда, в случае  $R_{qk} = 0$  имеем

$$I_k(0) = \sum_{p=1}^N |\rho_k^{(p)}|^2, \quad I_{\Sigma}(0) = \sum_{p=1}^N \left| \sum_{k=1}^N \rho_k^{(p)} \right|^2, \quad (11)$$

а в случае  $R_{qk} = 1$  —

$$I_k(1) = \left| \sum_{p=1}^N \rho_k^{(p)} \right|^2, \quad I_{\Sigma}(1) = \left| \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^N \rho_k^{(p)} \right|^2. \quad (12)$$

Формула спектральной плотности при произвольном коэффициенте корреляции комбинируется из этих двух предельных формул:

$$I(R_{qk}) = I(0)(1 - R_{qk}) + I(1)R_{qk}. \quad (13)$$

Результаты вычислений, проведённых с использованием приведённых соотношений, представлены на рис. 1б и 1в, отличающихся только значением коэффициента корреляции между источниками шума в отдельных модах. В первом случае корреляция отсутствует, тогда как во втором она максимальна. Отличия в рассчитанных спектрах мощности достаточно очевидны. Во-первых, они есть в спектрах флуктуаций полной интенсивности: слабые пики в низкочастотной части спектра видны на рис. 1б, но они отсутствуют на рис. 1в. Во-вторых, наивысший пик в спектрах  $I_k(\Omega)$ , представленных на рис. 1б, принадлежит группе низкочастотных резонансов. Напротив, на рис. 1в доминирует высокочастотный пик. Визуальное сопоставление с экспериментальным спектром (рис. 1а) позволяет заключить, что расчёт в предположении о полной корреляции источников в большей мере отвечает эксперименту Отсуки, нежели его антипод. Но, пожалуй, наибольшее сходство с рис. 1а обнаруживает спектр мощности, вычисленный для  $R_{qk} = 0,7$  (рис. 2). Разумеется, в этих выводах присутствует изрядная доля субъективности, поскольку они основаны на визуальном сопоставлении картинок.

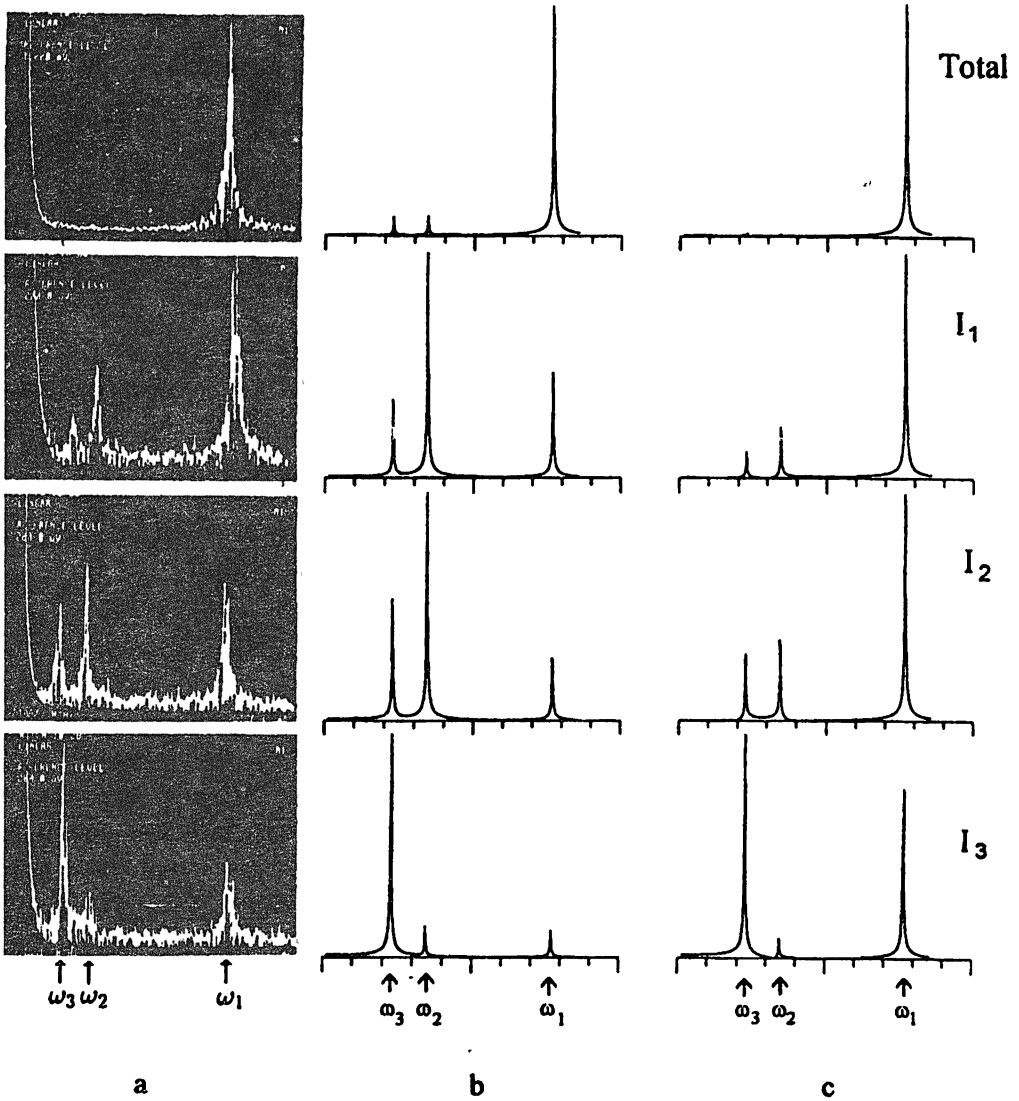


Рис. 1. а) Экспериментальный спектр флуктуаций интенсивности; б) расчётный спектр в случае отсутствия корреляции; в) расчётный спектр при полной корреляции.

Значения параметров для всех рисунков:  $A = 2,0$ ,  $G = 3,9 \cdot 10^5$ ,  $C_2 = 1,05$ ,  $C_3 = 1,11$ .

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для того, чтобы приступить к интерпретации полученных результатов, нужно иметь представление о том, какого рода флуктуации доминируют в рассматриваемом лазере. Выбор предстоит сделать между техническими флуктуациями параметров и спонтанным излучением, т.е. естественным шумом. Для выявления возможного вклада технических флуктуаций был предпринят расчёт отклика лазера на слабую периодическую модуляцию накачки. Параметр накачки в уравнениях (2) задавался изменяющимся в соответствии со следующим законом:

$$A = A_0[1 + \delta \cos(\Omega_m \tau)], \quad (14)$$

где  $\delta$  — глубина, а  $\Omega_m$  — частота модуляции. Полученные передаточные функции (рис. 3) моделируют действие модуляции накачки. Можно было бы сказать, что передаточные функции очень напоминают спектры мощности в случае сильной корреляции источников, если бы не заметные низкочастотные пики в передаточной функции для полной интенсивности.

Следовательно, более вероятно предположение о том, что за наблюдаемые флуктуации выходного излучения лазера ответственность несёт спонтанное излучение активной среды в моды резонатора. Причина же сильной корреляции ланжевеновских сил отнюдь не очевидна. Одной из возможных причин может быть неортогональность мод, которая в силу неидеальности резонатора всегда имеет место. В этой связи мы опять можем упомянуть статью Сигмена [1] с интригующим названием “*Lasing without photons*”. В ней действительно показано, что к корреляции источников естественного шума в модах приводит неортогональность последних. Однако рассмотрение ограничено случаем поперечных мод резонаторов неустойчивых конфигураций, когда неортогональность мод очень велика. Между тем, мы обсуждаем случай очень короткого моноблочного лазера, продольные моды которого гораздо ближе к идеальным. Возможная количественная связь неортогональности мод с корреляцией источников шума в модах здесь не столь очевидна. Наиболее интересным в этих условиях становится следующий вопрос: возможно ли возмущение сразу нескольких мод идеального лазерного резонатора в результате единичного акта спонтанного излучения? Но пока этот вопрос остаётся открытым.

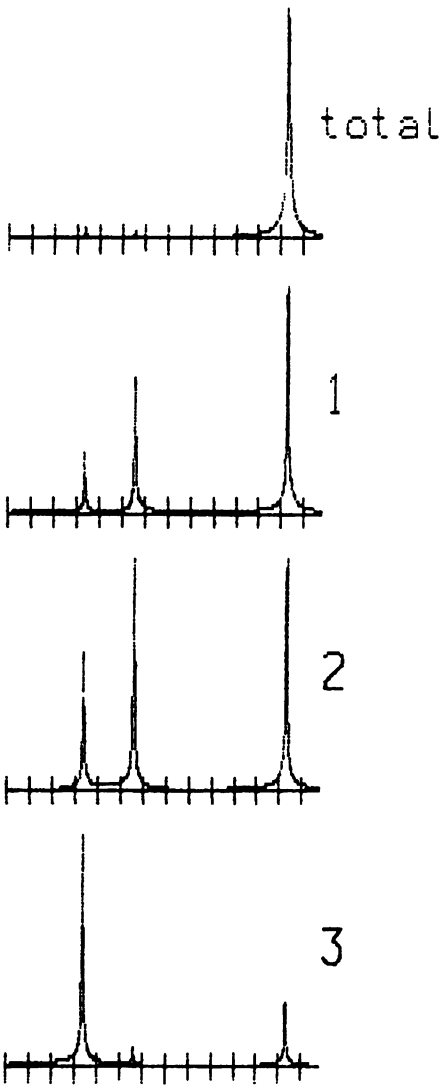


Рис. 2. Рассчитанный спектр при  $R = 0,7$ .

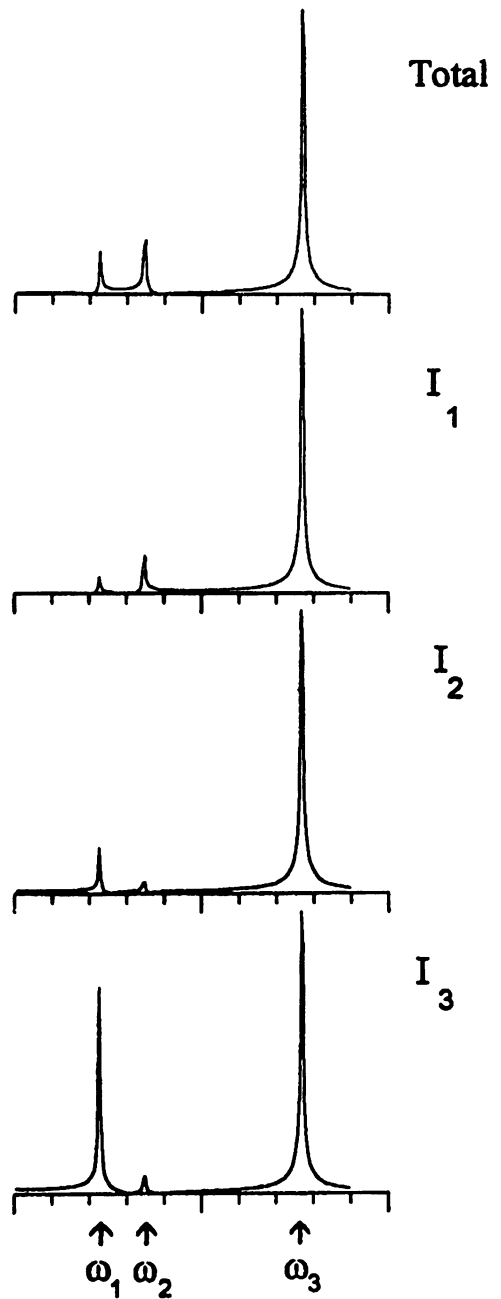


Рис. 3. Передаточная функция при модуляции потерь.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Siegman A. // Appl. Phys., 1995. V. B-60. P. 247.
2. Беспалов В. И., Гапонов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1965. Т. 8. С. 70.
3. McCumber D. B. // Phys. Rev., 1966. V. 141. P. 306.
4. Меллер А. С., Хандохин П. А., Ханин Я. И. // Квантовая электроника, 1986. Т. 13. С. 2278.
5. Otsuka K., Georgiou M., and Mandel P. // Jap. J. Appl. Phys., 1992. V. 31. P. L1250.
6. Otsuka K., Pieroux D., and Mandel P. // Opt. Commun., 1994. V. 108. P. 265.
7. Tang C. L., Statz H., and DeMars G. J. // Appl. Phys., 1963. V. 34. P. 2289.
8. Ghiner A. V., Komarov K. P., and Folin K. G. // Opt. Commun., 1975. V. 19. P. 350.
9. Фолин К. Г., Гайнер А. В. Динамика свободной генерации твердотельных лазеров. — Новосибирск: Наука, 1979.
10. Khandokhin P. A., Khanin Ya. I., Dangoise D., Celet J.-C., and Glorieux P. // Opt. Commun., 1996. V. 123. P. 372.
11. Khanin Ya. I. Principles of Laser Dynamics. — Amsterdam: North-Holland, 1995.
12. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
13. Henry Ch. // IEEE J. Quant. Electron., 1982. V. QE-18. P. 259.

Институт прикладной физики  
РАН, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию  
30 мая 1996 г.

**WHETHER THE SOURCES OF NATURAL FLUCTUATIONS  
IN DIFFERENT MODES CORRELATED ?**

*V. G. Zhislina, P. A. Khandokhin, Ya. I. Khanin*

The intensity fluctuations in multimode lasers with slow relaxing laser media are theoretically investigated. The power spectra corresponding to different correlation conditions between the noise sources inserted into individual modes are calculated in the frame of two-level homogeneously broadened laser model with spatial hole burning. The comparison of calculated spectra with the experimental data makes us conclude that the noise sources are correlated.



УДК 532.511-3:532.527

## МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ГИДРОДИНАМИКИ И ТРЁХМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПТОЛОМЕЕВСКИХ ТЕЧЕНИЙ

*А. А. Абрашкин<sup>1</sup>, Д. А. Зенькович<sup>2</sup>, Е. И. Якубович<sup>2</sup>*

Предложена новая формулировка лагранжевых уравнений динамики идеальной жидкости, в которой неизвестной величиной служит матрица производных текущих координат жидких частиц по лагранжевым переменным. Построены точные решения матричных уравнений, описывающие течения с вихревыми линиями, прецессирующими вокруг некоторой оси. Движение частиц жидкости при этом является суммой трёх круговых вращений с различными амплитудами и пространственной ориентацией. Изучены два типа течений. Для одного из них вихревые линии прямые, а траектории частиц существенно трёхмерны и имеют вид намоток на тороидальные поверхности. Для других течений вихревые линии представляют собой плоские кривые произвольной формы, а траектории частиц выражаются в суперпозицию трёх вращений в одной плоскости. Все эти движения оказываются обобщениями плоских птоломеевских течений [1, 2].

### ВВЕДЕНИЕ

Для движений однородной несжимаемой жидкости поле завихренности течения выступает свойством первостепенной важности, и “не будет преувеличением сказать, что все задачи для таких течений могут быть сформулированы как вопросы об интенсивности и распределении завихренности” [3].

В плоских потоках вихревые линии являются прямыми. Для пространственных течений их геометрия существенно богаче: они могут быть замкнутыми, иметь много узлов, деформироваться вплоть до самопересечения, растягиваться или сжиматься. В настоящей работе выбран для рассмотрения наиболее простой случай поведения вихревых линий пространственных течений, когда они, не изменяя своей формы, вращаются вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью. Такого рода поведение завихренности характерно для ряда атмосферных вихрей (ураганы, смерчи), вихревых шнуров внутри жидкости и следа за вращающимися телами.

Число точных решений уравнений гидродинамики, описывающих трёхмерные вихревые движения, крайне невелико. Как правило, они отвечают случаю стационарных осесимметричных потоков — к примеру,

вихрь Хилла [4, 5] или установившееся осесимметричное течение с закруткой [5], когда число определяющих движение координат равно двум. Что же касается более сложных, “по-настоящему” трёхмерных и нестационарных течений, соответствующих случаю движения с четырьмя независимыми переменными, то необходимо указать на исследования по динамике эллипсоидальных жидких масс. Начало им положил ещё Дирихле [4, 6], а позднейшая детальная разработка принадлежит многим авторам, в том числе и современным [7–10]. Отличительная особенность этих течений — линейная зависимость скорости от координат  $X, Y, Z$ . Из множества решений с линейным распределением скорости выбираются те, которые обеспечивают либо постоянство давления на эллипсоидальной свободной поверхности, либо выполнение условий непротекания на твёрдой поверхности эллипсоида.

Ниже получен новый класс точных нестационарных решений трёхмерных уравнений динамики идеальной жидкости, включающий течения с более сложной, нелинейной зависимостью от пространственных координат. Они являются, по существу, обобщением плоских птоломеевских течений [1, 2].

Двумерные движения жидкости, получившие название птоломеевских, описываются выражением

$$X + iY = F(a + ib)e^{i\nu t} + G(a - ib)e^{i\mu t}, \quad (1)$$

здесь  $X(a, b, t), Y(a, b, t)$  — текущие координаты жидких частиц,  $a, b$  — лагранжевы переменные,  $F, G$  — некоторые аналитические функции своих аргументов,  $\nu, \mu$  — действительные постоянные,  $t$  — время. Формула (1) определяет плоские вихревые течения, в которых траекториями жидких частиц точно также, как траекториями планет в птоломеевской картине мира, служат эпициклоиды (гипоциклоиды). С этим обстоятельством как раз и связано название течений (1).

Данное исследование является естественным развитием работ [1, 2]. С помощью матрицы, элементы которой равны производным текущих координат частиц жидкости по лагранжевым переменным (матрицы течения), уравнения гидродинамики формулируются в матричном виде. Их решение строится также в матричной форме с использованием метода разделения переменных. Рассмотрены два типа течений. В первом отдельная вихревая линия может быть кривой достаточно общего вида. Жидкие частицы движутся в плоскостях  $Z = \text{const}$ , их траектории представляют собой суперпозицию трёх вращений, причём две из трёх частот, как и для плоских птоломеевских течений, произвольны. Величина скорости, в свою очередь, зависит от  $Z$ , вследствие чего движение, собственно, трёхмерно. Для второго типа течений вихревыми линиями служат прецессирующие прямые. Траектории частиц для них имеют уже трёхмерный характер

(намотки на тороидальную поверхность) и представляют собой сложное четырёхчастотное колебательное движение.

Статья состоит из двух разделов. В первом выводятся матричные уравнения гидродинамики идеальной жидкости, во втором указывается способ построения точных решений и изучаются свойства описываемых ими течений.

## 1. МАТРИЧНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Уравнения гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости в переменных Лагранжа имеют вид [4, 11]

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(a, b, c)} = \frac{D(X_0, Y_0, Z_0)}{D(a, b, c)}, \quad (2)$$

$$X_{tt}X_a + Y_{tt}Y_a + Z_{tt}Z_a = -\frac{1}{\rho}p_a - \Phi_a,$$

$$X_{tt}X_b + Y_{tt}Y_b + Z_{tt}Z_b = -\frac{1}{\rho}p_b - \Phi_b, \quad (3)$$

$$X_{tt}X_c + Y_{tt}Y_c + Z_{tt}Z_c = -\frac{1}{\rho}p_c - \Phi_c,$$

здесь  $X(a, b, c, t)$ ,  $Y(a, b, c, t)$ ,  $Z(a, b, c, t)$  — текущие координаты жидких частиц,  $X_0, Y_0, Z_0$  — начальные координаты в момент времени  $t = 0$ , все они зависят от лагранжевых переменных  $a, b, c$ ;  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\Phi$  — потенциал внешних сил. Уравнение неразрывности (2) представляет собой условие независимости от времени якобиана от функций  $X, Y, Z$  по лагранжевым переменным. Уравнения движения (3) являются следствием второго закона Ньютона для жидких частиц. Исключая из системы (3) градиентные величины в правой части, после интегрирования по времени получим

$$X_{tb}X_c - X_{tc}X_b + Y_{tb}Y_c - Y_{tc}Y_b + Z_{tb}Z_c - Z_{tc}Z_b = S_1(a, b, c),$$

$$X_{tc}X_a - X_{ta}X_c + Y_{tc}Y_a - Y_{ta}Y_c + Z_{tc}Z_a - Z_{ta}Z_c = S_2(a, b, c), \quad (4)$$

$$X_{ta}X_b - X_{tb}X_a + Y_{ta}Y_b - Y_{tb}Y_a + Z_{ta}Z_b - Z_{tb}Z_a = S_3(a, b, c),$$

здесь  $S_1, S_2, S_3$  — интегралы движения. С физической точки зрения постоянство во времени величин  $S_1, S_2, S_3$  связано с сохранением циркуляции по бесконечно малым контурам, охватывающим соответственно

площадки  $dbdc$ ,  $dadc$ ,  $dbda$  (подробнее см. [4]). Уравнения (4) были впервые сформулированы Коши, поэтому функции  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  будем называть инвариантами Коши.

Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X_a & X_b & X_c \\ Y_a & Y_b & Y_c \\ Z_a & Z_b & Z_c \end{pmatrix}, \quad (5)$$

элементами которой служат производные текущих координат частиц по лагранжевым переменным. Как и сами функции  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , эти элементы зависят от лагранжевых переменных и времени. Если зависимость  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  от  $a$ ,  $b$ ,  $c$  линейна, матрица  $\mathbf{R}$  состоит только из функций времени [8, 10].

Матрица  $\mathbf{R}$  описывает изменение бесконечно малого элемента жидкости  $d\vec{X}\{dX, dY, dZ\}$ , соответствующего приращению лагранжевых координат  $d\vec{a}\{da, db, dc\}$

$$d\vec{X} = \mathbf{R} d\vec{a}. \quad (6)$$

Хорошо известно, что уравнение неразрывности формулируется как условие постоянства во времени детерминанта матрицы  $\mathbf{R}$  [4, 11]:

$$\det \mathbf{R} = \det \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{R}_0 = \mathbf{R} |_{t=0}. \quad (7)$$

Этим не исчерпывается роль матрицы  $\mathbf{R}$  в гидродинамике. Одна из целей настоящей работы — показать, что гидродинамические уравнения могут быть записаны с помощью этой матрицы в замкнутой форме. В самом деле, непосредственной подстановкой можно убедиться, что уравнения движения в форме Коши (4) сворачивается в матричное уравнение

$$\mathbf{R}_t^T \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_t = \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & S_3 & -S_2 \\ -S_3 & 0 & S_1 \\ S_2 & -S_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Верхний индекс "Т" обозначает операцию транспонирования, индекс "t" внизу — дифференцирование по времени, элементами не зависящей от времени антисимметричной матрицы  $\mathbf{S}$  являются инварианты Коши.

Эта новая матричная форма уравнения движения, кроме компактности обладает еще той замечательной особенностью, что она содержит только производные  $\mathbf{R}$  по времени и не включает производных  $\mathbf{R}$  по пространственным переменным. Важно заметить, что не всякая матрица,

удовлетворяющая этим уравнениям, будет иметь вид (5). Поэтому к уравнениям (7) и (8) надо добавить условие того, что элементы строк матрицы  $\mathbf{R}$  являются компонентами градиентов функций  $X, Y, Z$  по переменным  $a, b, c$ :

$$\frac{\partial R_{nm}}{\partial a_k} = \frac{\partial R_{nk}}{\partial a_m}. \quad (9)$$

Итак, уравнения неразрывности (7), движения (8) и условие "градиентности" определяют вид матрицы течения  $\mathbf{R}$ . В свою очередь, зная матрицу  $\mathbf{R}$ , легко путём интегрирования определить траектории частиц  $X(a, b, c, t)$ ,  $Y(a, b, c, t)$ ,  $Z(a, b, c, t)$ , то есть установить картину течения жидкости.

Для определения завихренности  $\vec{\Omega}(a, b, c, t)$  нет необходимости сначала находить траектории частиц  $\vec{X}(\vec{a}, t)$ . Завихренность выражается непосредственно через элементы матрицы  $\mathbf{R}$ :

$$\vec{\Omega} = \frac{\mathbf{R}}{\det \mathbf{R}_0} \vec{S}, \quad (10)$$

где компонентами вектора  $\vec{S}\{S_1, S_2, S_3\}$  являются инварианты Коши. В частности, при  $t = 0$

$$\vec{\Omega}_0 = \frac{\mathbf{R}_0}{\det \mathbf{R}_0} \vec{S}. \quad (11)$$

Из этого равенства видно, что когда в качестве лагранжевых переменных  $a, b, c$  выбраны начальные координаты  $X_0, Y_0, Z_0$ , матрица  $\mathbf{R}_0$  совпадает с единичной и инварианты Коши равны начальным значениям компонент завихренности. В таком виде их и определял Коши [4].

Матричное описание течений существенно облегчает преобразования от одних координат к другим. Ниже это будет использовано при построении точных решений.

## 2. ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Простым примером решения, удовлетворяющего матричным уравнениям гидродинамики (7)–(9), будет матрица течения

$$\mathbf{R} = e^{\hat{\gamma}t} \mathbf{R}_0, \quad (12)$$

где матрица  $\hat{\gamma}$  — постоянная (не зависящая от  $a, b, c, t$ ) антисимметричная матрица:

$$\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Действительно, уравнение неразрывности (7) очевидно удовлетворяется:

$$\det \mathbf{R} = \det e^{\hat{\gamma}t} \det \mathbf{R}_0 \equiv \det \mathbf{R}_0 . \quad (14)$$

Условие градиентности (9) будет выполняться автоматически при надлежащем выборе начальной матрицы  $\mathbf{R}_0$ . И, наконец, уравнение (8) удовлетворяется для

$$\mathbf{S} = 2 \mathbf{R}_0^T \hat{\gamma} \mathbf{R}_0 . \quad (15)$$

Это решение есть простое вращение всей жидкости как целого с угловой скоростью  $\vec{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ .

Более сложное движение жидкости описывается матрицей течения

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 e^{\hat{\omega}t} , \quad (16)$$

где матрица  $\hat{\omega}$ , как и в случае (12), — постоянная антисимметричная матрица

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (17)$$

Существенным отличием этого типа течения от первого примера будет условие коммутации этой матрицы с матрицей  $\mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0$ , необходимое и достаточное для того, чтобы матрица течения (16) удовлетворяла уравнению движения (8). Тогда матрица  $\mathbf{S}$  будет равняться

$$\mathbf{S} = 2 \hat{\omega} \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0 \quad (18)$$

и, очевидно, также коммутировать с  $\hat{\omega}$ .

Пример третьего типа решений, объединяющего оба рассмотренных случая, будем искать среди матриц течения вида

$$\mathbf{R} = e^{\hat{\gamma}t} \mathbf{R}_0 e^{\hat{\omega}t} , \quad (19)$$

где матрицы  $\hat{\gamma}$  и  $\hat{\omega}$  — по-прежнему типа (13) и (17). Здесь также необходимо, чтобы матрица  $\hat{\omega}$  коммутировала с матрицей  $\mathbf{S}$  (это можно доказать подстановкой  $\mathbf{R}$  в уравнение движения (8)).

Для дальнейшего анализа предлагается своего рода метод “разделения переменных”, для которого, как будет ясно в дальнейшем, существенен выбор представления матрицы течения и матрицы инвариантов Коши. Выберем ось лагранжевой переменной  $s$  по направлению завихренности  $\vec{\Omega}_0$  в начальный момент времени. Тогда будет отлична от нуля циркуляция по бесконечно малому контуру, охватывающему эту ось, а бесконечно малые циркуляции вокруг других осей будут равны нулю. Это означает,

что из трёх инвариантов Коши только  $S_3$  будет отличен от нуля. Таким образом, без ограничения общности можно выбрать матрицу  $\mathbf{S}$  в виде

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & S & 0 \\ -S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Поскольку матрица  $\hat{\omega}$  для решений типа (19) должна коммутировать с  $\mathbf{S}$ , то она будет иметь такой же вид

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Как мы уже отмечали, оператор  $e^{\hat{\gamma}t}$  описывает вращение жидкости вокруг некоторого направления в пространстве. Выберем ось  $Z$  вдоль этого направления. Тогда матрица  $\hat{\gamma}$  примет такой же вид, как матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\hat{\omega}$ :

$$\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Выражения для элементов матрицы течения (19) упростятся, если мы перейдем к представлению, в котором все три матрицы  $\mathbf{S}$ ,  $\hat{\omega}$  и  $\hat{\gamma}$  диагональны:

$$\mathbf{S}_d = \begin{pmatrix} -iS & 0 & 0 \\ 0 & iS & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\omega}_d = \begin{pmatrix} -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}_d = \begin{pmatrix} -i\gamma & 0 & 0 \\ 0 & i\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Матрица  $\mathbf{R}_0$  при переходе к этому представлению преобразуется в некую матрицу  $\mathbf{L}_0$  с элементами — линейными комбинациями от элементов матрицы  $\mathbf{R}_0$ . С другой стороны, если вспомнить, что элементы матрицы течения  $\mathbf{R}$  являются производными переменных  $X, Y, Z$  по переменным  $a, b, c$ , то легко усмотреть, что проделанное унитарное преобразование матрицы течения  $\mathbf{R}$  в матрицу течения  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = e^{\hat{\gamma}_d t} \mathbf{L}_0 e^{\hat{\omega}_d t} \quad (24)$$

эквивалентно переходу от действительных переменных  $X, Y, Z$  и  $a, b, c$  к новым комплексным переменным по формулам

$$W_1 = \frac{X + iY}{\sqrt{2}}, \quad W_2 = \frac{X - iY}{\sqrt{2}}, \quad W_3 = Z, \quad (25)$$

$$\xi_1 = \frac{a + ib}{\sqrt{2}}, \quad \xi_2 = \frac{a - ib}{\sqrt{2}}, \quad \xi_3 = c.$$

Отметим, что все уравнения гидродинамики для этого представления сохраняют свой вид: уравнение неразрывности

$$\det \mathbf{L} = \det \mathbf{L}_0, \quad (26)$$

уравнение движения

$$\mathbf{L}_t^* \mathbf{L} - \mathbf{L}^* \mathbf{L}_t = \mathbf{S}_d \quad (27)$$

(знак “\*” соответствует операции эрмитового сопряжения), и условие градиентности

$$\frac{\partial L_{nm}}{\partial \xi_k} = \frac{\partial L_{nk}}{\partial \xi_m}. \quad (28)$$

После этого предварительного преобразования матрицы течения перейдем собственно к разделению переменных. Предположим, что составляющие каждого  $k$ -того столбца  $\mathbf{L}_0$  зависят только от  $k$ -той лагранжевой переменной:

$$\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} L_{11}(\xi_1) & L_{12}(\xi_2) & L_{13}(c) \\ L_{21}(\xi_1) & L_{22}(\xi_2) & L_{23}(c) \\ L_{31}(\xi_1) & L_{32}(\xi_2) & L_{33}(c) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

здесь все  $L_{nm}$  — функции одного аргумента, а индекс “0” при этих функциях опущен для краткости. При таком разделении переменных условие градиентности для  $\mathbf{L}_0$ , естественно, удовлетворяется. Благодаря одновременной диагональности матриц  $\hat{\omega}$  и  $\hat{\gamma}$  условие градиентности сохраняется в любой момент времени для полной матрицы течения (24). Остается выяснить, при каких ограничениях на элементы  $\mathbf{L}_0$  в (29) удовлетворяются уравнения движения (27). Подставим выражение (29) в уравнение движения (27). Условие диагональности правой части уравнения движения (диагональность  $\mathbf{S}_d$ ) справедливо, если все недиагональные элементы левой части матричного уравнения (27) будут тождественно равны нулю. После необходимых вычислений с учетом формул (25) приходим к одному условию

$$(\omega + 2\gamma)L_{11}(\xi_1)\overline{L_{13}(c)} + (\omega - 2\gamma)\overline{L_{12}(\xi_1)}L_{13}(c) + \omega L_{31}(\xi_1)L_{33}(c) = 0. \quad (30)$$

здесь черта сверху у функций — знак комплексного сопряжения. В нашем изложении он не относится к аргументам функций. Иными словами, если  $L(\xi) = i\xi$ , то  $\overline{L}(\xi) = -i\xi$ .

Полученное равенство удовлетворяется двумя различными способами. Каждый из них отвечает своему типу движения жидкости. Рассмотрим их последовательно.



## 2.1. Течения с искривленными вихревыми линиями

Предположим, что  $L_{31} = 0$ , а  $L_{13}$  будем считать действительной. Из уравнения (30) тогда следует, что

$$\overline{L_{12}} = \frac{2\gamma + \omega}{2\gamma - \omega} L_{11}. \quad (31)$$

Обозначая  $L_{11} = (2\gamma - \omega)F'(\xi_1)$ ,  $L_{13} = h'(c)$ ,  $L_{33} = q'(c)$ , запишем матрицу  $\mathbf{L}_0$  в виде

$$\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} (2\gamma - \omega)F'(\xi_1) & (2\gamma + \omega)\overline{F'}(\xi_2) & h'(c) \\ (2\gamma + \omega)F'(\xi_1) & (2\gamma - \omega)\overline{F'}(\xi_2) & h'(c) \\ 0 & 0 & q'(c) \end{pmatrix} \quad (32)$$

и простым интегрированием найдём явное представление для искомого решения

$$W_1 = \frac{X + iY}{\sqrt{2}} = \left[ (2\gamma - \omega)F(\xi_1)e^{-i\omega t} + (2\gamma + \omega)\overline{F}(\xi_2)e^{i\omega t} + h(c) \right] e^{-i\gamma t}, \quad (33)$$

$$W_2 = \overline{W_1}, \quad Z = q(c).$$

Напомним, что  $\xi_2 = \overline{\xi_1}$ . В силу произвольности выбора области определения лагранжевых координат можно без ограничения общности считать  $F(\xi_1) = \xi_1$ , а  $q(c) = c$ . Таким образом, окончательный вид решений первого типа имеет вид

$$W_1 = \left\{ (2\gamma - \omega)\xi_1 e^{-i\omega t} + (2\gamma + \omega)\overline{\xi_1} e^{i\omega t} + h(c) \right\} e^{-i\gamma t}, \quad Z = c. \quad (34)$$

Полученное движение при  $h(c) = 0$  сводится к плоскому птоломеевскому (1). Движение частиц в течении (34) происходит в плоскости  $Z = \text{const}$  по траекториям, представляющим собой наложение трёх круговых вращений с различными частотами  $\omega + \gamma$ ,  $\omega - \gamma$ ,  $\gamma$  и амплитудами, или, по-другому, движение по эллипсу вокруг центра, перемещающегося по окружности. В случае несоизмеримости частот  $\omega$  и  $\gamma$  траектории являются квазипериодическими и незамкнутыми. Несмотря на то, что все они лежат в параллельных плоскостях, течение трёхмерно, поскольку координата центра, вокруг которого происходит вращение в каждой плоскости  $Z = \text{const}$ , определяется функцией  $h(c)$ , то есть изменяется при переходе от одного слоя движущейся жидкости к другому. Произвол выбора функции  $h(c)$  ограничивается условием её однозначности:  $1/h'(c) \neq 0$ .

Завихренность течения (34) в лагранжевых переменных равна

$$\bar{\Omega} = \frac{\omega^2}{2\gamma} \begin{pmatrix} \sqrt{2} h'(c) \cos \gamma t \\ - \\ \sqrt{2} h'(c) \sin \gamma t \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Вектор завихренности в любой точке потока прецессирует вокруг оси  $Z$  с частотой  $\gamma$ . Параметрическое представление формы вихревых линий даётся непосредственно формулой (34), где комплексные переменные зафиксированы, а изменяется лишь действительный параметр  $c$ . Другими словами, вихревые линии совпадают с координатными линиями  $c$  как криволинейной координаты в пространстве  $X, Y, Z$ .

В эйлеровой форме течение (34) запишется так:

$$W_t = \frac{i\omega^2}{4\gamma} W + \frac{i(\omega^2 - 4\gamma^2)}{4\gamma} \bar{W} e^{-2i\gamma t} - \frac{i\omega^2}{2\gamma} h(Z) e^{-i\gamma t}, \quad Z_t = 0. \quad (36)$$

Первый член в выражении для комплексной скорости описывает стационарное круговое течение, порождающее  $z$ -компоненту завихренности, второй член соответствует некоторому нестационарному потенциальному движению, а третий характеризует различие в течении разных горизонтальных слоев (именно он порождает осциллирующие компоненты завихренности, лежащие в плоскости  $XY$ ). Эйлерово представление завихренности получается из (35) заменой  $c$  на  $Z$ .

## 2.2. Течения с прямыми вихревыми линиями

Будем считать  $L_{13}$  действительной и положим  $L_{33} = 1$ , тогда из (30) следует

$$L_{13} = -\omega\lambda, \quad L_{31} = \lambda \left[ (\omega + 2\gamma)L_{11} + (\omega - 2\gamma)\bar{L}_{12} \right], \quad (37)$$

здесь  $\lambda$  — действительная константа разделения переменных в (30). Из этих соотношений видно, что две из трёх функций  $L_{11}, \bar{L}_{12}, L_{31}$  можно выбрать произвольным образом, а третья будет их линейной комбинацией. Примем, что  $L_{11} = F'(\xi_1)$ ,  $L_{12} = G'(\xi_2)$ , тогда матрица  $L_0$  принимает вид

$$L_0 = \begin{pmatrix} F' & G' & -\omega\lambda \\ \bar{G}' & \bar{F}' & -\omega\lambda \\ \lambda \left[ (\omega + 2\gamma)F' + (\omega - 2\gamma)\bar{G}' \right] & \lambda \left[ (\omega + 2\gamma)\bar{F}' + (\omega - 2\gamma)G' \right] & 1 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

здесь функции в первом столбце зависят от  $\xi_1$ , а во втором — от  $\xi_2$ . Выражения для траекторий частиц, соответствующие данному виду  $\mathbf{L}_0$ , записываются так:

$$W_1 = \frac{X + iY}{\sqrt{2}} = \left\{ F(\xi_1)e^{-i\omega t} + G(\xi_2)e^{i\omega t} - \omega\lambda c \right\} e^{-i\gamma t}, \quad (39)$$

$$W_2 = \overline{W_1}, \quad Z = 2\lambda \operatorname{Re} \left\{ [(\omega + 2\gamma)F(\xi_1) + (\omega - 2\gamma)\overline{G}(\xi_1)] e^{-i\omega t} \right\} + c.$$

Траектории частиц являются четырехчастотными по времени. В пространстве они представляют собой намотки на тороидальные поверхности, образованных путём вращения различным образом ориентированных в пространстве эллипсов вокруг оси  $Z$ . Для несоизмеримых  $\omega$  и  $\gamma$  эти намотки квазипериодичны и каждая траектория заполняет всю поверхность соответствующего тора. Завихренность такого течения находится с помощью (10):

$$\vec{\Omega} = \frac{S}{\det \mathbf{L}_0} \frac{\partial \vec{X}}{\partial c} = \frac{S}{\det \mathbf{L}_0} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\omega\lambda \cos \gamma t \\ \sqrt{2}\omega\lambda \sin \gamma t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad (40)$$

$$S = -2 \left\{ (\omega + \gamma) |F'|^2 + (\omega - \gamma) |G'|^2 + 4\omega\lambda^2 |(\omega + 2\gamma)F' + (\omega - 2\gamma)G'|^2 \right\},$$

$$\det \mathbf{L}_0 = (1 + 2\omega^2\lambda^2) (|F'|^2 - |G'|^2) + 4\omega\gamma\lambda^2 |F' - \overline{G'}|^2.$$

Чтобы изучить поведение вихревых линий течения (39), достаточно в (39) считать  $\xi_1 = \overline{\xi_2} = \text{const}$ , и тогда вихревые линии параметризуются лагранжевой переменной  $c$ . Они представляют собой прямые, при движении сохраняющие свой угол с направлением оси  $Z$ , а их проекции на плоскость  $XY$  изменяют свою ориентацию по гармоническому закону с частотой  $\gamma$ . Величина завихренности зависит от переменных  $\xi_1, \xi_2 = \overline{\xi_1}$ .

При  $\lambda = 0$  трёхмерное течение (39) переходит в плоское птоломеевское (1), у которого завихренность направлена по оси  $Z$ . Как и потоки вида (34), течения этого типа можно рассматривать как обобщение птоломеевских на случай пространственного движения.

Есть ещё один интересный пример течений подобного рода, который отличается от рассмотренных выше тем, что вихревые линии для него строго перпендикулярны оси вращения (оси  $Z$ ). Его не удаётся изучить в рамках выражений (37), (39) (в этих формулах пришлось бы полагать  $\lambda = \infty$ ). Для этого случая более удобно провести разделение переменных в выражении (30) специальным образом.

Положим в (30)  $L_{33} = 0$ , тогда функция  $L_{31}(\xi_1)$  произвольна, а элементы  $L_{11}$  и  $L_{12}$  связаны соотношением

$$(\omega + 2\gamma)L_{11} + (\omega - 2\gamma)\overline{L}_{12} = 0. \quad (41)$$

Обозначим  $L_{11} = (2\gamma - \omega)F'(\xi_1)$ ,  $L_{12} = (2\gamma + \omega)\overline{F}'(\xi_2)$ ,  $L_{13} = 1$ ,  $L_{31} = G'(\xi_1)$ , при этом матрица  $\mathbf{L}_0$  примет следующий вид

$$\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} (2\gamma - \omega)F' & (2\gamma + \omega)\overline{F}' & 1 \\ (2\gamma + \omega)\overline{F}' & (2\gamma - \omega)F' & 1 \\ G' & \overline{G}' & 0 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

а искомое течение будет описываться выражениями

$$W_1 = \left\{ (2\gamma - \omega)F(\xi_1)e^{-i\omega t} + (2\gamma + \omega)\overline{F}(\xi_2)e^{i\omega t} + c \right\} e^{-i\gamma t}, \quad (43)$$

$$Z = G(\xi_1)e^{-i\omega t} + \overline{G}(\xi_2)e^{i\omega t}.$$

Для этого семейства движений

$$\vec{\Omega} = \frac{2\omega^2 |F'|^2 + |G'|^2}{2\text{Re}(F'\overline{G}')} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cos \gamma t \\ \sqrt{2} \sin \gamma t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Как уже отмечалось, область определения лагранжевых координат можно выбрать произвольно. Отсюда вытекает, что одну из функций, например,  $F$ , без ограничения общности можно считать линейной. Иными словами, определяющим образом на свойства течений (39), (43) влияют не сами функции  $F$  и  $G$ , а соотношение между ними  $G = G(\overline{F})$ . На вид этих функций есть только одно ограничение: в рассматриваемой области течения  $\det \mathbf{L}_0$  не должен обращаться в ноль.

Вернёмся к матричной форме исследуемых решений и поясним, каким течениям будут соответствовать решения вида (16), где матрица  $\hat{\gamma}$  "твёрдотельного" вращения в пространстве  $X, Y, Z$  отсутствует. Полагая  $\gamma = 0$  в формулах (39), (43), увидим, что прецессия вихревых линий исчезает и течение вырождается в плоское птоломеевское с эллиптическими траекториями частиц, которое в (1) соответствует случаю  $\nu = -\mu$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно повернуть оси  $X, Y, Z$  таким образом, чтобы ось  $Z$  совпадала с направлением завихренности течений (39), (43) при  $\gamma = 0$ . Течения же с искривленными вихревыми линиями (33) существуют только при  $\gamma \neq 0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа представляет собой новый взгляд на описание течения жидкости, отличный от традиционного. Как всегда, с новой точки зрения одни детали явлений описываются сложнее, а другие проще (сравните эйлерово и лагранжево описание течений). С помощью матричных уравнений удаётся исследовать сложные трёхмерные нестационарные вихревые течения, что при других способах описания было бы исключительно трудно. Это было продемонстрировано на примерах точных решений (34) и (39), (43). Совершенно ясно, что исследование течений на основе матричного описания ими не исчерпывается.

Использование полученных решений применительно к граничным задачам гидродинамики (течения с жёсткими или свободными границами), а также к задаче описания локализованных трёхмерных вихрей выходит за рамки настоящей статьи. Эти сложные вопросы ещё требуют дальнейшей разработки.

Авторы выражают признательность РФФИ, поддержавшему эти исследования в рамках гранта № 96-01-00585, а также благодарят фонд INTAS за поддержку по гранту № 93-1373.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрашкин А. А., Якубович Е. И. О плоских вихревых течениях идеальной жидкости // Докл. АН СССР, 1984. Т. 276. № 1. С. 76.
2. Абрашкин А. А., Якубович Е. И. О нестационарных вихревых течениях идеальной несжимаемой жидкости // Журн. прикл. механики и техн. физики, 1985. № 2. С. 57.
3. Сэффмен Ф. Динамика завихренности. — В кн.: Современная гидродинамика. Успехи и проблемы / Под ред. Дж. Бэтчелора и Г. Моффта. — М.: Мир, 1984. С. 77.
4. Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947. — 928 с.
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973. — 758 с.
6. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973. — 520 с.
7. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры. — В сб.: Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. — Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1967. С. 5.
8. Лаврентьева О. М. О движении жидкого эллипсоида. // Докл. АН СССР, 1980. Т. 253. № 4. С. 828.

9. Обухов А. М. Трехмодовое взаимодействие в несжимаемой жидкости //Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. № 5–6. С. 864.
10. Андреев В. К. Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. — Новосибирск: ВО "Наука", 1992. — 133 с.
11. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I. — М.: Физматгиз, 1963. — 584 с.

<sup>1</sup>Институт прикладной механики  
РАН, г. Москва,

Поступила в редакцию  
30 мая 1996 г.

<sup>2</sup>Институт прикладной физики  
РАН, г. Нижний Новгород

## MATRIX FORMULATION OF HYDRODYNAMICS AND EXTENSION OF PTOLEMAEUS FLOWS TO THREE-DIMENSIONAL MOTIONS

*A. A. Abrashkin, D. A. Zenkovich, E. I. Yakubovich*

A new matrix formulation of Lagrange hydrodynamic equations is suggested. Exact solutions of these equations are obtained in matrix form. Precession of vortex lines around some fixed axis in space is found to be a general property of the flows described by these solutions. Two types of fluid motions are studied. The flows of the first type have straight vortex lines, the particle trajectories being windings on toroidal surfaces. The other flows have plane particle trajectories, and their vortex lines are arbitrarily shaped plane curves. All these motions are shown to be three-dimensional generalizations of plane Ptolemaeus flows [Abrashkin & Yakubovich, *Doklady Acad.Sci.* 276, 838 (1984)].

УДК 533.9

## О ПРОБЛЕМЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИНАМО

*Е. А. Мареев, В. Ю. Трахтенгерц*

В рамках однокомпонентной электрогидродинамики (ЭГД) дана общая формулировка проблемы генерации квазистационарного электрического поля и пространственного заряда в движущейся слабопроводящей среде. Проанализирована аналогия с проблемой магнитного динамо. Предложены простейшие модели ламинарного электрического динамо. Исследовано явление анизотропной дисперсии звуковых волн, распространяющихся в униполярно заряженной среде, и распространение циркулярных волн в униполярно заряженной среде при наличии внешнего магнитного поля. Обсуждается проблема формирования ЭГД течений в диэлектриках. Рассмотрена возможность взаимодействия потенциального и вихревого электрических полей в медленно движущейся проводящей среде.

### ВВЕДЕНИЕ

Термин “электрическое динамо”, который характеризует процессы генерации квазистационарного электрического поля в движущейся слабопроводящей среде, пока не является прочно “устоявшимся”. Сравнительно с проблемой магнитного динамо, породившей огромное количество работ (см. монографии [1, 2] и цитируемую там литературу), проблема электрического динамо исследована гораздо менее детально, а в общей электродинамической постановке даже не была сформулирована. Между тем, эта проблема вызывает не только академический интерес, но и имеет большое практическое значение применительно к физике атмосферы (грозовое электричество, энергообмен между атмосферой и ионосферой), астрофизике, электроэнергетике. Последнее обстоятельство нашло отражение в появлении специальных монографий, посвящённых электрогазодинамике [3] и электрофизике текучих диэлектрических сред [4]. В последнее время интерес к этой проблеме заметно возрос в связи с новыми экспериментальными данными по тонкой структуре и динамике грозовых облаков и мезомасштабных конвективных систем [5–8], генерации электрических полей в средней атмосфере [9, 10], оптическим явлениям в мезосфере и нижней ионосфере, связанным с грозовой активностью [11], формированию аэроэлектрических структур в приземном слое атмосферы [12]. К этому же кругу вопросов непосредственно примыкают интенсивно обсуждаемые в настоящее время коллективные эффекты в пылевой плазме (*dusty plasmas*), включая формирование квазикристаллических структур заряженными аэрозольными частицами [13, 14], а также волны и неустойчивости в пылевой плазме [15, 16].

Задачей настоящей работы является развитие однокомпонентного гидродинамического описания слабопроводящей поляризующейся сплошной среды и анализ простейших моделей электрического динамо в рамках этого описания. Прежде чем переходить к формулировке уравнений электрогидродинамики, сделаем ряд предварительных замечаний по поводу характерных параметров интересующих нас задач и методов их решения.

Как известно, проблема магнитного динамо в проводящей среде исследуется на основе системы уравнений магнитной гидродинамики (МГД), описывающей взаимодействие магнитного и гидродинамического полей. Эта система получается в пренебрежении током смещения в уравнениях Максвелла и предполагает малость электрического поля в среде по сравнению с магнитным [17]. Электрическое поле, в свою очередь, имеет вихревую и потенциальную составляющие, относительный вклад которых определяется величиной магнитного числа Рейнольдса  $Re_m$ . При  $Re_m \gg 1$  преобладает вихревая составляющая, при  $Re_m \ll 1$  — потенциальная [17]. Второй случай как раз характерен для плохих проводников, тогда как проблема магнитного динамо анализируется для случая  $Re_m \gtrsim 1$ . Поэтому при рассмотрении задач МГД обычно подразумевается, что любые возмущения заряда в проводнике быстро релаксируют.

Время релаксации заряда в проводнике (обладающем также поляризационными свойствами)  $\tau_p$  определяется, вообще говоря, отношением диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и проводимости среды  $\sigma$ :  $\tau_p = \epsilon/4\pi\sigma$ , являясь в обычных проводниках ничтожно малой величиной (так, для меди  $\tau_p \simeq 1,5 \cdot 10^{-13}$  с). В изотропной плазме  $\tau_p$  определяется мнимой частью корня уравнения  $4\pi\sigma(\omega) = i\omega\epsilon(\omega)$  и зависит от соотношения частот  $\omega_p$  и  $\nu$ , где  $\omega_p$  — ленгмюровская частота заряженных частиц, дающих основной вклад в проводимость,  $\nu$  — эффективная частота их соударений с нейтралами. При  $\omega_p \ll \nu$   $\tau_p = \epsilon/4\pi\sigma \simeq \nu/\omega_p^2$ . В обратном предельном случае  $\omega_p \gg \nu$   $\tau_p \simeq \nu^{-1}$ . Даже в слабоионизованной плазме нижней ионосферы  $\tau_p$  весьма мало. Так, на высоте 70 км в условиях дневной ионосферы  $\tau_p \simeq 10^{-5}$  с.

Однако для ряда задач время релаксации заряда в проводящей среде может быть столь большим, что движение такой среды во внешнем электрическом поле успевает приводить к существенному перераспределению заряда и поля внутри среды. Известно, например, что в приземном слое атмосферы воздух является слабопроводящей средой, проводимость которой определяется, в основном, лёгкими ионами и составляет  $\sigma \simeq 3 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup> [18]. Следовательно, время релаксации заряда в воздухе  $\tau_p \simeq 3 \cdot 10^2$  с. Наличие в воздухе над сушей аэрозольных частиц с концентрацией  $10^4$  см<sup>-3</sup> и выше приводит обычно к ещё большему падению проводимости [19]. Известно также, что в приземном слое существует квазистатическое электрическое поле, величина которого



в условиях хорошей погоды порядка 1 В/см, и нескомпенсированный распределённый объёмный заряд с плотностью, достигающей  $\rho_0 \simeq 2 \cdot 10^2$  рС/м<sup>3</sup>  $\simeq 1,2 \cdot 10^3$  е/см<sup>3</sup>. Поэтому анализ динамики электрического состояния приземного слоя предполагает решение задачи о движении слабопроводящей среды во внешнем электрическом поле.

Разумеется, наиболее яркие проявления динамики квазистатических электрических полей в атмосфере наблюдаются в грозовых облаках. Характерные значения плотности объёмного заряда здесь составляют  $10^{-9} \div 10^{-8}$  Кл/м<sup>3</sup>, достигая в отдельных областях  $10^{-6}$  Кл/м<sup>3</sup> [5]. К настоящему времени в результате натуральных экспериментов, лабораторного моделирования микрофизических процессов разделения заряда в облаках и т.п. накоплен обширный материал, позволяющий судить об электродинамике облаков на разных стадиях их развития [5]. Однако завершённой теории развития грозовой ячейки как распределённого ЭГД генератора в настоящее время не существует. Остаются открытыми и многие вопросы самосогласованной динамики поля и среды в условиях интенсивных конвективных движений, характерных для грозового облака. Ясно, что некоторые из этих вопросов могут быть решены лишь в рамках кинетического описания среды (с учётом распределения частиц не только по скоростям, но и по массе и зарядам) или в рамках многокомпонентной гидродинамики. Это относится, в частности, к эффектам коллективной зарядки в аэрозольной плазме, рассмотренным нами в отдельной работе [20].

Здесь же мы остановимся на формулировке и некоторых общих закономерностях уравнений однокомпонентной электрогидродинамики (часть которых обсуждалась ранее другими авторами, но либо не достаточно полно, либо не вполне корректно). В частности, ниже обсуждается возможность взаимодействия вихревых и потенциальных электрических полей при различных значениях магнитного числа Рейнольдса  $Re_m$ , а также аналогия уравнений магнитной гидродинамики (в пределе  $Re_m \gg 1$ ) с уравнениями электрогидродинамики.

Наряду с этим, будут рассмотрены некоторые частные задачи электрогидродинамики, иллюстрирующие появление новых физических эффектов, обусловленных электрическим взаимодействием в проводящих средах. К таким эффектам относятся анизотропная дисперсия звуковых волн, возникающая в униполярно заряженной среде, эффекты волновых неустойчивостей в движущихся диэлектрических средах, аналог инерционных циркулярных волн в проводящих средах с электрическим и магнитным полем.

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Изучение проблемы электрического динамо предполагает анализ совместной системы уравнений движения жидкости (или газа) и уравнений для электрического поля, т.е. системы уравнений электрогидродина-

мики (ЭГД). Для её написания можно исходить из уравнений квазигидродинамики многокомпонентной слабоионизированной плазмы (см., например, [21]). Мы будем основываться на феноменологическом выводе уравнений одножидкостной ЭГД, не интересуясь в данной работе деталями его микроскопического обоснования.

Будем предполагать, что среда характеризуется проводимостью  $\sigma$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , которые являются константами. Если это не оговорено особо, будет рассматриваться среда со свободными зарядами, проводимость которой удовлетворяет условию:  $4\pi\sigma \ll \omega_p$ . Это условие фактически означает, что ленгмюровская частота  $\omega_p$  много меньше частоты столкновений заряженных частиц с нейтральными, а длина свободного пробега заряженных частиц  $l$  мала по сравнению с дебаевским радиусом  $r_D$ . Заметим, что условие малости дебаевского радиуса по сравнению с характерным пространственным масштабом задачи  $L$  обычно считается критерием квазинейтральности и пренебрежения электростатической силой в гидродинамических уравнениях движения плазмы [22]. Но в случае  $l \ll r_D$  дебаевский радиус уже не играет своей привычной роли наибольшего масштаба разделения зарядов, так как движение заряженных частиц определяется, в основном, их взаимодействием с нейтральной компонентой. Поэтому разделение зарядов и играет важную роль в электрогидродинамике такой среды. Движение среды в дальнейшем считается нерелятивистским.

Чтобы записать систему уравнений ЭГД, учтём следующие компоненты тока, входящего в уравнение Максвелла  $\text{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ :

1). Ток смещения  $\mathbf{j}_{dp} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ;

2). Ток проводимости  $\mathbf{j}_{cd} = \sigma \mathbf{E}^* = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right)$ , где  $\mathbf{E}^*$  — напряжённость электрического тока в системе отсчёта, в которой элемент среды неподвижен;

3). Поляризационный ток  $\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\chi}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} = \frac{\chi}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right)$ , где  $\chi = \epsilon - 1$  — диэлектрическая восприимчивость;

4). Конвективный ток  $\mathbf{j}_c = \rho \mathbf{v}$ , обусловленный переносом свободных зарядов с объёмной плотностью  $\rho$ ;

5). Ток намагничения  $\mathbf{j}_m = \text{crot}\mathbf{M} = -\frac{\chi}{4\pi} \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]$ , который учитывает создаваемое движением поляризованного диэлектрика магнитное поле (см. [23]);

6). Диффузионный ток, который в простейшем случае можно выразить через градиент плотности заряда:  $\mathbf{j}_d = -D\nabla\rho$ , где  $D$  — коэффициент диффузии свободных зарядов.

Принимая во внимание все компоненты тока, уравнение Максвелла

можно записать в виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} - D \nabla \rho) - \frac{\chi}{c} \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left( 1 + \frac{\chi}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (1)$$

Заметим, что при описании интересующих нас явлений током смещения пренебречь нельзя, так как его отношение к току проводимости по порядку величины определяется параметром  $A_d = \varepsilon / (4\pi\sigma\tau)$  (где  $\tau$  — характерное время рассматриваемого процесса), вообще говоря, многобольшим единицы.

Чтобы исследовать динамику потенциального электрического поля и его взаимодействия с вихревым, удобно перейти в явном виде к уравнениям для плотности объёмного заряда и магнитного поля, применяя операции и  $\operatorname{rot}$  к уравнению (1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho + \rho \mathbf{v} = D \Delta \rho - \frac{\sigma}{c\varepsilon} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \nu_m \Delta \mathbf{H} - \left( 1 + \frac{\chi}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + \\ + \frac{c\chi}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = \frac{c}{\sigma} \operatorname{rot} \rho \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$  — магнитная вязкость,  $\rho$  и  $\mathbf{E}$  связаны соотношением:

$$\varepsilon \mathbf{E} = 4\pi\rho - \frac{\chi}{c} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad (4)$$

В уравнении для плотности заряда роль источника играет слагаемое  $-\frac{\sigma}{c\varepsilon} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ , показывающее, что вихревое течение слабопроводящей жидкости в магнитном поле способствует формированию нескомпенсированного электрического заряда. Этот факт объясняется, по существу, действием силы Лоренца, приводящей к уходу зарядов из той области течения, в которой значение ротора скорости среды максимально. При наличии заданных сторонних ЭДС неэлектромагнитной природы в уравнения (2)–(4) должны быть включены, вообще говоря, дополнительные сторонние токи и заряды. Их наличие, однако, в тех или иных конкретных задачах может быть учтено с помощью задания соответствующих граничных условий.

Уравнение (3) для магнитного поля, в свою очередь, отличается от известного МГД уравнения слагаемыми, учитывающими вклад конвективного тока, тока смещения и движения поляризованной среды в генерацию

магнитного поля. Относительная величина третьего и четвёртого слагаемых в уравнении (3) определяется параметром  $(vL/\nu_m) \left(1 + \frac{\chi}{4\pi\sigma T}\right)$ , где  $v$  и  $L$  — характерные значения скорости и пространственного масштаба задачи. В неполяризуемой среде этот параметр представляет собой магнитное число Рейнольдса  $Re_m = vL/\nu_m$ . Как уже отмечалось выше, для МГД наиболее характерен случай  $Re_m \gg 1$ , когда диффузией силовых линий магнитного поля можно пренебречь, и они оказываются замороженными в среде. В рассматриваемом здесь случае плохо проводящей среды, движущейся с нерелятивистской скоростью, напротив, практически всегда можно считать  $Re_m \ll 1$ , так что диффузионным слагаемым пренебрегать нельзя. Роль членов, пропорциональных  $\chi$ , существенно зависит от характера решаемой задачи (стационарность, линейность, наличие внешних полей и т.д.) Применительно к задачам физики атмосферы их, как правило, можно не учитывать.

Для получения полной системы нужно дополнить уравнения (2)–(4) уравнениями движения среды, её непрерывности и уравнением состояния. Два последних имеют вид:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_a \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

$$P = P(\rho_a, T), \quad (6)$$

где  $\rho_a$ ,  $P$  и  $T$  — плотность, температура и давление среды. В уравнении движения

$$\rho_a \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_a (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f}^{em} + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (7)$$

плотность сил, действующих на среду в электромагнитном поле, в наиболее общем виде состоит из двух слагаемых [17, 23]:  $\mathbf{f}_i^{em} = \mathbf{f}_i^{(1)} + \mathbf{f}_i^{(2)}$ , первое из которых соответствует плотности сил, действующих на свободные заряды и токи:

$$\mathbf{f}^{(1)} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}], \quad (8)$$

а второе отвечает пондеромоторным силам, учитывающим диэлектрические и магнитные свойства вещества, для жидких и газообразных сред принимая вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2)} = & -\frac{1}{8\pi} (E^2 \nabla \epsilon + H^2 \nabla \mu) + \nabla \left[ \rho_a \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_a} \right)_T \frac{E^2}{8\pi} + \rho_a \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho_a} \right)_T \frac{H^2}{8\pi} \right] + \\ & + \frac{(\epsilon \mu - 1)}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Последнее слагаемое в выражении (9), называемое силой Абрагама, в медленно меняющихся полях, как правило, можно не учитывать. Производные  $\epsilon$  и  $\mu$  по плотности вычисляются при постоянной температуре. Уравнения (2)–(7) составляют полную систему уравнений электромагнитной гидродинамики, которую, в принципе, нужно дополнить уравнением переноса тепла. В простейшем случае его можно заменить уравнением сохранения энтропии  $\frac{dS}{dt} = 0$ , т.е. считать движение адиабатическим.

При написании уравнений МГД в уравнении движения обычно полагают  $\mathbf{f}^{\text{em}} = c^{-1}[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ , выражая затем ток через ротор напряжённости магнитного поля ( $\mu = 1$ ):

$$\mathbf{f}^{\text{em}} = \mathbf{f}^A = \frac{1}{4\pi}[\text{rot}\mathbf{H} \times \mathbf{H}] = -\nabla \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}. \quad (10)$$

Для нас, однако, наибольший интерес представляют ситуации, в которых существенную роль играет учёт в формуле (8) слагаемого  $\rho\mathbf{E}$ , обусловленного действием электростатических сил на нескомпенсированные объёмные заряды. Что касается выражения для силы Ампера в формуле (8), то плотность тока в задачах ЭГД зачастую оказывается удобным записывать в явном виде, например:

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} + \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right). \quad (11)$$

В последнем случае, пренебрегая вязкостью среды и диффузией заряда, уравнение движения запишем в виде:

$$\rho_a \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_a (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla P + \rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + \frac{\sigma}{c}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + \frac{\sigma}{c^2}[[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \times \mathbf{H}]. \quad (12)$$

При отсутствии внешнего магнитного поля уравнение движения (7), с учётом соотношения  $\rho_a \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_a} \right)_T = \epsilon - 1$ , используемого обычно для жидких и газообразных диэлектриков, и без учёта вязкости принимает вид:

$$\rho_a \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_a (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla P + \rho\mathbf{E} - \frac{1}{8\pi}\nabla E^2 + \frac{\epsilon}{4\pi}(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}. \quad (13)$$

Заметим, что уравнение движения (13) эквивалентно закону сохранения импульса, в который, наряду с гидродинамическим тензором плотности потока импульса  $\rho_a v_i v_k + P\delta_{ik}$ , входит максвелловский тензор напряжений  $\frac{E^2}{8\pi}\delta_{ik} - \frac{\epsilon}{4\pi}E_i E_k$ . И в тензор напряжений, и в формулу для плотности энергии среды  $\frac{1}{2}\rho_a v^2 + \rho_a \epsilon_T + \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$  (где  $\epsilon_T$  — внутренняя энергия единицы массы жидкости) в данном случае входят слагаемые, связанные с наличием только электрического поля. Индуцируемое движением среды

магнитное поле  $H$  мало по сравнению с электрическим, так как из уравнений Максвелла следует:  $H \sim \frac{v}{c} E \ll E$ . Если  $L$  и  $\tau$  — характерные для рассматриваемого движения пространственный и временной масштабы, то, согласно уравнению (5),  $L \sim v\tau$ . Оценка, основанная на уравнении (13), даёт:  $\rho_a v / \tau \sim \epsilon E^2 / L$ , что приводит к ограничению на величину электрического поля  $\epsilon E^2 \sim \rho_a v^2 \ll \rho_a c^2$ , аналогичному ограничению на величину магнитного поля в магнитной гидродинамике [17].

Таким образом, условия применимости уравнений ЭГД (2), (5), (6), (13) аналогичны соответствующим условиям для МГД — изучаются низкочастотные крупномасштабные процессы в проводящей среде, движущейся с нерелятивистской скоростью; но вместо магнитного в эти условия входит электрическое поле, которое здесь много больше магнитного.

Ниже мы рассмотрим несколько простых модельных задач, основываясь на приведённых в данном разделе уравнениях.

## АНАЛИЗ ПРОСТЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

### 1. Неустойчивость слабопроводящей среды в скрещённых электрическом и магнитном полях

В качестве примера ламинарного электрического динамо рассмотрим слабопроводящую среду, находящуюся в однородных скрещённых электрическом и магнитном полях. В стационарном состоянии наличие электрического поля обуславливает ток  $\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0$ , разряжающий “конденсатор”, в котором находится среда. Можно считать, что поле  $\mathbf{E}_0$  поддерживается источником стороннего тока  $\mathbf{j}_{ex} = -\mathbf{j}_0$ , либо рассматривать процессы с характерными временами, много меньшими времени разрядки  $(4\pi\sigma)^{-1}$ . При наличии тока  $\mathbf{j}_0$  на элемент среды действует сила Ампера  $\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_0 \times \mathbf{H}_0]$ , т.е. в декартовой системе координат с осями  $y$  и  $z$ , направленными вдоль  $\mathbf{H}_0$  и  $\mathbf{E}_0$  соответственно, эта сила имеет только  $x$ -составляющую  $f_x = -\frac{1}{c} \sigma E_0 H_0$ , которая в стационаре должна быть скомпенсирована градиентом давления  $p_0 = \frac{\sigma x}{c} E_0 H_0$ .

На фоне данного состояния рассмотрим эволюцию вихревых возмущений скорости среды вида  $v_z = v e^{i(kx - \omega t)}$ . Согласно уравнению непрерывности заряда, заданное распределение скорости ведёт к возмущению плотности заряда  $\rho'$ :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + 4\pi\sigma\rho' = D\Delta\rho' - \frac{\sigma}{c} \mathbf{H}_0 \text{rot} v. \quad (14)$$

Полагая  $\rho' = \rho e^{i(kx - \omega t)}$ , для амплитуды возмущений  $\rho$  находим

$$\rho' = ik \frac{v}{c} H_0 (-i\omega + 4\pi\sigma + Dk^2)^{-1}. \quad (15)$$

Возмущения плотности заряда, в свою очередь, связаны с возмущениями скорости посредством уравнения движения среды:

$$\rho_a \frac{\partial v_z}{\partial t} = \rho' E_0, \quad (16)$$

откуда имеем дисперсионное уравнение

$$-\omega \rho_a v = k \frac{v}{c} E_0 H_0 (-i\omega + 4\pi\sigma + Dk^2). \quad (17)$$

Обозначая  $v_a^2 = E_0 H_0 / \rho_a$ , получим:

$$(-i\omega + 4\pi\sigma + Dk^2)\omega + k\sigma \frac{v_a^2}{c} = 0. \quad (18)$$

Пренебрегая диффузией, решение этого дисперсионного уравнения можно записать в виде:

$$\omega = -2\pi i\sigma \pm \left( -4\pi^2\sigma^2 - ik\sigma \frac{v_a^2}{c} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Рассмотрим два предельных случая соотношения параметров  $k$  и  $4\pi^2\sigma c/v_a^2$ . В случае  $kv_a^2 \ll 4\pi^2\sigma c$  одно решение  $\omega_1 \simeq -4\pi\sigma i + \frac{kv_a^2}{4\pi c}$  описывает быстро затухающие возмущения, а другое  $\omega_2 \simeq -\frac{kv_a^2}{4\pi c}$  — медленную волну, распространяющуюся без дисперсии вдоль оси  $x$  со скоростью  $v = v_a \left( \frac{v_a}{4\pi c} \right)$ .

В противоположном предельном случае мелкомасштабных возмущений  $kv_a^2 \gg 4\pi^2\sigma c$  существует два неустойчивых решения:

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}} v_a \sqrt{\frac{k\sigma}{c}}, \quad (20)$$

описывающих периодическую неустойчивость с инкрементом  $\gamma = v_a \left( \frac{k\sigma}{2c} \right)^{(1/2)}$ . Условием применимости полученного выражения является неравенство  $\gamma \gg 4\pi\sigma$ , накладывающее следующее требование на величину полей:  $E_0 H_0 \gg 8\pi c \rho_a \sigma \lambda$ , где  $\lambda = 4\pi/k$  — масштаб возмущений. Оценивая  $v_a$  для приземного слоя атмосферы, получаем величину порядка дрейфовой скорости ионов  $v_a \simeq 1$  см/с, слишком малую для реализации неустойчивости. Чтобы могла реализоваться неустойчивость рассматриваемого вида при заданном пространственном масштабе  $\lambda \simeq 1$  см и заданной проводимости порядка проводимости приземного слоя, нужно обеспечить  $v_a \sim (8\pi\sigma c \lambda)^{1/2} \simeq 10^2$  м/с, т.е. увеличить произведение  $E_0 H_0$  на 8 порядков по сравнению со средним значением этого параметра в приземном слое. В принципе, эта задача осуществима в лабораторных условиях.

## 2. Волны в униполярно заряженной среде

Рассмотрим распространение звука в слабопроводящей среде, содержащей равномерно распределённый пространственный заряд плотности  $\rho_0$ . Задание  $\rho_0 = \text{const}$  не определяет однозначно распределение электрического поля. Будем рассматривать для простоты одномерную задачу, считая  $dE_0/dz = 4\pi\rho_0$ . Таким образом, стационарное состояние описывается уравнением:

$$\rho_0 E_0 = \frac{dp_0}{dz}, \quad (21)$$

которое можно переписать в виде:

$$p_0 - \frac{E_0^2}{8\pi} = \text{const}. \quad (22)$$

Данное условие является своеобразным аналогом известного условия сохранения равновесных конфигураций магнитного поля и плазмы в магнитной гидродинамике.

Исследуем малые возмущения плотности и давления ( $\rho_a = \rho_{a0} + \rho'_a$ ;  $p = p_0 + p'$ ), связанные при условии постоянства энтропии условием  $p' = u_0^2 \rho'_a$ , где  $u_0^2 = (\partial p / \partial \rho_a)_s$  — квадрат обычной скорости звука в данной среде. Считая возмущение скорости  $v$  малой величиной такого же порядка, что и возмущения плотности и давления, из уравнения непрерывности (5) имеем:  $\mathbf{v} = -\frac{\partial \rho'_a}{\partial t} / \rho_{a0}$  (масштаб рассматриваемых возмущений мал по сравнению с масштабом изменения равновесных распределений  $p_0$  и  $\rho_0$ ). Последнее соотношение показывает, что в силу уравнения непрерывности заряда возмущения плотности и давления среды приводят к возмущениям объёмной плотности заряда:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + 4\pi\sigma\rho' = -\rho_0\mathbf{v} = \frac{\rho_0}{\rho_{a0}} \frac{\partial \rho'_a}{\partial t}. \quad (23)$$

Принимая во внимание уравнение движения для малых возмущений

$$\rho_{a0} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \rho' \mathbf{E}_0 + \rho_0 \mathbf{E}', \quad (24)$$

получаем следующее уравнение, связывающее  $\rho'$  и  $\rho'_a$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_0^2 \Delta \right) \rho'_a + E_0 \frac{\partial \rho'}{\partial z} + 8\pi\rho_0\rho' = 0. \quad (25)$$

Из уравнений (23) и (25) для волн, распространяющихся поперёк внешнего электрического поля  $\rho, \rho'_a \sim \exp(i(k_x x - \omega t))$ , получаем:

$$i\omega^3 - 4\pi\sigma\omega^2 - i\omega \left( u_0^2 k^2 + \frac{4\pi\rho_0^2}{\rho_{a0}} \right) + 4\pi\sigma u_0^2 k^2 = 0. \quad (26)$$



В предельном случае  $4\pi\sigma \rightarrow 0$  решение дисперсионного уравнения имеет вид:

$$\omega = \left(u_0^2 k^2 + \omega_e^2\right)^{1/2}, \quad (27)$$

где  $\omega_e^2 = 4\pi\rho_0^2/\rho_{a0}$ . Это означает, что в области малых  $k \lesssim \omega_e/u_0$  имеет место дисперсия звука, обусловленная наличием нескомпенсированного заряда, распределённого в среде.

Легко видеть, что дисперсия звука должна носить анизотропный характер, связанный с наличием выделенного направления  $\mathbf{E}_0$ . Так, для продольного распространения мелкомасштабных возмущений плотности среды и плотности заряда дисперсионное уравнение существенно отличается от случая поперечного распространения:

$$i\omega^3 - 4\pi\sigma(\omega^2 - u_0^2 k^2) - i\omega u_0^2 k^2 + a\omega k = 0, \quad (28)$$

где  $a = \frac{\rho_0 E_0}{\rho_{a0}} = \rho_{a0}^{-1} d\rho_0/dz$ . В области малых  $k \ll \omega/u_0$  это уравнение

совпадает с уравнением (18) с заменой  $\frac{\sigma v_a^2}{c}$  на  $a$ , и его анализ совпадает с вышеприведённым. В наиболее интересном случае  $ka \gg 4\pi^2\sigma^2$  возникают неустойчивые решения  $\omega_{1,2} = \frac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}}(ka)^{1/2}$  с инкрементом

$\gamma = \left(\frac{ak}{2}\right)^{1/2}$ . Так как мы предположили  $k \ll \frac{u_0}{\omega}$ , это условие совместимо

с неравенством  $k \gg 4\pi^2\sigma^2/a$  только в случае достаточно высоких полей:

$a = \frac{\rho_0 E_0}{\rho_{a0}} \gg 4\pi\sigma u_0$ . В грозовом облаке частота  $\omega_e$  может достигать

$30 \text{ с}^{-1}$ , если предположить  $\rho_0 \simeq 10^{-4} \text{ Кл/м}^3$ . Тогда дисперсия звука при поперечном распространении имеет место, если  $k \lesssim \omega_e/u_0 \simeq 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ , т.е. при  $\lambda \gtrsim 10^2 \text{ м}$ . Неравенство  $\omega_e > 4\pi\sigma$  в условиях грозового облака легко достижимо.

Рассмотрим теперь пример волновых движений заряженной среды, не связанных с возмущением её плотности. Предположим, что среда с нескомпенсированным объёмным зарядом постоянной плотности  $\rho_0$  находится в однородном внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}_0$ . Внешнее электрическое поле пусть направлено вдоль магнитного. Рассмотрим возмущения скорости несжимаемой жидкости, лежащие в плоскости  $xy$ , перпендикулярной магнитному полю (направленному вдоль оси  $z$ ). При условиях  $\omega \gg 4\pi\sigma$ ,  $\omega \gg c\rho_0/H_0$  (где  $\omega$  — характерная частота процесса) уравнение для возмущений скорости запишется в виде:

$$\rho_{a0} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\rho_0}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] - \nabla P'. \quad (29)$$

Вводя частоту  $\Omega = \frac{\rho_0 H_0}{\rho_{a0} c}$ , являющуюся аналогом ларморовской частоты, и беря ротор от обеих частей уравнения (29), приходим к следую-

щему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \Omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (30)$$

Легко видеть, что это уравнение в точности совпадает с уравнением, описывающим инерционные волны во вращающейся жидкости [24]. Дисперсионное уравнение для возмущений вида  $\mathbf{v} = \mathbf{A} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ , следующее из уравнения (30), гласит:

$$\omega = \Omega \frac{k_z}{k} = \Omega \cos \Theta, \quad (31)$$

где  $\Theta$  — угол между  $\mathbf{H}_0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Таким образом, исследуемые циркулярные волны распространяются под фиксированным углом к магнитному полю  $\Theta = \arcsin \frac{\omega}{\Omega}$  и возбуждаются на любых частотах  $\omega < \Omega$ . Легко проверить, что эти волны обладают круговой поляризацией: в каждой точке пространства вектор  $\mathbf{v}$  вращается со временем, оставаясь постоянным по величине. Разумеется, для существования циркулярных волн в униполярно заряженной среде необходимо:  $\Omega > 4\pi\sigma$ . Полагая  $H_0 \simeq 10^3$  Э и  $\rho_0 \simeq 10^{-1}$  Кл/м<sup>3</sup> (что достижимо в лабораторных ЭГД установках), получим  $\Omega \simeq 10^{-2}$  с<sup>-1</sup>, что может оказаться достаточным для их проявления.

### 3. Волны и ЭГД течения в слабопроводящих диэлектриках

Исследование ЭГД течений слабопроводящих сред в настоящее время является задачей, далёкой от завершения, хотя анализ многих вопросов, особенно для одномерных задач, в литературе имеется (см. [3, 4] и цитированную там литературу). Мы не будем приводить здесь результаты решения конкретных задач. Отметим лишь, что можно выделить два качественно различных режима одномерного ЭГД-течения.

1. Внешнее электрическое поле сообщает движущимся зарядам дополнительную энергию, которая передаётся нейтральным частицам. Этот режим характерен для задач электрической конвекции, ионно-конвекционного насоса и т.д. Поэтому в литературе по электроэнергетике такой режим называется насосным.

2. Внешнее электрическое поле в области течения тормозит движение зарядов. В этом случае энергия нейтральной среды сообщается заряженной компоненте, переходя далее в энергию электрического поля. Такой режим называется генераторным. Условия реализации указанных режимов ЭГД-течений в атмосфере, например, могут быть самыми разнообразными.

Отметим, что в ряде работ, опубликованных в недавнее время, были предприняты попытки сформулировать систему уравнений ЭГД диэлектрической жидкости, которые следует признать неудачными [25–28]. Так,

в работах [27, 28] рассматривалась система уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \frac{\chi}{4\pi\rho_a} b(\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E} + \nabla \left( \frac{P}{\rho_a} + \frac{\chi}{4\pi\rho_a} a E^2 \right) = \frac{\eta}{\rho_a} \Delta \mathbf{v}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{E} - d(\mathbf{E} \nabla) \mathbf{v} = -4\pi\sigma \mathbf{E}, \quad (33)$$

где  $a, b, d$  — “некоторые безразмерные константы, зависящие от конкретной сплошной среды”. Уравнение (33) для электрического поля было получено в работе [27] (а в работе [28] обобщено на случай  $\sigma \neq 0$ ), исходя из предположения, что в системе отсчёта, где элемент движущейся жидкости покоится, магнитное поле  $\mathbf{H}' = 0$ . Отсюда для лабораторной системы отсчёта сразу получается:  $\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{D}] = \frac{\varepsilon}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]$ . Это предположение, однако, не обосновано. Разумеется, в покоящейся слабопроводящей среде релаксация заряда не сопровождается генерацией магнитного поля. Но при наличии градиента скорости магнитное поле возбуждается. Приведём самый простой пример: пусть имеется струя слабопроводящей жидкости, внутри которой  $\rho = \text{const} > 0$ . Очевидно, что эта струя, представляющая собой конвективный прямолинейный ток, возбуждает в окружающей покоящейся жидкости магнитное поле. Возбуждаемое магнитное поле по величине такого же порядка, как учитываемое в уравнении (33) поле  $\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]$ , и пренебрегать им нельзя.

Легко показать и формально, что уравнение (38) противоречит системе уравнений Максвелла. Действительно, как следует из соотношения  $\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]$  и уравнения  $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ , электрическое поле в уравнении (33) нужно считать потенциальным, ибо  $|\text{rot} \mathbf{E}| \simeq \frac{v^2 \varepsilon}{c^2 v \tau}$ . С другой стороны, в рамках системы (32), (33) легко может быть проанализирована, например, задача о плоском течении вязкой слабопроводящей среды между двумя параллельными твёрдыми плоскостями (или просто вблизи твёрдой плоскости). Этот анализ показывает, что при достаточно больших значениях электрического числа Рейнольдса  $Re_e = vL/D$  ( $D$  — коэффициент диффузии заряда) вихревая компонента электрического поля  $E_x(z)$  на некоторой высоте  $z$  много больше потенциального  $E_z$ , граничные значения которого заданы. Ясно, что получением этого вывода мы обязаны неверному уравнению (33).

Так как основное уравнение в работах [27, 28] неверно, то ряд последующих выводов этих работ не точен. В работе [28] утверждается, в частности, что в диэлектрике существует поперечная “электрозвуковая” волна со скоростью распространения  $[(\varepsilon - 1)bdE/4\pi] \cdot (4\pi\rho_a)^{-1/2}$ , аналогичная волне Альфвена в магнитной гидродинамике. Для того, чтобы

проверить это утверждение, получим уравнение для возмущений скорости и поля в поляризуемой жидкости во внешнем электрическом поле, которое следует из уравнения (1) при  $D = 0$ :

$$c^2 (\Delta \mathbf{E} - \nabla \mathbf{E}) = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (4\pi \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{v} \mathbf{E}) - \chi \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]. \quad (34)$$

При получении уравнения (34) члены более высокого порядка малости по  $(v/c)$  были отброшены. Вместе с уравнениями движения и непрерывности среды уравнение (34) позволяет проанализировать задачу о распространении малых возмущений на фоне стационарного состояния  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\rho_a = \text{const}$ . Мы ограничимся рассмотрением возмущений, поляризованных в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{E}_0$ , в несжимаемой жидкости:  $\mathbf{v} = 0$ ,  $v_{1z} = E_{1z} = 0$ ,  $\mathbf{E}_{1\perp} = 0$ . Уравнение для возмущений электрического поля примет вид:

$$c^2 \Delta \mathbf{E}_{1\perp} - \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{1\perp}}{\partial t^2} + (\varepsilon - 1) \frac{\varepsilon E_0^2}{4\pi \rho_a} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{1\perp}}{\partial z^2} = 0. \quad (35)$$

Ясно, что последнее слагаемое в этом уравнении существенно только в том случае, когда скорость  $v_E = [(\varepsilon - 1)E_0^2/4\pi\rho_a]^{1/2}$  больше или порядка скорости распространения электромагнитных волн в диэлектрике  $c\sqrt{\varepsilon}$ . Даже в сегнетоэлектриках ни при каких разумных полях это условие не выполняется.

### ВОЗМОЖНО ЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ДИНАМО? (СВЯЗЬ ЭГД И МГД)

В рассмотренных выше задачах существенную роль играли возмущения скорости среды. Чтобы ответить на вопрос о возможности эффективного взаимодействия между потенциальным и вихревым полем в движущейся слабопроводящей среде, рассмотрим случай, когда движение среды можно считать заданным. При  $\chi = 0$ ,  $Re_m \ll 1$  система уравнений, связывающая плотность заряда и магнитное поле, имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 4\pi \sigma \rho + \rho \mathbf{v} - D \Delta \rho = q - \frac{\sigma}{c} \mathbf{H} \text{rot} \mathbf{v}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi \sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{4\pi \sigma} \Delta \mathbf{H} = \frac{c}{\sigma} \text{rot} \rho \mathbf{v}. \quad (37)$$

Из уравнения (36) очевидно, что характерное время процесса взаимодействия  $\tau$  должно быть мало по сравнению с временем релаксации заряда  $\tau_p = (4\pi\sigma)^{-1}$ , обратно пропорциональным проводимости. С другой стороны, чтобы роль магнитного поля была существенной, время  $\tau$  не должно

превышать время диффузии магнитного поля  $\tau_m = 4\pi\sigma L^2/c^2$ , пропорциональное проводимости ( $L$  — характерный масштаб процесса). Кривые  $\tau_p(\sigma)$  и  $\tau_m(\sigma)$  пересекаются в точке  $\sigma_* = c/4\pi L$ , которая соответствует характерному времени  $\tau_* = L/c$ . Следовательно, для выполнения обоих указанных условий  $\tau \ll \tau_p$  и  $\tau \ll \tau_m$  должно быть  $\tau < L/c$ , что невозможно, если  $\tau \simeq L/v$ . Поэтому взаимодействие вихревого и потенциального полей в медленно движущейся среде не может быть эффективным. Исключение, в принципе, мог бы представлять случай, когда масштабы изменения магнитного поля и поля скоростей движущейся среды сильно отличаются. В качестве простейшего примера, иллюстрирующего это обстоятельство, рассмотрим сдвиговый поток слабопроводящей среды, скорость которой имеет единственную компоненту, заданную в виде  $v_x(z)$ , так что ротор скорости имеет только  $y$ -компоненту:  $(\text{rot}v)_y = \partial v_x/\partial z$ . Тогда уравнение для напряжённости магнитного поля в проекции на ось  $y$  запишется в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta H + \frac{c}{\sigma} \frac{\partial \rho v_x}{\partial z}. \quad (38)$$

В уравнении для плотности заряда положим  $\rho v = 0$  и пренебрежём диффузией:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 4\pi\sigma\rho = -\frac{\sigma}{c} H \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (39)$$

Будем искать решение системы уравнений (34), (35) в виде  $H = H'e^{-i\omega t}$ ,  $\rho = \rho'e^{-i\omega t}$ , считая  $H$  и  $\rho$  однородными осциллирующими полями. Зависимость  $v_x$  от  $z$  будем считать линейной:  $v_x = \alpha z$ . Дисперсионное уравнение принимает вид:

$$i\omega^3 - 8\pi\sigma\omega^2 - i(4\pi\sigma)^2\omega + \alpha^2 4\pi\sigma = 0. \quad (40)$$

Решение этого уравнения зависит от соотношения параметров  $4\pi\sigma$  и  $\alpha$ . При условии  $\alpha \ll 4\pi\sigma$  имеем:  $\omega = -i\alpha^2/4\pi\sigma$ , т.е.  $H, \rho \propto \exp[-\alpha^2 t/(4\pi\sigma)]$ . Полученное решение описывает затухание полей  $H$  и  $\rho$  с характерным временем  $T \simeq 4\pi\sigma/\alpha^2$ , много большим времени релаксации  $(4\pi\sigma)^{-1}$ .

В противоположном предельном случае  $\alpha \gg 4\pi\sigma$  ищем решение в виде  $\omega = \omega_c + \delta\omega$ , где  $|\omega_c| \gg |\delta\omega|$ , а  $\omega_c$  удовлетворяет уравнению:  $\omega_c^3 = i4\pi\sigma\alpha^2$ . Это уравнение имеет 3 корня в комплексной плоскости, два из которых описывают экспоненциальный рост полей во времени:  $\omega_c = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2} (4\pi\sigma\alpha^2)^{1/3}$ . С учётом поправки получим:  $\rho, H \propto \exp\left\{\left[\frac{1}{2}(4\pi\sigma\alpha^2)^{1/3} - \frac{8\pi\sigma}{3}\right]t \mp \frac{i\sqrt{3}}{2}(4\pi\sigma\alpha^2)^{1/3}t\right\}$ . Данное решение описывает периодическую неустойчивость с инкрементом  $\gamma \simeq \frac{1}{2}(4\pi\sigma\alpha^2)^{1/3}$ . Несколько расширяя область применимости полученных

результатов, условие возникновения неустойчивости с учётом поправки к инкременту запишем в виде:  $\alpha > \alpha_c = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} 4\pi\sigma$ .

Для пренебрежения диффузионным слагаемым в уравнении (38) необходимо:  $L \gg cT$ , где  $L$  — характерный масштаб изменения магнитного поля. Так как мы получили  $T \sim (4\pi\sigma\alpha^2)^{-1/3}$ , должно быть  $L \gg L_c = c(4\pi\sigma\alpha^2)^{-1/3}$ , что представляется нереальным, так как  $v_x(L_c) = (\alpha/4\pi\sigma)^{1/3}c$  превышает скорость света. Рассмотренный пример, с учётом сделанных оговорок, иллюстрирует невозможность эффективного взаимодействия потенциального и вихревого полей в медленно движущейся среде. В результате ЭГД и МГД явления оказываются разделёнными: эволюцию объёмного заряда можно исследовать в рамках уравнения (2) с заданным магнитным полем (см. также [17]).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показывает вышеприведённое обсуждение, проблема электрического динамо чрезвычайно разнообразна и существенно отличается от проблемы магнитного динамо. Это отличие, в первую очередь, связано со скалярностью квазиэлектростатических полей, важной ролью нескомпенсированного пространственного электрического заряда и обусловленного им потенциального электрического поля в среде. Именно присутствие последнего приводит к появлению качественно новых эффектов: специфическим видам неустойчивостей и вихревых движений, анизотропной дисперсии звука и т.д. В то же время ЭГД эффекты носят довольно тонкий характер, и попытки провести прямую аналогию между электрическим и магнитным динамо могут приводить к серьёзным ошибкам. По-видимому, с точки зрения формулировки основных принципов теория электрического динамо делает лишь первые шаги.

Рассмотрённые в данной работе новые эффекты, связанные с анализом волновых движений, влияния магнитного поля, развитием волновых неустойчивостей, требуют достаточно больших значений электрического (и магнитного) полей, которые в естественных условиях достижимы лишь в особых ситуациях. Например, “электрическая дисперсия” звука может проявляться для разумных пространственных масштабов  $\lambda_s \simeq 10^2$  м лишь при плотности объёмного заряда  $\rho_0 \simeq 10^{-4}$  Кл/м<sup>3</sup>, достижимой только в условиях мощных грозовых облаков или в специальных лабораторных установках. В то же время можно надеяться, что электрическое динамо будет работать и в условиях “хорошей погоды” для других (крупномасштабных) собственных мод атмосферы – внутренних гравитационных и планетарных волн, давая вклад в мезомасштабные и планетарные явления глобальной электрической цепи. Другой обширной областью приложения рассматриваемых эффектов может быть астрофизика применительно к

условиям планет, а также планетарных и межзвёздных облаков. Указанные вопросы представляются актуальными и ждут своего рассмотрения. Несомненный интерес, на наш взгляд, представляют и исследование общих принципов электрического динамо в рамках вышеприведённой системы уравнений однокомпонентной электрогидродинамики, и различные её обобщения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980. 335 с.
2. Вайнштейн С. Н., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. Турбулентное динамо в астрофизике. — М.: Наука, 1980. 352 с.
3. Остроумов Г. А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. — М.: Наука, 1979. 320 с.
4. Рубашов И. Б., Бортников Ю. С. Электрогазодинамика. — М.: Атомиздат, 1971. 166 с.
5. Krehbiel P. R. — In: The Earth's Electrical Environment /Eds. E. P. Krider and R. G. Roble. — Washington, D. C.: National Academy Press, 1986. P. 90.
6. Krider E. P. // J. Geophys. Res., 1989. V. 94. P. 13145.
7. Krider E. P., Murphy M. C. et al. — In: Proceedings of 10th Int. Conference on Atmospheric Electricity. — Osaka, Japan, 1996. P. 124.
8. Marshall T. C. and Rust W. D. // Bull. Amer. Meteorol. Soc., 1993. V. 74. P. 2159.
9. Hale L. C., Croskey C. L., and Mitchell J. D. // Geophys. Res. Lett., 1981. V. 8. P. 927.
10. Holzworth R. H., Kelley M. C. et al. // J. Geophys. Res., 1985. V. 90. P. 9824.
11. Boeck W. L. and Vaughah O. H. // Geophys. Res. Lett., 1992. V. 19. P. 99.
12. Anisimov S. V., Bakastov S. S., and Mareev E. A. // J. Geophys. Res., 1994. V. 99. P. 10603.
13. Chu J. H. and Lin I. // Phys. Rev. Lett., 1994. V. 72. № 25. P. 4009.
14. Thomas H. et al. // Phys. Rev. Lett., 1994. V. 73. № 5. P. 652.
15. Goertz C. K. // Rev. Geophys., 1989. V. 27. № 2. P. 271.
16. Praburam G. and Goree J. // Phys. Plasmas., 1996. V. 3. № 4. P. 1212.
17. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1992. 662 с.
18. Israel H. Atmospheric Electricity. V. 2. — Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1973. P. 408.
19. Hoppel W. A., Anderson R. V., and Willett J. C. — In: The Earth's Electrical Environment /Eds. E. P. Krider and R. G. Roble. — Washington, D. C.: National Academy Press, 1986. P. 149.

20. Мареев Е. А., Сорокин А. Е. и Трахтенгерц В. Ю. Эффекты коллективной зарядки в неравновесной аэрозольной плазме. // ЖЭТФ, 1996 (в печати).
21. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1975. 256 с.
22. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. 527 с.
23. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989. 504 с.
24. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. С. 65.
25. De V. R. // Phys. Fluids, 1980. V. 23. № 2. P. 408.
26. De V. R. // Astrophys. Space Sci., 1988. V. 144. P. 99.
27. Дубровский В. А. // ДАН, 1984. Т. 279. № 4. С. 857.
28. Дубровский В. А., Русаков Н. Н. // ДАН, 1986. Т. 306. № 1. С. 64.

Институт прикладной физики  
РАН, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию  
30 мая 1996 г.

#### ON A PROBLEM OF ELECTRICAL DYNAMO

*E. A. Mareev, V. Yu. Trakhtengerts*

In the frames of one-component electrohydrodynamics (EHD) there has been given a general formulation of the problem on generation of the quasi-stationary electric field and spatial charge in a moving weak-conducting medium. An analogy has been analysed with the problem of magnetic dynamo. We have investigated the anisotropic dispersion of acoustic waves propagating in a unipolarly charged medium and the propagation of circular waves in the unipolar charged medium in the presence of an external magnetic field. The problem of EHD current formation in dielectrics is discussed. We have considered a possibility of interaction of potential and vortical electrical fields in a slowly moving conducting medium.