

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XXXIX N 4

Нижний Новгород

1996

С о д е р ж а н и е

- Гайкович К. П.** Вероятностный подход к результатам совместного решения уравнений переноса излучения и теплопроводности в радиотермометрии 399
- Иванченко И. В.** Экспериментальное исследование электронно-волновых процессов в неавтономном квазиоптическом генераторе, работающем на эффекте Смита-Парселла 414
- Manning R. M.** Beam wave propagation within the second Rytov perturbation approximation 423
- Степанов Н. С.** Об адиабатической трансформации спектральных и энергетических характеристик волн в одномерных параметрических системах 436
- Матевосян Г. Г., Нерсисян Г. Б.** К теории поляризацонных процессов, возникающих при прохождении быстрой заряженной частицы через плазменный слой 446
- Милантьев В. П.** Подавление радиационного предела при авторезонансном ускорении заряженных частиц с помощью электростатического поля 458
- Гульельми А. В., Похотелов О. А., Фейгин Ф. З.** Перераспределение магнитосферных ионов под действием силы Миллера 464
- Байкова А. Т.** Решение фазовой проблемы на основе метода максимальной энтропии 472
- Катков В. Ю., Фурашов Н. И.** К вопросу об аномалиях и роли водных кластеров в атмосферном поглощении миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн 483

Польдин О. В., Силаев А. М. Алгоритм оптимальной фильтрации случайных марковских сигналов с оцениванием амплитуд импульсных возмущений	496
--	-----

УДК 621.371:526.2+551.526+528.811+551.501

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕЗУЛЬТАТАМ СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В РАДИОТЕРМОМЕТРИИ

К.П.Гайкович

На основе результатов совместного решения уравнений переноса теплового радиоизлучения и температуропроводности развита статистическая теория температурного распределения и теплового радиоизлучения среды (полупространства). Получены соотношения, выражающих ковариационные функции профиля температуры и яркостной температуры через статистические параметры температуры на границе полупространства, которая рассматривается в данном случае как случайная стационарная функция времени. Анализируется специфика регрессионных оценок температуры по тепловому излучению, вытекающая из полученных выражений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ [1-6] была развита теория формирования теплового радиоизлучения среды (полупространства), температурное распределение в которой формируется под влиянием динамики граничных условий - температуры поверхности или теплового потока через поверхность этой среды. На основе совместного решения уравнений переноса теплового излучения и теплопроводности оказалось возможным получить соотношения, выражающие яркостную температуру теплового излучения среды в виде интеграла по времени от этих граничных условий [1-3], а позднее удалось обратить эти уравнения [4-6] и получить соотношения, выражающие граничные условия и распределение (профиль) температуры среды через эволюцию ее яркостной температуры. Таким образом, удалось получить корректное решение задачи одноволнового радиометрического дистанционного зондирования температурного профиля среды.

Эти результаты были использованы в [4-6] для радиометрических исследований суточной тепловой динамики грунта (использовались измерения динамики яркостных температур теплового радиоизлучения грунта на длинах волн 0,8 и 3 см), а также пограничного слоя атмосферы (использовались измерения собственного теплового радиоизлучения атмосферы на длине волны 0,5 см в центре полосы поглощения кислорода).

Однако не всегда возможно и удобно проводить многочасовые измерения динамики теплового излучения для контроля профиля температуры среды. Существуют и применяются также методы восстановления температурного профиля по спектру или угловой зависимости яркостных температур, измеренных в произвольный момент времени. Эти методы связаны с решением некорректного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода для яркостной температуры, которое невозможно без использования априорной информации о свойствах искомой функции, таких как информация о гладкости, дифференцируемости или принадлежности $T(z)$ к компактному классу (методы А.Н.Тихонова) [7-11], либо информации статистического характера [12-14]. Применение статистических методов связано с использованием ковариационных функций и статистических параметров теплового радиоизлучения и температурного профиля. На практике используются эмпирические статистические характеристики, определяемые из результатов измерений. Например, для восстановления профиля температуры атмосферы используются ансамбли аэрозондовых данных, полученных в пунктах метеорологического зондирования [12-14]. При решении задач радиотермометрии пограничного слоя атмосферы и грунта необходимые данные получить трудно, поэтому в этих случаях применялись методы А.Н.Тихонова [7-11]. Однако результаты совместного решения уравнений переноса излучения и теплопроводности могут быть использованы и для теоретического определения необходимых корреляционных функций, если рассматривать граничное условие для температуры как случайную функцию времени.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сначала однородное полупространство $z \leq 0$ с постоянными параметрами: коэффициентом теплопроводности a^2 и коэффициентом поглощения теплового радиоизлучения γ . Если задано граничное условие для температуры $T(0,t) = T_0(t)$, то температурное распределение полупространства как функция глубины и времени определяется из уравнения теплопроводности :

$$T(z,t) = \int_{-\infty}^t T_0(\tau) \frac{e^{-z}}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau. \quad (1)$$

Яркостная температура восходящего теплового излучения на длине волны λ определяется из уравнения переноса излучения :

$$T_{\text{я}}(t) = \int_{-\infty}^0 T(z) \gamma(\lambda) e^{\gamma(\lambda)z} dz, \quad (2)$$

где предполагается для простоты, что коэффициент отражения полупространства равен нулю.

Совместное решение (1) и (2) позволяет выразить яркостную температуру через граничное условие для температуры:

(3)

$$T_{\text{я}}(t) = \int_{-\infty}^t T_0(\tau) \left[\frac{\gamma a}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - (\gamma a)^2 \operatorname{erfc}(\gamma a \sqrt{t-\tau}) e^{(\gamma a)^2(t-\tau)} \right] d\tau.$$

В случае неоднородной среды аналогичное выражение было получено в [6] на основе использования свойств интеграла Дюамеля:

$$T_{\text{я}}(t) = \int_{-\infty}^t T_0(\tau) \frac{\partial}{\partial t} T_{\text{я}}^1(t-\tau) d\tau, \quad (4)$$

где $T_{\text{я}}^1(t-\tau)$ - отклик яркостной температуры на единичный скачок температуры поверхности (граничное условие - функция Хевисайда):

$$T^1(0,t) = 1(t).$$

Решение (3) как уравнения Вольтерра 1-го рода с переменным верхним пределом, полученное в [5,6], имеет вид:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= T_{\text{я}}(t) + \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^t T'_{\text{я}}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = \\ &= T_{\text{я}}(t) + \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^t (T_{\text{я}}(t) - T_{\text{я}}(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановка (5) в (1) дает решение задачи радиотермометрии для однородного полупространства [5,6]:

$$T(z,t) = \int_{-\infty}^t T_{\text{я}}(\tau)(-z) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} +$$

$$+\frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^t T'_{\text{я}}(\tau) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \quad (6)$$

Интегрируя второе слагаемое в (6) по частям, можно получить формулу для определения профиля температуры по эволюции яркостной температуры среды [5,6]:

$$T(z,t) = \int_{-\infty}^t T_{\text{я}}(\tau) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{z^2}{2a^2(t-\tau)} - 1 \right) - z \right] \frac{d\tau}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} \quad (7)$$

Формула (7) справедлива для всех значений z , кроме $z = 0$, при котором невозможно выполнить интегрирование по частям в (6). Это важное для дальнейшего изложения свойство не было отмечено в предыдущих работах.

Приведенные соотношения позволяют получить еще один весьма интересный результат - формулу, выражающую яркостную температуру на одной длине волны через эволюцию яркостной температуры на другой длине волны. Для этого нужно в формулу (3) для яркостной температуры $T_{\text{я}2}$ на длине волны λ_2 подставить профиль температуры в виде (6), выраженный через эволюцию яркостной температуры $T_{\text{я}1}$ на длине волны λ_1 . Меняя местами порядок интегрирования и вычисляя в явном виде внутренний интеграл по z , имеем искомую формулу:

$$T_{\text{я}2}(t) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} T_{\text{я}1}(t) + \int_{-\infty}^t T_{\text{я}1}(z) \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \left\{ \gamma_2 a \left[\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \gamma_2 a e^{(\gamma_2 a)^2(t-\tau)} \operatorname{erfc}(\gamma_2 a \sqrt{t-\tau}) \right] \right\} d\tau, \quad (8)$$

где γ_1 и γ_2 - коэффициенты поглощения на длинах волн λ_1 и λ_2 соответственно. Интересно отметить, что использование формулы (7) вместо (6) приводит к неверному результату, хотя соотношение (7) несправедливо всего лишь в одной точке $z = 0$, (из-за расходимости в точке $z = 0$ подынтегрального выражения).

При $\gamma_1 = \gamma_2$ из (8) получается очевидный результат $T_{\text{я}2} = T_{\text{я}1}$. В случае, когда $\gamma_2 \ll \gamma_1$ в (8) исчезает первое слагаемое и получается формула, аналогичная соотношению (3), где роль температуры

поверхности играет яркостная температура $T_{я1}$. Этот результат физически совершенно ясен, поскольку толщина скин-слоя $d_2 = 1/\gamma_2$, в котором формируется тепловое излучение на длине волны λ_2 , много больше толщины d_1 на длине волны λ_1 , и яркостная температура $T_{я1}$ для яркостной температуры $T_{я2}$ действительно играет роль поверхностной температуры.

Соотношение (8) можно использовать для определения параметров среды по данным одновременных измерений теплового излучения на двух и более длинах волн.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛООВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Пусть теперь граничное условие для температуры - случайная стационарная функция с заданным средним значением $\langle T_0 \rangle$, среднеквадратичным отклонением σ_{T_0} и автоковариационной функцией $B_{T_0 T_0}(\tau) = \langle (T_0(t) - \langle T_0 \rangle)(T_0(t+\tau) - \langle T_0 \rangle) \rangle$, которая с целью получения наглядных физических результатов будет задаваться экспоненциальной функцией вида

$$B_{T_0 T_0}(\tau) = \sigma_{T_0}^2 \exp\left(-\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|\right), \quad (9)$$

где τ_0 - время корреляции.

Задачей последующего анализа будет определение корреляционных функций яркостных температур теплового излучения через параметры среды и статистические параметры температуры. Очевидно, что для средних значений имеет место $\langle T(z) \rangle = \langle T_0 \rangle$, $\langle T_{я} \rangle = \langle T_0 \rangle$, поскольку все приведенные выше интегральные соотношения нормированы на единицу.

Если температура на границе полупространства - случайная функция, то приведенные выше соотношения, поскольку они являются линейными интегральными выражениями, позволяют развить статистическую теорию случайных составляющих температурного распределения и теплового излучения среды на основе известного подхода в теории стационарных случайных процессов для линейных систем, приводящего к соотношениям Винера-Ли. Приведенные ниже результаты определяют статистические параметры температурного распределения и теплового излучения среды через статистические параметры температуры ее поверхности. Эти формулы легко получаются из приведенных выше выражений путем изменения порядка операций усреднения и интегрирования с заменой переменных $\tau = t - \tau$ и

представлены в форме, которая справедлива как для положительного, так для отрицательного полупространства. Отметим также используемое ниже свойство ковариационных функций $B_{yx}(-\tau) = B_{xy}(\tau)$.

Так, из (1) для ковариационной функции между поверхностной температурой T_0 и температурой $T(z)$ на уровне z следует

$$\begin{aligned} B_{T_0 T}(\tau, z) &= \int_0^{\infty} B_{T_0 T_0}(\tau - \tau') K(\tau') d\tau' = \\ &= \int_0^{\infty} B_{T_0 T_0}(\tau - \tau') \frac{|z|}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau'}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $K(\tau')$ - ядро интеграла в (1). Отсюда имеем выражение для дисперсии

$$\begin{aligned} \sigma_T^2(z) &= \int_0^{\infty} B_{T_0 T}(\tau) K(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B_{T_0 T_0}(\tau - \tau') K(\tau') K(\tau) d\tau d\tau' = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B_{T_0 T_0}(\tau - \tau') \frac{z^2}{4\pi a^2} e^{-\frac{z^2}{4a^2}(\frac{1}{\tau'} + \frac{1}{\tau})} \frac{d\tau d\tau'}{(\tau\tau')^{3/2}}, \end{aligned} \quad (11)$$

а также для автоковариационной матрицы температуры на уровне z

$$\begin{aligned} B_{TT}(\tau, z) &= \int_0^{\infty} B_{T_0 T}(\tau' - \tau) K(\tau') d\tau' = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B_{T_0 T_0}(\tau' - \tau'' - \tau) K(\tau') K(\tau'') d\tau' d\tau'' = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B_{T_0 T_0}(\tau' - \tau'' - \tau) \frac{z^2}{4\pi a^2} e^{-\frac{z^2}{4a^2}(\frac{1}{\tau'} + \frac{1}{\tau''})} \frac{d\tau' d\tau''}{(\tau'\tau'')^{3/2}} \end{aligned} \quad (12)$$

и для межуровневой ковариационной матрицы между температурой T_1 на уровне z_1 и температурой T_2 на уровне z_2 (T_2 в данном случае играет в ядре интеграла (1) роль поверхностной температуры):

$$B_{T_2 T_1}(z_2, z_1, \tau) = \int_0^{\infty} B_{T_2 T_2}(\tau - \tau') K(\tau') d\tau' = \quad (13)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\tau' d\tau'' d\tau'''}{(\tau'\tau''\tau''')^{3/2}} \cdot B_{T_0 T_0} (\tau' - \tau'' + \tau''' - \tau) \frac{z_2^2 |z_1 - z_2|}{8\pi^{3/2} a^3} e^{-\frac{z_2^2}{4a^2} \left(\frac{1}{\tau'} + \frac{1}{\tau''}\right) - \frac{(z_1 - z_2)^2}{4a^2} \frac{1}{\tau'''}}$$

Для ковариационной функции между поверхностной температурой среды и яркостной температурой ее теплового радиоизлучения справедливо выражение:

$$B_{T_0 T_{Я}} (\tau) = \int_0^\infty B_{T_0 T_0} (\tau - \tau') K_1(\tau') d\tau' = \int_0^\infty B_{T_0 T_0} (\tau - \tau') \frac{\gamma a}{\sqrt{\pi \tau'}} [1 - \sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau'} e^{(\gamma a)^2 \tau'} \operatorname{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau'})] d\tau', \tag{14}$$

где K_1 - ядро интеграла в (3) или в (4). Из (14) следуют соотношения для дисперсии

$$\begin{aligned} \sigma_{T_{Я}}^2 &= \int_0^\infty B_{T_0 T_{Я}} (\tau) K_1(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty B_{T_0 T_{Я}} (\tau - \tau') K_1(\tau') K_1(\tau) d\tau d\tau' = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty d\tau d\tau' B_{T_0 T_0} (\tau - \tau') \frac{(\gamma a)^2}{\pi \sqrt{\tau \tau'}} \cdot \\ &\cdot [1 - \sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau'} e^{(\gamma a)^2 \tau'} \operatorname{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau'})][1 - \sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau} e^{(\gamma a)^2 \tau} \operatorname{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau})]. \end{aligned} \tag{15}$$

и автоковариационной функции яркостной температуры

$$\begin{aligned} B_{T_{Я} T_{Я}} (\tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty B_{T_{Я} T_0} (\tau - \tau') K_1(\tau') d\tau' = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty B_{T_0 T_0} (\tau' - \tau'' - \tau) K(\tau') K(\tau'') d\tau' d\tau'' = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty d\tau' d\tau'' B_{T_0 T_0} (\tau' - \tau'' - \tau) \frac{(\gamma a)^2}{\pi \sqrt{\tau' \tau''}} \cdot \\ &\cdot [1 - \sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau'} e^{(\gamma a)^2 \tau'} \operatorname{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau'})][1 - \sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau''} e^{(\gamma a)^2 \tau''} \operatorname{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau''})] \end{aligned} \tag{16}$$

Соотношение (16) можно использовать, чтобы получить выражение для ковариационной матрицы между яркостными температурами $T_{я_1}$ и $T_{я_2}$ на двух различных длинах волн λ_1 и λ_2 из формулы (8):

$$\begin{aligned} B_{T_{я_1} T_{я_2}}(\lambda_1, \lambda_2, \tau) &= \int_0^\infty B_{T_{я_1} T_{я_1}}(\tau - \tau') K_1(\tau') d\tau' = & (17) \\ &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} B_{T_{я_1} T_{я_1}}(\tau) + (1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}) \cdot \\ &\cdot \int_0^\infty B_{T_{я_1} T_{я_1}}(\tau - \tau') \frac{\gamma_2 a}{\sqrt{\pi \tau'}} [1 - \sqrt{\pi}(\gamma_2 a) \sqrt{\tau'} e^{(\gamma_2 a)^2 \tau'} \operatorname{erfc}(\gamma_2 a \sqrt{\tau'})] d\tau', \end{aligned}$$

а также, чтобы получить формулу для ковариационной матрицы между яркостной температурой и температурой на уровне z из соотношения (6):

$$\begin{aligned} B_{T_{я} T}(\tau, z) &= \int_0^\infty B_{T_{я} T_{я}}(\tau - \tau') \frac{|z|}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{z^2}{4a^2 \tau'}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} + \\ &+ \frac{1}{\gamma a} \int_0^\infty \frac{\partial B_{T_{я} T_{я}}}{\partial \tau'}(\tau - \tau') e^{-\frac{z^2}{4a^2 \tau'}} \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi} (\tau')^{1/2}} \end{aligned} \quad (18)$$

4. РЕГРЕССИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ. ОЦЕНКИ ДЛЯ РАДИОТЕРМОМЕТРИИ ГРУНТА И АТМОСФЕРЫ

Полученные соотношения представляют интерес с точки зрения широко используемых статистических методов определения профиля температуры по тепловому радиоизлучению или поверхностной температуре [12-14], поскольку ранее параметры, рассмотренные в предыдущем разделе, определялись только эмпирически на основе статистического анализа измерений. Полученные результаты позволяют вычислять необходимые величины по формулам. Более того, эти формулы проясняют физический смысл величин.

Соотношение (10) легко использовать для регрессионной оценки профиля температуры по поверхностному значению :

$$T(z, t) = \langle T_0 \rangle + \frac{B_{T_0 T}(\tau, z)}{\sigma_{T_0}^2} (T_0(t - \tau) - \langle T_0 \rangle) \quad (19)$$

Аналогично, профиль температуры можно оценить по значению яркостной температуры среды, используя (14):

$$T(z, t) = \langle T_0 \rangle + \frac{B_{T_y} T(\tau, z)}{\sigma_{T_y}^2} (T_y(t - \tau) - \langle T_0 \rangle) \quad (20)$$

или использовать более сложные методы многомерной регрессии или статистической регуляризации [12-14]. Естественно, и другие приведенные выше ковариационные функции можно использовать таким же образом для оценок соответствующих величин. Известно, что погрешность $\sigma_{y/x}$ регрессионной оценки величины y по величине x

определяется коэффициентом корреляции $R_{xy} = \frac{B_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ между этими

величинами и значениями дисперсий величин, т.е. может быть вычислена на основе приведенных выражений:

$$\sigma_{y/x}^2 = \sigma_y^2 (1 - R_{xy}^2) \quad (21)$$

Из выражений для функций корреляции видно, что эти функции не симметричны относительно значения $\tau = 0$, и, более того, не достигают в этой точке максимума, т.е. прогноз в будущее не симметричен относительно сдвига времени по отношению к прогнозу в прошлое, а прогноз профиля по текущим значениям приземной или яркостной температуры, который известен в литературе как "оптимальная экстраполяция", на самом деле не является оптимальным. Из (21) можно видеть, что оптимальной является оценка прогнозируемой величины в момент t по значению соответствующего предиктора в момент $(t - \tau_m)$ такой, что для значения τ_m функция $R_{xy}(\tau)$ и, соответственно, $B_{xy}(\tau)$ достигают максимума. Условием, из которого определяется значение τ_m является, естественно, $\frac{dB(\tau)}{d\tau} = 0$, и соответствующие уравнения легко получаются из приведенных выражений для ковариационных функций. Конкретно для прогноза температурного профиля каждому значению z будет соответствовать свое значение $\tau_m(z)$ и оптимальная экстраполяция получится при прогнозе по значению поверхностной температуры не в тот же момент времени, а по значению, которое было ранее, причем, очевидно, что величина сдвига времени возрастает с ростом z , т.е. $\tau_m(z)$ - монотонно возрастающая функция.

Физически такое свойство регрессионной оценки вполне ясно - температурное возмущение на поверхности оказывает влияние на температуру более глубоких слоев не мгновенно, а через механизм теплопроводности, с запаздыванием, которое возрастает с ростом глубины.

Можно предположить, что и в эмпирических ковариационных функциях температуры реальной атмосферы, физические условия которой не вполне соответствуют рассматриваемой модели, максимальная корреляция также достигается со значениями приземной температуры в прошлом, особенно, если речь идет о пограничном слое. Очевидно также, что приведенные соотношения позволяют получать статистические оценки как значений рассматриваемой величины в будущем ($\tau > 0$) и в текущем времени ($\tau = 0$), так и значений, которые были в прошлом ($\tau \leq 0$).

Для экспоненциальной ковариационной функции вида (9) из приведенных выше формул могут быть получены некоторые простые аналитические результаты. В частности, из (10) при $\tau \leq 0$ следует

$$B_{T_0 T}(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{T_0}^2 |z|}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau} - \frac{|\tau - \tau'|}{\tau_0}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} = \sigma_{T_0}^2 e^{-\frac{|z|}{a\sqrt{\tau_0}} - \left| \frac{\tau}{\tau_0} \right|}, \quad (22)$$

а для $\tau > 0$

$$B_{T_0 T}(\tau) = \frac{\sigma_{T_0}^2 |z|}{2\sqrt{\pi a}} \left[\int_0^{\tau} e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau} + \frac{\tau'}{\tau_0}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} + \right. \\ \left. + \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau} - \frac{\tau'}{\tau_0}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} \cdot e^{\frac{\tau}{\tau_0}} \right]. \quad (22a)$$

В частности,

$$B_{T_0 T}(0) = \sigma_{T_0}^2 e^{-\frac{|z|}{a\sqrt{\tau_0}}}. \quad (23)$$

Видно, что существует характерное расстояние корреляции температурного профиля с поверхностным значением $\Lambda = a\sqrt{\tau_0}$, которое может служить одним из определений пограничного слоя

атмосферы. Для рассматриваемого случая уравнение для определения величины сдвига времени оптимальной экстраполяции $\tau_m(z)$ имеет вид:

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau} - \frac{\tau'}{\tau_0}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} - \int_0^{\tau} e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau} + \frac{\tau'}{\tau_0}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} = 0. \quad (24)$$

Из (14) следует

$$B_{T_0 T_{Я}}(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{T_0}^2 \gamma a}{\sqrt{\pi \tau'}} [1 - \sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau'} e^{(\gamma a)^2 \tau'} \operatorname{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau'})] e^{-\frac{|\tau - \tau'|}{\tau_0}} d\tau'. \quad (25)$$

Вычисляя интеграл в (25), имеем при $\tau \leq 0$:

$$B_{T_0 T_{Я}}(\tau) = \sigma_{T_0}^2 \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\Gamma}}}{1 + \sqrt{\frac{\tau_0}{\Gamma}}} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_0}}, \quad (26)$$

а при $\tau > 0$

$$B_{T_0 T_{Я}}(\tau) = \sigma_{T_0}^2 \left\{ e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} + \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \frac{1}{(\gamma a)^2 + \frac{1}{\tau_0}} \left[\gamma a \sqrt{\tau} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\tau}{\tau_0}\right) + e^{-[(\gamma a)^2 + \frac{1}{\tau_0}]\tau} \operatorname{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau}) - 1 \right] - \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \frac{1}{(\gamma a)^2 - \frac{1}{\tau_0}} \left[\gamma a \sqrt{\tau_0} \operatorname{erfc}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - e^{-[(\gamma a)^2 - \frac{1}{\tau_0}]\tau} \operatorname{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau}) \right] \right\}, \quad (26a)$$

где ${}_1F_1$ - вырожденная гипергеометрическая функция, $\Gamma = 1/(\gamma a)^2$ - характерный масштаб времени, определяющий прогревание среды на толщину скин-слоя $d = 1/\gamma$. Из (26) следует, что

$$B_{T_0 T_J}(0) = \sigma_{T_0}^2 \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\Gamma}}}{1 + \sqrt{\frac{\tau_0}{\Gamma}}} \quad (27)$$

Видно, что корреляция яркостной температуры среды с температурой на ее поверхности определяется отношением времени корреляции поверхностной температуры и времени прогревания на глубину скин-слоя для соответствующей длины волны. При $\tau_0/\Gamma \gg 1$ $B_{T_0 T_J}(0) = \sigma_{T_0}^2$, а при $\tau_0/\Gamma \ll 1$ $B_{T_0 T_J}(0) = 0$. Результат совершенно ясен. Если среда успевает нагреваться и охлаждаться на глубину скин-слоя за время корреляции поверхностной температуры, то яркостная температура полностью коррелирована с поверхностной; в противном случае вариации этих величин некоррелированы.

Рассматривая вопрос о возможности применения развитой теории к исследованиям атмосферы и грунта, необходимо отметить следующее. Для случая грунта (особенно однородного) можно ожидать, что случайные составляющие температурного распределения и теплового радиоизлучения, которые накладываются на периодические суточные и сезонные колебания, могут быть в основном правильно описаны этой теорией. В атмосфере же случайная составляющая температурного профиля может формироваться не только под влиянием теплопроводности от поверхности, но и процессами адвекции, выделения скрытой теплоты, переноса и поглощения ИК-излучения. Кроме того, для атмосферы, как правило, не выполнено условие однородности среды и стационарности ее параметров (особенно для коэффициента турбулентной теплопроводности). Однако, в пограничном слое атмосферы для излучения в сильных линиях поглощения, например, в линии кислорода на частоте 60 ГГц, где атмосфера однородна по коэффициенту поглощения, развитая статистическая теория может иногда быть использована, на что указывает успешное применение исходных формул в [5,6]. Можно надеяться также (хотя это, разумеется, подлежит проверке), что вертикальный масштаб корреляции температуры Λ , определяемый выражением (23), сохраняет смысл и для неоднородной и нестационарной по параметрам атмосферы, если вертикальный перенос тепла определяется турбулентной диффузией и если использовать среднее значение коэффициента турбулентной теплопроводности в рассматриваемом слое. Выводы об условиях и

границах применимости теории можно получить путем сравнения результатов теоретических расчетов и эмпирических ковариационных функций.

Приведем некоторые оценки для упомянутых сред, основанные на полученных соотношениях.

Время корреляции поверхностной температуры составляет обычно около трех суток, т.е. $\tau_0 \cong 2,6 \cdot 10^5$ с (хотя, строго говоря, вариации температуры - это нестационарный процесс, структурная функция которого возрастает и за пределами этого времени). В радиометрических исследованиях динамики температуры грунта и пограничного слоя атмосферы, представленных в [5,6], параметры сред имели следующие значения: для грунта $a^2 = 1,0 \cdot 10^{-3}$ см²/с, $d = 1/\gamma \cong \lambda$ (λ - длина волны), параметр времени $\Gamma = 1/(\gamma a)^2$ составлял от 10 мин на $\lambda = 0,8$ см до 50 час на $\lambda = 13$ см, характерная глубина корреляции в (20) $\Lambda = a \sqrt{\tau_0} \cong 16$ см; для атмосферы $a^2 = 7,0 \cdot 10^3$ см²/с, $d = 3,0 \cdot 10^4 \sin\theta$ см (θ - угол места, под которым принимается излучение атмосферы), параметр Γ составлял от 16 мин для угла места измерений 5° до 35 часов для зенитного направления, высота корреляции $\Lambda \cong 430$ м.

В естественных условиях для различных типов грунта рассматриваемые параметры принимают значения в пределах $a^2 = 10^{-3}$ - 10^{-2} см²/с, $d = 0,1 - 15\lambda$, время Γ соответственно может составлять от долей секунды для водной поверхности в ММ диапазоне до нескольких лет для ледников в ДМ диапазоне, а глубина корреляции может изменяться в пределах $\Lambda = 15 - 60$ см. В атмосфере $a^2 = 10^3 - 10^6$ см²/с, $d = 3,0 \cdot 10^4 \sin\theta$ см (при измерениях на частоте 60 ГГц), характерное время прогревания скин-слоя Γ может меняться от 1 мин на угле места 5° до 10 суток при измерениях в зенит, масштаб корреляции температуры с ее приземным значением (толщина пограничного слоя в рассматриваемом смысле) может принимать значения $\Lambda = 100$ м - 3 км.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получила дальнейшее развитие теория совместного решения уравнения переноса теплового излучения и теплопроводности. Получено соотношение между яркостными температурами среды на двух различных длинах волн. Вероятностный подход к результатам позволил развить статистическую теорию температурного распределения и теплового радиоизлучения среды (полупространства). Выведены соотношения для совместных и автоковариационных функций температурного профиля и яркостных температур теплового радиоизлучения. Используя численные методы, развитую теорию можно будет применить в полном объеме как для теоретических оценок, так и

для определения ряда параметров среды и ее теплового излучения по экспериментальным данным. Возможность вычисления среднеквадратичных вариаций профиля температуры и яркостных температур по статистическим параметрам температуры поверхности. Интересные результаты могут быть получены путем сравнения статистических оценок профиля температуры с восстановлением на основе универсального метода Тихонова [10-11], что позволит прояснить область применимости теории в различных условиях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект 96-02-16514-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайкович К.П., Резник А.Н. // Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 33. N 11. С. 1343.
2. Гайкович К.П. // Исследование Земли из Космоса, 1990. N 6. С. 71.
3. Gaikovich K.P., Reznik A.N., Troitskii R.V. // 11-th Annual Int. Symp. Geosci. and Remote Sensing (IGARSS-91), Helsinki, University of Technologi, Espoo, Finland, 1991. V. 3. P. 1195.
4. Гайкович К.П. // Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. N 1. С. 16.
5. Гайкович К.П. // Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. N 10. С. 912.
6. Gaikovich K.P. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, 1994. V. 32. No. 4. P. 885.
7. Гайкович К.П., Резник А.Н., Троицкий Р.В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 33. N 12. С. 1467.
8. Гайкович К.П., Резник А.Н., Сумин М.И., Троицкий Р.В. // Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1987. Т. 23. N 7. С. 761
9. Гайкович К.П., Сумин М.И., Троицкий Р.В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1988. Т. 31. N 9. С. 1104.
10. Гайкович К.П., Кадыгров Е.Н., Косов А.С.; Троицкий А.В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1992. Т. 35. N 2. С. 130.
11. Gaikovich K.P., Gromov V.D., Kadygrov E.N., Kosov A.S., Troitsky A.V. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, 1993. V. 31. No. 1. P. 116.
12. Gaikovich K.P., Markina N.N., Naumov A.P., et al. // Int. Journal of Remote Sensing, 1983. V. 4. No.2. P. 419.
13. Westwater E.R., Sweezy W.B., McMillin L.M., Dean C. // J. Climate and Meteorology, 1984. V. 23. No. 5. P. 689.
14. Aškne J., Skoog G., Winberg E. // Int. Journal of Remote Sensing, 1985. V. 6. No. 7. P. 1241.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
12 января 1995 г.

**STOCHASTIC APPROACH TO RESULTS OF SIMULTANEOUS SOLUTION OF
EMISSION TRANSFER AND THERMAL CONDUCTIVITY EQUATIONS**

K.P. Gaikovich

On the basis of results of simultaneous solution of thermal emission transfer and thermal conductivity equations the stochastic theory of temperature distribution and thermal radioemission of the medium (half-space) has been developed. Expressions for covariance functions of temperature profile and brightness temperature as functions of statistical parameters of half-space surface temperature, which was considered as a random function of time, have been obtained. The analysis of temperature regression evaluations by thermal emission on the basis of expressions obtained is given.

УДК 621.385.6

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕАВТОНОМНОМ КВАЗИОПТИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ, РАБОТАЮЩЕМ НА ЭФФЕКТЕ СМИТА-ПАРСЕЛЛА

И. В. Иванченко

Изучаются процессы взаимодействия электронного потока с СВЧ-полем внешнего воздействия в квазиоптическом электровакуумном приборе с распределенным взаимодействием. Отличительной особенностью его конструкции является электродинамическая система контура обратной связи в виде неустойчивого двухзеркального открытого резонатора (ОР), а также наличие двух автономных элементов ввода-вывода СВЧ энергии. Проведены исследования режимов усиления при различных уровнях мощности внешнего сигнала. Показана возможность наблюдения сценариев изменения динамических параметров электронного пучка путем изменения фазы дифрагирующего электромагнитного поля. Измерения проведены в диапазоне частот $68 \div 73$ ГГц.

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальное изучение эффекта Смита-Парселла в коротковолновой области миллиметрового диапазона длин волн впервые позволило наблюдать и анализировать тонкую пространственную структуру дифракционного излучения (ДИ) [1, 2]. В результате у исследователей появился новый эффективный метод классификации электронных волн, присутствующих в электронном пучке, по измеряемым характеристикам ДИ. Было установлено, что наряду с излучением в H -плоскости относительно дифракционной решетки (ДР) существует интенсивное излучение в ортогональной ей E -плоскости. Полученные результаты послужили основой при создании нового типа генератора с электродинамической системой в виде неустойчивого ОР и с двумя пространственно разделенными, волноводными элементами ввода и вывода СВЧ энергии. Данная конструкция прибора может рассматриваться как одна из модификаций генератора дифракционного излучения (ГДИ) [3], демонстрирующая новые возможности этого класса приборов.

1. КОНСТРУКЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотренные ранее волновые модели ДИ для системы периодическая структура – диэлектрический волновод позволили установить наличие в E -плоскости остронаправленного интенсивного излучения [4], которое наблюдалось и в условиях реального физического эксперимента с электронным пучком [2].

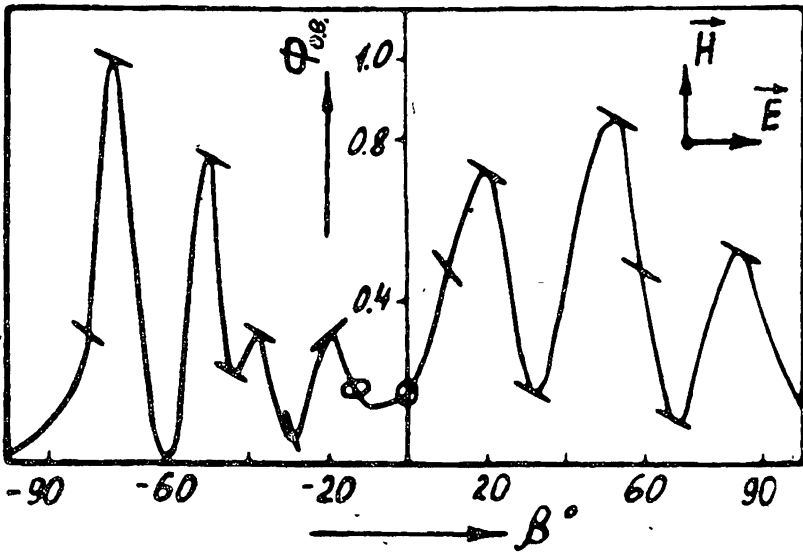


Рис. 1.

На рис. 1 приведена диаграмма направленности (ДН), снятая в E -плоскости, проходящей через центр ДР. Приемная рупорная антенна была изотропна к поляризации падающей волны и соединялась с детекторной секцией посредством волноводного вращающегося сочленения с погрешностью определения угла поворота $\pm 0,5^\circ$. В динамическом диапазоне сигнала ≈ 35 дБ излучение в максимумах ДН является линейно-поляризованным. Причиной наблюдаемого поворота плоскости поляризации на угол $\approx 20^\circ$ относительно H -поляризации может являться некоторая разъюстировка ленточного электронного потока относительно ламелей ДР, что, в свою очередь, и приводит к асимметрии в распределении поля ДИ (см. рис. 1). При этом резкое изменение характеристик поляризации в близоосевой области ДИ обусловлено наличием поляризационно вырожденных синхронных электронных волн (СЭВ) [2].

На основе проведенных исследований и анализа полученных результатов был создан генератор, схематично изображенный на рис. 2. Неустойчивый ОР образован нижним зеркалом в виде уголкового отражателя с ДР в его центральной части (период решетки $\ell = 0,4$ мм, длина $L = 32$ мм,

ширина $h = 10$ мм) и расположенным под углом верхним плоским зеркалом. Выбранная геометрия колебательного контура позволяет, с одной стороны, расширить рабочую полосу частот в режиме усиления внешнего сигнала, а с другой стороны, снизить вероятность проявления регенеративных эффектов.

С целью максимального использования пространства взаимодействия и эффективного отбора энергии элементы ввода-вывода выполнены в виде согласующих рупорных переходов, оканчивающихся волноводами стандартного сечения $3,6 \times 1,8$ мм². В соответствии с видом ДН (см. рис. 1) были выбраны следующие углы ввода $\alpha_1 = 25^\circ$ и вывода $\alpha_2 = 20^\circ$ СВЧ энергии (см. рис. 2).

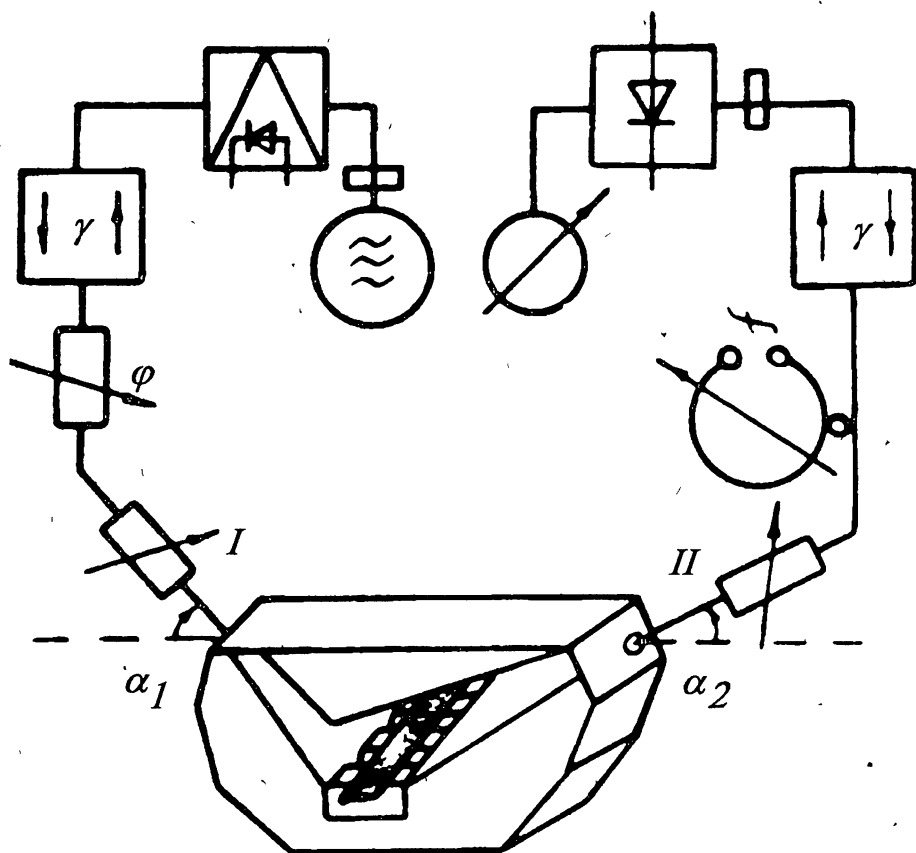


Рис. 2.

С помощью панорамного измерителя типа Р2-69 проводились исследования спектральных характеристик “холодного” прибора. Было установлено, что в частотном диапазоне $55 \div 76$ ГГц $K_{СВ} \leq 2,2$ со стороны входа и ≤ 3 со стороны выхода прибора. При этом в диапазоне $55 \div 67$ ГГц спектр достаточно густой и существенно разрежен в диапа-

зоне $69 \div 76$ ГГц. Прямые потери прибора при подаче внешнего сигнала в плечо I (см. рис. 2) не превышают 5 дБ при коэффициенте отражения по мощности $\Gamma = 0,33$. При наличии электронного пучка в спектре автогенератора присутствуют зоны ГДИ, а при ускоряющих напряжениях $U_0 > 2,5$ кВ зоны генерации соответствуют режимам ЛОВ. Величина пускового тока $J_{ст.} = 52$ мА, а уровень выходной мощности $P \simeq 0,8$ Вт на рабочей частоте $f = 71$ ГГц.

2. ПРЕДГЕНЕРАЦИОННЫЙ РЕЖИМ (РЕЖИМ УСИЛЕНИЯ)

Рассмотрим синхронный режим работы прибора ($J_n = J_0/J_{ст.} \leq 1$). Характеристики электронного усилителя зависят от способов подачи внешнего сигнала в колебательную систему. Согласно принятой терминологии [5] описываемый прибор в предгенерационном режиме может классифицироваться как однорезонаторный бездрейфовый усилитель с подачей внешнего сигнала непосредственно в пространство взаимодействия электронного пучка с полем неустойчивого ОР, выполняющего одновременно функции модулятора и системы, обеспечивающей отбор энергии от частиц пучка. Модуляция электронов производится H -поляризованной электромагнитной волной.

Основным физическим параметром, определяющим нелинейность динамической системы данного класса приборов, является ток пучка. Возникающая при определенных условиях нелинейность в движении частиц будет приводить к нарушению динамических характеристик усилителя и, следовательно, к зависимости коэффициента усиления $K_{ус.}$ от мощности входного сигнала. Наиболее ощутимым это проявление следует ожидать в области значений $J_0 \approx J_{ст.}$.

Исследования проводились на экспериментальной установке, блок-схема которой изображена на рис. 2.

На рис. 3 приведены зависимости коэффициентов усиления от нормированного тока пучка. Экспериментально полученные значения $K_{ус.}$ на данном приборе при относительном уровне входной мощности $P_{вх.}/P_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ отмечены темными кружочками. Крестики соответствуют результатам эксперимента для однорезонаторного усилителя на основе колебательной системы ГДИ [6], при $P_{вх.}/P_0 = 1,5 \cdot 10^{-5}$. Как видим, при $J_n \rightarrow 1$, $K_{ус.} \rightarrow \infty$, что является типичным для регенеративного усиления. По мере увеличения входного сигнала характер кривой усиления изменяется (кривая с треугольниками, $P_{вх.}/P_0 = 2,1 \cdot 10^{-4}$).

Полученные зависимости коррелируют с аналогичными зависимостями, рассчитанными для резонансных усилителей с устойчивым ОР [5]. Это дает основание предполагать, что поведение вынужденных колебаний в рассматриваемой динамической системе могут быть описаны следующей системой уравнений:

$$\frac{dF}{d\tau} = [GS_1(F) - 1]F + A \cos(\varphi + \psi), \tag{1}$$

$$\frac{Fd\varphi}{d\tau} = [\delta - GS_2(F)]F - A \sin(\varphi_\psi),$$

где $F(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ — амплитуда и фаза вынужденных колебаний, A и ψ — амплитуда и фаза внешнего воздействия, G — параметр эффективности длительного взаимодействия пучка с полем ОР, $S_1(F)$ и $S_2(F)$ — интегральные амплитудная и частотная колебательные характеристики динамической системы, δ — расстройка собственной частоты “холодного” резонатора относительно несущей частоты усиливаемого колебания.

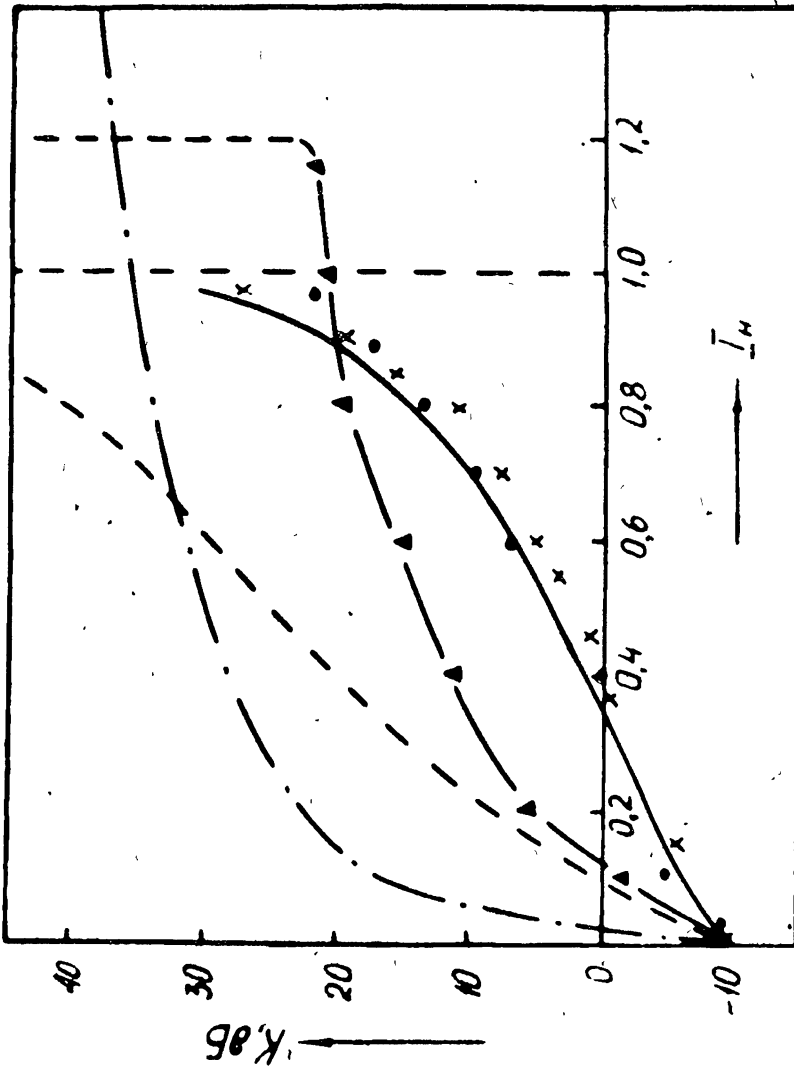


Рис. 3

На рис. 3 сплошной линией показана кривая усиления, полученная из (1) в рамках линейного приближения. Штрих-пунктирная кривая получена в результате точного решения исходной системы уравнений для $P_{\text{вх}}/P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$. Здесь же пунктиром приведена для сравнения теоретическая кривая усиления для усилителя с предварительной модуляцией пучка [5]. В проводимых экспериментах нормирующее значение мощности электронного пучка составляло $P_0 = 90$ Вт.

Проведенные исследования показывают, что при соизмеримых величинах $K_{\text{ус}}$ новый прибор является более широкополосным по сравнению с базовым [6]. Так в линейном режиме усиления при $K_{\text{ус}} = 12$ дБ рабочая полоса частот $\Delta f = 144$ МГц. По мере возрастания $K_{\text{ус}}$ полоса сужается и для $K_{\text{ус}} = 20$ дБ составляет $\Delta f = 95$ МГц. При таких же значениях $K_{\text{ус}}$ в базовом приборе рабочие полосы частот составляют 32 МГц и 15 МГц соответственно.

Анализ хода кривой усиления при большем уровне входного сигнала (кривая с треугольниками на рис. 3) свидетельствует о том, что нелинейность динамической системы в области предельных значений тока пучка приводит к конечным значениям $K_{\text{ус}}$. Более того, наблюдается подавление автоколебаний при $J_0 = J_{\text{ст}}$ и появление генерации при токах $J_0 > J_{\text{ст}}$. В данном случае приращение величины тока пучка составляет $\Delta J_0 = 0,18J_{\text{ст}}$. С физической точки зрения можно говорить о наблюдаемом в интервале $1 \leq J_{\text{н}} \leq 1,18$ переходе от режима усиления к режиму синхронизации внешним сигналом автоколебаний. При этом мощность вынужденных колебаний синхронизированного автогенератора увеличивается на $3 \div 4$ дБ.

3. РЕЖИМ ДВУХКАНАЛЬНОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА

В описываемом электронном приборе внешний сигнал в виде объемной волны падает на ДР с электронным пучком под углом 65° относительно нормали. Подобная ситуация рассматривалась ранее для электронных приборов с другими типами электродинамических систем. Например, в работах [7, 8] была экспериментально показана возможность управления электронно-волновыми процессами с помощью изменения параметров падающей электромагнитной волны. В качестве параметров воздействия выбирались: величина зазора между ДР и диэлектрическим волноводом (прицельный параметр) [7] или расстояние от электронного пучка до источника внешнего сигнала [8] верхних узлов приборов, одновременно выполняющих функцию приемо-передающих антенн. В обоих случаях изменялись углы и фаза дифрагирующей волны, а следовательно, и распределение поля вдоль периодической структуры. Управляющим параметром в новом приборе с неустойчивым ОР может служить фаза объемной волны ψ , входящая в (1). Это становится возможным благодаря

тому, что часть мощности излучения из канала I (см. рис. 2) попадает в канал II, не участвуя в процессе взаимодействия с активным элементом — электронным пучком. Это позволяет использовать данный сигнал в качестве когерентного опорного сигнала. То есть, предлагаемый прибор представляет собой ни что иное, как квазиоптический двухканальный интерферометр, с помощью которого можно наблюдать и анализировать сценарии электронно-волновых процессов (в частности, процессов усиления и поглощения электромагнитной волны) в пространстве взаимодействия.

→ U_0

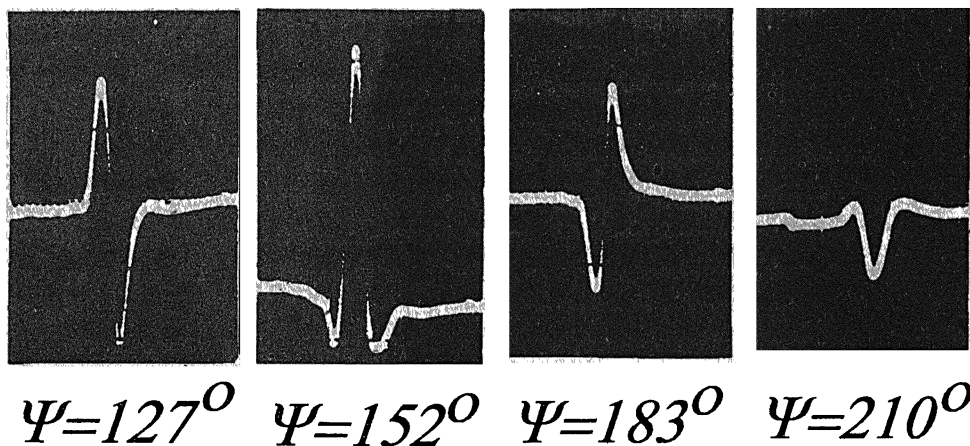


Рис. 4.

На рис. 4 приведены осциллограммы, иллюстрирующие различные фрагменты электронно-волнового взаимодействия при изменении скорости электронов (ускоряющего напряжения U_0) и фазы возбуждающего поля ψ .

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Предлагаемая конструкция электронного прибора при сравнимых коэффициентах усиления внешнего сигнала является более широкополосной по сравнению с базовым ГДИ в недовозбужденном состоянии.
2. Достаточно широкая рабочая полоса частот усилителя обеспечивает более устойчивую работу вблизи предельных значений тока пучка.
3. Показана возможность воздействия внешним управляющим сигналом на величину порогового значения стартового тока.
4. Оригинальная конструкция электродинамической структуры прибора позволяет использовать его в режиме двухканального интерферо-

метра, что открывает новые возможности как для изучения электронно-волновых процессов, протекающих в пространстве взаимодействия, так и создания различных параметрических устройств дифракционной электроники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вертий А. А., Иванченко И. В., Нестеренко А. В., Попенко Н. А., Цвык А. И., Цвык Л. И., Шестопапов В. П. //Изв.вузов. Радиофизика, 1985. Т. 28. № 10. С. 1274.
2. Вертий А. А., Иванченко И. В., Нестеренко А. В., Попенко Н. А., Цвык А. И., Цвык Л. И., Шестопапов В. П. //Изв.вузов. Радиофизика, 1985. Т. 28. № 11. С. 1443.
3. Генераторы дифракционного излучения. /Под ред. Шестопапова В. П. — Киев: Наукова думка, 1991. — 320 с.
4. Шестопапов В. П. Дифракционная электроника. — Харьков: Вища школа, 1976. — 231 с.
5. Ваврив Д. М., Третьяков О. А. Теория резонансных усилителей О-типа. — Киев: Наукова думка, 1989. — 152 с.
6. Корнеенков В. К., Мирошниченко В. С. //Изв.вузов. Радиоэлектроника, 1983. Т. 26. № 3. С. 93.
7. Вертий А. А., Воробьев Г. С., Иванченко И. В. и др. //Изв.вузов. Радиофизика, 1988. Т. 31. № 6. С. 717.
8. Воробьев Г. С., Нестеренко А. В., Цвык А. И. и др. //Изв.вузов. Радиофизика, 1988. Т. 31. № 2. С. 190.

Институт радиофизики и
электроники АН Украины

Поступила в редакцию
30 декабря 1993 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE ELECTRON-WAVE
PROCESSES IN THE NONAUTONOMOUS QUASI-OPTICAL
SMITH-PARCELL AUTOGENERATOR

I. V. Ivanchenko

The interaction processes of the electron beam with the external SHF-signal have been studied in the quasi-optical electrovacuum device with the distributed interaction using Smith-Parcells effect. A feature of the device is the electrodynamic system of the feedback circuit in the form of an unstable two-mirror open resonator and two autonomous elements of the SHF-power input and output. The amplification regimes have been investigated under different power levels of the external signal. It has been shown that it is possible to observe the scenarios of the electron beam dynamic parameter change by means of the phase change of the incident electromagnetic wave. The measurements have been carried out in the frequency range from 68 GHz to 73 GHz.

BEAM WAVE PROPAGATION WITHIN THE SECOND RYTOV PERTURBATION APPROXIMATION

Robert M. Manning

The applicability of the classical Rytov method in statistical wave propagation problems is reconsidered and expanded by demanding results that are of second order in the permittivity fluctuations, rather than limiting them to just the first Rytov perturbation approximation as is traditionally done. It is shown that one must augment the well-known second order statistics (e.g., log-amplitude variance) as calculated from the first Rytov approximation, with first order statistics (e.g., the average log-amplitude) as calculated from the second Rytov approximation. Thus, a complete solution is derived for the second Rytov approximation for general beam wave propagation through turbulent media, the permittivity fluctuations of which are described by the Kolmogorov-Obukhov spectrum. This then allows a complete and consistent treatment that yields the fact that the average log-amplitude is, in the general beam wave case, not equal to the additive inverse of the log-amplitude variance. This gives results from the Rytov method that are then in exact agreement with the corresponding limiting case of strong fluctuation theory, as well as a simplified analytical expression for beam wave broadening, and the correct theoretical explanation of the well-known applicability limit for the Rytov method.

1. INTRODUCTION

In what can now be considered "classical" investigations of beam wave propagation through turbulent media [1-3], solutions of the first order approximation of the Rytov perturbation formulation of the problem were considered. Here, relevant statistical quantities such as log-amplitude and phase fluctuation variances, σ_χ^2 and σ_S^2 , and associated structure functions, D_χ and D_S , of a beam wave were derived and related to the significant parameters characterizing the random propagation medium. These *second-order* statistical quantities are, within the *first* Rytov perturbation approximation, of order $|\bar{\epsilon}|^2$ in the random permittivity $\bar{\epsilon}$ which is taken to be a centered Gaussian random function. However, the first-order statistical quantities, such as the mean of the log-amplitude and phase fluctuation, $\langle \chi \rangle$ and $\langle S \rangle$, are identically equal to zero within the context of the first Rytov perturbation approximation since they are of order $|\bar{\epsilon}|$ and any odd moment of a Gaussian random function is zero. With the exception of one development in which erroneous and incomplete results were obtained [4], this has been taken to be the case even though it has led to theoretically inconsistent results from the point of view of energy conservation [5], which demands, for the cases of plane and

spherical wave propagation considered, that $\langle \chi \rangle = -\sigma_\chi^2$. This situation is the result of the neglect of the second Rytov approximation when considering the first order statistical moments; even though they issue from the second perturbation expansion, they too are of order $|\bar{\epsilon}|^2$ and are, therefore, just as statistically significant as those second-order statistics that were found from the first perturbation expansion.

The recent renewed interest [6] in the Rytov approach to beam wave propagation thus warrants a complete derivation of the first moment of the second Rytov approximation for beam wave propagation in turbulent media characterized by the Kolmogorov-Obukhov power spectrum. Without such results, one does not have a complete description to within the order of $|\bar{\epsilon}|^2$ for beam wave propagation within the context of the Rytov treatment. In fact, it is shown that the relation $\langle \chi \rangle = -\sigma_\chi^2$ does not hold for the general beam wave case. Once this has been accomplished in Section 3, after a brief preliminary review in Section 2, the results will be applied in Section 4 to the average intensity and beam broadening of a beam wave with complete and immediate agreement with known theoretical and experimental results. Finally, the well known limitation $\sigma_\chi^2 \ll 1$ for the use of the first Rytov approximation is replaced with a corresponding limitation for the first and second order approximations that are $\sim |\bar{\epsilon}|^2$ which correctly employs the value of the mean log-amplitude $\langle \chi \rangle$.

2. PRELIMINARIES

The Rytov perturbation expansion of the random electric field $E(\vec{r})$ of a wave propagating in a random medium is of the form [7]

$$E(\vec{r}) = E_0(\vec{r}) \exp[\psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r}) + \psi_3(\vec{r}) + \dots], \quad (1)$$

where the i th complex amplitude $\psi_i(\vec{r})$, i.e., the i th order Rytov approximation, is found from the system of equations

$$\psi_1(L, \vec{\rho}) = -k^2 \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} G_p(L, \vec{\rho}; x, \vec{\rho}') \bar{\epsilon}(x, \vec{\rho}') \left(\frac{E_0(x, \vec{\rho}')}{E_0(L, \vec{\rho})} \right) d^2 \rho' dx, \quad (2)$$

$$\psi_2(L, \vec{\rho}) = - \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} G_p(L, \vec{\rho}; x, \vec{\rho}') [\vec{\nabla}_{\vec{\rho}'} \psi_1(x, \vec{\rho}')]^2 \left(\frac{E_0(x, \vec{\rho}')}{E_0(L, \vec{\rho})} \right) d^2 \rho' dx, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(L, \vec{\rho}) = \\ = - \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} G_p(L, \vec{\rho}; x, \vec{\rho}') [2 \vec{\nabla}_{\vec{\rho}'} \psi_1(x, \vec{\rho}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\rho}'} \psi_2(x, \vec{\rho}')] \left(\frac{E_0(x, \vec{\rho}')}{E_0(L, \vec{\rho})} \right) d^2 \rho' dx, \end{aligned} \quad (4)$$

where $\bar{\epsilon}(x, \vec{\rho}')$ is the random permittivity at a point $\vec{\rho}$ in a plane transverse to the propagation axis located at the intermediate point x along the propagation path of total length L where $0 \leq x \leq L$, $E_0(x, \vec{\rho}')$ is the unperturbed field at this point, $\vec{\nabla}_{\vec{\rho}}$ is the gradient evaluated along the transverse coordinate, and

$$G_p(L, \vec{\rho}; x, \vec{\rho}') = -\left(\frac{1}{4\pi}\right) \frac{\exp\left[ik\{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2/[2(L-x)]\}\right]}{L-x} \quad (5)$$

is the parabolic (Fresnel) approximation of the free-space Green function. Contact is made between the sum of the complex amplitudes within the exponential of Eq. (1) and more fundamental wave parameters through the log-amplitude $\chi(x, \vec{\rho})$ and phase fluctuation $S(x, \vec{\rho})$ via the relation

$$\psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r}) + \psi_3(\vec{r}) + \dots \equiv \chi(\vec{r}) + iS(\vec{r}). \quad (6)$$

For the general case of a single mode beam wave, one has [3] for the unperturbed electric field

$$E_0(\vec{r}) = E_0(x, \vec{\rho}) = \left(\frac{E_0(0)}{1+i\alpha x}\right) \exp\left[ikx - k\alpha\rho^2/[2(1+i\alpha x)]\right] \quad (7)$$

where

$$\alpha \equiv \alpha_1 + i\alpha_2 = \frac{\lambda}{\pi W_0^2} + i\left(\frac{1}{R_0}\right) \quad (8)$$

which incorporates the initial beam radius W_0 and the phase front radius of curvature R_0 , the wavelength λ , and $E_0(0)$ which is the maximum value of the field which occurs at the origin of coordinates centered in the plane of transmitting aperture.

In the usual perturbation-theoretical methodology, only the first term of the expansion is retained thus limiting results correct to within the first order Rytov solution $\psi_1(x, \vec{\rho})$. Hence, using Eq. (2), statistical quantities of the log-amplitude $\chi(x, \vec{\rho})$ and the phase fluctuation $S(x, \vec{\rho})$ of the propagating wave are calculated. For example, assuming that homogeneous statistics prevail over the centered Gaussian random function $\bar{\epsilon}(x, \vec{\rho}')$, one calculates, within the first order Rytov solution, viz.,

$$\chi(\vec{r}) = \text{Re}\{\psi_1(\vec{r})\}, \quad S(\vec{r}) = \text{Im}\{\psi_1(\vec{r})\} \quad (9)$$

expressions for the variance functions which assume the form

$$\sigma_\chi^2(L, \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) = \langle \chi(L, \vec{\rho}_1)\chi(L, \vec{\rho}_2) \rangle, \quad \sigma_S^2(L, \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) = \langle S(L, \vec{\rho}_1)S(L, \vec{\rho}_2) \rangle$$

since under these conditions $\langle \chi(L, \vec{\rho}) \rangle = \langle S(L, \vec{\rho}) \rangle = 0$ from Eqs. (2) and (6). From Eq. (2), it is seen that these second order moments formed from Eq. (9) are of the order $|\bar{\epsilon}|^2$ in the permittivity fluctuations.

Examination of Eq. (3) shows, however, that the first non-zero mean values of χ or S , viz.,

$$\langle \chi(\vec{r}) \rangle = \text{Re} \{ \langle \psi_2(\vec{r}) \rangle \}, \quad \langle S(\vec{r}) \rangle = \text{Im} \{ \langle \psi_2(\vec{r}) \rangle \} \quad (10)$$

occur at the second order Rytov solution and are also of order $|\tilde{\epsilon}|^2$ in the permittivity fluctuations. Hence, first order moments of the second order approximation are thus just as *statistically significant* as the second order moments obtained from the first Rytov approximation. Although the second order Rytov approximation has been the subject of several studies (see [3, 8] and references therein), this fact has not been recognized hitherto in applications of the Rytov perturbation approach to beam wave propagation that claim to be complete to within the first order approximation. More importantly, no correct and analytical solutions have been specifically obtained for the first order log-amplitude and phase fluctuations of a beam wave propagating through turbulence characterized by the Kolmogorov power spectrum. The neglect of the second order approximation in the formation of first order field moments is the source of the inconsistencies that were mentioned in the introduction. As will be shown below, inclusion of the first order moments obtained from the second order Rytov approximation solves some well known experimental and theoretical inconsistencies that have been encountered in the applications.

3. SOLUTION OF THE FIRST ORDER MOMENT OF THE SECOND RYTOV APPROXIMATION FOR A BEAM WAVE

Taking the ensemble average of Eq. (3) yields

$$\langle \psi_2(L, \vec{\rho}) \rangle = - \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} G_p(L, \vec{\rho}; x, \vec{\rho}') \left\langle \left[\vec{\nabla}_{\vec{\rho}'} \psi_1(x, \vec{\rho}') \right]^2 \right\rangle \left(\frac{E_0(x, \vec{\rho}')}{E_0(L, \vec{\rho})} \right) d^2 \rho' dx \quad (11)$$

thus indicating that one must dwell on the evaluation of the average of the square of the transverse gradient of the first order solution. To this end, one substitutes Eqs. (5) and (7) into Eq. (2) and, to facilitate further calculation, considers this result in the form of a Fourier-Stieltjes spectral representation [3, 7] of the random function $\tilde{\epsilon}(x, \vec{\rho}')$, viz.,

$$\psi_1(x, \vec{\rho}) = \frac{ik}{2} \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\gamma(x, x') \vec{\kappa}' \cdot \vec{\rho}] H(x, x', \vec{\kappa}') d\nu(x', \vec{\kappa}') dx' \quad (12)$$

where

$$H(x, x', \vec{\kappa}) \equiv \exp \left[- \left(\frac{i\kappa^2}{2k} \right) \gamma(x, x') (x - x') \right], \quad \gamma(x, x') \equiv \frac{1 + i\alpha x'}{1 + i\alpha x} \quad (13)$$

and the random spectral amplitude $d\nu(x', \vec{\kappa}')$ is operationally defined, for statistical homogeneity of $\tilde{\epsilon}$ in the transverse plane, along which the spatial frequency coordinate $\vec{\kappa}'$ exists, and for δ -function correlation in the longitudinal x direction, according to [7]

$$\langle d\nu(x', \vec{\kappa}') d\nu(x'', \vec{\kappa}'') \rangle = \delta(x' - x'') \delta(\vec{\kappa}' + \vec{\kappa}'') F_{e,\text{eff}}(x', \vec{\kappa}') d^2 \kappa' d^2 \kappa'' \quad (14)$$

where $F_{e,\text{eff}}(x', \vec{\kappa}')$ is the effective three-dimensional spectral density of statistically homogeneous permittivity fluctuations. Forming the transverse gradient of Eq. (12), squaring and averaging the result, employing Eq. (14) and performing the amenable integration yields,

$$\begin{aligned} \langle [\vec{\nabla}_{\vec{\rho}} \psi_1(x, \vec{\rho})]^2 \rangle &= -\left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho''} \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i\gamma(x, x') \vec{\kappa}' \cdot (\vec{\rho} - \vec{\rho}'')] \times \\ &\quad \times H^2(x, x', \vec{\kappa}') F_{e,\text{eff}}(x', \vec{\kappa}') d^2 \kappa' dx' \Big|_{\vec{\rho}=\vec{\rho}''} \quad (15) \end{aligned}$$

where, from Eq. (13), $H(x, x', -\vec{\kappa}) = H(x, x', \vec{\kappa})$. Changing variables using the transverse difference coordinate $\vec{\rho}_d \equiv \vec{\rho} - \vec{\rho}''$ and performing the differentiation gives

$$\begin{aligned} \langle [\vec{\nabla}_{\vec{\rho}} \psi_1(x, \vec{\rho})]^2 \rangle &= \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_d^2} \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i\gamma(x, x') \vec{\kappa}' \cdot \vec{\rho}_d] \times \\ &\quad \times H^2(x, x', \vec{\kappa}') F_{e,\text{eff}}(x', \vec{\kappa}') d^2 \kappa' dx' \Big|_{\vec{\rho}_d=0} = \\ &= -\left(\frac{k}{2}\right)^2 \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2(x, x') \kappa'^2 H^2(x, x', \vec{\kappa}') F_{e,\text{eff}}(x', \vec{\kappa}') d^2 \kappa' dx' \quad (16) \end{aligned}$$

This result is independent of the transverse coordinate $\vec{\rho}_d$, due to the facts that the turbulent fluctuations have been taken to be homogeneous, leaving any transverse dependence that may exist solely due to the beam wave inhomogeneity. (The beam wave inhomogeneity arises from the exponential of Eq. (12) in the case of a complex valued $\gamma(x, x')$.) The effect of the latter, however, disappears since the square of $\vec{\nabla}_{\vec{\rho}} \psi_1$, rather than its modulus, is required. The $\vec{\rho}_d$ independence of Eq. (16), which is correct to the level of the second Rytov approximation, is consistent with the neglect of the third such approximation. To be sure, as per Eq. (4), it is sufficient to be able to neglect the ψ_3 contribution when $\vec{\nabla}_{\vec{\rho}} \psi_2$. Such small transverse (smooth) variations in succeeding higher order approximations gives rise to the synonymous terminology for the Rytov method, viz., "method of smooth perturbations".

Taking the level of turbulent fluctuations to be statistically isotropic as well as being homogeneously dispersed (in terms of turbulence strength) along the

propagation route, one has [7]

$$F_{\epsilon, \text{eff}}(x, \vec{\kappa}) = F_{\epsilon, \text{eff}}(\kappa) = 2\pi\Phi_{\epsilon}(\kappa), \quad (17)$$

where the usual three dimensional spectral density $\Phi_{\epsilon}(\kappa)$ is given by the Kolmogorov-Obukhov spectrum,

$$\Phi_{\epsilon}(\kappa) = 0.033 C_{\epsilon}^2 \kappa^{-11/3} \quad (18)$$

where C_{ϵ}^2 is the structure constant for the permittivity fluctuations.* Substituting Eqs. (17) and (18) into Eq. (16) and converting the κ -integration to one in plane-polar coordinates yields

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\vec{\nabla}_{\vec{\rho}} \psi_1(x, \vec{\rho}) \right]^2 \right\rangle &= -\left(\frac{\pi^2}{2}\right) 0.033 C_{\epsilon}^2 k^{13/6} (i)^{-1/6} \Gamma(1/6) \cdot \\ &\cdot \int_0^x \gamma^{11/6}(x, x') (x - x')^{-1/6} dx' \end{aligned} \quad (19)$$

The final integral can now be evaluated using Eq. (13) and the change of variable $x_0 = x'/x$;

$$\begin{aligned} &\int_0^x \gamma^{11/6}(x, x') (x - x')^{-1/6} dx' = \\ &= x^{5/6} \left(\frac{i\alpha x}{1 + i\alpha x} \right)^{11/6} \int_0^1 \left[(i\alpha x_0)^{-1} + x_0 \right]^{11/6} (1 - x_0)^{-1/6} dx_0 = \\ &= x^{5/6} (1 + i\alpha x)^{-11/6} B\left(\frac{5}{6}, 1\right) {}_2F_1\left(-\frac{11}{6}, 1; \frac{11}{6}; -i\alpha x\right) \end{aligned} \quad (20)$$

where $B(a, b) \equiv \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ is the beta function and ${}_2F_1(a, b; c; z)$ is the Gauss hypergeometric function. One now employs the linear transformations (see Eqs. (15.3.8), (15.1.8) and (15.3.3) in [9])

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(-\frac{11}{6}, 1; \frac{11}{6}; -i\alpha x\right) = \\ &= (1 + i\alpha x)^{11/6} \frac{\Gamma(11/6)\Gamma(17/6)}{\Gamma(22/6)} {}_2F_1\left(-\frac{11}{6}, \frac{5}{6}; -\frac{11}{6}; (1 + i\alpha x)^{-1}\right) + \end{aligned}$$

*The more general spectrum containing the inner scale of turbulence l_0 as well as the outer scale L_0 can also be considered. However, in the case governed by the inequality $l_0 < \sqrt{L\lambda} < L_0$ which is taken to prevail throughout the remaining development, the results are those analogous to the use of Eq. (18).

$$+ (1 + i\alpha x)^{-1} \frac{\Gamma(11/6)\Gamma(-17/6)}{\Gamma(-11/6)\Gamma(5/6)} {}_2F_1\left(1, \frac{22}{6}; \frac{23}{6}; (1 + i\alpha x)^{-1}\right) \quad (21a)$$

$${}_2F_1\left(-\frac{11}{6}, \frac{5}{6}; -\frac{11}{6}; (1 + i\alpha x)^{-1}\right) = \left(\frac{i\alpha x}{1 + i\alpha x}\right)^{-5/6} \quad (21b)$$

$${}_2F_1\left(1, \frac{22}{6}; \frac{23}{6}; (1 + i\alpha x)^{-1}\right) = \left(\frac{i\alpha x}{1 + i\alpha x}\right)^{-5/6} {}_2F_1\left(\frac{17}{6}, \frac{1}{6}; -\frac{23}{6}; (1 + i\alpha x)^{-1}\right) \quad (21c)$$

and uses them in Eq. (20) to finally obtain

$$\int_0^x \gamma^{11/6}(x, x')(x - x')^{-1/6} dx' = \left(\frac{1 + i\alpha x}{i\alpha}\right)^{5/6} \cdot \left[B\left(\frac{5}{6}, \frac{17}{6}\right) - \frac{6}{17}(1 + i\alpha x)^{-17/6} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{17}{6}; \frac{23}{6}; (1 + i\alpha x)^{-1}\right) \right] \quad (22)$$

Returning to Eq. (11), one substitutes Eqs. (5) and (7) into Eq. (11) and obtains

$$\langle \psi_2(L, \vec{\rho}) \rangle = \left(\frac{1}{4\pi}\right) \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{-1}(L, x')(L - x')^{-1} \times \\ \times \exp\left[\left(\frac{ik}{2}\right) \frac{(\vec{\rho}' - \gamma(L, x')\vec{\rho})^2}{\gamma(L, x')(L - x')}\right] \left\langle \left[\vec{\nabla}_{\vec{\rho}'} \psi_1(x, \vec{\rho}')\right]^2 \right\rangle d^2\rho' dx \quad (23)$$

Noting the $\vec{\rho}'$ independence of Eq. (19), one can immediately evaluate the $\vec{\rho}'$ integration using plane-polar coordinates. Employing the results of Eqs. (19) and (22) and using the fact that, in terms of refractive index structure constant, $C_n^2 = (1/4)C_z^2$, one finally obtains

$$\langle \psi_2(L, \vec{\rho}) \rangle = \langle \psi_2(L) \rangle = -1.8128(i)^{5/6} C_n^2 k^{7/6} \left\{ B\left(\frac{5}{6}, \frac{17}{6}\right) \int_0^L \left(\frac{1 + i\alpha x}{i\alpha}\right)^{5/6} dx - \right. \\ \left. - \frac{6}{17} \left(\frac{1}{i\alpha}\right)^{5/6} \int_0^L (1 + i\alpha x)^{-2} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{17}{6}; \frac{23}{6}; (1 + i\alpha x)^{-1}\right) dx \right\} \quad (24)$$

which is also independent of the transverse coordinate. The integration in the first term within the brackets of Eq. (24) is straightforward and that in the second term is facilitated by noting that

$$\int {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{(c-1)}{(a-1)(b-1)} {}_2F_1(a-1, b-1; c-1; z) \quad (25)$$

as well as employing the change of variables $v = (1 + i\alpha x)^{-1}$. One finally obtains for the first order moment of the second Rytov approximation

$$\langle \psi_2(L) \rangle = -2.176(i)^{5/6} C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \left\{ \left(\frac{5}{11} \right) B \left(\frac{5}{6}, \frac{17}{6} \right) \left(\frac{1 + i\alpha L}{i\alpha L} \right)^{11/6} - \frac{6}{11} \left(\frac{1}{i\alpha L} \right)^{11/6} {}_2F_1 \left(-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}; \frac{17}{6}; (1 + i\alpha L)^{-1} \right) \right\} \quad (26)$$

This result can be simplified by the application of two linear transformations (see Eqs. (15.3.6) and (15.3.3) in [9]) to the hypergeometric function which yield

$$\langle \psi_2(L) \rangle = -2.176(i)^{5/6} C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \left(\frac{6}{11} \right) {}_2F_1 \left(-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}; \frac{17}{6}; \frac{i\alpha L}{1 + i\alpha L} \right) \quad (27)$$

This result should be compared to the result for the log-amplitude variance of a beam wave obtained via the first Rytov approximation [3], viz.,

$$\sigma_\chi^2(L, \vec{\rho}) = 2.176 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \left[\left(\frac{6}{11} \right) \operatorname{Re} \left\{ (i)^{5/6} {}_2F_1 \left(-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}; \frac{17}{6}; \frac{i\alpha L}{1 + i\alpha L} \right) \right\} - \left(\frac{3}{8} \right) \left(\frac{W_0}{W} \right)^{5/3} (\alpha_1 L)^{5/6} {}_1F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1; \frac{2\rho^2}{W^2} \right) \right] \quad (28)$$

where $W^2 \equiv W_0^2 [(\alpha_1 L)^2 + (1 - \alpha_2 L)^2]$, clearly showing that $\sigma_\chi^2 \neq \langle \chi \rangle = \operatorname{Re} \{ \langle \psi_2(L) \rangle \}$ for the beam wave case.

At this point, it is of interest to calculate the plane and spherical wave limits of Eq. (26) for the average log-amplitude $\langle \chi(L) \rangle$ as given by Eq. (10). For plane wave propagation, $W_0 \rightarrow \infty$ and $R_0 \rightarrow \infty$ this giving, from Eq. (8), $\alpha \rightarrow 0$. In this limit, one has from Eqs. (10) and (27)

$$\langle \chi(L) \rangle_{\text{pw}} = -2.176 \cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \left(\frac{6}{11} \right) = -0.307 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \quad (29)$$

Similarly, in the spherical wave limit, $W_0 \rightarrow 0$ and $R_0 \rightarrow \infty$ which gives $\alpha \rightarrow \infty$; one then has

$$\begin{aligned} \langle \chi(L) \rangle_{\text{sw}} &= -2.176 \cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \left(\frac{6}{11} \right) (0.40431) = \\ &= -0.124 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \end{aligned} \quad (30)$$

Hence, in both these special cases, well known results [5, 10] are recovered where, as demanded by energy conservation of the average intensity of these wave fields, the average log-amplitude is equal to the additive inverse of the corresponding log-amplitude variance $\sigma_\chi^2(L)$, calculated within the first Rytov

approximation. The correct and general treatment for the average intensity of the beam wave case will now be considered and compared to that which follows from strong fluctuation theory as well as applied to the calculation of beam wave broadening in turbulent media.

4. APPLICATION TO THE AVERAGE INTENSITY AND BEAM SPREAD FOR BEAM WAVE PROPAGATION IN TURBULENT MEDIA

From Eqs. (1) and (6), one has for the average intensity $\langle I(L, \vec{\rho}) \rangle$

$$\langle I(L, \vec{\rho}) \rangle = |E(L, \vec{\rho})|^2 = |E_0(L, \vec{\rho})|^2 \langle \exp[2\chi(L, \vec{\rho})] \rangle \quad (31)$$

Evaluation of the indicated ensemble average is traditionally facilitated by use of the usual hypothesis that the log-amplitude is governed by Gaussian statistics. However, as is easily seen from Eq. (3), the log-amplitude calculated using the second order Rytov approximation will have statistics that are determined by the integral of the square of a Gaussian random function, viz., $\vec{\nabla}_{\vec{\rho}'} \psi_1(x, \vec{\rho}')$, and does not, in general, transform into another Gaussian random function; It can be rigorously shown [11] via the method of cumulant analysis that the application of the Gaussian hypothesis applied to Eq. (31) is correct to second order within the cumulant expansion. Thus, one can approximately write

$$\langle \exp[2\chi(L, \vec{\rho})] \rangle \approx \exp \left[2\{ \sigma_\chi^2 - \langle \chi \rangle^2 + \langle \chi \rangle \} \right] \quad (32)$$

where $\sigma_\chi^2 = \sigma_\chi^2(L, \vec{\rho}) \equiv \langle \chi^2 \rangle$ is the (centered) log-amplitude variance. However, in a treatment employing the Rytov approach one has, from the development of Section 3, that $\sigma_\chi^2 \sim |\tilde{\epsilon}|^2$ when calculated in the first Rytov approximation, and also that $\langle \chi \rangle \sim |\tilde{\epsilon}|^2$ when calculated in the second Rytov approximation. Thus, $\langle \chi \rangle^2 \sim |\tilde{\epsilon}|^4$ and in a treatment that is limited to results $\sim |\tilde{\epsilon}|^2$, one can neglect this quantity i.e., take the condition $\langle \chi \rangle^2 \ll \langle \chi \rangle$ to prevail which, for spherical and plane waves, is formally the same as the well known restriction for application of the first order Rytov approximation, viz., $\sigma_\chi^2 \ll 1$; such restrictions for the general beam wave case will be examined later. Therefore, one has from Eqs. (31) and (32),

$$\langle I(L, \vec{\rho}) \rangle \approx I_0(L, \vec{\rho}) \exp \left[2\{ \sigma_\chi^2 + \langle \chi \rangle \} \right] \quad (33)$$

where

$$I_0(L, \vec{\rho}) \equiv |E_0(L, \vec{\rho})|^2 = I_0(0) \left(\frac{W_0}{W} \right)^2 \exp \left[-\frac{2\rho^2}{W^2} \right] \quad (34)$$

as follows from Eq. (7) (with $W^2 = W_0^2[(\alpha_1 L)^2 + (1 - \alpha_2 L)^2]$ as defined earlier), which describes diffraction broadening of the beam wave as it travels along

the propagation path, and α_1 and α_2 are given by Eq. (8). Using Eq. (28), well as Eqs. (7), (10) and (27) in Eq. (33) gives for the average intensity of a beam wave, calculated to the second Rytov approximation and to order $|\varepsilon|^2$,

$$\langle I(L, \vec{\rho}) \rangle = I_0(0) \left(\frac{W_0}{W} \right)^2 \exp \left[-\frac{2\rho^2}{W^2} + Q(L, \vec{\rho}) \right] \quad (35a)$$

where

$$\begin{aligned} Q(L, \vec{\rho}) &\equiv 2\{\sigma_\chi^2 + \langle \chi \rangle\} = \\ &= -1.632 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \left(\frac{W_0}{W} \right)^{5/3} (\alpha_1 L)^{5/6} {}_1F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1; \frac{2\rho^2}{W^2} \right) \end{aligned} \quad (35b)$$

Hence, for the general beam wave case, $Q(L, \vec{\rho}) \neq 0$ since $\sigma_\chi^2 \neq \langle \chi \rangle$. Ramifications of this circumstance will now be examined.

The result of Eq. (35) is *exactly* (unlike in other treatments that do not incorporate the corrections afforded by the second Rytov approximation) that which is obtained from the weak field limit of the mutual coherence function for a beam wave derived from the strong fluctuation theory (see Section 20-7 in [12]), viz.,

$$\langle I(L, \vec{\rho}) \rangle = I_0 \left(\frac{W_0}{2} \right)^2 \int_0^\infty \exp \left[-\frac{W^2}{8} \kappa^2 \right] \exp[-\Lambda(\kappa)] J_0(\rho\kappa) \kappa d\kappa \quad (36)$$

where $\Lambda(\kappa) \equiv 0.547 C_n^2 k^{1/3} L^{8/3} \kappa^{5/3}$. Expanding the exponential function of $\Lambda(\kappa)$ and retaining only the first two terms (i.e., considering the weak field limit), one can perform the required integration and obtain

$$\begin{aligned} \langle I(L, \vec{\rho}) \rangle &= I_0 \left(\frac{W_0}{W} \right)^2 \left\{ \exp \left[-\frac{2\rho^2}{W^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 0.547 \Gamma(11/6) \left(\frac{8}{W} \right)^{5/6} C_n^2 k^{1/3} L^{8/3} {}_1F_1 \left(\frac{11}{6}, 1; \frac{-2\rho^2}{W^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

Finally, applying the Kummer transformation ${}_1F_1(a, b; z) = \exp(z) {}_1F_1(b-a, b; -z)$ to the confluent hypergeometric function as well as using the definitions of W_0 and W gives

$$\begin{aligned} \langle I(L, \vec{\rho}) \rangle &= I_0 \left(\frac{W_0}{W} \right)^2 \exp \left[-\frac{2\rho^2}{W^2} \right] \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - 1.632 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \left(\frac{W_0}{W} \right)^{5/3} (\alpha_1 L)^{5/6} {}_1F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1; \frac{2\rho^2}{W^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

which is identical to the result of Eq. (35).

The average intensity for a beam wave finds application in the study of beam wave broadening due to turbulence occurring along the propagation path. The effective radius $r_{\text{eff}}(L)$ that can be attributed to the beam wave at a distance L from the source can be defined (see Section 20-7 in [12]) by considerations of the energy density within a transverse circular cross section of the beam wave, on the assumption that no absorption of wave energy occurs, i.e.,

$$\pi r_{\text{eff}}^2(L) \langle I(L, 0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle I(L, \vec{\rho}) \rangle d^2 \rho \quad (39)$$

The integral of the average intensity that occurs on the right side of this relation is easily facilitated, on assumption of energy conservation, by noting that the result should be that same as that which uses the unperturbed intensity $I_0(L, \vec{\rho})$. Thus, using Eqs. (33) and (34), one has for the effective beam wave radius,

$$r_{\text{eff}}^2(L) = \frac{W_0^2}{2} I_0(0) \langle I(L, 0) \rangle^{-1} \quad (40)$$

Considering Eq. (35) in the case $\rho = 0$ and substituting the result into Eq. (40) gives

$$r_{\text{eff}}^2(L) = \frac{W^2}{2} \exp \left[1.632 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \left(\frac{W_0}{W} \right)^{5/3} (\alpha_1 L)^{5/6} \right] \quad (41)$$

Similarly to the relationship between W_0^2 and α_1 , one can define the related parameter α_{eff} such that $\alpha_{\text{eff}}^{-1} = kr_{\text{eff}}^2/2$. In addition, following established notation for the problem [13] and using the definitions $(\alpha_{\text{eff}} L)^{-1} \equiv \Omega_{\text{eff}}$, $(\alpha_1 L)^{-1} \equiv \Omega$, and $(1 - \alpha_2 L)^{-1} \equiv \Omega_0$, as well as writing the argument of the exponential in terms of the log-amplitude variance for a spherical wave given by $\sigma_{\chi, \text{sph}}^2(L) = 0.124 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}$, Eq. (41) immediately gives for the general beam wave case

$$\Omega_{\text{eff}}(L) = \frac{\Omega}{2} (\Omega_0^{-2} + \Omega^{-2}) \exp \left[13.161 \sigma_{\chi, \text{sph}}^2(L) \left(\frac{\Omega^{-1}}{\Omega_0^{-2} + \Omega^{-2}} \right)^{5/6} \right] \quad (42)$$

which is a generalization and simplification of previous results [13]; it yields the known relations for both the focused beam ($\Omega_0^{-1} = 0$) as well as collimated beam ($\Omega_0^{-1} = 1$) cases.

These results, however, are limited by the fact that the condition $|\langle \chi \rangle| \ll 1$ was taken to prevail in the transition from Eq. (32) to Eq. (33); using Eqs. (10) and (27) this condition is, in the general case,

$$1.187 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \text{Re} \left\{ (i)^{5/6} {}_2F_1 \left(-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}; \frac{17}{6}; \frac{i\alpha L}{1 + i\alpha L} \right) \right\} \ll 1 \quad (43)$$

Analysis of the argument of the hypergeometric function shows that the most restrictive case is for a focused beam wave where $\alpha_2 = 1/L$ thus allowing the argument to be written $\frac{i\alpha L}{1+i\alpha L} = 1 + \frac{i kW_0^2}{L}$. In the case of large transmitting apertures such that $\frac{kW_0^2}{L} \gg 1$ with which a sharp focus can be attained, the condition of Eq. (43) becomes in this limit (with the use of a linear transformation (see Eq. (15.3.4) in [9]) of the hypergeometric function)

$$0.458 C_n^2 k^2 L W_0^5 \ll 1 \quad (44)$$

which is, to within the numerical coefficient, the same as that obtained (see Section 18-5 in [12]) from considerations of $\sigma_\chi^2 \ll 1$ within the first Rytov approximation. It is important to note, however, that the correct and general condition of the use of any Rytov approximation within the confines of Eq. (31), i.e., where contact is made between the quantities of intensity and log-amplitude, is $|\langle \chi \rangle| \ll 1$.

5. CONCLUSIONS

The application of the first Rytov approximation to statistical wave propagation problems requires, for statistically complete results, the necessary inclusion of solutions that are given by the second Rytov approximation. In particular, first order statistics of the field variables given by the second Rytov approximation are $\sim |\bar{\epsilon}|^2$ in the permittivity fluctuations and are just as statistically significant as those second order statistics that are found from the solution of the first Rytov approximation. This immediately allows the theoretical treatment to transcend beyond the use of the *ad hoc* condition $\langle \chi \rangle = -\sigma_\chi^2$ and yield, in the general beam wave case, that $\langle \chi \rangle \neq -\sigma_\chi^2$; the former condition is found to be a special case of the latter only for plane and spherical wave propagation.

Making contact between the intensity of a propagating wave field and the statistics of the log-amplitude χ , again requiring the treatment to be $\sim |\bar{\epsilon}|^2$ on the assumption that the average intensity is approximately governed by Gaussian statistics, directly yields the condition $|\langle \chi \rangle| \ll 1$ for applicability of the results, which is the generalization, as well as a theoretical explanation, of the classical condition $\sigma_\chi^2 \ll 1$ for applicability of the first Rytov approximation. The exact agreement between the results that follow from those of strong fluctuation theory in the weak fluctuation limit, as well as a generalization and simplification of the description of beam wave broadening, certainly substantiates the use of the second Rytov solution.

The author would like to thank Professor Yu. A. Kravtsov for assistance in publication of this manuscript.

REFERENCES

1. Schmeltzer R. A. // *Quart. Appl. Math.*, 1967. V. 24. P. 339.
2. Fried D. L. and Seidman J. B. // *J. Opt. Soc. Am.*, 1967. V. 57. P. 181.
3. Ishimaru A. *The Beam Wave Case and Remote Sensing*. — In: *Laser Beam Propagation in the Atmosphere* / Ed. by J. W. Strohbehn. — Berlin: Springer-Verlag, 1978. Chap. 5.
4. Gebhardt F. G. and Collins S. A., Jr. // *J. Opt. Soc. Am.*, 1969. V. 59. P. 1139.
5. Fried D. L. // *Proc. IEEE*, 1967. V. 55 (1). P. 57.
6. Andrews L. C., Phillips R. L., and Yu P. T. // *Appl. Opt.*, 1995. V. 34 (33). P. 7742 and references therein.
7. Manning R. M. *Stochastic Electromagnetic Image Propagation*. — New York: McGraw-Hill, 1993. Section 1.6.
8. Yura H. T. and Hanson S. G. // *J. Opt. Soc. Am.*, 1989. V. A6 (4). P. 564.
9. *Handbook of Mathematical Functions*. /Eds. by M. Abramowitz and I. A. Stegun. — Dover Publications, Inc. New York, 1970.
10. Rytov S. M., Kravtsov Yu. A., and Tatarskii V. I. *Principles of Statistical Radiophysics*. — Berlin: Springer-Verlag, 1989. V. 4. Section 2.5.
11. Wheelon A. D., private communication.
12. Ishimaru A. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. — New York: Academic Press, 1978. V. 2.
13. Bunkin F. V. and Gochelashvili K. S. // *Radiophys. Quantum Electron.*, 1970. V. 13. P. 811.

NASA, Cleveland, USA

Поступила в редакцию
10 февраля 1996 г.

УДК 53.01

ОБ АДИАБАТИЧЕСКОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Н. С. Степанов

Исходя из дифференциального уравнения, заданного в достаточно общем виде, выводятся и анализируются "укороченные" уравнения, описывающие преобразование частоты и энергетических характеристик волн в одномерной системе с плавно меняющимися параметрами. Обсуждается вопрос об адиабатических инвариантах, присущих таким системам при различных законах дисперсии. Общие соотношения иллюстрируются на конкретных физических примерах.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы вновь возродился интерес к ~~нерезонансным~~ параметрическим процессам в волновых системах (см., например, [1–5]), исследование которых было начато ещё в конце 50-х годов (см. обзоры [6–8] и цитированную в них литературу); при этом нередко переоткрываются давно полученные результаты (а иногда воспроизводятся и ошибочные). Что касается "адиабатических" эффектов, обсуждаемых в настоящей работе и имеющих место при плавной вариации параметров, к настоящему времени можно считать достаточно обстоятельно проанализированными общекинематические закономерности преобразования спектрально-временных характеристик квазигармонических волн, в том числе в системах с дисперсией [2, 3, 5–7, 9–11]. Более сложными и "индивидуальными", специфическими для конкретных систем (отличающихся и диапазоном частот, и физической природой волн) являются соотношения, касающиеся энергетических величин. В этом смысле весьма привлекателен Лагранжев подход [6, 7, 12, 13], который в принципе дает универсальные соотношения, связывающие энергии и частоты волн, однако сама возможность описания нестационарных систем с помощью функции Лагранжа не является а priori очевидной. Дело, в частности, в том, что в диспергирующих системах (например, для электромагнитных волн в плазме) энергетические соотношения оказываются зависящими не только от закона вариации макроскопических параметров, но и от конкретного физического механизма их изменения ([5, 7–9], см. также ниже). В электродинамике энергетические соотношения (включая теорему Пойнтинга) можно выразить через

тензор диэлектрической проницаемости, однако, строго говоря, этот тензор для нестационарных сред также заранее неизвестен. По этой причине однозначно амплитуды и энергии волн в нестационарных средах и системах можно найти, лишь исходя из динамических уравнений, учитывающих конкретные физические процессы (в электродинамике — из уравнений микротеории).

В связи с этим, в данной работе рассматривается задача о трансформации волн в произвольных одномерных системах с плавно меняющимися параметрами, исходя из достаточно общего вида дифференциального уравнения, описывающего эту систему. Выводятся соотношения, определяющие изменение частоты и амплитуды волн, выясняются условия, при которых последняя также может быть однозначно определена по виду дисперсионного уравнения системы. Общие соотношения иллюстрируются на конкретных физических примерах, представляющих самостоятельный интерес.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть волновая система описывается линейным дифференциальным уравнением порядка $M+N$ относительно некоторой физической переменной $f(x, t)$:

$$\sum_{m,n=0}^{M,N} a_{mn} \frac{\partial^{m+n} f}{\partial t^m \partial x^n} = 0. \quad (1)$$

В нестационарной системе, содержащей некоторый набор параметров $p(x, t)$, эти коэффициенты также будут функциями x, t . Ясно, что их можно разделить на две группы: остающиеся и при $p = \text{const}$, т.е. как-то алгебраически зависящие от p (обозначим их как $a_{mn}^0(p)$), и исчезающие при $p = \text{const}$, т.е. пропорциональные первым и более высоким производным параметров p по t и x (обозначим последние как a_{mn}^1).

В интересующем нас здесь случае плавной вариации $p(x, t)$ решение (1) можно искать, используя ту или иную модификацию асимптотических методов (ВКБ-метод, приближение геометрической оптики [2, 3, 5-7, 9-12]). Представим $f(x, t)$ в виде

$$f(x, t) = A(x, t)e^{i\varphi(x, t)}, \quad (2)$$

мгновенную частоту ω и волновое число k определим как

$$\omega(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad k(x, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3)$$

Будем предполагать, что величины $A(x, t)$, $\omega(x, t)$, $k(x, t)$ являются плавными функциями того же порядка, что и параметры $p(x, t)$, так что можно ввести единый малый параметр

$$\chi \sim \left| (\omega p)^{-1} \frac{\partial p}{\partial t} \right| \sim \left| \omega^{-2} \frac{\partial \omega}{\partial t} \right| \sim \left| (\omega k)^{-1} \frac{\partial k}{\partial t} \right| \sim \left| (\omega A)^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} \right| \ll 1, \quad (4)$$

(аналогично для пространственных производных).

Подставляя (2) в (1), тогда нетрудно получить отдельные "укороченные" равенства для величин порядка χ^0 и χ^1 , при этом члены с коэффициентами a_{mn}^1 можно отнести к последним. Учитывая, что согласно (2), (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \left(i\omega A + \frac{\partial A}{\partial t} \right) e^{i\varphi}, & \frac{\partial f}{\partial x} &= \left(-ikA + \frac{\partial A}{\partial x} \right) e^{i\varphi}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \left(-\omega^2 A + 2i\omega \frac{\partial A}{\partial t} + i \frac{\partial \omega}{\partial t} A \right) e^{i\varphi} + O(\chi^2), & (5) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} &= \left(\omega k A - ik \frac{\partial A}{\partial t} + i\omega \frac{\partial A}{\partial x} + i \frac{\partial \omega}{\partial x} A \right) e^{i\varphi} + O(\chi^2) \end{aligned}$$

и т.д., легко видеть, что уравнение нулевого порядка ($\sim \chi^0$) дает соотношение

$$G(\omega, k, p) = \varkappa \sum a_{mn}^0 (i\omega)^m (-ik)^n = 0, \quad (6)$$

представляющее собой дисперсионное уравнение, связывающее ω и k . Фактически это уравнение имеет такой же вид, что при $p = \text{const}$; при этом, для определенности, выбором множителя \varkappa саму дисперсионную функцию $G(\omega, k, p)$ можно всегда отнормировать так, чтобы коэффициент при наибольшей степени ω был вещественным и положительным. Отметим, что групповая скорость волны $u = d\omega/dk$ определяется через $G(\omega, k, p)$ как

$$u(\omega, k, p) = \frac{g_k}{g_\omega}, \quad g_\omega = \frac{\partial G}{\partial \omega}, \quad g_k = -\frac{\partial G}{\partial k}. \quad (7)$$

Дифференцируя (6) по t и x , соответственно, и учитывая, что согласно (3) $\partial k/\partial t = -\partial \omega/\partial x$, находим уравнения переноса для $\omega(x, t)$, $k(x, t)$ [5-7]:

$$g_\omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + g_k \frac{\partial \omega}{\partial x} = -g_p \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (8a)$$

$$g_\omega \frac{\partial k}{\partial t} + g_k \frac{\partial k}{\partial x} = g_p \frac{\partial p}{\partial x}, \quad g_p = \frac{\partial G}{\partial p} \quad (8b)$$

(при наличии нескольких переменных параметров p_i в правых частях (8) входят суммы по ним). Соотношения (8), в частности, означают, что возмущения $\omega(x, t)$, $k(x, t)$ распространяются с групповой скоростью u ; вместе с тем они позволяют рассчитать изменения ω и k , обусловленные соответственно с временными и пространственными вариациями $p(x, t)$. Не останавливаясь здесь на конкретных примерах ([2, 3, 5–7, 9, 11], см. также ниже), подчеркнем принципиальный момент, что для этого в рассматриваемом приближении оказывается достаточным знать вид дисперсионного уравнения при постоянных параметрах, что существенно упрощает задачу.

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ ВОЛН

Для нахождения амплитудного множителя $A(x, t)$ нужно объединить в (1) члены порядка χ^1 ; рассмотрим сначала вклад членов $\sim a_{mn}^0(p)$. Сравнивая коэффициенты при A и $\partial A/\partial t$, $\partial A/\partial x$ в (5) с выражением (6), нетрудно убедиться, что для $A(x, t)$ также получается уравнение переноса:

$$g_\omega \frac{\partial A}{\partial t} + g_k \frac{\partial A}{\partial x} + \alpha A = 0, \quad (9a)$$

где $g_{\omega, k}$ — те же, что в (7), (8), и

$$\alpha = \alpha_0(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial k^2} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 G}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial k}{\partial t}. \quad (9b)$$

Таким образом, в отсутствие членов $\sim a_{mn}^1$, содержащих производные $\partial p/\partial t$, $\partial p/\partial x$, коэффициенты в уравнении для амплитуды также однозначно выражаются через дисперсионную функцию $G(\omega, k; p)$ для постоянных параметров. Общий интеграл (9) можно записать в виде:

$$A(x, t) = A_0(\xi) \exp \left(- \int \frac{\alpha}{g_\omega} dt \right), \quad (10)$$

где $\xi(x, t)$ — первый интеграл характеристического уравнения $dx/dt = u(x, t)$, $A_0(\xi)$ — произвольная функция, определяемая начальными или граничными условиями (например, при $x = 0$); интеграл в (10) берется для фиксированного группового фронта ($\xi(x, t) = \text{const}$). Обратим внимание, что для частотно-модулированных волн в системе с дисперсией ($\partial^2 G/\partial \omega^2 \neq 0$ и т.д.), $\alpha_0 \neq 0$ и, соответственно, амплитуда A не остается постоянной даже при постоянных параметрах p , что связано со сжатием или растяжением отдельных групповых “цугов” вследствие зависимости $u(\omega)$ [6, 7]. Поэтому более показательным является следующее соотношение для интенсивности волны A^2 , вытекающее из (9) с учетом (7):

$$\frac{\partial}{\partial t} (g_\omega A^2) + \frac{\partial}{\partial x} (g_k A^2) = \gamma A^2, \quad (11a)$$

где

$$\gamma = \gamma_0(x, t) = \frac{\partial g_\omega}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial g_k}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (116)$$

В отличие от (9), при постоянных параметрах правая часть (11а) равна нулю, в этом случае для ограниченного по x и t волнового пакета (квазигармонического импульса конечной длины) интегрирование (11) по x (по интервалу, вне которого $A(x, t) \rightarrow 0$) дает закон сохранения

$$\int g_\omega A^2 dx = \text{const}. \quad (12)$$

Более того, ниже будут приведены примеры, когда $\gamma = 0$ и при переменных $p(x, t)$; в этом случае интеграл (12) является адиабатическим инвариантом.

Что касается членов типа a_{mn}^1 в исходном уравнении (1), то в рассматриваемом приближении в соотношениях (9)–(11) из них следует оставить лишь те, которые имеют порядок χ^1 , т.е. содержат первые производные $\partial p/\partial t$, $\partial p/\partial x$, пренебрегая более высокими. Кроме того, в слабопоглощающих системах к ним естественно отнести диссипативные члены в (1). Из (5), (6), (9) нетрудно видеть, что их учет дает следующую добавку к значению α_0 в (9а):

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1, \quad \alpha_1 = i\alpha a_{mn}^1 (i\omega)^m (-ik)^n; \quad (13)$$

соответственно изменяется и коэффициент γ в (11а):

$$\gamma = \gamma_0 - 2\alpha_1. \quad (14)$$

Хотя величина α_1 уже не может быть выражена через “невозмущенную” дисперсионную функцию $G(\omega, k, p)$, равенства (13), (14) дают простой алгоритм их учета в соотношениях (9)–(11) для амплитуд. Ниже будут приведены примеры волновых систем как с такими членами, так и без них.

4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

а). Недиспергирующая система. Ряд нестационарных волновых систем описывается уравнением второго порядка вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (pf)}{\partial t^2} = 0, \quad (15)$$

где $p(x, t)$ — единственный параметр системы. К такому виду, например, сводится уравнение для плоских электромагнитных волн в среде с постоянной магнитной (μ_0) и переменной диэлектрической ($\epsilon_0(x, t)$) проницаемостями; при этом $\dot{p} = \mu_0 \dot{\epsilon}(x, t)$, а величина $f(x, t)$ совпадает с напряженностью электрического поля. Такое же уравнение справедливо для волн

в линии передачи с переменной погонной ёмкостью $C(x, t)$ и постоянной индуктивностью L_0 (здесь $p = L_0 C$, а переменная $f(x, t)$ соответствует напряжению в линии), а также, в лагранжевых переменных, акустическим волнам в модулированной среде (при этом параметр $p = \rho_0^2 / (c^2 \rho_m^2)$, где ρ_0 — невозмущенная плотность среды, $\rho_m(x, t)$ — заданная переменная плотность, $f(x, t)$ — высокочастотная "сигнальная" составляющая давления, $c(x, t)$ — скорость звука) и др.

Дисперсионное уравнение (6), соответствующее (15), имеет вид ($\varepsilon = 1$):

$$G(\omega, k, p) = \omega^2 p - k^2, \quad (16)$$

т.е. $k = \omega \sqrt{p}$, фазовая и групповая скорости здесь совпадают и равны $1/\sqrt{p}$. Для фигурирующих в уравнении переноса (8) коэффициентов тогда имеем $\hat{g}_\omega = 2\omega p$, $g_k = 2k$, $g_p = \omega^2$, так что интегрирование (8а) дает

$$\omega(x, t) = \omega_0(\xi) \exp\left(-\int \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{p} dx\right). \quad (17)$$

Здесь, как и в (10), $\xi(x, t)$ — характеристическая переменная, $\omega_0(\xi)$ — произвольная функция. Отсюда следует, что в области $\partial p / \partial t < 0$ частота волн увеличивается, и наоборот. Примеры вычисления интегралов в (17) приведены в [5-7, 10].

Что касается равенств (9)-(11) для амплитуд, то в данном примере, помимо $\alpha_0 = p \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial x}$, $\gamma_0 = 2\omega \frac{\partial p}{\partial t}$, существен член $a_{10}^1 = -2 \frac{\partial p}{\partial t}$; согласно (13), (14) тогда имеем $\gamma = -2\omega \frac{\partial p}{\partial t}$. В результате при $\frac{\partial p}{\partial t} \neq 0$ $\gamma \neq 0$ и равенство (12) здесь не выполняется. Нетрудно, однако, показать, что адиабатическим инвариантом для ограниченного по x, t волнового пакета в этом примере является величина

$$\int \frac{pA^2}{\omega} dx = \text{const}. \quad (18a)$$

В самом деле, уравнение (11) с учетом (8) здесь нетрудно свести к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{pA^2}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{pA^2}{\omega} \right) = 0, \quad (19)$$

интегрирование которого по x и дает (18а). Заметим, что величина pA^2 при этом пропорциональна плотности энергии волны, так что для однородных волновых пакетов равенство (18а) означает, что

$$\frac{W(t)}{\omega(t)} = \text{const}, \quad (18б)$$

где W — полная энергия волнового пакета (импульса). Иными словами, повышение частоты сопровождается параметрическим усилением энергии; для ряда конкретных систем другим способом инвариант (186) был показан ранее [5–7].

б). Пример системы с дисперсией. В качестве характерной модели диспергирующей системы возьмем случай, описываемый уравнением Клейна–Гордона:

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = pf, \quad (20)$$

где c^2 — постоянная величина, $p(x, t)$ — некоторый переменный параметр. Уравнения такого типа, например, описывают поперечные колебания струны, погруженной в некоторую упругую среду [14], а также поперечные электромагнитные волны в бесстолкновительной плазме (в последнем случае параметр $p = \omega_p^2$, где ω_p — плазменная частота, пропорционален концентрации электронов $N(x, t)$, а величина c равна скорости света [8, 11, 13]).

Дисперсионное соотношение при этом имеет вид ($\varepsilon = 1$):

$$G(\omega, k, p) = \omega^2 - c^2 k^2 - p, \quad (21)$$

так что в (7), (8) $g_\omega = 2\omega$, $g_k = 2c^2 k$, $g_p = -1$; тогда групповая скорость $u = c\sqrt{\varepsilon(\omega)}$, где $\varepsilon(\omega) = 1 - p/\omega^2$. Из уравнения (8а) следует, что частота ω растет при $\partial p/\partial t > 0$; в частности, при $\partial p/\partial x = 0$, $k = \text{const}$ имеем $\omega^2(t) = c^2 k + p(t)$.

На этот раз в уравнении (20) не содержится членов, содержащих производные параметров $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial x}$, так что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = \frac{\partial \omega}{\partial t} + c^2 \frac{\partial k}{\partial x}$, $\gamma = \gamma_0 = 0$. Соотношение (12) теперь справедливо и для переменных $p(x, t)$ и дает $\int \omega A^2 dx = \text{const}$. Тогда для однородного волнового пакета $\left(\frac{\partial k}{\partial x} = 0\right)$ $A^2(t) \sim 1/\omega(t)$, т.е. амплитуда переменной $f(x, t)$ в (20) изменяется обратно-пропорционально $\sqrt{\omega(t)}$.

Энергетическая интерпретация этого соотношения, однако, не столь однозначна. Дело в том, что физическая размерность самой функции $f(x, t)$ в (20) для одной и той же волновой системы может быть различной. Например, одинаковый закон изменения концентрации плазмы $N(x, t)$ может быть обусловлен движением неоднородной плазмы (при этом в уравнении (20) переменная f^* соответствует векторному потенциалу $\vec{A}(x, t)$ [11, 13]) либо действием ионизирующих источников (в последнем случае переменная $f(x, t)$ в (20) совпадает с напряженностью электрического поля $\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t$ [2, 8]). Ясно, что в этих двух случаях энергетические величины по-разному выражаются через амплитуду $A(x, t)$ в (11),

(12). Так, плотность энергии электромагнитного поля в плазме пропорциональна квадрату амплитуды \vec{E} , которая связана с амплитудой потенциала \vec{A} как $\vec{E} \sim \omega A$. Поскольку в случае движущейся плазмы соотношение $A^2(t) \sim 1/\omega(t)$ относится к амплитуде потенциала, то для энергии волн фактически имеет место инвариант (186). Во втором же случае, в соотношении (12) величине $A(x, t)$ соответствует напряженность поля \vec{E} , а для энергии волнового пакета тогда получаем другой инвариант:

$$W(t) \cdot \omega(t) = \text{const}. \quad (22)$$

Иными словами, при повышении электронной концентрации плазмы во времени из-за ионизации энергия электромагнитной волны убывает $\sim \omega^{-1}(t)$ (см. также [5, 8, 9]).

в). Пример диссипативной системы. В заключение в качестве примера нестационарной системы, обладающей и дисперсией, и диссипацией, рассмотрим столкновительную модель плазмы, концентрация которой произвольно изменяется из-за одновременно идущих процессов ионизации и рекомбинации. Будем исходить из полученного в (11) соотношения между наведенным током \vec{j} и полем \vec{E} в интегральной форме

$$\vec{j}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{\sigma}(\tau, t) \vec{E}(t') dt', \quad \hat{\sigma}(\tau, t) = p(t - \tau) e^{-\nu\tau}, \quad (23a)$$

где, как и в (20), $p = \omega_p^2 \sim N(x, t)$; $\nu = \nu_0 + \nu_r$, где ν_0 — эффективная частота упругих столкновений, ν_r — относительное число рекомбинирующих электронов за единицу времени, $\tau = t - t'$. Соотношение (23a) может быть переписано в дифференциальном виде:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \nu \vec{j} = p(t) \vec{E}(t). \quad (23b)$$

Нетрудно видеть, что из уравнений Максвелла совместно с (23) вытекает уравнение третьего порядка для величины $f = E(x, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (pf). \quad (24)$$

Отнеся, согласно вышесказанному, члены $\sim \nu$ и $\partial p / \partial t$ к уравнениям для амплитуд и выбрав в (6) $\varkappa = i$, имеем

$$G(\omega, k, p) = \omega(\omega^2 - c^2 k^2 - p) = 0. \quad (25)$$

Второй корень дисперсионного уравнения совпадает с (21), так что для частоты $\omega(x, t)$ остаются справедливыми все соотношения, полученные

в предыдущем примере; в частности, частота будет повышаться или понижаться, в зависимости от результирующего знака $\partial N/\partial t$. Коэффициенты, входящие в уравнение (11), теперь оказываются равными

$$g_{\omega} = 3\omega^2 - c^2 k^2 - p = 2\omega^2, \quad g_k = 2c^2 \omega k, \quad (26)$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial p}{\partial t} + \nu p, \quad \gamma = \frac{\partial p}{\partial t} - 2\nu p.$$

Поскольку здесь $\gamma \neq 0$, равенство (12) не выполняется; с учетом (8) уравнение (11a) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega A^2) + \frac{\partial}{\partial x}(u\omega A^2) = -\frac{\nu p}{\omega^2} A^2. \quad (27)$$

Отсюда следует, что при $\nu = \nu_0 + \nu_r > 0$ величина $\int \omega A^2 dx \sim W \cdot \omega$ убывает, т.е. как упругие столкновения (ν_0), так и рекомбинации (ν_r) приводят к дополнительным потерям энергии, что согласуется со сказанным в [9]. В пределе при $\nu \rightarrow 0$ соотношение (27) переходит в (22), что и естественно.

Таким образом, использованный в данной работе подход, основанный на вытекающих из уравнения (1) дисперсионных соотношениях, позволяет с единых позиций проанализировать закономерности параметрического преобразования спектральных и амплитудно-энергетических характеристик волн в произвольных слабонестационарных системах, различных по физической природе и закону дисперсии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Savage R. L., Brogle R. P., Mori W. B., and Joshi C. // IEEE Trans. Plasma Sci., 1993. V. 21. № 1. P. 5.
2. Banos A., Mori W. B., and Dawson J. M. // Jbid. P. 57.
3. Kalluri D. K., Goteti V. R., and Sessler A. M. // Jbid. P. 70.
4. Бакунов М. И., Жуков С. Н. // Радиотехника и электроника, 1991. Т. 36. № 1. С. 118.
5. Степанов Н. С. // Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. № 7. С. 623.
6. Островский Л. А., Степанов Н. С. // Изв. вузов. Радиофизика, 1971. Т. 14. № 4. С. 489.
7. Kravtsov Yu. A., Ostrovsky L. A., and Stepanov N. S. // Proc. IEEE, 1974. V. 62. № 11. P. 1492.
8. Миллер М. А., Сорокин Ю. М., Степанов Н. С. // УФН, 1977. Т. 121. № 3. С. 525.
9. Степанов Н. С. // Изв. вузов. Радиофизика, 1976. Т. 19. № 7. С. 960.

10. Степанов Н. С. // Акустический журнал, 1962. Т. 8. № 1. С. 139.
11. Степанов Н. С. // Изв. вузов. Радиофизика, 1968. Т. 11. № 5. С. 700.
12. Witham G. B. // J. Fluid Mech., 1965. V. 22. № 2. P. 273.
13. Сорокин Ю. М., Степанов Н. С. // ПМТФ, 1972. № 1. С. 31.
14. Морс Ф. М., Фешбах. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1960.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
22 февраля 1994 г.

**ON ADIABATIC TRANSFORMATION OF SPECTRAL AND ENERGY
CHARACTERISTICS OF WAVES IN ONE-DIMENSIONAL PARAMETRIC
SYSTEMS**

N. S. Stepanov

Based on a general form of differential equations, the "shortened" equations describing the transformation of frequency and energy characteristics of waves in the one-dimensional system with slowly varying parameters are obtained and analyzed. The problem of the adiabatic invariant in such systems at arbitrary dispersion law is discussed. The general relationships are illustrated for some physical examples.

УДК 533.951

К ТЕОРИИ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ БЫСТРОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ЧЕРЕЗ ПЛАЗМЕННЫЙ СЛОЙ

Г. Г. Матевосян, Г. Б. Нерсисян

Рассмотрено прохождение быстрой нерелятивистской заряженной частицы через плазменный слой. В модели холодной плазмы проанализировано изменение во времени и пространстве скалярного потенциала и плотности индуцированных частицей поверхностных зарядов, а также изменение энергии частицы возникающее при пересечении границ слоя.

Известно, что возбуждение кильватерных волн [1] при вхождении быстрой заряженной частицы в среду или их исчезновение при выходе частицы из среды связаны с целой совокупностью переходных поляризационных процессов, возникающих вблизи границы (см., например, [2, 3]). Из этих процессов ранее исследовалось возбуждение поверхностных волн [4–6] и связанная с этим дополнительная потеря энергии.

Исследование возбуждения кильватерных волн быстрой заряженной частицей, при наличии границ раздела, и возникающих при этом приповерхностных поляризационных процессов имеет важное значение в различных приложениях. Например, задачи эмиссионной электроники, электронной оптики [2], теория конвой-электронов [7], теория распада молекулярных ионов в тонких фольгах [8] и др., требуют знания электрического поля частицы, пересекающей границы раздела вакуума и среды.

Обычно при рассмотрении приповерхностных поляризационных процессов предполагают, что среда полубесконечна. Однако в реальных экспериментах применяются фольги, в которых длина, возбуждаемой частицей, кильватерной волны больше или порядка толщины слоя [1–8].

В настоящей работе, в модели холодной плазмы, найдены выражения для скалярного потенциала, плотности поверхностного индуцированного заряда, а также выражения для изменения энергии частицы, возникающего при пересечении границ плазменного слоя.

Рассмотрим нерелятивистскую частицу с зарядом Q , движущуюся со скоростью u вдоль оси z (координата частицы определяется формулой $z_0 = ut$), которая перпендикулярна плоским границам слоя вещества, с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega)$ и занимающего область $0 \leq z \leq a$.

Предположим, что среда обладает только временной дисперсией и её диэлектрическая проницаемость зависит от частоты изменения электрического поля. Из уравнения $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi Q \delta(\vec{\rho}) \delta(z - ut)$, и условий непрерывности при $z = 0$; a нормальной компоненты вектора индукции и тангенциальной компоненты вектора напряжённости электрического поля, найдём для потенциала φ выражения ($\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$)

$$\varphi(\vec{\chi}, \omega, z) = G_0 \left[\exp\left(i \frac{\omega}{u} z\right) + \alpha e^{\chi z} \right], \quad z < 0 \quad (1)$$

$$\varphi(\vec{\chi}, \omega, z) = \frac{G_0}{\mathcal{D}(\chi, \omega)} \left[\exp\left(i \frac{\omega}{u} z\right) + \beta e^{-\chi z} + \gamma \exp[-\chi(a - z)] \right], \quad 0 \leq z \leq 0 \quad (2)$$

$$\varphi(\vec{\chi}, \omega, z) = G_0 \left[\exp\left(i \frac{\omega}{u} z\right) + \delta \exp[-\chi(z - a)] \right], \quad z > a, \quad (3)$$

где $\vec{\chi}, \omega$ — переменные, соответствующие разложению Фурье по $\vec{\rho}$ и t ,

$$G_0 = \frac{Qu}{2\pi^2(\omega^2 + \chi^2 u^2)}, \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{2(1 - \varepsilon)}{\mathcal{D}(\chi, \omega)} \left[\operatorname{ch}(\chi a) + \varepsilon \operatorname{sh}(\chi a) - \exp\left(i \frac{\omega}{u} a\right) \right], \quad (5)$$

$$\beta = \frac{\varepsilon - 1}{\mathcal{D}(\chi, \omega)} \left[(\varepsilon + 1) e^{\chi a} + (\varepsilon - 1) \exp\left(i \frac{\omega}{u} a\right) \right], \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon - 1}{\mathcal{D}(\chi, \omega)} \left[\varepsilon - 1 + (\varepsilon + 1) e^{\chi a} \cdot \exp\left(i \frac{\omega}{u} a\right) \right], \quad (7)$$

$$\delta = \frac{2(1 - \varepsilon)}{\mathcal{D}(\chi, \omega)} \left\{ [\operatorname{ch}(\chi a) + \varepsilon \operatorname{sh}(\chi a)] \exp\left(i \frac{\omega}{u} a\right) - 1 \right\}, \quad (8)$$

$$\mathcal{D}(\chi, \omega) = (\varepsilon + 1)^2 e^{\chi a} - (\varepsilon - 1)^2 e^{-\chi a}. \quad (9)$$

Первые слагаемые в выражениях (1)–(3) определяют потенциал частицы в безграничных средах, а остальные — потенциалы, возникающие из-за наличия границ раздела.

Равенство знаменателя нулю, в формулах (5)–(8), даёт закон дисперсии собственных поверхностных колебаний слоя. В общем случае дисперсионное уравнение $\mathcal{D}(\chi, \omega) = 0$ имеет несколько решений, каждое из которых характеризует частоту поверхностных волн [4].

Рассмотрим изменение энергии частицы, связанное с действием приповерхностных полей (обычные поляризационные потери, определяемые первым слагаемым в формуле (2), не учитываются). Из (1)–(3) найдём действующую на частицу силу и соответствующее изменение энергии ча-

стицы, прошедшей через слой

$$\mathcal{W}(a) = -\frac{4Q^2}{\pi u^2} \int_0^\infty \chi^2 d\chi \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{\left(\chi^2 + \frac{\omega^2}{u^2}\right)^2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{ch}(\chi a) + \varepsilon \operatorname{sh}(\chi a) - \cos\left(\frac{\omega}{u} a\right)}{(\varepsilon^2 + 1) \operatorname{sh}(\chi a) + 2\varepsilon \operatorname{ch}(\chi a)} \right\}. \quad (10)$$

Из формулы (10) видно, что вероятность потерь энергии максимальна либо при $\varepsilon(\omega) = 0$, либо при выполнении дисперсионного уравнения $\mathcal{D}(\chi, \omega) = 0$.

Рассмотрим поляризационные эффекты в плазменном слое. Для пробной частицы, скорость которой u велика по сравнению со средними скоростями электронов среды v_0 , широко используется [9] плазменная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (11)$$

где ω_p — плазменная частота, ν — эффективная частота столкновений электронов ($\nu \ll \omega_p$). (Применительно к сплошной среде в используемом нами макроскопическом подходе также предполагается, что длина плазменной волны намного превышает межатомные расстояния).

Рассмотрим процесс приближения частицы из вакуума к границе плазменного слоя. Для потенциала из формул (1)–(3) при $t < 0$ найдём

$$\varphi = \frac{Q}{(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} - Qk_0 \int_0^\infty dx \mathcal{Y}_0(xk_0\rho) \exp(xk_0z) \mathcal{A}(x, \mu, t), \quad (12)$$

$$z < 0$$

$$\varphi = \varphi_0 + Qk_0 \int_0^\infty dx \mathcal{Y}_0(xk_0\rho) \left\{ \mathcal{B}(x, \mu, t) \exp(-xk_0z) + \right. \\ \left. + \mathcal{C}(x, \mu, t) \exp[-xk_0(a - z)] \right\}, \quad 0 \leq z \leq a \quad (13)$$

$$\varphi = \frac{Q}{(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} - Qk_0 \int_0^\infty dx \mathcal{Y}_0(xk_0\rho) \exp[-xk_0(z - a)] \mathcal{D}(x, \mu, t), \quad (14)$$

$$z > a,$$

где $\varphi_0 = \varphi_0(\vec{\rho}, \xi)$ — потенциал в безграничной холодной плазме [3], $k_0 = \omega/u$, $\omega_0 = \omega_p/\sqrt{2}$ — частота поверхностных волн в полуограниченной

плазме, $\mu = k_0 a$. Коэффициенты A , B , C и D при $t < 0$ имеют следующий вид

$$A(x, \mu, t) = \frac{(\alpha_- \alpha_+)^2 (x^2 + 1) \exp(x\omega_0 t)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)}, \quad (15)$$

$$B(x, \mu, t) = \frac{x^2 [x^2 + 1 + \exp(-2x\mu)] \exp(x\omega_0 t)}{(x^2 + 2)(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)}, \quad (16)$$

$$C(x, \mu, t) = \frac{x^2 \exp(x\omega_0 \tau)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)}, \quad (17)$$

$$D(x, \mu, t) = \frac{(\alpha_- \alpha_+)^2 \exp(x\omega_0 \tau)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)}, \quad (18)$$

где $\tau = t - a/u$, $\alpha_{\pm}^2 = 1 \pm e^{-x\mu}$.

В формулах (12)–(14) первые слагаемые соответствуют потенциалу частицы в безграничной среде, а остальные — потенциалу, возникающему из-за границ слоя. Видно, что потенциал “изображения”, как и в случае полуограниченной плазмы [2, 3], не является кулоновским, хотя зависит от переменной $|z| + u|t|$.

Потенциал “изображения” создаётся поверхностными зарядами, плотности которых на каждой из границ $\sigma_0(\rho, t)$ и $\sigma_a(\rho, t)$ определяются скачком нормальной компоненты электрического поля на границах слоя

$$\sigma_i(\rho, t) = \frac{Q k_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} dx \mathcal{Y}_0(x k_0 \rho) x \sigma_i(x, \mu, t), \quad i = 0, a \quad (19)$$

где

$$\sigma_0(x, \mu, t) = -\frac{(x^2 + \alpha_-^2 \alpha_+^2) \exp(x\omega_0 t)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)}, \quad (20)$$

$$\sigma_a(x, \mu, t) = \frac{x^2 \exp(x\omega_0 \tau)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)}. \quad (21)$$

Если выполняется неравенство $u|t| > \max[a, k_0^{-1}]$, то $\sigma_a \simeq 0$. Выражения для потенциала и плотности поверхностного заряда на передней границе слоя σ_0 совпадают с известными электростатическими значениями [10]. Если выполняется обратное неравенство и частица находится вблизи границы, то распределения зарядов отличаются от электростатического. В частности, в момент пересечения частицей границы ($t = 0$), согласно формулам (19)–(21), поверхностная плотность заряда на первой границе ($z = 0$) сосредоточена в области с радиусом $\rho_0 \sim k_0^{-1}$. На второй границе ($z = a$) полный заряд отсутствует, хотя плотность заряда отлична от нуля, но его распределение имеет дипольный характер (рис. 1).

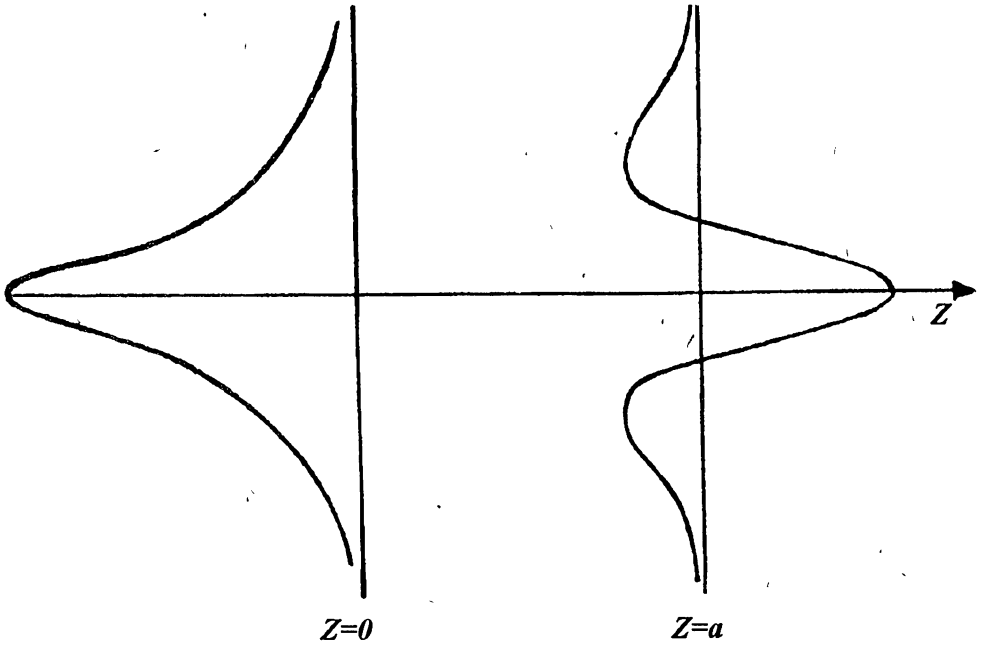


Рис. 1.

По мере приближения частицы к границе слоя радиус области локализации положительного заряда на задней границе сужается по закону $\rho_0 \simeq \ell_a$, где ℓ_a — расстояние частицы от второй границы слоя. При этом увеличиваются значения максимума и минимума в распределении $\sigma_a(\rho, t)$.

После вхождения частицы в слой и в процессе её движения в плазме ($0 \leq t \leq \frac{a}{u}$) согласно формулам (5)–(8) коэффициенты A, B, C и D , определяющие потенциал, имеют вид

$$A(x, \mu, t) = 2e^{-\mu x} \cdot \frac{e^{-x\omega_0 t} \cdot \text{sh}(x\mu) - x^2 \text{sh}(x\omega_0 \tau)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} + f_+ + f_-, \quad (22)$$

$$B(x, \mu, t) = \frac{x^2[x^2 + 1 + \exp(2x\omega_0 \tau)] \exp(-x\omega_0 t)}{(x^2 + 2)(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} + \\ + f_p - \frac{1}{\alpha_+^2} f_- - \frac{1}{\alpha_-^2} f_+, \quad (23)$$

$$C(x, \mu, t) = \frac{x^2[x^2 + 1 + \exp(-2x\omega_0 t)] \exp(x\omega_0 \tau)}{(x^2 + 2)(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} - e^{-\mu x} \times \\ \times f_p - \frac{1}{\alpha_-^2} f_- + \frac{1}{\alpha_+^2} f_+, \quad (24)$$

$$D(x, \mu, t) = 2e^{-\mu x} \frac{x^2 \operatorname{sh}(x\omega_0 t) + \exp(x\omega_0 \tau) \operatorname{sh}(x\mu)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} + f_- - f_+, \quad (25)$$

$$f_{\pm}(x, \mu, t) = \frac{x\alpha_{\pm}}{x^2 + \alpha_{\pm}^2} \exp\left(-\frac{\nu t}{2}\right) \sin(\omega_0 t \alpha_{\pm}), \quad (26)$$

$$f_p(x, \mu, t) = \frac{2\sqrt{2}x}{(x^2 + 2)(\alpha_- \alpha_+)^2} \exp\left(-\frac{\nu t}{2}\right) \sin(\omega_p t). \quad (27)$$

Потенциал, связанный с наличием границ слоя, отличен от нуля вблизи границ на масштабе k_0^{-1} . Слагаемые, определяющие этот потенциал разделяются на две группы, которые различаются поведением во времени. Первые слагаемые в формулах для A , B , C и D изменяются во времени монотонно и потенциал, соответствующий им, отличен от нуля только в интервале времени $\lesssim \omega_0^{-1}$ вблизи первой и второй границ. Если $a \lesssim k_0^{-1}$, то и остальные слагаемые в формулах (22)–(25) определяют монотонную зависимость от времени. Если толщина слоя достаточно велика ($a \gtrsim k_0^{-1}$), то соответствующие слагаемые определяют потенциал, осциллирующий на плазменной (ω_p) и поверхностной (ω_0) частотах и затухающий из-за диссипации.

Плотности поверхностных зарядов при $0 \leq t \leq \frac{a}{u}$ имеют вид

$$\sigma_0(x, \mu, t) = \frac{x^2[x^2 + 1 + \exp(2x\omega_0 \tau)] \exp(-x\omega_0 t)}{(x^2 + 2)(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} - \\ - \frac{2}{x^2 + 2} \exp\left(-\frac{\nu t}{2}\right) \cos(\omega_p t) - \frac{1}{\alpha_-^2} f_+ - \frac{1}{\alpha_+^2} f_- + \\ + e^{-\mu x} \operatorname{ch}(\mu x) f_p, \quad (28)$$

$$\sigma_a(x, \mu, t) = \frac{x^2[x^2 + 1 + \exp(-2x\omega_0 t)] \exp(x\omega_0 \tau)}{(x^2 + 2)(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} + \frac{1}{\alpha_-^2} f_+ - \\ - \frac{1}{\alpha_+^2} f_- - e^{-\mu x} f_p. \quad (29)$$

Все слагаемые в формуле (28), кроме второго, описывают дипольное

распределение заряда на первой границе слоя. Только второе слагаемое даёт вклад в полный поверхностный заряд на первой границе слоя.

Если частица вышла из плазмы ($\tau = t - \frac{a}{u} > 0$), то коэффициенты в выражениях для потенциала имеют вид

$$A(x, \mu, t) = \frac{2e^{-\mu x} \operatorname{sh}(\mu x) \exp(-x\omega_0 t)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} + f_-(x, \mu, t) + f_-(x, \mu, \tau) + f_+(x, \mu, t) - f_+(x, \mu, \tau), \quad (30)$$

$$B(x, \mu, t) = \frac{x^2 \exp(-x\omega_0 t)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} - \frac{1}{\alpha_+^2} [f_-(x, \mu, \tau) + f_-(x, \mu, t)] + \frac{1}{\alpha_-^2} [f_+(x, \mu, \tau) - f_+(x, \mu, t)] + f_p(x, \mu, t) - e^{-\mu x} f_p(x, \mu, \tau), \quad (31)$$

$$C(x, \mu, t) = \frac{x^2(x^2 + 1 + e^{-2x\mu}) \exp(-x\omega_0 \tau)}{(x^2 + 2)(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} - \frac{1}{\alpha_+^2} [f_-(x, \mu, t) + f_-(x, \mu, \tau)] + \frac{1}{\alpha_-^2} [f_+(x, \mu, t) - f_+(x, \mu, \tau)] + f_p(x, \mu, \tau) - e^{-\mu x} f_p(x, \mu, t), \quad (32)$$

$$D(x, \mu, t) = \frac{2(x^2 + 1) \operatorname{sh}(x\mu) \exp(-x\omega_0 t)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} + f_-(x, \mu, t) + f_-(x, \mu, \tau) + f_+(x, \mu, \tau) - f_+(x, \mu, t). \quad (33)$$

Из (30)–(33) видно, что после пересечения частицей второй границы появляются новые, осциллирующие со временем, слагаемые ($f_{\pm}(x, \mu, \tau)$, $f_p(x, \mu, \tau)$). Причём фаза колебаний, которые они описывают, сдвинуты относительно других осциллирующих членов на величину μ .

После выхода частицы из плазмы для плотности поверхностных зарядов имеем

$$\sigma_0(x, \mu, t) = \frac{x^2 \exp(-x\omega_0 t)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} - \frac{2}{x^2 + 2} \exp\left(-\frac{\nu t}{2}\right) \cos(\omega_p t) + e^{-\mu x} [\operatorname{ch}(\mu x) f_p(x, \mu, t) - f_p(x, \mu, \tau)] + \frac{1}{\alpha_-^2} [f_+(x, \mu, \tau) - f_+(x, \mu, t)] - \frac{1}{\alpha_+^2} [f_-(x, \mu, \tau) + f_-(x, \mu, t)], \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \sigma_a(x, \mu, t) = & -\frac{(x^2 + \alpha_-^2 \alpha_+^2) \exp(-x\omega_0\tau)}{(x^2 + \alpha_-^2)(x^2 + \alpha_+^2)} + \frac{2}{x^2 + 2} \exp\left(-\frac{\nu\tau}{2}\right) \cos(\omega_p\tau) + \\ & + e^{-\mu x} [\operatorname{ch}(\mu x) f_p(x, \mu, \tau) - f_p(x, \mu, t)] + \\ & + \frac{1}{\alpha_-^2} [f_+(x, \mu, t) - f_+(x, \mu, \tau)] - \frac{1}{\alpha_+^2} [f_-(x, \mu, t) + f_-(x, \mu, \tau)]. \end{aligned} \quad (35)$$

Если во всех полученных формулах (12)–(35) перейти к пределу $a \gg k_0^{-1}$, то получатся выражения для потенциалов и плотностей зарядов, полученных в [3].

Во всех формулах (22)–(35) колебания, с частотой $\omega_0\alpha_-$, соответствуют тангенциальным модам [11]. Потенциал и радиальная компонента электрического поля в этих колебаниях симметричны, а нормальная компонента поля антисимметрична относительно центра слоя (плоскость $z = \frac{a}{2}$). Плотность заряда в этих колебаниях относительно центра слоя симметрична. Колебания с частотой $\omega_0\alpha_+$ — отвечают нормальным модам [11]. Из формул (22)–(35) видно, что в этих колебаниях потенциал и радиальная компонента поля антисимметричны, а нормальная компонента поля симметрична относительно плоскости $z = \frac{a}{2}$. Плоскость заряда на границах слоя распределена относительно центра слоя антисимметрично. На рис. 2 схематически изображены потенциалы и электрические поля в тангенциальных а) и нормальных б) модах.

Рассмотрим изменение энергии частицы пролетающей через слой прозрачной плазмы ($\nu \rightarrow 0$). Используя соотношение Сохоцкого–Племеля и известное свойство δ -функции [10] из формулы (10) имеем:

$$\mathcal{W}_p(a) = 2Q^2 k_p \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}(x k_p a) - \cos(k_p a)}{\operatorname{sh}(x k_p a)}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\sigma(a) = & -2Q^2 k_0 \int_0^\infty dx \cdot x^2 \left[\frac{1 - \cos(\alpha_+ \mu)}{(x^2 + \alpha_+^2)^2} \cdot \frac{\alpha_+^2}{\alpha_-^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \cos(\alpha_- \mu)}{(x^2 + \alpha_-^2)^2} \cdot \frac{\alpha_-^2}{\alpha_+^2} \right], \end{aligned} \quad (37)$$

где $k_p \equiv \frac{\omega_p}{u}$, \mathcal{W}_p — изменение энергии частицы за счёт возбуждения поверхностных колебаний на плазменной частоте, \mathcal{W}_σ — отвечает возбуждению нормальных (первое слагаемое) и тангенциальных (второе слагаемое) поверхностных колебаний. Полное изменение энергии есть сумма \mathcal{W}_p и \mathcal{W}_σ .

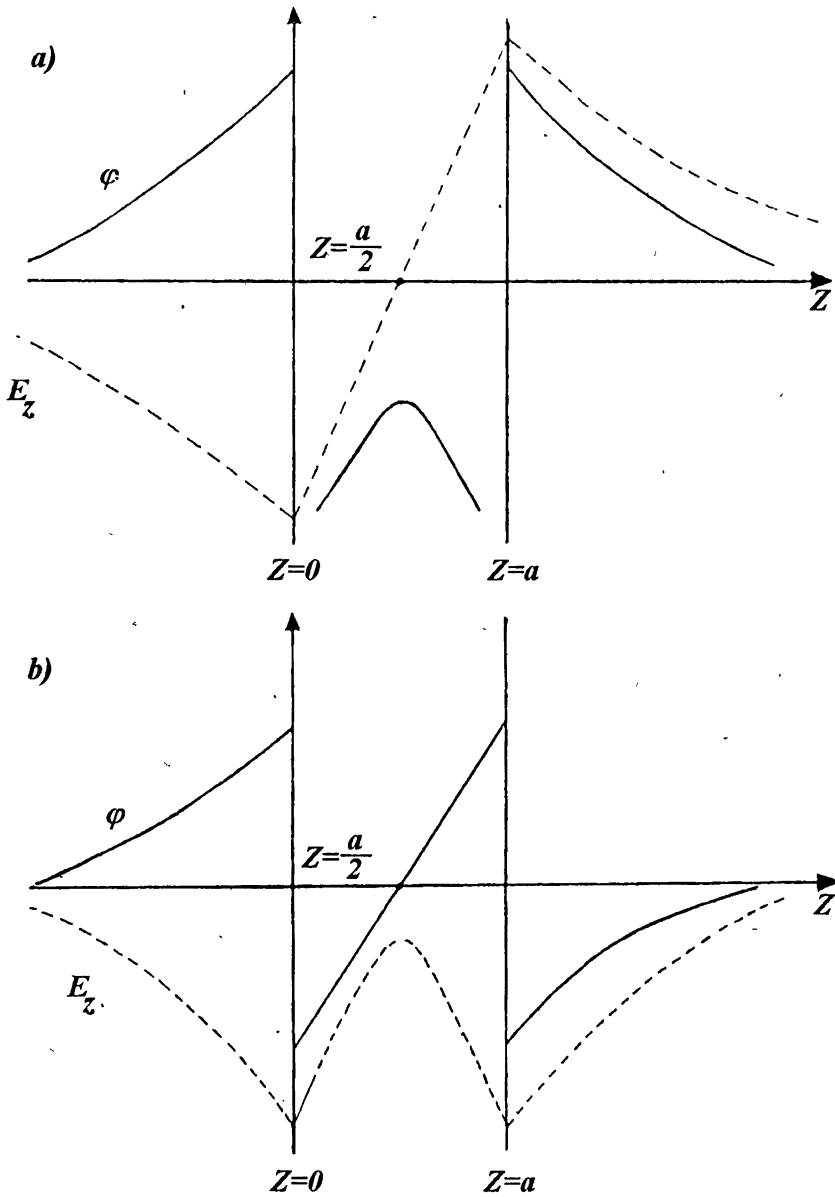


Рис. 2.

Колебания поля на плазменной частоте вне пластинки отсутствуют (см. формулы (22)–(27) и (30)–(33)). Это объясняется тем, что поверхностный заряд осциллируя на плазменной частоте, экранирует кильватерное поле частицы вне плазмы. Поэтому потери энергии $\mathcal{W}_p(a)$ связаны с пересечением частицей границ плазмы. Из формулы (36) видно, что $\mathcal{W}_p(a) > 0$ и взаимодействуя с плазменными поверхностными колебаниями частица ускоряется. Величина $\mathcal{W}_\sigma(a)$ — отрицательна для любых a , что соответствует торможению частицы.

Рассмотрим изменение энергии частицы при малых толщинах слоя, когда $a < u/\omega_p$. С точностью слагаемых порядка $(k_p a)^2$ из (36) и (37) имеем

$$\mathcal{W}_p(a) \simeq (Qk_p)^2 a \left(\ln \frac{1}{k_p a} + \mathbb{C} \right), \quad (38)$$

$$\mathcal{W}_\sigma(a) \simeq -(Qk_p)^2 a \left(2 \ln \frac{1}{k_0 a} - \frac{1}{2} + \mathbb{C} \right); \quad (39)$$

где

$$\mathbb{C} = 1 + \ln 2 - \int_0^1 dx \frac{x - \text{th}(x)}{x^2} - \int_1^\infty dx \frac{1 - \text{th}(x)}{x^2} \simeq 1,48.$$

Полные потери на возбуждение поверхностных колебаний, как следует из формул (38) и (39), равны

$$\mathcal{W}(a) = -(Qk_0)^2 a \left(2 \ln \frac{1}{k_0 a} + \ln 2 - 1 \right) < 0 \quad (40)$$

и превышают обычные поляризационные потери энергии [10], если $a \lesssim v_0/\omega_p$.

При больших толщинах слоя, когда $a > u/\omega_p$, поляризационные потери энергии являются основными. В этом случае из формул (36), (37) имеем

$$\mathcal{W}_p(a)/\mathcal{W}_{p0} \simeq 1 + \frac{14\xi(3)}{\pi(k_p a)^3} \left[\frac{1}{7} - \cos(k_p a) \right], \quad (41)$$

$$|\mathcal{W}_\sigma(a)|/\mathcal{W}_{\sigma0} \simeq 1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\ln(k_0 a)}{k_0 a} \right]^2 \frac{\sin(k_0 a)}{k_0 a}, \quad (42)$$

где $\xi(x)$ — функция Римана ($\xi(3) \simeq 1,18$), $\mathcal{W}_{p0} = \frac{\pi}{2} Q^2 k_p$, $\mathcal{W}_{\sigma0} = -\pi Q^2 k_0$ — значения $\mathcal{W}_p(a)$ и $\mathcal{W}_\sigma(a)$ при бесконечной величине a . Видно, что они совпадают с удвоенными значениями найденными в [3]. Как следует из (38), (39), (41) и (42) отношение $|\mathcal{W}_\sigma|/\mathcal{W}_p$ равно 2 при $k_p a < 1$ и $\sqrt{2}$ при $k_p a > 1$.

Зависимости $W_p(a)$ и $W_\sigma(a)$ от толщины слоя a показаны на рис. 3. Видно, что при вычислении потерь энергии слой плазмы можно заменить на две независимые границы, разделяющие полупространства, если толщина слоя порядка или более, чем длина плазменной волны $a > u/\omega_p$.

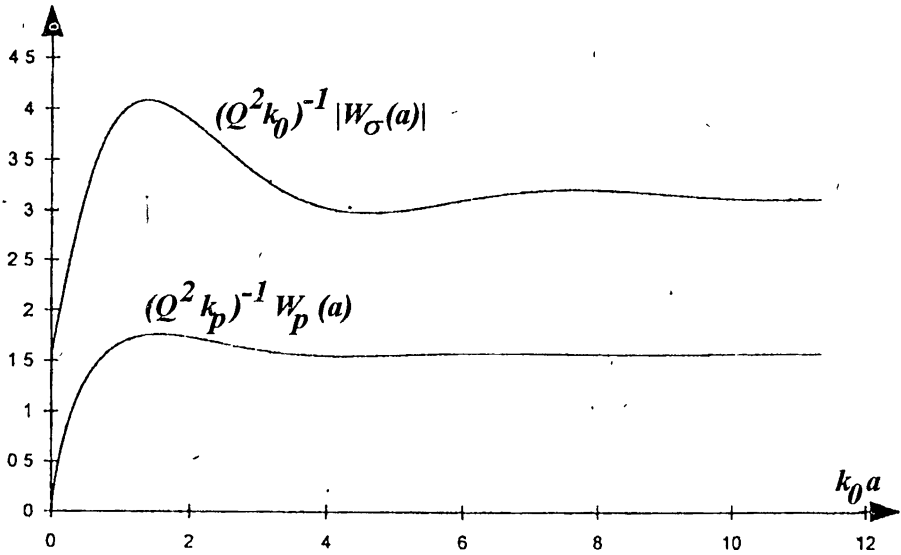


Рис. 3.

Изменения энергии, связанные с поверхностными эффектами, осциллируют в зависимости от толщины слоя вблизи значений W_{p0} и $W_{\sigma 0}$. Такая зависимость не была обнаружена в работе [4]. Причина этих осцилляций следующая. Полное изменение энергии частицы под воздействием монотонных приповерхностных полей (первые слагаемые в формулах (15), (23), (24) и (33)) равно нулю. Это означает, что торможение частицы после вылета из плазмы, вследствие взаимодействия с зарядом “изображения”, точно компенсирует прирост энергии частицы при подлёте к слою. Так что полное изменение энергии частицы (помимо Боровских потерь) полностью определяется, осциллирующими со временем слагаемыми, входящими в выражения (23), (24) и (33). Причём слагаемые пропорциональные $f_p(x, \mu, t)$ определяют $W_p(a)$, а все остальные $W_\sigma(a)$. Поскольку на частицу действуют осциллирующие силы, с переменными в течение времени амплитудами, то при $a < u/\omega_p$ потери зависят от a монотонно, а при $a > u/\omega_p$ осциллируют вблизи значений W_{p0} и $W_{\sigma 0}$.

В заключение выражаем благодарность профессору Л. М. Горбунову (ФИРАН) за полезные обсуждения рассмотренных вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bohr N., K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. 1948. V. 18. P. 1.
2. Echenique P. M. et al. // Phys. Rev. B. 1981. V. 23. P. 6486.
3. Горбунов Л. М., Матевосян Г. Г., Нерсисян Г. Б. // ЖЭТФ. 1992. Т. 102. С. 841.
4. Ritchie R. H. // Phys. Rev. 1957. V. 106. P. 874.
5. Эйдман В. Я. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1965. Т. 8. С. 188.
6. Пафомов В. Е., Фетисов Е. П. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 965.
7. Koyama A. et al. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 3156.
8. Kumbartzki et al. // Nucl. Instr. and Meth. 1982. V. 194. P. 291.
9. Neelavatzki V. N. et al. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 302.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
11. Stern E. A., Ferrell R. A. // Phys. Rev. 1960. V. 120. P. 130.

Институт радиофизики и
электроники НАН Армении,
г. Аштарак

Поступила в редакцию
16 мая 1995 г.

TO THE THEORY OF POLARIZATION PROCESSES PRODUCED BY A CHARGED PARTICLE PASSING THROUGH A PLASMA LAYER

G. G. Matevosyan, G. B. Nersisyan

The passage of a fast non-relativistic charged particle through a plasma layer has been considered. In the cold plasma model it has been analysed the temporal and spatial changes of the scalar potential and density of the surface charge induced by the particle as well as the particle energy change when crossing the layer boundaries.

ПОДАВЛЕНИЕ РАДИАЦИОННОГО ПРЕДЕЛА ПРИ АВТОРЕЗОНАНСНОМ УСКОРЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В. П. Милантьев

Рассмотрено авторезонансное движение заряженной частицы в поле поперечной электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью света вдоль постоянного магнитного поля с учётом радиационного трения. Показано, что нарушение синхронизма частицы с волной из-за радиационного трения может быть компенсировано с помощью внешнего электростатического поля, параллельного магнитному полю.

1. Последнее время заметно возрос интерес к авторезонансному движению заряженных частиц в поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью света вдоль постоянного магнитного поля [1, 2]. Это связано с предложениями о создании авторезонансного лазерного ускорителя [3], мазера на циклотронном авторезонансе [4] и т.д. В работах [5, 6] было показано, что механизм авторезонансного ускорения имеет принципиальный предел, обусловленный радиационными потерями частицы.

Существование предела вызвано тем, что реакция излучения приводит к смещению фазы скорости частицы по отношению к полю волны. Это нарушает синхронизм частицы с волной и приводит к ограничению максимально допустимой энергии ускоряемой частицы. В данной работе рассматривается влияние продольного электростатического поля на ускорение частицы в авторезонансном режиме.

Заметим, что вопрос о возможности поддержания авторезонанса с помощью электростатического поля обсуждался в работе [7], где однако рассматривалась не вакуумная волна и не учитывалась сила реакции излучения. Продольное электростатическое поле, как и реакция излучения, приводит к сбою фазы. Поэтому при определённых условиях эти два конкурирующих эффекта могут взаимно ослабить или даже полностью компенсировать друг друга. Этот вопрос обсуждается в данной работе.

2. Будем рассматривать авторезонансное движение заряженной частицы в поле циркулярно-поляризованной волны, распространяющейся

вдоль постоянного магнитного поля. Этот случай можно считать оптимальным, поскольку при пренебрежении радиационными и другими эффектами он допускает точное аналитическое решение [8], а темп ускорения в циркулярно-поляризованной волне в два раза выше, чем в случае волны с линейной поляризацией [2].

Итак, зададим электромагнитное поле в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\sim}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\sim}, \quad (1)$$

где $\vec{E}_0 = (0, 0, E_0(z))$ — электростатическое поле; $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ — постоянное магнитное поле; $\vec{E}_{\sim}, \vec{B}_{\sim}$ — поля электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью света вдоль \vec{B}_0 :

$$\vec{E}_{\sim} = (E \cos \theta, E \sin \theta, 0) \quad (2)$$

$$\vec{B}_{\sim} = (-E \sin \theta, E \cos \theta, 0),$$

где θ — фаза волны, описываемая уравнением

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega + kv_z, \quad (3)$$

ω, k — частота и волновое число, соответственно.

Введём безразмерный импульс частицы $\vec{P} = \frac{\vec{P}}{m_0 c}$, безразмерное время $\tau = \omega t$, безразмерную амплитуду волны $\epsilon = \frac{eE}{m_0 c \omega}$, и выделим циклотронное вращение частицы с помощью формул

$$P_x = P_{\perp} \cos \theta_c, \quad P_y = P_{\perp} \sin \theta_c, \quad (4)$$

где θ_c — фаза циклотронного вращения, P_{\perp} — поперечный импульс, m_0 — масса покоя частицы, e — её заряд.

Удобно также ввести безразмерный интервал $ds = \frac{d\tau}{\gamma}$, где $\gamma = \sqrt{1 + P_{\perp}^2 + P_z^2}$ — релятивистский фактор (полная безразмерная энергия частицы).

Тогда, с учётом известного выражения для силы радиационного трения, релятивистские уравнения движения частицы представляются в виде

$$\frac{dP_z}{ds} = \epsilon P_{\perp} \cos \Psi - \mu \Omega^2 P_z P_{\perp}^2 + \epsilon_0 f \gamma \quad (5)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \epsilon P_{\perp} \cos \Psi - \mu \Omega^2 \gamma P_{\perp}^2 + \epsilon_0 f P_z \quad (6)$$

$$\frac{dP_{\perp}}{ds} = \varepsilon(\gamma - P_z) \cos \Psi - \mu P_{\perp}^2 \Omega^2 (\gamma^2 - P_z^2) \quad (7)$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = \Omega - \gamma + P_z - \varepsilon \frac{\gamma - P_z}{P_{\perp}} \sin \Psi \quad (8)$$

Здесь $\Psi = \theta - \theta_c$ — резонансная разность фаз, $\Omega = \frac{eB_0}{m_0 c \omega} \equiv \frac{\omega_{c0}}{\omega}$ — отношение классической гирочастоты к частоте волны, параметр $\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega}{m_0 c^3} \equiv \frac{4\pi}{3} \left(\frac{r_0}{\lambda} \right) \ll 1$, где r_0 — классический радиус частицы, λ — длина волны, параметр $\varepsilon_0 = \frac{eE_0}{m_0 c \omega}$ определяется характерным значением электростатического поля E_0 , $f(Z) = \frac{E_0(z)}{E_0}$. В выписанных уравнениях отброшены малые члены порядка $\mu\varepsilon$ и выше.

3. При полном пренебрежении радиационными потерями ($\mu = 0$) и отсутствии электростатического поля ($\varepsilon_0 = 0$) из уравнений (5), (6) следует, что разность $\gamma - P_z = Y$ является интегралом движения, и если постоянная $Y = \Omega$, то условие циклотронного резонанса частицы с волной сохраняется во всё время её движения [1, 2, 9]. Это и есть авторезонанс. При $\mu \neq 0$, $\varepsilon_0 \neq 0$ разность $\gamma - P_z$ уже не является интегралом движения. Её эволюция определяется уравнением

$$\frac{d}{ds}(\gamma - P_z) = -(\gamma - P_z)(\mu\Omega^2 P_{\perp}^2 - \varepsilon_0 f) \quad (9)$$

Если электростатическое поле не превосходит по величине поле волны ($\varepsilon_0 \lesssim \varepsilon$), то отклонение разности $\gamma - P_z$ от постоянного значения Ω согласно уравнениям (5)–(8), главным образом, отражается в уравнении для резонансной фазы Ψ .

Из (9) следует, что при отсутствии электростатического поля радиационное трение приводит к расстройке резонанса и ограничению максимально достижимой энергии частицы [5, 6]. При наличии электростатического поля вызываемое им изменение величины $\gamma - P_z$ может компенсировать её изменение из-за радиационных потерь. В этом случае авторезонансный режим может продолжаться бесконечно долго, если выполнено условие

$$\varepsilon_0 f(Z) = \mu\Omega^2 P_{\perp}^2 \quad (10)$$

Этим выражением определяется требуемый закон изменения электростатического поля.

Для оценок будем рассматривать оптимальную фазу $\Psi \approx 0$, отвечающую наиболее быстрому изменению параметров частицы [7]. Тогда из уравнения (7), пренебрегая радиационными потерями и полагая

$\gamma - P_z \approx \Omega$, получаем

$$P_{\perp} \approx \varepsilon \Omega s. \quad (11)$$

Таким образом, соотношения (10), (11) определяют тот профиль изменения электростатического поля, который обеспечивает авторезонансное движение частицы с учётом радиационного трения

$$\varepsilon_0 f(\mathcal{Z}(s)) \approx \mu \varepsilon^2 \Omega^3 s^2. \quad (12)$$

Определим теперь зависимость $\mathcal{Z}(s)$. В авторезонансном режиме имеет место соотношение [2, 9]

$$\gamma = \frac{P_{\perp}^2 + \Omega^2 + 1}{2\Omega}. \quad (13)$$

Отсюда, для частиц, достигших больших значений энергии ($\gamma \gg 1$), с использованием (11), получаем [5, 6]

$$\gamma \approx \frac{P_{\perp}^2}{2\Omega} \approx \frac{\varepsilon^2 \Omega}{2} s^2 \quad (14)$$

при этом, с той же точностью, можно считать

$$P_z \approx \gamma. \quad (14a)$$

Тогда из уравнения

$$\frac{dz}{ds} = P_z$$

следует искомая зависимость

$$\mathcal{Z}(s) \approx \frac{\varepsilon^2 \Omega}{6} s^3. \quad (15)$$

Таким образом, в ультрарелятивистском пределе (когда наиболее существенны радиационные потери) из (12), (15) получаем необходимый закон изменения электростатического поля на ускоряющем промежутке $\mathcal{Z} = z \frac{\omega}{c}$:

$$\varepsilon_0 f(\mathcal{Z}) \simeq \mathcal{A} \mathcal{Z}^{2/3}, \quad (16)$$

где

$$\mathcal{A} = \mu (6\varepsilon)^{2/3} \Omega^{7/3}.$$

По такому же закону изменяется энергия частицы в авторезонансном режиме на длине ускорения \mathcal{Z} [8].

4. Если электростатическое поле постоянно ($f = 1$), то разность $\gamma - P_z$, согласно (9), не может поддерживаться постоянной во всё время движения частицы. Учитывая (11), получаем

$$\gamma - P_z \approx \Omega - \Omega \left(\frac{\mu \varepsilon^2 \Omega^4}{3} s^3 - \varepsilon_0 s \right). \quad (17)$$

Тогда из уравнения (8) следует формула для набеге фазы

$$\Delta \Psi \approx \Omega \left(\frac{\mu \varepsilon^2 \Omega^4}{12} s^4 - \frac{\varepsilon_0}{2} s^2 \right). \quad (18)$$

Пока $\Delta \Psi \ll 1$ авторезонансный режим заметно не изменяется. При $\Delta \Psi \sim 1$ происходит нарушение фазового синхронизма частицы с волной и резонанс расстраивается. Таким образом, определяется s_{\max} :

$$s_{\max}^2 \approx \frac{3\varepsilon_0}{\mu \varepsilon^2 \Omega^4} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\mu \varepsilon^2 \Omega^3}{\varepsilon_0^2}} \right\}. \quad (19)$$

Следовательно, максимальная энергия ускоряемой частицы равна

$$\gamma_{\max} \approx \frac{P_{1\max}^2}{2\Omega} \approx \frac{3\varepsilon_0}{\mu \Omega^3}. \quad (20)$$

При отсутствии электростатического поля из формулы (18) следует оценка максимальной энергии, которую приобретает частица до срыва резонанса из-за радиационных потерь [5, 6]

$$\gamma_{\max}^0 \approx \frac{\varepsilon}{\Omega} \sqrt{\frac{3}{\mu \Omega}} = 1.65 \cdot 10^8 \frac{E}{B_0^{3/2}} \quad (\text{СГС}). \quad (21)$$

Это принципиальный предел авторезонансного механизма ускорения [5].

Отсюда видно, что этот предел может быть достаточно большим, и что он не зависит явно ни от начальных условий, ни от частоты ускоряющей волны. Например, при $E/B_0 = 10^{-2}$, $B_0 = 300$ кГц из (21) получаем $\gamma_{\max}^0 \sim 3 \cdot 10^3$.

При наложении постоянного продольного электрического поля предельная энергия ускоряемой частицы, согласно (20), ещё более возрастает

$$\gamma_{\max} \sim 291.5 \cdot 10^{18} \frac{E_0}{\lambda B_0^3} \quad (\text{СГС}). \quad (22)$$

Например, при $E_0/B_0 = 10^{-4}$, $B_0 = 300$ кГц, $\lambda = 10$ см имеем $\gamma_{\max} \sim \sim 3 \cdot 10^4$. С увеличением напряжённости электростатического поля и уменьшением длины волны предел (22) является практически недостижимым.

Заметим, что электростатическое поле может приводить к увеличению расстройки резонанса, если изменить его направление $\varepsilon_0 \rightarrow -\varepsilon_0$. В этом случае начальное условие резонанса быстро нарушается и эффективное ускорение частицы становится невозможным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдовский В. Я. // ЖЭТФ. 1961. Т. 43. Вып. 9. С. 886.
2. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. Вып. 1. С. 261.
3. Loeb A., Friedland L. // Phys. Rev. 1986. V. A33. № 3. P. 1828.
4. Ботвинник И. Е., Братман В. Л., Волков А. Б. и др. // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. Вып. 22. С. 1386.
5. Воронин В. С., Коломенский А. А. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. Вып. 4. С. 1528.
6. Красовицкий В. Б., Курилко В. И. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1964. Т. 7. № 6. С. 1193.
7. Андреев Ю. А., Давыдовский В. Я., Даниленко В. Н., Сапогин В. Г. // Изв. ВУЗов. Физика. 1980. Т. 23. № 11. С. 96.
8. Roberts C., Buchsbaum S. // Phys. Rev. 1964. V. A135. № 2. P. 381.
9. Милантьев В. П. // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 10. С. 2026.

Российский университет
дружбы народов, г. Москва

Поступила в редакцию
16 мая 1995 г.

**SUPPRESSION OF RADIATION LIMIT
AT THE AUTORESONANT ACCELERATION
OF CHARGED PARTICLES BY ELECTROSTATIC FIELD**

V. P. Milantiev

The autoresonant motion of a charged particle in the field of a transverse electromagnetic wave, propagating with the light speed along the stationary uniform magnetic field, is considered taking into account the radiation friction force. It is shown that violation of synchronism due to the radiation losses can be suppressed or completely compensated by the external electrostatic field parallel to the magnetic field.

УДК 550.538.383

ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТОСФЕРНЫХ ИОНОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ МИЛЛЕРА

А. В. Гульельми, О. А. Похотелов, Ф. З. Фейгин

Пондеромоторное перераспределение ионов вдоль геомагнитных силовых линий рассмотрено в рамках простой модели диффузионного равновесия многокомпонентной плазмы. В случае волн Альвена преобладающую роль играет сила Миллера. Показано, что то же самое имеет место и в случае ионно-циклотронных волн на достаточно низких частотах. Качественный анализ уравнений амбиполярной диффузии с учётом спутниковой информации об интенсивности волн свидетельствует о существенном перераспределении магнитосферной плазмы под действием силы Миллера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как ни важен для физики магнитосферы вопрос о пондеромоторном перераспределении ионов, тем не менее проведенные в этой области исследования не привели ещё ни к ясным результатам, ни к общепризнанным основным положениям. Здесь имеются в виду не общезначимые положения, которые установлены надёжно и достаточно полно [1, 2], а именно геофизические аспекты. Недавно были сделаны предсказания [3, 4] о существенной модификации магнитосферной плазмы под действием волн Pc 1 (0,2–5 Гц), но соответствующих экспериментальных подтверждений пока что нет. С другой стороны, измерения на ИСЗ Viking [5–8] свидетельствуют о том, что возмущения в распределении ионов над высокоширотной ионосферой коррелируют с интенсивными волнами в диапазоне Pc 1, но происхождение этой корреляции, на наш взгляд, ещё не вполне очевидно. В частности, как будет показано ниже, не сила диамагнитного выталкивания ионов [7], а сила Миллера доминирует в этой области магнитосферы в указанном диапазоне частот, по крайней мере, в тех случаях, когда речь идёт об Альвеновских и ионно-циклотронных волнах.

Цель данной работы состоит в том, чтобы в рамках простой модели диффузионного равновесия оценить на качественном уровне эффективность пондеромоторных сил. Как и в [3, 4], пренебрегается силой Абрагама, используется ВКБ-приближение и считается, что нет корреляции между встречными пучками волн. Это позволяет легко учесть самосогласование между пространственной структурой волнового поля и распределением ионов, хотя и накладывает очевидные ограничения на применимость теории. В отличие от [3, 4] здесь учитывается многоионный

состав околосемной плазмы. Основное внимание уделяется случаю, когда частота волны много меньше гирочастоты наиболее тяжелых ионов. Без этого дополнительного ограничения уравнения баланса сил оказываются весьма громоздкими. Их численное решение будет представлено в отдельной работе.

2. ВОЛНЫ АЛЬВЕНА

Пусть \vec{B} — внешнее магнитное поле, E_{\perp} — амплитуда волны Альвена. Тогда проекция на \vec{B} силы Миллера, приложенной к заряженной частице с массой m , равна

$$f = \frac{mc^2}{4B^2} \partial E_{\perp}^2. \quad (1)$$

Здесь ∂ означает пространственную производную вдоль силовой линии \vec{B} . Формула (1) получена путём усреднения силы Лоренца по периоду колебаний частицы в поле волны Альвена (см., например, [9]).

Допустим вначале, что внешнее магнитное поле однородно. Преобразуем (1) к виду $f = -ma$, где продольное ускорение равно

$$a = (b^2/32\pi\rho)\partial \ln \rho. \quad (2)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями [10]

$$E_{\perp} = (c_A/c)b \propto B/\rho^{1/4},$$

где ρ — плотность плазмы, c_A — скорость Альвена, b — возмущение магнитного поля. Видно, что сила Миллера не зависит от заряда и, подобно силе инерции, пропорциональна m . Сила действует в направлении уменьшения ρ .

В продольно неоднородном поле \vec{B} помимо (1) на частицу действует сила

$$f' = -\frac{mc^2}{2B^2} E_{\perp}^2 \partial \ln B. \quad (3)$$

Её появление и вид (3) проще всего понять, если приписать эффективный магнитный момент заряженной частице, движущейся в электрическом поле Альвеновской волны. Однако нетрудно убедиться, что f' полностью компенсируется соответствующим членом, который появляется в выражении для силы Миллера, если внешнее магнитное поле неоднородно. В результате пондеромоторная сила равна $f = -ma$, где a по-прежнему дается формулой (2).

Рассмотрим теперь диффузионное равновесие электронов (e) и ионов (i) с учётом f . Уравнения баланса имеют вид

$$T\partial \ln N_e = m_e g - eE_{\parallel} + f_e, \quad (4)$$

$$T\partial \ln N_i = m_i g + eE_{\parallel} + f_i, \quad (5)$$

где $N_{e,i}$ — концентрация частиц, g — гравитационное ускорение, $f_{e,i} = -m_{e,i}a$. Для простоты все ионы считаются однозарядными, а плазма — изотермической ($T_e = T_i = T$). Комбинируя (4), (5) и учитывая квазинейтральность, находим амбиполярное электрическое поле

$$E_{\parallel} = -\frac{m_+}{2e}G, \quad (6)$$

где $G = g - a$. Подставляя (6) в (5), получаем

$$T\partial \ln N_i = \left(m_i - \frac{m_+}{2}\right)G. \quad (7)$$

Здесь $m_+ = \rho/N$ — средняя масса ионов, $N = \sum N_i$ — суммарная концентрация ионов, индекс $i = 1, 2, \dots$ нумерует сорта ионов.

Уравнение (7) отличается от обычного уравнения равновесия [11] только тем, что вместо g в правой части стоит G , т.е. разность между гравитационным и пондеромоторным ускорениями. Редукция гравитационного ускорения под действием силы Миллера имеет интересные последствия. Рассмотрим вначале простейший случай, когда массы всех ионов одинаковы. Тогда $m_+ = m_i$ и (7) приобретает вид

$$\left(c_s^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}\right) \partial \rho = g\rho, \quad (8)$$

где $c_s = (2T/m_i)^{1/2}$, $\alpha = b_0^2/32\pi\sqrt{\rho_0}$; b_0 и ρ_0 — значения величин в некоторой фиксированной точке на данной силовой линии. При переходе от (7) к (8) мы воспользовались соотношением [10] $b \propto \rho^{1/4}$.

На высоких широтах, где силовые линии геомагнитного поля идут почти радиально, уравнение (8) можно заменить на

$$\frac{1}{\rho} \left(c_s^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}\right) \frac{d\rho}{dr} = -\frac{\varkappa M}{r^2} \quad (9)$$

и проинтегрировать

$$\frac{r_0}{r} = 1 + \beta \left\{ \ln \left(\frac{\rho(r)}{\rho_0} \right) + \gamma \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho(r)} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (10)$$

Здесь r — расстояние от центра Земли, $\beta = c_s^2 r_0 / \varkappa M$, $\gamma = b_0^2 / 32\pi N_0 T$, $\rho_0 = \rho(r_0)$, $b_0 = b(r_0)$, M — масса Земли, \varkappa — гравитационная постоянная.

Безразмерный параметр γ характеризует эффективность пондеромоторного перераспределения плазмы. При переходе от $\gamma \ll 1$ к $\gamma \gg 1$ экспоненциальный спад плотности на расстояниях $r \sim r_0$ сменяется степенным. Если $\beta \ll 1$, то на расстояниях, скажем, в 2 раза превышающих r_0 , сильная модификация плотности происходит уже при

$$\gamma > \exp \left(-\frac{1}{2\beta} \right). \quad (11)$$

Для анализа плазмы с несколькими сортами ионов имеем систему квазилинейных уравнений (7). Следующее утверждение очевидно в случае одноионной плазмы, но в общем случае полезно привести явное доказательство. Имеется в виду, что ускорение G нигде не равно нулю и всюду направлено к Земле. Как следствие, пондеромоторное ускорение a направлено от Земли и по модулю строго меньше g .

Действительно, допустим, что где-либо $G = 0$. Но тогда согласно (7) было бы $\partial\rho = 0$ и согласно (2) $a = 0$. Соответственно $G = g$, что противоречит допущению. Так как на достаточно малых расстояниях заведомо $a < g$, а G непрерывно и нигде не проходит через нуль, то утверждение доказано. Из него, в частности, следует, что волны Альвена не могут изменить строгой монотонности спада плотности плазмы с удалением от Земли.

Последнее замечание нуждается в пояснении. Во-первых, оно не противоречит работам [3, 4], поскольку в них немонотонность распределения плазмы связывается с эффектом гиротропии, который несуществен для волн Альвена. Во-вторых, мы напомним, что здесь, как и в [3, 4], не учитывается возможная корреляция между встречными волнами с образованием стабильной интерференционной картины. Если же образуются, например, стоячие волны, то, согласно (1), сила Миллера будет "сгребать" плазму к пучностям электрического поля и монотонность может быть нарушена.

Итак, хотя ускорение G довольно сложным образом зависит от распределений N_i , $i = 1, 2, \dots$, знак G всюду совпадает со знаком g . С учётом (7) отсюда следует, что качественно структура распределений N_i вдоль магнитных силовых линий будет такой же, как и при отсутствии пондеромоторных сил. Например, смесь легких ($i = 1$) и тяжёлых ($i = 2$) ионов распределена так, что N_2 всюду спадает с удалением от Земли, а N_1 имеет один максимум.

Можно придать следующий смысл параметру γ , введенному выше: $\gamma + 1$ показывает, во сколько раз увеличится локальная шкала высот в точке r_0 в результате действия силы Миллера на плазму с одним сортом ионов. В случае плазмы с двумя сортами ионов совместим r_0 с максимумом концентрации легких ионов. Из (2), (7) следует, что шкала высот тяжёлых ионов увеличивается в этой точке в $\gamma' + 1$ раз, причём

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{2m_2}{m_1} \left(\frac{m_2 - 2m_1}{m_2 - m_1} \right)^2. \quad (12)$$

Например, для смеси ионов O^+ , H^+ величина γ' почти в 30 раз больше, чем γ . В этом смысле можно сказать, что наличие в плазме ионов с различным отношением заряда к массе повышает эффективность силы Миллера.

3. ИОННО-ЦИКЛОТРОННЫЕ ВОЛНЫ

Как известно [12, 13], Альвеновские и ионно-циклотронные волны принадлежат к одной и той же ветви дисперсионных кривых, причём первые соответствуют случаю квазипоперечного, а вторые — квазипродольного распространения. Понятно, что Альвеновская волна может перейти в ионно-циклотронную и наоборот, по мере распространения в магнитосфере. Поэтому для полноты картины следует рассмотреть ponderomotive силы для ионно-циклотронных волн. Мы ограничимся здесь случаем строго продольного распространения.

Для ионно-циклотронных волн вместо (6) имеем

$$eE_{\parallel} = -\frac{m_+}{2}g + F,$$

а вместо (7)

$$T\partial \ln N_i = \left(m_i - \frac{m_+}{2}\right)g + F_i, \quad (13)$$

где

$$F_i = f_i + F, \quad (14)$$

$$F = \frac{1}{2} \left(f_e - \sum \eta_i f_i\right), \quad (15)$$

$$f_\alpha = \frac{e_\alpha^2}{2m_\alpha \omega (\Omega_\alpha - \omega)} \left[\partial E_{\perp}^2 - \left(\frac{\Omega_\alpha}{\Omega_\alpha - \omega}\right) E_{\perp}^2 \partial \ln B \right]. \quad (16)$$

Здесь $\eta_i = N_i/N$ — относительная концентрация, Ω_α — гирочастота, $\alpha = e, i$. Уравнения записаны для волн левой круговой поляризации. Переход к волнам правой поляризации, как обычно, осуществляется заменой $\omega \rightarrow -\omega$.

Интересно сравнить (13)–(16) с аналогичными формулами для волн Альвена (см. (1)–(6)). Важное различие состоит в том, что (16) не сводится к форме $f = -ta$ в пределе $\omega \rightarrow 0$ и, более того, стремится к бесконечности в этом пределе. Чтобы избежать расходимости необходимо, как это и положено, просуммировать члены в правой части (14) до перехода к низкочастотному пределу.

Итак, для перехода в МГД диапазон преобразуем сначала (14) к виду

$$F_i = \frac{E_{\perp}^2}{8\pi N} \left\{ \left[\frac{\omega_{0e}^2(1 + \mu_i)}{(\Omega_e + \omega)(\Omega_i - \omega)} - \frac{n^2 - 1}{2} \right] \partial \ln E_{\perp}^2 - \left[\frac{\omega_{0e}^2[\Omega_e(2\Omega_i - \omega) + \mu_i\Omega_i(2\Omega_e + \omega)]}{(\Omega_e + \omega)^2(\Omega_i - \omega)^2} + \frac{B}{2} \frac{\partial n^2}{\partial B} \right] \partial \ln B \right\}, \quad (17)$$

где $\omega_{0\alpha} = (4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha} / m_{\alpha})^{1/2}$, $\mu_i = m_e / m_i$ и

$$n^2 = \sum \frac{\omega_{0\alpha}^2}{\omega(\Omega_{\alpha} - \omega)} + 1.$$

Теперь нетрудно убедиться, что на достаточно низких частотах уравнение (13) приобретает вид (7) с заменой (2) на

$$a' = -(c^2/4)\partial(E_{\perp}/B)^2.$$

Нам осталось согласовать структуру волнового поля E_{\perp} с распределением ионов, которое зависит от этой структуры. Для этого положим $E_{\perp} \propto (B/n)^{1/2}$. По-видимому, нет другого простого пути в данном случае избежать численного решения нелинейной задачи о распространении волн. В то же время указанное соотношение естественным образом обобщает аналогичное соотношение для волн Альвена [3]. Приняв это, получаем $a' = a$. Таким образом, в низкочастотном пределе ионно-циклотронные волны воздействуют на плазму так же, как волны Альвена.

Вид формулы (17) подсказывает, что более разнообразные, но и значительно более трудные задачи возникнут, если мы обратимся к волнам с частотами, близкими к гирочастотам ионов. Основная трудность связана с необходимостью согласовать структуру волнового поля с распределением ионов. Можно, конечно, воспользоваться геометрикооптическим соотношением $E_{\perp} \propto (B/n)^{1/2}$ и тогда

$$F_i = -\frac{E_{\perp}^2}{8\pi N} \left\langle \left\{ \frac{\omega_{0e}^2(\Omega_e \Omega_i + \omega^2)(1 + \mu_i)}{(\Omega_i - \omega)^2(\Omega_e + \omega)^2} + \frac{n^2 - 1}{2} + \frac{B}{2n^2} \frac{\partial n^2}{\partial B} \left[\frac{\omega_{0e}^2(1 + \mu_i)}{(\Omega_i - \omega)(\Omega_e + \omega)} + \frac{n^2 + 1}{2} \right] \right\} \partial \ln B + \frac{1}{2n^2} \left[\frac{\omega_{0e}^2(1 + \mu_i)}{(\Omega_i - \omega)(\Omega_e + \omega)} - \frac{n^2 - 1}{2} \right] \sum \frac{\partial n^2}{\partial N_j} \partial N_j \right\rangle, \quad (18)$$

однако при этом неявно вводится предположение, что волны распространяются в волноводе, эффективное поперечное сечение которого изменяется вдоль геомагнитных силовых линий как B^{-1} . Такое представление полезно в случае плазмы с одним сортом ионов. Если же плазма содержит ионы разных сортов, то в тех местах, где частота волны несколько превышает локальную гирочастоту тяжёлых ионов (т.е. именно там, где ожидаются наиболее интересные эффекты) геометрикооптическое описание поля, а вместе с этим и приближённое выражение (18) неприменимы.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Основной вывод состоит в том, что на достаточно низких частотах пондеромоторное перераспределение ионов происходит под действием силы Миллера, которая частично скомпенсирована силой диамагнитного выталкивания. Это достаточно очевидно в случае волн Альвена (см. (1)–(3)), но из вида формул (14)–(16) сразу не скажешь, что это действительно так в случае ионно-циклотронных волн. Более того, если для волн Альвена сила не зависит от внешнего магнитного поля, по крайней мере, в приближении геометрической оптики, когда $E_{\perp} \propto B/\rho^{1/4}$, то для ионно-циклотронных волн отсутствие такой зависимости не следует из формулы (17) даже в этом приближении. Точнее говоря, геометрооптические представления должны быть дополнены гипотезой [14] о канализации ионно-циклотронных волн вдоль геомагнитных силовых линий. Тогда $E_{\perp} \propto (B/n)^{1/2}$ и (17) переходит в низкочастотном пределе в аналогичную формулу для волн Альвена.

Возникает вопрос, насколько низкими должны быть частоты, о которых идёт речь? Ответ зависит от амплитуды волны. Если $\gamma \ll 1$, то необходимо выполнение обычного условия $\omega \ll \Omega_i$ для перехода в МГД диапазон. Если же $\gamma \gg 1$, то условие становится более жестким: $\gamma\omega \ll \Omega_i$.

Рассмотрим конкретный пример. ИСЗ Viking [5–7], пролетая в зоне сияний на высоте 10 тыс. км, зарегистрировал поперечные колебания электрического поля в диапазоне Pс 1 с амплитудой $E_{\perp} \simeq 10^2$ мВ/м. Перепишем параметр γ в виде

$$\gamma = (m_i c^2 / 8T)(E_{\perp} / B)^2.$$

На указанных высотах преобладают протоны. По-видимому, можно положить $T \simeq 10^4$ К. Тогда $\gamma \simeq 1,7$, т.е. ожидается сильная модификация плазмы под действием пондеромоторных сил. Условие $\gamma\omega \ll \Omega_i$ выполняется в данном случае, т.е. мы имеем дело с силой Миллера, а отнюдь не с силой диамагнитного выталкивания плазмы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94-05-16173а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1975. — 415 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 620 с.
3. Гульельми А. В. // Физика Земли, 1992. N 7. С. 35.

4. Guglielmi A., Pokhotelov O. // Space Sci. Rev., 1994. V. 65. P. 5.
5. Hultqvist B. // J. Geophys. Res., 1988. V. 93. N A9. P. 9777.
6. Lundin R. // Ann. Geophys., 1988. V. 6. P. 143.
7. Lundin R., Hultqvist B. // J. Geophys. Res., 1989. V. 94. N A6. P. 6665.
8. Gustafsson G., Andre M., Matson L., Koskinen H. // J. Geophys. Res., 1990. V. 95. N A5. P. 5889.
9. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984. — 432 с.
10. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. — М.: Мир, 1967. — 260 с.
11. Николе М. Аэрномия. — М.: ИЛ, 1964. — 213 с.
12. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: ФМ, 1960. — 552 с.
13. Электродинамика плазмы / Под ред. А. И. Ахизера. — М.: Наука, 1974. — 719 с.
14. Гульельми А. В. // УФН, 1989. Т. 158. N 4. С. 605.

Институт физики Земли РАН

Поступила в редакцию
25 ноября 1994 г.

REDISTRIBUTION OF MAGNETOSPHERIC IONS UNDER THE ACTION OF MILLER FORCE

A. V. Guglielmi, O. A. Pokhotelov and F. Z. Feygin

Ponderomotive redistribution of ions along the geomagnetic field lines is analysed in the frame of simple model of diffusion equilibrium of a multicomponent plasma. The Miller force prevails in the case of Alfvén waves. This also takes place in the case of ion-cyclotron waves in the low-frequency limit. Qualitative analysis of equations with taking into account the satellite information on the intensity of waves testifies the significant redistribution of the magnetospheric plasma under the action of the Miller force.

УДК 621.391:53.08

РЕШЕНИЕ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

А. Т. Байкова

Рассматривается фазовая проблема, возникающая при восстановлении изображения пространственно ограниченного источника только по амплитуде его Фурье-спектра. Предложен алгоритм восстановления, основанный на оптимизации нелинейных теоретико-информационных функционалов, в частности, функционала энтропии в формулировке Шеннона. С целью повышения скорости сходимости предложена идея комбинирования предложенных алгоритмов с хорошо известным итерационным алгоритмом Фьенана.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается задача восстановления двумерных изображений по амплитуде функции пространственной когерентности (пространственного спектра) пространственно ограниченного источника при полностью неизвестной фазе. Ситуация с неопределенностью в измерении фазы из-за неоднородности ионосферы и тропосферы является типичной для фазонестабильной радиоинтерферометрии. Фазовые ошибки, а тем более неизвестность фазы, существенно ограничивают качество радиоастрономических карт.

В этой работе решается задача построения надежных математических процедур восстановления фазы по амплитуде спектра сигнала в предположении, что решение существует и единственно. Это предположение верно для пространственно ограниченных сигналов, обладающих неприводимыми и несимметричными Z -преобразованиями [1]. Этому условию удовлетворяют почти все, за исключением вырожденных случаев, определенных на множестве меры нуль, многомерные пространственно ограниченные неотрицательно определенные функции. В данном случае единственность решения определяется с точностью до класса эквивалентных функций, определенных, в свою очередь, с точностью до линейного сдвига и обращения аргумента. Таким образом, целью работы является поиск такого вычислительного алгоритма, который обеспечивает надежную сходимость к решению, которое теоретически существует и единственно.

Задача восстановления фазы в спектральной области эквивалентна задаче восстановления изображения по амплитуде спектра в пространстве

источника. В настоящее время наиболее эффективным практическим алгоритмом восстановления изображений при полной фазовой неопределенности является итерационный алгоритм Фьенала [2]. Однако, алгоритм Фьенала не обладает свойством сжатия и поэтому не всегда обеспечивает сходимость к искомому решению [3]. Здесь предлагается другой подход, основанный на оптимизации теоретико-информационных функционалов типа энтропии, а также делается попытка улучшения алгоритма Фьенала.

Сформулируем задачу восстановления в дискретной форме.

Пусть размер карт, как в пространственной, так и частотной областях, составляет $N \times N$ отсчетов. Спектр источника вычисляется как $N \times N$ -точечное дискретное преобразование Фурье последовательности $\{x_{ml}\}$

$$X_{nk} = 1/N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x_{ml} e^{-j2\pi(nm+kl)/N} = A_{nk} + jB_{nk} = M_{nk} e^{j\Phi_{nk}}, \quad (1)$$

$$n = 0, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

где A_{nk} — вещественная часть спектра, B_{nk} — мнимая часть спектра, M_{nk} — модуль или амплитуда спектра, Φ_{nk} — фаза спектра.

В дальнейшем понадобятся следующие соотношения, связывающие A_{nk} , B_{nk} , M_{nk} и Φ_{nk} :

$$A_{nk} = M_{nk} \cos \Phi_{nk}, \quad (2)$$

$$B_{nk} = M_{nk} \sin \Phi_{nk}. \quad (3)$$

Если данные являются полными, т.е. измеряются как амплитуда, так и фаза функции пространственной когерентности, искомое распределение находится путем простого обращения преобразования Фурье функции пространственной когерентности:

$$x_{ml} = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} M_{nk} e^{j\Phi_{nk}} e^{-j2\pi(nm+kl)/N}, \quad (4)$$

$$m, l = 0, \dots, N-1.$$

Здесь же решается задача обращения, когда известна только амплитуда M_{nk} спектра, при условии неотрицательности и пространственной ограниченности (конечности) двумерной последовательности $\{x_{ml}\}$.

2. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ МЕТОД

Предлагаемый метод восстановления изображения представляет собой решение вариационной задачи с нелинейным функционалом, задающим критерий качества восстановления изображения, и линейными ограничениями на измеряемую амплитуду спектра, а также включающей дополнительное нелинейное ограничение, связывающее мнимую и вещественную части спектра, которое накладывается по ходу выполнения численного алгоритма поиска экстремума функционала (см. ниже). Преимуществом такого подхода является то, что задача сводится к стандартным методам максимальной энтропии [4], обладающим одним глобальным экстремумом, и тем самым, обеспечивается алгоритмическая однозначность восстановления фазы.

В нашем случае ограничения, следующие из измеренных значений амплитуды спектра и неизвестной фазы, запишем, используя соотношения (1)–(3):

$$\sum_m \sum_l x_{ml} a_{ml}^{nk} = A_{nk} = M_{nk} \cos \Phi_{nk}, \quad (5)$$

$$\sum_m \sum_l x_{ml} b_{ml}^{nk} = B_{nk} = M_{nk} \sin \Phi_{nk}, \quad (6)$$

где

$$a_{ml}^{nk} = 1/N \cos(2\pi(mn + kl)/N),$$

$$b_{ml}^{nk} = -1/N \sin(2\pi(mn + kl)/N) \quad —$$

постоянные коэффициенты, определенные преобразованием Фурье (1).

В уравнениях (5) и (6) функции $\cos \Phi_{nk}$ и $\sin \Phi_{nk}$ также являются неизвестными. Если представить их в виде

$$\cos \Phi_{nk} = 2 \cos^2(\Phi_{nk}/2) - 1, \quad (7)$$

$$\sin \Phi_{nk} = [\sin(\Phi_{nk}/2) + \cos(\Phi_{nk}/2)]^2 - 1, \quad (8)$$

и ввести в рассмотрение новые неотрицательно определенные переменные t_{nk} и s_{nk} в соответствии с заменой

$$t_{nk} = 2 \cos^2(\Phi_{nk}/2), \quad (9)$$

$$s_{nk} = [\sin(\Phi_{nk}/2) + \cos(\Phi_{nk}/2)]^2, \quad (10)$$

то задачу восстановления изображения можно записать в виде следующей задачи оптимизации с линейными ограничениями

$$\min Q(\{x_{ml}\}, \{t_{nk}\}, \{s_{nk}\}), \quad (11)$$

$$\sum_m \sum_l x_{ml} a_{ml}^{nk} - M_{nk} t_{nk} = -M_{nk}, \quad (12)$$

$$\sum_m \sum_l x_{ml} b_{ml}^{nk} - M_{nk} s_{nk} = -M_{nk}, \quad (13)$$

$$x_{ml}, t_{nk}, s_{nk} \geq 0, \quad (14)$$

где функционал Q задает критерий качества восстановления изображения, обычно это теоретико-информационные критерии типа максимума энтропии [4].

Кроме того, наложим дополнительное нелинейное ограничение на новые переменные t_{nk} и s_{nk} , вытекающие из известного тождества

$$\sin^2 \Phi_{nk} + \cos^2 \Phi_{nk} = 1 \rightarrow (t_{nk} - 1)^2 + (s_{nk} - 1)^2 = 1, \quad (15)$$

которое легко может быть встроено в структуру численного алгоритма решения задачи оптимизации (11)–(14) без изменения его вычислительной схемы. Для этого предлагается реализация ограничений (15) по ходу выполнения итераций метода покоординатного спуска при поиске глобального экстремума функционала Лагранжа.

Предложенный алгоритм, основанный на нелинейных информационных методах, можно считать “надежным”, поскольку сформулированная задача восстановления фазы в случае многомерных (≥ 2) сигналов имеет единственное решение (за исключением вырожденных случаев, определенных на множестве меры нуль), а в этом случае любой алгоритм, обеспечивающий выход, согласующийся с данными, дает верное решение (Фидди, [5]). Одним из таких алгоритмов, обеспечивающих решение, хорошо согласующееся с данными, является алгоритм максимума энтропии, рассмотрение которого дается ниже.

3. АЛГОРИТМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

В этом случае функционал (11) переписывается в виде

$$\min \sum_m \sum_l x_{ml} \ln(x_{ml}) + \sum_n \sum_k t_{nk} \ln(t_{nk}) + s_{nk} \ln(s_{nk}). \quad (16)$$

Сведем задачу условной оптимизации (16), (12)–(14) к двойственной задаче безусловной оптимизации.

Составим функционал Лагранжа

$$L = \sum_m \sum_l x_{ml} \ln(x_{ml}) + \sum_n \sum_k t_{nk} \ln(t_{nk}) + s_{nk} \ln(s_{nk}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_n \sum_k \alpha_{nk} \left(\sum_m \sum_l x_{ml} a_{ml}^{nk} - M_{nk} t_{nk} + M_{nk} \right) + \\
& + \sum_n \sum_k \beta_{nk} \left(\sum_m \sum_l x_{ml} b_{ml}^{nk} - M_{nk} s_{nk} + M_{nk} \right), \quad (17)
\end{aligned}$$

где α_{nk} и β_{nk} — двойственные переменные — коэффициенты Лагранжа [6].

Найдём решение для x_{ml} , t_{nk} , s_{nk} из необходимого условия существования экстремума функционала L :

$$\begin{aligned}
x_{ml} &= e^{-\sum_n \sum_k \alpha_{nk} a_{ml}^{nk} + \beta_{nk} b_{ml}^{nk} - 1}, \\
t_{nk} &= e^{\alpha_{nk} M_{nk} - 1}, \\
s_{nk} &= e^{\beta_{nk} M_{nk} - 1}, \quad (18)
\end{aligned}$$

выраженное через двойственные переменные.

Исследование матрицы Гессе [6] показывает, что найденный экстремум совпадает с глобальным.

Подставляя выражения для x_{ml} , t_{nk} , s_{nk} в функционал Лагранжа, получим двойственную задачу оптимизации без ограничений

$$\begin{aligned}
\min L &= \sum_m \sum_l x_{ml} + \sum_n \sum_k t_{nk} + s_{nk} - \\
& - \sum_n \sum_k \alpha_{nk} M_{nk} + \beta_{nk} M_{nk} \quad (19)
\end{aligned}$$

относительно неизвестных двойственных переменных.

В результате решения задачи (19) находятся двойственные переменные α_{nk} , β_{nk} . Искомое решение легко находится из (18) подстановкой найденных значений α_{nk} , β_{nk} . Причем, на каждой итерации, выполняемой в соответствии с методом покоординатного спуска, требуем удовлетворения дополнительных условий (15).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Предложенный алгоритм был апробирован на множестве объектов: точечных, состоящих из нескольких гауссиан, линейчатых (в виде букв и слов) и протяженных. На рис. 1 показан один из результатов такого восстановления. На рис. 1а показан объект. В качестве данных была использована полная выборка (размера $N \times N$) отсчетов амплитудного спектра объекта при их зашумливании взвешенным шумом (около 10% от

значений амплитуды каждого отсчета выборки) с равномерным законом распределения. На рис. 1*b–f* показаны результаты восстановления при различном числе итераций по методу покоординатного спуска: *b* — 10 итераций, *c* — 20 итераций, *d* — 25 итераций, *e* — 50 итераций, *f* — 100 итераций. Как видно из рисунка, процесс, хотя и медленно, сходится к почти точному решению.

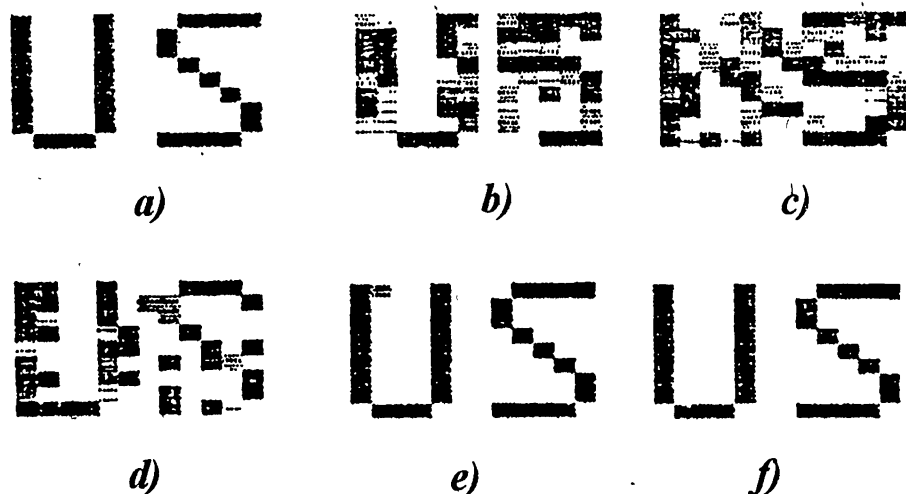


Рис. 1.

Экспериментально было установлено, что чем сложнее объект, тем большее число итераций требуется. Иногда это число итераций может дойти до тысячи. При этом оказывается, что в первую очередь восстанавливаются фазы у тех спектральных составляющих, которые имеют наибольшие по величине амплитуды. Наилучшее восстановление происходит в низкочастотной части спектра. Медленность процесса сходимости связана, в основном, с трудностью восстановления фазы у спектральных составляющих с малыми значениями амплитуды.

Поэтому с целью повышения скорости обработки предлагается комбинирование предложенных алгоритмов с итерационным алгоритмом Фьенала [2]. В этом случае изображение, полученное с использованием метода максимума энтропии, служат в качестве начального приближения для алгоритма Фьенала. Причем, для получения начального приближения, как правило, достаточно выполнения порядка 10 спусков по всем координатам. Алгоритм Фьенала также достаточно быстро сходится к решению, требуя около 20–50 итераций. Результаты моделирования таких комбинированных алгоритмов показаны на рис. 2–4.

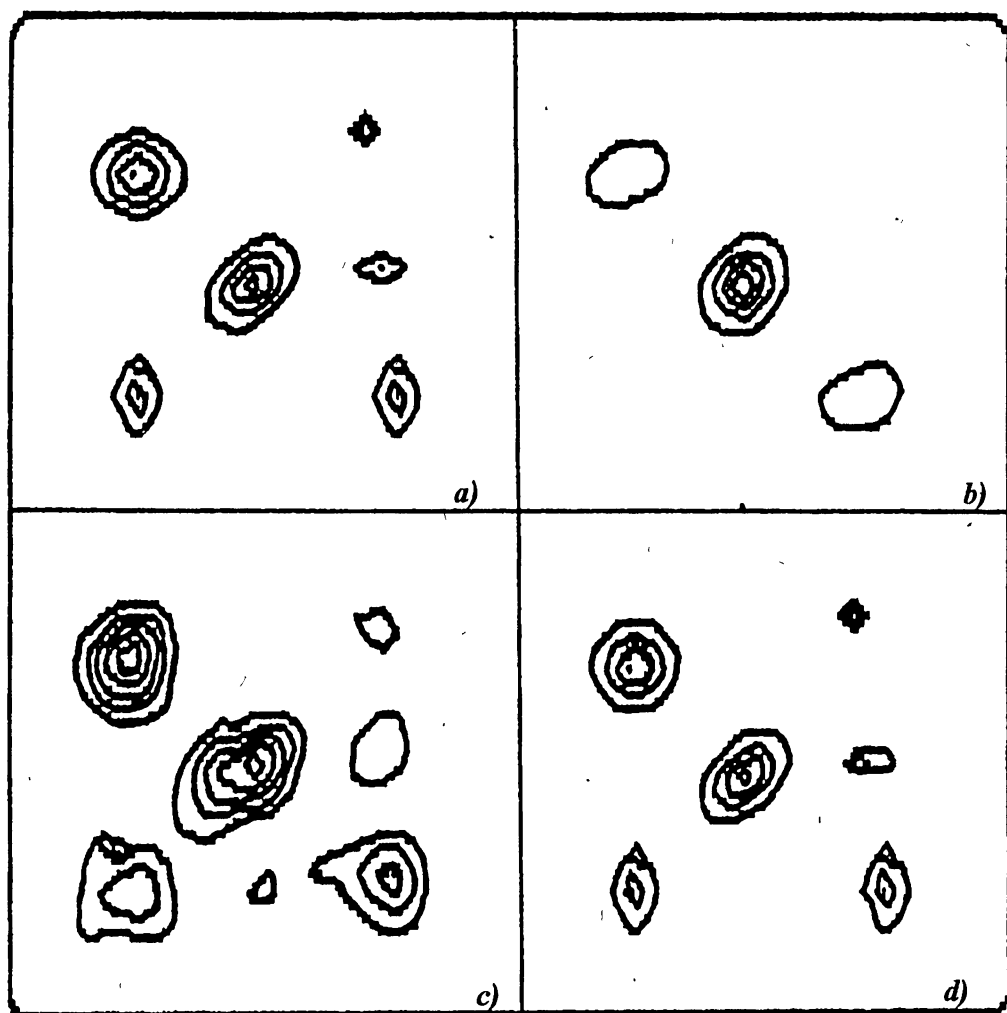


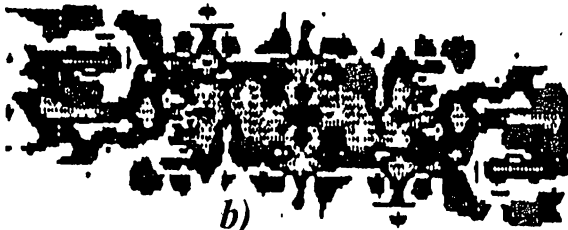
Рис. 2.

На рис. 2 показаны результаты восстановления источника, состоящего из нескольких гауссиан и точечных компонентов (линии уровня получены с равномерным шагом в 10% от максимального значения яркости), на рис. 3 — достаточно сложного линейчатого объекта, представляющего собой слово из пяти букв, на рис. 4 — протяженного объекта, представляющего собой силуэт самолёта. На всех рисунках буквами обозначены: *a* — модель; *b* — автокорреляционная функция, равная обратному преобразованию Фурье от квадрата модуля спектра объекта; *c* — изображение, полученное после 10 итераций покоординатного спуска в методе максимальной энтропии; *d* — изображение, полученное после 30 итераций алгоритма Фьенупа. Здесь так же, как и в первом эксперименте,

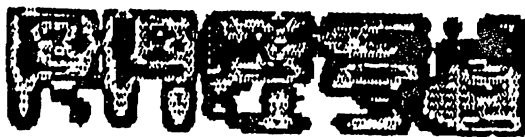
в качестве данных была использована полная выборка (размера $N \times N$) спектральной амплитуды с 10% процентным зашумливанием взвешенным равномерно распределенным шумом.



a)



b)



c)



d)

Рис. 3.

Анализ приведенных результатов говорит о том, что после нескольких итераций по методу максимальной энтропии мы получаем достаточно хорошо узнаваемые элементы модельного изображения, поскольку удается достаточно хорошо восстановить фазы у отсчетов со значительными величинами модуля, особенно, в низкочастотной области спектра. В дальнейшем, при использовании полученного изображения в качестве старто-

вой точки в алгоритме Фьенала, мы достаточно быстро получаем решение, близкое модельному.

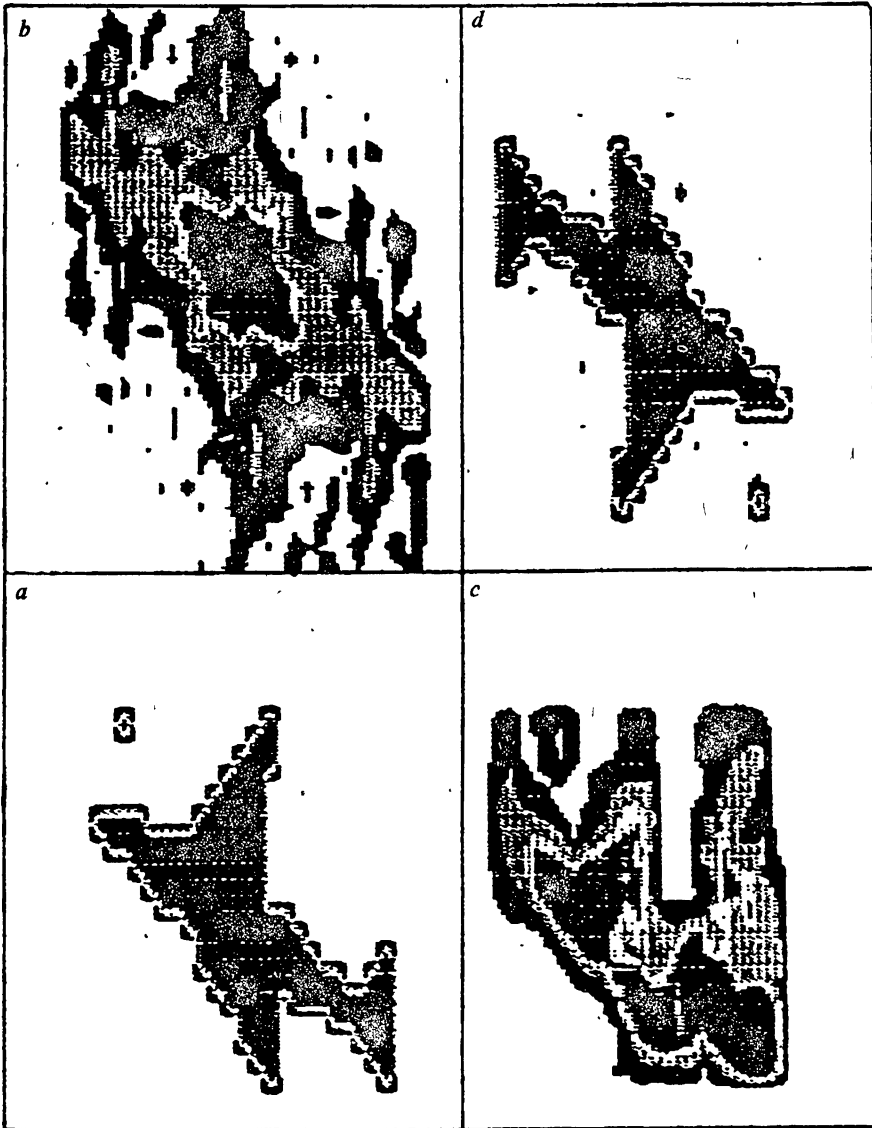


Рис. 4

5. ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной статье предложен метод восстановления изображений по амплитуде пространственного спектра при полностью неизвестной фазе, основанный на оптимизации нелинейных теоретико-информационных функционалов, в частности, функционала энтропии. Практический алгоритм восстановления представляет собой комбинацию стандартного метода максимальной энтропии по Шеннону с линейными ограничениями и дополнительного нелинейного ограничения, связывающего вещественную и мнимую части спектра, вводимого по ходу выполнения численного алгоритма поиска экстремума функционала. Рассмотрена возможность комбинирования предложенного метода восстановления с итерационным методом Фьенала. В этом случае изображение, восстановленное с использованием первого метода, служит стартовой точкой для метода Фьенала, обеспечивая тем самым его сходимость к искомому решению. Результатами численного моделирования подтверждена высокая эффективность предложенного метода.

БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаю свою искреннюю благодарность профессору Арizonского университета Фридену Б. Р. за постоянное сотрудничество и обсуждение результатов.

Работа выполнена по гранту Российского фонда фундаментальных исследований N 93-02-3079.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bruck Yu. M. and Sodin L. C. // Opt. Commun., 1979. V. 30. N 3. P. 304.
2. Fienup J. R. // Appl. Opt., 1982. V. 21. N 15. P. 2758.
3. Sanz J. L. et al. // IEEE Trans. ASSP, 1984. V. 32. N 6. P. 1251.
4. Frieden B. R. // J. Opt. Soc. Am., 1972. V. 62. N 1. P. 511.
5. Построение изображений в астрономии по функциям когерентности /Под ред. К. Ван Схонвельда. — М.: Мир, 1982.
6. Реклейтис Г., Рейвиндоан А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. Т. 1. — М.: Мир, 1986.

Институт прикладной
астрономии РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
17 января 1995 г.

**SOLVING PHASE RETRIEVAL PROBLEM
USING MAXIMUM ENTROPY METHOD***A. T. Bajkova*

Phase retrieval problem in the image storatoin of a spatially bounded source by only the amplitude of its Fourier spectrum is considered. New algorithm based on optimization of nonlinear information functionals, in particular, Shannon entropy functional, is proposed. In order to increase the convergence speed it is proposed to combine new algorithms with Fienup's iterations.

УДК 621.371.246

К ВОПРОСУ ОБ АНОМАЛИЯХ И РОЛИ ВОДНЫХ КЛАСТЕРОВ В АТМОСФЕРНОМ ПОГЛОЩЕНИИ МИЛЛИМЕТРОВЫХ И СУБМИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН

В. Ю. Катков, Н. И. Фурашов

В статье представлены экспериментальные данные, которые не подтверждают существования наблюдавшихся рядом авторов аномалий в атмосферном поглощении миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн и тем самым ставят под сомнение направленную на их объяснение гипотезу о существенной роли в поглощении больших водных кластеров.

ВВЕДЕНИЕ

В литературе неоднократно высказывалась гипотеза [1–5] о значительном или даже доминирующем вкладе больших водных кластеров в избыточное поглощение радиоволн водяным паром (определяемое относительно уровня поглощения, предсказываемого ударной теорией уширения спектральных линий H_2O). Эта гипотеза базируется, в основном, на различного рода аномальных эффектах, обнаруженных в ряде работ (см. [1–5] и ссылки ниже по тексту) на частотах (30–1000) ГГц и вблизи 30 ТГц, которые трудно объяснить участием в поглощении только мономеров и димеров воды. К числу таких эффектов относятся: а) наличие особенностей квазирезонансного типа в спектре избыточного поглощения; б) чрезвычайно сильная зависимость этого поглощения от температуры; в) плохая воспроизводимость уровня атмосферного поглощения в одинаковых метеорологических условиях и нерегулярная его зависимость от содержания водяного пара; г) влияние солнечного излучения на величину поглощения; д) значительный рост избыточного поглощения в условиях тумана, т.е. в насыщенном водяном паре. Поскольку, как известно [6], термодинамически равновесные концентрации водных кластеров с числом молекул H_2O более двух слишком малы, чтобы давать ощутимый вклад в поглощение, аномальные эффекты связываются с неравновесным состоянием водяного пара, обусловленным предположительно градиентами температуры, акустическими шумами, солнечной радиацией, испарением влаги с подстилающей поверхности, наличием тумана и т.д. При этом теоретическая аргументация в пользу гипотезы [1–5] остается пока сугубо качественной.

В настоящей работе представлены экспериментальные данные о поглощательных свойствах атмосферных паров воды в диапазонах миллиметровых (ММ) и субмиллиметровых (СУБММ) радиоволн, которые не подтверждают существования перечисленных выше аномалий поглощения.

1. О СПЕКТРЕ ИЗБЫТОЧНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

Первый аномальный экспериментальный результат принадлежит, по видимому, Толберту, Бритту и Дугласу (см. [7]), обнаружившим, по их мнению, неизвестную линию водяного пара с центром вблизи 110 ГГц. Впоследствии намеки на существование этой линии дали измерения [8]. Авторы [8], в свою очередь, высказали предположение о существовании одной или нескольких таких линий еще и в участке спектра (190–200) ГГц, в котором ими наблюдался повышенный разброс ($\sim \pm 30\%$) измеренных значений коэффициента поглощения. Однако в экспериментах [9–12] и [13–16] упомянутые гипотетические линии водяного пара сколько-нибудь заметно не проявились.

Большое количество спектральных аномалий поглощения в диапазоне частот $\nu \approx (100 - 1000)$ ГГц обнаружено Гебби и его коллегами, причем в самых разнообразных условиях проведения экспериментов — при наблюдениях излучения Солнца и собственного излучения атмосферы (как с уровня моря, так и с больших высот), в измерениях на открытых приземных трассах, а также в лабораторных исследованиях (см. список литературы в [17]). Если эти аномалии объяснять, аналогично [1–5], неравновесным состоянием водяного пара, характеризваемым высоким содержанием водных кластеров, то многочисленность случаев наблюдения аномалий позволяет считать такое состояние обычным явлением. Между тем стимулированные работами Гебби и др. дополнительные спектральные исследования атмосферного поглощения [16–18] дали отрицательные в отношении аномалий результаты. В частности, в нашей работе [17] проведены специальные лабораторные и полевые измерения в области окон относительной прозрачности атмосферы с центрами вблизи 340 и 410 ГГц, имевшие целью получить картину спектра поглощения при тех же значениях влажности и температуры воздуха, что и в измерениях [19], авторами которых в этих окнах наблюдались сильные спектральные особенности с интенсивностью $\sim (20 - 40)$ дБ/км. Нашими измерениями не только не выявлено никаких спектральных особенностей, но и установлен значительно меньший (вплоть до ~ 10 раз), в сравнении с найденным в [19], средний в участке $\nu = (330 - 430)$ ГГц уровень избыточного поглощения.

Выполненный недавно одним из нас в работе [20] анализ наиболее надежных, на наш взгляд, экспериментальных данных, на основе которого в

ней сформулирована полуэмпирическая модель для прогнозирования коэффициента поглощения атмосферного водяного пара Γ в частотном диапазоне $\nu \leq 3$ ТГц, приводит к выводу, что избыточное поглощение в указанном диапазоне имеет типичный характер континуума. Эмпирический учет континуума в рамках модели [20] позволяет, например, воспроизвести экспериментальные спектры атмосферного поглощения на частотах (180–930) ГГц, полученные в [13–15, 17, 21–25], с точностью $\pm(5-10)\%$.

Γ , дБ/км

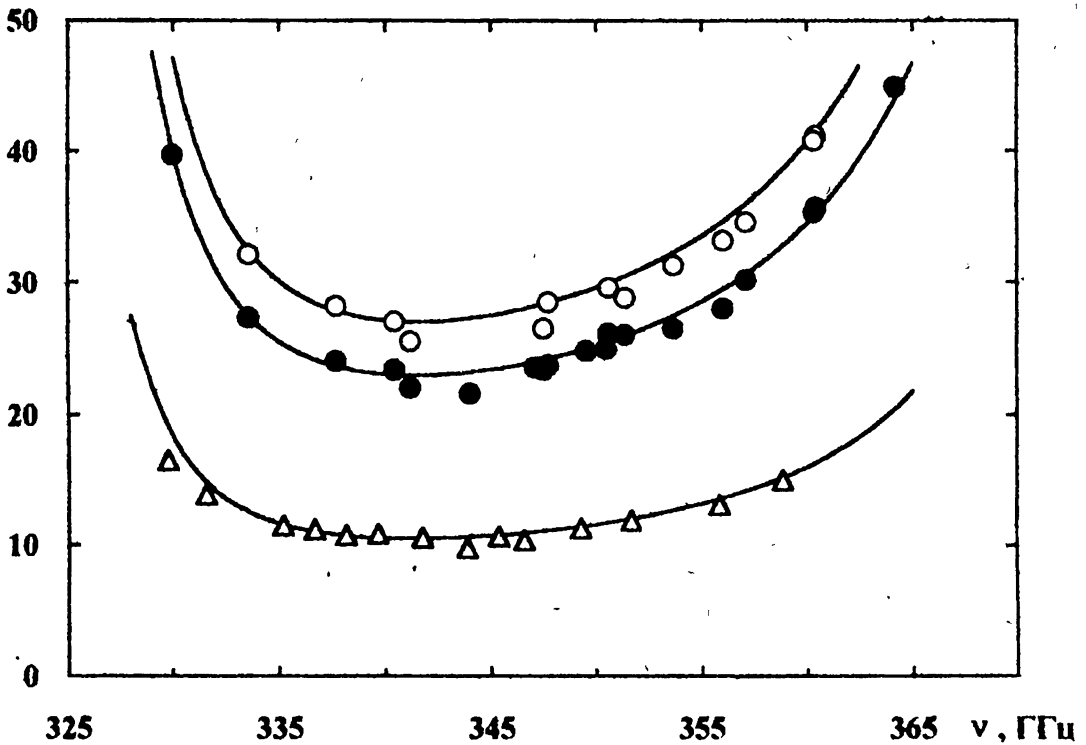


Рис. 1.

В подтверждение сказанному на рис. 1, 2 приведены рассчитанные по модели [20] (сплошные кривые) и измеренные в [17, 25] спектральные зависимости коэффициента поглощения в окнах прозрачности 340 и 410 ГГц, которые соответствуют давлению сухого воздуха $P = 730$ Тор и различным значениям давления водяного пара e и температуры T : $e = 8,3$ Тор, $T = 282$ К (треугольники); $e = 19,7$ Тор, $T = 299$ К (темные кружки); $e = 24,4$ Тор, $T = 306$ К (светлые кружки).

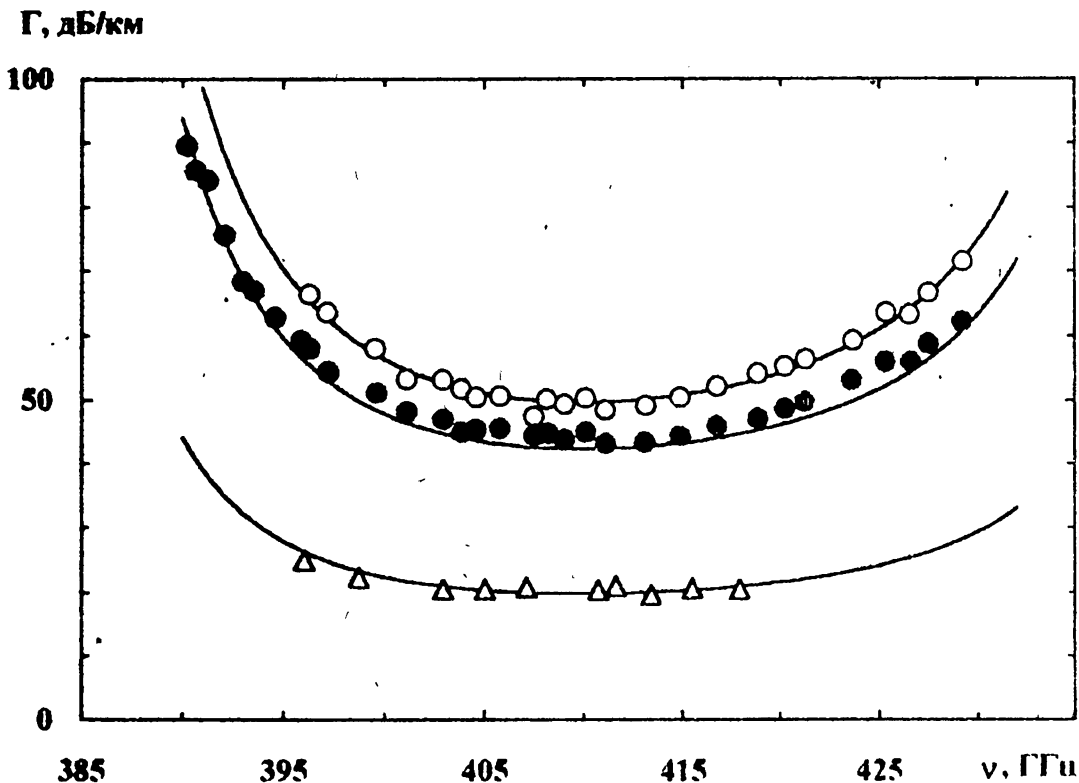


Рис. 2.

2. О ЗАВИСИМОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В течение 1985–1992 гг. нами проводились полевые измерения атмосферного поглощения на частотах 138, 247, 260 и 340 ГГц с использованием приземной трассы длиной 1 км. Эти измерения позволили оценить [26] величину и температурную зависимость квадратично зависящей от ϵ компоненты избыточного поглощения с учетом известных из лабораторных экспериментов сведений о его линейной компоненте. Как уже отмечалось в работе [26], оцененная в ней температурная зависимость квадратичной компоненты избыточного поглощения, отождествляемой Гебби и др. с поглощением водными кластерами, существенно слабее определенной в [27, 28] и близка к ожидаемой как для поглощения равновесными димерами воды $(\text{H}_2\text{O})_2$ [29], так и для поглощения за счет самоуширения далеких крыльев линий мономеров H_2O [30]. В настоящей работе мы воспользуемся возможностью сопоставить результаты, полученные нами на частотах 247 и 260 ГГц, с результатами [31].

В полевых измерениях [31] была обнаружена широкая спектральная аномалия с центром около 250 ГГц, в области которой величина и температурная зависимость избыточного поглощения в исследованном интервале температуры $T = (259 - 282)$ К оказались столь велики, что, несмотря на падение давления водяного пара, приводили к росту коэффициента поглощения Γ с уменьшением температуры. Измеренная в [31] зависимость $\Gamma(T)$ и её аппроксимация показаны крестами и штриховой линией на рис. 3.

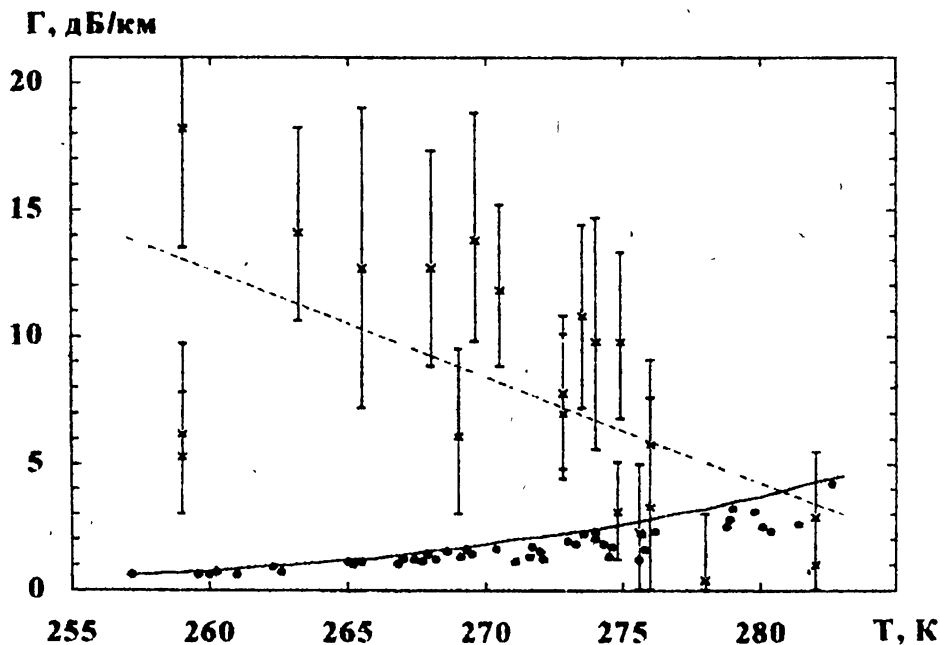


Рис. 3.

Здесь же приведены наши экспериментальные данные (кружки) и изображена определенная с их использованием температурная зависимость максимально возможного уровня поглощения — поглощения в насыщенном водяном паре (сплошная линия). По нашим данным, поглощение вблизи 250 ГГц (так же, как и на частотах 138 и 340 ГГц) в среднем падает с понижением температуры воздуха и, примерно соответствуя при $T \approx 280$ К измеренному в [31], при $T \approx 260$ К на порядок меньше, чем в [31].

Необходимо отметить, что результаты работы [31] уже подвергались экспериментальной проверке — авторами [16], которые не обнаружили ни спектральной аномалии поглощения, ни аномально сильной его зависимости от температуры.

3. О ЗАВИСИМОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ ОТ СОДЕРЖАНИЯ ВОДЯНОГО ПАРА И О ВЛИЯНИИ СОЛНЕЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ВЕЛИЧИНУ ПОГЛОЩЕНИЯ

В ряде цитированных работ Гебби и др. отмечалась плохая корреляция атмосферного поглощения с содержанием водяного пара. Нерегулярная зависимость поглощения от влажности воздуха была зарегистрирована и в полевых измерениях [32], проведенных на частоте 337 ГГц. Влияние солнечного излучения на поглощательные свойства атмосферы было замечено или предполагалось в работах [3, 4, 33–35]. В лабораторных экспериментах [36, 37], имевших целью подтвердить влияние коротковолновых излучений на поглощение ММ и СУБММ волн водяным паром, обнаружен наиболее поразительный эффект — усиление этих волн при облучении водяного пара ультрафиолетовой радиацией.

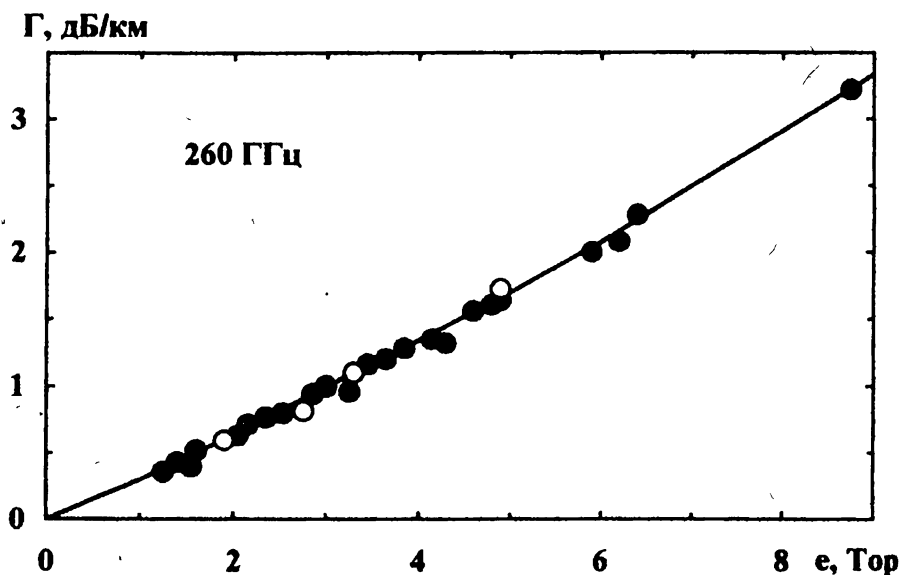


Рис. 4.

По нашим данным, величина коэффициента поглощения Γ однозначно определяется, как это и должно быть, тремя термодинамическими параметрами — давлением водяного пара e , температурой T и давлением сухого воздуха P . Прямого влияния солнечного излучения на величину Γ нами не замечено. Свидетельством тому служат рис. 4–6. На этих рисунках кружками показаны соответствующие $T = 300$ К, $P = 750$ Тор зависимости $\Gamma(e)$ на частотах 138, 247, 260 и 340 ГГц, которые получены путем обработки по методике [26] результатов наших полевых измерений (во время измерений величины T и P изменялись в пределах: $T = (257 - 300)$ К,

$P = (720 - 755) \text{ Тор}$). Светлыми и темными кружками обозначены значения Γ , измеренные соответственно в солнечные дни и в пасмурную погоду или ночью. Сплошные кривые на рисунках рассчитаны с использованием полуэмпирической модели поглощения [20].

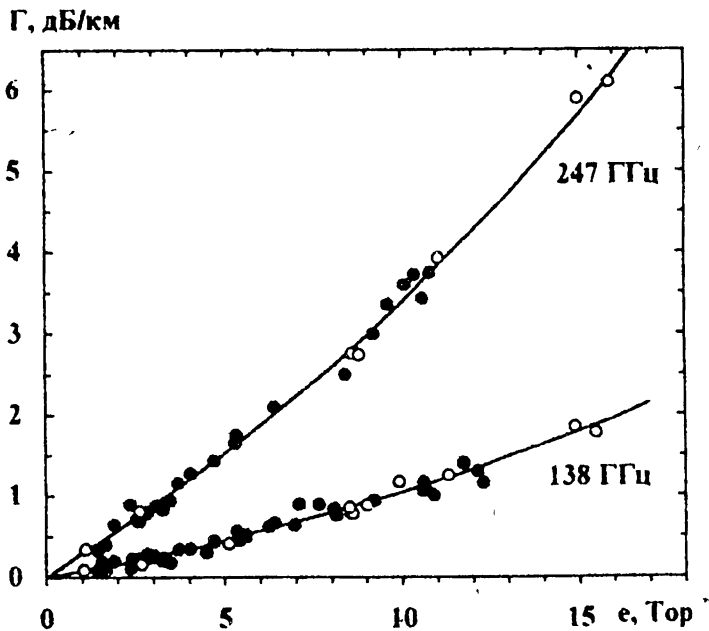


Рис. 5.

Квадрат на рис. 6 — результат наших лабораторных измерений [17]. Прямая 1 и кривая 2 на том же рисунке отражают результаты полевых измерений [34] ($\nu = 337 \text{ ГГц}$), полученные соответственно в солнечные и в пасмурные дни. Авторами [34] в пасмурные дни наблюдалась сильная нелинейность в зависимости $\Gamma(e)$, которая исчезала в ясные дни. Отсутствие нелинейности в ясную погоду они объяснили фотодиссоциацией водных кластеров под воздействием коротковолновой солнечной радиации. Тенденция к уменьшению коэффициента Γ вблизи 340 ГГц с ростом интенсивности солнечного излучения была отмечена и в недавней работе [35]. Как видно из рис. 4–6, данные наших измерений не содержат и намёка на существование подобного эффекта.

Влияния коротковолновой радиации на атмосферное поглощение СУБММ и коротких ММ волн не было замечено и при регистрации излучения Солнца на Памире [38, 39] (высота пункта наблюдения — 3860 м над уровнем моря), хотя уровень её на трассе сигнала был гораздо выше, чем при измерениях на приземных трассах. Ни спектральные измерения солнечного излучения в диапазоне $(210 - 500) \text{ ГГц}$ [38], ни измерения ат-

молекулярного поглощения в окне прозрачности 340 ГГц [39] не выявили каких-либо аномалий.

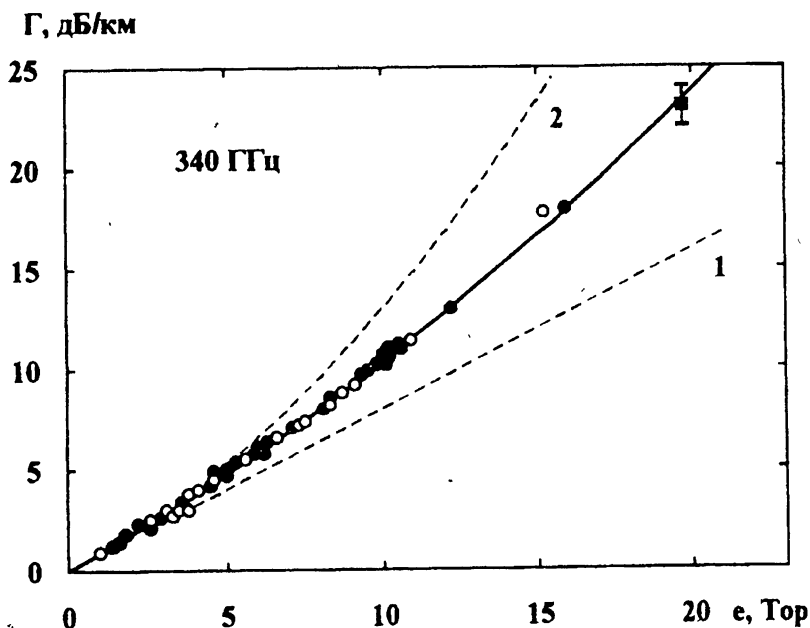


Рис. 6.

4. О ПОГЛОЩЕНИИ В УСЛОВИЯХ ТУМАНА

Согласно измерениям [27], насыщение водяного пара и образование тумана, снижающего метеорологическую дальность видимости до ~ 100 м, приводят к появлению на частотах $\nu \approx (200 - 400)$ ГГц непредсказуемо большого (до 10 дБ/км и более) дополнительного поглощения, обладающего сложной спектральной структурой.

На рис. 7 кружками изображена полученная нами экспериментальная зависимость между коэффициентами поглощения тумана $\Gamma_{\text{тум}}$ на частотах 138 и 340 ГГц. Коэффициенты $\Gamma_{\text{тум}}$ были определены вычитанием коэффициентов поглощения водяного пара Γ , вычисленных по модели [20], из измеренных величин полного атмосферного поглощения. Отметим, что измерения на указанных частотах выполнялись квазисинхронно. Данные рис. 7 соответствуют $T = 274$ К ($e = 4, 7$ Тор, относительная влажность воздуха — $r = (98 - 100)\%$). Сплошная прямая на рисунке рассчитана в рэлеевском приближении теории Ми при значениях комплексной диэлектрической проницаемости воды, согласно [40]. Видно, что измеренная зависимость между коэффициентами поглощения тумана на разнесенных

частотах удовлетворительно согласуется с теоретической. Такой же вывод был сделан в работе [40], в которой получены аналогичные данные для нескольких частот коротковолновой части ММ диапазона волн. Это означает, что расчетный спектральный ход поглощения радиоволн в тумане подтверждается экспериментом.

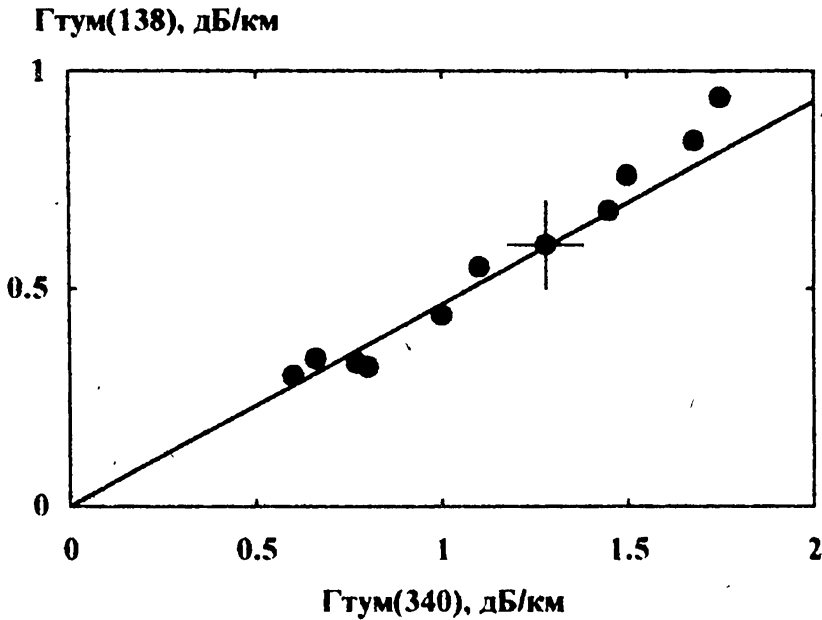


Рис. 7.

Полученные нами экспериментальные зависимости коэффициентов $\Gamma_{\text{тум}}$ от дальности видимости V на частотах (138–340) ГГц находятся в разумном согласии с соответствующими теоретическими зависимостями, рассчитанными с использованием известных из литературы [41–43] регрессионных соотношений между дальностью видимости и фигурирующей в расчетах (но обычно не контролируемой в экспериментах) водностью тумана. В качестве примера на рис. 8 приведены измеренная и рассчитанные по [41–43] (прямые 1–3 соответственно) зависимости $\Gamma_{\text{тум}}(V)$ для $\nu = 260$ ГГц ($T = (274 - 278)$ К, $\tau = (97 - 100)\%$). Прямоугольниками на рисунке показаны области экспериментальных значений $\Gamma_{\text{тум}}$, соответствующие $V = (75 \pm 25)$, (150 ± 50) и (1000 ± 200) м. Единичные измерения, выполненные при $V = 350, 500$ и 600 м, отражены кружками. Как явствует из рис. 8, дополнительное атмосферное поглощение, вызванное образованием тумана, при $V \sim 100$ м не превышает 2,5 дБ/км.

Таким образом, результаты наших измерений и измерений [40], в противоположность выводам работы [27], свидетельствуют о том, что при

насыщении водяного пара не происходит заметного изменения его поглощательных свойств.

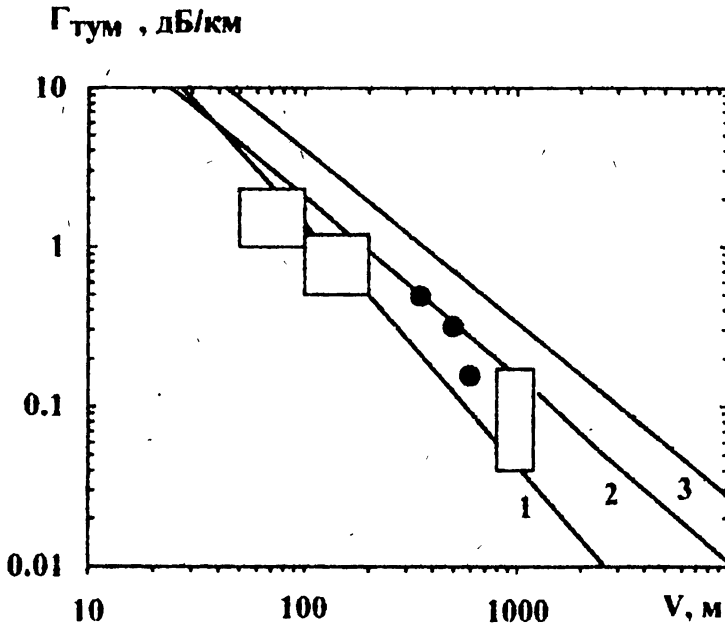


Рис. 8.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог вышеизложенному, приходится констатировать, что гипотеза [1–5] о существенной роли больших водных кластеров в атмосферном поглощении ММ и СУБММ волн вызывает серьезные сомнения, ибо аномалии поглощения, которые она призвана объяснить, не поддаются экспериментальному воспроизведению, несмотря на то, что условия экспериментов, дающих отрицательный результат, весьма близки к условиям, при которых эти аномалии были обнаружены. По-видимому, немалая часть аномальных экспериментальных эффектов имеет аппаратурно-методическое происхождение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94-02-05407-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gebbie H. A. Atmospheric Water Vapor / Eds. Deepak et al. — N.Y.: Academic Press, 1980. P. 133.

2. Carlon H. R. // *J. Atm. Terr. Phys.*, 1982. V. 44. N 1. P. 19.
3. Gebbie H. A. // *Nature*, 1982. V. 296. 1 April. P. 422.
4. Gebbie H. A. // *Infrared Phys.*, 1984. V. 24. N 5. P. 429.
5. Buffey I. P., Brown W. B., and Gebbie H. A. // *J. Chem. Soc. Faraday Trans.*, 1990. V. 86. N 13. P. 2357.
6. Вигасин А. А. // *Журнал структурной химии*, 1983. Т. 24. N 1. С. 116.
7. Straiton A. W. and Tolbert C. W. // *Proc. IRE*, 1960. V. 48. N 5. P. 898.
8. Дрягин Ю. А., Кисляков А. Г., Кукин Л. М. и др. // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1966. Т. 9. N 6. С. 1078.
9. Tolbert C. W. and Straiton A. W. // *Proc. IRE*, 1961. V. 49. N 3. P. 649.
10. Gibbins C. J., Gordon-Smith A. C., and Gebbie H. A. // *Nature*, 1973. V. 243. N 5407. P. 397.
11. Llewellyn-Jones D. T. and Knight R. J. — In: *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Antennas and Propagation*. N.Y.-L., 1981. Pt. 2. P. 81.
12. Gibbins C. J., Wrench C. L., and Groom D. L. // *Int. J. IR & MM Waves*, 1984. V. 5. N 11. P. 1443.
13. Рядов В. Я., Фурашов Н. И. // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1972. Т. 15. N 10. С. 1469.
14. Кукин Л. М., Ноздрин Ю. Н., Рядов В. Я. и др. // *Радиотехника и электроника*, 1975. Т. 20. N 10. С. 2017.
15. Рядов В. Я., Фурашов Н. И. // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1975. Т. 18. N 3. С. 358.
16. Fedoseev L. I. and Koukin L. M. // *Int. J. IR & MM Waves*, 1984. V. 5. N 7. P. 953.
17. Furashov N. I., Katkov V. Yu., and Ryadov V. Ya. // *Int. J. IR & MM Waves*, 1984. V. 5. N 7. P. 971.
18. Rice D. P. and Ade P. A. R. // *Infrared Phys.*, 1979. V. 19. N 5. P. 575.
19. Emery R. J., Moffat P., Bohlander R. A., and Gebbie H. A. // *J. Atm. Terr. Phys.*, 1975. V. 37. N 4. P. 587.
20. Katkov V. Yu. — In: *Int. Conf. on Millimeter and Submillimeter Waves and Applications* /Ed. Afsar M. N., Proc. SPIE 2250. 1994. P. 602.
21. Рядов В. Я., Фурашов Н. И. // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1972. Т. 15. N 10. С. 1475.
22. Рядов В. Я., Фурашов Н. И. // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1976. Т. 19. N 9. С. 1308.
23. Поваров А. В., Рядов В. Я., Свердлов Б. А., Фурашов Н. И. // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1976. Т. 19. N 4. С. 529.
24. Катков В. Ю., Рядов В. Я., Фурашов Н. И. // *Радиотехника и электроника*, 1981. Т. 26. N 12. С. 2481.
25. Furashov N. I. and Katkov V. Yu. // *Int. J. IR & MM Waves*, 1985. V. 6. N 8. P. 751.
26. Катков В. Ю., Свердлов Б. А., Фурашов Н. И. // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1995. Т. 38. N 12. С. 1278.

27. Emery R. J., Zavody A. M., and Gebbie H. A. // J. Atm. Terr. Phys., 1980. V. 42. N 9/10. P. 801.
28. Emmons L. K. and De Zafra R. L. // Int. J. IR & MM Waves, 1990. V. 11. N 4. P. 469.
29. Жевакин С. А. — В сб.: Тезисы докл. 3-ей Всес. школы по распростр. ММ и СУБММ волн в атмосфере. — Харьков: ИРЭ АН УССР, 1989. С. 5.
30. Ma Q. and Tipping R. H. // J. Chem. Phys., 1990. V. 93. N 9. P. 6127.
31. Gimmestad G. G. and Gebbie H. A. // Int. J. IR & MM Waves, 1982. V. 3. N 1. P. 77.
32. Gamble W. L., Osmundsen J. F., Meyer H. C., and Tanton G. A. — In: Proc. Int. Conf. Lasers' 78, Orlando, Fla., 1978. — McLean, Va., 1979. P. 606.
33. Whaley T. W., Jr. and Fannin B. M. // IEEE Trans. Ant. Propag., 1969. V. AP-17. N 5. P. 682.
34. Tanton G. A., Mitra S. S., and Stettler J. D. et al. — In: 4th Int. Conf. on IR & MM Waves. Post-Deadline Digest Contributions and Program Additions and Changes. 1979. P. 27.
35. Galm J. M., Merat F. L., and Claspy P. C. // IEEE Trans. Ant. Propag., 1990. V. 38. N 7. P. 982.
36. Dias-Lalcaca P., Packham N. J. C., and Gebbie H. A. // Infrared Phys., 1984. V. 24. N 5. P. 437.
37. Gebbie H. A. and Apsley N. // Infrared Phys., 1988. V. 28. N 5. P. 337.
38. Аверков С. И., Аникин В. И., Рядов В. Я., Фурашов Н. И. // Астроном. журнал, 1964. Т. 41. N 3. С. 542.
39. Рядов В. Я., Фурашов Н. И., Шаронов Г. А. // Радиотехника и электроника, 1964. Т. 9. N 6. С. 943.
40. Liebe H. J., Manabe T., and Hufford G. A. // IEEE Trans. Ant. Propag., 1989. V. AP-37. N 12. P. 1617.
41. Altshuler E. E. // IEEE Trans. Ant. Propag., 1984. V. AP-32. N 7. P. 757.
42. Бартенёва О. Д., Полякова Е. А. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1965. Т. 1. N 2. С. 193.
43. Захарян М. В., Пожидаев В. Н. — В сб.: Тезисы докл. 16-ой Всес. конф. по распростр. радиоволн. — Харьков, 1990. Ч. 2. С. 188.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород

Поступила в редакцию
21 февраля 1995 г.

ON THE ANOMALIES AND THE ROLE OF WATER CLUSTERS IN ATMOSPHERIC ABSORPTION OF MILLIMETER AND SUBMILLIMETER RADIO WAVES

V. Yu. Katkov, N. I. Furashov

The experimental data are presented which do not confirm the existence of anomalies observed by a number of investigators in the atmospheric absorption of millimeter and submillimeter radiowaves and thus make questionable the hypothesis on the essential role of large water clusters in absorption which is invoked for the explanation of the anomalies.

УДК 621.391.8

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ МАРКОВСКИХ СИГНАЛОВ С ОЦЕНИВАНИЕМ АМПЛИТУД ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

О. В. Польдин, А. М. Силаев

Рассмотрена задача оптимальной фильтрации марковских случайных сигналов с одновременным оцениванием амплитуд импульсных возмущений. Для описания сигналов, наблюдений и импульсных возмущений использованы линейные модели разностных стохастических уравнений в дискретном времени. Импульсные возмущения возникают в случайные моменты времени со случайными амплитудами. Получен алгоритм вычисления совместной апостериорной плотности вероятности случайных сигналов и амплитуд импульсных возмущений в текущем времени. Для скалярных моделей оцениваемого и наблюдаемого процессов с помощью метода разделения найден квазиоптимальный алгоритм фильтрации. Даны результаты моделирования синтезированного алгоритма на ЭВМ.

Многие физические системы в процессе своей работы подвержены совместному воздействию импульсных и шумовых возмущений. Импульсные возмущения можно представлять в виде откликов некоторых линейных систем на δ -импульсные воздействия со случайными амплитудами в случайные моменты времени. В отличие от шумов, которые имеют хаотический характер, импульсные возмущения обладают квазидетерминированной структурой и могут быть описаны функциями времени, определенными с точностью до неизвестных параметров [1, 2]. Проблема оптимального оценивания сигналов при импульсных и шумовых возмущениях, а также оценивание неизвестных параметров импульсных возмущений возникает при проектировании высококачественных систем управления и стабилизации, функционирующих в изменяющихся условиях [3, 4], при обработке нестационарных сигналов в радио- и гидролокации, в системах радиосвязи при резком изменении уровня помех [5–9] и во многих других практических задачах [10–12].

С помощью методов теории условных марковских процессов [13, 14] задача оптимальной фильтрации сигналов, описываемых линейными моделями разностных уравнений в дискретном времени при совместном действии импульсных и шумовых возмущений рассматривалась в [15, 16]. В этих работах в гауссовом приближении (по условным плотностям вероятности сигнала) были получены рекуррентные уравнения для оптимальных

в среднеквадратическом смысле оценок самого сигнала и случайного момента появления импульсного возмущения.

В настоящей работе развитая ранее теория применяется для решения задачи оценивания амплитуды импульсного возмущения сигнала. Выводятся уравнения для совместной апостериорной плотности вероятности сигнала и амплитуды импульса, из которых в скалярном случае с помощью метода "разделения" [5, 17] синтезируется приближенный алгоритм оценивания. Применяемый в настоящей статье подход требует задания априорной статистики амплитуд и моментов появления возмущений импульсного типа (в отличие, например, от метода максимального правдоподобия [7]). В результате можно получить достаточно простой в реализации алгоритм обработки наблюдаемых данных в текущем времени.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть расширенный векторный процесс \vec{z}_k (объединяющий компоненты оцениваемого сигнала и возмущения импульсного типа) и наблюдаемый векторный процесс \vec{y}_k задаются в дискретном времени уравнениями

$$\vec{z}_{k+1} = F_k \vec{z}_k + G_k \vec{\xi}_k + \vec{A} \delta_{k\tau}, \quad (1)$$

$$\vec{y}_{k+1} = H_{k+1} \vec{z}_{k+1} + \vec{\eta}_{k+1}, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

где F_k, G_k, H_{k+1} — известные матрицы; $\{\vec{\xi}_k\}, \{\vec{\eta}_{k+1}\}$ — последовательности независимых векторных случайных величин с плотностями вероятности $\rho_{\xi}(\vec{\xi}_k, k), \rho_{\eta}(\vec{\eta}_{k+1}, k+1)$, описывающие шумовые возмущения в моделях сигнала и наблюдений; $\vec{A} \delta_{k\tau}$ — дельта-импульсное возмущение сигнала \vec{z}_k , возникающее в случайный момент времени τ со случайной векторной амплитудой \vec{A} , $\delta_{k\tau}$ — символ Кронекера

$$\delta_{k\tau} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = \tau, \\ 0 & \text{при } k \neq \tau. \end{cases}$$

Будем считать, что в начальный момент времени $k = 0$ заданы плотности вероятности $P_{z_0}(\vec{z}_0), P_A(\vec{A})$ начального состояния сигнала \vec{z}_0 и случайной амплитуды импульсного возмущения \vec{A} , а также априорные вероятности $P_{\tau}(\tau)$ возможных дискретных значений случайного момента появления импульса $\tau = 0, 1, \dots$. Предположим, что величины \vec{z}_0, \vec{A}, τ априорно статистически независимы и не зависят от шумовых последовательностей $\{\vec{\xi}_k\}, \{\vec{\eta}_{k+1}\}$. Задача заключается в том, чтобы найти

алгоритм оптимального оценивания сигнала \vec{z}_k в момент времени k и амплитуды импульсного возмущения \vec{A} по реализации наблюдаемого процесса $\vec{y}_1^k \equiv \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k\}$, а также исследовать точность получаемых оценок $\hat{z}(k)$, $\hat{A}(k)$.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ СИГНАЛОВ

Вычислить оптимальные оценки векторов \vec{z}_k и \vec{A} по любому заданному критерию качества позволяет совместная апостериорная плотность вероятности $P(\vec{z}_k, \vec{A}, k) \equiv W(\vec{z}_k, \vec{A}, k)$ совокупности $\{\vec{z}_k, \vec{A}\}$. Поскольку в каждый момент времени выполняется одна из двух возможных ситуаций — импульсное возмущение ещё не появилось ($k \leq \tau$) или уже появилось ($k > \tau$), то функцию $W(\vec{z}_k, \vec{A}, k)$ можно представить в виде суммы

$$W(\vec{z}_k, \vec{A}, k) = p_0(k) W_0(\vec{z}_k, \vec{A}, k) + p_1(k) W_1(\vec{z}_k, \vec{A}, k), \quad (2)$$

где $p_0(k) \equiv P(k \leq \tau | \vec{y}_1^k)$ и $p_1(k) \equiv 1 - p_0(k) \equiv P(k > \tau | \vec{y}_1^k)$ имеют смысл апостериорных вероятностей непооявления и появления импульсного возмущения к моменту времени k ; $W_0(\vec{z}_k, \vec{A}, k) \equiv P(\vec{z}_k, \vec{A}, k | k \leq \tau, \vec{y}_1^k)$ и $W_1(\vec{z}_k, \vec{A}, k) \equiv P(\vec{z}_k, \vec{A}, k | k > \tau, \vec{y}_1^k)$ — апостериорные условные плотности вероятности совокупности оцениваемых векторов $\{\vec{z}_k, \vec{A}\}$. При условии отсутствия импульса к моменту времени k (т.е. при $k \leq \tau$) сохраняется статистическая независимость величин \vec{z}_k и \vec{A} , а плотность вероятности амплитуды импульса \vec{A} равна априорной плотности $P_A(\vec{A})$. Поэтому

$$W_0(\vec{z}_k, \vec{A}, k) = W_0(\vec{z}_k, k) P_A(\vec{A}), \quad (3)$$

$$W_1(\vec{z}_k, \vec{A}, k) = W_1(\vec{z}_k, k | \vec{A}) W_1(\vec{A}, k),$$

где $W_0(\vec{z}_k, k) \equiv P(\vec{z}_k, k | k \leq \tau, \vec{y}_1^k)$, $W_1(\vec{z}_k, k | \vec{A}) \equiv P(\vec{z}_k, k | \vec{A}, k > \tau, \vec{y}_1^k)$, $W_1(\vec{A}, k) \equiv P(\vec{A} | k > \tau, \vec{y}_1^k)$ — апостериорные условные плотности вероятности собственно векторов \vec{z}_k и \vec{A} .

С использованием результатов работ [15, 16] для функций $W_0(\vec{z}_k, k)$, $W_1(\vec{z}_k, k | \vec{A})$, $W_1(\vec{A}, k)$ и $p_0(k)$ можно получить рекуррентный алгоритм вычисления на каждом шаге дискретного времени в темпе поступления новых значений наблюдаемой последовательности \vec{y}_k . Уравнения данного алгоритма имеют вид

$$W_0(\vec{z}_{k+1}, k+1) = \frac{P(\vec{y}_{k+1} | \vec{z}_{k+1}) \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\vec{z}_{k+1} | \vec{z}_k) W_0(\vec{z}_k, k) d\vec{z}_k}{\Phi_0(\vec{y}_{k+1})}, \quad (4)$$

$$W_1(\vec{z}_{k+1}, k+1 | \vec{A}) = \beta(\vec{A}, k+1) W_{01}(\vec{z}_{k+1}, k+1 | \vec{A}) + [1 - \beta(\vec{A}, k+1)] W_{11}(\vec{z}_{k+1}, k+1 | \vec{A}), \quad (5)$$

$$W_{01}(\vec{z}_{k+1}, k+1 | \vec{A}) = \frac{P(\vec{y}_{k+1} | \vec{z}_{k+1}) \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\vec{z}_{k+1} - \vec{A} | \vec{z}_k) W_0(\vec{z}_k, k) d\vec{z}_k}{\Phi_{01}(\vec{y}_{k+1} | \vec{A})},$$

$$W_{11}(\vec{z}_{k+1}, k+1 | \vec{A}) = \frac{P(\vec{y}_{k+1} | \vec{z}_{k+1}) \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\vec{z}_{k+1} | \vec{z}_k) W_1(\vec{z}_k, k) d\vec{z}_k}{\Phi_1(\vec{y}_{k+1} | \vec{A})},$$

$$W_1(\vec{A}, k+1) = \frac{\nu(k) p_0(k) \Phi_{01}(\vec{y}_{k+1} | \vec{A}) P_A(\vec{A}) + p_1(k) \Phi_1(\vec{y}_{k+1} | \vec{A}) W_1(\vec{A}, k)}{\nu(k) p_0(k) \Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}) + p_1(k) \Phi_1(\vec{y}_{k+1})}, \quad (6)$$

$$p_0(k+1) = \frac{\Phi_0(y_{k+1}) [1 - \nu(k)] p_0(k)}{\Phi_0(\vec{y}_{k+1}) [1 - \nu(k)] p_0(k) + \Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}) \nu(k) p_0(k) + \Phi_1(\vec{y}_{k+1}) p_1(k)} \quad (7)$$

($k = 0, 1, \dots$)

с начальными условиями

$$W_0(\vec{z}_0, 0) = P_{z_0}(\vec{z}_0), \quad p_0(0) = 1. \quad (8)$$

Функции $W_1(\vec{z}_0, 0 | \vec{A})$, $W_1(\vec{A}, 0)$ в начальный момент времени $k = 0$ могут задаваться произвольным образом, т.к. $p_1(0) = 0$, $\beta(\vec{A}, 1) = 1$, и, следовательно, независимо от начальных значений при $k = 1$ данные функции равны $W_1(\vec{A}, 1) = P_A(\vec{A})$, $W_1(\vec{z}_1, 1 | \vec{A}) = W_{01}(\vec{z}_1, 1 | \vec{A})$. В уравнениях (4)–(7) $W_{01}(\vec{z}_k, k | \vec{A})$, $W_{11}(\vec{z}_k, k | \vec{A})$ — новые вспомогательные плотности вероятности; $P(\vec{y}_{k+1} | \vec{z}_{k+1}) = \rho_\eta[\vec{y}_{k+1} - H_{k+1} \vec{z}_{k+1}; k+1]$ — условная плотность вероятности вектора \vec{y}_{k+1} при заданной величине сигнала \vec{z}_{k+1} , которая выражается через заданную плотность вероятности шума наблюдений $\rho_\eta(\vec{\eta}_{k+1}, k+1)$; $\Pi(\vec{z}_{k+1} | \vec{z}_k)$ — переходная плотность вероятности последовательности \vec{z}_k , которая соответствует модельному уравнению для расширенного вектора сигнала без импульсных возмущений

$$\vec{z}_{k+1} = F_k \vec{z}_k + G_k \vec{\xi}_k$$

и выражается через плотность вероятности шума $\rho_\xi(\vec{\xi}_k, k)$. Например, если $G_k = \mathbf{I}$ — единичная матрица, то

$$\Pi(\vec{z}_{k+1}|\vec{z}_k) = \rho_\xi[\vec{z}_{k+1} - F_k \vec{z}_k, k]$$

В уравнениях (4)–(7) также введены обозначения для нормировочных коэффициентов

$$\begin{aligned} \Phi_0(\vec{y}_{k+1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{y}_{k+1}|\vec{z}_{k+1}) \Pi(\vec{z}_{k+1}|\vec{z}_k) W_0(\vec{z}_k, k) d\vec{z}_k d\vec{z}_{k+1}, \\ \Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}|\vec{A}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{y}_{k+1}|\vec{z}_{k+1}) \Pi(\vec{z}_{k+1}|\vec{z}_k) W_0(\vec{z}_k, k) d\vec{z}_k d\vec{z}_{k+1}, \\ \Phi_1(\vec{y}_{k+1}|\vec{A}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{y}_{k+1}|\vec{z}_{k+1}) \Pi(\vec{z}_{k+1}|\vec{z}_k) W_1(\vec{z}_k, k) d\vec{z}_k d\vec{z}_{k+1}, \quad (9) \\ \Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}|\vec{A}) P_A(\vec{A}) d\vec{A}, \\ \Phi_1(\vec{y}_{k+1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\vec{y}_{k+1}|\vec{A}) W_1(\vec{A}, k) d\vec{A} \end{aligned}$$

и вспомогательных функций

$$\nu(k) \equiv P_\tau(k) / \sum_{i=k}^{\infty} P_\tau(i), \quad (10)$$

$$\beta(\vec{A}, k+1) \equiv \frac{\nu(k) p_0(k) \Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}|\vec{A}) P_A(\vec{A})}{\nu(k) p_0(k) \Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}|\vec{A}) P_A(\vec{A}) + p_1(k) \Phi_1(\vec{y}_{k+1}|\vec{A}) W_1(\vec{A}, k)}$$

Уравнения (2)–(7) составляют замкнутый рекуррентный алгоритм вычисления апостериорной плотности вероятности $W(\vec{z}_k, \vec{A}, k)$ совокупности случайных векторных величин $\{\vec{z}_k, \vec{A}\}$ в момент времени k и могут служить основой для получения приближенных алгоритмов оптимальной фильтрации. Для нахождения собственно оптимальных оценок $\hat{\vec{z}}(k)$, $\hat{\vec{A}}(k)$ по функции $W(\vec{z}_k, \vec{A}, k)$ необходимо задать критерий оптимальности и перейти от уравнений (2)–(5) для плотностей вероятности к уравнениям для самих оценок. Так оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки $\hat{\vec{z}}(k)$ и $\hat{\vec{A}}(k)$ находятся как математические ожидания плотности вероят-

ности $W(\vec{z}_k, \vec{A}, k)$

$$\hat{z}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \vec{z}_k W(\vec{z}_k, \vec{A}, k) d\vec{z}_k d\vec{A},$$

$$\hat{A}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \vec{A} W(\vec{z}_k, \vec{A}, k) d\vec{z}_k d\vec{A}.$$

При этом матрицы ковариаций

$$K_z(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int [\vec{z}_k - \hat{z}(k)][\vec{z}_k - \hat{z}(k)]^T W(\vec{z}_k, \vec{A}, k) d\vec{z}_k d\vec{A},$$

$$K_A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int [\vec{A} - \hat{A}(k)][\vec{A} - \hat{A}(k)]^T W(\vec{z}_k, \vec{A}, k) d\vec{z}_k d\vec{A},$$

где T — знак транспонирования матриц, характеризуют апостериорный разброс значений \vec{z}_k, \vec{A} около оптимальных оценок $\hat{z}(k), \hat{A}(k)$ и тем самым позволяют судить о точности процедуры фильтрации.

Как следует из уравнений алгоритма, при оценивании значений \vec{z}_k, \vec{A} не требуется вычислять апостериорные вероятности $P_\tau(\tau | \vec{y}_1^k)$ момента появления импульса для каждого из его возможных значений $\tau \geq 0$ и не требуется оценивать сам момент импульсного воздействия τ . Достаточно вычислять лишь вспомогательные интегральные функции $p_0(k) \equiv \sum_{i=k}^{\infty} P_\tau(i | \vec{y}_1^k)$, $p_1(k) \equiv \sum_{i=0}^{k-1} P_\tau(i | \vec{y}_1^k)$ и коэффициент $\nu(k)$, имеющий смысл вероятности появления импульса в момент времени k при условии, что в предыдущие моменты времени он не появлялся. По-существу, уравнения (2)–(7) алгоритма вычисления плотности вероятности $W(\vec{z}_k, \vec{A}, k)$ есть результат усреднения более общей плотности вероятности $P(\vec{z}_k, \vec{A}, \tau | \vec{y}_1^k)$ по статистическим характеристикам параметра τ , что позволило перейти от исходной марковской совокупности $\{\vec{z}_k, \vec{A}, \tau\}$ к совокупности $\{\vec{z}_k, \vec{A}\}$. Отметим, что задача оптимального в среднеквадратическом смысле оценивания момента появления импульса была ранее рассмотрена в работе [16]. В [15] путем усреднения по параметру \vec{A} был также получен алгоритм оптимальной фильтрации собственно сигнала \vec{z}_k , не требующий одновременного оценивания амплитуды импульса \vec{A} . Система рекуррентных уравнений (2)–(7) позволяет не только оценивать сигнал \vec{z}_k , но и находить оценку амплитуды импульсного возмущения \vec{A} .

3. ПРИМЕР. ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим в качестве примера скалярную модель оцениваемого сигнала и скалярные наблюдения, описываемые уравнениями

$$z_{k+1} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i z_{k-i} + \xi_k + A \delta_{k\tau},$$

(13)

$$y_{k+1} = z_{k+1} + \eta_{k+1},$$

$$(k = 0, 1, \dots; \quad z_0 = z_{-1} = \dots = z_{1-p} = 0; \quad p > 0).$$

Здесь без учета импульсного возмущения сигнал z_k является авторегрессионным случайным процессом порядка p с заданными коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_{p-1} . Предположим, что $\{\xi_k\}, \{\eta_{k+1}\}$ — независимые последовательности нормальных случайных величин с нулевыми средними значениями и дисперсиями Q и R ; A и τ — амплитуда и момент появления импульсного возмущения. Если ввести векторы размерности p

$$\vec{z}_k = (z_k, z_{k-1}, \dots, z_{k-p+1})^T, \quad \vec{e} = (1, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\vec{H} = \vec{e}^T, \quad \vec{G} = \vec{e}, \quad \vec{A} = A\vec{e}$$

и матрицу размерности $p \times p$

$$F = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} & a_{p-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то уравнения (13) приводятся к виду (1), причем размерность оцениваемого вектора \vec{z}_k равна p , а наблюдаемый процесс — скалярный (размерность вектора \vec{y}_{k+1} равна единице). В рассматриваемом примере неизвестная амплитуда импульса A является скалярной постоянной величиной. Для получения из (2)–(7) приближенного алгоритма фильтрации удобно воспользоваться методом “разделения” [17]. Для этого весь интервал возможных значений амплитуды A разобьем на достаточно большое число M отрезков, каждый величиной ΔA_m , $m = \overline{1, M}$. В заранее определенных точках (узлах) A_m этих отрезков будем вычислять значения априорной плотности вероятности амплитуды $P_A(A_m)$, а также функции $W_1(A_m, k+1), \beta_m(k+1) \equiv \beta(A_m, k+1)$ в соответствии с формулами (5), (6) при $k \geq 0, m = \overline{1, M}$. Расчет этих значений можно проводить параллельно для всех M узлов. Выбирая число M достаточно большим, можно

с достаточной степенью точности восстанавливать функции $W_1(A, k+1)$, $\beta(A, k+1)$ на интервале изменения амплитуды импульсного возмущения A . Поскольку $\vec{z}_0 = 0$, то начальная плотность вероятности сигнала записывается в виде дельта-функции $P(\vec{z}_0) = \delta(\vec{z}_0)$. В силу гауссовости шумов ξ_k, η_{k+1} из (4) получим, что условная плотность вероятности $W_0(\vec{z}_k, k)$ вектора \vec{z}_k будет оставаться гауссовой при всех $k \geq 0$. Поэтому уравнение (4) для плотности вероятности $W_0(\vec{z}_k, k)$ можно заменить уравнениями для её математического ожидания $\vec{z}_0(k)$ и матрицы ковариации $K_0(k)$, которые записываются в виде уравнений фильтра Калмана [18]:

$$\begin{aligned}\vec{z}_0(k+1) &= F\vec{z}_0(k) + \vec{B}_0(k+1)[y_{k+1} - \vec{e}^T F\vec{z}_0(k)], \\ \vec{B}_0(k+1) &= P_0(k+1)\vec{e} / [\vec{e}^T P_0(k+1)\vec{e} + R], \\ P_0(k+1) &= FK_0(k)F^T + Q\vec{e}\vec{e}^T, \\ K_0(k+1) &= [I - \vec{B}_0(k+1)\vec{e}^T]P_0(k+1), \quad (k = 0, 1, \dots)\end{aligned}\tag{14}$$

где I — единичная матрица размерности $p \times p$, с начальными нулевыми условиями ($\vec{z}_0(0)$ — нулевой вектор, $K_0(0)$ — нулевая матрица). Вследствие гауссовости плотностей вероятности $\Pi(\vec{z}_{k+1}|\vec{z}_k) \equiv \rho_\xi(\vec{z}_{k+1} - F\vec{z}_k)$ и $P(y_{k+1}|\vec{z}_{k+1}) \equiv \rho_\eta(y_{k+1} - z_{k+1})$ условная вспомогательная плотность вероятности сигнала $W_{01}(\vec{z}_k, k|A)$ также будет гауссовой при всех $k \geq 1$. При этом можно показать, что $W_{01}(\vec{z}_k, k|A) = W_0[\vec{z}_k - A\vec{e} + A\vec{B}_0(k), k]$, а среднее значение $\vec{z}_{01m}(k)$ и матрица ковариации $K_{01m}(k)$ плотности вероятности $W_{01}(\vec{z}_k, k|A_m)$ в узловых точках A_m соответственно равны

$$\begin{aligned}\vec{z}_{01m}(k) &= \vec{z}_0(k) + A_m\vec{e} - A_m\vec{B}_0(k), \\ K_{01m}(k) &= K_0(k), \quad (m = \overline{1, M}; k \geq 1).\end{aligned}\tag{15}$$

Другие условные плотности вероятности $W_1(\vec{z}_k, k|A)$, $W_{11}(\vec{z}_k, k|A)$, входящие в формулу (5), с течением времени в общем случае становятся негауссовыми. Однако для упрощения алгоритма будем приближенно считать, что $W_1(\vec{z}_k, k|A)$ — гауссова на каждом шаге дискретного времени k при всех A_m , $m = \overline{1, M}$. Тогда $W_{11}(\vec{z}_k, k|A_m)$ также будет иметь вид гауссовой плотности вероятности. Для векторов средних значений $\vec{z}_{11m}(k)$, $\vec{z}_{11m}(k)$ и матриц ковариаций $K_{11m}(k)$, $K_{11m}(k)$ данных плотностей вероятности в узловых точках из (5) можно получить рекуррентные уравнения

$$\begin{aligned} \bar{z}_{1m}(k+1) &= \beta_m(k+1)\bar{z}_{01m}(k+1) + [1 - \beta_m(k+1)]\bar{z}_{11m}(k+1), \\ K_{1m}(k+1) &= \beta_m(k+1)K_0(k+1) + [1 - \beta_m(k+1)]K_{11m}(k+1) + \\ &+ \beta_m(k+1)[1 - \beta_m(k+1)][\bar{z}_{01m}(k+1) - \bar{z}_{11m}(k+1)] \times \\ &\times [\bar{z}_{01m}(k+1) - \bar{z}_{11m}(k+1)]^\top, \\ \bar{z}_{11m}(k+1) &= F\bar{z}_{1m}(k) + \bar{B}_{1m}(k+1)[y_{k+1} - \bar{e}^\top F\bar{z}_{1m}(k)], \\ \bar{B}_{1m}(k+1) &= P_{1m}(k+1)\bar{e} / [\bar{e}^\top P_{1m}(k+1)\bar{e} + R], \\ P_{1m}(k+1) &= FK_{1m}(k)F^\top + Q\bar{e}\bar{e}^\top, \\ K_{11m}(k+1) &= [\mathbf{I} - \bar{B}_{1m}(k+1)\bar{e}^\top]P_{1m}(k+1), \\ &(m = \overline{1, M}; k \geq 0). \end{aligned} \quad (16)$$

Функции $\Phi_0(y_{k+1})$, $\Phi_{01m}(y_{k+1}) \equiv \Phi_{01}(y_{k+1}|A_m)$, $\Phi_{1m}(y_{k+1}) \equiv \Phi_1(y_{k+1}|A_m)$ с учетом формул (9), (14), (16) и гауссовости шумов $\{\xi_k\}$, $\{\eta_{k+1}\}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0(y_{k+1}) &= \exp \left\{ -\frac{[y_{k+1} - \bar{e}^\top F\bar{z}_0(k)]^2}{2\Delta_0(k+1)} \right\} / \sqrt{2\Pi\Delta_0(k+1)}, \\ \Phi_{01m}(y_{k+1}) &= \Phi_0(y_{k+1} - A_m), \\ \Phi_{1m}(y_{k+1}) &= \exp \left\{ -\frac{[y_{k+1} - \bar{e}^\top F\bar{z}_{1m}(k)]^2}{2\Delta_{1m}(k+1)} \right\} / \sqrt{2\Pi\Delta_{1m}(k+1)}, \\ \Delta_0(k+1) &= \bar{e}^\top FK_0(k)F^\top \bar{e} + Q + R, \\ \Delta_{1m}(k+1) &= \bar{e}^\top FK_{1m}(k)F^\top \bar{e} + Q + R, \\ &(m = \overline{1, M}; k = 0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

Интегральные выражения в (9) для определения безусловных функций $\Phi_{01}(y_{k+1})$, $\Phi_1(y_{k+1})$ будем приближенно вычислять с помощью методов

численного интегрирования по формулам

$$\Phi_{01}(y_{k+1}) = \sum_{m=1}^M \Phi_{01m}(y_{k+1}) P_A(A) \Delta A_m,$$

$$\Phi_1(y_{k+1}) = \sum_{m=1}^M \Phi_{1m}(y_{k+1}) W_1(A_m, k) \Delta A_m.$$
(18)

Добавляя к формулам (6), (10), (14)–(18) уравнение (7), для функции $p_0(k)$, получим замкнутую систему рекуррентных уравнений приближенного алгоритма фильтрации совокупности $\{\tilde{z}_k, \hat{A}\}$. Сами оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки $\tilde{z}(k)$, $\hat{A}(k)$, а также матрицы апостериорных ковариаций $K_z(k)$ сигнала \tilde{z}_k и апостериорные дисперсии $D_A(k)$ амплитуды импульсного возмущения A можно вычислять не на каждом шаге дискретного времени, а лишь по мере необходимости по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{z}(k) &= p_0(k) \tilde{z}_0(k) + p_1(k) \tilde{z}_1(k), \\ \hat{A}(k) &= p_0(k) A_{pr} + p_1(k) A_1(k), \\ K_z(k) &= p_0(k) K_0(k) + p_1(k) K_1(k) + \\ &+ p_0(k) p_1(k) [\tilde{z}_0(k) - \tilde{z}_1(k)] [\tilde{z}_0(k) - \tilde{z}_1(k)]^T, \\ D_A(k) &= p_0(k) D_{A_{pr}} + p_1(k) D_1(k) + p_0(k) p_1(k) [A_{pr} - A_1(k)]^2, \end{aligned}$$
(19)

где

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1(k) &= \sum_{m=1}^M \tilde{z}_{1m}(k) W_1(A_m, k) \Delta A_m, \\ A_{pr} &= \int_{-\infty}^{+\infty} A P_A(A) dA, \quad A_1(k) = \sum_{m=1}^M A_m W_1(A_m, k) \Delta A_m, \\ K_1(k) &= \sum_{m=1}^M [K_{1m}(k) + \tilde{z}_{1m}(k) \tilde{z}_{1m}^T(k)] W_1(A_m, k) \Delta A_m - \tilde{z}_1(k) \tilde{z}_1^T(k), \\ D_{A_{pr}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (A - A_{pr})^2 P_A(A) dA, \quad D_1(k) = \sum_{m=1}^M [A_m - A_1(k)]^2 W_1(A_m, k) \Delta A_m. \end{aligned}$$

Оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой скалярного значения сигнала z_k , заданного уравнением (13), по наблюдениям реализации

последовательности y_1^k будет первая компонента вектора \bar{z}_k . При этом первый элемент матрицы $K_z(k)$ имеет смысл апостериорной дисперсии процесса z_k , величина которой позволяет контролировать точность оценивания сигнала.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование алгоритма оценивания (6), (7), (10), (14)–(19) проводилось при следующих значениях параметров сигналов. Сигнал z_k и наблюдаемый процесс y_k моделировались в соответствии с уравнением (13). Порядок модели авторегрессии сигнала z_k выбирался в (13) равным $p = 2$, а коэффициенты задавались равными $a_0 = 0,95$, $a_1 = -0,65$. Априорная вероятность $P_\tau(\tau)$ появления импульсного воздействия и априорная плотность вероятности $P_A(A)$ амплитуды импульса задавались равномерными соответственно на интервалах $0 \leq \tau \leq 99$ и $-5 \leq A \leq 5$. На самом деле импульсное возмущение начиналось в момент времени $\tau_0 = 30$ с амплитудой $A_0 = 1$. Сигнал z_k в силу линейности модели (13) можно представить в виде суммы откликов на δ -импульсное входное воздействие и на входной белый гауссовский шум. На рис. 1 представлена типичная реализация сигнала z_k при дисперсии шума ξ_k в (13) равной $Q = 0,1$. Пунктиром на этом же рисунке дана реализация сигнала z_k при $Q = 0$, когда на входе линейной системы (13) есть только импульсное возмущение.

При моделировании по каждой реализации наблюдений $y_1^{100} = \{y_1, y_2, \dots, y_{100}\}$ вычислялись текущая оценка сигнала $\hat{z}(k)$ при $0 \leq k \leq 100$ и оценка амплитуды импульса \hat{A} (в конце интервала наблюдений), а также дисперсии этих оценок $D_z(k)$ и D_A в соответствии с уравнениями полученного квазиоптимального алгоритма оценивания. При этом интервал возможных значений амплитуды $[-5, 5]$ разбивался на $M = 101$ равных отрезков с узловыми точками в серединах этих отрезков (одна из узловых точек в результате оказывалась в нуле). Качество вырабатываемых оценок характеризуют их апостериорные дисперсии $D_z(k)$, D_A , а также квадраты отклонений оценок от истинных значений $\varepsilon_z^2(k) \equiv [z_k - \hat{z}(k)]^2$, $\varepsilon_A^2 \equiv (A_0 - \hat{A})^2$. Путем усреднения по 20 независимым реализациям приблизительно определялись средние значения апостериорных дисперсий $\overline{D_z(k)}$, $\overline{D_A}$ и среднеквадратичные отклонения оценок $\varepsilon_z^2(k)$, ε_A^2 при различных значениях дисперсий шумов Q , R в моделях сигнала и наблюдений (13). На рис. 2 даны графики отношения апостериорной дисперсии амплитуды импульса к априорной дисперсии $\rho = \overline{D_A}/D_{A,pr}$ в зависимости от величины дисперсии шума наблюдений R при различных уровнях шума сигнала Q (кривые 1–4 на рисунке получены соответственно для $Q = 0$, $Q = 10^{-2}$, $Q = 10^{-1}$ и $Q = 1$). На рис. 3 представлены

зависимости ρ от Q при различных значениях R (кривые 1-4 соответствуют случаям $R = 0$, $R = 10^{-2}$, $R = 10^{-1}$ и $R = 1$). Из рисунков видно, что чем больше отношение мощности импульса к уровню шумов (чем больше A_0^2/Q и A_0^2/R), тем меньше апостериорная дисперсия $\overline{D_A}$ и точнее происходит оценивание амплитуды импульса. При $A_0 = 1$, $Q \gg 1$, $R \gg 1$, апостериорная дисперсия вырабатывается близкой к априорной дисперсии, равной $D_{A_{pr}} = 8,3$; при этом $\rho = 1$. С уменьшением отношения сигнал/шум апостериорное распределение амплитуды начинает в большей степени зависеть от априорного распределения, что вообще характерно для байесовских методов оценивания параметров. Поэтому вырабатываемая алгоритмом оценка амплитуды \hat{A} в общем случае имеет некоторое смещение от истинного значения в сторону априорного среднего значения $\hat{A}_{pr} = 0$. Смещение оценки тем меньше, чем больше соотношение сигнал/шум и чем ближе истинное значение амплитуды A_0 к априорному \hat{A}_{pr} . При $A_0 = 0$, когда на интервале наблюдения импульс вообще не появляется, оценка вырабатывается близкой к априорной $\hat{A} \approx \hat{A}_{pr} = 0$. Апостериорная дисперсия амплитуды импульса $\overline{D_A}$ в этом случае (при $A_0 = 0$) также близка к априорной $\overline{D_A} \approx D_{A_{pr}} = 8,3$, если уровни шумов достаточно велики (например, $Q = R = 5$). Если же Q и R малы, то и апостериорная дисперсия также мала (например, при $A_0 = 0$, $Q = R = 10^{-2}$ дисперсия равна $\overline{D_A} \approx 0,3$).

Результаты численного моделирования при $A_0 = 1$ показали, что рассеяние оценки $\overline{\varepsilon_A^2}$ приблизительно равно средней апостериорной дисперсии $\overline{D_A}$, если только отношение сигнал/шум велико, т.е. $Q < 10^{-1}$ и $R < 10^{-1}$. Если же соотношение сигнал/шум мало (например, $Q > 1$ или $R > 1$), то рассеяние оценки $\overline{\varepsilon_A^2} = (A_0 - \hat{A})^2$ становится равным единице, т.к. $\hat{A} \approx \hat{A}_{pr} = 0$, а $A_0 = 1$.

На рис. 4 показано, как меняется величина апостериорной дисперсии $\overline{D_z(k)}$ и среднеквадратичной ошибки оценивания $\overline{\varepsilon_z^2(k)}$ (пунктир на рисунке) самого сигнала z_k в зависимости от времени k при $Q = 10^{-2}$ и $R = 0,5$. Из графиков видно, что квазиоптимальный алгоритм фильтрации работает таким образом, что повышает уровень апостериорной дисперсии $\overline{D_z(k)}$ в момент появления импульса. В результате улучшается способность отслеживать возникающие неопределенности в значениях сигнала z_k . Среднеквадратичная ошибка оценивания $\overline{\varepsilon_z^2(k)}$ при этом также возрастает. При достаточно большом соотношении сигнал/шум импульсное воздействие быстро обнаруживается, и уже через несколько шагов дискретного времени как $\overline{D_z(k)}$, так и $\overline{\varepsilon_z^2(k)}$ снова выходят на постоянный стационарный уровень, определяемый значениями A_0 , R , Q . Заметим, что длительность импульсной составляющей выходного сигнала линейной системы z_k может быть значительно больше времени переходных процессов графиков на рис. 4.

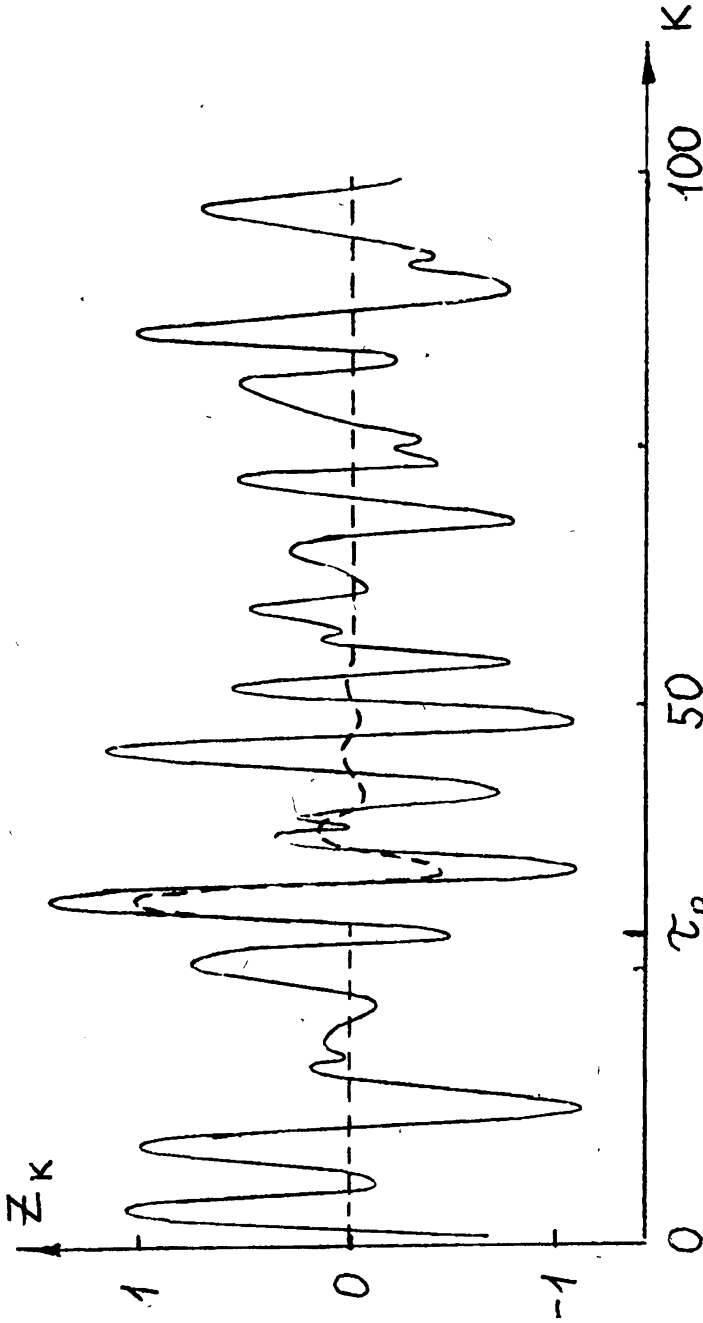


Рис. 1

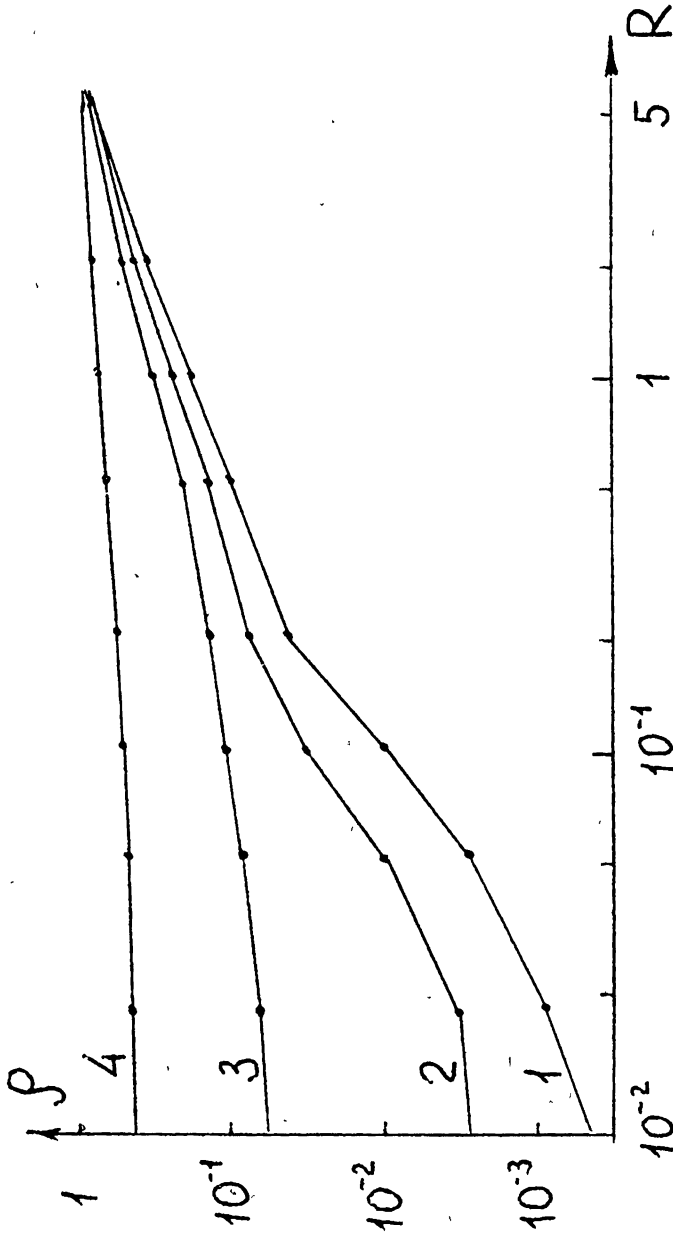


Рис. 2

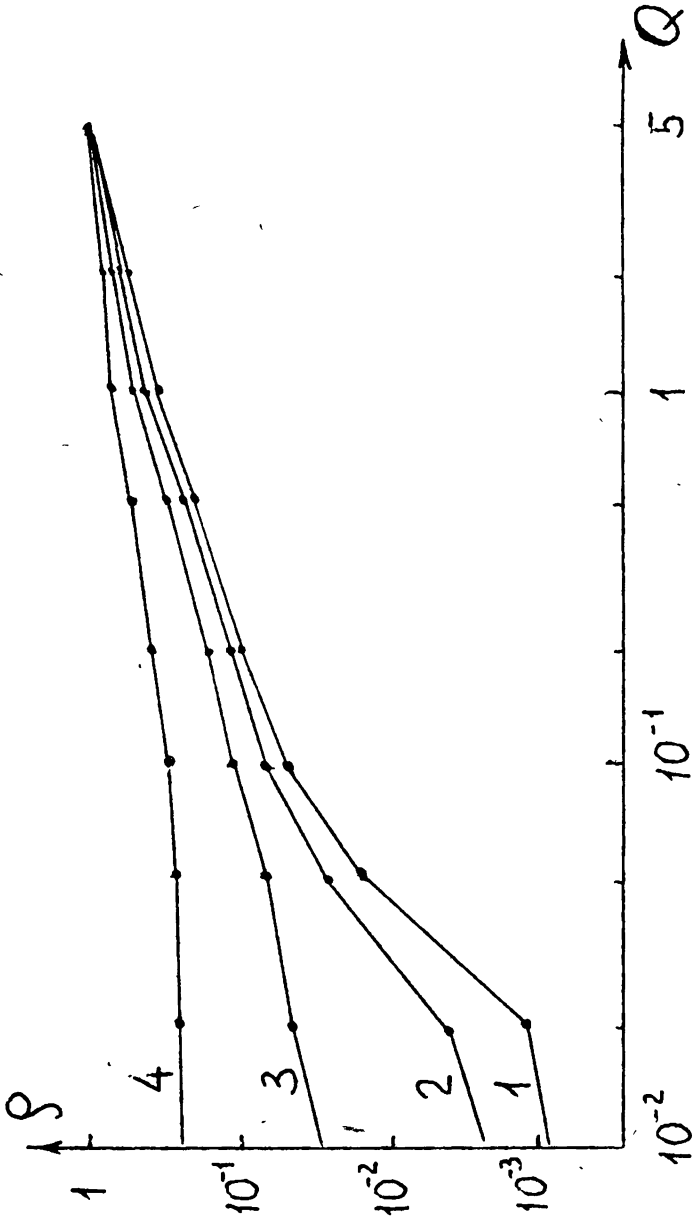


Рис. 3

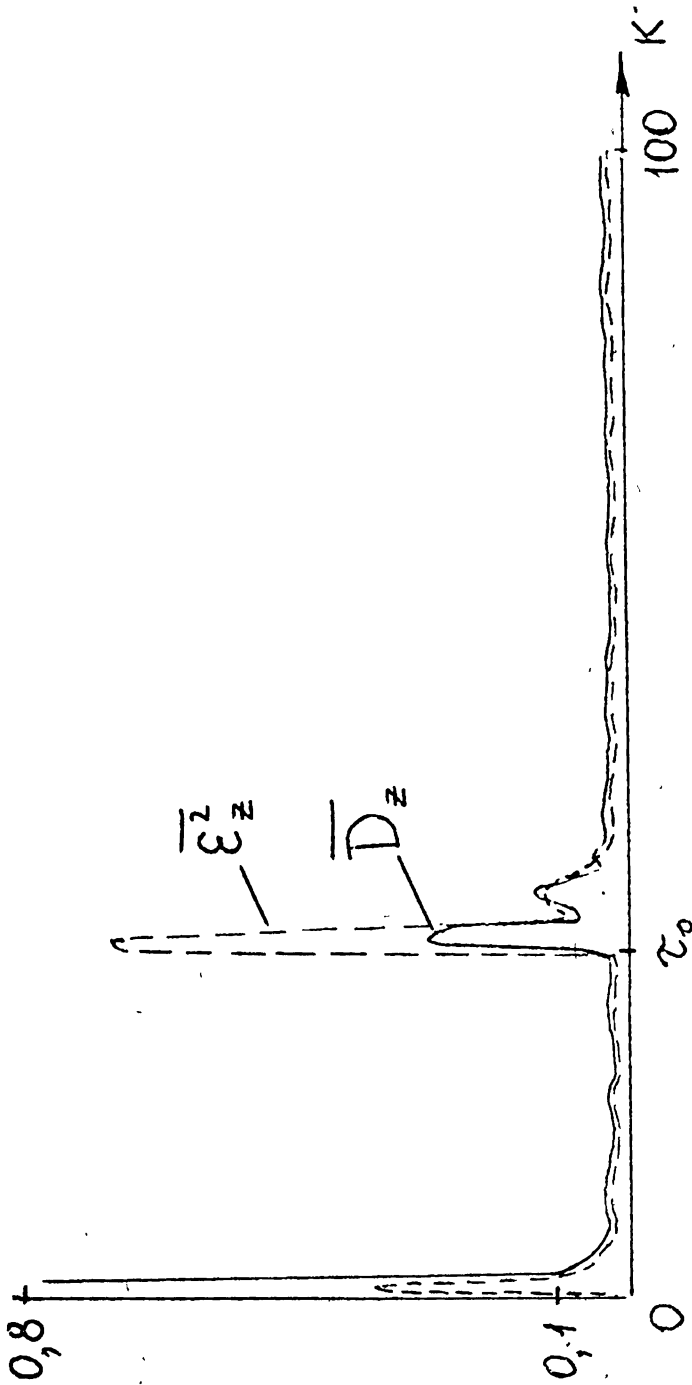


Рис. 4

В настоящей работе предложен рекуррентный алгоритм оценивания случайного марковского сигнала с оцениванием амплитуды импульсных возмущений. Оценка сигнала находится в текущем времени с использованием метода "разделения" и одновременно оценивается амплитуда импульса с помощью набора параллельно работающих фильтров, каждый из которых настроен на одно из возможных значений амплитуды импульса. Результаты моделирования на ЭВМ подтвердили работоспособность предложенного алгоритма оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон С. Теория регуляторов, приспособляющихся к возмущениям. // В кн.: Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К. Т. Леондеса. — М.: Мир, 1980. С. 253–320.
2. Гриценко Н. С., Кириченко А. А., Коломейцева Т. А., Логинов В. Н., Тихомирова И. Г. // Зарубежная радиоэлектроника, 1983. №4. С. 3.
3. Казаков И. Е., Артемьев В. М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. — М.: Наука, 1980.
4. Колосов Г. Е. Синтез оптимальных автоматических систем при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1984.
5. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. — М.: Радио и связь, 1983.
6. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991.
7. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов. — М.: Радио и связь, 1984.
8. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986.
9. Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфенов В. И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991.
10. Адаптивные фильтры / Под ред. К. Ф. Н. Коуэна, П. М. Гранта. — М.: Мир, 1988.
11. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / Под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста. — М.: Мир, 1989.
12. Фарина А., Студер Ф. Цифровая обработка радиолокационной информации. — М.: Радио и связь, 1993.
13. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. — М.: Гос. ун-т, 1966.
14. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Сов. радио, 1975.
15. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1986. Т. 29. №5. С. 537.

16. Ванжа А. В., Мальцев А. А., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. №6. С. 498.
17. Лайниотис Д. Г. // ТИИЭР, 1976. Т. 64. №8. С. 28.
18. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. — М.: Энергия, 1973.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
8 июля 1994 г.

**ALGORITHM OF OPTIMAL FILTERING OF RANDOM MARKOV
SIGNALS WITH IMPULSE DISTURBANCES AMPLITUDES
ESTIMATION**

O. V. Poldin, A. M. Silaev

The optimal filtering problem of Markov random signals with simultaneous estimation of impulse disturbance amplitudes is considered. The linear models of stochastic difference equations in discrete time are used for the description of signals, observed processes and impulse disturbances. The impulse disturbances appear at random points of time with random amplitudes. The real time calculating procedure is obtained for joint a posteriori probability density function of random signals and impulse disturbance amplitudes. The quasi-optimal filtering algorithm is derived in the case of scalar signals and scalar observed processes by means of partitioned estimation method. The computer simulation results are presented.