

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XXXVIII № 8

Нижний Новгород

1995

Содержание

Моченёва О. С., Ерухимова Т. Л., Суворов Е. В. О методике определения содержания озона по данным микроволновых измерений	751
Ошарин А. М. Тепловое поле многослойного шара.....	771
Соловьёв О. В. К решению векторной трёхмерной локально-нерегулярной волноводной задачи	785
Листвин А. В., Листвин В. Н. Статистические характеристики монохроматического излучения в нерегулярных анизотропных одномодовых световодах	804
Соколов А. Д., Фокин В. Н., Шаронов Г. А. Измерение параметров интерференционной структуры ближнего акустического поля источника шума излучения в глубоком море.....	817
Езерский А. Б., Зобнин А. Б., Соустов П. Л. Дистанционная акустическая диагностика следа за нагретым цилиндром	832
Ермолаев В. Т. Оценивание параметров минимального многочлена сигнальной корреляционной матрицы многоканальной адаптивной приёмной системы.....	841
Запевалов В. Е., Цимлинг Ш. Е. Экспериментальное исследование интенсивных винтовых пучков с захваченными электронами	860
Островский М. А. Обобщение задачи об оптимальном обнаружении сигналов в присутствии негауссовых пассивных помех	870

О МЕТОДИКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ОЗОНА ПО ДАННЫМ МИКРОВОЛНОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

О.С.Моченева, Т.Л.Ерухимова, Е.В.Суворов

В работе подробно рассмотрена методика определения интегрального содержания и вертикального распределения озона в интервале высот 20-50 км по данным микроволновых измерений. Сделаны оценки возможных ошибок и рассмотрены некоторые предложения по улучшению методики измерений, направленные на уменьшение этих ошибок.

В течение многих лет в Институте прикладной физики Российской академии наук проводятся исследования стратосферного озона методом дистанционного зондирования с поверхности Земли в миллиметровом диапазоне длин волн [1,2]. Высокое частотное разрешение, реализуемое в гетеродинных спектрометрах мм диапазона, позволяет измерять линии излучения (поглощения) малых газовых составляющих (МГС) атмосферы с точностью, достаточной для восстановления вертикальных профилей распределения МГС. Нижняя граница высот, доступных для регистрации атмосферного озона в мм диапазоне, лежит в районе 20 км, где теллурические линии озона из-за столкновений с молекулами воздуха становятся настолько широкими, что их невозможно отделить от крыльев линий основных составляющих атмосферы. Верхняя граница измерений вертикального распределения озона находится в районе 70 км, где столкновительный механизм уширения линий сменяется допплеровским.

Первые наблюдения атмосферного озона при помощи приемной аппаратуры мм диапазона проводились путем измерений ослабления солнечного радиоизлучения в линиях озона. В дальнейшем, однако, все наблюдатели перешли к наблюдениям собственного излучения стратосферного озона в линиях мм диапазона. Такие измерения не зависят от наличия ярких радиоисточников на небе и могут проводиться круглосуточно

и в условиях полярной ночи. Кроме того, возможность проведения таких измерений (как, впрочем, и измерений ослабления проходящего через атмосферу излучения) слабо зависит от погодных условий и от наличия аэрозольной составляющей в атмосфере.

В настоящем сообщении мы опишем принципы измерения линий поглощения (или излучения), обусловленных атмосферным озоном, и оценим влияние ряда упрощающих предположений, заложенных в основу методики измерений.

Спектр излучения атмосферы, приходящего из зенита на поверхность Земли, определяется вертикальным распределением температуры T_a атмосферы и коэффициентом поглощения в атмосфере μ (см., например, [3]):

$$T_r(\nu) = \int_0^{\infty} dh \mu(\nu, h) T_a(h) \exp\left(-\int_0^h \mu(\nu, h') dh'\right), \quad (1)$$

где интенсивность принимаемого излучения атмосферы характеризуется радиационной температурой излучения T_r на входе приемной антенны.

Задачу измерения вертикального распределения озона методом ММ зондирования можно условно разбить на 3 части:

- измерение спектра радиационной температуры (1) на входе приемной антенны;
- выделение из измеренного спектра $T_r(\nu)$ части, обусловленной атмосферным озоном;
- восстановление вертикального распределения озона по спектру его излучения.

Остановимся более подробно на всех трех моментах, подробно обсудив те предположения, которые положены в основу методики измерений.

Одно из основных предположений - линейность отклика приемника на излучение, поступающее на вход приемной антенны:

$$U_i = a_i T_r + b_i \quad (2)$$

где U_i - сигнал на выходе i -го спектрального канала спектроанализатора, первый член представляет собой реакцию приемника на излучение атмосферы, поступающее в главный лепесток приемной антенны, второй член в (2) определяется собственными шумами приемной аппаратуры и

излучением, попадающим на вход приемника от окружающих предметов через боковые лепестки.

Предположение о линейности шкалы приемника во всех спектральных каналах можно считать выполненным с достаточно высокой точностью, поскольку максимальная температура излучения, поступающего на вход приемного устройства не превышает 300 К и является малой добавкой к собственным шумам аппаратуры, имеющим температуру несколько тысяч градусов.

Для исключения ошибок, связанных с вариациями коэффициентов усиления a_i и постоянных составляющих, b_i , каждые 1-2 минуты осуществляется калибровка спектральных каналов приемной аппаратуры [2].¹ Суть калибровки состоит в том, чтобы сравнивать отклик на излучение атмосферы U с откликами на излучение 2-х эталонов U_0 и U_1 во всех спектральных каналах. При этом величины $\beta_i^* = \frac{U_{0i} - U_i}{U_{0i} - U_{1i}}$ не зависят от коэффициентов усиления a_i и постоянных составляющих b_i .

В настоящем сообщении мы обсудим методику, в которой используется один эталон, но излучение атмосферы принимается при двух различных углах по отношению к зениту. Такая методика весьма удобна для экспедиционных условий, поскольку не связана с использованием в качестве второго эталона жидкого азота.

1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ ЛИНИЙ АТМОСФЕРНОГО ОЗОНА С ОДНИМ ЭТАЛОННОМ.

В большей части экспедиционных измерений для исключения влияния неконтролируемых изменений параметров a_i и b_i использовалась методика наблюдений, описанная в [5]. Фактически эта методика является модификацией "метода разрезов" [6]. На вход приемной антенны поочередно подается излучение атмосферы из зенита, излучение атмосферы с

¹ В настоящее время в Нижнем Новгороде функционирует стационарный озонометр на базе компенсационного приемника [4], в котором калибровка осуществляется раз в 15 сек.

направления, значительно отклоненного от зенита, и от "черного тела", находящегося при температуре окружающего воздуха. При такой методике для получения спектров излучения атмосферы приходится делать ряд упрощающих предположений.

Во-первых, считается, что атмосфера представляет собой плоскослоистую среду, в которой все величины (температура, давление, концентрация малых составляющих и т.д.) зависят только от высоты². При этом предположении яркостная температура излучения атмосферы на частоте ν , принимаемого под углом θ к вертикали, равна:

$$T_r = \int_0^{\infty} dh \frac{\mu(\nu, h)}{\cos \theta} T(h) \exp\left(-\int_0^h \frac{\mu(\nu, h')}{\cos \theta} dh'\right), \quad (3)$$

где $T(h)$ - высотный профиль температуры атмосферного воздуха, а коэффициент поглощения μ определяется температурой, давлением и композиционным составом атмосферы на высоте h .

Во-вторых, приходится предполагать, что излучающая атмосфера является изотермичной. Соотношение (3) для изотермической атмосферы с температурой \bar{T} может быть переписано в виде:

$$T_r(\nu, \theta) = \bar{T} (1 - \exp(-\tau(\nu)/\cos \theta)), \quad (4)$$

где $\tau(\nu) = \int_0^{\infty} \mu(\nu, h) dh$ - суммарная оптическая толщина атмосферы в

направлении зенита. Для реальной атмосферы с неоднородным профилем температуры приведенное выражение является, по существу, определением средней температуры излучающей атмосферы $\bar{T}(\nu, \theta)$; эта величина зависит от частоты и угла наблюдения, однако, в используемой методике принято, что \bar{T} не зависит от ν и θ и равна температуре приземного воздуха T_0 :

$$\bar{T}(\nu, \theta) = T_0 \quad (5)$$

² В методике с двумя эталонами нет необходимости делать предположения о плоскослоистом характере атмосферы.

Последнее предположение, заложенное в методику измерений, состоит в том, что радиационная температура излучения "черного тела" также полагается не зависящей от частоты и равной средней температуре излучающей атмосферы:

$$T_{bb} = T_0 \quad (6)$$

В эксперименте определяются величины β_i для каждого канала:

$$\beta_i = \frac{U_{0i} - U_{\theta i}}{U_{0i} - U_{zi}} \quad (7)$$

где U_{0i} , U_{zi} , $U_{\theta i}$ являются откликами в i -ом канале приемника на излучение "черного тела", на излучение, приходящее из зенита, и с направления под углом θ к зениту, соответственно.

Разности, стоящие в числителе и знаменателе (7), получаются путем усреднения по нескольким циклам измерений, при этом вычисляются также дисперсии стоящих в числителе и знаменателе величин.

При сделанных предположениях величины β_i не зависят ни от параметров a_i , b_i (см.(2)), ни от температуры T_0 .

Спектр оптической толщины атмосферы в направлении зенита выражается через измеренные величины β_i соотношением:

$$\tau(v_i) = \frac{1}{\sec \theta - 1} \ln \beta_i \quad (8)$$

Излучение нижних слоев атмосферы определяется, главным образом, молекулярным кислородом и водяным паром в тропосфере и в пределах спектральной линии озона его можно считать независящим от частоты.

Обсудим последовательно влияние на результаты измерений всех предположений, положенных в основу методики.

Относительно плоскослоистой модели атмосферы следует заметить следующее. При измерениях озона в верхней стратосфере излучение атмосферы принимается под двумя углами - один близок к зениту, другой составляет около 10° к горизонту. Излучение основных составляющих атмосферы приходит главным образом из приземного слоя толщиной порядка 5 км, откуда вытекает требование однородности атмосферы на горизонтальных масштабах порядка 25 - 30 км. Над равнинной местностью

однородность температуры и поглощения в кислороде на таких горизонтальных масштабах, по-видимому, обеспечивается с точностью не хуже процента. Основным источником горизонтальной неоднородности могут быть области повышенного влагосодержания с характерными горизонтальными масштабами 25-30 км. В специфических условиях горных районов наблюдались такие аномалии, при которых яркостная температура излучения атмосферы на различных азимутах отличалась примерно вдвое при постоянном угле места [7]. Для выявления таких неоднородностей было бы полезно проводить измерения поочередно в двух, например, противоположных или взаимно ортогональных направлениях. В реальных условиях наличие таких неоднородностей должно проявляться в виде переменности вычисленной согласно (8) оптической толщины с характерными временами порядка размера неоднородности, деленной на соответствующую скорость ветра. Внутри линии излучения озона основной вклад идет с высот от 25 до 50 км и здесь горизонтальные масштабы неоднородностей, которые могут исказить результирующую зависимость $\tau(\nu)$, достигают 150-200 км. Следует, однако, иметь в виду, что эти неоднородности уже относятся только к распределению озона и, будучи обнаруженными, несут информацию об интересующей нас МГС.

Для того, чтобы понять влияние на результат измерений остальных предположений, проводились модельные расчеты. В этих расчетах было принято, что излучение основных составляющих атмосферы (водяного пара, кислорода и т.п.) формируется в нижних слоях атмосферы (до некоторой высоты H), а излучение МГС, формируемое в верхних слоях, в нижних слоях лишь испытывает поглощение :

$$T_r(\nu, \theta) = \int_0^H dh \frac{\mu(\nu, h)}{\cos \theta} T(h) \exp\left(-\int_0^h \frac{\mu(\nu, h')}{\cos \theta} dh'\right) + \\ + \left(\int_H^\infty dh \frac{\mu_3(\nu, h)}{\cos \theta} T(h) \exp\left(-\int_0^h \frac{\mu_3(\nu, h')}{\cos \theta} dh'\right) \right) \exp\left(-\frac{\tau_0}{\cos \theta}\right) \quad (3a)$$

Считалось, что суммарное поглощение в тропосфере τ_0 равно 0.1, что типично для измерений в зимних условиях как на длине волны $\lambda=2$ мм, так и на $\lambda=3$ мм, причем 0.05 составляет поглощение в кислороде и 0.05 - в водяном паре, а коэффициенты поглощения кислорода и водяного пара

экспоненциально спадают с высотой с характерными высотами 5 и 2 км соответственно.

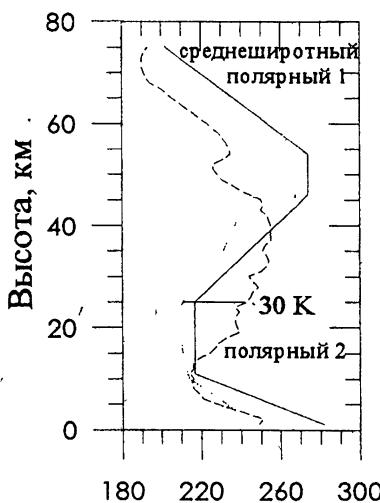


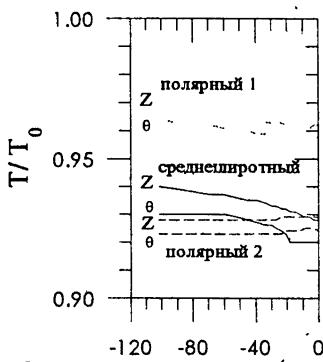
Рис.1. Профили температуры, использованные в модельных расчетах.

Вертикальное распределение озона было взято из среднеширотной модели Крюгера-Минзнера [8]. Расчеты проводились для трех профилей температуры (см. Рис.1): "полярный 1" (среднезональный профиль для 80° с.ш. для февраля [9]); "полярный 2" (профиль $T(h)$, измеренный 20.02.89 на о.Хейса (80.5° с.ш.) с помощью метеоракеты [10]) и "среднеширотный" (стандартная модель атмосферы - СМА СССР-64 [11]).

Для оценки справедливости предположения об изотермичности атмосферы, точнее, о независимости

температуры излучения атмосферы \bar{T} от угла наблюдения и частоты была вычислена величина:

$$\bar{T} = \frac{\bar{T}_r(v, \theta)}{1 - e^{-\tau(v)/\cos\theta}} \quad (9)$$



Отстройка от центра линии, МГц
Рис.2. Частотная зависимость средней температуры излучающей атмосферы \bar{T} , нормированной на температуру приземного воздуха T_0 , для зенита (Z) и угла 11.5° к горизонту (θ)

где $\tau(v)$ - суммарная оптическая толщина атмосферы в направлении зенита, а радиационная температура излучения $\bar{T}_r(v, \theta)$ вычислялась по формуле (3а). Результаты расчетов для $\lambda=3$ мм приведены на Рис.2 в виде зависимостей средней температуры \bar{T} , нормированной на температуру приземного воздуха T_0 , от частоты для двух углов наблюдения. Из рисунка видно, что для рассмотренных профилей средняя температура

излучающей атмосферы \bar{T} является практически постоянной во всем диапазоне частот измерений и имеет небольшое (не больше процента) регулярное отличие при направлениях в зенит и под углом $\approx 11^\circ$ к горизонту. Величина средней температуры получилась меньше температуры приземного воздуха; максимальное отличие \bar{T} от T_0 порядка 7-8 % имеет место для профилей "среднеширотный" и "полярный 2".

Температура "черного тела" T_{bb} также может отличаться от T_0 как вследствие "приземного скачка" температуры, так и из-за конечного коэффициента отражения "черного тела". Чтобы оценить влияние этой разницы на получаемые согласно описанной методике экспериментальные спектры, реальная линия поглощения

$$\tau_3(\nu) = \int_0^{\infty} \mu_3(\nu, h) dh \quad (10)$$

сравнивалась с рассчитанной по формулам (3) - (8) при разных значениях T_{bb} . Очевидно, что при совпадении T_{bb} с \bar{T} ошибка минимальна (не более процента).

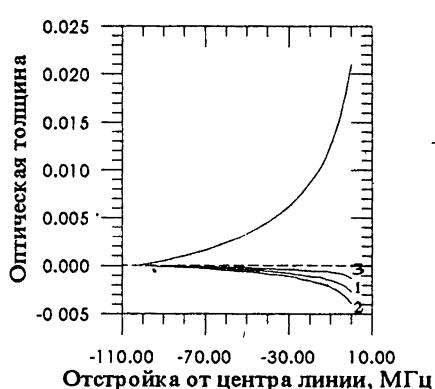


Рис.3. Отличие оптической толщины озона, рассчитанной по методике (3)-(8) при различных температурах "черного тела" (кривая 1: $T_{bb} = T_0$, кривая 2: $T_{bb} = T_0 + 10$ K, кривая 3: $T_{bb} = T_0 - 10$ K), от исходной линии поглощения(10) - "0".

исходной примерно на 20 %. Небольшое понижение температуры "черного тела" по сравнению с T_0 приводит к уменьшению отличия "экспериментальной" линии от исходной, а увеличение - к росту отличия;

Для иллюстрации на Рис.3 приведены исходный спектр и отличие от него "экспериментальных", полученных для наиболее неблагоприятного профиля $T(h)$ (полярный 2) при разных температурах "черного тела" (1: $T_{bb} = T_0$, 2: $T_{bb} = T_0 + 10$ K, 3: $T_{bb} = T_0 - 10$ K). Из рисунка видно, что при совпадении температуры "черного тела" с температурой приземного воздуха наблюдается регулярное превышение "экспериментальной" линии над

так превышение T_{bb} на 10 К относительно T_0 приводит к возрастанию отличия до 25 %.

Изложенная методика является достаточно простой, но грубой. Была предпринята попытка улучшения методики путем предположения о том, что атмосфера состоит из 2 изотермических слоев - один, с температурой T_0 , включает в себя тропосферу и нижнюю стратосферу, а второй, с температурой T_c , перекрывает интервал высот от 20 до 70 км, доступный для зондирования озоносферы радиометрическим методом [12]. При этих предположениях яркостная температура излучения атмосферы на частоте ν , принимаемого под углом θ к вертикали, может быть представлена в виде:

$$T_r(\nu, \theta) = T_0(1 - e^{-\tau_0 \sec \theta}) + T_c(1 - e^{-\tau_3(\nu) \sec \theta})e^{-\tau_0 \sec \theta}, \quad (11)$$

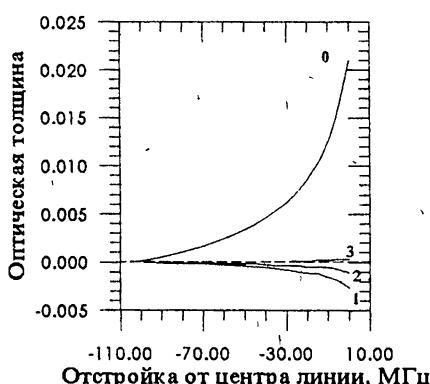


Рис.4. Отличие оптической толщины озона, рассчитанной по методике (3)-(8) - (кривая 1), по модифицированной методике (12) для температуры озона слоя (см. текст) $T_c^1 = T_c$ (кривая 2) и $T_c^1 = T_c + 15$ К (кривая 3), от исходной линии поглощения (10) (кривая 0).

где τ_0 - поглощение в нижнем слое атмосферы.

Предполагая, что сигнал в наиболее удаленном от центра линии канале пропорционален только первому слагаемому суммы (11) (т. е. что он определяется в основном излучением нижнего слоя атмосферы) и ограничиваясь квадратичными членами в разложении экспонент, для определения оптической толщины озона получим следующее выражение (12):

$$\tau_3(\nu_i) = \frac{\sec \theta - \beta_i / \beta}{(\sec^2 \theta - \beta_i / \beta_0)} - \frac{\sqrt{(\sec \theta - \beta_i / \beta_0)^2 - 2(\sec^2 \theta - \beta_i / \beta_0)(1 - \beta_i / \beta_0)T_0 / T_c}}{(\sec^2 \theta - \beta_i / \beta_0)} \quad (12)$$

где β_i и β_0 определяется выражением (7) для i-того и наиболее удаленного от центра линии каналов соответственно. По-прежнему считаем T_0 равной приземной температуре и температуре "черного тела", а за

температуру озонного слоя T_c принимаем усредненное в интервале (20-50) км значение зональной температуры. На Рис.4 показана исходная линия излучения озона и отличие ее от рассчитанных по формуле (8) - кривая 1; по формуле (12) - кривая 2; по формуле (12), когда в качестве T_c взята величина на 15 К меньше, чем получается из усреднения $T(h)$ в диапазоне (20-50) км.

. Из рисунка видно, что в рассмотренном примере усовершенствованная методика измерения линии поглощения дает лучшее согласие с исходной линией. Не следует, однако, придавать этому обстоятельству излишнее значение, поскольку выражение (12) содержит дополнительный "подгоночный" параметр T_0/T_c , определяемый из некоторых модельных представлений, и при сильных отклонениях температурных профилей от среднестатистических может и не привести к улучшению по сравнению с методикой, основанной на предположении об "изотермичной" атмосфере.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ОЗОНА ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ.

2.1 Для оперативной обработки экспериментально измеренной линии озона $\tau(\nu)$ содержание озона выше некоторой высоты h_0 - $X(h>h_0)$ определялось по приближенной формуле, предложенной в [13].

$$X(h>h_0) = \int_{h_0}^{\infty} N_{O_3}(h) dh = C \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \nu_1} (\tau_3(\nu) - \tau_3(\nu_0 + \nu_1)) d\nu \quad (13)$$

где ν_0 - центральная частота линии излучения, $\nu_1 = \Delta\nu(h_0)$.

При такой грубой оценке коэффициент C зависит не только от свойств используемого при измерениях врачательного перехода озона, но и от высоты h_0 , а также от характеристик профилей температуры, давления и концентрации озона, поскольку приведенная оценка получается в предположении об изотермичности атмосферы и при замене реальной Лоренцевой формы линии прямоугольником. Реально для использования в условиях экспериментов коэффициент C рассчитывался в предположении,

что озон распределен в соответствии с профилем Крюгера-Минзнера, а профили давления и температуры являются сезонными среднеширотными. В тех случаях, когда имелись данные аэрологического зондирования, коэффициент C рассчитывался для реальных профилей температуры и давления. Характеристики переходов для соответствующих линий брались из литературы [14].

Чтобы выяснить, насколько велики отклонения величины интегрального озона, определяемой приближенным выражением (13), от реальных значений при вертикальных распределениях, сильно отличающихся от исходного профиля Крюгера-Минзнера, были проведены численные расчеты. Линия излучения рассчитывалась для озона профиля с сильным возмущением; по рассчитанной линии интегральный озон оценивался в соответствии с (13) и сравнивался с соответствующей реальной величиной "возмущенного профиля". Мы рассмотрели три вида возмущений: 1 - к исходному профилю Крюгера-Минзнера добавлялась δ -функция с общим содержанием озона, составляющим 20% от общего содержания в исходном профиле (" δ -слой"); 2 - к исходному профилю Крюгера-Минзнера добавлялся гладкий гауссовоподобный профиль с общим содержанием озона, также составляющим 20% от общего содержания в исходном профиле и характерной полушириной 4 км ("гладкий профиль"); 3 - профиль озона, концентрация озона в котором падает в 10 раз по сравнению с исходным профилем Крюгера-Минзнера в слое шириной 7 км ("озонная дыра"). На Рис.5а приводится отношение интегрального озона выше 22 км (X_d) к аналогичной величине, полученной из выражения (13) - X , в зависимости от высоты максимума "возмущения" в озонах профиле: кривая 1 соответствует добавлению к исходному профилю δ -слоя; кривая 2 соответствует добавлению "гладкого профиля"; кривая 3 соответствует "озонной дыре"³. Из Рис.5а следует, что максимальное (порядка 20%) отличие между этими величинами наблюдается, когда возмущение находится вблизи граничной высоты h_0 ; оценочное значение завышено примерно на

³ В случае "озонной дыры" за высоту максимума возмущения принималась высота середины "озонной дыры".

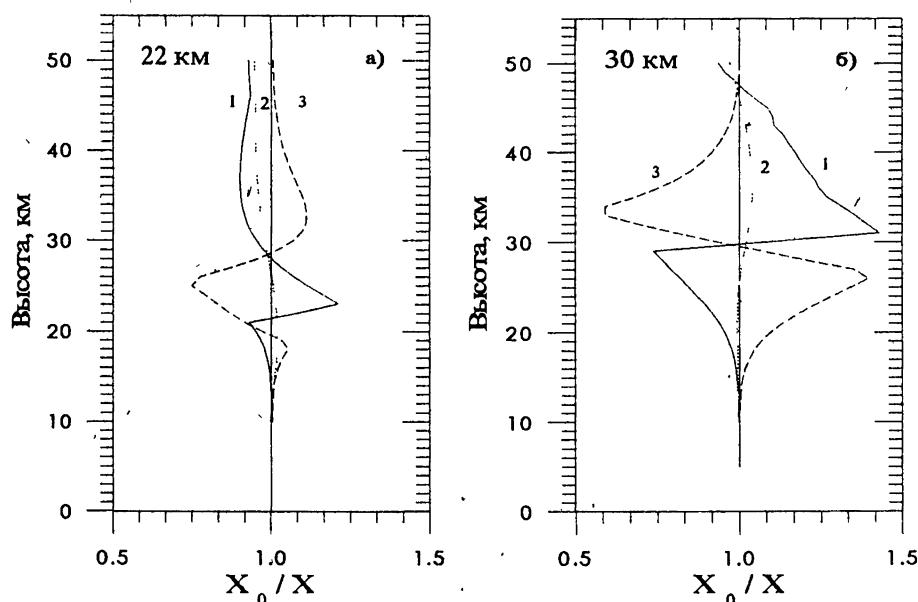


Рис.5. Отношения исходного значения интегрального содержания озона выше h_0 к значению X , найденному по (13), для различных профилей Оз: профиль Крюгера-Минзнера с добавленным "δ-слоем" (кривая 1), профиль Крюгера-Минзнера с добавленным "гладким профилем" (кривая 2), "Озонная дыра" (кривая 3) в зависимости от высоты вносимого возмущения: а) $h_0=22$ км; б) $h_0=30$ км

10%, когда возмущение значительно выше граничной высоты. Учитывая, что в рассмотренном примере интегральное содержание озона выше 22 км увеличивается примерно в 1.5 раза, такую неточность можно считать вполне допустимой. На Рис.5б приведены аналогичные графики для граничной высоты 30 км. В этом случае при фактических изменениях содержания озона в 2-2.5 раза наибольшая ошибка определения его по формуле (13) достигает 40 %, когда максимум возмущения находится вблизи граничной высоты.

Следует иметь в виду, что в реальном эксперименте спектр получается в виде значений оптической толщины для некоторого дискретного набора частот. Для наилучшего определения площади под спектральной кривой при фиксированном числе приемных спектральных каналов имеется оптимальное их распределение по частотам, при котором разница частот в двух соседних каналах увеличивается примерно пропорционально отстройке от частоты резонансного перехода.

2.2 Для восстановления высотного профиля озона в основном использовался метод Рандеггера [15], в котором последовательные итерации профиля озона связываются следующим соотношением:

$$N_{O_3}^{(n+1)}(h_i) = N_{O_3}^{(n)} \frac{\frac{\partial \tau_3}{\partial \nu} [\nu(h_i)] - \frac{\partial A}{\partial \nu} [\nu(h_i)]}{\frac{\partial \tau_3^{(n)}}{\partial \nu} [\nu(h_i)] - \frac{\partial A}{\partial \nu} [\nu(h_i)]}. \quad (14)$$

В это выражение входят производные по частоте от различных оптических толщин: экспериментально измеренной τ_3 , полученной из решения прямой задачи от n -й итерации профиля озона $\tau_3^{(n)}$ и оптической толщины A , обусловленной озоном, расположенным ниже границы доступной для микроволнового зондирования ($h_0 \approx 20$ км). Концентрация на этих высотах берется либо из данных аэростатного зондирования, либо из сезонных модельных профилей. При нахождении производной от экспериментальной линии она аппроксимировалась дробно-рациональной функцией на основе метода наименьших квадратов. В качестве базисных функций использовались многочлены Чебышева. Частоты для итерационной процедуры выбирались из соображений, с одной стороны, минимального перекрытия весовых функций (полуширины которых составляют порядка 8 км), а с другой стороны, сохранения достаточного числа информативных точек. Реально в диапазоне высот 20-55 км мы использовали 4-5 точек из измеренного частотного спектра.

Возможности восстановления вертикального распределения озона с помощью итерационной процедуры (14) исследовались путем численного моделирования: в профиль концентрации озона Крюгера-Минзнера вносились возмущения, описанные в п.2.1, рассчитывалась спектральная линия (10), по ней проводилось восстановление вертикального распределения озона и затем восстановленные значения концентрации на различных высотах сравнивались с исходными. Примеры восстановления описанных профилей озона с высотой максимума возмущения равной 30 км приведены на Рис.6а,6б,6в.

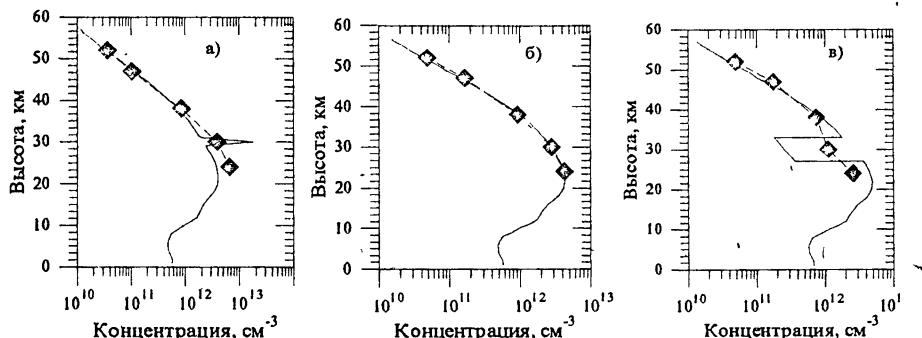


Рис.6. Исходный профиль озона с возмущением на высоте 30 км (сплошная линия) и профиль, восстановленный методом Рандеггера (пунктир).

- Профильт озона Крюгера-Минзнера с добавленным "δ-слоем"
- Профильт озона Крюгера-Минзнера с добавленным "гладким профилем".
- "Озонная дыра"

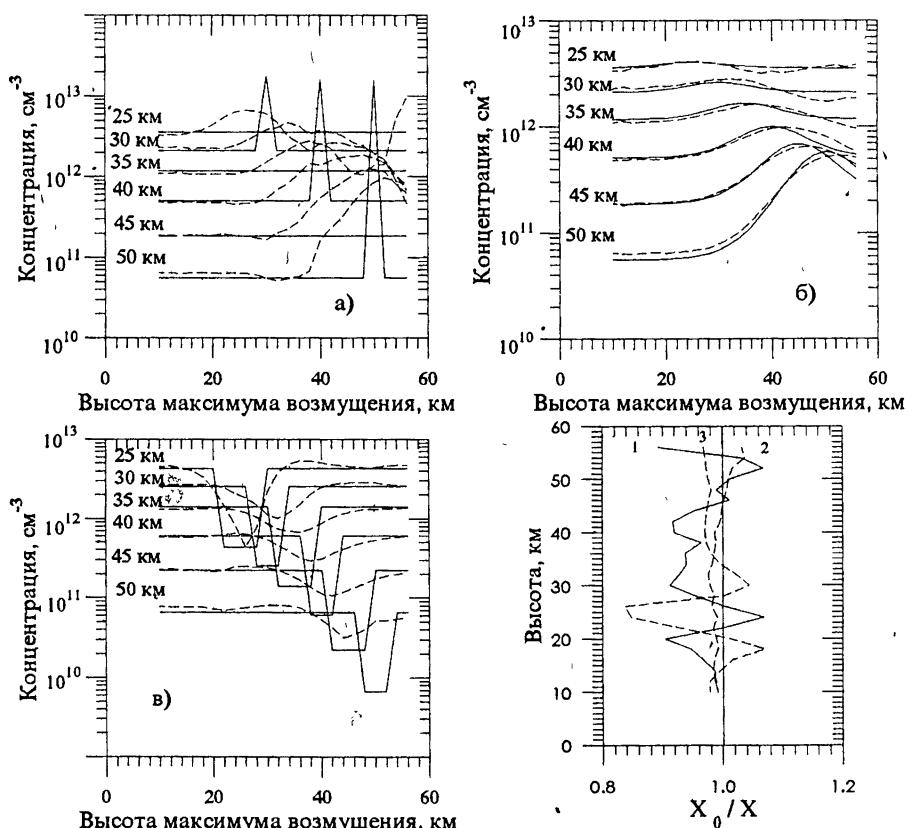


Рис.7. Концентрация озона на различных высотах в исходном профиле (сплошная линия) и концентрация, восстановленная методом Рандеггера (пунктир) в зависимости от высоты тех же возмущений, что и на Рис.6.

Рис.8. Отношение исходного значения интегрального содержания озона выше 22 км X_0 к величине X , найденной из восстановленного профиля, в зависимости от высоты максимума возмущения:

- 1-Профиль Крюгера-Минзнера с добавленным "δ-слоем", 2- Профиль Крюгера-Минзнера с добавленным "гладким профилем", 3- "Озонная дыра".

На Рис.7а,7б,7в приведены концентрации озона в исходных и восстановленных профилях в зависимости от высоты максимума возмущения. Для гладкого профиля метод восстановления дает удовлетворительные результаты - отличие восстановленного значения концентрации от исходного не превышает 20 %. Для профилей с добавленным "δ-слоем" и "озонной дыры" точность уменьшается, т.к. ширина максимумов весовых функций составляет ≈ 8 км и возмущения с меньшим характерным масштабом не могут быть уверенно определены.

На Рис.8 приведено отношение исходного значения интегрального содержания озона выше 22 км к значению, определенному по восстановленному профилю, в зависимости от высоты максимума возмущения. Видно, что отличие этих величин не превышает 10 % для всех рассмотренных возмущений профиля озона.

Заметим, что при обработке экспериментальных данных для получения информации о профиле озона необходимо знание профилей температуры и давления. Если отсутствуют данные соответствующих измерений, приходится использовать различные модельные распределения, что может ухудшить точность восстановления профиля озона и оценки его интегрального содержания, особенно в период сильных возмущений в верхней атмосфере. Для исследования влияния используемых профилей температуры и давления на результат восстановления линии, рассчитаные от профиля Крюгера-Минзнера с возмущением в виде "гладкого профиля" с разной высотой максимума с использованием измеренного профиля температуры от 20 февраля 1989 (полярный 2), восстанавливались с двумя различными температурными профилями - измеренным (полярный 2) и зональным (полярный 1). Вид профилей $T(h)$ показан на Рис.1. На Рис.9а приведен пример восстановления гладкого профиля с высотой максимума возмущения равной 30 км с использованием двух профилей температуры. Видно, что использование неверного профиля температуры приводит к регулярному отличию восстановленной концентрации от исходной (например, на высоте 25 км, где отличие температур максимально и составляет 30 К, концентрации отличаются в 2 раза). При этом величина интегрального содержания озона выше 22 км, найденная по

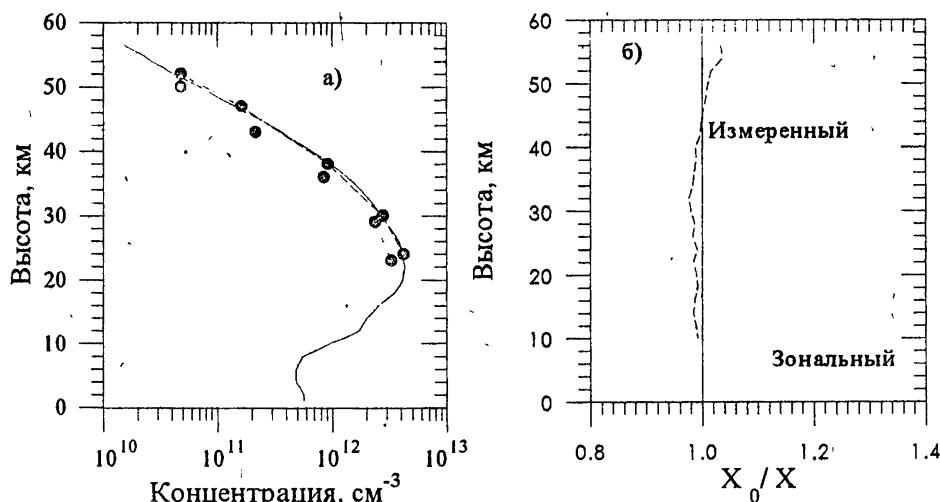


Рис.9. а) Исходный профиль озона с максимумом возмущения, расположенным на высоте 30 км (сплошная линия), и профили, восстановленные методом Рандегтера с использованием профилей температуры: "измеренный" - крупный пунктир и "зональный" - мелкий пунктири.

б) Отношение исходной величины интегрального содержания озона выше 22 км X_0 к найденной по восстановленному профилю X для профилей температуры "измеренный" и "зональный".

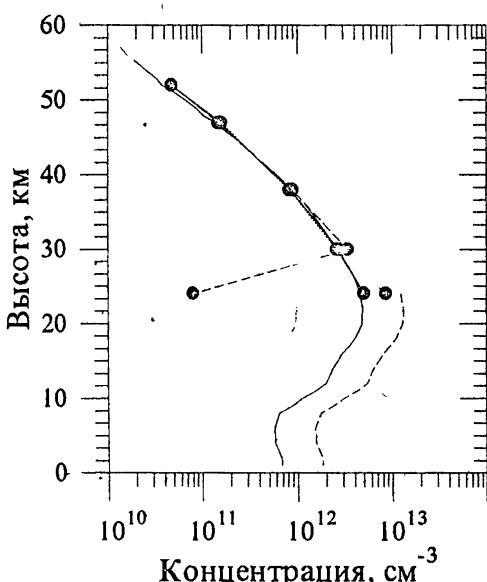


Рис.10. Исходный профиль озона (сплошная линия) и профили, восстановленные методом Рандегтера с различной "подставкой": исходный профиль, умноженный на 0.2, - крупный пунктир; и исходный профиль, умноженный на 2.7, - мелкий пунктири.

восстановленному профилю, оказывается заниженной на $\approx 30\%$ (см. Рис.9б). Таким образом, выбор используемых при восстановлении профилей температуры и давления влияет на результаты восстановления вертикального распределения озона, по возможности нужно использовать экспериментально измеренные профили, особенно в периоды сильных возмущений в атмосфере.

На Рис.10 демонстрируется влияние на восстановленный профиль выбранной модели для распределения озона ниже 22 км ("подставка"). Восстанавливалась

линия, рассчитанная для профиля концентрации озона Крюгера-Минзнера, ниже границы восстановления исходный профиль умножался на коэффициент A , принимающий значения от 0.2 до 2.7. Вид исходного и восстановленных профилей для крайних значений коэффициента A (0.2 и 2.7) показан на Рис.10. Из рисунка видно, что величина "подставки" оказывает существенное влияние на концентрацию озона в нижней точке восстановления, а на остальных практически не сказывается. Отношение величины интегрального содержания озона выше 22 км, найденного по восстановленному профилю, к исходному значению меняется незначительно: от 1.1 при умножении профиля на 0.2 до 0.9 при умножении на 2.7.

Сильные возмущения в атмосфере обычно сопровождаются как значительными вариациями измеренной линии озона, так и увеличением дисперсии экспериментальных точек. В этом случае важно показать, что наблюдаемые изменения в озонасфере превышают значения ошибки эксперимента.

В качестве примера была рассмотрена сильная вариация в линии поглощения, измеренная 16 июля 1989 г. на обсерватории Мирный [16].

Характерный временной масштаб возмущения составил несколько часов. Кроме того, измеренные значения оптической толщины имели повышенную дисперсию. При восстановлении вертикального профиля озона ошибки определялись путем наложения на измеренную линию поглощения равномерно распределенного шума с дисперсией эксперимента. На Рис. 11 приведены

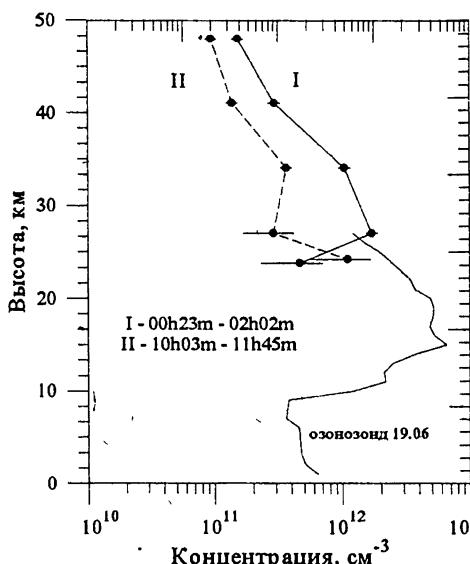


Рис.11. Ошибка восстановления при сильных вариациях в озоне 16 июля 1989 г. (обс. Мирный 66.5° ю.ш.)

два профиля концентрации O_3 , восстановленные из спектров в линии поглощения озона с центральной

частотой $\nu_0 \approx 142$ ГГц⁴, зарегистрированные с интервалом времени 9 часов, и показана величина ошибки. Ошибка восстановления, вызванная неточностью измерений, составила 50 % на высоте 24 км (нижняя точка восстановления), и не превышала 10 % на остальных высотах. Ошибка определения содержания Oz выше 22 км не превышала 15 %. В то же время изменения концентрации в восстановленных профилях составляли сотни процентов (от 2 раз на 50 км до 5.5 раз на 30 км). Общее содержание озона за это время изменилось в 2 раза.

Таким образом, в рассмотренном примере наблюдаемые изменения выходят за пределы ошибок восстановления.

В принципе изменения в наблюдаемой линии поглощения могут быть вызваны не только вариациями содержания озона на разных высотах, но и изменениями температурного профиля. Так в рассмотренном выше примере наблюденное изменение в линии озона могло бы быть вызвано повышением температуры во всей стратосфере примерно на 100 К при неизменном профиле озона. Такая вариация представляется гораздо менее вероятной, чем полученное изменение в вертикальном распределении озона.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Приведенные модельные расчеты показывают, что методика микроволновых наблюдений атмосферного озона с одним эталоном, основанная на довольно грубых предположениях (плоскослоистая модель, изотермичность атмосферы и т. п.), дает возможность получать достаточно достоверную информацию об общем содержании озона и его вертикальном распределении. Используемая методика позволяет регистрировать сильные возмущения в вертикальном профиле озона даже в предположении, что профили температуры и давления являются среднестатистическими. Более точная информация о вертикальном распределении озона может быть получена при наличии данных о вертикальных профилях температуры и давления на момент измерения.

⁴ Данные об измеренных линиях поглощения были предоставлены И.В.Кузнецовым.

Авторы признательны И.В. Кузнецову, Ю.Ю. Куликову, В.Г. Рыскину, Л.И. Федосееву и А.М. Фейгину за плодотворные дискуссии, А.Б. Мазуру за помощь в работе, а также И.В. Кузнецову, предоставившему данные о линиях поглощения озона, полученные в Антарктике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кисляков А.Г., Куликов Ю.Ю., Рыскин В.Г., Сб. Спектральные исследования космического и атмосферного излучения, Горький, ИПФ АН СССР, 1979, с. 84.
2. Воронов В.Н., Демкин В.М., Куликов Ю.Ю., Рыскин В.Г., Юрков В.М.. Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1986. Т.29. N 12. С.1403.
3. Железняков В.В. Электромагнитные волны в космической плазме, М., Наука, 1977.
4. Красильников А.А., Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1987, т. 30, N 12, стр. 1429.
5. Демкин В.М., Куликов Ю.Ю., Рыскин В.Г., Юрков В.М., Сб. Радиофизические методы и средства для исследований окружающей среды в миллиметровом диапазоне. Киев: Наукова думка, 1988, с. 8.
6. Кисляков А.Г., Станкевич К.С., Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1967, Т.10, N 9-10, С.1244.
7. Кузнецов И.В., Куликов Ю.Ю., Мальцев В.А., Штанюк А.М., Изв. АН СССР. ФАО. 1989. Т.24. N2. С.218.
8. Krueger A. J., Minzner R. A., J. Geophys. Res., 1976, v. 81, p. 4477.
9. Barnett J. J., Corney M., Handbook for MAP, 1985, v. 16, p. 47.
10. Бугаева И.В., Бутко А.И., Тарабенко Д.А., Метеорология и гидрология. 1990. N 5.
11. Глаголев Ю.А., Справочник по физическим параметрам атмосферы. Л., 1970.
12. Андрянов А.Ф., Дрягин С.Ю., Кузнецов И.В., Кукин Л.М., Никифоров П.Л., Предварительные результаты наблюдений стратосферного озона на мм волнах в Антарктиде: Препринт N 295, Нижний Новгород: ИПФ АН СССР. 1991.
13. Борисов О.Н., Демкин В.М., Куликов Ю.Ю., Рыскин В.Г., Шанин В.Н., Юрков В.М. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1989, Т.25. N 10. С.1033.

14. Depannemaeker M.J.C., Duterage B., Bellet M.J.. J. Quant. Spectrosc. Radiant. Transfer., 1977, v. 17, p. 519.
15. Randegger A.K.. Pure and Appl. Geophys., 1980, v. 118, p. 1052.
16. Yu.Yu. Kulikov, I.V. Kuznetsov, A.F. Andriyanov, O.N. Borisov, S.Yu. Dryagin, T.L. Erukhimova, L.M. Kukin, L.V. Lubyako, O.S. Mocheneva, P.L. Nikiforov, V.G. Ryskin, E.V. Suvorov, V.N. Shanin, A.A. Shvetsov, V.M. Yurkov., Journal of Geophysical Res. 1994. v.99(D10). pp. 21.109-21.116.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
20 января 1995 года

ON THE DETERMINATION OF OZONE CONTENT FROM THE MICROWAVE OBSERVATION DATA

O.S.Mocheneva, T.L.Erukhimova, E.V.Suvorov

The procedure of determination the ozone integral content and vertical profile in the altitude range 20-50 km from the microwave observations is discussed in detail. Possible errors are estimated and a number of proposals aimed to reduce them are considered.

УДК 621.371

ТЕПЛОВОЕ ПОЛЕ МНОГОСЛОЙНОГО ШАРА

А. М. Ошарин

Формализм теории электродинамических флюктуаций использован для вычисления характеристик теплового поля многослойного изотермического проводящего шара. Получены выражения для спектральной плотности электрической и магнитной энергии, а также выражение для спектральной плотности среднего вектора Пойнтинга теплового поля неоднородного шара, справедливые для любого расстояния наблюдателя от центра шара и при любой величине параметра дифракции. Результат проиллюстрирован численным примером теплового излучения хлопьев мокрого снега.

Задача о тепловом поле равномерно нагретого шара является одним из многочисленных примеров, иллюстрирующих приложения электродинамической теории тепловых флюктуаций, развитой в работах [1, 2], к изучению электромагнитных полей теплового происхождения. В работе [2] эта задача была решена для однородного по диэлектрическим и магнитным свойствам шара из поглощающего вещества. Влияние неоднородности на характеристики теплового излучения частиц рассматривалось в работах [3, 4], где тепловое поле частиц оксида алюминия, покрытых тонкой углеродной оболочкой, вычислялось в приближении дальней зоны с использованием теории [5]. В данной работе подход [2] обобщен на случай многослойного проводящего шара. Получены выражения для спектральной плотности электрической и магнитной энергии, а также выражение для спектральной плотности среднего вектора Пойнтинга теплового поля неоднородного шара, справедливые для любого расстояния r_0 наблюдателя от центра шара и при любой величине параметра дифракции $\rho = k_0 R$, где R — радиус шара, а k_0 — волновое число излучаемого им теплового электромагнитного поля в вакууме.

Рассмотрим многослойный равномерно нагретый проводящий шар, помещенный в прозрачную среду меньшей температуры с вещественными

диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями. Предположим, что комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости шара меняются от слоя к слою, но остаются постоянными в пределах каждого из слоев. Изменения проницаемостей при этом не являются, вообще говоря, плавными и испытывают конечные скачки при переходе от одного концентрического слоя к другому. Предполагая далее, что отклонения от равновесия, связанные с высвечиванием во внешнее пространство, а также с процессами теплообмена шара с внешней средой и с процессами компенсации этих потерь за счет внутреннего источника энергии, поддерживающего стационарное распределение температуры внутри шара, можно считать пренебрежимо малыми, воспользовавшись общим методом решения такого рода задач, основанным на теореме взаимности [2].

Поместим точечные электрический и магнитный диполи с моментами d^e и d^m в ту точку прозрачной среды, где мы хотим получить характеристики теплового поля шара. Пусть эта точка имеет сферические координаты (r_0, θ_0, ϕ_0) . Согласно [2], средние значения билинейных комбинаций спектральных амплитуд теплового флуктуационного поля шара в этой точке связаны с потерями дифракционного поля внутри шара универсальными соотношениями, которые можно рассматривать как обобщение классического закона теплового излучения Кирхгофа:

$$\langle \tilde{E}_\alpha \tilde{E}_\beta^* \rangle = \frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) W_a(d_\alpha^e, d_\beta^e), \quad (1)$$

$$\langle \tilde{H}_\alpha \tilde{H}_\beta^* \rangle = \frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) W_a(d_\alpha^m, d_\beta^m), \quad (2)$$

$$\langle \tilde{E}_\alpha \tilde{H}_\beta^* \rangle = -\frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) W_a(d_\alpha^e, d_\beta^m). \quad (3)$$

Здесь $\Theta(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{1}{\exp(\hbar\omega/KT) - 1}$ — средняя энергия полевого осциллятора, \hbar — постоянная Планка, K — постоянная Больцмана, ω — частота излучения, T — температура шара, W_a — потери дифракционного поля, создаваемого расположенным в точке (r_0, θ_0, ϕ_0) электрическим и магнитным диполями. Компоненты электрического и магнитного дипольных моментов равны $d_\alpha^e = -l_\alpha^e/i\omega$, $d_\alpha^m = -l_\alpha^m/i\omega$, где l^e и l^m постоянные единичные векторы, ориентированные вдоль того направления,

для которого вычисляются интересующие нас проекции теплового поля. Найдем эти потери для суммарного электромагнитного поля, порожденного электрическим и магнитным диполями: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^m$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^m$. Проще всего эти потери определить как разность ослабленной и рассеянной шаром мощности: $W_a = W_e - W_s$. Для того, чтобы подсчитать эту разность, нужно стандартным образом решить задачу о дифракции дипольного поля на многослойном шаре. Следя хорошо известной процедуре, представим поле в окружающей шар прозрачной среде в виде суммы падающего и рассеянного полей, а поле внутри шара запишем для каждого из слоев в отдельности. Затем, разложив каждое из полей в ряд по фундаментальным векторным сферическим функциям и воспользовавшись граничными условиями непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного поля на поверхностях, разделяющих слои с различными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей, и условиями излучения на бесконечности, найдем соответствующие коэффициенты разложения. Знание этих коэффициентов и позволяет, как известно, найти все необходимые энергетические параметры дифракционной задачи. Спектральные амплитуды электромагнитного поля в прозрачной среде, окружающей шар, вне дипольных источников, и поле в каждом из слоев внутри шара удовлетворяют следующей системе однородных уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = ik_0\hat{\mu}\mathbf{H}, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -ik_0\hat{\epsilon}\mathbf{E}. \quad (5)$$

Здесь $k_0 = \frac{\omega}{c}$. Если точка наблюдения помещена в j -й слой внутри шара, тогда в формулах (4)–(5): $\mathbf{E} = \mathbf{E}_j$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_j$, $\hat{\epsilon} = \epsilon_j$, $\hat{\mu} = \mu_j$, причем ϵ_j и μ_j — комплексны. Для наблюдателя вне шара: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^s$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^s$, $\hat{\epsilon} = \epsilon$, $\hat{\mu} = \mu$, и проницаемости ϵ , μ — действительны. Поле \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 — суть суммарное падающее поле, порожденное электрическим и магнитным диполями, а \mathbf{E}^s , \mathbf{H}^s — суммарное поле, рассеиваемое шаром.

Нормированные фундаментальные векторные функции шара [6], зависящие от координат точки наблюдения (r, θ, ϕ) имеют следующий вид:

$$\mathbf{M}_{plm}(kr, \theta, \phi) = \mathbf{A}_{plm}(\theta, \phi) f_l(kr), \quad (6)$$

$$\mathbf{N}_{plm}(kr, \theta, \phi) = \mathbf{B}_{plm}(\theta, \phi) \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r f_l(kr)) + \mathbf{C}_{plm}(\theta, \phi) \frac{\sqrt{l(l+1)}}{kr} f_l(kr). \quad (7)$$

Индекс $p = (e, o)$ символизирует, соответственно, четную и нечетную зависимость от угла в скалярной производящей функции, порождающей \mathbf{M}_{plm} и \mathbf{N}_{plm} [6]. Угловая зависимость волновых функций \mathbf{M}_{plm} , \mathbf{N}_{plm} содержится в векторных сферических гармониках \mathbf{A}_{plm} , \mathbf{B}_{plm} , \mathbf{C}_{plm} :

$$\mathbf{A}_{e_{lm}}(\theta, \phi) = \gamma_{lm} \left\{ -\frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \frac{\sin(m\phi)}{\cos(m\phi)} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\cos(m\phi)}{\sin(m\phi)} \mathbf{e}_\phi \right\}, \quad (8)$$

$$\mathbf{B}_{e_{lm}}(\theta, \phi) = \gamma_{lm} \left\{ \frac{\partial P_l^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\cos(m\phi)}{\sin(m\phi)} \mathbf{e}_\theta + \frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \frac{\sin(m\phi)}{\cos(m\phi)} \mathbf{e}_\phi \right\}, \quad (9)$$

$$\mathbf{C}_{e_{lm}}(\theta, \phi) = \gamma_{lm} \left\{ \sqrt{l(l+1)} P_l^m(\cos \theta) \frac{\cos(m\phi)}{\sin(m\phi)} \mathbf{e}_r \right\}, \quad (10)$$

где $P_l^m(\cos \theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра первого рода [6], l — степень, m — порядок, причем $m = 0, 1, \dots, l$, а γ_{lm} — нормировочный множитель:

$$\gamma_{lm}^2 = (2 - \delta_{m0}) \frac{2l+l}{4\pi l(l+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}, \quad \delta_{m0} = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases} \quad (11)$$

В дальнейшем мы будем помечать функции \mathbf{M}_{plm} , \mathbf{N}_{plm} символом (1), когда зависимость их от радиальной координаты $f_l(kr)$ соответствует сферической функции Бесселя первого рода $j_l(kr)$, символом (2), когда зависимость от радиальной координаты $f_l(kr)$ соответствует сферической функции Бесселя второго рода $y_l(kr)$, и символом (3), когда эта зависимость определяется сферической функцией Бесселя третьего рода $h_l^{(1)}(kr)$.

Векторные сферические гармоники подчиняются следующим соотношениям ортогональности:

$$\int \mathbf{X}_{plm} \mathbf{X}_{p'l'm'} d\Omega = \delta_{pp'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \Delta, \quad (12)$$

$$\int \mathbf{X}_{plm} \mathbf{Y}_{p'l'm'} d\Omega = 0, \quad (13)$$

где $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, а \mathbf{X}_{plm} и \mathbf{Y}_{plm} представляют собой любую из функций \mathbf{A}_{plm} , \mathbf{B}_{plm} или \mathbf{C}_{plm} . Символ Δ равен нулю, если по крайней мере одна

из перечисленных векторных гармоник равна нулю, и равен единице в противном случае [6].

Используя разложение для тензорной функции Грина при $r_0 > r$ [6], суммарное дипольное поле, падающее на шар, можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E}^0(kr, \theta, \phi) = \sum_{p=(e,o)} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l A_{plm}^0 \mathbf{M}_{plm}^{(1)}(kr, \theta, \phi) + B_{plm}^0 \mathbf{N}_{plm}^{(1)}(kr, \theta, \phi), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^0(kr, \theta, \phi) = & -i\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{p=(e,o)} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l A_{plm}^0 \mathbf{N}_{plm}^{(1)}(kr, \theta, \phi) + \\ & + B_{plm}^0 \mathbf{M}_{plm}^{(1)}(kr, \theta, \phi), \end{aligned} \quad (15)$$

где коэффициенты A_{plm}^0, B_{plm}^0 равны:

$$A_{plm}^0 = i \frac{4\pi k^3}{\sqrt{\epsilon}} a_{plm}^0, \quad B_{plm}^0 = i \frac{4\pi k^3}{\sqrt{\epsilon}} b_{plm}^0, \quad (16)$$

причем

$$\begin{aligned} a_{plm}^0 = & \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left(\mathbf{M}_{plm}^{(3)}(kr_0, \theta_0, \phi_0) \mathbf{d}^e(r_0, \theta_0, \phi_0) \right) + \\ & + \frac{i}{\sqrt{\mu}} \left(\mathbf{N}_{plm}^{(3)}(kr_0, \theta_0, \phi_0) \mathbf{d}^m(r_0, \theta_0, \phi_0) \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} b_{plm}^0 = & \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left(\mathbf{N}_{plm}^{(3)}(kr_0, \theta_0, \phi_0) \mathbf{d}^e(r_0, \theta_0, \phi_0) \right) + \\ & + \frac{i}{\sqrt{\mu}} \left(\mathbf{M}_{plm}^{(3)}(kr_0, \theta_0, \phi_0) \mathbf{d}^m(r_0, \theta_0, \phi_0) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь (r_0, θ_0, ϕ_0) — координаты точки расположения точечных диполей.

Разложение рассеянного поля имеет аналогичный вид, где вместо функции $j_l(z)$, с учетом условия излучения на бесконечности, фигурирует $h_l^{(1)}(z)$:

$$\mathbf{E}^s(kr, \theta, \phi) = \sum_{plm} a_{plm} \mathbf{M}_{plm}^{(3)}(kr, \theta, \phi) + b_{plm} \mathbf{N}_{plm}^{(3)}(kr, \theta, \phi), \quad (19)$$

$$\mathbf{H}^s(kr, \theta, \phi) = -i\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{plm} a_{plm} \mathbf{N}_{plm}^{(3)}(kr, \theta, \phi) + b_{plm} \mathbf{M}_{plm}^{(3)}(kr, \theta, \phi). \quad (20)$$

Волновое число в прозрачной среде, окружающей шар $k = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$.

Внутреннее поле шара записывается следующим образом [7, 8]. В окрестности центра шара (сердцевине), учитывая условие конечности поля в центре, пишем:

$$\mathbf{E}_1(k_1 r_1, \theta, \phi) = \sum_{plm} c_{plm}^{(1)} \mathbf{M}_{plm}^{(1)}(k_1 r_1, \theta, \phi) + d_{plm}^{(1)} \mathbf{N}_{plm}^{(1)}(k_1 r_1, \theta, \phi), \quad (21)$$

$$\mathbf{H}_1(k_1 r_1, \theta, \phi) = -i \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \sum_{plm} c_{plm}^{(1)} \mathbf{N}_{plm}^{(1)}(k_1 r_1, \theta, \phi) + d_{plm}^{(1)} \mathbf{M}_{plm}^{(1)}(k_1 r_1, \theta, \phi). \quad (22)$$

Внутри j -го слоя ($j = 2, 3, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_j(k_j r_j, \theta, \phi) &= \sum_{plm} c_{plm}^{(j)} \mathbf{M}_{plm}^{(1)}(k_j r_j, \theta, \phi) + d_{plm}^{(j)} \mathbf{N}_{plm}^{(1)}(k_j r_j, \theta, \phi) + \\ &+ f_{plm}^{(j)} \mathbf{M}_{plm}^{(2)}(k_j r_j, \theta, \phi) + g_{plm}^{(j)} \mathbf{N}_{plm}^{(2)}(k_j r_j, \theta, \phi), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_j(k_j r_j, \theta, \phi) &= -i \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\mu_j}} \sum_{plm} c_{plm}^{(j)} \mathbf{N}_{plm}^{(1)}(k_j r_j, \theta, \phi) + d_{plm}^{(j)} \mathbf{M}_{plm}^{(1)}(k_j r_j, \theta, \phi) + \\ &+ f_{plm}^{(j)} \mathbf{N}_{plm}^{(2)}(k_j r_j, \theta, \phi) + g_{plm}^{(j)} \mathbf{M}_{plm}^{(2)}(k_j r_j, \theta, \phi). \end{aligned} \quad (24)$$

Волновое число внутри j -го слоя $k_j = k_0 \sqrt{\epsilon_j \mu_j}$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Границные условия на поверхностях, разделяющих области с различными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{j+1} - \mathbf{E}_j) \times \mathbf{e}_r &= 0, \quad (\mathbf{H}_{j+1} - \mathbf{H}_j) \times \mathbf{e}_r = 0, \text{ при } r = r_j, \quad (25) \\ (j &= 1, 2, \dots, N-1), \end{aligned}$$

$$(\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^0 - \mathbf{E}_N) \times \mathbf{e}_r = 0, \quad (\mathbf{H}^s + \mathbf{H}^0 - \mathbf{H}_N) \times \mathbf{e}_r = 0, \text{ при } r = r_N = R, \quad (26)$$

где R — радиус шара.

Подставляя разложения (14)–(15) и (19)–(24) в эти граничные условия, вводя обозначения $n = \sqrt{\epsilon \mu}$, $n_j = \sqrt{\epsilon_j \mu_j}$, $\rho_j = k_0 r_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ и используя соотношения ортогональности для сферических гармоник (12)–(13), получаем следующую систему уравнений для неизвестных коэффициентов разложения:

$$c_{plm}^{(2)} n_1 \psi_l(n_2 \rho_1) - f_{plm}^{(2)} n_1 \chi_l(n_2 \rho_1) = c_{plm}^{(1)} n_2 \psi_l(n_1 \rho_1), \quad (27)$$

$$c_{plm}^{(2)} \mu_1 \psi_l'(n_2 \rho_1) - f_{plm}^{(2)} \mu_1 \chi_l'(n_2 \rho_1) = c_{plm}^{(1)} \mu_2 \psi_l'(n_1 \rho_1), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} c_{plm}^{(j)} n_{j-1} \psi_l(n_j \rho_{j-1}) - f_{plm}^{(j)} n_{j-1} \chi_l(n_j \rho_{j-1}) &= \\ &= c_{plm}^{(j-1)} n_j \psi_l(n_{j-1} \rho_{j-1}) - f_{plm}^{(j-1)} n_j \chi_l(n_{j-1} \rho_{j-1}), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} c_{plm}^{(j)} \mu_{j-1} \psi_l'(n_j \rho_{j-1}) - f_{plm}^{(j)} \mu_{j-1} \chi_l'(n_j \rho_{j-1}) &= \\ &= c_{plm}^{(j-1)} \mu_j \psi_l'(n_{j-1} \rho_{j-1}) - f_{plm}^{(j-1)} \mu_j \chi_l'(n_{j-1} \rho_{j-1}), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} c_{plm}^{(N)} n \psi_l(n_N \rho_N) - f_{plm}^{(N)} n \chi_l(n_N \rho_N) &= \\ &= A_{plm}^0 n_N \psi_l(n \rho_N) + a_{plm} n_N \xi_l(n \rho_N), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} c_{plm}^{(N)} \mu \psi_l'(n_N \rho_N) - f_{plm}^{(N)} \mu \chi_l'(n_N \rho_N) &= \\ &= A_{plm}^0 \mu_N \psi_l'(n \rho_N) + a_{plm} \mu_N \xi_l'(n \rho_N), \end{aligned} \quad (32)$$

$$d_{plm}^{(2)} \mu_1 \psi_l(n_2 \rho_1) - g_{plm}^{(2)} \mu_1 \chi_l(n_2 \rho_1) = d_{plm}^{(1)} \mu_2 \psi_l(n_1 \rho_1), \quad (33)$$

$$d_{plm}^{(2)} n_1 \psi_l'(n_2 \rho_1) - g_{plm}^{(2)} n_1 \chi_l'(n_2 \rho_1) = d_{plm}^{(1)} n_2 \psi_l'(n_1 \rho_1), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} d_{plm}^{(j)} \mu_{j-1} \psi_l(n_j \rho_{j-1}) - g_{plm}^{(j)} \mu_{j-1} \chi_l(n_j \rho_{j-1}) &= \\ &= d_{plm}^{(j-1)} \mu_j \psi_l(n_{j-1} \rho_{j-1}) - g_{plm}^{(j-1)} \mu_j \chi_l(n_{j-1} \rho_{j-1}), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} d_{plm}^{(j)} n_{j-1} \psi_l'(n_j \rho_{j-1}) - g_{plm}^{(j)} n_{j-1} \chi_l'(n_j \rho_{j-1}) &= \\ &= d_{plm}^{(j-1)} n_j \psi_l'(n_{j-1} \rho_{j-1}) - g_{plm}^{(j-1)} n_j \chi_l'(n_{j-1} \rho_{j-1}), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} d_{plm}^{(N)} \mu \psi_l(n_N \rho_N) - g_{plm}^{(N)} \mu \chi_l(n_N \rho_N) &= \\ &= B_{plm}^0 \mu_N \psi_l(n \rho_N) + b_{plm} \mu_N \xi_l(n \rho_N), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} d_{plm}^{(N)} n \psi_l'(n_N \rho_N) - g_{plm}^{(N)} n \chi_l'(n_N \rho_N) &= \\ &= B_{plm}^0 n_N \psi_l'(n \rho_N) + b_{plm} n_N \xi_l'(n \rho_N), \end{aligned} \quad (38)$$

где $j = 2, 3, \dots, N - 1$.

Здесь от сферических функций Бесселя мы перешли к функциям Рикатти–Бесселя

$$\psi_l(z) = z j_l(z), \quad \chi_l(z) = -z y_l(z), \quad \xi_l(z) = z h_l^{(1)}(z) = \psi_l(z) - i \chi_l(z). \quad (39)$$

Обозначая далее $A_l^{(j)} = \frac{f_l^{(j)}}{c_l^{(j)}}, B_l^{(j)} = \frac{g_l^{(j)}}{d_l^{(j)}}, D_l^{(1)}(z) = \frac{\psi_l'(z)}{\psi_l(z)}, D_l^{(2)}(z) = \frac{\chi_l'(z)}{\chi_l(z)}$,

$D_l^{(3)}(z) = \frac{\xi'_l(z)}{\xi_l(z)}$, можно получить следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов рассеяния a_{plm} , b_{plm} :

$$A_l^{(1)} = 0, \quad F_l(n_1\rho_1) = D_l^{(1)}(n_1\rho_1), \quad (40)$$

$$A_l^{(j)} = \frac{\psi_l(n_j\rho_{j-1})}{\chi_l(n_j\rho_{j-1})} \cdot \frac{\mu_j n_{j-1} F_l(n_{j-1}\rho_{j-1}) - \mu_{j-1} n_j D_l^{(1)}(n_j\rho_{j-1})}{\mu_j n_{j-1} F_l(n_{j-1}\rho_{j-1}) - \mu_{j-1} n_j D_l^{(2)}(n_j\rho_{j-1})}, \quad (41)$$

$$F_l(n_j\rho_j) = \frac{(\psi_l(n_j\rho_j)/\chi_l(n_j\rho_j)) D_l^{(1)}(n_j\rho_j) - A_l^{(j)} D_l^{(2)}(n_j\rho_j)}{(\psi_l(n_j\rho_j)/\chi_l(n_j\rho_j)) - A_l^{(j)}}, \quad (42)$$

$$a_{plm} = -\frac{\psi_l(n\rho_N)}{\xi_l(n\rho_N)} \cdot \frac{\mu n_N F_l(n_N\rho_N) - \mu_N n D_l^{(1)}(n\rho_N)}{\mu n_N F_l(n_N\rho_N) - \mu_N n D_l^{(3)}(n\rho_N)} A_{plm}^0, \quad (43)$$

$$B_l^{(1)} = 0, \quad G_l(n_1\rho_1) = D_l^{(1)}(n_1\rho_1), \quad (44)$$

$$B_l^{(j)} = \frac{\psi_l(n_j\rho_{j-1})}{\chi_l(n_j\rho_{j-1})} \cdot \frac{\mu_{j-1} n_j G_l(n_{j-1}\rho_{j-1}) - \mu_j n_{j-1} D_l^{(1)}(n_j\rho_{j-1})}{\mu_{j-1} n_j G_l(n_{j-1}\rho_{j-1}) - \mu_j n_{j-1} D_l^{(2)}(n_j\rho_{j-1})}, \quad (45)$$

$$G_l(n_j\rho_j) = \frac{(\psi_l(n_j\rho_j)/\chi_l(n_j\rho_j)) D_l^{(1)}(n_j\rho_j) - B_l^{(j)} D_l^{(2)}(n_j\rho_j)}{(\psi_l(n_j\rho_j)/\chi_l(n_j\rho_j)) - B_l^{(j)}}, \quad (46)$$

$$b_{plm} = -\frac{\psi_l(n\rho_N)}{\xi_l(n\rho_N)} \cdot \frac{\mu_N n G_l(n_N\rho_N) - \mu n_N D_l^{(1)}(n\rho_N)}{\mu_N n G_l(n_N\rho_N) - \mu n_N D_l^{(3)}(n\rho_N)} B_{plm}^0, \quad (47)$$

Нетрудно видеть, что полученные коэффициенты a_{plm} , b_{plm} представляют собой (с точностью до знака) коэффициенты теории Керкера b_l , a_l [8] для задачи рассеяния плоской волны на многослойном шаре, домноженные на зависящие от структуры внешнего (дипольного) поля факторы A_{plm}^0 , B_{plm}^0 : $a_{plm} = -b_l A_{plm}^0$, $b_{plm} = -a_l B_{plm}^0$.

Процедура вычисления логарифмических производных функций Риккатти-Бесселя $D_l^{(1)}(z)$, $D_l^{(2)}(z)$ и $D_l^{(3)}(z)$, а также отношений $\psi_l(z)/\chi_l(z)$, $\psi_l(z)/\xi_l(z)$, входящих в (40)–(47) и использованная нами, подробным образом описана в [8]. Знание коэффициентов рассеяния суммарного дипольного поля неоднородным шаром a_{plm} , b_{plm} позволяет теперь получить все необходимые энергетические параметры задачи. Рассеиваемая ша-

ром мощность находится путем интегрирования усредненного по времени вектора Пойнтинга, составленного из компонент рассеянного дифракционного поля, по поверхности шара:

$$W_s = \frac{cR^2}{16\pi} \int \left\{ [\mathbf{E}^s \times \mathbf{H}^{s*}] + [\mathbf{E}^{s*} \times \mathbf{H}^s] \right\}_{r=R} \mathbf{e}_r d\Omega, \quad (48)$$

где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, R — радиус шара, а \mathbf{e}_r — единичный вектор в направлении внешней нормали к поверхности шара.

Аналогичным образом находим ослабленную шаром мощность:

$$\begin{aligned} W_e = -\frac{cR^2}{16\pi} \int & \left\{ [\mathbf{E}^0 \times \mathbf{H}^{s*}] + [\mathbf{E}^s \times \mathbf{H}^{0*}] + \right. \\ & \left. + [\mathbf{E}^{0*} \times \mathbf{H}^s] + [\mathbf{E}^{s*} \times \mathbf{H}^0] \right\}_{r=R} \mathbf{e}_r d\Omega. \end{aligned} \quad (49)$$

Используя соотношения ортогональности (12)–(13) для векторных сферических гармоник, и учитывая (16), получаем:

$$W_s = 2\pi\omega k^3 \sum_{plm} |a_{plm}^0|^2 |b_l|^2 + |b_{plm}^0|^2 |a_l|^2, \quad (50)$$

$$W_e = 2\pi\omega k^3 \sum_{plm} |a_{plm}^0|^2 \operatorname{Re}(b_l) + |b_{plm}^0|^2 \operatorname{Re}(a_l). \quad (51)$$

Искомые потери дифракционного поля внутри шара равны

$$W_a = 2\pi\omega k^3 \sum_{plm} |a_{plm}^0|^2 (\operatorname{Re}(b_l) - |b_l|^2) + |b_{plm}^0|^2 (\operatorname{Re}(a_l) - |a_l|^2). \quad (52)$$

В качестве основных характеристик теплового поля шара рассмотрим спектральную плотность его электрической U_ω^e и магнитной U_ω^m энергии и спектральную плотность вектора Пойнтинга P_ω [2]:

$$U_\omega^e = \frac{\epsilon}{4\pi} \left\{ \langle |\tilde{E}_\theta|^2 \rangle + \langle |\tilde{E}_\phi|^2 \rangle + \langle |\tilde{E}_r|^2 \rangle \right\}, \quad (53)$$

$$U_\omega^m = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \langle |\tilde{H}_\theta|^2 \rangle + \langle |\tilde{H}_\phi|^2 \rangle + \langle |\tilde{H}_r|^2 \rangle \right\}, \quad (54)$$

$$P_\omega = \frac{c}{4\pi} \left\{ \langle \tilde{E}_\theta \tilde{H}_\phi^* \rangle - \langle \tilde{E}_\phi \tilde{H}_\theta^* \rangle + \langle \tilde{E}_\theta^* \tilde{H}_\phi \rangle - \langle \tilde{E}_\phi^* \tilde{H}_\theta \rangle \right\}. \quad (55)$$

Используя соотношения (1)–(3), обобщающие закон Кирхгофа, и соотношения (56)–(58), вытекающие из теоремы сложения для полиномов Лежандра [9]:

$$\sum_{m=0}^l \gamma_{lm}^2 [P_l^m(\cos \theta)]^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{2l+1}{2l(l+1)}, \quad (56)$$

$$\sum_{m=0}^l \gamma_{lm}^2 \left[\frac{\partial P_l^m(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} \right]^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{2l+1}{4}, \quad (57)$$

$$\sum_{m=0}^l \gamma_{lm}^2 \left[\frac{m P_l^m(\cos \theta_0)}{\sin \theta_0} \right]^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{2l+1}{4}, \quad (58)$$

находим:

$$U_\omega^e = \frac{U_{0\omega} n^3}{4\rho_0^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left\{ \left[l(l+1) \frac{|\xi_l(\rho_0)|^2}{\rho_0^2} + |\xi'_l(\rho_0)|^2 \right] (\operatorname{Re}(a_l) - |a_l|^2) + |\xi_l(\rho_0)|^2 (\operatorname{Re}(b_l) - |b_l|^2) \right\}, \quad (59)$$

$$U_\omega^m = \frac{U_{0\omega} n^3}{4\rho_0^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left\{ \left[l(l+1) \frac{|\xi_l(\rho_0)|^2}{\rho_0^2} + |\xi'_l(\rho_0)|^2 \right] (\operatorname{Re}(b_l) - |b_l|^2) + |\xi_l(\rho_0)|^2 (\operatorname{Re}(a_l) - |a_l|^2) \right\}, \quad (60)$$

$$P_\omega = \frac{2\pi I_{0\omega} n^2}{\rho_0^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left\{ (\operatorname{Re}(a_l) - |a_l|^2) + (\operatorname{Re}(b_l) - |b_l|^2) \right\}, \quad (61)$$

где $\rho_0 = kr_0$. При выводе (59)–(61) было использовано соотношение

$$h_l^{(1)}(\rho_0) \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 h_l^{(1)}(\rho_0)}{\partial \rho_0} \right)^* - \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 h_l^{(1)}(\rho_0)}{\partial \rho_0} \right) h_l^{(1)*}(\rho_0) = -\frac{2i}{\rho_0^2}$$

и введены обозначения $I_{0\omega}$, $U_{0\omega}$ для равновесной интенсивности и спектральной плотности тепловой энергии в вакууме, а также учтено, что $\frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) = \frac{8\pi^2}{k_0^2} I_{0\omega}$, причем $I_{0\omega} = \frac{c}{4\pi} U_{0\omega}$.

В волновой зоне, когда $\rho_0 \gg 1$, и, следовательно, $|\xi(\rho_0)| \approx |\xi'(\rho_0)| \approx 1$ в пределах однородного шара нетрудно получить известный результат [10]

для полной излучаемой шаром мощности:

$$J_\omega = -\frac{\hbar\omega}{\pi} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2KT}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{|\xi_l(\rho)|^2} \times \\ \times \left\{ \frac{\operatorname{Im}(n_1^* D_l^{(1)}(n_1\rho))}{|D_l^{(1)}(n_1\rho) - n_1 D_l^{(3)}(\rho)|^2} + \frac{\operatorname{Im}(n_1 D_l^{(1)}(n_1\rho))}{|D_l^{(3)}(\rho) - n_1 D_l^{(1)}(n_1\rho)|^2} \right\}. \quad (62)$$

Здесь $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ — комплексный показатель преломления вещества однородного шара, $\rho = k_0 R$ — параметр дифракции шара. Видно, что в отсутствие поглощения шар ничего не излучает ($J_\omega = 0$).

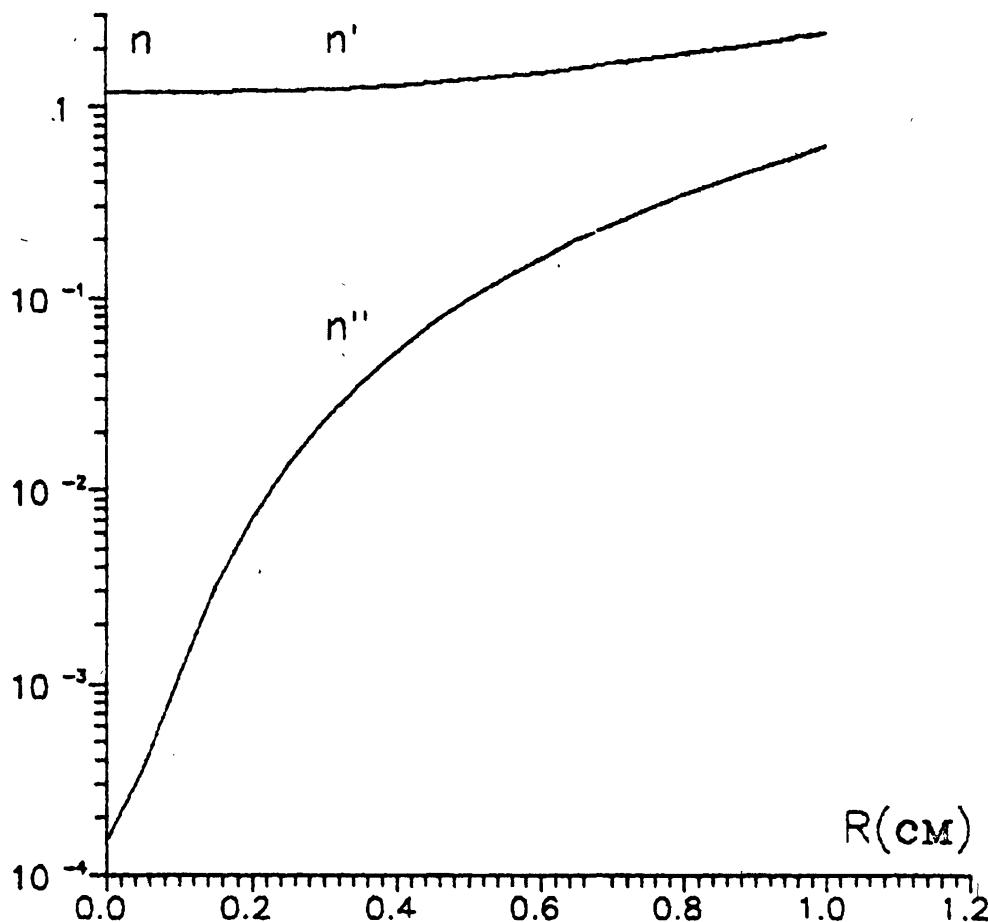


Рис. 1.

В качестве примера, иллюстрирующего влияние неоднородности на характеристики теплового излучения частиц, рассмотрим зависимость

излучаемой хлопьями мокрого снега удельной мощности $p_\omega = (r_0^2/R^2) P_\omega$ от параметра дифракции $\rho = k_0 R$ шара. Использованная нами модель снежных хлопьев сводилась к следующему: хлопья аппроксимировались проводящим шаром, распределение влажности по радиусу которого соответствовало трем различным случаям:

- влага равномерно распределялась по объему шара;
- влажность возрастала от центра к периферии шара по линейному закону;
- вся влага концентрировалась в оболочке, толщина которой подбиралась из условия равенства полной массы воды, распределенной в хлопьях в первом и втором случаях, и массы воды в оболочке.

Диэлектрическая проницаемость хлопьев в первом и втором случаях находилась из формулы Винера для смеси льда, воздуха и воды [11], которая в первом случае применялась ко всему объему хлопьев, а во втором — к каждому из $n = 50$ слоев, на которые был разбит проводящий шар, аппроксимирующий хлопья. На рис. 1 изображено изменение действительной и мнимой частей комплексного показателя преломления $n = n' + in''$ внутри многослойного шара на частоте $f = 30$ ГГц. Радиус шара R принимался равным 1 см, плотность хлопьев $\rho_f = 0,275$ г/см³. Диэлектрическая проницаемость льда и воды заимствовалась из работы [12].

На рис. 2 изображены зависимости излучаемой с единицы поверхности хлопьев мокрого снега мощности p_ω , нормированной на удельную мощность излучения абсолютно черного тела $p_{0\omega} = \frac{c}{4} U_{0\omega}$. Кривая 1 соответствует равномерному распределению влаги, кривая 2 — линейному распределению, кривая 3 описывает хлопья снега в водной оболочке. Нетрудно видеть, что эти зависимости не только количественно, но и качественно различаются между собой. Дифракционные максимумы и минимумы, присутствующие на кривых, отвечающих неоднородному распределению влаги, практически отсутствуют на кривой, характеризующей однородное ее распределение. Не исключено, что полученные особенности поведения собственного излучения мокрого снега могут быть использованы, например, для дистанционной диагностики типа снегопада, однако, решение этого вопроса требует рассмотрения более сложной задачи об

излучении совокупности неоднородных частиц, характеризующихся определенным распределением по размерам.

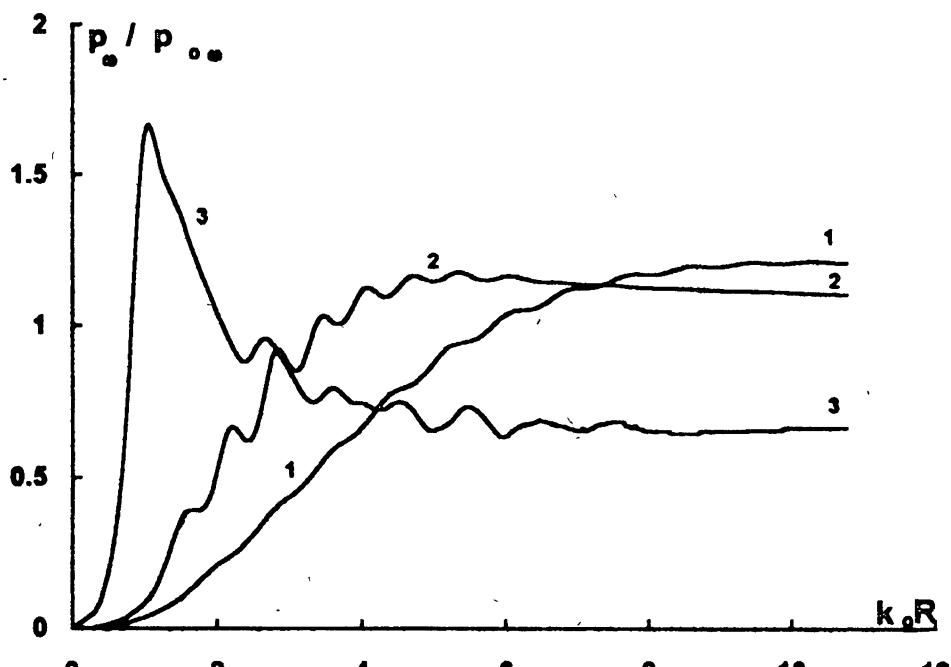


Рис. 2.

В заключение выражаю признательность К. П. Гайковичу, обратившему внимание автора на актуальность рассматриваемой проблемы, и А. П. Наумову за внимание к работе.

Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 94-02-03472-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. — М.: Наука, 1953.
2. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
3. Pluchino A. B. // Appl. Opt., 1981. V. 20. N 4. P. 531.
4. Pluchino A. B. // Appl. Opt., 1981. V. 20. N 17. P. 2986.

5. Aden A. L., Kerker M. // J. Appl. Phys., 1951. V. 22. N 10. P. 1242.
6. Johnson B. R. // Appl. Opt., 1988. V. 27. N 23. P. 4861.
7. Борен К., Хафмен Д. // Поглощение и рассеяние света малыми частицами. — М.: Мир, 1986.
8. Wu Z. S., Wang Y. P. // Radio Science, 1991. V. 26. N 6. P. 1393.
9. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М., Л.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1948.
10. Kattawar G. W., Eisner M. // Appl. Opt., 1970. V. 9. N 12. P. 2685.
11. Огучи Т. // ТИИЭР, 1983. Т. 71. N 9. С. 6.
12. Liebe H. J., Manabe T., Hufford G. A. // IEEE Trans. Ant. Prop., 1989. V. AP-37. N 12. P. 1617.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н.Новгород

Поступила в редакцию
21 февраля 1995 г.

THERMAL FIELD OF A MULTILAYERED SPHERE

A. M. Osharin

The electrodynamic fluctuations theory is used to calculate characteristics of the thermal field of a multilayered isothermal conductive sphere. Expressions are obtained for the spectral density of the electric and magnetic energy and also for the Poynting vector spectral density of the thermal field of a multilayered sphere, which are valid for all observer distances from the center of the sphere and for all values of the size parameter. Results are illustrated by the computational example of the wet snow flake thermal emission.

УДК 538.566

К РЕШЕНИЮ ВЕКТОРНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЛОКАЛЬНО-НЕРЕГУЛЯРНОЙ ВОЛНОВОДНОЙ ЗАДАЧИ

O. B. Соловьев

Исследуется векторная трехмерная задача о поле точечного источника в плоском волноводе с крупномасштабной локальной неоднородностью на одной из его стенок. Компоненты полей на граничных поверхностях подчиняются условиям Леонтьевича. На их основе получены выражения для нормальных к границам производных векторов поля, отражающие трехмерный характер неоднородности. Задача сведена к системе двумерных интегральных уравнений, учитывающих перевозбуждение и деполяризацию поля, рассеянного на нерегулярности. Проведено асимптотическое преобразование системы двумерных интегральных уравнений по области неоднородности на поверхности стенок, ограничивающих волноводное пространство, к системе линейных интегральных уравнений, для которых контуром интегрирования оказывается линия трассы источник – точка наблюдения, а также линейный геометрический контур нерегулярности.

Актуальной задачей теории распространения радиоволн остается проблема учета влияния трехмерных локальных неоднородностей среды распространения на поле заданного источника. Под термином “локальная неоднородность” мы понимаем нерегулярность, размеры которой ограничены как в направлении источник – точка наблюдения (продольном), так и в поперечном направлении. Учет влияния такой неоднородности исключает возможность сведения задачи к двумерной. К рассматриваемому типу неоднородностей могут быть отнесены трехмерные возмущения диэлектрических и металлических волноведущих систем, трехмерные включения в слоистых средах, моделирующие нерегулярности в задачах радиолокации, а также неоднородности ионосферы и земной поверхности в задачах околоземного распространения радиоволн. В различных отраслях современной техники, в частности, в электромагнитной дефекто-

скопии, разведочной геофизике и других приложениях важное значение имеют исследования электромагнитного поля, обусловленного наличием рассеивателей различной физической природы, и на этой основе определение информационных параметров этого поля.

Настоящая работа посвящена фундаментальным теоретическим аспектам данной проблемы, а в качестве физического приложения мы будем иметь в виду задачу околоземного распространения радиоволн. К неоднородностям, требующим учета в данном случае, могут быть отнесены всевозможные образования в нижней ионосфере, вызванные возмущениями естественного характера (землетрясения, терминатор, магнитные бури, высыпания электронов и протонов и т. п.), а также являющиеся следствием антропогенной деятельности (старты космических аппаратов; подземные, наземные и воздушные взрывы; эксперименты по высокочастотному нагреву ионосферы [1]). Размеры таких ионосферных неоднородностей в горизонтальной плоскости могут быть от десятков и сотен до тысяч километров в диаметре. Подобного рода неоднородности на земной поверхности волновода — это неоднородности "островного" и "полуостровного" типа, влияние которых может существенно определяться их ограниченностью в поперечном к трассе распространения направлении. Наиболее остро эта задача встает при прогнозировании поля земной волны в реальных условиях. В этом случае учет поперечных размеров неоднородностей земной поверхности оказывается одним из факторов, определяющих точность работы навигационных систем.

В данной работе мы не будем проводить анализа существующих в литературе работ, посвященных моделированию воздействия на электромагнитное поле различного рода нерегулярностей приземного волновода, отсылая читателя к нашей предшествующей работе [2]. Отметим лишь, что большинство авторов ограничивается скалярной постановкой задачи, когда изначально пренебрегается деполяризацией рассеянного на возмущениях среды поля. Задача в таком случае ставится фактически для однокомпонентного вектора Герца, который возбуждался бы заданным источником в регулярной среде. Обоснование возможности такого подхода для задач о распространении земной волны содержится в [3]. Тем не менее,

наличие возможности использования в отдельных случаях более простой скалярной постановки задачи не исключает необходимости постановки и исследования более полной и сложной векторной задачи, т. к. только она позволяет определить границы применимости известных приближений. Нам известно небольшое число работ, в которых используется векторная постановка подобных задач [4, 5, 6]. Все они используют метод интегральных уравнений. Решение возникающих уравнений строится в борновском приближении в предположении малости возмущения в масштабе длины волны [4, 5], либо в масштабе длины трассы распространения [6].

Целью настоящей работы является постановка и исследование векторной задачи для крупномасштабных неоднородностей, которые могут принадлежать как земной, так и ионосферной стенкам околоземного волновода, и описываются нами в рамках неоднородного по площади поверхности импеданса. Привлекая граничные условия Щукина-Леоновича [7], связывающие компоненты электромагнитного поля на поверхности проводящего тела, мы получили и в дальнейшем использовали выражения для нормальных производных этих компонентов, вид которых отличается от известных в литературе. Чтобы не усложнять изложение, мы ограничились плоской моделью приземного волновода. Исследование аналогичной задачи в цилиндрической или сферической моделях волновода не вносит принципиальных изменений в полученные уравнения и предлагаемый для их решения алгоритм.

Итак, будем исследовать электромагнитное поле, возбуждаемое сторонним источником в области $D \in R^3$, ограниченной поверхностями S_E и S_I . Свойства D совпадают со свойствами вакуума. В декартовой системе координат (x, y, z) (или цилиндрической (r, φ, z) , начало которой будет связано с точечным сторонним источником) поверхность S_E задается уравнением $z = 0$, а поверхность S_I — уравнением $z = h$. Компоненты поля, гармонически зависящие от времени $\exp(-i\omega t)$, подчиняются внутри D системе уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= i\omega\mu_0 \vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega\epsilon_0 \vec{E} + \vec{j}, \\ \operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} &= \rho, \quad \operatorname{div} \mu_0 \vec{H} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В качестве источника поля рассмотрим точечный вертикальный электри-

ческий диполь, выражая \vec{j} и ρ через плотность P_0 дипольного (электрического) момента:

$$\vec{j} = -i\omega P_0(0, 0, z_0) \vec{e}_z; \quad \rho = -\operatorname{div} P_0(0, 0, z_0) \vec{e}_z.$$

Границные условия для \vec{E} и \vec{H} на обеих стенках S_E и S_I — импедансного типа:

$$\vec{E}_{tg} = \hat{Z}[\vec{H}_{tg} \times \vec{n}], \quad \hat{Z} = Z_0 \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad (2)$$

$\vec{n} = n\vec{e}_z$, где $n = -1$ для $z = 0$ и $n = +1$ для $z = h$. Для определенности будем считать, что на нижней стенке волновода $\delta_1 = \delta_2 = \delta_e = \text{const}$, а на верхней — компоненты тензора $\hat{Z} = Z_0\hat{\delta}$ могут не совпадать между собой и являются функциями координат поверхности:

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1(r, \varphi) & 0 \\ 0 & \delta_2(r, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Применяя к уравнениям (1) (предварительно преобразованным) векторный аналог теоремы Грина, можно получить известные формулы [8], выражающие векторы \vec{E} и \vec{H} во внутренних точках какого-либо объема V (в данном случае это волноводная область D , заключенная между стенками $z = 0$ и $z = h$) через их значения на поверхности $S = S_E \cup S_I$, ограничивающей этот объем:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}') &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\{ i\omega\mu_0 \vec{j}\Phi + \frac{\operatorname{div} \vec{j}}{i\omega\epsilon_0} \operatorname{grad} \Phi \right\} dV - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ i\omega\mu_0 [\vec{n}, \vec{H}] \Phi + [[\vec{n}, \vec{E}], \operatorname{grad} \Phi] + (\vec{n}, \vec{E}) \operatorname{grad} \Phi \right\} dS, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{R}') &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V [\vec{j}, \operatorname{grad} \Phi] dV + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ i\omega\epsilon_0 [\vec{n}, \vec{E}] \Phi - [[\vec{n}, \vec{H}], \operatorname{grad} \Phi] - (\vec{n}, \vec{H}) \operatorname{grad} \Phi \right\} dS. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что все рассуждения мы начинаем для точки наблюдения, располагающейся, как и источник, внутри волновода. Радиус-вектор

точки наблюдения будем обозначать: $\vec{R}' = (r', \varphi', z')$, $\vec{R}' \notin S$; радиус-вектор точки интегрирования $\vec{R} = (r, \varphi, z)$, $\vec{R} \in S$. В формулах (3), (4) — $\Phi = \Phi(|\vec{R}' - \vec{R}|)$ есть функция Грина, которая при $|\vec{R}' - \vec{R}| \rightarrow 0$ принимает вид: $\exp ik|\vec{R}' - \vec{R}|/|\vec{R}' - \vec{R}|$. В данном случае $|\vec{R}' - \vec{R}| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} = \sqrt{r_1^2 + (z' - z)^2}$ — есть расстояние, измеряемое от элемента (x, y, z) до точки (x', y', z') , $r_1 = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\varphi' - \varphi)}$.

Учитывая специфику нашей задачи, в качестве функции Грина будем использовать либо вертикальную компоненту $\Pi^{(\epsilon)}(\vec{R}', \vec{R})$ электрического вектора Герца регулярной волноводной задачи:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\Pi}^{(\epsilon)} + k^2 \vec{\Pi}^{(\epsilon)} &= -\frac{\vec{P}_0}{\epsilon_0}; & \vec{P}_0 &= P_0 \delta(x' - x, y' - y, z' - z) \vec{e}_z; \\ \vec{\Pi}^{(\epsilon)} &= \Pi^{(\epsilon)} \vec{e}_z; \\ \frac{\partial \Pi^{(\epsilon)}}{\partial z} &= -ik \delta_e \Pi^{(\epsilon)} \text{ для } z = 0, \\ \frac{\partial \Pi^{(\epsilon)}}{\partial z} &= ik \delta_1 \Pi^{(\epsilon)} \text{ для } z = h, \end{aligned} \quad (5)$$

либо вертикальную компоненту $\Pi^{(m)}(\vec{R}', \vec{R})$ магнитного вектора Герца, также регулярной волноводной задачи:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\Pi}^{(m)} + k^2 \vec{\Pi}^{(m)} &= \frac{\vec{P}_0^{(m)}}{\mu_0}; & \vec{P}_0^{(m)} &= P_0^{(m)} \delta(x' - x, y' - y, z' - z) \vec{e}_z; \\ \vec{\Pi}^{(m)} &= \Pi^{(m)} \vec{e}_z; \\ \frac{\partial \Pi^{(m)}}{\partial z} &= -\frac{ik}{\delta_e} \Pi^{(m)} \text{ для } z = 0, \\ \frac{\partial \Pi^{(m)}}{\partial z} &= \frac{ik}{\delta_2} \Pi^{(m)} \text{ для } z = h. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (5), (6) $\delta(x, y, z)$ — обозначает δ -функцию.

Векторные формулы (3), (4) можно расписать покомпонентно и преобразовать, учитывая конкретный вид стороннего источника поля и функци-

ции Грина. Например, для E_z и H_φ непосредственно из (3) и (4) следует:

$$\begin{aligned} E_z(r', \varphi', z') = \\ = E_z^0(r', \varphi', z') + n \frac{\epsilon_0}{P_0} \iint_{S_B+S_I} \left\{ E_\varphi \frac{\partial \Pi^{(e)}}{r \partial \varphi} + E_r \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial r} - E_z \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial z} \right\} dS, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} H_\varphi(r', \varphi', z') = \\ = H_\varphi^0(r', \varphi', z') + n \frac{\epsilon_0}{P_0} \iint_{S_B+S_I} \left\{ i\omega \epsilon_0 \Pi^{(e)} E_r - H_\varphi \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial z} - H_z \frac{\partial \Pi^{(e)}}{r \partial \varphi} \right\} dS, \end{aligned}$$

где $E_z^0(r', \varphi', z')$ и $H_\varphi^0(r', \varphi', z')$ — компоненты \vec{E} и \vec{H} в регулярном волноводе, которые, зная решение задачи (5), можно получить по формулам:

$$E_z^0 = \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \Pi^{(e)}; \quad H_\varphi^0 = i\omega \epsilon_0 \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial r'}. \quad (8)$$

Поверхностные интегралы в (7) преобразуем, используя интегрирование по частям в интеграле по азимутальной координате φ и привлекая однородные уравнения Максвелла для области внутри волновода. В результате получим систему интегральных соотношений, выражающих значения компонентов \vec{E} и \vec{H} поля вертикального электрического диполя в произвольной точке (r', φ', z') волноводной области через значения этих компонентов и их нормальных производных на поверхностях, ограничивающих эту волноводную область:

$$\begin{aligned} E_z(r', \varphi', z') = E_z^0(r', \varphi', z') + n \frac{\epsilon_0}{P_0} \iint_{S_B+S_I} \left\{ \Pi^{(e)} \frac{\partial E_z}{\partial z} - E_z \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial z} \right\} dS, \\ E_\varphi(r', \varphi', z') = n \frac{\epsilon_0}{P_0} \iint_{S_B+S_I} \left\{ \Pi^{(e)} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} - E_\varphi \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial z} \right\} dS, \\ E_r(r', \varphi', z') = E_r^0(r', \varphi', z') + n \frac{\epsilon_0}{P_0} \iint_{S_B+S_I} \left\{ \Pi^{(e)} \frac{\partial E_r}{\partial z} - E_r \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial z} \right\} dS, \\ H_r(r', \varphi', z') = n \frac{\epsilon_0}{P_0} \iint_{S_B+S_I} \left\{ \Pi^{(e)} \frac{\partial H_r}{\partial z} - H_r \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial z} \right\} dS, \\ H_\varphi(r', \varphi', z') = H_\varphi^0(r', \varphi', z') + n \frac{\epsilon_0}{P_0} \iint_{S_B+S_I} \left\{ \Pi^{(e)} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - H_\varphi \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial z} \right\} dS, \end{aligned} \quad (9)$$

$$H_z(r', \varphi', z') = n \frac{\epsilon_0}{P_0} \iint_{S_B + S_I} \left\{ \Pi^{(\epsilon)} \frac{\partial H_z}{\partial z} - H_z \frac{\partial \Pi^{(\epsilon)}}{\partial z} \right\} dS.$$

В формулах (9) $E_r^0 = \frac{\partial^2 \Pi^{(\epsilon)}}{\partial r' \partial z'}$. Мы остановились столь подробно на преобразовании системы (3), (4) к системе уравнений (9), вид которой, казалось бы, непосредственно следует из скалярной теоремы Грина (под знаком поверхностного интеграла стоят разности комбинаций произведений функций и функций Грина с их нормальными производными), по той причине, что в данном случае скалярная теорема Грина может быть применена непосредственно только к декартовым компонентам векторов \vec{E} и \vec{H} . В случае же цилиндрической системы координат, которая является более естественной для осесимметричного источника, если преобразовать систему уравнений Максвелла (1) к системе векторных уравнений Гельмгольца:

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\vec{j}, \quad (10)$$

и учесть, что $\vec{j} = k^2 \frac{\vec{P}_0}{s_0} + \text{grad div} \frac{\vec{P}_0}{\epsilon_0}$ для $\vec{A} = \vec{E}$ и $\vec{j} = -i\omega \text{rot} \vec{P}_0$ для $\vec{A} = \vec{H}$, то для r -й компоненты (10), например, окажется:

$$\Delta A_r + k^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = -j_r.$$

Нечто аналогичное, отличное от привычного вида скалярного уравнения Гельмгольца, будет и для φ -й компоненты (10). Применение затем к ним скалярной теоремы Грина приведет, конечно, к формулам (9), однако, этот путь оказывается более трудоемким, чем описанный выше.

Обратимся теперь к граничным условиям. Используя (2) и покомпонентную запись уравнений (1), можно получить выражения для $\frac{\partial E_j}{\partial z}$ и $\frac{\partial H_j}{\partial z}$, $j = r, \varphi, z$ на граничных поверхностях волновода. Поскольку в дальнейшем мы ограничимся системой только для четырех $E_\varphi, E_z, H_\varphi, H_z$ компонентов векторов поля (оставшиеся E_r и H_r можно получить непосредственно из (1), зная первые четыре), то и граничные условия запишем лишь для них. Сначала на нижней стенке $z = 0$ ($n = -1$), которая предполагается однородной:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial z} &= -ik\delta_e E_z; & \frac{\partial H_z}{\partial z} &= -\frac{ik}{\delta_e} H_z; \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= -\frac{ik}{\delta_e} E_\varphi + \frac{\partial E_z}{r \partial \varphi}; & \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= -ik\delta_e H_\varphi + \frac{\partial H_z}{r \partial \varphi}.\end{aligned}\quad (11)$$

На верхней стенке $z = h$ ($n = +1$), электрические свойства которой задаются тензором $\hat{\delta}$, имеем для компонентов тензора — функций координат:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial z} &= ik\delta_1 E_z + \left(-1 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) \frac{\partial E_\varphi}{r \partial \varphi} - Z_0 H_\varphi \frac{\partial \delta_1}{\partial r} - \frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{\partial \ln \delta_2}{r \partial \varphi} E_\varphi, \\ \frac{\partial H_z}{\partial z} &= \frac{ik}{\delta_2} H_z + \left(-1 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) \frac{\partial H_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{E_\varphi}{Z_0} \frac{\partial 1/\delta_2}{\partial r} + \frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{\partial \ln \delta_1}{r \partial \varphi} H_\varphi, \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= \frac{ik}{\delta_2(r, \varphi)} E_\varphi + \frac{\partial E_z}{r \partial \varphi}; & \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= ik\delta_1(r, \varphi) H_\varphi + \frac{\partial H_z}{r \partial \varphi}.\end{aligned}\quad (12)$$

Границные условия (12) для случая поверхности, описываемой неоднородным импедансом $\delta(r, \varphi)$, отличаются от часто используемых, например, в [3, 9–11]:

$$\frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} = ik\eta(x, y) E_z(x, y, z), \quad z \in S. \quad (13)$$

Условия (13) были получены в [9] при допущении относительной малости вторых производных $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) E_z$ вдоль поверхности тела по сравнению с $\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$. В [3] было показано, что граничное условие в виде (13) получается в предположении, что изменение поля вдоль поверхности раздела имеет характер слабо модулированной плоской волны. Точности ради необходимо отметить, что в [3] приводятся граничные условия, похожие на (12), (правда лишь для случая, когда $\hat{\delta}$ можно заменить на скаляр) и отмечается, что члены, содержащие производные импеданса могут быть достаточно велики, чтобы пренебрегать ими на фоне $ik\delta E_z$. Однако, в дальнейшем эти условия преобразуются к виду (13) с некоторым модифицированным $\eta(x, y)$, при том же предположении, что изменение поля по x и y имеет характер слабо модулированной плоской волны. Такое предположение для двумерных задач (которые только и рассматриваются в [3]),

по-видимому, имеет право на существование, но в нашем — трехмерном случае распространения в сложной системе (волновод) — это будет скорее исключением, чем правилом. Как следует из решений точных задач рассеяния на клиновидных структурах (например, [12]), отличие в импедансной и точной постановках задачи проявляется только на расстоянии порядка длины волны в проводящем клине (описываемом импедансом δ), которую можно оценить как $\lambda\delta$, где λ — длина волны в вакууме. Исходя из этого можно предложить следующую оценку продольной производной импеданса $\frac{\partial\delta}{\partial r}, \frac{\partial\delta'}{r\partial\varphi} \sim \frac{k\Delta\delta}{2\pi\delta}$, которая показывает, что члены в правой части (12), содержащие эти производные, могут быть одного порядка с $ik\delta E_z$. Отметим также, что уже на уровне граничных условий (12) видно, что наличие в задаче аксиально несимметричных неоднородностей (т. е. $\frac{\partial\delta_{1,2}}{r\partial\varphi} \neq 0$) приводит к деполяризации поля при рассеянии на неоднородности. В то время как граничное условие (13) оставляет нас в рамках скалярной постановки задачи.

Подставляя формулы (11) и (12) в подынтегральные выражения в правых частях (9), получим систему интегральных соотношений, равносильную исходной системе уравнений Максвелла. Поскольку использование теоремы Грина допускает известный произвол в выборе функции Грина для конкретной задачи, воспользуемся этим, чтобы максимально упростить получаемую в итоге систему. Будем рассматривать, наряду с (9), аналогичную систему интегральных соотношений, в которой в качестве функции Грина будем использовать $\Pi^{(m)}$ -магнитный вектор Герца регулярной волноводной задачи (6). Считая, что компоненты тензора δ равны, т. е. $\delta_1 = \delta_2 = \delta_i(M)$, конкретизируем модель неоднородности ионосферной стенки волновода, влияние которой на поле точечного источника в волноводе мы собираемся исследовать:

$$\delta_i(M) = \begin{cases} \delta_{i0} = \text{const}, & M \in S_{i0}, \\ \delta_{ip} = \text{const}, & M \in S_{ip}, \\ \delta_i(r, \varphi), & M \in S_{i\gamma}. \end{cases}$$

Таким образом, на поверхности S_I существует произвольное по своей форме и размерам возмущение S_{ip} , электрические свойства которого могут быть описаны постоянным импедансом δ_{ip} , отличным от постоянного

импеданса δ_{i0} — описывающего электрические свойства невоэмущенной S_{i0} части поверхности S_I . Область $S_{i\gamma}$ представляет собой достаточно узкую переходную область между S_{i0} и S_{ip} , в пределах которой значение импеданса изменяется от δ_{i0} на внешней границе $S_{i\gamma}$ до δ_{ip} на внутренней границе S_{ip} (рис. 1).

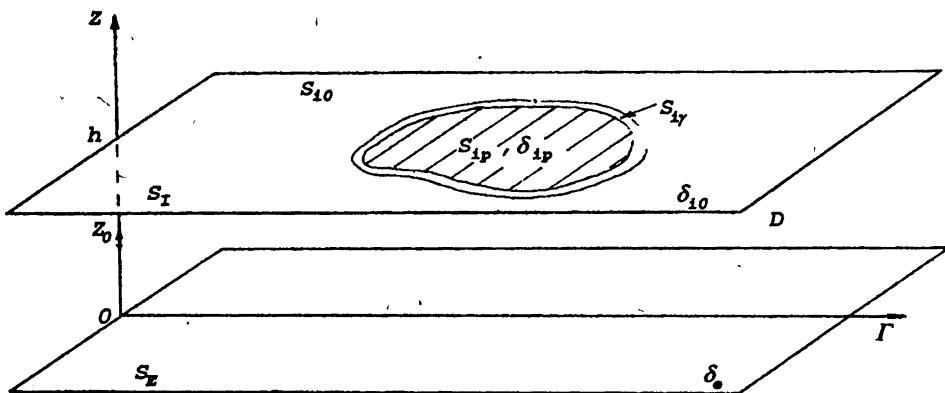


Рис. 1

Только в этой области оказываются отличными от нуля производные $\frac{\partial \delta_i}{r \partial \varphi}$ и $\frac{\partial \delta_i}{\partial r}$. Переидем от размерных функций $\Pi^{(e)}(\vec{R}', \vec{R})$ и $\Pi^{(m)}(\vec{R}', \vec{R})$ к безразмерным $W^{(e)}$ и $W^{(m)}$ по формулам: $W^{(e)} = \frac{2\pi\epsilon_0}{P_0} \Pi^{(e)}$ и $W^{(m)} = -\frac{2\pi\mu_0}{P_0^{(m)}} \Pi^{(m)}$. В результате получим систему интегральных соотношений, которая определяет компоненты E_φ , H_φ , E_z и H_z электромагнитного поля электрического диполя в любой точке волноводной области через значения этих же компонентов и их производных $\frac{\partial}{r \partial \varphi}$ на граничных поверхностях:

$$E_z(r', \varphi', z') = E_z^0 + \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_{ip}} (\delta_{ip} - \delta_{i0}) W^{(e)} E_z dS + \\ + \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_{i\gamma}} W^{(e)} \left\{ (\delta_i - \delta_{i0}) E_z + \frac{i}{\omega\epsilon_0} H_\varphi \frac{\partial \delta_i}{\partial r} + \frac{i}{k} E_\varphi \frac{\partial \ln \delta_i}{r \partial \varphi} \right\} dS,$$

$$H_\varphi(r', \varphi', z') = H_\varphi^0 + \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_{ip}} (\delta_{ip} - \delta_{i0}) W^{(e)} H_\varphi dS - \quad (14)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint_{S_B} W^{(e)} \frac{\partial H_z}{r \partial \varphi} dS + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_i} W^{(e)} \frac{\partial H_z}{r \partial \varphi} dS,$$

$$H_z(r', \varphi', z') = \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_{ip}} (1/\delta_{ip} - 1/\delta_{i0}) W^{(m)} H_z dS + \\ + \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_{i\gamma}} W^{(m)} \left\{ \left(\frac{1}{\delta_i} - \frac{1}{\delta_{i0}} \right) H_z + \frac{E_\varphi}{i\omega\mu_0} \frac{\partial(1/\delta_i)}{\partial r} + \frac{i}{k} H_\varphi \frac{\partial \ln(1/\delta_i)}{r \partial \varphi} \right\} dS,$$

$$E_\varphi(r', \varphi', z') = \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_{ip}} (1/\delta_{ip} - 1/\delta_{i0}) W^{(m)} E_\varphi dS - \\ - \frac{1}{2\pi} \iint_{S_B} W^{(m)} \frac{\partial E_z}{r \partial \varphi} dS + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_i} W^{(m)} \frac{\partial E_z}{r \partial \varphi} dS.$$

Использование двух функций Грина $W^{(e)}$ и $W^{(m)}$ позволяет в некоторых интегралах сократить область интегрирования с бесконечной до конечной области S_{ip} и $S_{i\gamma}$ — непосредственно области локальной неоднородности. Будем считать $S_{i\gamma}$ достаточно узкой (допустим, шириной d) и содержащей линейный контур γ , по которому будет проходить граница между S_{i0} и S_{ip} , если рассмотреть предел при $d \rightarrow 0$. Введем локальную систему координат (l, n) , где координата \vec{l} направлена по касательной к γ , а \vec{n} — направлена по нормали в каждой данной точке γ . Будем считать, что функция $\delta_i = \delta_i(l, n)$ в этой области меняется только по направлению нормали, т. е. только при движении от внешней границы S_{ig} к ее внутренней границе, что значит:

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial l} = 0. \quad (15)$$

Если уравнение кривой, описывающей контур γ может быть записано в виде $r = r(\varphi)$, то переходя от координат (r, φ) к переменным (l, n) и проектируя производные $\frac{\partial}{\partial r}$ и $\frac{\partial}{r \partial \varphi}$ на направления \vec{l} и \vec{n} , можно получить:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \left[\frac{\partial}{\partial l} + A \frac{\partial}{\partial n} \right]; \quad \frac{\partial}{r \partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \left[-A \frac{\partial}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial n} \right],$$

где $A = r/r'_\varphi$. Тогда элемент поверхности в координатах (l, n) запишется в виде: $dS = dl dn$. Учитывая (15), можно провести в области S_{ip} интегрирование по dn и, устремляя ширину переходной области к нулю ($d \rightarrow 0$), получить вместо двумерного интеграла по области S_{ip} линейный по граничному контуру γ области возмущения S_{ip} . В результате таких преобразований соотношения для E_z и H_z примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 E_z(r', \varphi', z') &= E_z^0 + \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_{ip}} (\delta_{ip} - \delta_{i0}) W^{(e)}(\vec{R}', \vec{R}) E_z(\vec{R}) dS - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \left\{ Z_0 (\delta_{ip} - \delta_{i0}) \int_{\gamma} W^{(e)}(\vec{R}', l) H_\varphi(l) \frac{A(l) dl}{\sqrt{1 + A^2(l)}} + \right. \\
 &\quad \left. + (\ln \delta_{ip} - \ln \delta_{i0}) \int_{\gamma} W^{(e)}(\vec{R}', l) E_\varphi(l) \frac{dl}{\sqrt{1 + A^2(l)}} \right\}, \\
 H_z(r', \varphi', z') &= \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_{ip}} (1/\delta_{ip} - 1/\delta_{i0}) W^{(m)}(\vec{R}', \vec{R}) H_z(\vec{R}) dS + \quad (16) \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{Z_0} \left(\frac{1}{\delta_{ip}} - \frac{1}{\delta_{i0}} \right) \int_{\gamma} W^{(m)}(\vec{R}', l) E_\varphi(l) \frac{A(l) dl}{\sqrt{1 + A^2(l)}} + \right. \\
 &\quad \left. + (\ln \delta_{ip} - \ln \delta_{i0}) \int_{\gamma} W^{(m)}(\vec{R}', l) H_\varphi(l) \frac{dl}{\sqrt{1 + A^2(l)}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Важно, что часть двумерных интегралов из правой части (14) удалось преобразовать в линейные вдоль контура γ возмущенной области S_{ip} .

До сих пор речь шла об интегральных соотношениях, а не уравнениях, т. е. предполагалось, что источник и точка наблюдения (r', φ', z') располагаются внутри волноводной области и не могут принадлежать граничным поверхностям, интегралы по которым и стоят в правых частях (14). Уточним, что находящиеся под знаком интеграла функции E_j и H_j ($j = \varphi, z$) есть значения на S компонентов электромагнитного поля источника, который находится на S не может, т. е. во всех случаях — это непрерывные, ограниченные функции. Другое дело функции Грина $W^{(e)}$ и $W^{(m)}$. Это функции пропорциональные полю δ -образного источника, расположенного на импедансной поверхности. В окрестности $r_l \rightarrow 0$, где $r_l = |\vec{R}' - \vec{R}|$ при $z = z'$, они имеют особенность и ведут себя (5),

(6) как: $W^{(e)}(\vec{R}', \vec{R}) \sim W^{(m)}(\vec{R}', \vec{R}) \sim \frac{e^{ikr_l}}{r_l}$. Для поверхностных интегралов эта особенность является интегрируемой и особого рассмотрения не требует. Если же мы обратимся к линейным интегралам из (16), то их сходимость в окрестности $r_l \rightarrow 0$ не выглядит столь очевидной. Вернемся к исходной для (16) системе (14), к интегралам по $S_{i\gamma}$. Для членов не содержащих производных импеданса по поперечным координатам вопросов не возникает, рассмотрим подробнее члены, содержащие производные $\frac{\partial \delta_i(r, \varphi)}{\partial r}$ и $\frac{\partial \delta_i(r, \varphi)}{r \partial \varphi}$. При стремлении к нулю ширины области $S_{i\gamma}$, отмеченные производные будут стремиться к δ -функции, но интегралы и в этом случае будут сходиться. Однако, значения этих интегралов по $S'_{i\gamma}$ — сколь угодно малой окрестности \vec{R}' , будут иметь конечные, отличные от нуля значения при стремлении диаметра этой окрестности к нулю. Мы оценим эти значения, переходя от переменных (r, φ) к локальным переменным (l, n) и считая, что $\delta_i(r, \varphi)$ изменяется в $S'_{i\gamma}$ по закону $\delta_i(l, n) = \frac{\delta_{ip} + \delta_{i0}}{2} + \frac{\delta_{ip} - \delta_{i0}}{d} n$, т. е. $\frac{\partial \delta_i}{\partial n} = \frac{\delta_{ip} - \delta_{i0}}{d}$, и рассматривая затем пределы при $d \rightarrow 0$ соответствующих членов в уравнениях для E_z и H_z . В результате можно утверждать следующее, что, если в (16) в уравнение для E_z добавить выражение:

$$-\frac{1}{\sqrt{1 + A^2(\vec{R}')}} \times \times \left\{ (\delta_{ip} - \delta_{i0}) Z_0 H_\varphi(\vec{R}') A(\vec{R}') + E_\varphi(\vec{R}') \arcsin \frac{2(\delta_{ip} - \delta_{i0})}{(\delta_{ip} + \delta_{i0})} \right\}, \quad (17)$$

а в уравнение для H_z :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + A^2(\vec{R}')}} \left\{ H_\varphi(\vec{R}') \arcsin \frac{2(\delta_{ip} - \delta_{i0})}{(\delta_{ip} + \delta_{i0})} - 4 \frac{E_\varphi(\vec{R}')}{Z_0} A(\vec{R}') \frac{(\delta_{ip} - \delta_{i0})}{(\delta_{ip} + \delta_{i0})^2} \left[1 - 4 \frac{(\delta_{ip} - \delta_{i0})^2}{(\delta_{ip} + \delta_{i0})^2} \right]^{-1/2} \right\}, \quad (18)$$

и линейные интегралы вдоль γ понимать в окрестности $r_l \rightarrow 0$ в смысле главного значения (V.P.), то (16), вместе с уравнениями для E_φ и H_φ из (14) будет системой интегральных уравнений, в том смысле, что искомые функции в правых и левых частях указанных выражений будут иметь одну и ту же область определения, принадлежащую поверхности S .

Используя разработанную ранее методику [2], преобразуем асимптотически по $kr' \gg 1$ с точностью до членов $O(1/kr')$ остающиеся в (14) и (16) поверхностные интегралы, в линейные вдоль проекции на S линии, соединяющие источник и приемник (линия трассы), и вдоль контура γ неоднородности S_{ip} . Для этого перейдем от уравнений для компонентов поля к уравнениям для функций ослабления, выделяя в искомых функциях и функциях Грина быстроосциллирующие множители, описывающие поле диполя над идеально проводящей плоскостью:

$$E_z(\vec{R}) = \frac{k^2 P_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} W_{EZ}(\vec{R}), \quad H_\varphi(\vec{R}) = -\frac{k^2 P_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{Z_0} \frac{e^{ikr}}{r} W_{H\Phi}(\vec{R}),$$

$$H_z(\vec{R}) = \frac{k^2 P_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{Z_0} \frac{e^{ikr}}{r} W_{HZ}(\vec{R}), \quad E_\varphi(\vec{R}) = -\frac{k^2 P_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} W_{E\Phi}(\vec{R}),$$

$$W^{(\epsilon)}(\vec{R}', \vec{R}) = \frac{e^{ikr_l}}{r_l} V^{(\epsilon)}(\vec{R}', \vec{R}), \quad W^{(m)}(\vec{R}', \vec{R}) = \frac{e^{ikr_l}}{r_l} V^{(m)}(\vec{R}', \vec{R}).$$

Отметим, что в плоскости $z = z_0$ при r или $r_l \rightarrow 0$, определенные таким образом функции ослабления ведут себя по разному: $W_{EZ}|_{r \rightarrow 0} \sim (kr)^{-2}$, $W_{H\Phi}|_{r \rightarrow 0} \sim (kr)^{-1}$, W_{HZ} и $W_{E\Phi}|_{r \rightarrow 0} \rightarrow 0$ быстрее, чем r , $V^{(\epsilon)}$ и $V^{(m)}|_{r_l \rightarrow 0} \rightarrow 1$. Введем в горизонтальной плоскости $z = \text{const}$ эллиптические координаты (u, v) :

$$\begin{aligned} r &= \frac{r'}{2} (\operatorname{ch} u + \cos v), & r_l &= \frac{r'}{2} (\operatorname{ch} u - \cos v), \\ x &= \frac{r'}{2} (\operatorname{ch} u \cos v), & y &= \frac{r'}{2} (\operatorname{sh} u \sin v), \\ dS &= r_l r du dv, & -\infty < u < \infty; \quad 0 \leq v \leq \pi. \end{aligned}$$

В результате будем иметь два типа поверхностных интегралов, первый:

$$I_1 = \iint_{S_{ip}} e^{ikr'(\operatorname{ch} u - l)} V^{(\epsilon, m)}(\vec{R}', \vec{R}) W_{\alpha\beta}(\vec{R}) du dv, \quad \alpha = E, H; \quad \beta = z, \varphi$$

по пространственно ограниченной области S_{ip} , и второй:

$$I_2 = \iint_{S_{B,I}} e^{ikr'(\operatorname{ch} u - l)} V^{(\epsilon, m)}(\vec{R}', \vec{R}) \frac{\partial W_{\alpha Z}(\vec{R})}{kr \partial \varphi} du dv$$

в бесконечных пределах по u , и от 0 до π по v . Наличие большого параметра $kr' \gg 1$ позволяет считать функции $V^{(\epsilon,m)}(\vec{R}', \vec{R}) W_{\alpha\beta}(\vec{R}) = f_{\alpha\beta}^{(\epsilon,m)}(u, v)$ и $V^{(\epsilon,m)}(\vec{R}', \vec{R}) \frac{\partial W_{\alpha Z}(\vec{R})}{kr \partial \varphi} = F_{\alpha Z}^{(\epsilon,m)}(u, v)$ медленно меняющимися по u (в направлении поперек линии трассы) на фоне $e^{ikr'(\text{ch } u - 1)}$ и воспользоваться для вычисления интеграла по u методом стационарной фазы. Вычисления проведем с точностью до членов порядка $O(1/kr')$, отбрасывая члены следующего порядка малости $O((kr')^{-3/2})$. Отсылая за подробностями к [2], запишем результат:

$$I_1 \approx \frac{-i}{\sqrt{2kr'}} \oint_{\gamma} \exp ikr'(\text{ch } u(v) - 1) G_{\alpha\beta}^{(\epsilon,m)}(u(v), v) [1 + O(1/kr')] dv, \quad (19)$$

$$I_2 \approx \frac{\pi \sqrt{2} e^{i\pi/4}}{\sqrt{kr'}} \int_0^{\pi} F_{\alpha Z}^{(\epsilon,m)}(0, v) [1 + O(1/kr')] dv, \quad (20)$$

где

$$G_{\alpha\beta}^{(\epsilon,m)}(u(v), v) = \sqrt{\pi} e^{i3\pi/4} f(0, v) w(e^{i\pi/4} p) + \frac{1}{p} \left[f(0, v) - \frac{f(u(v), v)}{\text{ch}(u(v)/2)} \right],$$

$$f(u, v) \Rightarrow f_{\alpha\beta}^{(\epsilon,m)}(u, v), \quad p = \sqrt{2kr'} \sh \frac{u(v)}{2},$$

а функция $w(x) = e^{-x^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt \right)$ называется обычно интегралом вероятностей комплексного аргумента [13], функция $u(v)$ — описывает в эллиптических координатах границу γ области S_{ip} . Формулы (19) и (20) показывают, что с точностью до членов порядка $O(1/kr')$, поведение интегралов определяется поведением $f_{\alpha\beta}^{(\epsilon,m)}$ и $F_{\alpha Z}^{(\epsilon,m)}$ на двух линейных многообразиях: во-первых, на проекции на плоскость S_E (или S_I) линии трассы ($u = 0$) и, во-вторых, для $f_{\alpha\beta}^{(\epsilon,m)}$, на линии γ , описывающей границу неоднородности. Интеграл в формуле (19) — криволинейный интеграл 2-го типа по плоской замкнутой кривой. Контур интегрирования обходится по часовой стрелке. Отметим два обстоятельства, во-первых, когда S_{ip} представляет собой полуплоскость (например, в задаче о береговой рефракции, неоднородность на земной стенке волновода) γ по-прежнему есть граница между различными средами, только в этом случае бесконечная и незамкнутая. Как показано в [14] для такой задачи, если при

данном положении источника и точки наблюдения γ совпадает с координатной линией $v = \text{const}$, то вклада в I_1 она не дает. И, второе, интеграл по v в (20) может быть преобразован в интеграл с переменным верхним пределом:

$$\int_0^{\pi} F(0, v) dv = \int_0^{r'} \frac{F(0, v(r))}{\sqrt{r(r' - r)}} dr.$$

Суммируя все сказанное, запишем окончательно систему одномерных интегральных уравнений, определяющих функции ослабления компонентов электромагнитного поля в любой точке волноводной области D , ограниченной поверхностями S_E и S_I , содержащими неоднородность S_{ip} с линейной границей γ

$$\begin{aligned} W_{EZ}(\vec{R}') &= W_{EZ}^0 + \frac{\delta_{ip} - \delta_{i0}}{2\pi} \sqrt{\frac{kr'}{2}} \oint_{\gamma} \exp ikr' (\operatorname{ch} u(v) - 1) G_{EZ}^{(e)}(u(v), v) dv + \\ &+ \frac{r'}{2\pi} \left\{ (\delta_{ip} - \delta_{i0}) \int_{\gamma} B f_{H\Phi}^{(e)}(\vec{R}', l) \frac{A(l) dl}{\sqrt{1 + A^2(l)}} + \right. \\ &+ (\ln \delta_{ip} - \ln \delta_{i0}) \int_{\gamma} B f_{E\Phi}^{(e)}(\vec{R}', l) \frac{dl}{\sqrt{1 + A^2(l)}} \Big\} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2(\vec{R}')}} \times \\ &\times \left\{ (\delta_{ip} - \delta_{i0}) W_{H\Phi}(\vec{R}') A(\vec{R}') + W_{E\Phi}(\vec{R}') \arcsin \frac{2(\delta_{ip} - \delta_{i0})}{(\delta_{ip} + \delta_{i0})} \right\}_{R' \in \gamma}, \end{aligned}$$

$$W_{H\Phi}(\vec{R}') = W_{H\Phi}^0 + \frac{(\delta_{ip} - \delta_{i0})}{2\pi} \sqrt{\frac{kr'}{2}} \oint_{\gamma} \exp ikr' (\operatorname{ch} u(v) - 1) G_{H\Phi}^{(e)}(u(v), v) dv +$$

$$+ e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{kr'}{2}} \left\{ \int_0^{\pi} F_{HZ}^{(e)}(0, v) \Big|_{v \in S_B} dv - \int_0^{\pi} F_{HZ}^{(e)}(0, v) \Big|_{v \in S_I} dv \right\},$$

$$\begin{aligned} W_{HZ}(\vec{R}') &= \frac{(1/\delta_{ip} - 1/\delta_{i0})}{2\pi} \sqrt{\frac{kr'}{2}} \oint_{\gamma} \exp ikr' (\operatorname{ch} u(v) - 1) G_{HZ}^{(m)}(u(v), v) dv - \\ &- \frac{r'}{2\pi} \left\{ (1/\delta_{ip} - 1/\delta_{i0}) \int_{\gamma} B f_{E\Phi}^{(m)}(\vec{R}', l) \frac{A(l) dl}{\sqrt{1 + A^2(l)}} + \right. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 & + (\ln \delta_{ip} - \ln \delta_{i0}) \int_{\gamma} B f_{H\Phi}^{(m)}(\vec{R}', l) \frac{dl}{\sqrt{1 + A^2(l)}} \Biggr\} - \\
 & - \frac{1}{\sqrt{1 + A^2(\vec{R}')}} \left\{ W_{H+}(\vec{R}') \arcsin \frac{2(\delta_{ip} - \delta_{i0})}{(\delta_{ip} + \delta_{i0})} - \right. \\
 & \left. - 4A(\vec{R}') W_{E+}(\vec{R}') \frac{(\delta_{ip} - \delta_{i0})}{(\delta_{ip} + \delta_{i0})^2} \left[1 - 4 \frac{(\delta_{ip} - \delta_{i0})^2}{(\delta_{ip} + \delta_{i0})^2} \right]^{-1/2} \right\}_{\vec{R}' \in \gamma}, \\
 W_{E\Phi}(\vec{R}') = & \frac{1/\delta_{ip} - 1/\delta_{i0}}{2\pi} \sqrt{\frac{kr'}{2}} \oint_{\gamma} \exp ikr' (\operatorname{ch} u(v) - 1) G_{E\Phi}^{(m)}(u(v), v) dv + \\
 & + e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{kr'}{2}} \left\{ \int_0^\pi F_{EZ}^{(m)}(0, v) \Big|_{v \in S_B} dv - \int_0^\pi F_{EZ}^{(m)}(0, v) \Big|_{v \in S_I} dv \right\}, \\
 B = & \frac{e^{ik(r_l + r - r')}}{rr_l}, \quad r = r(\varphi).
 \end{aligned}$$

Что нового вносит учет векторного характера взаимодействующего с локальной неоднородностью поля? Во-первых, единственное уравнение, которое было в скалярном случае, мы вынуждены заменять на систему уравнений (21), связывающую компоненты поля, отвечающие различным поляризациям. В дальнейшем это позволит оценить степень деполяризации поля при рассеянии на трехмерных неоднородностях. Во-вторых, если обратиться, например, к уравнению для E_z , которое можно получить и в скалярном случае [2] из уравнения для $\Pi^{(e)}$, то в векторной его форме в правой части появляются дополнительные члены, пропорциональные производным импеданса по r и φ . Порядок этих дополнительных членов не ниже $O(1/kr')$, т. е. не ниже, чем порядок членов описывающих влияние границы в скалярном случае [2]. Мы считаем, что система уравнений (21) максимально подготовлена для проведения в дальнейшем численных исследований. Двумерные интегралы асимптотически с высокой точностью (до членов порядка $O(1/kr')$) преобразованы к одномерным интегралам. Выделены и аналитически сосчитаны интегралы по окрестностям особенностей подынтегральных функций, что должно экономить ресурсы ЭВМ и уменьшить трудности при проведении численных расчетов. Решение по-

лученной системы уравнений предполагается проводить с помощью разработанного ранее [15] численно-аналитического метода, суть которого состоит в обращении основной части матричного интегрального оператора (21), содержащей только функции $W_{\alpha\beta}^{(e,m)}(0, v)$, и в поэтапном уточнении значений искомых функций $W_{\alpha\beta}^{(e,m)}(u(v), v)$ на границе неоднородности γ . В отличие от скалярного варианта, в данном, итерационный процесс состоит как бы из двух этапов: это уточнение значений искомых функций на границах неоднородности, начиная с нулевого приближения в виде скалярных значений поля, с заменой последних в следующих итерациях на получаемые векторные. Ввиду громоздкости и сложности представленной системы уравнений (21), описанию возможного ее решения и анализу результатов оценки влияния конкретной неоднородности одной из стенок волновода, мы посвятим отдельную статью.

Автор благодарит В. В. Кириллова и В. В. Новикова за полезные обсуждения результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (93-02-17048).

ЛИТЕРАТУРА

- Гоков А. М., Гритчин А. И., Капанин И. И. и др. XVII Конференция по распространению радиоволн. Тез. докл. Секции 6, 7, 8. — Ульяновск, 1993. С. 65.
- Соловьев О. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1990. Т. 33. № 9. С. 1078.
- Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. — М.: Наука, 1961. 546 с.
- Николаенко А. П. // Изв. вузов. Радиофизика, 1984. Т. 27. № 10. С. 1227.
- Николаенко А. П. // Изв. вузов. Радиофизика, 1990. Т. 33. № 1. С. 12.
- Соловьев О. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1987. Т. 30. № 11. С. 1321.
- Леонтович М. А. В кн: Исследования по распространению радиоволн. Сб. 2. — М.: Изд. АН СССР, 1948. С. 5.

8. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма — М., Л.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1948. 539 с.
9. Фок В. А. В кн: Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М., 1970.
10. Senior T. B. A., Volakis J. L. // Proc. IEEE, 1991. V. 79. N 10. P. 1413.
11. Pazynin L. A. Proc. of the International Conference on Math. Methods in Electromagnetic Theory. 7–10 sept. — Kharkov, 1994. P. 290.
12. Макаров Г. И., Созонов А. П. // Вестник ЛГУ, 1985. N 25. С. 85.
13. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. — М.: Наука, 1979.
14. Соловьев О. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. N 2. С. 37.
15. Agarov V. V., Soloviev O. V. // Proc. of the International Conference on Math. Methods in Electromagnetic Theory. 7–10 sept. — Kharkov, 1994. P. 1.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
15 марта 1995 г.

**ON THE SOLUTION OF THE VECTOR THREE-DIMENSIONAL
LOCALLY-IRREGULAR WAVEGUIDE PROBLEM**

O. V. Soloviev

The vector three-dimensional problem of the point source field in a parallel plane waveguide with a large-scale three-dimensional (3D) irregularity on one of its walls is investigated. In order to account for the depolarization of electromagnetic field scattered by the 3D irregularity we have used the Leontovich's inhomogeneous boundary condition and obtained the system of coupled integral equations taking into account the irregular surface. An asymptotic approach to convert the surface integrals into the integrals along the transmitter-receiver line and the contour of impedance discontinuity has been developed and justified.

УДК 681.07.068

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОДНОМОДОВЫХ СВЕТОВОДАХ

А. В. Листвин, В. Н. Листвин

Выполнен статистический анализ амплитудных коэффициентов передачи анизотропных одномодовых световодов со случайными нерегулярностями. Показано, что амплитуда излучения, перекаченного в ортогональную поляризационную моду световода, распределена по рэлеевскому закону, среднее значение перекаченной мощности и ее стандартное отклонение равны отношению длины световода к длине сохранения состояния поляризации излучения. Проведенный анализ позволил сформулировать математическую основу методов измерения статистических характеристик нерегулярностей световодов с помощью когерентных источников излучения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует много перспективных областей применения одномодовых волоконных световодов, где существенно состояние поляризации излучения в световоде или на его выходе. В волоконно-оптических устройствах, в которых используются эффект Фарадея, нелинейные эффекты и интегрально-оптические элементы, необходимо, чтобы состояние поляризации излучения изменялось вдоль световода регулярным образом. Однако, в реальных световодах присутствуют неоднородности, возникающие неконтролируемым образом, как при изготовлении световода, так и при укладке их в кабель или контур. Если длина световода достаточно велика, то, как показывает опыт, суммарное воздействие даже относительно малых неоднородностей приводит к тому, что эволюцию состояния поляризации излучения вдоль световода уже нельзя полагать регулярной. Влиянием этих неоднородностей можно объяснить

дрейф нуля в волоконно-оптических гироскопах, флуктуации масштабного коэффициента в датчиках тока, замирания сигнала в линиях связи и поляризационные ошибки во многих других волоконно-оптических системах (см., напр., обзоры [1, 2]).

При рассмотрении статистических характеристик коэффициента передачи монохроматического излучения в волоконных световодах нужно иметь в виду следующую особенность, отличающую их от открытых линий передачи. В последних, коэффициент передачи изменяется во времени, как правило, достаточно быстро, так, что не имеет смысла говорить о его значении в данный момент времени, а достаточно знания его среднего значения и дисперсии. В световоде же зависимость от времени как бы заморожена, и неоднородности световода являются случайными не во времени, а по его длине. В результате состояние поляризации излучения на выходе световода изменяется случайным образом не во времени, а от образца к образцу. Для фиксированного образца вариации состояния поляризации во времени возникают при изменении его двулучепреломления, чаще всего, из-за вариаций температуры световода или частоты источника излучения.

При широкополосном источнике излучения, время когерентности которого значительно меньше разности групповых запаздываний поляризационных мод световода, часто можно ограничиться знанием среднего значения его коэффициента передачи. На этом основан, так называемый, метод спектрального усреднения [2], используемый для измерения длины сохранения состояния поляризации излучения. При когерентном источнике излучения и фиксированной температуре световода, состояние поляризации специфично для каждого образца световода. Для анализа результатов измерения параметров поляризационной анизотропии нерегулярных одномодовых световодов с помощью когерентных источников излучения [3], расчета помехозащищенности волоконно-оптических линий связи [4] и поляризационных ошибок в волоконно-оптическом гироскопе [5], знания среднего значения коэффициента передачи явно недостаточно. Здесь требуется более полное статистическое описание светового поля с использованием распределения вероятности.

В нашей работе исследуются статистические характеристики коэффициента передачи излучения, распространяющегося в анизотропных одномодовых световодах на длинах меньше длины сохранения состояния поляризации излучения. В этом приближении комплексная амплитуда волны в световоде рассчитывается методом возмущений, а ее статистические характеристики находятся исходя из предположения, что процесс преобразования поляризационных мод на нерегулярностях световода представляет собой некоторое микроскопическое явление, проявляющее нормальные статистические свойства при рассмотрении его с макроскопической точки зрения.

2. МАТРИЦА ДЖОНСА НЕРЕГУЛЯРНОГО СВЕТОВОДА

Будем полагать, что в одномодовом световоде распространяется только основная пространственная мода HE_{11} , а доля мощности передаваемая с помощью оболочечных мод пренебрежимо мала. В этом приближении нерегулярности световода приводят только к появлению случайной связи между сонаправленными собственными модами регулярного световода сравнения [6, 7]. Поэтому, в нерегулярном одномодовом световоде электромагнитное поле в произвольном сечении z может быть разложено всего лишь по двум поляризационным модам, взятым с некоторыми комплексными амплитудами A_1 и A_2 .

Комплексные амплитуды волн $\vec{A}(z, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, распространяющихся в световоде с медленно меняющимися нерегулярностями, можно найти при решении системы уравнений связанных волн [6]:

$$\frac{d}{dz} \vec{A}(z, \beta_1, \beta_2) = i \hat{\eta}(z, \beta_1, \beta_2) \vec{A}(z, \beta_1, \beta_2), \quad (1)$$

где β_1, β_2 — постоянные распространения нормальных мод. Для регулярного световода эта система уравнений выводится непосредственно из уравнений Максвелла; для нерегулярного световода ее следует рассматривать как некий постулат [8].

При таком подходе матрицу коэффициентов $\hat{\eta}(z, \beta_1, \beta_2)$ целесообразно вводить также чисто феноменологически, тем более что величина и, в

особенности, взаимное расположение нерегулярностей световода не могут быть предсказаны заранее. В анизотропных световодах внешние воздействия вызывают, как правило, только относительно небольшие повороты осей двулучепреломления и не меняют, в первом приближении, его величины. То есть, нерегулярности световода могут быть однозначно представлены флуктуациями азимута осей его двулучепреломления. Эти флуктуации приводят к появлению случайной связи между нормальными модами регулярного световода сравнения с действительным коэффициентом $c(z, \beta_{21}) = \beta_{21}\theta(z)$, где $\beta_{21} = \beta_2 - \beta_1$ — разность постоянных распространения нормальных мод, $\theta(z)$ — азимут осей двулучепреломления [2].

Матрицу коэффициентов $\hat{\eta}(z, \beta_1, \beta_2)$ запишем в виде суммы:

$$\hat{\eta}(z, \beta_1, \beta_2) = \hat{\eta}_0(\beta_1, \beta_2) + \hat{V}(z, \beta_{21}), \quad (2)$$

где $\hat{\eta}_0(\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} -\beta_1, & 0 \\ 0, & -\beta_2 \end{pmatrix}$ — не зависящая от z матрица коэффициентов регулярного световода сравнения, $\hat{V}(z, \beta_{21}) = c(z, \beta_{21}) \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ — матрица, учитывающая нерегулярности световода.

Решение уравнения (1) будем искать как результат линейного преобразования:

$$\vec{A}(z, \beta_1, \beta_2) = \hat{U}(z, \beta_1, \beta_2) \vec{A}(0), \quad (3)$$

где $\hat{U}(z, \beta_1, \beta_2)$ — передаточная матрица (матрица Джонса) световода.

Все проблемы поляризационной оптики одномодовых световодов, в конечном счете, сводятся к построению их матрицы Джонса. Поэтому, решение уравнения (1) является центральной проблемой теории. Приближенное решение для короткого световода, длина которого меньше длины сохранения состояния поляризации распространяющегося в нем излучения, получим, разлагая матрицу Джонса $\hat{U}(z, \beta_1, \beta_2)$ в ряд по степеням матрицы $\hat{V}(z, \beta_{21})$. Во втором порядке теории возмущений она представляется в виде произведения двух унитарных матриц: диагональной матрицы регулярного световода сравнения и матрицы возмущения, учитывающей

влияние нерегулярностей световода:

$$\hat{U}(z, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} e^{-i\beta_1 z}, & 0 \\ 0, & e^{-i\beta_2 z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - p(z, \beta_{21}), & q(z, \beta_{21}) \\ -q^*(z, \beta_{21}), & 1 - p^*(z, \beta_{21}) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$q(z, \beta_{21}) = i \int_0^z c(t, \beta_{21}) e^{-i\beta_{21} t} dt, \quad (5)$$

$$p(z, \beta_{21}) = \int_0^z \int_0^t c(t, \beta_{21}) c(s, \beta_{21}) e^{-i\beta_{21}(t-s)} ds dt.$$

Диагональные элементы матрицы Джонса имеют смысл амплитудных коэффициентов передачи поляризационных мод, а недиагональные элементы — амплитудных коэффициентов передачи излучения в ортогональные поляризационные моды.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

Для определения статистических характеристик коэффициента передачи излучения в нерегулярном световоде необходимо дать соответствующее статистическое описание его матрицы Джонса. Представляется естественным допущение, что световоды изготовлены по одной и той же, достаточно устойчивой технологии, и статистические свойства нерегулярностей являются одними и теми же для различных световодов. В таких световодах не только коэффициент связи $c(z, \beta_{21})$ представляет собой стационарный случайный процесс, но и сами световоды в совокупности образуют статистически однородный ансамбль. Реально эксперименты проводятся не на ансамбле световодов, а на одном определенном световоде из этого ансамбля. Поэтому необходимо, чтобы число случайных реализаций сигнала, получаемых на эксперименте при изменении β_{21} из-за вариаций температуры световода или частоты источника излучения, было достаточно велико так, чтобы проходились практически всевозможные состояния, представляемые данным ансамблем. То есть предполага-

ется, что выполняется эргодическая гипотеза и свойства всего ансамбля световодов можно изучать на одном световоде.

Статистические характеристики коэффициента передачи излучения, распространяющегося в нерегулярном световоде, определяются через статистические характеристики элементов матрицы возмущения $p(z, \beta_{21})$ и $q(z, \beta_{21})$. В заданном сечении световода $z = \text{const}$ элементы $p(z, \beta_{21})$ и $q(z, \beta_{21})$ зависят только от аргумента β_{21} , поэтому для сокращения записи в дальнейшем будем опускать аргумент z в их обозначении.

3.1. Распределение вероятностей для действительной и мнимой частей $q(\beta_{21})$

При $z \gg l_k$, где l_k — длина корреляции случайных нерегулярностей, действительная $u(\beta_{21})$ и мнимая $v(\beta_{21})$ части $q(\beta_{21})$:

$$u(\beta_{21}) = \int_0^z c(t, \beta_{21}) \sin \beta_{21} t dt,$$
(6)

$$v(\beta_{21}) = \int_0^z c(t, \beta_{21}) \cos \beta_{21} t dt,$$

представляют собой “сумму” большого числа почти независимых слагаемых, и, поэтому, можно ожидать, что они будут распределены по нормальному (гауссовскому) закону. Приближенно гауссовское распределение плотности вероятности для действительной части $q(\beta_{21})$ наблюдалось экспериментально в работе [3]. Кроме того, так как при современной технологии изготовления световодов связь между поляризационными модами уменьшается вплоть до уровня определяемого анизотропией рэлеевского рассеяния [9], то можно ожидать, что и производящий случайный процесс $c(z, \beta_{21})$ будет распределен по нормальному закону. Это более сильное предположение, так как из условия, что $c(z, \beta_{21})$ — нормальный процесс, следует, что и интегралы от нормального процесса $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$ в (6), также распределены поциальному закону [10]. Однако, при этом из стационарности $c(z, \beta_{21})$ уже не следует, что случайные процессы $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$ будут стационарными.

Так как совместное распределение двух нормальных процессов также нормально [11], то для нахождения совместного распределения $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$ достаточно найти их средние значения, дисперсии и коэффициент корреляции.

Средние значения $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$. В силу стационарности коэффициента связи $c(z, \beta_{21})$ его среднее значение всегда может быть сделано равным нулю поворотом системы координат вокруг оси z . Из условия $\langle c(z, \beta_{21}) \rangle = 0$ получаем $\langle u(\beta_{21}) \rangle = \langle v(\beta_{21}) \rangle = 0$, где угловые скобки обозначают операцию усреднения на ансамбле световодов.

Дисперсии $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$. Возводя в квадрат выражения для $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$ в (6) и усредняя их на ансамбле световодов, получим:

$$\langle u^2(\beta_{21}) \rangle = \int_0^z \int_0^z \varphi(\tau) \sin \beta_{21} t \sin \beta_{21} s ds dt,$$
(7)

$$\langle v^2(\beta_{21}) \rangle = \int_0^z \int_0^z \varphi(\tau) \cos \beta_{21} t \cos \beta_{21} s ds dt,$$

где $\varphi(\tau) = \langle c(s) c(s + \tau) \rangle$ — функция корреляции коэффициентов связи. Сделав замену переменных $\tau = t - s$, $f = t + s$ и проинтегрировав по f , получим при $z \gg l_k$:

$$\langle u^2(\beta_{21}) \rangle = \frac{h(\beta_{21})}{2} \left[1 - O\left(\frac{1}{\beta_{21} z}\right) \cos \beta_{21} z \right],$$
(8)

$$\langle v^2(\beta_{21}) \rangle = \frac{h(\beta_{21})}{2} \left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_{21} z}\right) \cos \beta_{21} z \right],$$

где

$$\begin{aligned} O\left(\frac{1}{\beta_{21} z}\right) &= \frac{1}{\beta_{21} z} \left(\sin \beta_{21} z - \frac{h_s(\beta_{21})}{h(\beta_{21})} \cos \beta_{21} z \right), \\ h_s(\beta_{21}) &= 2 \int_0^z \varphi(\tau) \sin \beta_{21} \tau d\tau, \\ h(\beta_{21}) &= 2 \int_0^z \varphi(\tau) \cos \beta_{21} \tau d\tau. \end{aligned}$$
(9)

Вследствие ограниченности интервала корреляции, интегрирование в выражении для $h(\beta_{21})$ можно распространить до бесконечности и рассматривать $h(\beta_{21})$ как спектральную плотность коэффициента связи. С другой стороны, из (8) находим, что:

$$\frac{1}{z} \left\langle |q(\beta_{21})|^2 \right\rangle = \frac{1}{z} \left[\left\langle u^2(\beta_{21}) \right\rangle + \left\langle v^2(\beta_{21}) \right\rangle \right] = h(\beta_{21}), \quad (10)$$

т.е. $h(\beta_{21})$ имеет смысл погонного коэффициента передачи излучения в ортогональную поляризационную моду. В волоконной оптике для $h(\beta_{21})$ установленлся термин: параметр сохранения состояния поляризации излучения — величина обратная длине сохранения состояния поляризации излучения, распространяющегося в световоде [2].

Различными экспериментальными методами [1, 2] было показано, что зависимость параметра h от β_{21} хорошо аппроксимируется распределением Коши. Такое же распределение для $h(\beta_{21})$ можно получить, предположив, что гауссовский случайный процесс $c(z, \beta_{21})$ — простой марковский. Тогда, в силу теоремы Дуба [10], его функция корреляции и, соответственно, спектральная плотность коэффициента связи имеют вид:

$$\varphi(\tau) = \left\langle c^2(z, \beta_{21}) \right\rangle \exp \left(-\frac{|\tau|}{l_x} \right), \quad (11)$$

$$h(\beta_{21}) = \frac{h_0}{1 + (\beta_{21} l_x)^2}, \quad h_s(\beta_{21}) = \frac{h_0 \beta_{21} l_x}{1 + (\beta_{21} l_x)^2}.$$

Для того, чтобы случайные процессы $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$ были стационарными, достаточно, чтобы их дисперсии и коэффициенты автокорреляции зависели лишь от разности $\delta\beta_{21}$. При $z \gg l_b$, где $l_b = \frac{2\pi}{\beta_{21}}$ — длина биений поляризационных мод, дисперсии $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$ равны:

$$\left\langle u^2(\beta_{21}) \right\rangle = \left\langle v^2(\beta_{21}) \right\rangle = \frac{h(\beta_{21})}{2} = \frac{h_0}{2(1 + (\beta_{21} l_x)^2)}.$$

Поэтому, их можно считать приближенно независящими от β_{21} при дополнительном ограничении $l_b \gg l_x$ или, когда мал диапазон изменения β_{21} . Первое условие выполняется для всех практически достижимых значений β_{21} в предельном случае, когда случайная связь между поляризационными

модами обусловлена только анизотропией рэлеевского рассеяния [9]. Второе условие накладывает ограничение на минимальную длину световода в методе спектрального усреднения [2].

Коэффициенты автокорреляции $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$. Расчет, аналогичный приведенному выше, показывает, что при $z \gg l_6$ коэффициенты автокорреляции

$$\rho_u = \frac{\langle u(\beta_{21}) u(\beta_{21} + \delta\beta_{21}) \rangle}{\langle u^2(\beta_{21}) \rangle^{1/2} \langle u^2(\beta_{21} + \delta\beta_{21}) \rangle^{1/2}} \text{ и } \rho_v = \frac{\langle v(\beta_{21}) v(\beta_{21} + \delta\beta_{21}) \rangle}{\langle v^2(\beta_{21}) \rangle^{1/2} \langle v^2(\beta_{21} + \delta\beta_{21}) \rangle^{1/2}}$$

зависят только от приращения $\delta\beta_{21}$:

$$\rho_u = \rho_v = \frac{\sin \delta\beta_{21} z}{\delta\beta_{21} z}. \quad (12)$$

Таким образом, $z \gg l_6 \gg l_k$ случайные процессы $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$ приближенно стационарны. Из (12) следует также, что смена реализаций $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$ происходит при $\delta\beta_{21} z \approx \pi$, что хорошо согласуется с экспериментальными результатами [3].

Коэффициент корреляции $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$ имеет вид:

$$\rho_{uv} = \frac{\langle u(\beta_{21}) v(\beta_{21}) \rangle}{\langle u^2(\beta_{21}) \rangle^{1/2} \langle v^2(\beta_{21}) \rangle^{1/2}} = O\left(\frac{1}{\beta_{21} z}\right) \sin \beta_{21} z. \quad (13)$$

При $z \gg l_6$ величина ρ_{uv} мала и, следовательно, стационарные нормальные процессы $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$ статистически независимы.

Совместная плотность распределения комплексного нормального случайного процесса $q(\beta_{21})$, при $\langle u(\beta_{21}) \rangle = \langle v(\beta_{21}) \rangle = 0$, $\rho_{uv} = 0$, и $\langle u^2(\beta_{21}) \rangle = \langle v^2(\beta_{21}) \rangle = \frac{h(\beta_{21})}{2}$ имеет вид:

$$P(q(\beta_{21})) = \frac{1}{\pi h(\beta_{21}) z} \exp \left\{ -\frac{u^2(\beta_{21}) + v^2(\beta_{21})}{h(\beta_{21}) z} \right\}. \quad (14)$$

С ее помощью, переходя к полярным координатам $u(\beta_{21}) = |q(\beta_{21})| \cos \psi$ и $u(\beta_{21}) = |q(\beta_{21})| \sin \psi$, находим, что $|q(\beta_{21})|$ распределен по рэлеевскому закону, а фаза распределена однородно на интервале $(-\pi; \pi)$.

3.2. Статистические характеристики $p(\beta_{21})$

Преобразуем $p(\beta_{21})$ к виду более удобному для статистического анализа. Расширяя область интегрирования в выражении для $p(\beta_{21})$ до квадрата и учитывая, что интегралы по образующим его треугольникам являются комплексно сопряженными величинами, получаем для вещественной и мнимой частей $p(\beta_{21})$ выражения:

$$\operatorname{Re} p(\beta_{21}) = \frac{1}{2} |q(\beta_{21})|^2, \quad (15)$$

$$\operatorname{Im} p(\beta_{21}) = \int_0^z \int_0^z c(t) c(s) \cos \beta_{21} t \sin \beta_{21} s \operatorname{sign}(t-s) ds dt,$$

где $\operatorname{sign}(t-s) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > s \\ -1, & \text{при } t < s \end{cases}$. Среднее значение фазы $\operatorname{Im} p(\beta_{21})$ равно $\frac{h_s(\beta_{21})z}{2}$ и стремится к нулю, как видно из (11) при $l_b \gg l_k$, а дисперсия фазы при этом стремится к $\frac{(h(\beta_{21})z)^2}{2}$.

Закон распределения для фазы при $z \gg l_k$ приближенно совпадает с законом распределения произведения двух независимых нормальных процессов $u(\beta_{21})$ и $v(\beta_{21})$. Проводя необходимые математические расчеты, находим:

$$P(u(\beta_{21}) v(\beta_{21})) = \frac{2}{\pi h(\beta_{21})z} K_0 \left(2 \frac{|u(\beta_{21}) v(\beta_{21})|}{h(\beta_{21})z} \right), \quad (16)$$

где $K_0 \left(2 \frac{|u(\beta_{21}) v(\beta_{21})|}{h(\beta_{21})z} \right)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода, нулевого порядка. При этом $\langle u(\beta_{21}) v(\beta_{21}) \rangle = 0$, а $\langle u^2(\beta_{21}) v^2(\beta_{21}) \rangle = \frac{(h(\beta_{21})z)^2}{2}$.

Первое соотношение в (15) (оно также следует из унитарности матрицы Джонса) позволяет рассчитать статистические характеристики амплитудного коэффициента затухания $\frac{1}{z} \operatorname{Re} p(\beta_{21})$, исходя из статистических характеристик для модуля $q(\beta_{21})$.

Коэффициент автокорреляции $\rho |q(\beta_{21})|^2$, как и коэффициенты автокорреляции ρ_u и ρ_v , зависит при $z \gg l_x$ только от $\delta\beta_{21}$:

$$\rho |q(\beta_{21})|^2 = \frac{\sin^2 \delta\beta_{21} z}{(\delta\beta_{21} z)^2}. \quad (17)$$

Плотность распределения $|q(\beta_{21})|^2$, учитывая, что $|q(\beta_{21})|$ отвечает рэлеевская плотность распределения, имеет вид:

$$P(|q(\beta_{21})|^2) = \frac{1}{h(\beta_{21})z} \exp \left\{ -\frac{|q(\beta_{21})|^2}{h(\beta_{21})z} \right\}. \quad (18)$$

Наиболее вероятное значение $|q(\beta_{21})|^2$ равно нулю, а его стандартное отклонение равно среднему значению $h(\beta_{21})z$, что хорошо согласуется с результатами экспериментальных исследований статистических характеристик флукутации коэффициента передачи поляризационных мод анизотропного световода [3].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе найдены плотности распределения вероятности и коэффициенты автокорреляции для амплитудных коэффициентов передачи анизотропных одномодовых световодов со случайными нерегулярностями. Показано, что для их расчета достаточно знать величину параметра $h(\beta_{21})$ и зависимость разности постоянных распространения поляризационных мод β_{21} от температуры световода и частоты излучения. Теоретические выводы работы хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований, проведенных в [3].

Работа выполнена при частичной поддержке International Science Foundation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Noda J., Onamoto K., Sasaki Y. // J. Lightwave Technol., 1986. V. LT-4. N 8. P. 1071.
2. Rashleigh S. C. // J. Lightwave Technol., 1983. V. LT-1. N 2. P. 312.
3. Александров А. Ю., Григорянц В. В., Листвин В. Н. и др. // Радиотехника, 1988. N 8. С. 90.
4. Гальярди Р. М., Карп Ш. Оптическая связь. — М.: Связь, 1978.
5. Козел С. М., Листвин В. Н., Шаталин С. В., Юшкайтис Р. В. // Оптика и спектроскопия, 1986. Т. 61. Вып. 6. С. 1295.
6. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных световодов с медленно меняющимися параметрами. — М.: Изд. АН СССР, 1961.
7. Ваганов Р. Б., Матвеев Р. Ф., Мериакри В. В. Многомодовые волноводы со случайными нерегулярностями. — М.: Сов. радио, 1972.
8. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов. — М.: Изд. Московского Университета, 1992. С. 386.
9. Brinhmeyer E., Eickhoff W. // Electron. Lett., 1983. V. 19. N 23. P. 996.
10. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. — М.: Сов. радио, 1961. Т. 1. С. 518.
11. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. С. 344.

МФТИ, г. Москва

Поступила в редакцию

17 марта 1994 г.

**STATISTICAL CHARACTERISTICS OF MONOCHROMATIC RADIATION
IN IRREGULAR ANISOTROPIC SINGLE-MODE FIBERS**

A. V. Listvin, V. N. Listvin

The statistical analysis of the amplitude transmission coefficients of irregular anisotropic single-mode fibers is presented. An amplitude of the radiation

pumped to the orthogonal polarization mode is shown to have Rayleigh distribution. The mean value of the pumped power and it's standard deviation are equal to the ratio of the fiber length to the length of polarization maintenance. The analysis allows one to formulate the mathematical basis of fiber irregularities measurement methods with the help of coherent radiation sources.

**ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ
ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ
БЛИЖНЕГО АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ
ИСТОЧНИКА ШУМОИЗЛУЧЕНИЯ
В ГЛУБОКОМ МОРЕ**

А. Д. Соколов, В. Н. Фокин, Г. А. Шаронов

Приведены результаты исследования пространственно-частотного распределения энергии ближнего акустического поля шумоизлучения движущегося источника. Получены динамические спектрограммы принятого сигнала шумоизлучения в диапазоне частот ($0 \div 2,0$) кГц на дистанциях до 1300 м. Показано, что изменение уровней спектральных составляющих сигнала, вследствие интерференционной модуляции в ближнем поле, может достигать 12 дБ. Показано, что интерференционная структура имеет место во всем диапазоне рассмотренных дистанций ($100 \div 1300$) м. В рамках лучевой теории по гидрологическим данным $C(z)$ района измерений выполнены расчеты ближнего поля для сосредоточенного источника шумоизлучения. Сравнение результатов расчета с результатами натурных экспериментов показало хорошее их соответствие. Показано, также значительное влияние распределения скорости звука $C(z)$ в районе измерений на интерференционную структуру ближнего поля. Учет $C(z)$ в расчетах ближнего акустического поля в рамках существующей теории позволяет прогнозировать интерференционную структуру и выбирать оптимальные дистанции для проведения измерений в условиях ближнего поля.

Важной особенностью формирования акустического поля в океане является наличие интерференционных эффектов, вызванных как слоистой неоднородностью водной толщи, так и отражением звуковых волн от поверхности и дна. Аналогичные эффекты имеют место и при распространении электромагнитных волн в ионосфере.

Экспериментальные исследования [1-8] интерференционной структуры акустического поля сосредоточенного широкополосного источ-

ника проводились в типичных океанических волноводах в условиях глубокого и мелкого моря. Исследования показали детерминированный и устойчивый характер закономерностей формирования пространственно-частотных передаточных характеристик акустических полей при различных гидрологических условиях на дистанциях до 300 км в диапазоне частот до 500 Гц [5–8]. Сравнение измеренных параметров интерференционной модуляции спектральных компонент широкополосного сигнала, принятого от движущегося относительно приемника источника излучения, с расчетными данными показало возможность прогнозирования интерференционных явлений как для глубоководных, так и для мелководных волноводов. Полученные в [1–8] результаты представляют интерес с точки зрения исследования когерентности акустического поля при дальнем распространении звука в океане [9].

В то же время изучению параметров интерференционной структуры широкополосного излучения в слоисто–неоднородных средах на расстояниях между источником и приемником, сравнимых с глубиной водного слоя, уделялось существенно меньшее внимание [10, 11]. Однако, исследование интерференционных эффектов в ближней зоне представляется весьма актуальным, поскольку дает возможность выделения влияния рассеяния звука на границах волновода и в водной толще на когерентность широкополосного акустического поля.

При дальнем распространении звука в океанических волноводах существенное влияние на когерентность поля оказывают также случайные неоднородности в водной толще и в донных осадках.

В данной работе приводятся результаты натурных измерений пространственно–частотных характеристик ближнего акустического поля широкополосного звука, проведенных в условиях глубокого моря. В этих измерениях для исследования параметров интерференционной модуляции спектра принятого сигнала был использован метод зондирования океанического волновода непрерывным шумовым сигналом, источник которого двигался с постоянной по величине скоростью относительно приемника. Полученные экспериментальные результаты сравниваются с расчетами, выполненными в лучевом приближении.

1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

При рассмотрении интерференционных явлений, возникающих при распространении широкополосного звука в акустическом волноводе, часто используется аналогия с волновыми и колебательными системами [2, 6], и тогда задача об исследовании интерференционных эффектов в канале распространения сводится к исследованию прохождения сигналов через линейный фильтр, которым является сама среда распространения. К тому же, если не учитывать нелинейные эффекты, возникающие при больших энергиях акустических волн, то вполне правомерно представление канала распространения звука в виде линейного фильтра, описываемого соответствующими передаточными функциями [6, 12].

Передаточные функции гидроакустического канала $H[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t]$ зависят от таких факторов как: взаимное расположение точек излучения и приема (r — вектор расстояния между источником и приемником, z_s и z_r — глубина источника и приемника, $C(r, z)$ — распределение скорости звука), акустических свойств дна и состояния поверхности моря, характера стратификации и наличия объемных неоднородностей в среде распространения $\Delta C(r, z)$ и т.п. Большинство этих факторов может изменяться во времени, но такие факторы, определяющие в основном формирование интерференционной структуры акустического поля, как стратификация среды и физические свойства границ волновода, от времени зависят существенно слабее или достаточно медленно.

Для исследования передаточных характеристик гидроакустических каналов как многоканальных линейных систем, имеющих множество выходов и описываемых соответствующим множеством передаточных функций, используются известные методы измерения частотных и импульсных передаточных функций, которые предусматривают применение тональных, импульсных и шумовых сигналов, зондирующих гидроакустический канал. Поскольку частотная передаточная функция среды $H[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t]$ зависит от большого числа параметров, обычно вводится сканирование по одному из них: или по расстоянию между точками излучения и приема — r , или по глубинам приема — z_r .

и излучения — z_s , при сохранении, по мере возможности, постоянными других параметров [1, 6].

В данной работе для исследования интерференции широкополосного звука в условиях ближнего поля использовалось шумовое излучение широкополосного источника звука, который буксировался на заданной глубине с постоянной скоростью относительно медленно дрейфующего приемника. Метод непрерывного зондирования среды шумовым сигналом обеспечивал измерение квадрата модуля частотной передаточной характеристики канала при непрерывном изменении пространственных координат. Если излучается шумовой сигнал $s(t)$ со спектром $S(\omega)$, то акустическое поле в точке приема будет:

$$p[t, r, z_s, z_r, C(r, z)] = \int_0^\infty s(t - \tau) h[\tau, r, z_s, z_r, C(r, z)] d\tau,$$

где $h[\tau, r, z_s, z_r, C(r, z)]$ — отклик среды на дельта-импульс (импульсная передаточная характеристика).

Переходя к спектральным преобразованиям, получим:

$$p[r, z_s, z_r, C(r, z)] = h[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z)] s^*(\omega),$$

где

$$h[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z)] = \int_0^\infty h[\tau, r, z_s, z_r, C(r, z)] e^{-i\omega\tau} d\tau —$$

комплексная частотная передаточная функция среды, $s^*(\omega)$ — комплексно-сопряженная функция спектра излученного сигнала.

Измерение параметров передаточной функции среды носит, с одной стороны, закономерный детерминированный характер (в соответствии с изменением величин r, z_r, z_s), с другой — флюктуационный характер, обусловленный случайными изменениями во времени отклика среды или условий распространения.

Практически при измерениях частотных передаточных функций регистрируется реализация скользящего спектра принимаемого сигнала $g_{\omega, T}[\omega, t]$ и пространственно-частотное распределение спектральной

плотности мощности $G_{\omega,T}[\omega, r(t)]$ акустического поля:

$$g_{\omega,T}[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t] = \frac{1}{T} \int_T^{t+T} p[r, z_s, z_r, C(r, z)] \cdot e^{-i\omega t} dt,$$

$$G_{\omega,T}[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t] = g_{\omega,T}[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t]^2,$$

где T — время накопления.

Вследствие линейности тракта передачи сигнала для скользящего спектра шумового сигнала на выходе фильтра (канала распространения) можно записать:

$$G_{\omega,T}[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t] = H[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t] \cdot S_T(\omega, t).$$

Здесь $S_T(\omega, t) = s(\omega, t)^2$ — скользящий спектр сигнала в точке излучения, $H[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t]$ — частотная передаточная функция канала распространения (по интенсивности), которая является квадратом модуля комплексной передаточной функции h_ω , сопряженной преобразованием Фурье с импульсным откликом среды $h(\tau)$:

$$\begin{aligned} H[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t] &= h_\omega[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t]^2 = \\ &= \int_0^\infty h[\tau, \omega, r, z_s, z_r, C(r, z)] \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau^2. \end{aligned}$$

Для нахождения частотной передаточной функции $H[\omega, r, z_s, z_r, C(r, z), t]$ по пространственно-частотному распределению энергии $G_{\omega,T}[\omega, r, z_r, z_s, C(r, z), t]$ принятого сигнала достаточно учесть частотную зависимость спектральной плотности излучаемого сигнала $S_T(\omega, t)$, которую можно приближенно считать постоянной, либо медленно меняющейся функцией частоты. Интерференционные эффекты приводят к модуляции пространственно-частотной передаточной функции канала распространения в зависимости от r или z на фоне медленно меняющейся компоненты, обусловленной некогерентной частью акустического поля в точке приема.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Измерения пространственно-частотных передаточных характеристик акустического поля, проведенные в данной работе, выполнялись с регистрацией частотно-временного распределения энергии принятых сигналов, которая осуществлялась в виде плотностной записи динамической спектрограммы принятого сигнала в координатах "частота — дистанция" $G[\omega, r(t)]$ с учетом временной зависимости параметров движения источника относительно приемника, которые контролировались в течение измерений. Интерференционная модуляция при таком представлении наблюдается как упорядоченная структура линий, соответствующих экстремальным значениям спектральной плотности мощности.

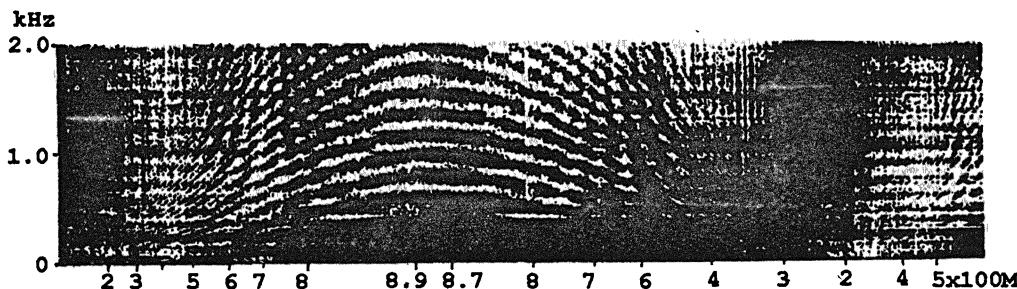


Рис. 1. Пространственно-частотное распределение интенсивности акустического поля (динамическая спектрограмма принятого сигнала).

Глубоководный район. Глубина источника $z_s = 100$ м. Глубина приемника $z_r = 78$ м.

Распределение скорости звука $C(z)$ в верхних слоях глубоководного района (глубина места $z_0 = 3100$ м) характеризовалось изотермическим приповерхностным слоем до глубины менее 15 м и слоем скачка ($(1520 \div 1458)$ м/с) на глубинах от 15 до 35 м и относительно небольшим ($-1,23 \cdot 10^{-5}$ м $^{-1}$) отрицательным градиентом до глубин ($200 \div 1000$) м и положительным ($1,22 \cdot 10^{-5}$ м $^{-1}$) градиентом глубже 1000 м.

Динамические спектрограммы сигналов шумоизлучения, полученные в ходе измерений в глубоководном районе, приведены на рис. 1 и рис. 2. При этом для увеличения контрастности интерференционной структуры на спектрограмме регистрировалась разность между текущим спектром сигнала и усредненным спектром фоновой помехи.

Динамическая спектrogramма, приведенная на рис. 1, была получена в полосе $(0 \div 2,0)$ кГц при регистрации поля источника шумоизлучения, который буксировался по траектории в виде окружности со скоростью 7,7 м/с на глубине 100 м. Минимальное расстояние от источника до приемника было 200 м, а максимальное удаление источника от приемных измерительных систем составляло 890 м. Прием осуществлялся на глубине 78 м в режиме дрейфа. Интерференционная структура на динамической спектrogramме рис. 1 имела место на всем интервале изменения дистанций, что свидетельствует о когерентности интерферирующих компонент. При этом, необходимо отметить, что на расстояниях от источника, превышающих 600 м, интегральный уровень принятого сигнала, практически, не превышал уровня фоновых помех. На дистанциях $(400 \div 800)$ м в интерференционной структуре наблюдались дополнительные интерференционные линии, наложенные на основную структуру расходящихся линий, что связано с приходом в точку приема в этом интервале дистанций до источника (около 700 м) еще одной группы интерферирующих лучей, рассмотрение и классификация которых будут приведены ниже.

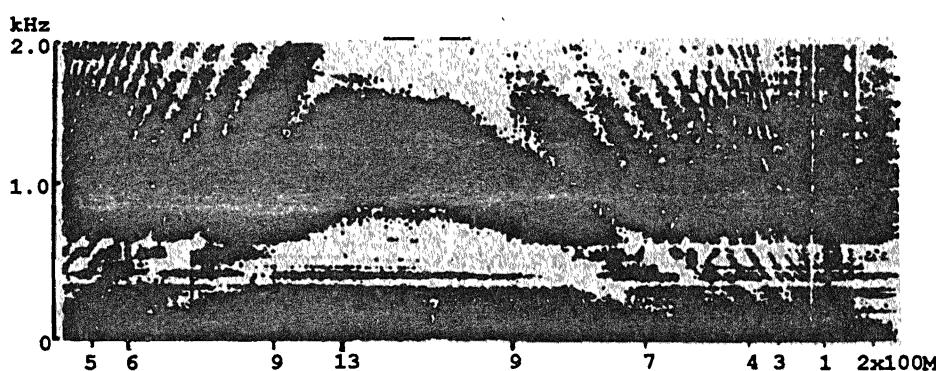


Рис. 2. Пространственно-частотное распределение интенсивности акустического поля (динамическая спектrogramма принятого сигнала). Глубоководный район. Глубина источника $z_s = 100$ м. Глубина приемника $z_r = 58$ м.

Динамическая спектrogramма, представленная на рис. 2, была получена в аналогичных условиях измерений, во время которых источник широкополосного звука буксировался на глубине 100 м по траектории в виде

окружности со скоростью 10,8 м/с с максимальным удалением от точки приема до 1300 м. Минимальное расстояние от источника до приемника в этом случае составляло 100 м. Глубина точки приема была 58 м. Интерференционная структура на динамической спектрограмме рис. 2, в основном, аналогична структуре, приведенной на рис. 1. Отличие наблюдается в изменении (увеличении) периода структуры расходящихся интерференционных линий по оси частот, что обусловлено уменьшением глубины точки приема при неизменной глубине движения источника и, следовательно, уменьшением величин относительных задержек между интерферирующими в точке приема лучами. На динамической спектрограмме рис. 2 также наблюдается и дополнительная структура интерференционных линий, центр которой в этом замере переместился (по сравнению с замером рис. 1) с 700 м на 500 м.

Количественная оценка глубины интерференционной модуляции пространственно-частотного распределения интенсивности поля (рис. 2) на дистанциях (100 \div 1000) м была получена из сечений динамической спектрограммы путем узкополосной фильтрации принятого сигнала шумоизлучения. Фильтрация производилась в диапазоне частот (100 \div 2000) Гц с полосой $\Delta F = 10$ Гц и интервалом 100 Гц. Полученные сечения пространственно-частотного распределения акустического поля приведены на рис. 3. Нетрудно видеть, что на дистанциях (500 \div 900) м глубина модуляции достигает 12 дБ. На меньших дистанциях (100 \div 300) м наблюдается общий подъем интенсивности спектральных составляющих и уменьшение глубины модуляции отфильтрованного сигнала до (2 \div 3) дБ, что свидетельствует об уменьшении степени когерентности интерферирующих лучей при больших углах падения.

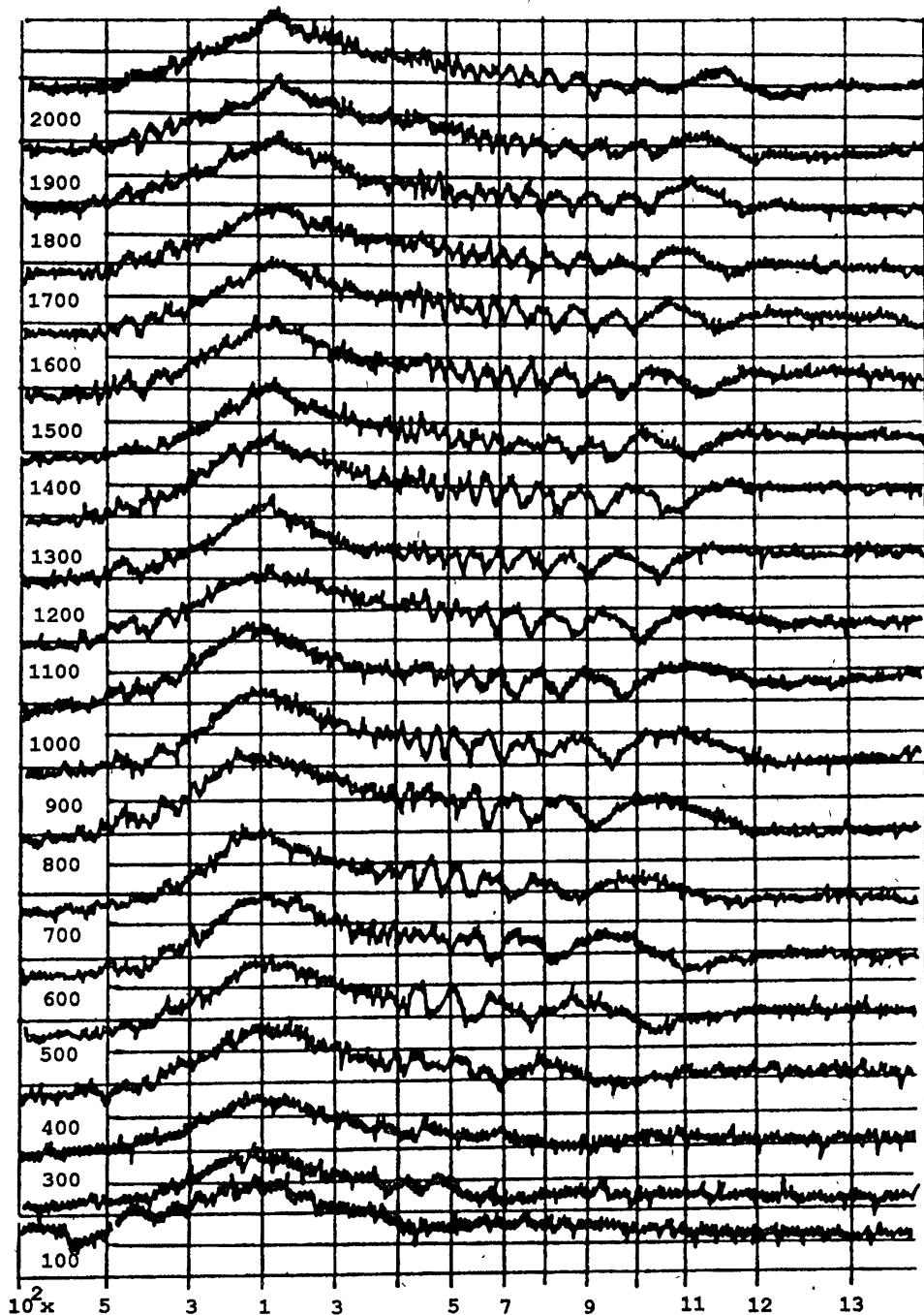


Рис. 3. Результат узкополосной фильтрации принятого сигнала. Глубоководный район. Глубина источника $z_s = 100$ м. Глубина приемника $z_r = 58$ м.

3. СРАВНЕНИЕ С РАСЧЕТНЫМИ ДАННЫМИ

Для рассмотрения возможности учета и прогнозирования интерференционной модуляции спектральных составляющих шумоизлучения источника в ближнем поле проведем анализ и сравнение полученной в эксперименте интерференционной структуры принятого сигнала с расчетными данными.

Как отмечалось выше, согласно лучевой теории [5–8] образование интерференционной структуры пространственно–частотного распределения поля сосредоточенного источника связано с приходом сигнала в точку приема по различным траекториям с различными задержками $\Delta\tau$ относительно друг друга. Расчеты пространственно–частотного распределения энергии в данных условиях ближнего поля проводились на основании приближений, сделанных в рамках лучевой теории [8, 11, 13] для сосредоточенного источника с учетом зависимости скорости звука от глубины $C(z)$ в районе измерений. Результаты расчета пространственно–частотного распределения энергии для условий измерений акустического поля источника шумоизлучения ($z_s = 100$ м, $z_r = 58$ м) в плотностном виде приведены на рис. 4.

Сравнение расчета пространственно–частотного распределения интенсивности поля (рис. 4) с экспериментальными данными (рис. 2) показывает, что имеет место хорошее совпадение. Структуры интерференционных линий рис. 2 и рис. 4 аналогичны. Дополнительная структура линий, по данным расчета, сосредоточена на дистанциях около 500 м, что совпадает с экспериментально полученным распределением.

Для определения вклада отдельных групп лучей, участвующих в формировании интерференционной структуры ближнего акустического поля шумоизлучения, был выполнен расчет спектра относительных задержек сигналов в зависимости от дистанции ($\Delta\tau(r)$ -диаграмма). Расчет, результаты которого приведены на рис. 5, был проведен для случаев излучения сигнала на глубине 100 м, приема — на глубине 58 м, и распределения $C(z)$, соответствующего условиям измерения (рис. 2).

На $\Delta\tau(r)$ -диаграмме рис. 5 представлены две основные группы кривых, связанных с интерференцией двух типов лучей в точке приема — прямых

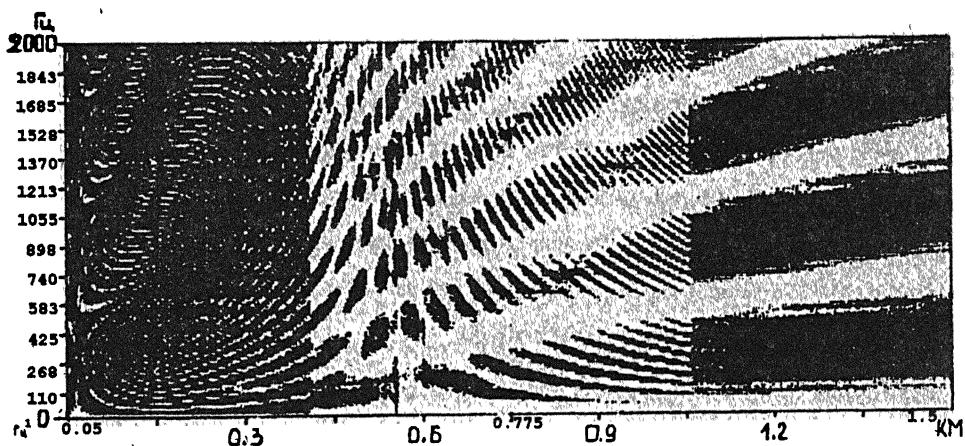


Рис. 4. Результат расчета пространственно-частотного распределения интенсивности поля для глубоководного района. Глубина источника $z_s = 100$ м. Глубина приемника $z_r = 58$ м.

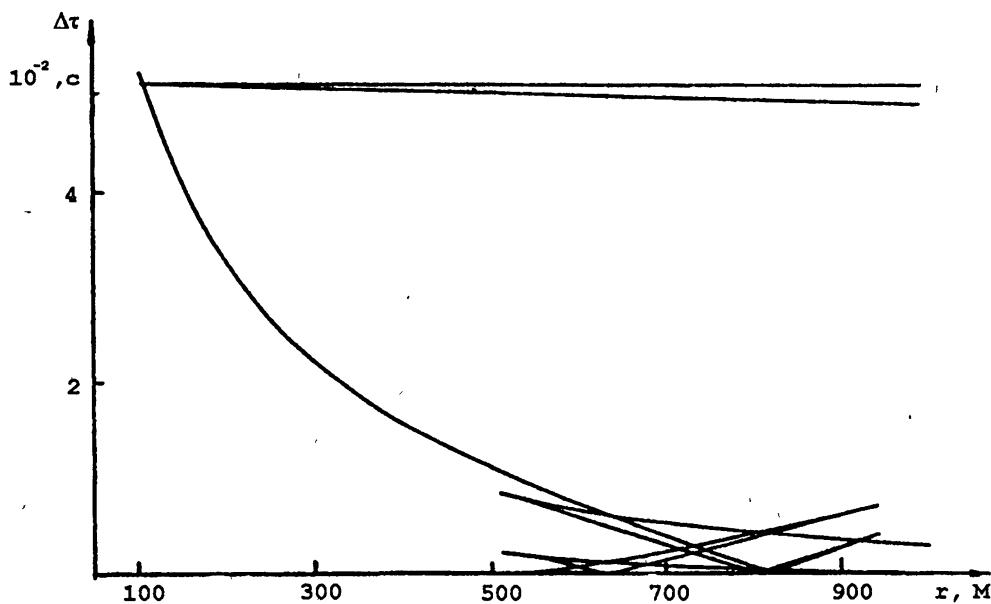


Рис. 5. Расчет спектра относительных задержек ($\Delta\tau(r)$ -диаграмма) для глубоководного района. Глубина источника $z_s = 100$ м. Глубина приемника $z_r = 58$ м.

и отраженных от поверхности (монотонно спадающая относительная задержка) и интерференцией прямых и отраженных от дна (относительные задержки, слабо зависящие от дистанций).

Влияние распределения скорости звука $C(z)$ на спектр относительных задержек $\Delta\tau(r)$ проявилось, в частности, в образовании дополнительной совокупности пересекающихся кривых на дистанциях ($500 \div 900$) м, что связано с интерференцией прямого луча и лучей, рефрагированных приповерхностным слоем и заглубленным каналом, а также с интерференцией рефрагированных лучей между собой.

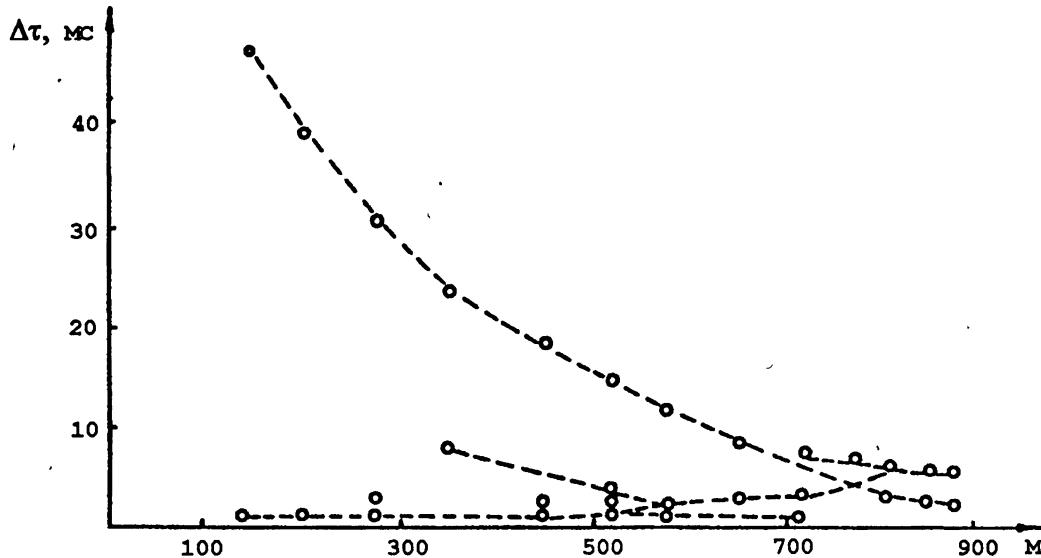


Рис. 6. Спектр относительных задержек, полученный в результате измерений в глубоководном районе. Глубина источника $z_s = 100$ м. Глубина приемника $z_r = 58$ м.

Для сравнения параметров интерференционной структуры была получена соответствующая $\Delta\tau(r)$ -диаграмма путем вторичного спектрального анализа динамического спектра принятого сигнала по оси частот [1, 2]. Измеренный спектр относительных задержек в зависимости от дистанции до источника приведен на рис. 6. Сравнение расчетной (рис. 5) и полученной экспериментально (рис. 6) $\Delta\tau(r)$ -диаграмм показало достаточно хорошее их соответствие. Отсутствие на экспериментальной

$\Delta\tau(r)$ -диаграмме задержек, соответствующих отраженным от дна лучам, связано с их малой интенсивностью в условиях глубоководного района.

Из сравнения этих рисунков также следует, что можно выделить отдельные группы лучей, сформировавших интерференционную структуру ближнего поля.

Совокупность дополнительных кривых в измеренном спектре относительных задержек $\Delta\tau(r)$ лежит в интервале дистанций ($350 \div 900$) м (рис. 6). Это говорит о том, что лучи, рефрагированные приповерхностным слоем и каналом с заглубленной осью, интерферируют как между собой, так и с прямыми лучами, что и приводит к появлению дополнительной интерференционной структуры пространственно-частотного распределения энергии поля (см. рис. 1 и рис. 2).

Таким образом, при прогнозировании параметров ближнего акустического поля может быть выполнен расчет спектра относительных задержек между отдельными группами лучей, участвующих в формировании интерференционной структуры принятого сигнала. При этом интерференционная структура ближнего акустического поля достаточно хорошо описывается лучевым приближением для сосредоточенного источника.

Необходимо отметить, что когерентность интерферирующих лучей по экспериментальным данным имеет место во всем интервале частот до 2 кГц на расстояниях до источника более 500 м и существенно уменьшается, а частотная область когерентности сокращается при меньших расстояниях, когда значительно возрастает вклад некогерентных компонент (при углах скольжения более 24°). Полученные данные безусловно зависят от состояния взволнованной поверхности моря, но они отражают основные закономерности интерференционных эффектов. Измерения показывают, в частности, что влияние отражения волн от поверхности моря на формирование интерференционной структуры поля имеет существенную частотную и угловую зависимость.

Влияние гидрологических условий на параметры интерференционной структуры поля оказывается существенным на расстояниях от источника, сравнимых с толщиной водного слоя, и может быть рассчитано в рамках лучевой теории.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-05-17257-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Е. Ф., Шаронов Г. А., Шевцов В. П. //1 Всесоюзная конференция метрологии гидрофизических измерений. Тезисы докладов. — М.: ВНИИФТРИ, 1980. С. 143.
2. Баранов В. А., Григорьев В. С. //Акуст. журн. 1982. Т. 28. Вып. 5. С. 588.
3. Чупров С. Д. //В кн.: Акустика океана. Современное состояние. /Под ред. Бреховских Л. М., Андреевой И. Б. — М.: Наука, 1982. С. 71.
4. Орлов Е. Ф. //В кн.: Проблемы акустики океана. / Под ред. Бреховских Л. М., Андреевой И. Б. — М.: Наука, 1984. С. 85.
5. Голубев В. Н., Орлов Е. Ф., Раков И. С., Соколов А. Д., Шаронов Г. А., Шевцов В. П. //Тезисы доклада 3-й Дальневосточной акустической конференции "Человек и океан": Распространение акустических волн. Владивосток, 1982. С. 88.
6. Голубев В. Н., Лазарев В. А., Орлов Е. Ф., Раков И. С., Соколов А. Д., Шаронов Г. А., Шевцов В. П. // В сб.: Интерференция широкополосного звука в океане. /Под ред. Зверева В. А., Орлова Е. Ф. — Горький: ИПФ АН СССР, 1984. С. 93.
7. Голубев В. Н., Ильичев В. И., Раков И. С., Соколов А. Д., Шаронов Г. А., Шевцов А. П. //В сб.: Акустические волны в океане. /Под ред. Бреховских Л. М., Андреевой И. Б. — М.: Наука, 1987. С. 100.
8. Голубев В. Н., Фокин В. Н. //Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 3. С. 455.
9. Зверев В. А., Лазарев В. А., Фокин В. Н., Шаронов Г. А. //Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 5. С. 834.
10. Орлов Е. Ф., Соколов А. Д., Фокин В. Н., Шаронов Г. А. //Тезисы Второго всесоюзного акустического семинара "Модели, алгоритмы, принятие решений". АКИН, ЛИПА. — М., 1988. С. 119.
11. Bachman R. T. and Kaye G. T. //J. Acoust. Soc. Am. August 1983. V. 74. N 2. P. 576.

12. Лаваль Р. и Лабсак И. //В сб.: Подводная акустика и обработка сигналов. /Под ред. Л. Берьне. Перев. с англ. А. Ю. Захлестина и др. под ред. Ю.Ю.Житковского. — М.: Мир. 1985. С. 43.
13. Варнавин С.В., Лазарев В. А., Лобанов В. Н., Татаринов Л. И., Фокин В. Н. //Сб. научн. тр.: Интерференция широкополосного звука в океане. /Под ред. Зверева В. А., Орлова Е. Ф. — Горький: ИПФ АН СССР, 1984. С. 54.

Институт прикладной физики
РАН, г.Н.Новгород

Поступила в редакцию
22 декабря 1994 г.

**THE MEASUREMENTS OF PARAMETERS OF THE NEAR ACOUSTIC
FIELD INTERFERENCE STRUCTURE OF A NOISE SOURCE IN THE
DEEP OCEAN**

A. D. Sokolov, V. N. Fokin, G. A. Sharonov

The results of the investigation of a space-frequency energy distribution of the near acoustic field from a moving noise source is considered. Dynamic spectrograms of the received signal in the frequency range ($0 \div 2.0$) kHz at distances up to 1300 m are given. It has been shown, that due to the interference modulation in the near field the changes in levels of signal spectral components may reach 12 dB. It has been shown, that the interference structure takes place in the all range of considered distances ($100 \div 1300$) m.

In the ray approximation using dependencies of $C(z)$ in the region of measurements the numerical simulations of the near acoustic field have been performed for a lumped noise source. The comparison of numerical simulation results with those of field experiments has shown their good agreement.

An essential influence of $C(z)$ profile in the region of measurements on the interference structure of the near acoustic field is shown. Taking into account $C(z)$ in the numerical simulation of the near acoustic field in the frames of existent theory, permits one to forecast the interference structure and to choose optimal distances for measurements of the near acoustic field.

УДК 534.2:532

ДИСТАНЦИОННАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА СЛЕДА ЗА НАГРЕТЫМ ЦИЛИНДРОМ

А. Б. Еэерский, А. Б. Зобнин, П. Л. Соустов

Проведено экспериментальное и теоретическое исследование возможностей дистанционной акустической диагностики потока. В качестве модели потока использовалась вихревая дорожка Кармана за нагретым цилиндром. Температура вихрей была большей, чем температура окружающей среды. Лабораторный эксперимент, выполненный в слабо-турбулентной аэродинамической трубе при $Re \sim 100$ показал, что по характеристикам рассеянного на потоке звука можно определить завихренность, частоту срыва вихрей, пространственный период, а также температуру вихрей.

ВВЕДЕНИЕ

Восстановление параметров вихрей по характеристикам рассеянного акустического излучения представляется важной проблемой с точки зрения диагностики крупномасштабных структур, играющих, как известно, важную роль в процессах перемешивания и генерации шума [1]. К настоящему времени исследован вопрос о возможности определения параметров вихрей в однородной по плотности жидкости. На этот счет имеются как теоретические оценки, так и физические эксперименты. Как было показано в работах [2, 3], если жидкость однородна по плотности, то при соответствующей параметризации течения по рассеянному звуку можно определить циркуляцию завихренности, скорость движения вихрей, временной и пространственный периоды вихревых структур. Если в жидкости кроме поля скорости есть поле температуры, то задача диагностики существенно усложняется. Проблема состоит в том, как по регистрируемому рассеянному сигналу в этом случае получить информацию и о завихренности, и о температуре? Этот вопрос изучается нами на примере вихревой дорожки Кармана за нагретым цилиндром — тестовой системе,

на которой апробируются многие новые методы и подходы, разрабатываемые сейчас в гидродинамике.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Рассчитаем рассеяние плоской звуковой волны, распространяющейся в воздушном потоке, на вихрях, температура которых отлична от температуры окружающей среды. Будем считать, что пульсации скорости $v(\vec{r}, t)$, плотности $\rho(\vec{r}, t)$ и температуры $T(\vec{r}, t)$ в вихрях малы: $v/c = M \ll 1$; $T/T_0, \rho/\rho_0 \sim v/c_0$, где c_0 — скорость звука в среде, T_0, ρ_0 — температура и плотность среды, а M — число Маха. Представим звуковое поле (ρ_s, p_s, \vec{u}_s) , прошедшее через область, содержащую вихри, в виде плоской волны (ρ_w, p_w, \vec{u}_w) с частотой ω_0 , волновым числом \vec{k} и малых добавок $(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \vec{\tilde{u}})$, величина которых пропорциональна M . Тогда для пульсаций плотности в рассеянной волне можно получить [4]:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x_i^2} = 2\rho_0 \frac{\partial^2 (v_i u_{w_j})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{c_0^2}{T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_w}{\partial x_j} + T \frac{\partial^2 \rho_w}{\partial x_i^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_w \frac{\partial v_i}{\partial t} \right). \quad (1)$$

Здесь по дважды встечающимся индексам проводится суммирование. Отметим, что при малых числах Маха изменение плотности, обусловленное вихревой компонентой, пропорционально M^2 , поэтому при расчете рассеянного звука в первом порядке по малому параметру M этими поправками мы пренебрегаем. Будем исследовать случай рассеяния звука на квазистационарном течении, характерное время изменения которого $T \gg \omega^{-1}$. В этом случае последним членом в правой части (1) можно пренебречь. Выразив рассеянное на вихревом течении поле через Фурье-образ вихренности и температуры, в первом (борновском) приближении теории возмущений получим:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_{w0}} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[\frac{2i(\mathbf{k}_0 \mathbf{k})[(\mathbf{k}_0 \times \mathbf{k}) \cdot \vec{\Omega}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)]}{\omega(k^2 - \omega^2/c^2)(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mathbf{k}_0 \mathbf{k})T(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)}{T_0 \cdot (k^2 - \omega^2/c^2)} \right] \cdot e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 k, \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ_{w0} — амплитуда плоской волны, $\vec{\Omega}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ — Фурье-образ поля вихренности, $T(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ — Фурье-образ поля температур.

Определим коэффициент рассеяния звука вихревой дорожкой за нагретым цилиндром. Известно, что в непосредственной близости за цилиндром течение плохо поддается описанию, в то время как периодический вихревой след, устанавливающийся ниже по течению, хорошо моделируется цепочкой точечных вихрей. Завихренность такой цепочки в двумерном приближении может быть записана в виде [2]:

$$\begin{aligned} \Omega_z(r) = & 2\pi\Gamma \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(x - l/4 - nl - u_0 t) \cdot \delta(y - h/2) - \\ & - \delta(x + l/4 - nl - u_0 t) \cdot \delta(y + h/2)], \end{aligned} \quad (3)$$

где Γ — циркуляция одного вихря.

Как показала визуализация, ядра вихрей в дорожке образуются из пограничного слоя цилиндра. Для воздуха, где теплопроводность κ и кинематическая вязкость η примерно равны, толщина теплового пограничного слоя и пограничного слоя поля скорости цилиндра достаточно близки (существует даже подобие между распределениями завихренности и температуры в двумерных течениях [5]). Поэтому в дорожке ядра вихрей имеют большую температуру, чем набегающий поток. Для расчетов мы аппроксимировали поле температуры в виде:

$$\begin{aligned} T(r) = & 2\pi \frac{Q'}{\rho_0 c_p} \cdot l_z \sum_{m=-\infty}^{\infty} [(\delta(x - l/4 - nl - u_0 t) \cdot \delta(y - h/2) + \delta(x + l/4 - \\ & - nl - u_0 t) \cdot \delta(y + h/2)], \end{aligned} \quad (4)$$

где Q' — количество тепла, переносимое одним вихрем, ρ_0 — плотность окружающей среды, $c_p = (\frac{\partial Q}{\partial t})_p$ — теплоемкость среды при постоянном давлении, l_z — длина цилиндра.

Обсудим теперь вопрос о том, насколько оправдано задание полей завихренности и температуры в виде δ -функций. Для применимости такой аппроксимации необходимо, чтобы размер ядра реального вихря r был много меньше λ — длины волны звука. Согласно [6], $r \sim \sqrt{\eta x / u_0}$, где x — координата вниз по потоку, u_0 — скорость сноса вихрей. В эксперименте падающее на вихревую дорожку акустическое поле можно

лишь приближенно считать плоской волной. Как показали измерения, зависимость амплитуды от координат x и z можно представить в виде $S(x, z) = \exp[-(x/L_x)^2 - (z/L_z)^2]$, поэтому условие применимости аппроксимации в виде δ -функций справедливо, если $\lambda \gg \sqrt{\eta L_x/u_0}$. Это условие выполняется в эксперименте.

С учетом сделанных приближений амплитуда ρ_1 рассеянной волны $\tilde{\rho} = \rho_1 \exp[i(\omega_0 t - k\vec{r})]$ была рассчитана интегрированием уравнения (2) методом стационарной фазы:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_{w0}} &= \frac{\omega_0}{8c^2} \frac{L_x L_z}{R \cdot l} \sum_m \left[\frac{\Gamma |\sin \varphi|}{1 - \cos \varphi} \sin \left(\frac{\pi m}{2} + \frac{\hbar \omega_0}{2c} (\cos \varphi - 1) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_0 Q'}{\rho_0 c_p T_0} l_z \cos \left(\frac{\pi m}{2} + \frac{\hbar \omega_0}{2c} (\cos \varphi - 1) \right) \right] \cos \varphi \exp \left\{ - \left(\frac{\frac{\omega_0}{c} |\sin \varphi| - \frac{2\pi m}{l}}{4/L_x} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\Delta\omega_m = \frac{2\pi m}{l} u_0 = 2\pi f_0 \cdot m$, где f_0 — частота срыва вихрей, φ — угол рассеяния (см. рис. 1).

Если звук падает перпендикулярно скорости движения вихревой дорожки, рассеянное поле представляет собой сумму гармоник, распространяющихся под различными углами, симметричными относительно направления падающего звука. Частота каждой гармоники смешена относительно частоты падающего звука в силу эффекта Доплера, т. к. вихревая дорожка для звука представляет собой движущуюся дифракционную решетку. Направление распространения каждой гармоники определяется из условия: $\frac{\omega_0}{c} |\sin \varphi_m| - \frac{2\pi m}{l} = 0$, т. е. угол распространения каждой гармоники однозначно определяется пространственным периодом вихревой дорожки. Амплитуда каждой гармоники может быть выражена через коэффициенты T_m : $\rho_1/\rho_{w0} = T_m \exp\{i[(\omega_0 + \Delta\omega_m)t - |k_x|x - k_y y + \pi]\}$, где

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{\omega_0}{8c^2} \frac{L_x L_z}{8R \cdot l} \frac{\Gamma |\sin \varphi_m|}{1 - \cos \varphi_m} \sin \left(\frac{\pi m}{2} + \frac{\hbar \omega_0}{2c} (\cos \varphi_m - 1) \right) + \\ &\quad + \frac{\omega_0}{T_0} \frac{Q'}{\rho_0 c_p} l_z \cos \left(\frac{\pi m}{2} + \frac{\hbar \omega_0}{2c} (\cos \varphi_m - 1) \right) \cdot \cos \varphi_m, \end{aligned} \quad (6)$$

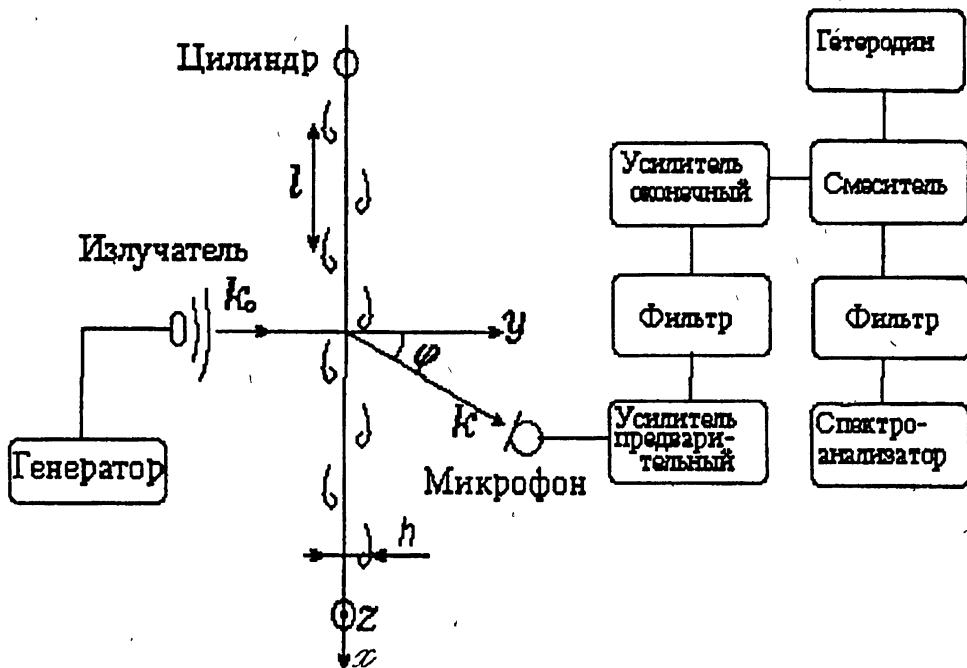


Рис. 1.

В эксперименте по углу распространения гармоник определялся период вихревой дорожки. Кроме того, по сдвигу частоты каждой гармоники можно определить частоту срыва вихрей. И, наконец, амплитуда гармоник пропорциональна циркуляции и температуре нагрева цилиндра, и эти параметры также могут быть определены экспериментально.

РЕЗУЛЬТАТЫ АКУСТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

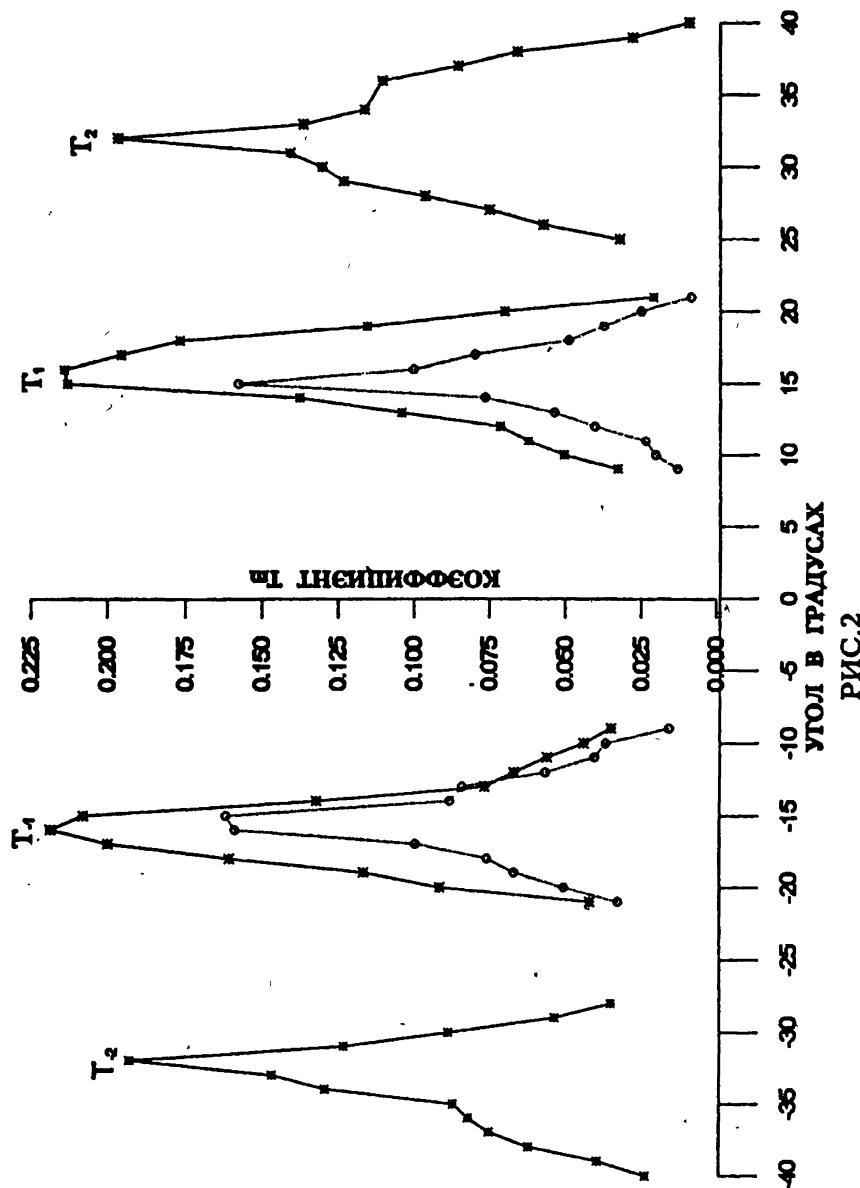
Эксперименты были выполнены в малотурбулентной трубе ИПФ РАН. Изучалось рассеяние ультразвука с частотой $F_0 = \omega_0/2\pi \approx 120$ кГц на вихревой дорожке за круглым цилиндром диаметром 2 мм. Скорость потока была $U = 90$ см/с, число Рейнольдса $Re = Ud/\eta = 120$, а частота срыва вихрей $f_0 = 78$ Гц. Цилиндр нагревался электрическим током. В качестве источника ультразвука использовался пьезокерамический излучатель (ПТС), диаметром $D = 4$ см, помещенный на расстояние L_i от вихревой дорожки. Для измерения параметров ультразвука использовался микрофон фирмы Брюль и Кьер, помещенный на расстояние $R \approx 120$ см.

Сигнал, принятый микрофоном, после преобразования анализировался на спектронализаторе 2034 фирмы Б и К.

В ходе эксперимента сравнивались спектры ультразвука, рассеянного на вихревой дорожке за нагретым и не нагретым цилиндрами. Зависимости $T(\varphi)$ приведены на рис. 2. Пунктиром показаны коэффициенты в отсутствие нагрева, а сплошной линией — для цилиндра, температура которого на $\Delta T = 60^\circ\text{C}$ больше, чем температура потока. Разность температур ΔT рассчитывалась по электрической мощности, выделяющейся на цилиндре с использованием эмпирической зависимости числа Нуссельта от числа Рейнольдса, аналогично тому, как это делалось в [7].

В отсутствие нагрева в спектре рассеянного звука можно было выделить лишь гармоники с частотой $F_0 \pm f_0$. Амплитуда всех остальных гармоник была на уровне шумов. Как показал расчет T по формуле (5), в отсутствие пульсаций температуры $T_{\pm 1} \gg T_{\pm 2}, \pm 3, \dots$. Если вихри переносят нагретый газ, то в спектре прошедшего звука есть и гармоники с частотами $F_0 \pm 2f_0$ (см. рис. 2). Как видно, нагрев практически не приводит к изменению пространственного периода вихревой дорожки. Рассчитанный по φ_m пространственный период составляет $l = 1,1$ см. Это хорошо соответствует эмпирическим данным [6]. Частота срыва вихрей, определенная по спектру рассеянного звука, практически совпадала с частотой срыва вихрей, измеренной непосредственно, причем при нагреве цилиндра зафиксировано уменьшение частоты следования вихрей (подробно изучение влияния нагрева на частоту срыва вихрей проведено в [7]).

Наиболее интересно дистанционное определение циркуляции вихрей Γ и температуры в ядрах вихрей. В отсутствие нагрева по коэффициентам $T_{\pm 1}$ была рассчитана величина Γ . Она оказалась равной $\Gamma = 76 \text{ см}^2/\text{с}$. По эмпирическим данным [6] она должна составлять $\Gamma = (80 \div 90) \text{ см}^2/\text{с}$. По величине $T_{\pm 2}$ была оценена температура ядер вихрей $T_a = \frac{Q'}{c_p} l_z = 50^\circ\text{C}$. Это возможно благодаря тому, что вклад поля завихренности в коэффициенты $T_{\pm 2}$ пренебрежимо мал. Зная температуру ядер вихрей, по коэффициентам $T_{\pm 1}$ можно определить величину циркуляции в дорожке за нагретым цилиндром. Она оказалась равной $\Gamma = 69 \text{ см}^2/\text{с}$. Как показали наши измерения, нагрев приводит к уменьшению циркуляции. Это совпа-



дает с результатами [7], показывающими, что нагрев цилиндра аналогичен уменьшению числа Рейнольдса. При уменьшении числа Рейнольдса циркуляция вихрей в дорожке действительно уменьшается.

Таким образом, эксперименты по рассеянию звука на следе за цилиндром показали возможность дистанционного определения параметров вихрей, ядра которых имеют температуру, отличающуюся от температуры потока.

Работа была доложена на II Международной конференции "Динамические и стохастические волновые явления".

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов Е. В., Гиневский А. С., Колесников А. В. Аэроакустические взаимодействия. — М.: Машиностроение, 1978.
2. Громов П. Р., Езерский А. Б., Фабрикант А. Л. //Акустический журнал, 1982. Т. 28. N 6. С. 763.
3. Громов П. Р., Езерский А. Б., Кияшко С. В., Фабрикант А. Л. //Препринт ИПФ АН СССР N 59. — Горький, 1982. 16 с.
4. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
5. Шлихting Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.
6. Chen C. N. 60 Jahre forschung über die Karmanschen Wirbelstrassen - Ein Ruckblick - Schweizerische Bauzeitung, 1975. N 44. P. 1079-1096.
7. Езерский А. Б. //ЖПМТФ, 1990. N 5. С.56.

Институт прикладной физики
РАН, г. Н.Новгород

Поступила в редакцию
11 января 1995 г.

**REMOTE SENSING ACOUSTIC DIAGNOSTICS OF A WAKE BEHIND A
HEATED CYLINDER****A. B. Ezerskij, A. B. Zobnin, P. L. Soustov**

The possibilities of acoustic remote sensing of flows have been experimentaly and theoreticaly investigated. The Karman's vortex path behind a cylinder was used as a model. The temperature of the vortices were higher than that of the surrounding medium. The experiment carried out in a low-turbulence wind tunnel at $Re \sim 100$ has demonstrated that the characteristics of the scattered sound may be used to determine the vortex parameters (vorticity, stall rate, spatial period, temperature).

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА СИГНАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ МНОГОКАНАЛЬНОЙ АДАПТИВНОЙ ПРИЕМНОЙ СИСТЕМЫ

В. Т. Ермолаев

Оцениваются коэффициенты, корни и степень минимального многочлена корреляционной матрицы. Степень минимального многочлена используется для классификации гауссовых процессов и определения числа сигналов. Оценки обратной корреляционной матрицы и матрицы-проектора на шумовое подпространство строятся в виде матричных многочленов.

ВВЕДЕНИЕ

В теории многоканальной адаптивной обработки сигналов важное значение имеет сигнальная корреляционная матрица $M = \langle XX^+ \rangle$, которая описывает статистические свойства вектора X случайных комплексных амплитуд сигналов в каналах приемной системы, где индексами + и $\langle \dots \rangle$ обозначены эрмитово сопряжение и статистическое усреднение. Собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ матрицы M являются корнями уравнения $\phi_N(\lambda) = 0$, где $\phi_N(\lambda)$ — характеристический многочлен степени N . При наличии кратных собственных чисел у матрицы M существует минимальный многочлен $\phi_K(\lambda)$ степени K ($K < N$), который является делителем характеристического. Число K равно числу неравных между собой собственных чисел. Оба многочлена являются аннулирующими для матрицы M , т. е. $\phi_N(M) = [0]$ и $\phi_K(M) = [0]$, где $[0]$ — нулевая матрица [1]. Наличие минимального многочлена степени K у матрицы M означает, что среди степенных матриц E, M, M^2, M^3, \dots линейно независимыми будут только K матриц, которые могут быть взяты в качестве базисных в пространстве сигнальных матриц. С использованием этого базиса

можно построить обратную матрицу M^{-1} или другую, необходимую для обработки сигналов, матрицу. Введенный степенной базис широко использовался в последнее время в различных задачах обработки сигналов: при синтезе адаптивных диаграммообразующих схем и алгоритмов [2], при синтезе быстрых алгоритмов сингулярного разложения матриц [3], а также быстрых алгоритмов сверхразрешения сигналов [4], [5].

Во многих задачах, касающихся обнаружения, разрешения и определения числа сигналов, исходят из предположения о том, что число сигналов J меньше числа каналов N , а корреляционную матрицу можно записать в виде [6, 7]

$$M = \alpha E + F A F^+, \quad (1)$$

где E — единичная матрица, описывающая статистические свойства собственного шума системы; α — мощность собственного шума в одном канале системы, $F = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_J)$ — матрица, составленная из векторов Φ_j , описывающих совокупность комплексных амплитуд сигналов в каналах системы; $A = \{\sqrt{\nu_i \nu_j} r_{ij}\}$ — матрица размерности $J \times J$, описывающая статистические свойства сигналов в отдельно взятом канале; ν_i — мощность i -го сигнала в этом канале; r_{ij} — коэффициент корреляции i -го и j -го сигналов в этом канале. Без потери общности можно положить $\alpha = 1$; а величину ν_i рассматривать как отношение мощности сигнала к мощности собственного шума. Чтобы матрица A не была вырожденной, будем полагать, что $|r_{ij}| < 1$ при $i \neq j$. Матрица (1) имеет J сигнальных собственных чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_J > 1$ и $N - J$ шумовых, равных единице. Соответственно, N -мерное пространство сигналов разбивается на два ортогональных подпространства: сигнальное и шумовое. Отсюда следует, что матрица (1) может иметь неравными между собой K собственных чисел. Причем $K \leq J + 1$ при $J < N$ и $K \leq N$ при $J \geq N$. Таким образом, матрица вида (1) имеет минимальный многочлен степени K . В случае $J < N$ он играет более важное значение, чем характеристический многочлен, поскольку его степень связана с числом сигналов J . Метод определения и свойства коэффициентов минимального многочлена матрицы вида (1) исследовались в [8]. В этой же работе показано, что обратная матрица M^{-1} строится в виде матричного многочлена.

В условиях априорной неопределенности вместо точной матрицы \mathbf{M} используется ее максимальная правдоподобная оценка [7]

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^+, \quad (2)$$

где L — число выборочных статистически независимых векторов \mathbf{X}_j . Если $L \geq N$, то матрица (2) имеет N случайных собственных чисел. Если $L < N$, то она имеет L отличных от нуля и $N - L$ нулевых собственных чисел. В этом случае матрица $\hat{\mathbf{M}}$ является вырожденной и не имеет обратной матрицы. Выборочная матрица $\hat{\mathbf{M}}$ не имеет минимального многочлена в строгом детерминистском смысле, как это справедливо для точной матрицы \mathbf{M} . Поэтому закономерен вопрос об оценивании минимального многочлена на основе выборочной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$. При этом должны оцениваться коэффициенты, корни и степень минимального многочлена. Поскольку эти параметры минимального многочлена связаны с физическими параметрами сигналов, то решение этой проблемы открывает новые возможности для постановки и решения разнообразных задач по оценке числа сигналов, их обнаружению и разрешению. В частности, число принимаемых антенной решеткой сигналов определяется при неизвестном волновом фронте и неизвестной геометрии решетки.

КРИТЕРИЙ ОЦЕНИВАНИЯ

Рассмотрим произвольный, не обязательно минимальный, многочлен $\phi_K(\lambda)$, представленный в виде:

$$\phi_K(\lambda) = \lambda^K - p_1 \lambda^{K-1} - p_2 \lambda^{K-2} - \dots - p_{K-1} \lambda - p_K, \quad (3)$$

где p_j — действительные знакопеременные числа ($p_K \neq 0$), корни этого многочлена $\lambda_j > 0$ ($j = 1 \div K$).

Подставим в этот многочлен в качестве аргумента матрицу \mathbf{M} , при этом учтем, что $\mathbf{M}^0 = \mathbf{E}$. В результате получим, что

$$\phi_K(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^K - p_1 \mathbf{M}^{K-1} - p_2 \mathbf{M}^{K-2} - \dots - p_{K-1} \mathbf{M} - p_K \mathbf{E}. \quad (4)$$

Если многочлен (3) является минимальным для матрицы M , то (4) будет нулевой матрицей [1]. Это значит, что степенные матрицы E, M, M^2, \dots, M^K — линейно зависимые, а любой набор из K этих матриц обладает свойством линейной независимости.

Оценка (2) в случае $L \geq N$ дает матрицу \hat{M} , имеющую N собственных чисел. В силу случайнога характера вероятность появления кратных чисел ничтожно мала. Поэтому минимальный многочлен матрицы \hat{M} имеет степень N , т.е. совпадает с характеристическим многочленом этой матрицы. Следовательно, свойством линейной независимости обладает любой набор не менее чем из N степенных матриц $E, \hat{M}, \hat{M}^2, \hat{M}^3, \dots$. Возьмем теперь матрицу вида

$$\varepsilon_K(\hat{M}) = \sum_{n=1}^K c_n \hat{M}^n - E \quad (K \leq N), \quad (5)$$

где c_n — действительные числа. При $K = N$ в силу линейной зависимости входящих в (5) матриц найдутся такие коэффициенты, при которых $\varepsilon_N(\hat{M}) = [0]$. При $K < N$ условие линейной зависимости матриц не выполняется и, следовательно, $\varepsilon_N(\hat{M}) \neq [0]$. Ситуация меняется в случае предельного перехода, когда $L \rightarrow \infty$ и $\hat{M} \rightarrow M$. Если M имеет кратные собственные числа, то при $K < N$ найдутся такие коэффициенты в (5), при которых $\varepsilon_k(\hat{M}) \rightarrow [0]$. Наименьшее K , для которого это справедливо, равно степени минимального многочлена матрицы M . При конечной выборке L в качестве меры близости матрицы (5) к нулевой матрице целесообразно ввести евклидову норму, квадрат которой, согласно [1], будет

$$I_K = \|\varepsilon_k(\hat{M})\|^2 = \text{Sp} [\varepsilon_K(\hat{M})]^2 = \text{Sp} [\sum_{n=1}^K c_n \hat{M}^n - E]^2. \quad (6)$$

Минимизация этой нормы позволяет найти матрицу $\varepsilon_k(\hat{M})$, наиболее близкую к нулевой матрице. Усредняя (6) по всем возможным выборкам, можно ввести понятие статистического среднего квадрата нормы этой матрицы.

С помощью алгебраических преобразований из (4) получим выражение

$$\varepsilon_K(M) = \frac{1}{p_K} \phi_K(M) = M \psi_{K-1}(M) - E, \quad (7)$$

где матричный многочлен $\psi_{K-1}(M)$ имеет вид:

$$\psi_{K-1}(M) = c_1 E + c_2 M + c_3 M^2 + \dots + c_K M^{K-1}, \quad (8)$$

а коэффициенты c_j и p_j связаны соотношениями:

$$c_1 = -\frac{p_{K-1}}{p_K}, \quad c_2 = -\frac{p_{K-2}}{p_K}, \dots, c_{K-1} = -\frac{p_1}{p_K}, \quad c_K = \frac{1}{p_K}. \quad (9)$$

Если многочлен (3) является минимальным, то в силу условия $\phi_K(M) = [0]$ из (7) следует, что матричный многочлен (8) представляет собой обратную матрицу M^{-1} . Если же многочлен (3) имеет меньшую степень, то (8) следует рассматривать как аппроксимацию матрицы M^{-1} многочленом соответственно меньшей степени. Сказанное справедливо и для оценочной матрицы \hat{M} . Если $K = N$, то выражение (8) дает обратную матрицу \hat{M}^{-1} . При $K < N$ (8) дает приближенное значение этой матрицы. Заметим теперь, что (7) совпадает с (5), если матрицу M заменить на \hat{M} . Следовательно, минимизация квадрата нормы (6) позволяет одновременно оценить параметры минимального многочлена (3) и обратной матрицы (8). В принципе, для оценки степени линейной зависимости матриц E, M, M^2, \dots, M^K можно построить линейные комбинации, отличающиеся от (5). Однако выбор матрицы $\epsilon_K(\hat{M})$ в виде (5) является не случайным. Оказывается, что критерий минимума нормы этой матрицы асимптотически согласован с другими важными критериями: минимумом информационного расстояния и максимумом функции правдоподобия.

Будем предполагать, что случайный процесс X является комплексным гауссовским и описывается многомерной функцией плотности вероятности [7, 9]

$$P(X) = \pi^{-N} \det M^{-1} \exp\{-Sp M^{-1} X X^+\}, \quad (10)$$

где для определителя и следа матрицы приняты обозначения \det и Sp . Учитывая, что обратная матрица M^{-1} представима в виде матричного многочлена вида (8), для любого гауссовского процесса функцию плотности вероятности можно записать в виде

$$P_K(X) = \pi^{-N} \det [\psi_{K-1}(M)] \exp\{-Sp [\psi_{K-1}(M) X X^+]\}. \quad (11)$$

При изменении степени минимального многочлена от $K = 1$ до $K = N$ все многообразие гауссовских процессов в соответствии с (11) и (8) разбивается на N классов. Такое разбиение представляет интерес, потому что число классов конечно и оно осуществляется всего лишь по одному признаку. Имея набор функций $\mathbf{P}_K(\mathbf{X})$ в виде (11), найдем информационное расстояние по отношению к функциям плотности вероятности (10). Согласно [10] оно определяется выражением

$$R_K = \int \ln \frac{\mathbf{P}(\mathbf{X})}{\mathbf{P}_K(\mathbf{X})} \mathbf{P}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \left\langle \ln \frac{\mathbf{P}(\mathbf{X})}{\mathbf{P}_K(\mathbf{X})} \right\rangle. \quad (12)$$

Подставляя сюда $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{P}_K(\mathbf{X})$ в виде (10) и (11), найдем после преобразования с помощью (7), что

$$R_K = \text{Sp} \{ -\ln [\mathbf{E} + \varepsilon_K(\mathbf{M})] + \varepsilon_K(\mathbf{M}) \}. \quad (13)$$

Воспользовавшись разложением Тейлора функции логарифма и сократив линейные члены, получим

$$R_K = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{\text{Sp} [\varepsilon_K(\mathbf{M})]^m}{m}. \quad (14)$$

При достаточно малых значениях всех собственных чисел матрицы $\varepsilon_K(\mathbf{M})$ в (14) существенно только первое слагаемое, поэтому

$$R_K \simeq \frac{1}{2} \text{Sp} [\varepsilon_K(\mathbf{M})]^2. \quad (15)$$

Заменяя \mathbf{M} на $\hat{\mathbf{M}}$, приходим к выводу о том, что квадрат нормы матрицы (5) дает оценку информационного расстояния (12).

Пусть далее имеется L ($L \geq N$) статистически независимых выборочных векторов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_L$ комплексного гауссовского N -мерного процесса. Тогда на основании (10) логарифм функции правдоподобия будет иметь вид:

$$\ln \mathbf{P}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_L) = -NL \ln \pi - L \text{Sp} \left\{ -\ln \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1} \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^+ \right\}. \quad (16)$$

Как показано в [7], эта функция имеет максимум при $\mathbf{M} = \hat{\mathbf{M}}$, где оценка $\hat{\mathbf{M}}$ определяется по формуле (2). Учитывая, что матрица $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$ предста-

вима многочленом $\psi_{N-1}(\hat{M})$ в виде (8), преобразуем (16) следующим образом:

$$\ln P_N(X_1, X_2, \dots, X_L) = -NL\ln\pi - LSp\{-\ln[\psi_{N-1}(\hat{M})] + \psi_{N-1}(\hat{M})\hat{M}\}. \quad (17)$$

Это выражение можно рассматривать как функцию коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_N многочлена $\psi_{N-1}(\hat{M})$. С помощью (7) выражение (17) преобразуем к другому виду:

$$\begin{aligned} \ln P_N(X_1, X_2, \dots, X_L) &= -NL\ln\pi - LSp[-\ln\hat{M}^{-1} + E] - \\ &- LSp\{-\ln[E + \varepsilon_N(\hat{M})] + \varepsilon_N(\hat{M})\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, что (18) имеет максимум при таких коэффициентах c_1, c_2, \dots, c_N , когда $\varepsilon_N(\hat{M}) = [0]$. Как ранее было показано, если матрица M имеет кратные корни, то в предельном случае $L \rightarrow \infty$ найдутся такие коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_K , при которых $\varepsilon_K(\hat{M}) \rightarrow [0]$ для $K < N$. Учитывая это, (18) можно обобщить на более общий случай произвольных значений K и записать в виде:

$$\begin{aligned} \ln P_K(X_1, X_2, \dots, X_L) &= -NL\ln\pi - LSp[-\ln\hat{M}^{-1} + E] - \\ &- LSp\{-\ln[E + \varepsilon_K(\hat{M})] + \varepsilon_K(\hat{M})\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Это выражение является функцией коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_K и степени K . Сравнивая (19) и (13), можно заметить, что обе функции зависят от матрицы $\varepsilon_K(\hat{M})$ одинаковым образом. Следовательно, в предельном случае, при $L \rightarrow \infty$ (19) как и (13) будет, аналогично (15), зависеть от квадрата нормы матрицы $\varepsilon_K(\hat{M})$. Поэтому можно считать, что минимизация квадрата нормы (6) асимптотически эквивалентна минимизации информационного расстояния и максимизации функционала правдоподобия.

В случае $L < N$ аналогичные рассуждения можно повторить, но только для подпространства выборочных векторов размерности L . В этом случае нужно учитывать, что $\hat{M}^0 = \Pi_1$, где Π_1 — тождественный проектор

на указанное подпространство. Поэтому при подстановке в (4), (7) и (8) вместо матрицы \mathbf{M} ее выборочной оценки $\hat{\mathbf{M}}$, а также в формулах (5) и (6), необходимо матрицу \mathbf{E} заменить на Π_1 . Во всех этих формулах значение K не может превышать числа выборок L . Аналогичная (8) формула

$$\psi_{K-1}(\hat{\mathbf{M}}) = c_1 \Pi_1 + c_2 \hat{\mathbf{M}} + c_3 \hat{\mathbf{M}}^2 + \dots + c_K \hat{\mathbf{M}}^{K-1} \quad (K \leq L) \quad (20)$$

будет давать оценку обратной матрицы для подпространства выборочных векторов. Однако, поскольку проектор Π_1 в явном виде получить сложно, сохраним в указанных формулах матрицу \mathbf{E} . Это приведет к следующим эффектам. Учтем, что $\mathbf{E} = \Pi_1 + \Pi_2$, где Π_2 — тождественный проектор на подпространство, ортогональное выборочным векторам. Тогда минимальное значение квадрата нормы (6) будет при $K = L$ и равно $(N - L)$, а матрица $\epsilon_L(\hat{\mathbf{M}}) = \Pi_2$. При $K < L$ значение минимума квадрата нормы будет больше $N - L$ и меньше N . Таким образом, значения коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_K , минимизирующих норму не изменяются. Изменяется только значение квадрата минимальной нормы на постоянное число $(N - L)$. Использование формулы (8) вместо (20) эквивалентно добавлению в (20) слагаемого $c_1 \Pi_2$. Это эквивалентно доопределению вырожденной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$ до невырожденной матрицы $\tilde{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}} + \frac{1}{c_1} \Pi_2$. При этом обратная матрица $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}$ представляет собой сумму вырожденных матриц $\psi_{K-1}(\hat{\mathbf{M}})$ в виде (20) и $c_1 \Pi_2$. Такое доопределение матрицы $\hat{\mathbf{M}}$ при короткой выборке L ($L < N$) полезно с физической точки зрения. За счет этого отсутствие апостериорных данных в ортогональном выборках подпространстве компенсируется априорными данными о наличии собственного шума с корреляционной матрицей $c_1 \Pi_2$. Таким образом, формулы (5)–(8) могут быть использованы и в случае короткой выборки L ($L < N$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ И КОРНЕЙ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА

Предположим, что класс гауссовского процесса известен, т. е. задана степень K минимального многочлена корреляционной матрицы \mathbf{M} . В этом случае выражение (6) следует рассматривать как квадратичный функционал относительно вектора коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_K .

Приравнивая нулю градиент этого функционала, найдем систему линейных уравнений для определения оценок \hat{c}_m ($m = 1, 2, \dots, K$) и выражение для минимального значения функционала

$$\sum_{n=1}^K c_n \operatorname{Sp} \hat{\mathbf{M}}^{n+m} = \operatorname{Sp} \hat{\mathbf{M}}^m, \quad m = 1 \div K, \quad (21)$$

$$I_K^{\min} = N - \sum_{n=1}^K \hat{c}_n \operatorname{Sp} \hat{\mathbf{M}}^n. \quad (22)$$

В качестве примера рассмотрим случай $K = 1$.

$$I_1^{\min} = N - \frac{\operatorname{Sp}^2 \hat{\mathbf{M}}}{\operatorname{Sp} \hat{\mathbf{M}}^2}, \quad \hat{c}_1 = \frac{\operatorname{Sp} \hat{\mathbf{M}}}{\operatorname{Sp} \hat{\mathbf{M}}^2}, \quad \hat{\lambda}_1 = \frac{1}{\hat{c}_1}. \quad (23)$$

Эта оценка получена в наиболее простом классе случайных процессов с корреляционной матрицей вида $\mathbf{M} = \alpha \mathbf{E}$. Оценка $\hat{\lambda}_1$ является оценкой величины α .

Если необходимо оценить минимальный многочлен сразу для нескольких классов гауссовых процессов, то вычислительные процедуры целесообразно осуществлять следующим образом. Вначале выполним ортогонализацию степенных матриц $\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{M}}^2, \hat{\mathbf{M}}^3, \dots, \hat{\mathbf{M}}^K$. Для этого необходимо ввести скалярное произведение матриц. В данном случае совокупность степенных матриц достаточно рассматривать на поле действительных чисел. Поэтому в качестве скалярного произведения $(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j)$ двух произвольных эрмитовых матриц \mathbf{V}_i и \mathbf{V}_j выберем действительную величину $\operatorname{Sp}(\mathbf{V}_i \mathbf{V}_j)$. Ортогонализацию будем осуществлять по схеме Грама–Шмидта:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \hat{\mathbf{M}}, \\ \mathbf{V}_2 &= \hat{\mathbf{M}}^2 - \alpha_{1,2} \mathbf{V}_1, \\ \mathbf{V}_3 &= \hat{\mathbf{M}}^3 - \alpha_{2,3} \mathbf{V}_2 - \alpha_{1,3} \mathbf{V}_1, \\ &\dots \\ \mathbf{V}_K &= \hat{\mathbf{M}}^K - \alpha_{K-1,K} \mathbf{V}_{K-1} - \cdots - \alpha_{1,K} \mathbf{V}_1, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\alpha_{n,m} = [\operatorname{Sp} \mathbf{V}_n^2]^{-1} \operatorname{Sp} (\hat{\mathbf{M}}^m \mathbf{V}_n).$$

С использованием ортогональных матриц выражение (6) запишем в виде

$$I_K = \text{Sp}[\mathbf{E} - \sum_{n=1}^K d_n \mathbf{V}_n]^2. \quad (25)$$

Решая вариационную задачу на минимум функции (25), находим, что

$$\hat{d}_n = [\text{Sp} \mathbf{V}_n^2]^{-1} \text{Sp} \mathbf{V}_n,$$

$$I_K^{\min} = N - \sum_{n=1}^K \hat{d}_n \text{Sp} \mathbf{V}_n = N - \sum_{n=1}^K \text{Sp}^2 \mathbf{V}_n / \text{Sp} \mathbf{V}_n^2. \quad (26)$$

Отсюда ясно, что справедлива рекуррентная формула $I_K^{\min} = I_{K-1}^{\min} - \text{Sp}^2 \mathbf{V}_K / \text{Sp} \mathbf{V}_K^2$, причем $I_K^{\min} < I_{K-1}^{\min}$. Процесс ортогонализации будет обрываться при $K = N$ ($\mathbf{V}_{N+1} = [0]$), если $L \geq N$ и при $K = L$ ($\mathbf{V}_{L+1} = [0]$), если $L < N$. При этом $I_N^{\min} = 0$ и $I_L^{\min} = N - L$. Коэффициенты \hat{d}_n легко связать с коэффициентами \hat{c}_n . Из (24) находим, что

$$\text{Sp} \hat{\mathbf{M}} = \text{Sp} \mathbf{V}_1,$$

$$\text{Sp} \hat{\mathbf{M}}^2 = \text{Sp} \mathbf{V}_2 + \alpha_{1,2} \text{Sp} \mathbf{V}_1,$$

$$\text{Sp} \hat{\mathbf{M}}^3 = \text{Sp} \mathbf{V}_3 + \alpha_{2,3} \text{Sp} \mathbf{V}_2 + \alpha_{1,2} \text{Sp} \mathbf{V}_1, \quad (27)$$

...

$$\text{Sp} \hat{\mathbf{M}}^K = \text{Sp} \mathbf{V}_K + \alpha_{K-1,K} \text{Sp} \mathbf{V}_{K-1} + \cdots + \alpha_{1,K} \text{Sp} \mathbf{V}_1.$$

Если ввести векторы $a = (\text{Sp} \hat{\mathbf{M}}, \text{Sp} \hat{\mathbf{M}}^2, \dots, \text{Sp} \hat{\mathbf{M}}^K)^T$, $b = (\text{Sp} \mathbf{V}_1, \text{Sp} \mathbf{V}_2, \dots, \text{Sp} \mathbf{V}_K)^T$ и треугольную матрицу \mathbf{Q}_1^T (T — знак транспонирования), составленную из элементов $\alpha_{i,j}$, то (27) можно записать в виде

$$a = \mathbf{Q}_1^T b. \quad (28)$$

Сравнивая (22) и (26), найдем, что

$$I_K^{\min} = N - \hat{c}^T a = N - \hat{d}^T b, \quad (29)$$

где $\hat{c} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_K)^T$, $\hat{d} = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_K)^T$. Подставляя (28) в (29), найдем связь между векторами \hat{c} и \hat{d}

$$\hat{c} = \mathbf{Q}^{-1} \hat{d}. \quad (30)$$

Таким образом, процесс ортогонализации (24) позволяет последовательно оценивать I_K^{\min} по формуле (26) и коэффициенты \hat{c}_n по формуле (30).

В ряде задач достаточно вычислить I_K^{\min} , не определяя коэффициенты \hat{c}_n . В этом случае процесс ортогонализации (24) можно упростить и свести к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \hat{\mathbf{M}}, \\ \mathbf{V}_2 &= \hat{\mathbf{M}}\mathbf{V}_1 - \beta_{1,2}\mathbf{V}_1, \\ \mathbf{V}_3 &= \hat{\mathbf{M}}\mathbf{V}_2 - \beta_{2,3}\mathbf{V}_2 - \beta_{1,3}\mathbf{V}_1, \\ &\dots \\ \mathbf{V}_K &= \hat{\mathbf{M}}\mathbf{V}_{K-1} - \beta_{K-1,K}\mathbf{V}_{K-1} - \beta_{K-2,K}\mathbf{V}_{K-2}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{K-1,K} &= [\text{Sp } \mathbf{V}_{K-1}^2]^{-1} \text{Sp} (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{V}_{K-1}^2), \quad K \geq 2, \\ \beta_{K-2,K} &= [\text{Sp } \mathbf{V}_{K-2}^2]^{-1} \text{Sp} (\hat{\mathbf{M}}\mathbf{V}_{K-1}\mathbf{V}_{K-2}), \quad K \geq 3. \end{aligned}$$

Переход от (24) к (31) доказывается аналогично тому, как это делается в [1] для ортогонализации степенных векторов.

Оценить корни минимального многочлена (3) и равные им собственные числа корреляционной матрицы можно двумя способами. Первый способ заключается в решении уравнения $\phi_K(\lambda) = 0$ или эквивалентного уравнения $\varepsilon_K(\lambda) = 0$. Второй способ предполагает возможность оценки корней многочлена (3), минуя оценку его коэффициентов. Для этого многочлен (3) запишем в виде $\phi_K(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_K)$ и учтем, что $p_K = (-1)^{K+1}\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_K$. В результате выражения (5) и (6) можно записать в виде:

$$\varepsilon_K(\hat{\mathbf{M}}) = \prod_{j=1}^K (\gamma_j \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{E}), \quad (32)$$

$$I_K = \text{Sp} \prod_{j=1}^K (\gamma_j \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{E})^2, \quad (33)$$

где $\gamma_j = \frac{1}{\lambda_j}$, $j = 1 \div K$. Решая вариационную задачу на минимум I_K относительно переменных γ_j , найдем систему уравнений вида:

$$\gamma_m = \frac{\text{Sp} \{[\mathbf{D}_m(\gamma_{j \neq m})]^2 \hat{\mathbf{M}}\}}{\text{Sp} \{[\mathbf{D}_m(\gamma_{j \neq m})]^2 \hat{\mathbf{M}}^2\}}, \quad m = (1 \div K), \quad (34)$$

где $\mathbf{D}_m = \prod_{j=1, j \neq m}^K (\gamma_j \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{E})$. Систему можно решить итерационным методом при каждом значении K . В качестве нулевого приближения в матрицу \mathbf{D}_m подставляются $(K-1)$ значений оценок $\hat{\gamma}_j$, полученных при вычислении I_K^{\min} . Через 5–10 итераций K оценок $\hat{\gamma}_j$ получаются с точностью $10^{-4} - 10^{-5}$. Для $K = 1$ итераций не требуется, и $\hat{\gamma}_1$ вычисляется по той же формуле, что и коэффициент \hat{c}_1 в (23). Оценки корней $\hat{\lambda}_j = \hat{\gamma}_j^{-1}$ ($j = 1, 2, \dots, K$).

ОЦЕНКА СТЕПЕНИ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА

Предположим теперь, что по заданной выборочной матрице $\hat{\mathbf{M}}$ необходимо оценить степень минимального многочлена точной матрицы \mathbf{M} . Из выражений (22) и (26) для I_K^{\min} следует, что изменение степени от $K = 1$ до $K = N$ ведет к монотонному уменьшению I_K^{\min} от N до 0, если $L \geq N$ и от N до $N - L$, если $L < N$. Это значит, что оценить величину K , минимизируя I_K , невозможно. Для решения вопроса об оценке степени минимального многочлена необходимо привлечь дополнительную информацию о свойствах физической системы. Будем полагать, что в отсутствие сигналов в системе действует собственный шум, статистические свойства которого хорошо известны. В частности, для многих систем можно считать, что корреляционная матрица собственного шума $\mathbf{M} = \mathbf{E}$. Это позволяет выявить статистические свойства случайных величин I_K^{\min} , обусловленные действием собственного шума. Это, в свою очередь, дает возможность обосновать выбор пороговых значений для решающих статистик.

Следуя этой логике, найдем среднее $\langle I_1^{\min} \rangle$ и дисперсию $\sigma_1^2 = \langle (I_1^{\min})^2 \rangle - \langle I_1^{\min} \rangle^2$ величины I_1^{\min} , предполагая, что в системе действует только собственный шум.

Запишем I_1^{\min} из (23) в виде

$$I_1^{\min} = \frac{N \text{Sp} \hat{\mathbf{M}}^2 - \text{Sp}^2 \hat{\mathbf{M}}}{\text{Sp} \hat{\mathbf{M}}^2}. \quad (35)$$

Для определения указанных параметров статистики I_1^{\min} потребуются следующие величины: $\langle \text{Sp} \hat{\mathbf{M}}^2 \rangle$, $\langle \text{Sp}^2 \hat{\mathbf{M}} \rangle$, $\langle \text{Sp}^4 \hat{\mathbf{M}} \rangle$, $\langle \text{Sp}^2 \hat{\mathbf{M}}^2 \rangle$, $\langle \text{Sp} \hat{\mathbf{M}}^2 \text{Sp}^2 \hat{\mathbf{M}} \rangle$.

С учетом (2) их вычисление сводится к вычислению моментов четвертого и восьмого порядков. Для комплексных гауссовских процессов эти вычисления выполняются точно по известному правилу [11]. Учитывая, что $\mathbf{M} = \mathbf{E}$, получим следующие выражения

$$\begin{aligned}\langle \text{Sp } \hat{\mathbf{M}}^2 \rangle &= N + \frac{N^2}{L}, \\ \langle \text{Sp}^2 \hat{\mathbf{M}} \rangle &= N^2 + \frac{N}{L}, \\ \langle \text{Sp}^4 \hat{\mathbf{M}} \rangle &= N^4 + \frac{6N^3}{L} + \frac{11N^2}{L^2} + \frac{6N}{L^3}, \\ \langle \text{Sp}^2 \hat{\mathbf{M}}^2 \rangle &= N^2 + \frac{2N^3 + 4N}{L} + \frac{N^4 + 10N^2}{L^2} + \frac{4N^3 + 2N}{L^3}, \\ \langle \text{Sp } \hat{\mathbf{M}}^2 \text{ Sp}^2 \hat{\mathbf{M}} \rangle &= N^3 + \frac{N^4 + 5N^2}{L} + \frac{5N^3 + 6N}{L^2} + \frac{6N^2}{L^3}.\end{aligned}\quad (36)$$

В знаменателе (35) стоит квадрат нормы выборочной матрицы. Это случайная величина, но ее относительная флуктуация невелика, если $N, L \geq 10$. Это можно показать с помощью формул (36). Поэтому при вычислении $\langle I_1^{\min} \rangle$ и σ_1 в знаменателе (35) случайную величину заменим ее средним. В результате искомые параметры статистики I_1^{\min} можно получить в виде

$$\langle I_1^{\min} \rangle = \frac{N^2 - 1}{N + L}, \quad \sigma_1 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N + L} \sqrt{1 + (2N^2 - 3)/NL}. \quad (37)$$

На рис. 1 показаны кривые $\langle I_1^{\min} \rangle$ и $\langle I_1^{\min} \rangle + \sigma_1$, рассчитанные в соответствии с (37) для $N = 10$ в зависимости от L , а также прямые $I_L^{\min} = N - L$ для $L < N$ и $I_N^{\min} = 0$ для $L \geq N$. На этом рисунке заштрихована область, в которую преимущественно попадают случайные величины I_K^{\min} , обусловленные выборками из собственного шума. Для выработки стратегии статистического вывода о степени минимального многочлена необходимо ввести пороговое значение T_1 для статистики I_1^{\min} . Положим, что $T_1 = \langle I_1^{\min} \rangle$, хотя с учетом среднеквадратического значения σ_1 порог может быть и другим. Если I_1^{\min} попадает в заштрихованную область, то следует считать, что гипотеза $K = 1$ верна и выборка обусловлена только собственным шумом. В противном случае гипотеза $K = 1$ отвергается и необходимо перейти к рассмотрению гипотезы $K = 2$, вычисляя I_2^{\min} .

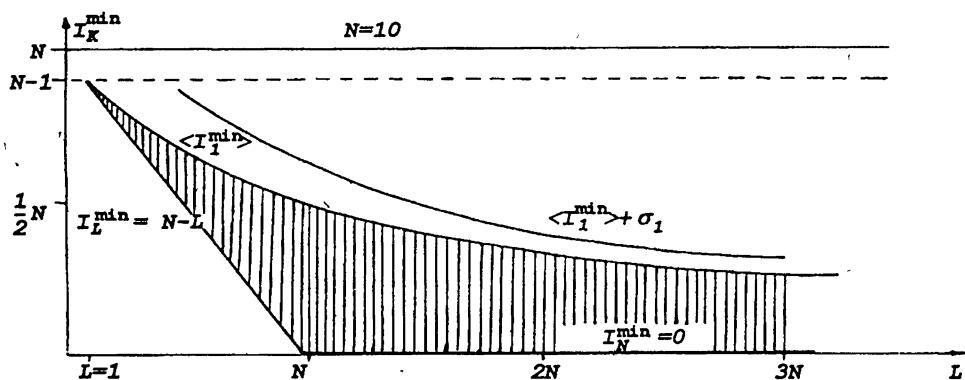


Рис. 1.

Поскольку $I_2^{\min} < I_1^{\min}$, возможны два случая. Либо I_2^{\min} попадает в заштрихованную область, либо нет. В первом случае гипотеза $K = 2$ принимается, а во втором случае отвергается. Последующие гипотезы $K = 3, 4, 5, \dots$ проверяются аналогичным образом.

В качестве примера использования теории рассмотрим задачу определения числа источников некоррелированных сигналов, принимаемых антенной решеткой.

В этом случае $r_{ij} = 0$ ($i \neq j$) и (1) запишем в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} + \sum_{i=1}^J \nu_i \Phi_i \Phi_i^+. \quad (38)$$

Эта матрица имеет $J+1$ неравных между собой собственных чисел. Поэтому степень минимального многочлена $K = J+1$. Следовательно, для оценки числа источников необходимо последовательно, начиная с $K = 1$, вычислять I_K^{\min} до тех пор, пока при некотором значении $K = K_1$ величина $I_{K_1}^{\min}$ не примет значение меньше выбранного порога. Задача решалась методом математического моделирования.

Для определенности была выбрана линейная антennaя решетка с шагом $d = 0.5\lambda$ (λ — длина волны) и числом элементов $N = 10$. Случайный гауссовский процесс моделировался в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{n}_0 + \sum_{i=1}^J \eta_i \Phi_i, \quad (39)$$

где каждый компонент вектора \mathbf{n}_0 имел нулевое среднее и единичную дисперсию и был статистически независим от других компонент. Случайная

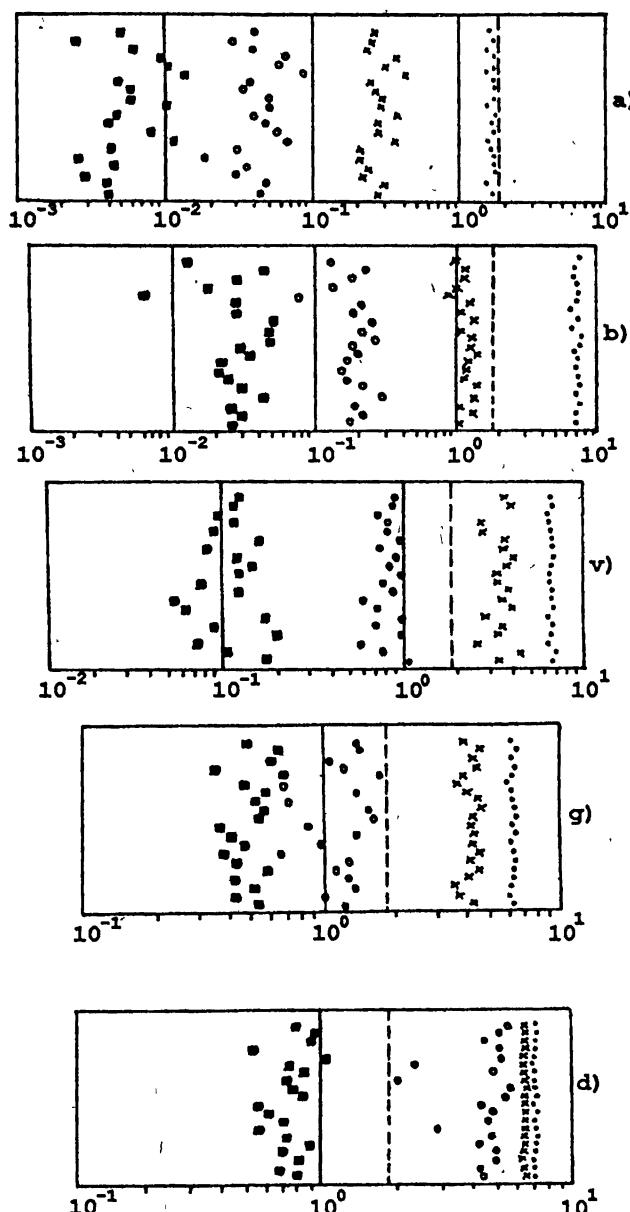


Рис. 2.

величина η_i имела нулевое среднее и дисперсию, равную ν_i . На основе (39) формировалось 50 выборочных векторов ($L = 50$). Результаты моделирования для пяти вариантов сигнальных ситуаций приведены на рис. 2а, б, в, г, д. Порог принимался равным $T_1 = \langle I_1^{\min} \rangle + \sigma_1$ и вычислялся по формулам (37). На рисунках он показан штриховой линией. В каждом варианте делалось 20 опытов с различными выборками. Вычислялись статистики I_K^{\min} при $K = 1, 2, 3, 4$. На рисунках они обозначены соответственно точками, крестиками, кружочками и квадратиками. В первой ситуации (рис. 2а) задавался только собственный шум. Видно, что ни одна из статистик не превышает порога. Во второй ситуации (рис. 2б) задан один внешний источник ($J = 1$) с параметрами $\nu_1 = 1$ и $\theta_1 = 0^\circ$ (θ — угол, отсчитываемый от нормали к антенной решетке). Видно, что статистика I_1^{\min} превышает порог, в то время как другие статистики не превышают его. В третьем варианте (рис. 2в) задано два источника ($J = 2$) с параметрами $\nu_1 = \nu_2 = 1$ и $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 15^\circ$. В этом случае превышают порог две статистики I_1^{\min} и I_2^{\min} . В четвертом варианте (рис. 2г) задано 3 источника ($J = 3$) с параметрами $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$ и $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 15^\circ, \theta_3 = 31^\circ$. В данном случае принимается статистическое решение о наличии двух источников, так как порог превысили только две статистики. Количество выборок здесь недостаточно для принятия правильного решения. В пятом варианте (рис. 2д) также, как и в четвертом задано три источника с теми же угловыми положениями, но с увеличенными в пять раз мощностями: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 5$. В этом случае три статистики превысили порог, что дает возможность делать вывод о наличии трех источников.

Надо сказать, что степень минимального многочлена никак не связана с выбором векторов Φ_i в формулах (1), (38). Следовательно, теория может применяться и в том случае, когда векторы Φ_i неизвестны. Например, неизвестна геометрия антенной решетки или неизвестны условия распространения волн. Важно, чтобы габариты антенн не выходили из пространственной области когерентности сигналов, что с хорошей степенью точности выполняется в большинстве гидроакустических задач [12, 13] и задач радиосвязи и радиолокации [6, 7].

Если векторы сигналов Φ_i в формулах (1), (38) известны с точностью

до некоторых параметров (например, неизвестны направления прихода плоских волн), то можно ставить задачу об оценке этих параметров. Наиболее эффективными здесь являются проекционные методы [7], которые используют свойство ортогональности векторов сигналов Φ_i к подпространству собственного шума. Для реализации таких методов необходимо оценить проектор на шумовое подпространство. При использовании формул (32)–(34) он строится в виде следующего матричного многочлена

$$\hat{\Pi} = \frac{\hat{D}_m}{\prod_{j=1, j \neq m}^K (\hat{\gamma}_j / \hat{\gamma}_m - 1)}, \quad (40)$$

где $\hat{\gamma}_m$ — наибольшее из всех $\hat{\gamma}_j$. Кроме оценки параметров сигналов этот проектор позволяет оценить путем вычисления $\text{Sp } \hat{\Pi}$ размерность шумового подпространства, а следовательно, и размерность сигнального подпространства. Аналогично можно построить другие проекторы. Если минимальный многочлен имеет степень K , то всего будет K проекторов $\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \dots, \hat{\Pi}_K$. Если для обработки сигналов требуется оценить некоторую матрицу $f(\hat{M})$, где $f(x)$ — произвольная аналитическая функция, то соответствующая оценка будет иметь вид:

$$f(\hat{M}) = \sum_{j=1}^K f(\hat{\lambda}_j) \hat{\Pi}_j. \quad (41)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Наряду с характеристическим сигнальная корреляционная матрица имеет минимальный многочлен, степень которого равна числу неравных между собой собственных чисел. Степень минимального многочлена принимает значения от 1 до N , что позволяет ввести разбиение гауссовских процессов на N классов. Для матрицы вида (1) степень минимального многочлена не превышает числа сигналов, действующих в многоканальной системе.

2. Для оценки коэффициентов и корней минимального многочлена по выборочной матрице необходимо минимизировать квадрат нормы матрицы $\varepsilon_K(\hat{M})$ (см., например, (6), (33)). При этом класс гауссовских процессов должен быть задан.

3. Для оценки степени минимального многочлена последовательно вычисляются минимальные значения квадратов норм матриц $\epsilon_K(\hat{M})$, которые сравниваются с заданным порогом, зависящим от свойств собственного шума системы. Если собственный шум описывается единичной корреляционной матрицей, то соответствующий порог можно вычислить по формулам (37).

4. Разработанная теория позволяет решать задачи обнаружения сигналов и определения их числа в условиях, когда параметры сигналов и характеристики многоканальной системы неизвестны. Теория дает возможность оценивать в виде матричных многочленов обратную корреляционную матрицу, матрицу-проектор на шумовое подпространство, а также любую другую матрицу $f(M)$, где $f(x)$ — произвольная аналитическая функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин В. В. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1980.
2. Ermolaev V. T. and Flaksman A. G. //Int. Journal of Electronics, 1993. V. 75. N 4. P. 753.
3. Xu G., Kailath T. //Proc. ICASSP'91, 1991.
4. Ermolaev V. T., Gershman A. B. //Proc. Colloq. GRETSI, 1993.
5. Ermolaev V. T., Gershman A. B. //Proc. ECCTD'93, 1993.
6. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1981.
7. Караваев В. В., Сазонов В. В. Статистическая теория пассивной локации. — М.: Радио и связь, 1987.
8. Ермоляев В. Т. //Изв. вузов. Радиофизика, 1987. Т. 30. N 3. С. 447.
9. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. — М.: Радио и связь, 1986.
10. Кульбак С. Теория информации и статистики. (Пер. с англ.) — М., 1967.
11. Евсиков Ю. А., Чапурский В. В. Преобразование случайных процессов в радиотехнических устройствах. — М.: Высшая школа, 1977.

12. Gershman A. B., Zverev V. A. //Proc. ICASSP'94, 1994.
13. Gershman A. B., Turchin V. I., Zverev V. A. //Proc. 2 Int. Conf. on Underwater Acoust., 1994.

Нижегородский
научно-исследовательский
институт радиотехники

Поступила в редакцию
9 марта 1994 г.

**MINIMAL POLYNOMIAL PARAMETER ESTIMATION FOR SIGNAL
COVARIANCE MATRIX OF MULTICHANNEL ADAPTIVE RECEIVING
SYSTEM**

V. T. Ermolaev

Coefficients, roots and a power of covariance matrix minimal polynomial are estimated. The power of a minimal polynomial is used for Gaussian process classification and for the detection of a signal number. The inverse covariance matrix estimate is constructed as a matrix polynomial.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ ВИНОВЫХ ПУЧКОВ С ЗАХВАЧЕННЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

В. Е. Запевалов, Ш. Е. Цимлинг

Экспериментально исследуются скоростной разброс и средняя осцилляторная энергия интенсивных винтовых пучков гиротронов при наличии электронов, отраженных от магнитной пробки и захваченных в адиабатическую ловушку. Результаты экспериментов свидетельствуют о существенном влиянии захваченных электронов на параметры пучков, особенно в системах, формирующих квазиламинарные пучки. Рассмотрены модификации магнетронно-инжекторных пушек, в которых достигается некоторое ослабление влияния отраженных электронов.

1. В магнетронно-инжекторных системах гиротронов, формирующих винтовые электронные пучки (ВЭП), часть электронов, получивших в пушке вследствие скоростного разброса избыточную осцилляторную энергию, может оказаться захваченной в адиабатическую ловушку. Границами ловушки являются, с одной стороны, катод, а с другой — магнитная пробка. В предыдущих работах (см., например, [1, 2]) констатировалось, что захваченные электроны (ЗЭ) представляют собой основной фактор, приводящий к неустойчивости электронного потока и предпринимались исследования механизмов неустойчивости. Влияние ЗЭ на параметры винтовых пучков при условии, что последние сохраняют устойчивость, теоретически рассмотрено в [3].

Ниже приведены некоторые результаты экспериментов, направленных на выяснение характера воздействия захваченных частиц на параметры скоростного распределения ВЭП (средняя осцилляторная энергия и относительный скоростной разброс).

2. Измерения производились методом тормозящего поля [4, 5]. Схема экспериментальной установки показана на рис. 1.

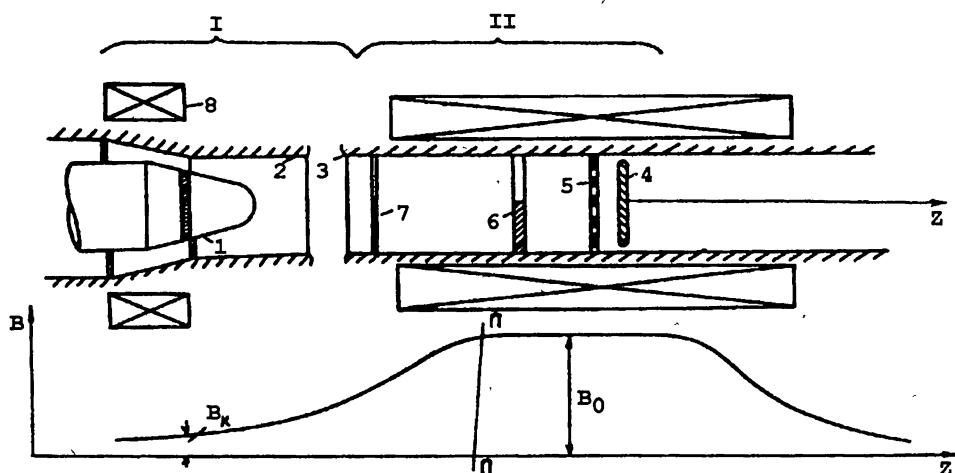


Рис. 1.

Непосредственно измеряемой величиной здесь является продольная к магнитному полю компонента скорости, которая определяется по кривой отсечке тока коллектора 4, устанавливаемого вместе с тормозящей сеткой 5 и диафрагмой 6 в области однородного магнитного поля (распределение последнего также показано на рис. 1). Осцилляторная скорость вычисляется по продольной скорости из интеграла энергии. Диафрагма 6 с секторным вырезом служит для удаления электронов, отраженных от тормозящей сетки. Эта диафрагма, однако, не перехватывает электроны, отраженные от магнитной пробки, располагающейся в области нарастающего магнитного поля (левее плоскости П-П на рис. 1). Таким образом, в данном варианте схемы измеряются параметры пучка в присутствии отраженных электронов, что, как правило, имеет место в рабочих режимах гиротронов.

Ослабление потока отраженных электронов достигается установкой дополнительной диафрагмы 7 в том месте, где магнитное поле существенно меньше B_0 (примерно $B_0/2$). Диафрагма снабжена узким секторным вырезом (около 30°). В этом случае электроны, отраженные от магнитной пробки, оказываются после азимутального дрейфа в скрещенных полях прикатодной области уже над другой частью эмиттера и не влияют

на первичные электроны. В прикатодной области электроны вновь отражаются в сторону коллектора и после еще одного поворота в скрещенных полях перехватываются диафрагмой 7 (по крайней мере, частично). Таким образом число ЗЭ сокращается. Согласно оценкам их влияние на характеристики прямого пучка становится пренебрежимо малым.

Эксперименты проводились с двумя магнетронно-инжекторными пушками, формирующими квазиламинарные (пушка 1) или регулярно-пересекающиеся пучки (пушка 2) (ср. определения топологии пучков, например, в [3]). Фактические и расчетные параметры пушек приведены в табл. 1. Использовались облегченные ("моделирующие") режимы, при которых магнитное поле, напряжение и ток уменьшались по сравнению с рабочими в соответствии с соотношениями подобия, гарантирующими неизменность формы траекторий:

$$U_M = kU_P, \quad B_M = k^{1/2}B_P, \quad I_M = k^{3/2}I_P \quad (1)$$

(индексы "р" и "м" относятся соответственно к рабочему и моделирующему режимам). В экспериментах принималось $k = 0,05$.

3. Зависимости средней относительной осцилляторной энергии t_{\perp} и разброса осцилляторных скоростей δv_{\perp} в пушке 1 (табл. 1) от нормированного тока пучка t_m при отсутствии диафрагмы 7 показаны на рис. 2 сплошными линиями. Нормировка тока $t_m = I/I_{\max}$ производилась на ток пучка I_{\max} , соответствующий режиму его ограничения пространственным зарядом. Измеренный ленгмюровский ток эквивалентного диода (отключенное магнитное поле) превосходит I_{\max} примерно на 30 %. Отметим, что значение I_{\max} , пересчитанное на рабочий режим составляет для пушки 1 300 А. Относительный скоростной разброс определялся как

$$\delta v_{\perp} = \frac{\sqrt{U_{c1}} - \sqrt{U_{c2}}}{\sqrt{U_{c0}}} \approx \frac{U_{c1} - U_{c2}}{2U_{c0}}, \quad (2)$$

где U_{c0}, U_{c1}, U_{c2} — потенциалы тормозящей сетки относительно катода, при которых коллекторный ток составляет соответственно 0.5; 0.1 и 0.9 уровня насыщения коллекторного тока. Легко видеть, что отношение в (2) равно:

$$(v_{\perp 2} - v_{\perp 1})/v_{\perp 0},$$

где $v_{\perp 0}$, $v_{\perp 1}$, $v_{\perp 2}$ — максимальные осцилляторные скорости электронов, попадающих на коллектор при потенциалах тормозящего электрода U_{c0} , U_{c1} , U_{c2} . Практически $v_{\perp 0} \approx \frac{1}{2}(v_{\perp 1} + v_{\perp 2})$ и совпадает со средней осцилляторной скоростью. За относительную среднюю осцилляторную энергию принималось отношение

$$t_{\perp} = (v_{\perp 0}/v)^2. \quad (3)$$

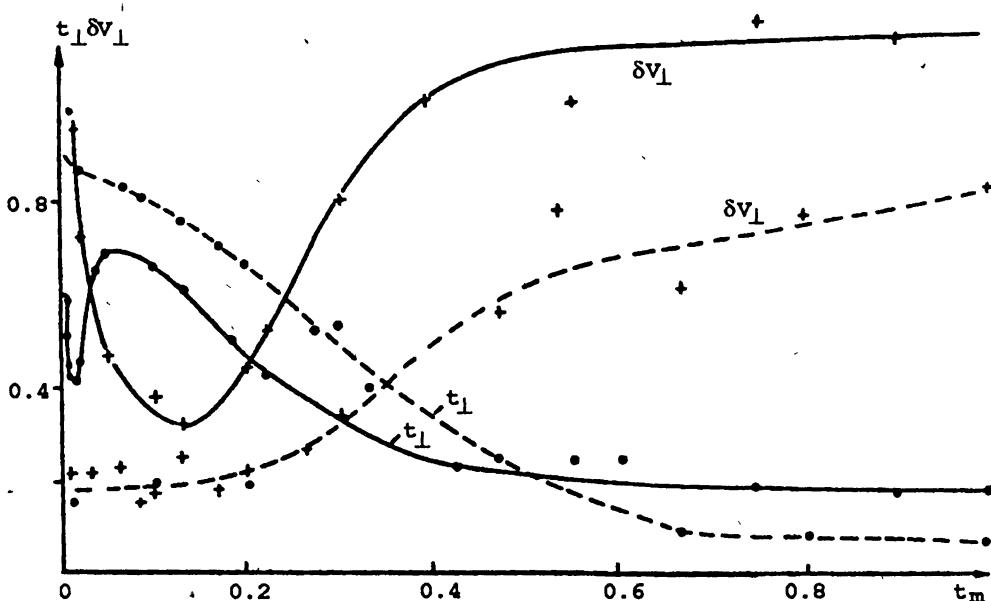


Рис. 2. Зависимости средней относительной осцилляторной энергии t_{\perp} и разброса осцилляторных скоростей δv_{\perp} от нормированного тока пучка (пушка 1).

Согласно рис. 2 зависимость $\delta v_{\perp}(t_m)$ имеет острый максимум при $t_m = 0.01 (\delta v_{\perp} \approx 100\%)$ и минимум при $t_m = 0.12$, что радикально отличает её от традиционных характеристик ВЭП с монотонным возрастанием δv_{\perp} как функции тока пучка. Важно также, что указанные аномалии наблюдаются при $t_m < 0.1$, где по оценкам влияние поля пространственного заряда первичных электронов на скоростной разброс незначительно.

Существенно другой вид приобретают характеристики пушки 1 после установки диафрагмы 7 — пунктирные линии на рис. 2. Как видно, зависимости становятся монотонными, скоростной разброс уменьшается,

а осцилляторная энергия возрастает. В отличие от предыдущего случая теперь изменение величин δv_{\perp} и t_{\perp} удовлетворительно согласуется с результатами траекторного анализа, выполненного без учёта отраженных электронов (см. табл. 1).

Параметры	Пушка 1	Пушка 2
Радиус катода $R_k^{(i)}$ (мм)	34	15
Угол наклона эмиттера к продольной оси $\Psi^{(i)}$	35	10
Угол наклона силовой линии к поверхности эмиттера $\phi^{(i)}$	28	7
Коэффициент перемагничивания $\alpha^{(i)}$	6.7	6.9
Расстояние анод—катод $d^{(i)}$ (мм)	24	44
Ширина эмиттера $l^{(i)}$ (мм)	12	6
Ускоряющее напряжение U_0 (кВ)	60	60
Анодное напряжение U_a (кВ)	51	60
Легмюровский ток $I_L^{(i)}$ (А) (расчётный)	200	60
Относительная поперечная энергия $t_{\perp}^{(i)}$ ($t_j = I^{(i)} / I_L^{(i)}$)	0.7 ($t_j = 0.1$) 0.65 ($t_j = 0.1$) 0.54 ($t_j = 0.23$)	
Относительный скоростной разброс $\delta v_{\perp}(t_j^{(i)})$	15 ($t_j = 0.1$) 10 ($t_j = 0$)	7 ($t_j = 0.1$) 31 ($t_j = 0.23$)

Очевидным подтверждением факта отражения части электронов от магнитной пробки является корреляция кривых $\delta v_{\perp}(t_m)$ и $t_{\perp}(t_m)$ (увеличению δv_{\perp} соответствует снижение t_{\perp} и наоборот), которая наблюдается при относительно больших δv_{\perp} . На рис. 3 показаны две финитных (для простоты) функции распределения электронов по осцилляторным скоростям в пучке, прошедшем в рабочее пространство, а также фракции электронов с осцилляторной скоростью $v_{\perp} > v$ (v — полная скорость). Естественно, что эти частицы отражаются от пробки и не попадают в рабо-

чее пространство. Примем в указанных случаях за величину абсолютного скоростного разброса проходящего пучка разность $v - v_{\perp \min}$.

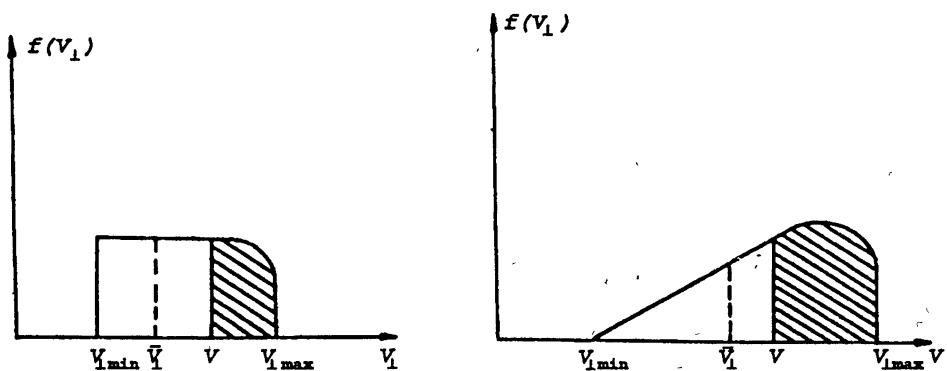


Рис. 3. Функции распределения электронов по осцилляторным скоростям.

Нетрудно получить, что для распределений (рис. 3) средняя осцилляторная энергия, определяемая как отношение $(v_\perp/v)^2$, равна:

$$t_\perp \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta v_\perp}{v^2}\right)}, \quad (4)$$

где $n = 2, 3$ для равномерного и треугольного распределений соответственно. Отметим, что корреляция между t_\perp и δv_\perp типа (4) имеет место независимо от того, выводятся ли диафрагмой отраженные электроны или захватываются в ловушку. Разница состоит лишь в том, что, если отраженные электроны не перехватываются, то они участвуют в формировании результирующего скоростного распределения. Как видно из сопоставления сплошных и пунктирных кривых на рис. 2, указанный эффект проявляется при весьма малом токе пучка. Это свидетельствует о том, что концентрация ЗЭ существенно превышает плотность частиц в первичном пункте. С другой стороны, можно предположить, что имеет место корреляция фаз траекторий захваченных частиц (см. [3]).

Скоростной разброс и средняя осцилляторная энергия для пушки 2, формирующей регулярно-пересекающийся пучок (табл. 1) как функции приведенного тока показаны на рис. 4. Сплошные линии также относятся к системе без диафрагмы 7, а пунктирные — к случаю перехвата отраженных электронов диафрагмой. В отличие от пушки 1 у кривых отсутствуют явно выраженные экстремумы. Однако по-прежнему перехват

отражённых электронов значительно понижает скоростной разброс. Параметры пучка с исключёнными отражёнными электронами удовлетворительно согласуются с расчётными, полученными из траекторного анализа (табл. 1).

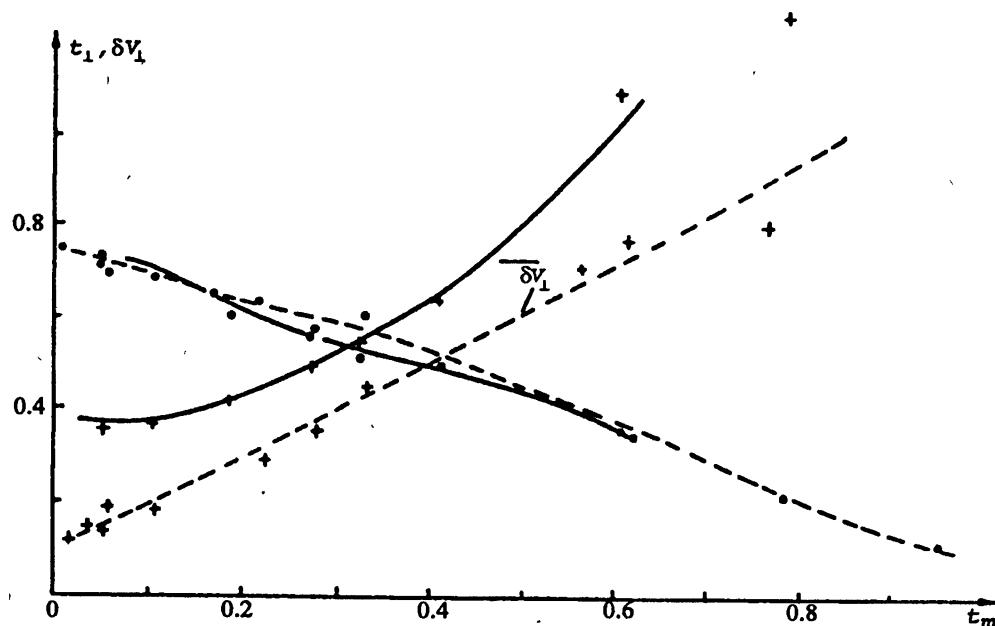


Рис. 4. Зависимости скоростного разброса и средней осцилляторной энергии от нормированного тока пучка (пушка 2).

Отметим, что измерялась также зависимость скоростного разброса от магнитного поля в окрестности эмиттера, которое могло корректироваться катушкой 8 (рис. 1). Как оказалось, при отсутствии диафрагмы 7 (наличие ЗЭ), сравнительно небольшие вариации магнитного поля на катоде B_k сильно меняют δv_\perp , что свидетельствует о существенной неадиабатичности электрического поля в прикатодной области. После установки диафрагмы малые изменения B_k практически не сказываются на δv_\perp .

Во всех рассматриваемых случаях не отмечалась потеря устойчивости пучка. Можно, таким образом, констатировать, что, несмотря на существенное влияние отражённых электронов на скоростное распределение винтовых пучков, существует механизм удаления частиц из ловушки, не нарушающий устойчивость ВЭП.

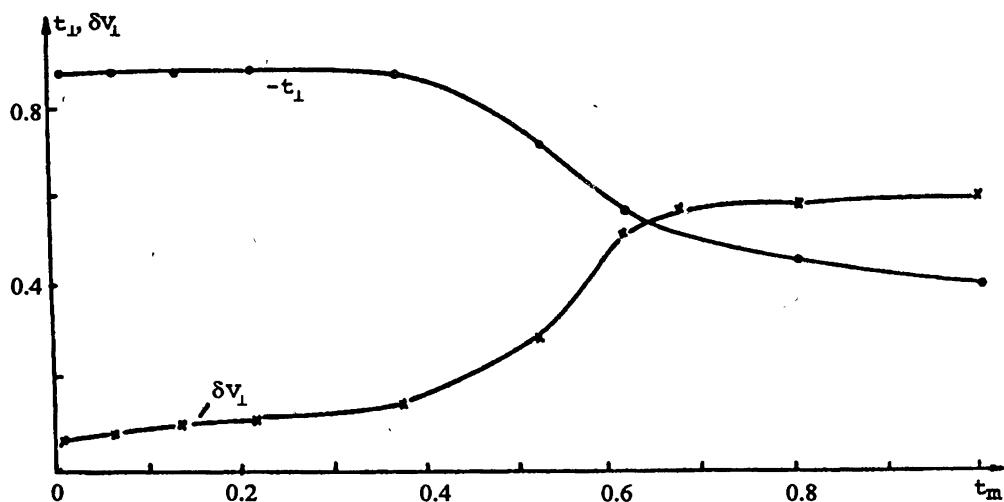


Рис. 5. Зависимости параметров пучка от тока для пушки с секторным эмиттером.

4. Примененный в схеме рис. 1 способ перехвата отраженных электронов едва ли целесообразно использовать в мощных гиротронах, ввиду большой тепловой нагрузки диафрагмы 7, на которую попадают не только отраженные электроны, но и первичный пучок. Определенные преимущества может представить секционирование эмиттера таким образом, чтобы исключить перехват первичных электронов диафрагмой. Хотя в этом случае плотность тока на активной части катода (при сохранении полного тока пучка) и возрастает, однако качество пучка повышается.

На рис. 5 приведены зависимости параметров пучка от приведенного тока в пушке 1 (квазиламинарный пучок), у которой примерно половина эмиттера (по азимуту) закрыта tantalовой фольгой, а диафрагма 7 с секторным вырезом установлена в плоскости таким образом, что пропускает полностью первичный пучок. Максимальный ток I_{max} уменьшается примерно в два раза. Согласно рис. 2, 5, указанная система демонстрирует существенное улучшение качества пучка, что в определенной степени компенсирует увеличение плотности тока (при том же рабочем токе). Характеристики ВЭП вновь удовлетворительно согласуются с результатами траекторного анализа.

Другим способом ослабления влияния ЗЭ может служить секциони-

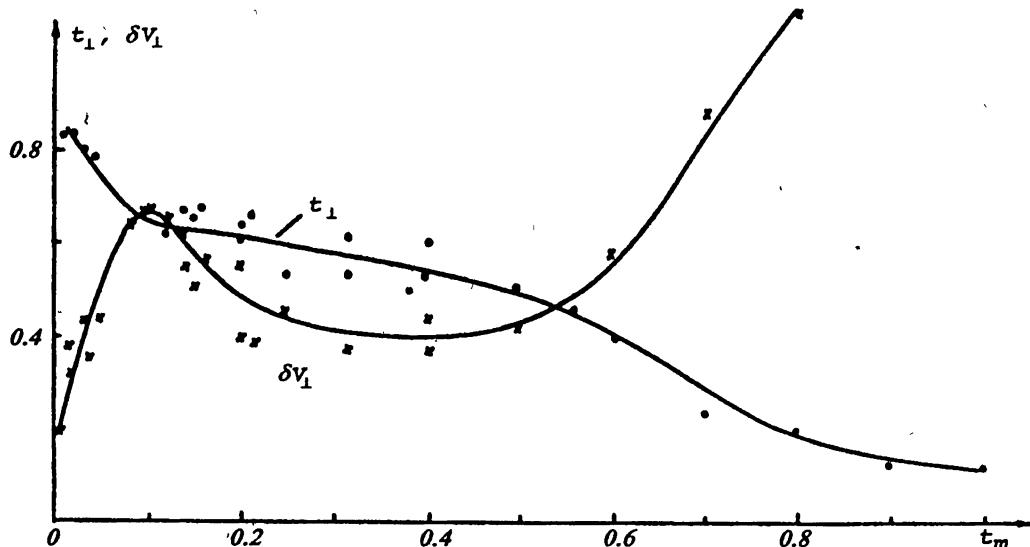


Рис. 6. Зависимости параметров пучка от тока для пушки с эмиттером секционированным по ширине.

рование эмиттера по его ширине. Исследовался, в частности, вариант с катодом, на который наносились три узких (по 2 мм) эмиттирующих пояска, разделённых промежутками по 3 мм, вместо одного эмиттера шириной 12 мм. Зависимость параметров пучка от приведённого тока показана на рис. 6. Сравнение со сплошными кривыми на рис. 2 свидетельствует об определённом улучшении качества пучка. Отметим, что при секционировании максимальный ток пучка уменьшается только в 1.5 раза, хотя активная площадь эмиттера сокращена вдвое. Конечно, характеристики ВЭП на рис. 6 уступают показанным на рис. 5. Однако важным преимуществом секционированных по ширине систем является полное исключение перехвата прямого пучка.

Отметим в заключение, что переход к более коротковолновым системам, отличающимся относительно малыми ларморовским радиусом и шагом траекторий в прикатодной области, должен, по-видимому, способствовать повышению качества квазиламинарных ВЭП. В этом случае следует ожидать ослабления эффекта фазировки захваченных электронов и, следовательно, их влияния на скоростной разброс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цимринг Ш.Е. Лекции по электронике СВЧ на 3-й зимней школе-семинаре для инженеров. — Саратов: СГУ, 1974. Кн.4. С.55.
2. Иванов А.А. и др. // ЖЭТФ. 1973. Т.65. С.1857.
3. Запевалов В.Е., Мануилов В.Н., Цимринг Ш.Е. // Известия вузов. Радиофизика (в печати).
4. Авдошин Е.Г., Гольденберг А.Л. // Известия вузов. Радиофизика. 1973. Т.16. N 10. С.1605.
5. Авдошин Е.Г. и др. // Известия вузов. Радиофизика. 1973. Т.16. N 4. С.605.

Институт прикладной физики
РАН, г. Н. Новгород

Поступила в редакцию
20 декабря 1994 г.

**EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF INTENSIVE SCREW BEAMS
WITH TRAPPED ELECTRONS**

V. E. Zapevalov, Sh. E. Tsimring

There are experimentally investigated the velocity dispersion and mean oscillatory energy of gyrotron intensive screw beams in the presence of electrons reflected from a magnetic mirror and captured by an adiabatic trap. The results of experiments testify to a significant influence of the trapped electrons on the beam parameters especially in the systems producing quasi-laminar beams. There have been considered some modifications of magnetron injection guns with a reduction of reflected electron influence.

**ОБОВЩЕНИЕ ЗАДАЧИ
ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛОВ
В ПРИСУТСТВИИ НЕГАУССОВЫХ
ПАССИВНЫХ ПОМЕХ**

М. А. Островский

Синтезированы асимптотически оптимальные обнаружители слабых и сильных сигналов со случайными неинформативными параметрами на фоне негауссовых пассивных помех. Рассмотрена возможность использования адаптивного подхода к синтезу и найдена соответствующая структура оптимального обнаружителя сигналов с неизвестной начальной фазой и амплитудой.

В [1, 2] рассмотрена модель и найдено выражение для многомерной плотности вероятности негауссовой пассивной помехи со статистически зависимыми отсчётами, которое в матричной форме для случая простого зондирующего сигнала имеет вид

$$W_N(\mathbf{H}) = \prod_{\nu=1}^N w_1(\Psi_\nu^T \mathbf{H}_\nu), \quad (1)$$

где $\mathbf{H}_\nu = [\eta_0, \dots, \eta_{N-1}]$; $\Psi_\nu = [\psi_\nu, \dots, \psi_{\nu-N+1}]$ — вектор-столбцы отсчётов помехи и весовых коэффициентов обеляющего междупериодного фильтра; N — объём выборки; $w_1(\cdot)$ — одномерная плотность вероятности “обелённых” отсчётов помехи; т — эннак транспонирования.

Сущность модели состоит в том, что при сканировании диаграммы направленности по угловой координате и импульсном зондировании облака отражателей, статистически зависимые отсчёты помехи представляются результатом междупериодной фильтрации негауссовых статистически независимых отсчётов отражений из части импульсного объёма $\Delta V/N$. Поскольку при достаточно большом числе зондирований N статистика помехи характеризуется лишь малой частью отражателей в поле обзора, и

это число может оказаться недостаточным для выполнения условий центральной предельной теоремы, закон распределения отражений может существенно отличаться от гауссова. Как показано в [1], "обеление" помехи приводит к устраниению статистической связи между отсчётами, вследствие чего N -мерная плотность выражается через произведение одномерных плотностей "обелённых" отсчётов (1).

В [2] на основании разложения (1) в ряд по степеням сигнала исследовано асимптотическое поведение логарифма отношения правдоподобия и синтезирована структура асимптотически оптимального (АО) обнаружителя детерминированных слабых по сравнению с помехой сигналов. Следует отметить, что рассмотренный случай является предельным и не даёт полного представления о структуре обнаружителя в тех ситуациях, когда отношение мощностей сигнала и помехи произвольно, а параметры сигнала случайны. В связи с этим в работе предпринимается попытка восполнения отмеченных пробелов и указываются возможные пути решения проблемы обнаружения, когда синтез затруднен или невозможен традиционными методами.

ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Выражение (1) позволяет найти функцию и логарифм отношения правдоподобия (ЛОП) в самом общем виде, если параметры сигнала точно известны. В том случае, когда априорные вероятности наличия или отсутствия сигнала неизвестны, а матрица потерь неопределена, по найденному ЛОП возможен синтез обнаружителей максимального правдоподобия и Неймана–Пирсона. Обнаружители при этом отличаются только величиной порога обнаружения C .

Сформулируем задачу синтеза следующим образом. Пусть на вход обнаружителя в одном кольце дальности поступает выборка \mathbf{Y}_v , аддитивной смеси детерминированного простого сигнала \mathbf{S}_v и пассивной помехи \mathbf{H}_v , имеющая размерность N . Требуется построить функцию правдоподобия, получаемую из (1) путем смещения N -мерного распределения под действием сигнала, а затем сравнить с порогом обнаружения C логарифм

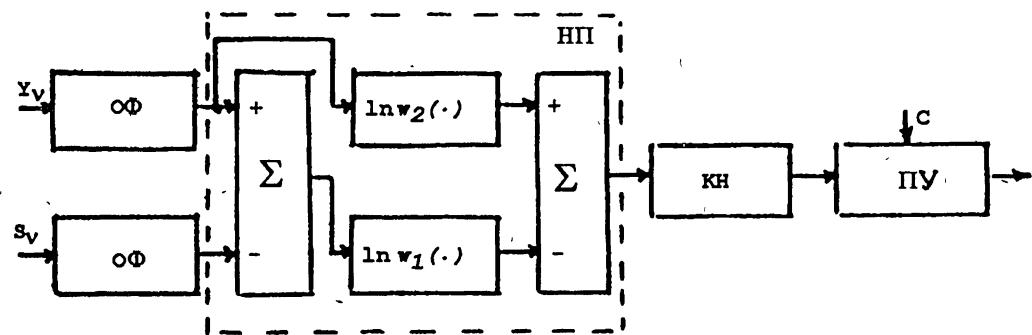


Рис. 1.

отношения правдоподобия

$$\ln \Lambda = \sum_{\nu=1}^N [\ln w_1(\Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu - \Psi_\nu^T \mathbf{S}_\nu) - \ln w_1(\Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu)]. \quad (2)$$

В соответствии с (2) оптимальный обнаружитель представляет последовательность междупериодного обеляющего фильтра (ОФ), безынерционного нелинейного преобразователя (НП), когерентного накопителя сигнальной пачки (КН) и порогового устройства (ПУ).

Существенным отличием обнаружителя от известных [3, 4] является то, что инерционное нелинейное преобразование смеси разбивается на инерционное линейное и безынерционное нелинейное, а также то, что при любом законе распределения помехи операция её "обеления" осуществляется в линейной части приёмника на входе НП. Характеристика НП определяется одномерным законом распределения помехи на выходе ОФ. При гауссовойности последней совокупность "НП-КН" реализует вычисление корреляционной суммы $\sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu \mathbf{S}_\nu^T \Psi_\nu$. В случае приёма детерминированного сложного сигнала закон распределения помехи имеет вид [1], а структура обнаружителя дополняется внутрипериодным фильтром, согласованным с одиночным сигналом на выходе ОФ.

Обнаружитель (рис. 1) имеет достаточно общий вид и оптимален при произвольных значениях мощностей помехи и сигнала, однако его реализация требует знания всех компонент вектора параметров θ последнего.

В реальных условиях такое знание невозможно и, прежде всего, это относится к неинформативным параметрам α ($\alpha_1 \dots \alpha_k$). При этом (2) характеризует логарифм условного отношения правдоподобия (ОП) $\Lambda(\alpha)$, а безусловное ОП вычисляется путём усреднения последнего по ансамблю всех возможных значений компонент вектора

$$\Lambda = \int_{(\alpha)} \exp \left\{ \sum_{\nu=1}^N \left[\ln w_1(\Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu - \Psi_\nu^T \mathbf{S}_\nu | \alpha) - \ln w_1(\Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu) \right] \right\} P(\alpha) d\alpha, \quad (3)$$

где $P(\alpha)$ — априорная плотность вероятности вектора неинформативных параметров.

Из рассмотрения (3) следует, что нахождение Λ даже при известной плотности $P(\alpha)$ вызывает серьёзные затруднения, обусловленные достаточно общим видом задания одномерной плотности вероятности помех $w_1(\cdot)$. Только в ряде конкретных случаев, например, при гауссовости помехи, возможно нахождение ОП в явном виде, а, следовательно, возможно проведение синтеза обнаружителя сигналов со случайными неинформативными параметрами. Поэтому, несмотря на простоту и физическую ясность алгоритма (2), его непосредственное использование для дальнейшего синтеза вряд ли можно считать целесообразным.¹

Рассмотрим некоторые возможные представления алгоритма (2), для чего разложим оба его слагаемых в ряд по степеням аргумента.

$$\ln \Lambda = \sum_{\nu=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \left[(\Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu - \Psi_\nu^T \mathbf{S}_\nu)^n - (\Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu)^n \right], \quad (4)$$

где

$$a_n = \left. \frac{\partial^n \ln w_1(x)}{\partial x^n} \right|_{x=0} \text{ — коэффициенты разложения.}$$

Представим далее

$$\begin{aligned} (\Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu - \Psi_\nu^T \mathbf{S}_\nu)^n &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu)^{n-k} (-\Psi_\nu^T \mathbf{S}_\nu)^k = \\ &= (\Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu)^n + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\Psi_\nu^T \mathbf{Y}_\nu)^{n-k} (-\Psi_\nu^T \mathbf{S}_\nu)^k. \end{aligned}$$

¹ Вопрос о целесообразности использования (2) ещё раз будет обсуждаться при рассмотрении адаптивного подхода к обнаружению.

Подставляя последнее выражение в (4), учитывая, что $k \leq n$ и заменяя индекс суммирования $n - k = r$, получим

$$\ln \Lambda = \sum_{\nu=1}^N \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+r}}{k! r!} (\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})^r (-\Psi_{\nu}^T S_{\nu})^k. \quad (5)$$

Двойное суммирование (по r и k) в (5) можно производить двумя способами. Первый состоит в объединении и суммировании всех слагаемых при фиксированной степени сигнального члена.

$$\Phi = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+r}}{k! r!} (\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})^r (-\Psi_{\nu}^T S_{\nu})^k = \frac{(-\Psi_{\nu}^T S_{\nu})}{1!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{r+1}}{r!} (\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})^r + \\ + \frac{(\Psi_{\nu}^T S_{\nu})^2}{2!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{r+2}}{r!} (\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})^r + \dots + \frac{(-\Psi_{\nu}^T S_{\nu})^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{r+k}}{r!} (\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})^r + \dots$$

Учитывая, что

$$\ln w_1(\Psi_{\nu}^T Y_{\nu}) = \ln w_1(0) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r}{r!} (\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})^r,$$

получаем

$$\ln \Lambda = \sum_{\nu=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(\Psi_{\nu}^T S_{\nu})^k}{k!} \frac{\partial^k \ln w_1(\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})}{\partial (\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})^k}. \quad (6)$$

Выражение (6) является одним из возможных представлений ЛОП в виде бесконечного полиномиального ряда по степеням сигнального члена. Возможно и другое его представление, получаемое при нахождении Φ путём объединения и суммирования слагаемых при фиксированной степени помехового члена

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} (-\Psi_{\nu}^T S_{\nu})^k + \frac{(\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})}{1!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{k!} (-\Psi_{\nu}^T S_{\nu})^k + \dots + \\ + \frac{(\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})^r}{r!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{k!} (-\Psi_{\nu}^T S_{\nu})^k + \dots$$

Учитывая, что

$$\ln w_1(-\Psi_{\nu}^T S_{\nu}) = \ln w_1(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} (\Psi_{\nu}^T S_{\nu})^k,$$

получаем, при условии симметричности одномерного закона распределения помехи, вторую форму записи ЛОП

$$\ln \Lambda = \sum_{\nu=1}^N \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})^r}{r!} \left[(-1)^r \frac{\partial^r \ln w_1(\Psi_{\nu}^T S_{\nu})}{\partial (\Psi_{\nu}^T S_{\nu})^r} - a_r \right]. \quad (7)$$

Выражения (6) и (7) являются точными и характеризуют ЛОП при произвольных значениях мощностей сигнала и помехи. Получаемый при этом обнаружитель представляет нелинейный полиномиальный приёмник обелённых отсчётов смеси помехи и сигнала с когерентным накопителем последнего на выходе и пороговое устройство.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Использование (6) и (7) для отыскания безусловного ОП (3) также затруднено необходимостью учёта значительного числа членов представленных рядов. Поэтому интерес представляет исследование асимптотического поведения этих алгоритмов при неограниченном уменьшении и увеличении отношения сигнал/помеха, когда возможно ограничение рассматриваемых рядов до линейного члена. Рассмотрение предельных случаев слабого и сильного сигнала позволяет также сделать некоторые выводы о структуре обнаружителя в области промежуточных значений отношения сигнал/помеха. Рассмотрим оба этих случая.

1. Термин “слабость сигнала” будем понимать в том же смысле, что и в [3], где в качестве его количественной меры вводится зависимость сигнала от числового параметра g

$$S_{\nu}(g) = g S_{\nu}^0,$$

где S_{ν}^0 — вектор отсчётов нормированного к помехе сигнала, а $g = \left[\frac{S_{\nu} S_{\nu}^T}{M(H_{\nu} H_{\nu}^T)} \right]^{1/2}$ — отношение сигнал/помеха. Важном, с практической точки зрения, случае обнаружения слабого, по сравнению с помехой,

сигнала ($g \ll 1$) из (6) в результате пренебрежений членами, содержащими g^k при $k > 1$, следует асимптотическое приближение ЛОП

$$\ln \Lambda \simeq - \sum_{\nu=1}^N (\Psi_{\nu}^T S_{\nu}) \frac{\partial \ln w_1(\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})}{\partial (\Psi_{\nu}^T Y_{\nu})}. \quad (8)$$

Вытекающая из (8) структура АО обнаружителя слабых сигналов, образованная последовательным соединением обеляющего фильтра, нелинейного преобразователя, когерентного накопителя, согласованного с сигнальной пачкой на выходе ОФ и порогового устройства, представлена на рис. 2.

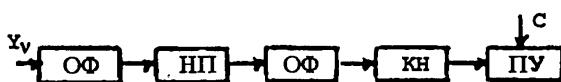


Рис. 2.

Из (8) следует, что при отличии закона распределения помехи от нормального приёмная часть обнаружителя является нелинейной, причём НП помехи с характеристикой $F(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \ln w_1(x)$ осуществляется на выходе ОФ после выполнения линейной операции "обеления" помехи. В случае использования сложного зондирующего сигнала структура обнаружителя дополняется внутрипериодным согласованным фильтром (СФ) на выходе НП.

2. Случай обнаружения сильных сигналов ($g \gg 1$) является вторым предельным случаем, когда для нахождения ЛОП не требуется учёт бесконечного числа членов разложений (6) и (7). Рассмотрение данного случая интересно также в применении к задаче оценки параметров, когда область сильных сигналов является "рабочей" для проведения достоверных измерений. При этом, учитывая, что для большинства симметричных распределений $a_1 = \left. \frac{\partial \ln w_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$, из (7) получаем

$$\ln \Lambda \simeq C - \sum_{\nu=1}^N (\Psi_{\nu}^T Y_{\nu}) \frac{\partial \ln w_1(\Psi_{\nu}^T S_{\nu})}{\partial (\Psi_{\nu}^T S_{\nu})}, \quad (9)$$

где $C = \ln w_1(\Psi_{\nu}^T S_{\nu}) - \ln w_1(0)$ — порог обнаружения.

Выражение (9) представляет алгоритм АО обнаружения сильных детерминированных сигналов, а соответствующая ему структура обнаружителя приведена на рис. 3. Из (9) следует, что при любом законе распределения помехи приёмная часть обнаружителя сильных сигналов является линейной. Внутрипериодный СФ согласован не с самим сигналом на выходе ОФ, а с его нелинейным преобразованием $F(x)$, что отличает данный обнаружитель от гауссова.

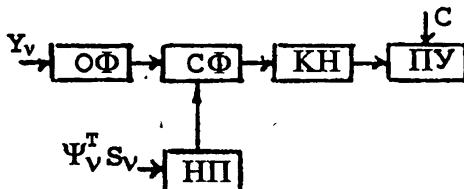


Рис. 3.

Таким образом, из сопоставления (8) и (9) следует, что при увеличении порогового значения отношения сигнал/помеха структура обнаружителя от существенно нелинейной стремится к линейной. Независимо от закона распределения помехи и отношения сигнал/помеха операция её обеления должна реализоваться как линейная и осуществляться на входе приёмника.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕИНФОРМАТИВНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Как показано в [2], нелинейное преобразование $F(x)$ случайных узкополосных помехового и сигнального членов с равномерно распределённой и начальной фазой, представленное в полярных координатах, сводится к модуляции процесса x некоторой нелинейной функцией от модуля этого процесса

$$F(x_\nu) = x_\nu Q(|x_\nu|), \text{ где } Q(|x_\nu|) = -\frac{1}{|x_\nu|} \frac{\partial}{\partial |x_\nu|} \ln \frac{w_1(|x_\nu|)}{|x_\nu|}. \quad (10)$$

При этом алгоритмы АО обнаружения (8) и (9) с точностью до константы

имеют вид

$$\ln \Lambda \simeq \sum_{\nu=1}^N (\Psi_{\nu}^T S_{\nu} Y_{\nu}^T \Psi_{\nu}) Q(|x_{\nu}|), \quad (11)$$

где

$$x_{\nu} = \begin{cases} \Psi_{\nu}^T Y_{\nu} & \text{— при обнаружении слабых сигналов;} \\ \Psi_{\nu}^T S_{\nu} & \text{— при обнаружении сильных сигналов.} \end{cases}$$

В случае гауссова закона распределения помехи модулирующая функция имеет вид

$$Q(|x_{\nu}|) = -\frac{1}{|x_{\nu}|} \frac{\partial}{\partial |x_{\nu}|} \ln \frac{|x_{\nu}|}{\sigma^2 |x_{\nu}|} e^{-\frac{|x_{\nu}|^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2},$$

а нелинейное преобразование $f(x_{\nu}) = \frac{x_{\nu}}{\sigma^2}$ трансформируется в линейное.

При лапласовском законе

$$Q(|x_{\nu}|) = -\frac{1}{|x_{\nu}|} \frac{\partial}{\partial |x_{\nu}|} \ln \frac{|x_{\nu}|}{\sqrt{2\sigma^2} |x_{\nu}|} e^{-\frac{|x_{\nu}|^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} |x_{\nu}|^{-1},$$

а нелинейное преобразование $F(x_{\nu}) = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} x_{\nu} |x_{\nu}|^{-1}$ сводится к идеальному ограничению процесса.

Поскольку нелинейная функция $Q(|x_{\nu}|)$ не зависит от фазы φ случайного процесса, несложно показать, что при обнаружении простого сигнала со случайной начальной фазой, равномерно распределенной в пределах $[-\pi; \pi]$, выражение (3) для логарифма безусловного ОП при подстановке в него (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \ln \Lambda &= \ln \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \sum_{\nu=1}^N [\Psi_{\nu}^T S_{\nu}(\varphi) Y_{\nu}^T \Psi_{\nu}] Q(|x_{\nu}|) \right\} d\varphi = \\ &= \ln I_0 \left| \sum_{\nu=1}^N \Psi_{\nu}^T S_{\nu} Y_{\nu}^T \Psi_{\nu} Q(|x_{\nu}|) \right|, \end{aligned} \quad (12)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя. В соответствии с (12) структуры АО обнаружителей (рис. 2, 3) дополняются амплитудными детекторами на входе ПУ аналогично тому, как это делается в случае гауссова закона распределения помехи.

При обнаружении сигналов со случайными фазой φ и амплитудой a , распределенной по рэлеевскому закону, выражение для ЛОП в случае приема слабого сигнала с точностью до постоянной составляющей равно

$$\begin{aligned} \ln \Lambda &= \ln \int_0^\infty a e^{-a^2/2\sigma^2} I_0 \left| \sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu^T S_\nu(a) Y_\nu^T \Psi_\nu \right| Q(|\Psi_\nu^T Y_\nu|) da = \\ &= \left| \sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu^T S_\nu Y_\nu^T \Psi_\nu Q(|\Psi_\nu^T Y_\nu|) \right|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Последнее выражение означает, что при обнаружении слабых сигналов со случайными неинформативными параметрами характеристика детектора на входе ПУ не зависит от закона распределения помехи и является квадратичной, что совпадает с аналогичным случаем воздействия гауссовой помехи.

При воздействии сильного сигнала

$$\ln \Lambda = \ln \int_0^\infty a e^{-a^2/2\sigma^2} I_0 \left| \sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu^T S_\nu(a) Y_\nu^T \Psi_\nu Q \left[|\Psi_\nu^T S_\nu(a)| \right] \right| da \quad (14)$$

вид характеристики детектора зависит от закона распределения модуля помехи и при его произвольности не может быть однозначно определён. Только для ряда конкретных распределений возможно нахождение ЛОП. Так, при гауссости помехи модулирующий член постоянен, выражение для ЛОП имеет вид

$$\ln \Lambda = \ln \int_0^\infty a e^{-a^2/2\sigma^2} I_0 \left| \sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu^T S_\nu(a) Y_\nu^T \Psi_\nu \right| da = \gamma \left| \sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu^T S_\nu Y_\nu^T \Psi_\nu \right|^2,$$

где $\gamma = \text{const}$, а характеристика детектора является квадратичной. При лапласовском законе распределения помехи аргумент под знаком бесселевой функции не зависит от амплитуды сигнала, поэтому последняя может быть вынесена за знак интеграла, и в силу единичной нормированности интеграла от плотности вероятности ЛОП равен

$$\ln \Lambda = \ln I_0 \left| \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu^T S_\nu Y_\nu^T \Psi_\nu \right|,$$

и, следовательно, характеристика детектора является линейной.

Таким образом из вышеизложенного следует, что при обнаружении слабого случайного сигнала характеристика детектора не зависит от закона распределения помехи и является квадратичной, при обнаружении сильного случайного сигнала характеристика детектора определяется видом одномерного закона распределения помехи и в произвольном случае не может быть однозначно вычислена.

АДАПТИВНЫЙ ПОДХОД К ОБНАРУЖЕНИЮ СИГНАЛОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕИНФОРМАТИВНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

На основании материалов предыдущих разделов мы пришли к неутешительному выводу, что синтез оптимального обнаружителя сигналов со случайными неинформативными параметрами, даже при априорно известном их распределении, возможен лишь в асимптотическом случае воздействия предельно слабых сигналов. Еще более усложняется ситуация, когда сведения о статистике параметров недостаточны или полностью отсутствуют. В этом случае поставленную задачу не удается осуществить в рамках классической теории статистических решений, и потому возникает потребность в новых подходах к её решению.

Один из возможных подходов указывает теория адаптации, в терминах которой задача оптимального обнаружения формулируется следующим образом. Пусть имеется объект адаптации (в нашем случае обнаружитель сигналов (рис. 1)), на вход которого действует смесь негауссовой помехи и сигнала с точно известной формой, но неизвестными, хотя и постоянными за время адаптации неинформативными параметрами $\mathbf{Y}_n(\alpha)$. При отсутствии в смеси сигнала один из его параметров (амплитуда) принимает нулевое значение. Состояние объекта может быть изменено путём вариации вектора управляющего воздействия \mathbf{S}_n , форма которого также известна, а параметры $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_k)$ могут изменяться в процессе адаптации.

Поскольку объект представляет собой обнаружитель сигналов, его состояние в каждый момент времени n полностью характеризуется безусловным ОП (3), либо безусловным ЛОП, выполняющим в данном случае

роль функционала качества системы

$$J_n(\hat{\alpha}) = \int_{(\alpha)} \ln \Lambda_n(\alpha, \hat{\alpha}) P(\alpha) d\alpha, \quad (15)$$

где $d\alpha = (d\alpha_1 \dots d\alpha_k)$;

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_n(\alpha, \hat{\alpha}) &= \sum_{\nu=n-N}^n \left\{ \ln w_1 [\Psi_\nu^T Y_\nu(\alpha) - \Psi_\nu^T S_\nu(\hat{\alpha})] - \ln w_1 [\Psi_\nu^T Y_\nu(\alpha)] \right\} = \\ &= \ln \Lambda_{n-1}(\alpha, \hat{\alpha}) + \ln w_1 [\Psi_n^T Y_n(\alpha) - \Psi_n^T S_n(\hat{\alpha})] - \ln w_1 [\Psi_n^T Y_n(\alpha)]. \end{aligned}$$

Вариация вектора $\hat{\alpha}$ приводит к изменению функционала (15), и при полном совпадении компонент вектора управления $\hat{\alpha}$ и вектора неинформационных параметров α безусловный ЛОП достигает максимального значения (максимум "правдоподобия" [5]), а получаемые при этом оценки информационных параметров являются максимально правдоподобными. Таким образом, если функционал (15) выпуклый и имеет единственный экстремум, то цель адаптации состоит в нахождении такого вектора управляющих параметров $\hat{\alpha}$, который обеспечивал бы достижение этим функционалом экстремального значения, т. е. являлся бы решением уравнения оптимизации

$$\nabla_{\hat{\alpha}} J_n(\hat{\alpha}) = 0, \quad (16)$$

где $\nabla_{\hat{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \dots \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \right)$ — градиент функционала по компонентам вектора управления.

Уже из постановочной части задачи вытекает, что адаптивный обнаружитель должен состоять из приемника, преобразующего входные отсчеты в ЛОП (рис. 1), и решающего устройства (РУ), вычисляющего корни уравнения (16) и использующего последние в качестве оценок вектора управления. Решение (16) требует нахождения функционала $J_n(\hat{\alpha})$, который может интерпретироваться как среднее значение ЛОП по ансамблю реализаций вектора α . Если реализация ансамблевого усреднения затруднительна по техническим причинам или невозможна из-за незнания распределения $P(\alpha)$, ансамблевое усреднение может быть заменено усреднением по времени, в результате чего процедура решения (16) превращается в итерационную [6]

$$\hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}_{n-1} - \Gamma_n \nabla_{\hat{\alpha}_n} \ln \Lambda_n(\alpha, \hat{\alpha}_n), \quad (17)$$

где Γ_n — N -мерная квадратная матрица, определяющая сходимость вектора $\hat{\alpha}$ к оптимальному значению.

Из (17) следует, что в установившемся состоянии ($\hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}_{n-1}$) итерационный алгоритм обеспечивает необходимое и достаточное условие экстремума

$$\nabla_{\hat{\alpha}} \ln \Lambda_n(\alpha, \hat{\alpha}) = \nabla_{\hat{\alpha}} J_n(\hat{\alpha}) = 0.$$

Алгоритм (17), реализуемый в решающем устройстве обнаружителя, позволяет уточнять недостающие априорные сведения о сигнале и при неограниченном увеличении времени адаптации формирует максимально правдоподобные оценки его неинформативных параметров. Последнее означает, что при увеличении объёма входной выборки адаптивный обнаружитель сигналов на фоне негауссовых помех стремится к максимально правдоподобному.

Отметим, что (17) позволяет также осуществлять максимально правдоподобную оценку информативных параметров сигнала в присутствии негауссовых помех, превращая адаптивный алгоритм в алгоритм совместного обнаружения-измерения.

Конкретизируем (17), подставляя в него зависимость (15). Получаемый при этом алгоритм адаптивной настройки вектора управления $\hat{\alpha}$ к неизвестному вектору неинформативных параметров α имеет вид

$$\hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}_{n-1} + \Gamma_n \frac{\partial \ln \omega_1 [\Psi_n^T Y_n(\alpha) - \Psi_n^T S_n(\hat{\alpha}_n)]}{\partial [\Psi_n^T Y_n(\alpha) - \Psi_n^T S_n(\hat{\alpha}_n)]} \Psi_n^T \frac{dS_n(\hat{\alpha}_n)}{d\hat{\alpha}_n}. \quad (18)$$

В том случае, когда ожидаемый сигнал представляет когерентную пачку узкополосных радиоимпульсов с безразмерной несущей частотой $\bar{\omega}$, амплитудой \hat{a} и начальной фазой $\hat{\varphi}$

$$S_n(\hat{\alpha}_n) = \hat{a}_n \cos(\bar{\omega}n - \hat{\varphi}) = \hat{q}_{cn} \cos \bar{\omega}n + \hat{q}_{sn} \sin \bar{\omega}n,$$

где $\hat{q}_{cn} = \hat{a}_n \cos \hat{\varphi}_n$; $\hat{q}_{sn} = \hat{a}_n \sin \hat{\varphi}_n$, адаптивное управление осуществляется по двум неинформативным параметрам \hat{q}_{cn} и \hat{q}_{sn} . Находя из последней формулы выражения для производных

$$\frac{dS_n}{d\hat{q}_{cn}} = \cos \bar{\omega}n; \quad \frac{dS_n}{d\hat{q}_{sn}} = \sin \bar{\omega}n$$

и подставляя их в (18), получаем алгоритм оптимального управления и структуру адаптивного обнаружителя случайного узкополосного сигнала на фоне негауссовых пассивных помех (рис. 4).

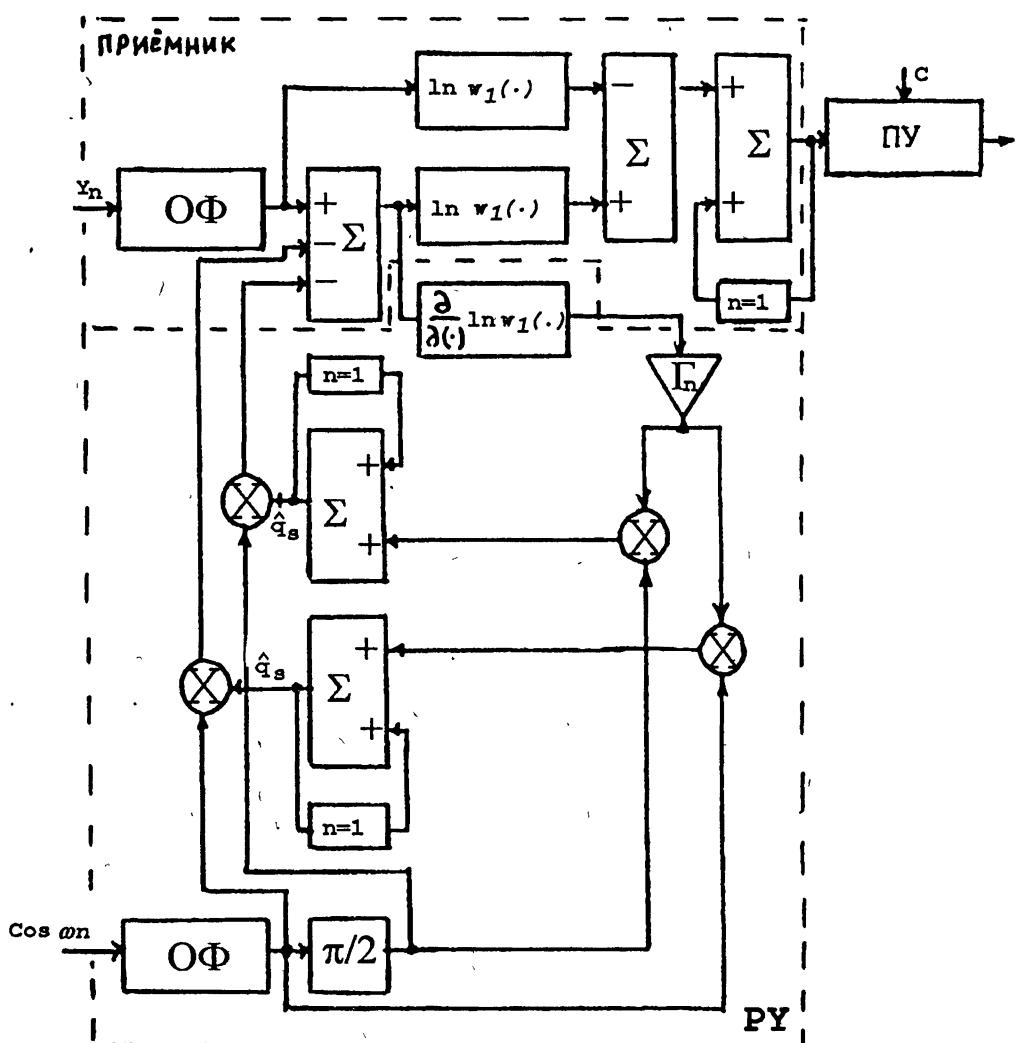


Рис. 4.

Обнаружитель является оптимальным при произвольном отношении сигнал/помеха и содержит приёмник максимального правдоподобия, решающее и пороговое устройства. В решающем устройстве путём междупериодного накопления данных вычисляются оптимальные оценки неинформативных параметров, которые затем используются в процессе форми-

рования ожидаемого сигнала и управления приёмником. Поскольку выше рассматривался случай обнаружения пачки простых радиосигналов, адаптация неинформативных параметров осуществлялась междупериодно в каждом из элементов дальности. При использовании сложного зондирующего сигнала, наряду с междупериодной, имеется возможность и внутрипериодной адаптации и обнаружителя за время длительности несжатого сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский М. А. // Изв. вузов. Радиофизика, 1990. Т. 33. № 9. С. 1111.
2. Островский М. А., Пахомов Ю. Й. // Изв. вузов. Радиофизика, 1990. Т. 33. № 6. С. 689.
3. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. — М.: Сов. радио, 1978.
4. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П. А. Бакута. — М.: Радио и связь, 1984.
5. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. Т. 2. — М.: Сов. радио, 1962.
6. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию
20 декабря 1993 г.

**GENERALIZATION OF THE PROBLEM ON OPTIMAL DETECTION OF
SIGNALS ON THE NON-HAUSSIAN PASSIVE CLUTTER BACKGROUND**

M. A. Ostrovskij

We have synthesized asymptotically optimal detectors of weak and strong signals with random noninformative parameters on the nongaussian passive clutter background. There has been considered a possibility to apply adaptive approach to the synthesis and there has been found a corresponding structure of an optimal detector of signals with an unknown phase and amplitude.