

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XXXVIII N 7

Нижний Новгород

1995

С о д е р ж а н и е

- Пименов С. Ф., Руденко М. А.** Сильное рассеяние радиоволн двухслойной средой с шероховатыми границами и неоднородностями диэлектрической проницаемости слоя..... 619
- Погорелов В. И.** О возможности унифицированного подхода к исследованию индикатрис когерентного рассеяния волны на различных неоднородностях среды..... 631
- Кречетов В. В.** О переходном излучении заряда в неоднородной среде без ограничения на приращение диэлектрической проницаемости и масштаб неоднородности..... 639
- Юшкова О. В.** Восстановление параметров слоистой среды..... 648
- Алимов В. А.** О спектре крупномасштабных неоднородностей верхней ионосферы..... 653
- Горбунов М. Е.** Методы возмущений в геометрической оптике..... 660
- Архипенко Ю. К., Красильников В. Н.** Нестационарные электромагнитные возмущения в магнитоактивной плазме с релаксирующей проводимостью..... 668
- Силаев А. М.** Оптимальное оценивание параметров нестационарного потока импульсных сигналов в дискретном времени..... 678
- Казаков В. А., Лавров А. М.** Кинетические уравнения для немарковских процессов с пирсоновскими распределениями..... 695
- Вольвач А. П., Комарь Г. И., Шестопапов В. П.** Зеркальный щелевой излучатель в качестве облучателя параболического рефлектора..... 705

Вертий А. А., Иванченко И. В., Попенко Н. А., Гудым И. Я. Исследование полей дифракции электромагнитных волн миллиметрового диапазона на осесимметричных диафрагмах.....	719
Горбачев А. А., Красильников В. Д., Родионов Я. Г. Компенсационные методы снижения помех в диапазоне сверхнизких частот	730

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Зобов Н. Ф., Карякин Е. Н., Крупнов А. Ф., Суенграм Р. Д. Субмиллиметровый спектр димера $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ в равновесной газовой фазе	738
Васенкова Л. В., Горбачев А. А. Рассеяние высших гармоник статистической системой нелинейных рассеивателей	743

УДК 528.813:528.88.44

СИЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ РАДИОВОЛН ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДОЙ С ШЕРОХОВАТЫМИ ГРАНИЦАМИ И НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СЛОЯ

С. Ф. Пименов, М. А. Руденко

В приближении Кирхгофа в случае немалых по сравнению с длиной волны λ среднеквадратичных высот неровностей $\sigma_{1,2}$ верхней (σ_1) и нижней (σ_2) границ и с учетом крупномасштабных флуктуаций диэлектрической проницаемости слоя $\delta\epsilon$ получено аналитическое выражение для двухчастотной корреляционной функции отраженного поля $p \equiv \langle \dot{U}(\omega_1) \dot{U}(\omega_2) \rangle$. Исследованы условия, для которых величина p при больших $\sigma_i^2 \gg \lambda^2$ оказывается немалой. В частности, показано, что при рассеянии лишь верхней границей (случай $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \delta\epsilon = 0$) подобное условие имеет вид $\omega_1 (1 - m\sqrt{\epsilon}) = -\omega_2 (1 - n\sqrt{\epsilon})$, где $m, n = 0, 1, \dots$. Оценены возможности базирующихся на выведенных соотношениях методов зондирования слоистых сред.

Рассеяние радиоволн двухслойной средой со статистически неровными границами в случае крупномасштабных, но малых по сравнению с длиной волны λ неровностей было рассмотрено в [1], где при произвольной корреляции между неровностями границ получены и исследованы аналитические выражения для когерентной P_x и некогерентной $P_{\text{нх}}$ составляющих отраженной мощности. В данной работе рассмотрен случай немалых крупномасштабных неровностей границ, причем учитываются также флуктуации диэлектрической проницаемости в слое. Корреляция между неровностями границ, а также между неровностями границ и неоднородностями слоя считается произвольной.

Рассмотрим двухслойную среду, где H — средняя толщина слоя, $h_{1,2}(x, y)$ — вертикальные (вдоль оси z) отклонения верхней (1) и нижней (2) границ от среднего положения, $\epsilon_2 \equiv \epsilon$ — средняя диэлектрическая проницаемость слоя, $\delta\epsilon_2 \equiv \delta\epsilon(x, y)$ — неоднородность диэлектрической проницаемости (считается зависящей только от горизонтальных координат). Нижний слой — полубесконечный, его диэлектрическая проницаемость ϵ_3 . В верхнем полупространстве, диэлектрическая проницаемость которого $\epsilon_1 = 1$, на расстоянии R_0 от среды в точке A находятся излучатель и приемник. Используя для расчета отраженных полей приближение Кирхгофа, можно записать выражения для комплексных амплитуд напря-

С. Ф. Пименов, М. А. Руденко

жений на выходе приемника (см. [1]):

$$\dot{U}_1 = \frac{Q_1}{\lambda_1^2 R_0^2} \int G^2(\alpha, \beta) \exp\{-2ik_1 \tilde{R}_0\} \exp\{2ik_1 h_1\} F dx dy, \quad (1)$$

где $Q_1 = A_a(2P_a R_a)^{1/2}$, величины $G(\alpha, \beta)$, A_a , R_a — диаграмма направленности, эффективная площадь и активное сопротивление антенны, P_a — мощность, поступающая в антенну, $\tilde{R}_0 = (x^2 + y^2 + R_0^2)^{1/2}$ — расстояние от антенны до точки интегрирования, $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ — волновое число в верхнем полупространстве, F — коэффициент отражения от двухслойной среды:

$$F \cong \frac{R + ke^{2i\varphi}}{1 + kRe^{2i\varphi}} = R + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} (kR)^m (R^{-1} - R) e^{2im\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} f_m e^{2im\varphi}. \quad (2)$$

В (2) R и k — френелевские коэффициенты отражения от верхней и нижней границ соответственно, фазовые набег в слое равны:

$$\varphi \cong -k_1(\varepsilon)^{1/2} (H + h_1 - h_2 + H \delta\varepsilon / (2\varepsilon)). \quad (3)$$

В (2) мы пренебрегли изменениями величин R , k за счет неоднородностей диэлектрической проницаемости слоя, а в (3) — слагаемыми более высокого порядка по $\delta\varepsilon$, $h_{1,2}$, чем первый. Это оказывается возможным при выполнении условий (здесь $V \equiv R, k$):

$$|(\partial V / \partial \varepsilon) \delta\varepsilon| \ll |V|, \quad |\delta\varepsilon / \varepsilon| \ll 1, \quad (4)$$

$$|k_1 h_{1,2} \delta\varepsilon / (\varepsilon)^{1/2}| \ll \pi, \quad (5)$$

$$|k_1 H (\delta\varepsilon)^2 / (\varepsilon)^{3/2}| \ll 4\pi. \quad (6)$$

Отметим, что при выполнении (5), (6) слагаемые в (3), пропорциональные h_1 , h_2 , $\delta\varepsilon$, все еще могут существенно превышать π . Вычислим двухчастотную корреляционную функцию $\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle$ (здесь $k_2 = 2\pi/\lambda_2$):

$$\begin{aligned} \langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle &\equiv \sum_{m,n=0}^{\infty} \langle \dot{U}_{1,m} \dot{U}_{2,n} \rangle = \frac{Q_1^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 R_0^4} \int dx dy \int dx' dy' G^2(\alpha, \beta) G^2(\alpha', \beta') \times \\ &\times \exp\{-2i(k_1 \tilde{R}_0 + k_2 \tilde{R}'_0)\} \langle \exp\{2i(k_1 h_1 + k_2 h'_1)\} F(k_1) F'(k_2) \rangle = \quad (7) \\ &= \frac{Q_1^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 R_0^4} \int dx dy \int dx' dy' G^2(\alpha, \beta) G^2(\alpha', \beta') \exp\{-2i(k_1 \tilde{R}_0 + k_2 \tilde{R}'_0)\} \times \\ &\times \sum_{m,n=0}^{\infty} f_m f_n \exp\{-2i\sqrt{\varepsilon} H (mk_1 + nk_2)\} \langle \exp\{2ik_1[(1-m\sqrt{\varepsilon})h_1 + m\sqrt{\varepsilon}h_2 - \\ &- m\sqrt{\varepsilon}H\delta\varepsilon/(2\varepsilon)] + 2ik_2[(1-n\sqrt{\varepsilon})h'_1 + n\sqrt{\varepsilon}h'_2 - n\sqrt{\varepsilon}H\delta\varepsilon/(2\varepsilon)]\} \rangle. \end{aligned}$$

Угловые скобки в (7) обозначают статистическое усреднение по ансамблю случайных реализаций величин $h_1, h_2, \delta\epsilon/(2\epsilon), h'_1, h'_2, \delta\epsilon'/(2\epsilon)$. Заметим, что величина $\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2^* \rangle$ получается из $\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle$ заменой k_2 на $-k_2$. Усреднение в (7) проведем, считая, что случайные величины статистически однородны и имеют гауссов закон распределения, и используя выражение:

$$\langle \exp(2i\vec{\alpha}\vec{s}) \rangle = \exp\{-2\vec{\alpha}\hat{B}\vec{\alpha}\}, \quad (8)$$

где компоненты векторов \vec{s} и $\vec{\alpha}$ равны $s_1 = h_1, s_2 = h_2, s_3 = \delta\epsilon/(2\epsilon), s_4 = h'_1, s_5 = h'_2, s_6 = \delta\epsilon'/(2\epsilon), \alpha_1 = k_1(1 - m\sqrt{\epsilon}), \alpha_2 = k_1 m\sqrt{\epsilon}, \alpha_3 = -k_1 m\sqrt{\epsilon}H, \alpha_4 = k_2(1 - n\sqrt{\epsilon}), \alpha_5 = k_2 n\sqrt{\epsilon}, \alpha_6 = -k_2 n\sqrt{\epsilon}H, \hat{B}$ — ковариационная матрица с элементами $B_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ ($i, j = 1, \dots, 6$), $\rho_{ij}(x - x', y - y') = \langle s_i s_j \rangle / (\sigma_i \sigma_j)$ — коэффициенты корреляции величин s_i и $s_j, \sigma_1^2 = \sigma_4^2 = \sigma_{h_1}^2, \sigma_2^2 = \sigma_5^2 = \sigma_{h_2}^2$ — дисперсии неровностей верхней и нижней границ соответственно, $\sigma_3^2 = \sigma_6^2 = \sigma_\epsilon^2$ — четверть дисперсии относительных неоднородностей диэлектрической проницаемости слоя.

Приняв диаграмм направленности антенны $G(\alpha, \beta)$ в виде [2] (ось диаграммы ориентирована вертикально вниз):

$$G(\alpha, \beta) = \exp\left\{-1,38(x^2 + y^2) / (\theta_a^2 R_0^2)\right\}, \quad (9)$$

из (7) получим выражение для двухчастотной корреляционной функции (считаем $Q_1^2(k_1) = Q_1^2(k_2) = Q_1^2$):

$$\begin{aligned} \langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle &= \frac{Q_1^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 R_0^4} \int dx dy \int dx' dy' \exp\left\{-2,76\left[(x^2 + y^2) / (R_0^2 \theta_a^2(k_1)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ((x')^2 + (y')^2) / (R_0^2 \theta_a^2(k_2))\right] - 2i(k_1 \tilde{R}_0 + k_2 \tilde{R}'_0)\right\} \times \\ &\times \sum_{m, n=0}^{\infty} f_m f_n \exp\left\{-2i\sqrt{\epsilon}H(mk_1 + nk_2)\right\} \exp\left\{-\gamma(m, n) - \Delta(m, n)\right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь величины $\gamma(m, n), \Delta(m, n)$ равны ($A_{i,j} \equiv \rho_{i,j}(0, 0)$):

$$\gamma(m, n) = 2 \sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \sigma_i A_{ij} \sigma_j \alpha_j + 2 \sum_{i,j=4}^6 \alpha_i \sigma_i A_{ij} \sigma_j \alpha_j, \quad (11)$$

$$\Delta(m, n) = 4 \sum_{i,j=1,4}^{3,6} \alpha_i \sigma_i \rho_{ij} \sigma_j \alpha_j. \quad (12)$$

Величина $\gamma(m, n)$ не зависит от пространственных координат, величина $\Delta(m, n)$ является линейной комбинацией коэффициентов корреляции ρ_{ij} и зависит от переменных $\Delta x = x - x', \Delta y = y - y'$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением коэффициентов корреляции вида $\rho_{ij} = A_{ij}\rho$, где

$\rho = \exp \left\{ -(\Delta x/l)^2 - (\Delta y/l)^2 \right\}$, l — радиус корреляции, $l^2 \gg \lambda^2$. В этом случае $\Delta(m, n)$ может быть представлена как $\Delta(m, n) = -\rho\sigma_t^2$, где σ_t^2 — эффективная безразмерная дисперсия случайных величин:

$$\sigma_t^2(m, n) \equiv -4 \sum_{i,j=1,4}^{3,6} \alpha_i \sigma_i A_{ij} \sigma_j \alpha_j. \quad (13)$$

Тогда в (10) интегрирование тех слагаемых суммы по n, m, y которых величина $\sigma_t^2(m, n)$ неотрицательна, может быть выполнено методом перевала [3]. Интеграл от слагаемых, имеющих отрицательную величину $\sigma_t^2(m, n)$, может быть оценен. Действительно, в этом случае (принято $dV \equiv dx dy dx' dy'$):

$$\left| \langle \dot{U}_{1,m} \dot{U}_{2,n} \rangle \right| = \left| \int dV D_{m,n} \right| \leq \int dV |D_{m,n}| < \text{const} \exp \left\{ -\gamma(m, n) \right\}. \quad (14)$$

Здесь для получения последнего неравенства использовано соотношение $\exp \left\{ \rho\sigma_t^2(m, n) \right\} < 1$, константа const не зависит от σ_i . В итоге из (10) получаем:

$$\begin{aligned} \langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle &= \frac{Q_1^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 R_0^4} \sum_{m,n=0}^{\infty} f_m f_n \varkappa(m, n) \times \\ &\times \exp \left\{ -2iR_0(k_1 + k_2) - 2i\sqrt{\varepsilon} H(mk_1 + nk_2) \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где в случае $\sigma_t^2(m, n) \geq 0$ величина $\varkappa(m, n)$ равна:

$$\varkappa(m, n) = B(m, n) \exp \left\{ -\gamma(m, n) + \sigma_t^2(m, n) \right\}. \quad (16)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \pi^2 / \left[\left(2,76 / (R_0^2 \theta_a^2(k_1)) + ik_1 / R_0 \right) \left(2,76 / (R_0^2 \theta_a^2(k_2)) + ik_2 / R_0 \right) + \right. \\ &\left. + \left(\sigma_t^2(m, n) / (l^2) \right) \left(2,76 (1/\theta_a^2(k_1) + 1/\theta_a^2(k_2)) / R_0^2 + i(k_1 + k_2) / R_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

При $\sigma_t^2(m, n) < 0$ для дальнейшего рассмотрения достаточно будет оценки $\varkappa(m, n) < \varkappa^* \sim \exp \left\{ -\gamma(m, n) \right\}$, которая получается из (14). Если неровности границ существенно больше длины волны $\sigma_{1,2}^2 \gg \lambda_p^2$, а также если $\sigma_3^2 H^2 \gg \lambda_p^2$ ($p = 1, 2$), то величина слагаемых ряда (15) определяется, главным образом, множителем $\varkappa(m, n)$. В случае $\sigma_t^2(m, n) \geq 0$ величина $\varkappa(m, n)$, в свою очередь, определяется экспонентой с показателем $\beta(m, n) = -\gamma(m, n) + \sigma_t^2(m, n)$. Поскольку $\beta(m, n)$ является неположительной квадратичной формой величин $\sigma_i \alpha_i$, пропорциональных большому

параметрам $\sigma_{1,2}/\lambda_p$, $\sigma_3 H/\lambda_p$, то, в общем случае, $\exp\{\beta(m, n)\} \ll 1$. Однако, при определенных условиях $\beta(m, n)$ может обращаться в ноль, вследствие чего соответствующие слагаемые в (15) уже не будут экспоненциально малыми величинами. Найдем эти условия. Заметим, что $\sigma_i = \sigma_{i+3}$, а также, что $A_{ij} = A_{i+3, j} = A_{i, j+3} = A_{i+3, j+3}$. Тогда, определив в трехмерном пространстве G векторы $\vec{a} \equiv (\sigma_1 \alpha_1, \sigma_2 \alpha_2, \sigma_3 \alpha_3)$, $\vec{b} \equiv (\sigma_4 \alpha_4, \sigma_5 \alpha_5, \sigma_6 \alpha_6)$ и скалярное произведение $(\vec{x} \vec{y}) \equiv \sum x_i A_{ij} y_j$ (считаем $\det \|A_{ij}\| \neq 0$, что соответствует линейной независимости величин $h_1, h_2, \delta \epsilon$), где сумма по i, j берется от 1 до 3, представим $\beta(m, n)$ в виде $\beta(m, n) = -(\vec{a})^2 - (\vec{b})^2 - 2(\vec{a} \vec{b})$. Отсюда условие обращения величины $\beta(m, n)$ в ноль будет $\vec{a} + \vec{b} = 0$. Для оценки слагаемых ряда (15) с $\sigma_i^2(m, n) < 0$ аналогичным образом получаем $\gamma(m, n) = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2$, откуда видно, что уравнение $\gamma(m, n) = 0$ совместно с условием $\sigma_i^2(m, n) = -2(\vec{a} \vec{b}) < 0$ решений не имеет. То есть слагаемые ряда (15) с $\sigma_i^2(m, n) < 0$ всегда оказываются экспоненциально малыми величинами ($\alpha^* \sim \exp\{-\gamma(m, n)\} \ll 1$). В результате из соотношения $\vec{a} + \vec{b} = 0$ приходим к следующей системе уравнений, описывающих случаи немалости слагаемых ряда (15):

$$\begin{aligned} \sigma_1(k_1(1 - m\sqrt{\epsilon}) + k_2(1 - n\sqrt{\epsilon})) &= 0, \\ \sigma_2(k_1 m + k_2 n) &= 0, \\ \sigma_3 H(k_1 m + k_2 n) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

которая имеет следующие четыре решения:

$$1) \quad \sigma_i \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad k_1 = -k_2, \quad n = m; \quad (19)$$

$$2) \quad \sigma_1 = 0, \quad \text{одна, либо обе величины } \sigma_j \neq 0, \quad j = 2, 3, \\ k_1 m = -k_2 n; \quad (20)$$

$$3) \quad \sigma_1 \neq 0, \quad \text{обе величины } \sigma_j = 0, \quad j = 2, 3, \\ k_1(1 - m\sqrt{\epsilon}) = -k_2(1 - n\sqrt{\epsilon}); \quad (21)$$

$$4) \quad \text{тривиальное } \sigma_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (22)$$

Отметим, что первое из указанных решений накладывает на волновые числа и номера членов ряда (15) ограничения, которые как частные случаи содержатся во втором и в третьем решениях (18). Основные особенности решения (19) выражаются в том, что соответствующие ему слагаемые ряда (15) оказываются, во-первых, пропорциональными четной степени коэффициента отражения от нижней границы $\sim k^{2m}$, и, во-вторых, не содержат в себе зависимости от толщины слоя H . Действительно, в (15) зависимость от H содержится только в показателе экспоненты, в котором второе слагаемое пропорционально величине $H(mk_1 + nk_2)$. При $k_1 = -k_2$, $m = n$ множитель $(mk_1 + nk_2)$ обращается в ноль. По этой

же причине члены ряда (15), соответствующие решению (20), также не зависят от H . Они, в отличие от слагаемых, соответствующих решению (19), могут быть пропорциональны как четным, так и нечетным степеням $k^{(m+n)}$. Слагаемые (15), соответствующие решению системы (21), могут быть пропорциональны любым степеням $k^{(m+n)}$ и, кроме того, в случае $m \neq n$ содержат осциллирующую зависимость от H . При выполнении условий (20), если $m = n = 0$, а также при выполнении (21), если $\varepsilon = 1/n^2$ и $m = n = 1, 2, \dots$, величины k_1, k_2 могут принимать произвольные значения. Эти случаи характерны тем, что с ростом σ_i среднее значение отраженного поля $\langle \dot{U} \rangle$ не является экспоненциально малой величиной и стремится к отличному от нуля значению. В первом случае такое поведение $\langle \dot{U} \rangle$ связано со слагаемым ряда (15), которое описывает отражение от верхней ($m = n = 0$) плоской ($\sigma_i = 0$) и однородной (возмущениями коэффициентов отражения в данном рассмотрении пренебрегается) границы. Во втором случае ненулевое предельное значение $\langle \dot{U} \rangle$ обусловлено тем, что при $\varepsilon = 1/n^2$ возмущение фазового набег n -кратно отраженной от нижней границы волны в слое $2n\delta\varphi = -2k_1 h_1 n(\varepsilon)^{1/2}$ полностью компенсируется его возмущением в свободном пространстве $2\delta\varphi = 2k_1 h_1: 2n\delta\varphi + 2\delta\varphi = 0$.

Рассмотрим случай, когда величины $h_1, h_2, \delta\varepsilon$ не скоррелированы. Тогда выражение для $\beta(m, n)$ приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \beta(m, n) &= -2 \left[\sigma_1^2 \left(k_1^2 (1 - m\sqrt{\varepsilon})^2 + k_2^2 (1 - n\sqrt{\varepsilon})^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon (\sigma_2^2 + H^2 \sigma_3^2) (k_1^2 m^2 + k_2^2 n^2) \right] + \sigma_i^2(m, n) = \\ &= -(a_{11} k_1^2 + a_{22} k_2^2 + 2a_{12} k_1 k_2), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\sigma_i^2(m, n) = -4k_1 k_2 \left[\sigma_1^2 (1 - m\sqrt{\varepsilon})(1 - n\sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon (\sigma_2^2 + H^2 \sigma_3^2) mn \right]. \quad (24)$$

Величина $\beta(m, n)$ является неположительной квадратичной формой переменных k_1, k_2 и может быть приведена к нормальному виду (см. [4]): $\beta(m, n) = -\mu_1 (k_1')^2 - \mu_2 (k_2')^2$, где k_1', k_2' — проекции вектора $\vec{k} \equiv (k_1, k_2)$ на главные координатные оси, а неотрицательные величины μ_1, μ_2 равны:

$$\begin{aligned} \mu_{1,2}(m, n) &= \sigma_1^2 \left((1 - m\sqrt{\varepsilon})^2 + (1 - n\sqrt{\varepsilon})^2 \right) + \varepsilon (\sigma_2^2 + H^2 \sigma_3^2) (m^2 + n^2) \pm \\ &\quad \pm \left[\left(\sigma_1^2 \left((1 - m\sqrt{\varepsilon})^2 - (1 - n\sqrt{\varepsilon})^2 \right) + \varepsilon (\sigma_2^2 + H^2 \sigma_3^2) (m^2 - n^2) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(\sigma_1^2 (1 - m\sqrt{\varepsilon})(1 - n\sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon (\sigma_2^2 + H^2 \sigma_3^2) mn \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Соответственно, $k'_1 = (\vec{k} \vec{n}_1)$, $k'_2 = (\vec{k} \vec{n}_2)$, где:

$$\vec{n}_1 = -(a_{11} - \mu_2, a_{12}) / \left((a_{11} - \mu_2)^2 + a_{12}^2 \right)^{1/2}, \quad (26)$$

$$\vec{n}_2 = -(a_{12}, a_{22} - \mu_1) / \left((a_{22} - \mu_1)^2 + a_{12}^2 \right)^{1/2}. \quad (27)$$

Для обращения $\beta(m, n)$ в ноль либо обе величины μ_1 , μ_2 одновременно должны быть равны нулю, либо одновременно $\mu_1 = 0$ (здесь и далее будем считать $\mu_1 \leq \mu_2$) и $(\vec{k} \vec{n}_2) = 0$. Из этих требований, естественно, получаются те же условия (19)–(22), которые были получены выше более общим методом для случая произвольной корреляции величин h_1 , h_2 , $\delta\epsilon$. Рассмотрим возможность $\mu_1 = \mu_2 = 0$. При этом помимо тривиального $\sigma_i = 0$ получаем также: а) $\sigma_1 = 0$, $m = n = 0$; б) $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\epsilon = 1/n^2$, $m = n = 1, 2, \dots$. Оба эти случая (а, б) соответствуют ненулевым $\langle \dot{U} \rangle$ при больших σ_i , о чем было сказано выше.

Рассмотрим случай, когда все σ_i отличны от нуля. Только для $m = n$ возможно $\mu_1 = 0$. Остальные величины, описывающие $\beta(m, n)$, равны:

$$\mu_2 = 4 \left(\sigma_1^2 (1 - m \sqrt{\epsilon})^2 + \epsilon (\sigma_2^2 + H^2 \sigma_3^2) m^2 \right), \quad \vec{n}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}). \quad (28)$$

Из (28) видно (см. также (19)), что условием обращения $\beta(m, n)$ в ноль оказывается $k_1 = -k_2$. При этом условии остальные слагаемые ряда с $m \neq n$ имеют $\beta(m, n) < 0$ (либо $\sigma_i^2 < 0$), т.е. при больших σ_i являются вблизи прямой $k_1 = -k_2$ экспоненциально малыми величинами. Ширина области Δk_b , вблизи прямой $k_1 = -k_2$, где $|\beta(m, m)| \leq 1$, определяется величиной μ_2 и оказывается порядка $\Delta k_b \sim 2(\mu_2/2)^{-1/2}$. Поскольку на самой прямой зависимость выражения (15) от толщины слоя H отсутствует, то в общем случае при сильном рассеянии определение величины H по измерениям с использованием узкополосных некогерентных сигналов оказывается невозможным. Это относится и к методу определения толщины слоя по осцилляциям когерентной P_x и некогерентной $P_{\text{нк}}$ составляющих отраженной мощности при свипировании частоты, которые, в частности, рассматривались в [1]. Снижение эффективности указанных методов связано с тем, что слагаемые ряда (15) с $m = 1, n = 0$ и с $m = 0, n = 1$, дающие основной вклад в P_x и $P_{\text{нк}}$ при $|k| \ll 1$ (см. [1]), при сильном рассеянии в общем случае оказываются экспоненциально малыми, если $k_1 = -k_2$. Для измерения толщины слоя при сильном рассеянии можно использовать зависимость (15) от H в области Δk_b . При этом различные составляющие частотного спектра должны быть сфазированы. Например, при использовании радиоизлучения с одной опорной частотой ω_2 и второй — изменяющейся, $\omega_1 = -\omega_2 + \Delta\omega$, слагаемое, пропорциональное наименьшей ненулевой степени коэффициента отражения от нижней границы ($\sim k^2$), содержит следующий сомножитель: $\exp\{-2i\epsilon^{1/2} H \Delta\omega/c\}$,

здесь c — скорость света в пустоте. Так как область изменения частотной расстройки $\Delta\omega$ оказывается существенно ограниченной $2|\Delta\omega|/c \leq \Delta k_b$ (из-за быстрого убывания спектральной плотности вне указанного предела), то и разрешающая способность при этом оказывается не лучше $\Delta H \sim \pi/(\Delta k_b \varepsilon^{1/2})$. Эта оценка практически не зависит от используемого метода измерений и отражает тот факт, что в случае, когда спектр сигнала шире $\Delta k_b c$, разрешающая способность будет определяться рассеивающими свойствами слоя и его границ. Отметим, что величина ΔH оказывается в рассматриваемом случае:

$$\Delta H \sim \left(\pi/(2\varepsilon)^{1/2} \right) \left(\sigma_1^2(1-\sqrt{\varepsilon})^2 + \varepsilon(\sigma_2^2 + H^2\sigma_3^2) \right)^{1/2} \sim \max(\sigma_1, \sigma_2, H\sigma_3). \quad (29)$$

Поскольку величины σ_1, σ_2 по смыслу, а $H\sigma_3$ по второму условию в (4) не превышают толщину слоя H , то в рассматриваемом случае величина H может быть всегда оценена с относительной погрешностью не хуже 1. Однако, при наличии нескольких слоев расстояние между ними может оказаться меньше предельной разрешающей способности ΔH .

Когда $\sigma_1 = 0$ и одна, либо обе величины $\sigma_j \neq 0, j = 2, 3$, получаем $\mu_1 = 0$ и:

$$\mu_2 = 2\varepsilon(\sigma_2^2 + H^2\sigma_3^2)(m^2 + n^2), \quad \vec{n}_2 = (m, n)/(m^2 + n^2)^{1/2}. \quad (30)$$

При этом уже каждому слагаемому ряда (15) на плоскости k_1, k_2 соответствует прямая $mk_1 = -nk_2$, на которой величина $\beta(m, n)$ обращается в ноль. Здесь, как и в предыдущем случае, использование некогерентных узкополосных методов для определения толщины слоя оказывается неэффективным. Предельная разрешающая способность $\Delta H \sim \sim \pi \left((\sigma_2^2 + \sigma_3^2 H^2)/2 \right)^{1/2}$ определяется рассеивающими свойствами слоя и нижней границы. Отметим, что в данном случае слагаемое, пропорциональное первой (наименьшей ненулевой) степени коэффициента отражения от нижней границы ($\sim k$) оказывается немалым только когда $m = 0, n = 1$, либо когда $n = 0, m = 1$. Например, при $m = 0, n = 1$ величина $\beta(m, n)$ близка к нулю лишь в узкой окрестности оси k_1 и не зависит от волнового числа k_1 (положив, например, $k_1 = -k_2$ придем в (15) к выражению для полной мощности). Аналогичная ситуация возникает и при $n = 0, m = 1$. Отсюда видно, что при $|k| \ll 1$ и $\sigma_1 = 0$ для измерения толщины слоя H наиболее эффективными оказываются низкочастотные сигналы, например, видеоимпульсы.

Если $\sigma_1 \neq 0$ и обе величины $\sigma_j = 0 (j = 2, 3)$, то $\mu_1 = 0$ и:

$$\mu_2 = 2\sigma_1^2 \left((1 - m\sqrt{\varepsilon})^2 + (1 - n\sqrt{\varepsilon})^2 \right), \quad (31)$$

$$\vec{n}_2 = (1 - m\sqrt{\varepsilon}, 1 - n\sqrt{\varepsilon}) / \left((1 - m\sqrt{\varepsilon})^2 + (1 - n\sqrt{\varepsilon})^2 \right)^{1/2}.$$

Опять каждому слагаемому ряда (15) соответствует прямая, на которой величина $\beta(m, n)$ равна нулю: $k_1(1 - m\sqrt{\varepsilon}) = -k_2(1 - n\sqrt{\varepsilon})$. Как и в предыдущих двух случаях, при $k_1 = -k_2$ у слагаемых ряда (15) с $m = n$ зависимость от H отсутствует, а другие слагаемые (с $m \neq n$) оказываются экспоненциально малыми. Следствие этого — неэффективность некогерентных узкополосных методов и ограничение разрешающей способности когерентных методов при использовании части спектра излучения вблизи $\omega_1 \approx -\omega_2$. Это ограничение будет определяться рассеивающими свойствами верхней границы. Однако, если использовать, например, радиоизлучение на двух скоррелированных частотах ω_1, ω_2 , между которыми выполняется соотношение ($m \neq n$):

$$\omega_1(1 - m\sqrt{\varepsilon}) = -\omega_2(1 - n\sqrt{\varepsilon}), \quad (32)$$

то у соответствующего данным m и n слагаемого в (15) величина $\beta(m, n)$ обращается в ноль, а осциллирующая зависимость от H сохраняется. Действительно, указанное слагаемое будет содержать множитель $\exp \left\{ -2i\omega_1 \varepsilon^{1/2} H(m-n) / (c(1 - n\varepsilon^{1/2})) \right\}$. Таким образом, при перестройке частот отпадает необходимость уходить в область существенного ослабления спектральных составляющих сигнала. Вследствие этого, предельная разрешающая способность в данном случае уже не ограничивается рассеивающими свойствами верхней границы и всегда определяется шириной спектра используемого излучения. Для слабоотражающей нижней границы ($|k| \ll 1$) особый интерес представляют случаи, когда немалое слагаемое в (15) оказывается пропорциональным первой степени коэффициента отражения k . Такое, как уже отмечалось, возможно, если: $m = 1, n = 0$, либо $m = 0, n = 1$. Отсюда:

$$\omega_{1,2} = -\omega_{2,1}(1 - \sqrt{\varepsilon}). \quad (33)$$

Отметим, что это условие совпадает с результатом [5]. Помимо отсутствия ограничения на разрешающую способность за счет рассеяния, случай, отвечающий выполнению (33), отличается от предыдущего (с $\sigma_1 = 0$) еще и тем, что здесь не требуется, чтобы какая-либо из частот была близка к нулю.

Рассмотрим случай $\det \|A_{ij}\| = 0$. Он соответствует линейной зависимости случайных величин $h_1, h_2, \delta\varepsilon$. Тогда одно, либо два собственных числа матрицы A_{ij} будут равны нулю. В любом случае, если $\sigma_i^2(m, n) < 0$, то соответствующие слагаемые в (15) экспоненциально малы, а при $\sigma_i^2(m, n) \geq 0$ условия обращения величины $\beta(m, n)$ в ноль сводятся к обращению в ноль проекции вектора $\vec{a} + \vec{b}$ на подпространство собственных векторов, соответствующих ненулевым собственным числам. В частности, если только одно собственное число матрицы A_{ij} равно нулю, то вы-

полняется условие:

$$1 - A_{12}^2 - A_{23}^2 - A_{13}^2 + 2A_{12}A_{23}A_{13} = 0, \quad (34)$$

а для обращения в ноль $\beta(m, n)$ необходимо:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 \left((1 - m\sqrt{\varepsilon})k_1 + (1 - n\sqrt{\varepsilon})k_2 \right)}{A_{13} - A_{12}A_{23}} &= \frac{\sigma_2(mk_1 + nk_2)\sqrt{\varepsilon}}{A_{23} - A_{12}A_{13}} = \\ &= \frac{\sigma_3(mk_1 + nk_2)H\sqrt{\varepsilon}}{1 - A_{12}^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Если два собственных числа матрицы A_{ij} равны нулю, что возможно лишь если кроме условия (34) выполняется также условие $A_{12}A_{23}A_{13} = 1$, то для $\beta(m, n) = 0$ требуется:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \left((1 - m\sqrt{\varepsilon})k_1 + (1 - n\sqrt{\varepsilon})k_2 \right) + \sigma_2(mk_1 + nk_2)\sqrt{\varepsilon}A_{23} - \\ - \sigma_3(mk_1 + nk_2)H\sqrt{\varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Заметим также, что из (35), (36), формально положив в них $k_1 = 0$, можно получить и условия немалости величины $\langle \dot{U}_2 \rangle$. Правомочность такого перехода ясна из того, что при замене в показателе экспоненты в (7) величины k_1 на 0 приходим к среднему от произведения двух величин $\langle Z \cdot \dot{U}_2 \rangle$. Так как величина Z оказывается не зависящей от случайных параметров $h_1, h_2, \delta\varepsilon$, то $\langle Z \cdot \dot{U}_2 \rangle = Z \cdot \langle \dot{U}_2 \rangle$.

Таким образом, в работе в виде ряда по степеням коэффициента отражения от нижней границы слоя k получено выражение (15) для двухчастотной корреляционной функции $\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle$ поля, отраженного двухслойной средой с крупномасштабными немалыми неровностями границ ($\sigma_{1,2}^2 \gg \lambda^2$) и неоднородностями диэлектрической проницаемости слоя ($\sigma_3^2 H^2 \gg \lambda^2$), и исследована зависимость (15) от волновых чисел k_1, k_2 (частот ω_1, ω_2). Показано, что существуют такие соотношения между k_1 и k_2 (ω_1 и ω_2), при которых $\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle$ оказывается немалой величиной. В общем случае (когда все $\sigma_i \neq 0$) условие немалости $\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle$ выполняется только на прямой $k_1 = -k_2$. Поскольку зависимость $\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle$ от толщины слоя H на этой прямой отсутствует, то использование для измерения H узкополосных некогерентных сигналов оказывается неэффективным, а в широкополосных когерентных методах возникает ограничение разрешающей способности за счет рассеяния (29). Наинизшей ненулевой степенью k , которой могут быть пропорциональны немалые слагаемые в (15), оказывается вторая. Среди частных случаев выделяются два: 1) $\sigma_1 = 0, \sigma_{2,3} \neq 0$ и 2) $\sigma_1 \neq 0,$

$\sigma_{2,3} = 0$. В первом из них наиболее эффективным в случае слабоотражающих внутренних границ оказывается использование низкочастотных сигналов, например, видеоимпульсов. При этом в (15) имеются немалые слагаемые $\sim k$, однако, ограничения на разрешающую способность за счет рассеяния сохраняются. Во втором случае ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_{2,3} = 0$) при использовании соотношения частот (32) при $m \neq n$ эти ограничения снимаются, если имеет место соотношение (33) $\omega_{1,2} = -\omega_{2,1}(1 - \sqrt{\epsilon})$, то в (15) сохраняются и немалые слагаемые $\sim k$. Указано также на существование "резонансных" диэлектрических проницаемостей слоя $\epsilon = 1/n^2$, $n = 1, 2, \dots$, при которых в случае $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_{2,3} = 0$ при больших $\sigma_1^2 \gg \lambda^2$ величины $\langle \dot{U} \rangle$ не стремятся к 0.

Заметим также, что рассмотренный здесь метод определения расстояний до слабоотражающих внутренних границ по двухчастотным измерениям базируется на том факте, что при $l \gg \lambda$ в отраженном излучении присутствуют такие две волны, которые на резонансных частотах имеют одинаковые фазовые возмущения, причем одна из них отражается внешней верхней границей среды, а вторая — внутренней. Исследование вытекающей отсюда скоррелированности указанных волн и позволяет определить искомое расстояние H при достаточно общих условиях (например, имеет место устойчивость по отношению к виду статистики неровностей), что открывает возможности широкого применения метода в различных задачах оптики и дистанционного зондирования. Очевидна также работоспособность метода в случае многослойной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пименов С. Ф., Руденко М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35. N 3-4. С. 275.
2. Зубкович С. Г. Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности. — М.: Сов. радио, 1968. 224 с.
3. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977. 368 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1977. 832 с.
5. Пименов С. Ф., Руденко М. А. // В кн.: XVI Всес. конф. по распр. радиоволн / Тез. докл. Ч. 2. — Харьков, 1990. С. 277.

НИИ физики при Ростовском
университете, г. Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
29 марта 1994 г.

**STRONG SCATTERING OF RADIO WAVES BY TWO-LAYER MEDIUM
WITH ROUGH BOUNDARIES AND INHOMOGENEOUS DIELECTRIC
CONSTANT OF THE LAYER**

S. F. Pimenov, M. A. Rudenko

The analytical expression of the two-frequency correlation function of the reflected radiation $p \equiv \langle \dot{U}(\omega_1) \dot{U}(\omega_2) \rangle$ is derived in the framework of the Kirchhoff approximation assuming mean square roughness heights $\sigma_{1,2}$ of upper (σ_1) and lower (σ_2) boundaries to be large compared to the wave-length λ and taking into account large-scale layer dielectric constant inhomogeneities $\delta\varepsilon$. For $\sigma_i^2 \gg \lambda^2$ the conditions are investigated when p value can not be small. Particularly, for scattering by only upper boundary (in the case $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \delta\varepsilon = 0$) such condition is shown to be $\omega_1(1 - m\sqrt{\varepsilon}) = -\omega_2(1 - n\sqrt{\varepsilon})$, where $m, n = 0, 1, \dots$. The possibilities are estimated of the layered medium sounding methods based on the relations obtained.

О ВОЗМОЖНОСТИ УНИФИЦИРОВАННОГО ПОДХОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ ИНДИКАТРИС КОГЕРЕНТНОГО РАССЕЙЯНИЯ ВОЛН НА РАЗЛИЧНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ СРЕДЫ

В. И. Погорелов

Получено общее выражение, описывающее индикатрису когерентного рассеяния произвольными неоднородностями среды. Обосновывается возможность создания универсальной программы для расчета таких индикатрис, что позволит избежать трудностей соответствующих аналитических исследований и трудностей экспериментальных исследований сред с помощью волновых процессов.

Теоретическое исследование когерентного рассеяния волн на неоднородностях разных форм обычно связано с аналитическими решениями сложных дифракционных задач, причем каждый вид неоднородности требует индивидуального анализа. Ценность таких решений снижается тем, что их удается получать только с рядом приближений и ограничений на условия задачи (строгие математически описываемые формы неоднородностей, ограничения на их размеры или размеры длин волн и т.д.). Сами же решения очень чувствительны к изменениям данных параметров, которые на практике обычно оказываются изменчивыми и даже неконтролируемыми. Примером могут служить условия исследования рассеяния волн в природных средах, в частности, в ионосфере.

Однако возможен иной, более эффективный подход к этой проблеме, позволяющий (при условии соответствующего подготовленного программного обеспечения) быстро находить индикатрису рассеяния на неоднородностях практически любой формы и для широкого интервала длин волн. Это открывает значительные перспективы в смысле применения программ такого рода в различных областях физики, геофизики и техники. Настоящая возможность и рассматривается в данной работе.

1. Будем исходить из уравнения для поля E вида

$$\Delta E - \rho(\mathbf{x}) = \Delta E + k^2 n(\mathbf{x})^2 E - \rho(\mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

где под \mathbf{x} понимаются все три пространственные координаты, ρ — функция источника, k — волновое число. Функция $n^2(\mathbf{x})$ определяется свойствами среды (если E — электрическое поле электромагнитной волны,

то n^2 — диэлектрическая проницаемость). Неоднородности пусть задаются видом зависимости $n(\mathbf{x})$, точнее — её отклонениями от “сглаженной” функции $N(\mathbf{x}) = \bar{n}(\mathbf{x})$, являющейся осреднением $n(\mathbf{x})$ в каком-то пространственном масштабе. Принимаем, что неоднородности ($n - N$) существенны лишь внутри некоторой области v , где нет источников излучения (т.е. по условиям постановки задачи рассеяния вне v нет или оно нас не интересует; в противном случае границы области v просто были бы расширены). Все свойства среды вне v учитываются лишь с точки зрения проблемы распространения сигнала к v и от v , выходящей за рамки настоящей работы.

Уравнение (1) рассматривается в скалярном виде в целях удобства дальнейших выводов. Возможность их корректировки применительно к случаю, когда (1) имеет векторный характер, будет оговорена ниже.

Учтем, что существует геометрооптическое приближение E_g решения задачи (1), которое при замене $n(\mathbf{x})$ на $N(\mathbf{x})$ в (1) будет отличаться от строгого решения E на пренебрежимо малую величину δ . Тогда подстановка E_g вместо E в первоначальное уравнение (1) с $n(\mathbf{x})$ определит функцию

$$\rho_1(\mathbf{x}) = -[\mathbf{L}E_g - \rho(\mathbf{x})], \quad (2)$$

уже не равную нулю, но существенную лишь внутри области v . Известно [1], что решение $E(\mathbf{x})$ может быть построено в виде свертки

$$E(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}' = \rho \cdot G, \quad (3)$$

где $G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ является фундаментальной функцией (или, как частный случай, функцией Грина), а интегрирование в (3) ведется по всему пространству. Смысл геометрооптического приближения с точки зрения (3) состоит в использовании рассчитываемого по известной методике специфического приближенного выражения $G_g(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ для $G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$.

Представим искомое решение уравнения (1) в виде $E = E_g + E_1$ и, учитывая (2), найдем уравнение для новой неизвестной E_1 : $\mathbf{L}E_1 - \rho_1 = 0$. Оно имеет тот же вид, что и исходное уравнение (1), но с иной функцией источника, сосредоточенного теперь уже внутри v . Если его снова решать тем же методом, используя геометрооптическое приближение E_{1g} для E_1 и вводя $E_1 = E_{1g} + E_2$, то мы придем к уравнению $\mathbf{L}E_2 - \rho_2 = 0$, где $\rho_2 = -[\mathbf{L}E_{1g} - \rho_1(\mathbf{x})]$. И так далее.

В результате осуществляется итерационный процесс, при котором решение для E строится в виде ряда

$$E = E_g + E_{1g} + E_{2g} + \dots = \int \rho(x'') G_g(x'', x) d^3 x'' + \\ + \int_V \{\rho_1(x') + \rho_2(x') + \dots\} G_g(x', x) d^3 x', \quad (4)$$

Поскольку неоднородности $(n(x') - N(x'))$ учитываются лишь внутри ограниченного объема v , то и область интегрирования для всех членов этого ряда, начиная со второго, тоже совпадает с v .

Заметим, что в (4) геометрикооптическая форма решения волнового уравнения используется уже не в качестве приближения, а как основа для совершенно определенного и строгого разложения E в ряд. Его первый член совпадает с геометрикооптическим приближением для E , второй является рассеянием из всех точек x' объема v в точку x . Дальнейшие члены ряда описывают рассеяния высших порядков [2]. Каждый $(\tilde{n} + 1)$ -й член ряда описывает рассеяние n -го порядка и образуется в результате действия предыдущего члена ряда (т.е. рассеяния $(n - 1)$ -го порядка) в качестве источника излучения для следующего этапа однократного рассеяния. Обратим внимание на то, что здесь уже с первого члена ряда учитывается воздействие среды на формирование трасс излучения. Поэтому само разделение рассеяния на порядки делается специфично, с предварительным учетом основных деформаций потока рассеиваемого излучения в среде. С математической точки зрения это означает более быстрое уменьшение абсолютных значений членов ряда с ростом их номера, т.е. ускоренную сходимости ряда. В противном случае (допустим, при использовании вместо G_g решения для поля от точечного источника в свободном пространстве) разложение искомого поля E в ряд типа (4) получилось бы тоже, но информация, заключенная в первых членах ряда (4), была бы распределена в большом количестве членов ряда старших порядков.

Касаюсь скорости сходимости ряда (4), следует принять во внимание общность характера этого решения, порождающего большое разнообразие его частных конкретизаций. Поэтому какая-либо частная оценка сходимости не будет иметь особой ценности. Однако, существует приближенный, но очень общий и наглядный способ ее оценки. Пусть каждое однократное рассеяние поля с энергией \mathcal{J} внутри v может быть "в среднем" описано как $\sim \mu\sqrt{\mathcal{J}}$, где μ — некоторый малый параметр. Тогда, если первичное излучение, описываемое первым членом ряда (4), имеет энергию \mathcal{J}_p , то второй член его будет порядка $\mu\sqrt{\mathcal{J}_p}$, третий $\sim \mu\sqrt{\mu^2\mathcal{J}_p} = \mu^2\sqrt{\mathcal{J}_p}$ и так далее. Каждый $(n + 1)$ -й член ряда будет равен примерно $\mu^n\sqrt{\mathcal{J}_p}$. Отсюда становятся понятными как скорость сходимости ряда (4), так и ее зависимость от μ . Если же учесть, что поля рассеяния разных поряд-

ков будут к тому же иметь разные фазы, то данная скорость должна еще более возрасти.

Вне зависимости от приведенной выше оценки мы можем исходить из проверенных в физике свойств рассеяния в различных конкретных случаях. Если учесть уверенность, что рассеяния высших порядков играют малую роль в исследуемом процессе (как это обычно и бывает в практике), то вклад в него дадут в основном, лишь первый и второй члены ряда (4).

Техника расчета первого члена ряда (4) отработана давно во многих публикациях и программных разработках. Она основана на построении из т. \mathbf{x} семейства экстремалей (или "геодезических", "лучей") [3]. Поскольку вводимая в среду неоднородность предусматривается уже функцией $n(\mathbf{x})$, то "рассеянием" иногда принято считать результат возникающих отклонений этих первичных экстремалей от их положения в среде без неоднородностей. Тогда соответствующий эффект будет описываться первым же членом данного ряда. Примеры подобных подходов приводятся в [3]. Разумеется, что имеет смысл делать лишь при очень сильном влиянии неоднородности на ход первичных лучей, обеспечивающих их деформацию внутри v вплоть до поворота по направлению к точке приема \mathbf{x} , и, кроме того, при условии значительного превышения размерами этих неоднородностей длины волны излучения (иначе само построение данных лучей теряет смысл). Но такое воздействие неоднородности на волновой процесс справедливее было бы называть не рассеянием, а отражением. Более тонкие эффекты, тем более предельный случай брэгговского рассеяния, все равно будут содержаться во втором члене ряда. Поэтому именно он представляет наибольший интерес для изучения явления рассеяния и дает к тому же возможность самого общего подхода к их описанию.

2. Рассмотрим подробнее второе слагаемое ряда (4), т.е. интеграл $E_{1g} = \int_V \rho_1(\mathbf{x}') G_g(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}'$. Функцию $G_g(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ удобно выражать в виде $G_g = \mathcal{B}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \exp\{ik \Theta(\mathbf{x}', \mathbf{x})\}$. Напомним, что уравнения для эйконала Θ определяют форму лучей, а само значение Θ дает приращение фазы волны вдоль луча. Величина $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ рассчитывается по ходу элементарной лучевой трубки, изменения сечения которой влияют на значение \mathcal{B} . Примененный здесь вид записи $\mathcal{B}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ указывает на тот факт, что \mathcal{B} зависит и от его граничного значения в т. \mathbf{x}' . Заметим, что в литературе (см., например, [3, 5]) обычно принято использовать функцию $\mathcal{A}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, связанную с введенной нами функцией $\mathcal{B}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ соотношением $\mathcal{A}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \rho_1(\mathbf{x}') \mathcal{B}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, где ρ_1 задает амплитуду и начальную фазу волны, а множитель $\mathcal{B}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ определяется только формой и длиной лучевой трубки.

Чтобы рассчитать произвольный подинтегральный элемент у второго члена ряда (4), надо рассмотреть две элементарные пересекающиеся

между собой лучевые трубки (рис. 1). Полагаем, что внешний источник волн расположен в т. x'' , т. x' — текущие координаты внутри v , а x — точка приема рассеянного излучения.

Расчет функции $G_g(x'', x') = \mathcal{B}(x'', x') \exp\{ik\Theta(x'', x')\}$ внутри трубок для падающего излучения делается по обычным геометрикооптическим законам. Далее согласно (2) следует найти $\rho_1(x') = -\mathcal{L}G_g$, поскольку у нас внутри v $\rho = 0$. Выделяя отдельно входящий в ρ_1 осциллирующий множитель $\exp\{ik\Theta(x'', x')\}$, запишем $\rho_1 = W(x') \exp\{ik\Theta(x'', x')\}$ через вводимую таким образом новую функцию $W(x')$. Она легко находится из ρ_1 , и мы не будем ее обсуждать. Вклад в поле рассеяния в т. x , приходящий вдоль трубки (x', x) , можно выразить в виде $\rho_1(x')\mathcal{B}(x', x) \exp\{ik\Theta(x', x)\}$, и суммарное поле рассеяния в точке x будет, следовательно, выражаться как

$$E_{1g} = \int_v W(x') \mathcal{B}(x', x) \exp\{ik\Theta(x'', x') + ik\Theta(x', x)\} d^3x'. \quad (5)$$

Выберем одну из точек внутри v , например, $a(a_1, a_2, a_3)$, в качестве нового начала координат и построим две проходящие через нее поверхности, одна из которых в каждой своей точке ортогональна системе экстремалей, исходящих из т. x'' , а другая — ортогональна системе экстремалей из т. x (s'' и s на рис. 1). Тогда значения $\Theta(x'', x')$ на всех отрезках экстремалей от x'' до s'' будут равны между собой, т.е. равны $\Theta(x'', a)$, а все значения $\Theta(x', x)$ от s' до x соответственно равны $\Theta(a, x)$ согласно законам римановой геометрии, которой подчиняются системы рассматриваемых лучей [4]. Это дает возможность выделить в (5) множитель $\exp\{ik\Theta(x'', a) + ik\Theta(a, x)\}$ и вынести его за знак интеграла.

Определим теперь внутри v поля двух векторов $\vec{k}_1(x')$ и $\vec{k}_2(x')$ с модулями k и направлениями, соответствующими касательным к экстремалам (x'', x') и (x', x) в каждой точке x' . Вводя далее вектора $d\vec{x}'$ и $d\vec{\Theta} = n d\vec{x}'$, имеющие (в отличие от элемента экстремали ds и от $d\Theta = n ds$ на ней) произвольные направления, находим, что величина $\int \vec{k}_i d\vec{\Theta}$ не меняется при изменении формы и смещениях конечных точек кривой интегрирования, если эти конечные точки остаются всегда на одних и тех же поверхностях, ортогональных соответствующему семейству экстремалей. Это следует из уже упоминавшегося свойства римановой геометрии и используется в ней, например, для построения т.н. полугеодезических координатных систем [4]. С помощью вектора $d\vec{\Theta}$ мы можем в (5) записать выражение внутри экспоненты (под интегралом) в виде $i \int_a^{x'} \vec{k}_1 d\vec{\Theta} + i \int_{x'}^a \vec{k}_2 d\vec{\Theta} = i \int_a^{x'} (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{\Theta}$. Далее произведем замену $\mathcal{B}(x', x) = \overline{\mathcal{B}(a, x)} \{ \mathcal{B}(x', x) / \overline{\mathcal{B}(a, x)} \} = \overline{\mathcal{B}(a, x)} b(x', a)$ и вынесем $\overline{\mathcal{B}(a, x)}$ за знак интеграла. В качестве $\overline{\mathcal{B}(a, x)}$ можно выбирать $\mathcal{B}(a, x)$, усредненное по времени (если неоднородности среды зависят от него) или по значе-

ниям \mathbf{x} , равноудаленным от т. a . Сделанные нами выше изменения (5) превращают его в

$$E_{1g} = \exp\{ik\Theta(\mathbf{x}'', a) + ik\Theta(a, \mathbf{x})\} \overline{B(a, \mathbf{x})} E_s, \quad \text{где} \quad (6)$$

$$E_s = \int_V W[\Theta] b[\Theta, a] D(\mathbf{x}', \Theta) \exp\left\{i \int_a^{\mathbf{x}'} (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{\Theta}\right\} d^3\Theta_i,$$

а $D(\mathbf{x}', \Theta)$ — детерминант преобразования координат \mathbf{x}' и Θ .

Когда речь идет об индикатрисе рассеяния, образующийся у E_{1g} множитель перед E_s выпадает из рассмотрения, и интерес представляет лишь одна величина E_s . Заметим, что в случае возможности выноса разности векторов $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ в (6) из-под знака интеграла данная запись E_s приобретает вид трехмерной фурье-трансформанты от входящего туда подынтегрального выражения. Получающаяся зависимость сходна по типу с формулой для брэгговского рассеяния [5], но с более сложной функцией, из которой выделяется фурье-компонента. Легко видеть, что приведение (6) к брэгговскому случаю происходит при пренебрежении изгибами лучей внутри v . Вывода разности $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ из-под интеграла можно добиться с помощью криволинейных координат, осевые линии которых согласованы с полем вектора $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$.

Если уравнение (1) дается в векторном виде, то общая схема вывода ряда (4) не меняется, лишь функции E , E_s и ρ , ρ_ν становятся векторами, а G , B — тензорами. Это приводит к более громоздким математическим выражениям и к замене (WbD) в (6) на легко воспроизводимую, но гораздо более сложную конструкцию. Возможно, в большинстве случаев такое усложнение не оправдывается. Когда точки \mathbf{x}'' и \mathbf{x} достаточно удалены от области v и благодаря этому экстремали семейств на подходе к v параллельны между собой, решение задачи часто можно выразить через единственные компоненты данных векторов и тензоров. Условия же отдаленности \mathbf{x}'' и \mathbf{x} изначально заложены в самом смысле понятия индикатрисы.

Напомним, что сходная ситуация обычно решается так же во всех геометрооптических расчетах [3, 5], и там тоже используется скалярный вариант уравнения (1).

3. Оценим теперь перспективы применения изложенного выше для исследования рассеяния волн на неоднородностях среды, ограничиваясь здесь только самой постановкой данного вопроса. При изучении влияния неоднородностей какого-либо определенного вида можно было бы далее конкретизировать подынтегральное выражение у E_s и идти путем аналитического решения проблемы, обращаясь к численному расчету лишь на

самом последнем его этапе. Но здесь эта наиболее привычная схема действий вряд ли будет оправдана. Очевидно, такой путь, как правило, будет почти столь же труден, как и дифракционный подход и не даст заметных преимуществ. Гораздо целесообразней задействовать хорошо отработанную технику расчета экстремалей (лучевых трасс в среде). Нарращивание таких уже существующих программ для построения на их основе программ по расчету индикатрис рассеяния излучения на неоднородностях произвольной формы позволило бы после без особого труда получать соответствующие данные в численном виде. В конечном итоге все зависит от возможностей создания программ для расчета (5) или (6) и от широты комплекса задач, для которых такой расчет осуществим.

Постараемся дать ответ на эти вопросы.

Используя свойство обратимости экстремалей, оба требуемых для расчета E_s семейства, покрывающих область v , удобно строить, начиная из внешних для v точек x'' и x . Тогда определение полей векторов \vec{k}_1 и \vec{k}_2 внутри v не составит серьезной проблемы. Нет и существенных ограничений для расчета и других входящих в (6) функций. Следует также учесть, что некоторые из используемых выше понятий, с помощью которых выводились заключения (5) и (6) (поверхности s'' и s , величины $\Theta(x'', a)$ и $\Theta(a, x)$) в процессе расчета E_s не требуют дополнительных вычислений и построений. Для достижения результатов расчета достаточно лишь самого факта их существования.

Наиболее серьезная проблема могла бы возникнуть при переходе к численному интегрированию в (5), поскольку подынтегральная функция содержит осциллирующий множитель. Обычный процесс интегрирования потребовал бы очень мелкой сетки узловых точек, меньших длины волны. Конечно, есть различные возможности избежать этого, например, путем применения метода Филона и т.п. Но наилучшим способом представляется переход к (6) и к упоминавшейся выше фурье-трансформанте от WbD , что или вообще может избавить от необходимости вводить эту сеть точек, или потребует разбиения области v всего на несколько частей, внутри каждой из которых удастся перейти на язык фурье-преобразования подынтегральной функции. В последнем случае придется столкнуться с проблемой выбора: по какому из принципов (когерентному или некогерентному) следует суммировать переизлучения из этих частей области v , что будет вытекать из физической конкретизации решаемой задачи. Гибкие программы данного типа легко сделать пригодными для исследования различных вариантов суммирования. Нет также и существенных ограничений на анализ каких-либо разновидностей неоднородностей среды. В частности, применимость таких программ для исследования брэгговского рассеяния — одной из предельных форм когерентного рассеяния — не вызывает сомнений.

Изложенное выше дает основание полагать, что (6) решает основные

принципиальные проблемы общего описания когерентного рассеяния неоднородностями среды. Остающиеся технические трудности численной реализации (6) вполне преодолимы, хотя создание соответствующих компьютерных программ, конечно, не является простым делом. Но перспективы их практического и теоретического использования очень велики (прямая и обратная задачи распространения волн в среде с неоднородностями, диагностика сред и т.д.). Это оправдывает работы в данном направлении. Укажем также, что изложенный выше метод и решение (6) справедливы не только для расчетов электромагнитных полей, но в равной мере и для расчетов любых иных физически определенных величин, подчиняющихся волновому уравнению типа (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Наука, 1959. С. 157.
2. Погорелов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. N 4. С. 435.
3. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. С. 20, 184.
4. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1964. С. 492.
5. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967. С. 152.

Институт прикладной геофизики,
г. Москва

Поступила в редакцию
25 мая 1994 г.

ON THE POSSIBILITY OF A UNIFIED APPROACH TO STUDY THE INDICATRIXES OF COHERENT WAVE SCATTERING BY DIFFERENT MEDIUM INHOMOGENEITIES

V. I. Pogorelov

There has been derived a general expression describing the indicatrix of coherent scattering by arbitrary medium inhomogeneities. The possibility is grounded to create a universe program for calculating such indicatrixes that makes possible to avoid difficulties of analytical and experimental investigations of media using wave processes.

УДК 553.9

О ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПРИРАЩЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ И МАСШТАБ НЕОДНОРОДНОСТИ

В. В. Кречетов

Рассмотрено переходное излучение заряда при пересечении границы двух сред с разной диэлектрической проницаемостью без ограничения на ее приращение и масштаб изменения. Это сделано благодаря развитому численному методу решения волнового уравнения с источником в неоднородной среде. Численные результаты отлично совпадают с аналитическими в области их применения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В неоднородной среде даже равномерно движущийся заряд излучает собственные волны среды. Это связано с наличием собственного поля заряда и перестройкой его в момент прохождения неоднородности. Впервые это было замечено Гинзбургом В.Л. и Франком И.М. [1] для границы вакуум—диэлектрик. Исследование переходного излучения (ПИ) распространялось на анизотропные, нестационарные и случайно-неоднородные среды. Достаточно полный анализ ПИ проведен одним из авторов [1] в книге [2] и обзоре [3]. На основе ПИ разработаны детекторы релятивистских частиц, спектр от которых простирается в рентгеновскую часть спектра. ПИ мощных модулированных пучков может достигать достаточных величин для проявления нелинейных эффектов и обратного влияния на пучки. В приближении сильного магнитного поля ПИ рассмотрено в [4] вместе со случаем нестационарной плазмы. Во всех перечисленных работах допускаются ограничения на величину изменения диэлектрической проницаемости, ее характерное пространственное изменение и общий вид. Это приводит к упрощению первоначальных уравнений с целью аналитического анализа получаемых результатов даже в случае изотропной среды. Представляет интерес исследование ПИ в случаях, недопускающих аналитического подхода и сравнение результатов с имеющимися в литературе приближениями.

Ниже предпринята попытка численного анализа характеристик ПИ в изотропной среде без ограничения на величину изменения диэлектриче-

ской проницаемости и ее характерный масштаб изменения. Для некоторых параметров среды отклонения от известных результатов существенны. Представляет интерес численный алгоритм получения решения волнового уравнения с источником при наличии асимптотических хвостов у найденных решений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим равномерно движущийся со скоростью v_0 (вдоль положительного направления z) заряд Q в изотропной среде, диэлектрическая проницаемость которой ϵ изменяется только вдоль оси z в некоторой конечной области пространства. До входа заряда в область изменения ϵ нет никакого излучения и существует только поле заряда. После пролета заряда через скачек ϵ появляются две расходящиеся от него волны, амплитуды которых необходимо найти для различных изменений ϵ .

Исходными уравнениями будут уравнения поля с внешним током, из которых можно получить уравнение для магнитного поля [5]

$$-\frac{d^2 B}{dz^2} + k^2 (\epsilon - \sin^2 \theta) B - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \frac{dB}{dz} = i F e^{ik_0 z}, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$, θ — угол между \vec{k} и z , $F = \frac{4\pi Q \omega \sin \theta}{c^2 (2\pi)^3}$.

Уравнения для электрического поля в общем случае содержат вторые производные от ϵ и F , поэтому предпочтительнее пользоваться равносильным уравнением (1) и выражать компоненты электрического поля через магнитные. Естественно, что систему (1) невозможно решить аналитически для произвольной функции $\epsilon(z)$, кроме резкого скачка $\epsilon(z)$, что эквивалентно переходу заряда через границу двух сред. Такое решение было найдено Гинзбургом В.Л. [1]. Упрощенные варианты (1) рассматривались авторами [1, 4]. Прежде чем перейти к решению уравнения (1), изложим общую схему его численного решения.

3. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ

Уравнение (1) может быть приведено к виду

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2(z) E = i f(z) e^{ik_0 z}, \quad (2)$$

численная схема решения которого изложена ниже в предположении, что сильная зависимость $k^2(z)$ и $f(z)$ существует в конечной области около $z_0 \gg 1$. Общее решение (2) слева (E_1) и справа (E_2) от z_0 , вне области

изменения $k^2(z)$, складывается из решения однородного уравнения E^c и решения неоднородного уравнения E^b

$$E_{1,2} = E_{1,2}^c + E_{1,2}^b = d \exp(-ik_{1,2}z) + b \exp(ik_{1,2}z) + \frac{if e^{ik_0 z}}{(-k_0^2 + k_{1,2}^2)}, \quad (3)$$

где d, b — амплитуды волн, движущихся влево и вправо соответственно, $k_1 = k(z \ll z_0)$, $k_2 = k(z \gg z_0)$.

В области “взаимодействия” не будем накладывать ограничения вида $k^2(z) < 0$, $\frac{1}{k^2} \frac{dk}{dz} > < 1$ или $k^2(z) \neq k_0^2$ в какой-либо внутренней точке области “взаимодействия”. До того, как заряд попадает в область изменения $k^2(z)$, не существует излучения, т. е. решения однородного уравнения (2) тождественно нулевые и не существует собственных колебаний. После прохождения зарядом через неоднородность при $t \rightarrow \infty$, $z \rightarrow -\infty$ необходимо в (3) потребовать $b = 0$, а при $z \rightarrow \infty$ — $d = 0$, т. к. существуют только расходящиеся от z_0 волны. Может выполняться равенство $k_1 = k_2$, что соответствует слою.

Базовым методом решения (2) является метод Рунге–Кутта для системы уравнений с начальными условиями и построение на его основе итерационной процедуры.

Если начать решение (2) в некоторой точке $z_1 \ll z_0$ и задать начальное условие в виде $E_1(z = z_1) = E^b(z_1)$, $b = 0$, $d = 0$, то метод Рунге–Кутта после первого шага (прохода от z_1 до z_2) в $z_2 \gg z_0$ даст не только вынужденное решение E_2^b , но и две волны с $b \neq 0$, $d \neq 0$. В $z = z_2$ имеем $d \neq 0$, что не удовлетворяет постановке задачи, поэтому проведем второй шаг, начав решение в z_2 и окончив в z_1 . В качестве начальных условий будем брать такую функцию $E^c(z)$, которая в z_2 содержит только волну, идущую направо, т. е. “руками” положим $d(z = z_2) = 0$, а b оставим без изменений. В z_1 получим опять две волны с $b \neq 0$, $d \neq 0$, но в качестве начальных условий в z_1 положим теперь $b(z_1) = 0$, d оставим прежним и начнем третий шаг, проведя решение от z_1 до z_2 , где обнаружим, что d значительно уменьшилось (на несколько порядков) по сравнению с первым шагом. Далее, повторяя указанный прием, быстро получаем необходимое решение с $b(z = z_1) = 0$, $d(z = z_1) \neq 0$; $b(z = z_2) \neq 0$, $d(z = z_2) = 0$. Смысл итерационной процедуры состоит в последовательном обнулении на одном из концов интервала $[z_1, z_2]$ амплитуды волны, не удовлетворяющей постановке задачи, и получении после нескольких шагов точного решения (2). В общем случае $k^2(z)$ может содержать первую и вторую производную ϵ , что приводит к изменению $k^2(z)$ в широких пределах. Численный метод работает, если $k^2(z) < 0$ или $k(z) = k_0$ в какой-либо области.

Так как решение (2) записывается относительно $\text{Re}E$ и $\text{Im}E$, для дальнейшего необходимо в свободном решении E^c выразить амплитуды волн b и d , идущие направо и налево через $e_1 = \text{Re}E^c$ и $e_2 = \text{Im}E^c$, используя

соотношения:

$$E^c = e_1 + ie_2 = be^{ikz+i\varphi_1} + de^{-ikz+i\varphi_2}, \quad (4)$$

Из (4) легко найти выражения для амплитуд b и d через компоненты свободного решения и их производные.

$$b = \frac{1}{2} \left[\left(e_1 + \frac{1}{k} \frac{de_2}{dz} \right)^2 + \left(e_2 - \frac{1}{k} \frac{de_1}{dz} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$d = \frac{1}{2} \left[\left(e_1 - \frac{1}{k} \frac{de_2}{dz} \right)^2 + \left(e_2 + \frac{1}{k} \frac{de_1}{dz} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

При каждом новом шаге новые начальные условия E^{Hc} для E^c выражаются через старые значения для выполнения условий $d = 0$ в z_2 (верхний знак) или $b = 0$ в z_1 (нижний знак) так:

$$E^{Hc} = \frac{1}{2} \left(e_1 \pm \frac{1}{k} \frac{de_2}{dz} \right) + i \frac{1}{2} \left(e_2 \mp \frac{1}{k} \frac{de_1}{dz} \right), \quad (6)$$

$$\frac{dE^{Hc}}{dz} = -\frac{k}{2} \left(e_2 \mp \frac{1}{k} \frac{de_1}{dz} \right) + i \frac{k}{2} \left(e_1 \pm \frac{1}{k} \frac{de_2}{dz} \right),$$

где k — значение $k(z)$ в соответствующей точке.

Последовательное применение указанной схемы для решения уравнения (2) дает поразительно быструю сходимость свободного решения к условиям задачи. Слева существует волна вида $de^{-ik_1z+i\varphi_2} + E^B$, $b = 0$, справа — волна вида $be^{ik_2z+i\varphi_1} + E^B$, $d = 0$. Указанный алгоритм реализован на РС и дает возможность быстро получать решение уравнений типа (2), на основе использования метода Рунге-Кутты для начальной задачи, приспособленной для решения граничной задачи.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Метод, развитый для уравнения (2), легко распространить на решение уравнения (1), которое в новых переменных имеет вид:

$$\frac{d\tilde{B}}{d\tilde{z}} + \tilde{\omega}^2(\epsilon - \sin^2 \theta) - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\tilde{z}} \frac{d\tilde{B}}{d\tilde{z}} = i\tilde{\omega} \sin \theta e^{i\tilde{\omega}z/\tilde{v}}, \quad (7)$$

где $\tilde{B} = \frac{(2\pi)^3 \omega_0 B}{4\pi Q}$, $\omega_0 = 3 \cdot 10^8$ [с⁻¹], $\tilde{\omega} = \omega/\omega_0$, $\tilde{z} = z\omega_0/c$, $\tilde{v} = v_0/c$.

Поскольку в литературе [2] известно решение для переходного излучения

в случае резкой границы и плавного слоя с $\Delta\epsilon \ll \epsilon$, возьмем следующую зависимость для $\epsilon(\tilde{z})$ в виде переходной области шириной L .

$$\epsilon(\tilde{z}) = \epsilon_0 \left[1 + \frac{a}{1 + \exp\left(-(\tilde{z} - \tilde{z}_0/2)/L\right)} \right], \quad (8)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость в $\tilde{z} = 0$, $\epsilon_0 a = \Delta\epsilon$ — приращение диэлектрической проницаемости, $0, \tilde{z}_0$ — границы области, за которыми верны асимптотические решения. Область наиболее существенного изменения $\epsilon(\tilde{z})$ находится вблизи $\tilde{z}_0/2$.

В асимптотических областях, где можно пренебречь производными от $\epsilon(\tilde{z})$, уравнение (1) переходит в известное уравнение для однородного случая [2]. Задавая различные законы изменения $\epsilon(\tilde{z})$, достаточно быстро приближающиеся к значениям ϵ_1 и ϵ_2 вдали от области взаимодействия, можно получить амплитуды волн переходного рассеяния.

Для зависимости $\epsilon(\tilde{z})$ (8) амплитуды волн получены в [2] в двух случаях: $L \rightarrow 0$ и $\Delta\epsilon \ll \epsilon$. В первом случае методом шивки решений на границе уравнения (1) при $d\epsilon/d\tilde{z} = 0$, $d^2\epsilon/d\tilde{z}^2 = 0$. Во втором — методом возмущений. Ниже сравним амплитуды, полученные обоими методами с учетом указанных ограничений, с вычислениями предлагаемым методом, в широком диапазоне изменения L и $\Delta\epsilon > \ll 1$ и проанализируем частотный и угловой спектр излучения.

Для наглядности результатов вначале произведем сравнение не самих найденных амплитуд, а их отношений по обе стороны от области взаимодействия, т.к. сами амплитуды меняются на несколько порядков. Для резкой границы двух сред отношение амплитуды волны, идущей направо, к амплитуде волны, идущей налево, равно [2]:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1 + v^2(\sin^2 \theta - \epsilon_1 - \epsilon_2) - v^3 \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2 \theta}}{1 + v^2(\sin^2 \theta - \epsilon_1 - \epsilon_2) + v^3 \epsilon_1 \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 \theta}}, \quad (9)$$

где ϵ_1, ϵ_2 — диэлектрические проницаемости обеих сред, $v = v_0/c$.

В случае плавного перехода (8) при $\Delta\epsilon \ll \epsilon$ отношение амплитуд равно [2]:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{[1 - v\sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta} - v^2\epsilon] \operatorname{sh}[(\pi L \tilde{\omega}/v)(1 + v\sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta})]}{\operatorname{sh}[(\pi L \tilde{\omega}/v)(1 - v\sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta})][1 + v\sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta} - v^2\epsilon]}, \quad (10)$$

где $\epsilon = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$, $(\epsilon_1 - \epsilon_2)/\epsilon_1 \ll 1$.

При $L \rightarrow 0$ выражения (9) и (10) совпадают. Поскольку в (10) присутствует зависимость от $\Delta\epsilon$, т.к. $\epsilon = \epsilon_1 + \Delta\epsilon/2$, то b_2/b_1 испытывает влияние не только L , но и $\Delta\epsilon$.

Расчеты проводились для следующих параметров: $\tilde{\omega} = 0.25$, $v = 0.25$, $\theta = 30^\circ$, $\epsilon_1 = 1$, $\Delta\epsilon = 0 \div 10$, $L = 0 \div 1$.

На рис. 1 представлены отношения амплитуд волн в зависимости от $\Delta\epsilon$ для различных значений L . Поскольку (9) не зависит от L , то a_2/a_1 представлена единственной кривой 1. Остальные нечетные кривые вычислены с использованием (10). Четные кривые есть результат расчета по вышеизложенной методике. При значениях $\Delta\epsilon \ll 1$ и $Lk_0 \ll 1$ все кривые сливаются. Для $L \approx 1$ при $\epsilon \ll 1$ кривые 2 и 3, 4 и 5 практически совпадают и различие начинает сказываться для $\Delta\epsilon > 0.1$, отличие от кривой 1 становится сильным. При $\Delta\epsilon \approx 1$ характер поведения кривых 3, 5, полученных из (10), противоположен поведению кривых 2, 4, полученных путем численного счета, которые более повторяют характер кривой 1. Если $\Delta\epsilon = 0.1 \div 1$ и $L = 0.4$, то можно выбирать из рисунка каким приближением пользоваться. Практически кривые численного метода пытаются соединить решения для плавных изменений ϵ при $\Delta\epsilon \ll 1$ с решениями с резкой границей при $\Delta\epsilon = 1$.

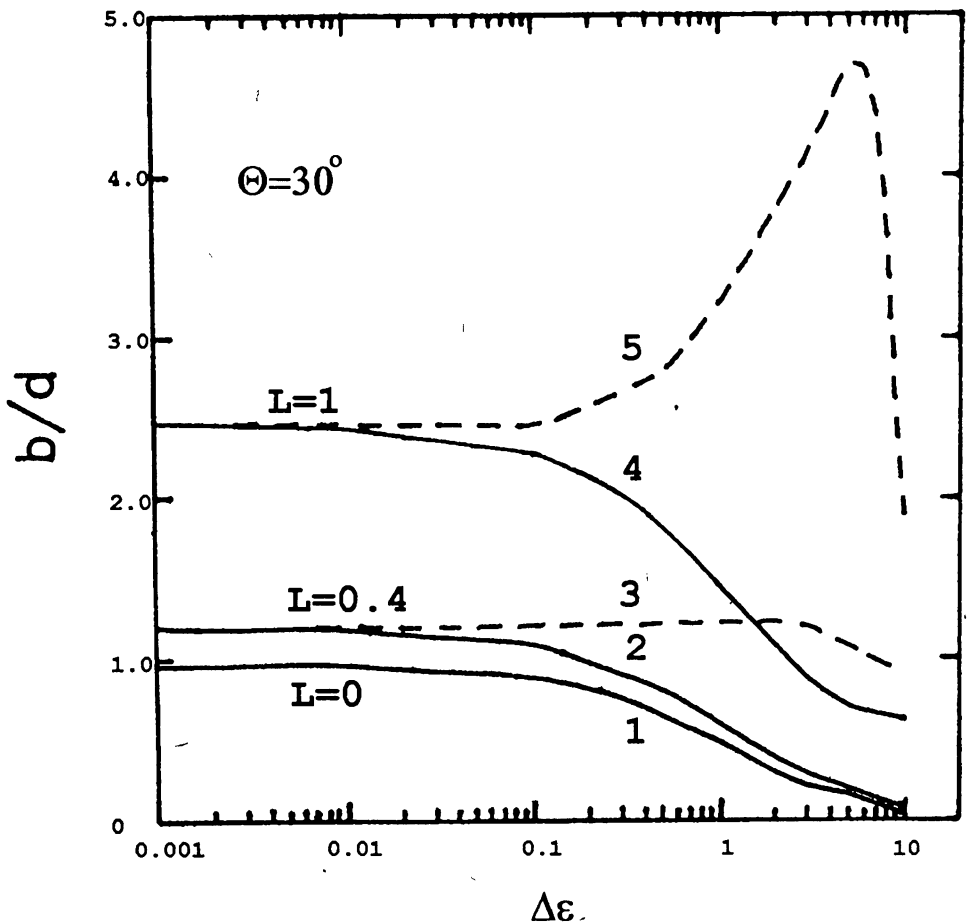


Рис. 1.

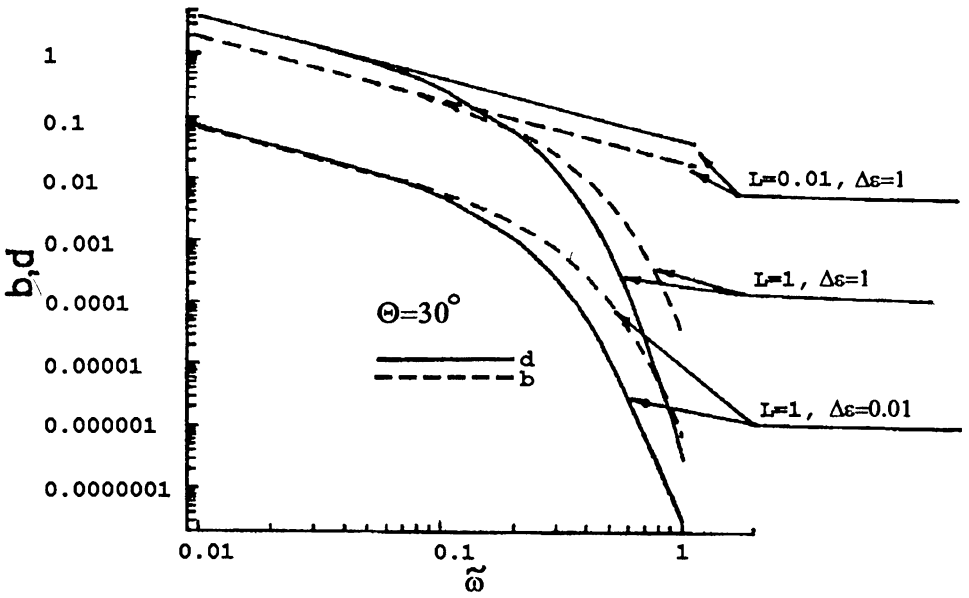


Рис. 2.

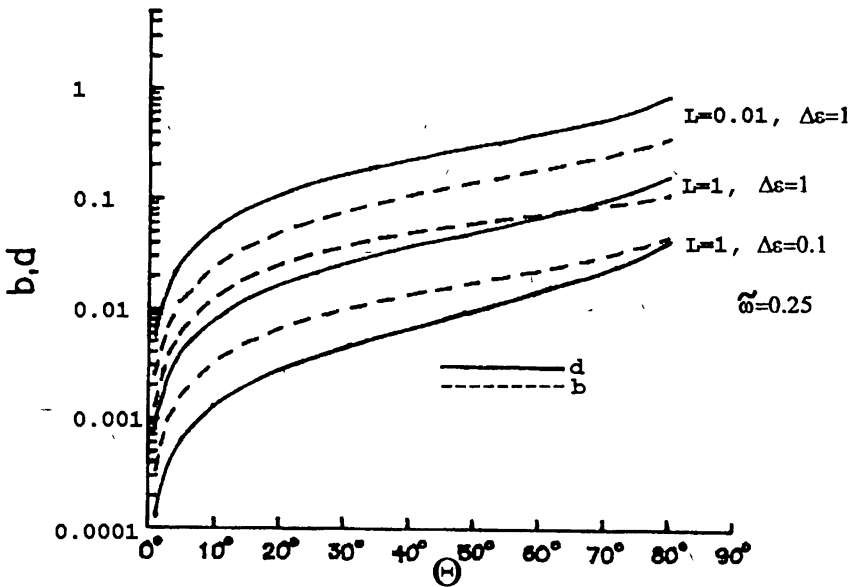


Рис. 3.

На рис. 2 представлена частотная зависимость амплитуд b и d для различных значений L и ϵ , и $\theta = 30^\circ$, найденная численным методом. Наибольшая амплитуда имеет место в случае резкого скачка ϵ ($L \ll 1$, $\Delta\epsilon = 1$), сохраняется соотношение амплитуд во всей области изменений $\tilde{\omega}$. Такое поведение описывается и аналитическим решением [2]. Для случая, не описываемого аналитическими приближениями (широкая переходная область, конечное приращение ϵ), спектр излучения начинает спадать при приближении длины волны излучения к ширине переходной области, меняется соотношение амплитуд волн b и d . Если для малых частот преобладала волна, выходящая в вакуум, то с увеличением частоты преобладает волна, идущая в среду. На больших частотах наблюдается резкое падение амплитуды волн. Уменьшение приращения ϵ в третьем случае дает уменьшение амплитуд волн b и d , но не меняет характера спектра по сравнению с предыдущим. Лишь для малых частот отношение этих амплитуд стремится к 1.

Угловая зависимость переходного излучения представлена на рис. 3 для трех различных значений L и ϵ , при $\tilde{\omega} = 0.25$. С увеличением угла θ амплитуды волн увеличиваются вначале резко, затем более плавно. Для резкого скачка соотношение амплитуд b и d сохраняется во всем диапазоне углов, с преобладанием волны, идущей в вакуум. Для плавного скачка и конечного приращения ϵ , при некотором значении θ происходит изменение соотношения амплитуд волн b и d . Для малых приращений ϵ преобладает волна, идущая в среду.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый численный метод решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка относительно комплексных переменных с коэффициентами, зависящими от координат, с граничными условиями в виде расходящихся волн, позволил решить задачу о переходном излучении заряда в неоднородной (плоскостной) изотропной среде в широком диапазоне приращений диэлектрической проницаемости и масштаба ее изменений. Полученные численные результаты отлично совпадают с аналитическими в области их приближения. Для плавных изменений среды и больших изменений диэлектрической проницаемости необходимо пользоваться численным методом. Существуют области изменения L и $\Delta\epsilon$, где можно отдать предпочтение тому или иному методу. Представлены частотная и угловая зависимость переходного излучения для разных значений L и ϵ . Указанный численный метод работает для любых пространственных профилей ϵ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л., Франк И. М. //ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 15.
2. Гинзбург И. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. — М.: Наука, 1984.
3. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Некоторые вопросы теории переходного излучения и переходного рассеяния. //УФН. 1978. Т. 126. С. 553.
4. Ерохин Н. С., Кузнецов М. В., Моисеев С. С. и др. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. — М.: Наука, 1982.
5. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. //В кн.: Вопросы теории плазмы, вып. 7. — М., 1973. С. 146.

НИИ физики при Ростовском
государственном университете, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
21 февраля 1994 г.

**ON TRANSITION RADIATION OF A CHARGE IN THE
INHOMOGENEOUS MEDIUM WITHOUT THE RESTRICTIONS ON THE
DIELECTRIC PERMITTIVITY VARIATION AND THE SCALE OF AN
INHOMOGENITY**

V. V. Krechetov

The transition radiation of a charge passing the boundary of the two media with different dielectric permittivity is considered without the restrictions of its variation and the variation scale length. This is made due to the developed numerical method of the wave equation solution in an inhomogeneous medium. The numerical results to a great extent correspond to the analytical ones in the limits of their application.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

О. В. Юшкова

В статье представлено аналитическое решение в частотной области одномерной обратной задачи отражения радиоволн от поглощающего слоя, лежащего на однородном полупространстве для случая нормального падения. Процедура решения использует данные о частотной зависимости действительной части коэффициента отражения на ограниченном интервале частот. В работе обсуждается каким минимальным должен быть этот интервал.

Одна из основных задач теории распространения радиоволн — это задача о восстановлении диэлектрических свойств среды, с которой эти волны взаимодействуют. В данной статье рассмотрена задача отражения плоских гармонических радиоволн диапазона $[f_1, f_2]$, падающих по нормали к границе плоско-слоистой среды следующей конфигурации.

Однородный слой толщины D лежит на однородном полупространстве. Диэлектрическая проницаемость слоя $\epsilon_1 = \epsilon'_1 + i\epsilon''_1$, полупространства $\epsilon_2 = \epsilon'_2 + i\epsilon''_2$. Вторичными отражениями пренебрегаем.

Необходимо выяснить, можно ли (и если да, то как) восстановить пять параметров среды $\epsilon'_1, \epsilon''_1, \epsilon'_2, \epsilon''_2, D$, зная зависимость коэффициента отражения $R(f)$ в диапазоне $[f_1, f_2]$, и каким минимальным этот диапазон должен быть.

Данная задача всесторонне изучена [1]. Следует, однако, отметить, что многие из существующих решений, хотя и отличаются математическим изяществом, все же не могут быть применены на практике (в данном случае при радиоизучении грунта из космоса), поскольку требуют, чтобы исходные данные либо были определены на неограниченном частотном интервале, либо имели высокое качество, которое не может быть обеспечено в процессе проведения эксперимента.

В статье приведено аналитическое решение задачи на ограниченном частотном диапазоне.

АСПЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С РЕШЕНИЕМ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Распространение радиоволны с частотой $f \in [f_1, f_2]$ в любой точке пространства описывается приведенным волновым уравнением (ось z на-

правлена вниз):

$$\frac{d^2}{dz^2} Y + k^2 \varepsilon(z) Y = 0,$$

где

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_0 = 1, & z < 0, \\ \varepsilon_1, & 0 \leq z \leq D, \\ \varepsilon_2, & z > D, \end{cases}$$

k — волновое число.

Учитывая условия непрерывности решения и его первой производной на границах слоя, получим формулу для частотной зависимости коэффициента отражения от границы $z = 0$ [2]:

$$R(f) = \frac{x + y(f)}{1 + xy(f)}, \quad (1)$$

где

$$r_{lm} = (\sqrt{\varepsilon_l} - \sqrt{\varepsilon_m}) / (\sqrt{\varepsilon_l} + \sqrt{\varepsilon_m}), \quad (2)$$

$$x = r_{01}, \quad (3)$$

$$y(f) = r_{12} \exp(\alpha f) h(f), \quad (4)$$

$$h(f) = [\cos(\beta f) + i \sin(\beta f)], \quad (5)$$

$$\alpha = -4\pi D \operatorname{Im}(\sqrt{\varepsilon_1})/c, \quad \beta = 4\pi D \operatorname{Re}(\sqrt{\varepsilon_1})/c,$$

c — скорость света.

Формула (1) является основой для решения задачи восстановления параметров.

АНАЛИЗ ГРАФИКОВ $\operatorname{Re}[R(f)]$ И $\operatorname{Im}[R(f)]$ И ФУНКЦИИ $R(f)$

На рисунке даны типичные графики $\operatorname{Re}[R(f)]$ и $\operatorname{Im}[R(f)]$ для среды с параметрами, характерными, например, для грунтов в регионах вечной мерзлоты: $\varepsilon_1 = 4 + i$, $\varepsilon_2 = 16 + i$, $D = 20$ м. Представленные графики $\operatorname{Re}[R(f)]$ и $\operatorname{Im}[R(f)]$ имеют хорошо выраженные пологие участки при $f \rightarrow 0$ и $f \rightarrow \infty$, в этих случаях $R(f) \rightarrow r_{02}$ и $R(f) \rightarrow r_{01}$ соответственно.

Из формул (1), (4), (5) видно, что осцилляции графиков зависят от $h(f)$; $\exp(\alpha f)$ регулирует их амплитуду. Из (1), (4), (5) следует, что экстремальные точки $\operatorname{Re}[R(f)]$ описываются соотношением:

$$f^* = cn/4D \operatorname{Re}(\sqrt{\varepsilon_1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

и имеют период

$$\tau = c/4D \operatorname{Re}(\sqrt{\varepsilon_1}). \quad (6)$$

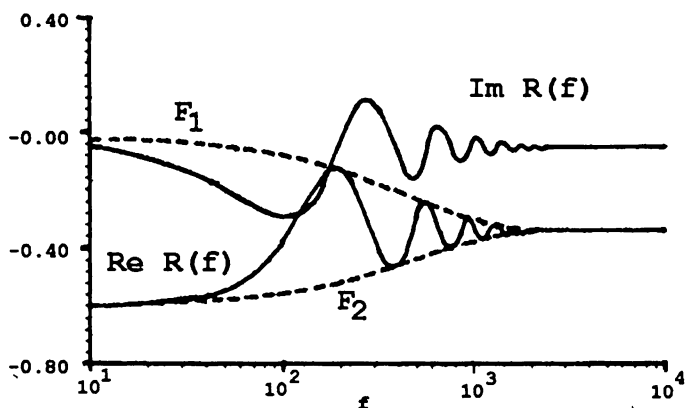
Если f_1^* — критическая точка, то $f_2^* = f_1^* + \tau$ — тоже, причем

$$y(f_2^*) = r_{12} \exp(-i4\pi D \sqrt{\varepsilon_1} f_2^*/c) = y(f_1^*) w, \quad (7)$$

где

$$w = -\exp(-\pi \operatorname{Im}[\sqrt{\varepsilon_1}]/\operatorname{Re}[\sqrt{\varepsilon_1}]), \quad (8)$$

— число действительное.



Можно добавить, что графики

$$F_1 = \operatorname{Re} \frac{r_{01} + r_{12} \exp(\alpha f)}{1 + r_{01} r_{12} \exp(\alpha f)} \quad \text{и} \quad F_2 = \operatorname{Re} \frac{r_{01} - r_{12} \exp(\alpha f)}{1 - r_{01} r_{12} \exp(\alpha f)}$$

играют роль огибающих для $\operatorname{Re}[R(f)]$.

Аналогичный анализ был проведен для графика $\operatorname{Im}[R(f)]$, экстремальные точки которого имеют тот же период τ и сдвинуты относительно f^* на $\tau/2$.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим систему трансцендентных уравнений над полем комплексных чисел для x , $y(f_1^*)$, w , считая, что известны любые три последовательные экстремальные точки f_l^* и соответствующие им значения $R(f_l^*) = \operatorname{Re}[R(f_l^*)] + i \operatorname{Im}[R(f_l^*)]$, $l = 1, 2, 3$. Из (1) и (7) следует:

$$\begin{cases} R(f_1^*) = \frac{x + y(f_1^*)}{1 + xy(f_1^*)}, \\ R(f_2^*) = \frac{x + wy(f_1^*)}{1 + xwy(f_1^*)}, \\ R(f_3^*) = \frac{x + w^2y(f_1^*)}{1 + xw^2y(f_1^*)}. \end{cases} \quad (9)$$

Система (9) сводится к уравнению:

$$y(f_1^*)^2 + Ly(f_1^*) + 1 = 0, \quad (10)$$

где

$$L = 2f + g - fg^2, \quad f = (R(f_2^*) - R(f_1^*)) / (1 - R(f_2^*)R(f_1^*))$$

и

$$g = (R(f_3^*) - R(f_2^*)) / (1 - R(f_3^*)R(f_2^*)).$$

Только один корень уравнения (10) —

$$y(f_1^*) = \frac{-L - \sqrt{L^2 - 4}}{2}$$

является решением системы (9). Два других корня системы (9) определяются из соотношений:

$$x = \frac{R(f_1^*) - y(f_1^*)}{1 - R(f_1^*)y(f_1^*)}, \quad (11)$$

$$w = \frac{(R(f_2^*) - R(f_1^*)) + (1 - R(f_2^*)R(f_1^*))y(f_1^*)}{(R(f_2^*) - R(f_1^*))y(f_1^*) + (1 - R(f_2^*)R(f_1^*))y(f_1^*)}.$$

Зная значения $y(f_1^*)$, x , w из (8):

$$\text{Im}[\sqrt{\varepsilon_1}] = -\text{Re}[\sqrt{\varepsilon_1}] \lg(-w)/\pi, \quad (12)$$

из (3) и (12)

$$\text{Re}[\sqrt{\varepsilon_1}] = \frac{1-x}{1+x} \left(1 + i \lg(-w)/\pi\right)^{-1}, \quad (13)$$

из (6) и (13)

$$D = c/4 \text{Re}[\sqrt{\varepsilon_1}] \tau, \quad (14)$$

из (4), (12), (13) и (14)

$$r_{12} = y(f_1^*) / \exp(-i4\pi D \sqrt{\varepsilon_1} f_1^*/c). \quad (15)$$

И, наконец, с учетом (15) и известного значения $\sqrt{\varepsilon_1}$, из (2) найдем

$$\sqrt{\varepsilon_2} = \sqrt{\varepsilon_1} (1 - r_{12}) / (1 + r_{12}).$$

Таким образом, зная частотную зависимость только действительной (либо мнимой) части коэффициента отражения для диапазона частот, включающего в себя хотя бы три последовательные экстремальные частоты для $\text{Re}[R(f)]$, можно по полученным формулам вычислить все пять параметров среды: ε'_1 , ε''_1 , ε'_2 , ε''_2 , D . Аналогичные результаты были получены при анализе графика $\text{Im}[R(f)]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В акустике, в оптике, в геофизике часто встречаются задачи с подобной формулировкой. Для их решения, по мнению автора, полученные формулы для восстановления параметров среды по трем экстремальным точкам графика $\text{Re}[R(f)]$, (или $\text{Im}[R(f)]$) будут полезны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tijhuis A. G. Electromagnetic inverse profiling. — Netherlands: Science Press BV, 1987. 311 p.
2. Стреттон Д. А. Теория электромагнетизма. — М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 539 с.

Институт радиотехники и
электроники, г. Москва

Поступила в редакцию
8 декабря 1993 г.

RESTORATION OF THE PARAMETERS OF A STRATIFIED MEDIUM

O. V. Yushkova

There has been given the analytical solution in the frequency domain of the inverse problem of wave reflection from an absorbing layer lying on the uniform half-space for the case of normal incidence. The procedure of solution uses the data on the real part of the reflection coefficient within limited frequency range. The paper discusses a minimum size of this range.

УДК 551.510.535

О СПЕКТРЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ВЕРХНЕЙ ИОНОСФЕРЫ

В. А. Алимов

Рассмотрен вопрос о возможности измерений структуры крупномасштабной турбулентности верхней ионосферы методами вертикального и наклонного КВ радиозондирования. Получены общие выражения для спектра фазовых флуктуаций КВ сигнала, отраженного от ионосферного слоя с произвольным регулярным профилем диэлектрической проницаемости и заданным спектром неоднородностей. Проанализированы различные частные случаи, наиболее характерные для фазовых измерений при вертикальном и наклонном КВ радиозондировании случайно-неоднородной ионосферы. Показано, в частности, что при исследовании спектральных характеристик крупномасштабных неоднородностей верхней ионосферы этими методами спектры фазовых флуктуаций отраженных сигналов могут существенно зависеть от формы профилей электронной концентрации ионосферы. Поэтому для корректной интерпретации результатов подобных измерений необходимо применение станций синхронного вертикального и наклонного зондирования, позволяющих получать соответствующие ионограммы и вычислять текущие спектры регулярного распределения диэлектрической проницаемости, ионосферы. Отмечены некоторые специфические трудности в интерпретации результатов фазовых измерений спектральных характеристик неоднородностей ионосферы методами ВЗ и НЗ.

В последние годы большое внимание уделялось исследованиям спектральных характеристик мелкомасштабных неоднородностей электронной концентрации верхней ионосферы (см., например, [1, 2] и цитированную там литературу). В значительно меньшей степени были изучены спектральные характеристики крупномасштабных (с размерами в десятки километров) неоднородностей электронной концентрации верхней ионосферы с использованием вертикального и наклонного зондирования ионосферы КВ сигналами. Этой проблеме была посвящена работа [3]. В ней выполнен анализ спектра фазовых флуктуаций КВ сигналов при зондировании ионосферы с линейным профилем электронной концентрации и изотропным степенным спектром неоднородностей в виде [3]:

$$P_N(\alpha) = C_N^2 [1 + \alpha_0^{-2} (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2)]^{-p/2}, \quad (1)$$

где $\alpha_0 = 2\pi/\alpha_0$ — внешний масштаб неоднородностей, C_N^2 — структурная постоянная [1].

Ниже мы на основании соответствующих теоретических расчетов спектральных характеристик фазовых флуктуаций при зондировании ионосферы КВ сигналами рассмотрим вопрос о возможности измерений структуры крупномасштабной турбулентности верхней ионосферы методами вертикального и наклонного КВ радиозондирования.

Рассмотрим вначале случай нормального падения волны на слой с неоднородностями. Следуя [3], легко получить следующее выражение для спектра фазовых флуктуаций КВ сигнала, отраженного от неоднородного ионосферного слоя с произвольным профилем диэлектрической проницаемости $\bar{\epsilon}(z)$ и спектром крупномасштабных неоднородностей $\Phi_\epsilon(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$:

$$P_\varphi(\nu) \simeq 2k_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y d\alpha_z \Phi_\epsilon\left(\frac{\nu}{v}, \alpha_y, \alpha_z\right) \int_0^{z_0} d\zeta \exp(i\alpha_z \zeta) \times \\ \times \int_{\zeta/2}^{z_0-\zeta/2} \frac{dz}{\sqrt{\bar{\epsilon}(z+\zeta/2)\bar{\epsilon}(z-\zeta/2)}}. \quad (2)$$

Здесь $k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число (λ — длина волны), ν — спектральная частота, v — скорость дрейфа неоднородностей, направленная вдоль оси \vec{z} , z_0 — толщина слоя с неоднородностями от основания до точки отражения волны ($\bar{\epsilon}(z_0) = 0$).

Из соотношения (2) следует, что когда толщина слоя с неоднородностями z_0 много меньше характерного (исследуемого) масштаба $l_z = 2\pi/\alpha_z$ неоднородностей вдоль оси \vec{z} ($\alpha_z z_0 \ll 1$),

$$P_\varphi(\nu) \sim k_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y d\alpha_z \Phi_\epsilon(\nu/v, \alpha_y, \alpha_z). \quad (3)$$

В данном случае спектр фазовых флуктуаций КВ сигнала, отраженного от неоднородного слоя, не зависит от формы этого слоя и для спектра ионосферных неоднородностей (1) из соотношения (3) имеем $P_\varphi(\nu) \sim (\nu/v)^{-(p-2)}$, т. е. тонкий неоднородный слой с произвольным профилем $\bar{\epsilon}(z)$ играет роль измерительного зонда (ср. [3]).

Соотношение (3) удобно преобразовать к виду

$$P_\varphi(\nu) \simeq k_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_\epsilon(\nu/v, \alpha_y, \alpha_z) F(\alpha_z) d\alpha_y d\alpha_z, \quad (4)$$

где

$$F(\alpha_z) = |f(\alpha_z)|^2 = \left| \int_0^{z_0} \frac{\exp(-i\alpha_z z)}{\sqrt{\bar{\epsilon}(z)}} dz \right|^2. \quad (5)$$

Когда толщина слоя с неоднородностями z_0 много больше характерного масштаба l_z ($\alpha_z z_0 \gg 1$), функция $F(\alpha_z)$ определяется спектром регулярного распределения электронной концентрации в ионосфере по высоте:

$$F(\alpha_z) \simeq |f_0(\alpha_z)|^2 = \left| \int_0^\infty \frac{\exp(-i\alpha_z z)}{\sqrt{\bar{\epsilon}(z)}} dz \right|^2. \quad (6)$$

Для указанного выше спектра ионосферных неоднородностей (1) в случае, когда исследуется поведение высокочастотной части спектра фазовых флуктуаций принимаемого КВ сигнала ($\nu/\nu \gg \alpha_0$), из соотношений (1), (4), (6) находим:

$$P_\varphi(\nu) \sim \left(\frac{\nu}{\nu}\right)^{-(p-2)} \int_0^\infty \frac{F(x\nu/\nu)}{(1+x^2)^{(p-1)/2}} dx. \quad (7)$$

Поскольку $F(\alpha_z) \neq 0$ при $\alpha_z L = x(\nu/\nu)L \simeq 1$ (L — характерный масштаб изменения регулярной диэлектрической проницаемости $\bar{\epsilon}(z)$), то из соотношения (7) следует, что для толстого неоднородного ионосферного слоя ($L\nu/\nu \gg 1$)

$$P_\varphi(\nu) \sim (\nu/\nu)^{-(p-1)}, \quad (8)$$

но для тонкого неоднородного слоя ($L\nu/\nu \ll 1$)

$$P_\varphi(\nu) \sim (\nu/\nu)^{-(p-2)}, \quad (9)$$

хотя общая толщина слоя с неоднородностями z_0 много больше характерного (исследуемого) масштаба неоднородностей ($\alpha_z z_0 \gg 1$).

Другими словами, независимо от формы неоднородного слоя спектр фазовых флуктуаций для отраженного от толстого неоднородного слоя ($L\nu/\nu \gg 1$) КВ сигнала определяется соотношением (8), а для тонкого слоя ($L\nu/\nu \ll 1$) — соотношением (9) (ср. (3)).

Следует иметь, однако, в виду, что этот результат справедлив лишь для спектра ионосферных неоднородностей вида (1). В то же время, вообще говоря, возможен иной, анизотропный, вид спектра крупномасштабных (с размерами в несколько десятков километров) неоднородностей верхней ионосферы (ср. [2]):

$$\Phi_z(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \Phi_\perp(\alpha_x, \alpha_y) \Phi_\parallel(\alpha_z) \sim [1 + \alpha_0^{-2}(\alpha_x^2 + \alpha_y^2)]^{-p/2} \Phi_\parallel(\alpha_z). \quad (10)$$

Для этого спектра неоднородностей (10) из соотношений (4), (5) следует, что исследуемое поведение высокочастотной части спектра фазовых флуктуаций отраженного КВ сигнала ($\nu/\nu \gg \alpha_0$) при вертикальном зондировании ионосферы определяется соотношением

$$P_\varphi(\nu) \sim (\nu/\nu)^{-(p-1)}, \quad (11)$$

независимо от соотношений параметров $z_0, L, \nu/v$.

Рассмотрим теперь случай наклонного зондирования ионосферы. Исходными соотношениями в этом случае являются выражения для флуктуационного набега фазы волны в ионосферном плоском слое с неоднородностями [1]

$$\varphi(x, y, z) \simeq \frac{k_0}{2} \int_0^{z_0} \frac{\varepsilon_1(x(z), y, z)}{\sqrt{\bar{\varepsilon}(z) - \sin^2 \vartheta_0}} dz, \quad (12)$$

и, соответственно, для пространственной функции корреляции флуктуирующей фазы волны на выходе ионосферного слоя [1, 3]

$$\Gamma\varphi(\xi, \eta) \simeq \frac{k_0^2}{2} \iint_0^{z_0} \frac{\Gamma_\varepsilon(x(z_2) - x(z_1) + \xi, \eta, z_2 - z_1)}{\sqrt{[\bar{\varepsilon}(z_1) - \sin^2 \vartheta_0][\bar{\varepsilon}(z_2) - \sin^2 \vartheta_0]}} dz_1 dz_2. \quad (13)$$

Здесь ϑ_0 — угол падения волны на ионосферный слой, ε_1 — флуктуационная часть диэлектрической проницаемости ионосферы, z_0 — уровень отражения волны в ионосфере (толщина ионосферного слоя с неоднородностями); относительное смещение луча в неоднородном слое с учетом [4] можно записать в виде:

$$x(z_2) - x(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin \vartheta_0 dz}{\sqrt{\bar{\varepsilon}(z) - \sin^2 \vartheta_0}} \simeq (z_2 - z_1) K \operatorname{tg} \vartheta_0, \quad (14)$$

где

$$K = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\bar{\varepsilon}'(z)}} \quad (15)$$

действующая (нормированная) высота ионосферы, $\bar{\varepsilon}'(z, f_H) = \bar{\varepsilon}(z, f \cos \vartheta_0)$ — диэлектрическая проницаемость ионосферы на эквивалентной частоте наклонного падения $f_H = f \cos \vartheta_0$.

Проводя несложные преобразования, можно получить для спектра фазовых флуктуаций КВ сигнала, отраженного от ионосферы при его наклонном падении, следующие выражения:

$$P_\varphi(\nu) \simeq 2k_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon\left(\frac{\nu - \alpha_y v_y}{v_x}, \alpha_y, \alpha_z\right) d\alpha_y d\alpha_z \times \\ \times \int_0^{z_0} d\zeta \int_{\zeta/2}^{z_0 - \zeta/2} \frac{dz}{\sqrt{[\bar{\varepsilon}(z + \zeta/2) - \sin^2 \vartheta_0][\bar{\varepsilon}(z - \zeta/2) - \sin^2 \vartheta_0]}}, \quad (16a)$$

$$P_{\varphi}(\nu) \simeq 2k_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\epsilon} \left(\alpha_x, \frac{\nu - \alpha_x v_x}{v_y}, \alpha_z \right) d\alpha_x d\alpha_z \times \\ \times \int_0^{z_0} d\zeta \int_{\zeta/2}^{z_0 - \zeta/2} \frac{dz}{\sqrt{[\bar{\epsilon}(z + \zeta/2) - \sin^2 \vartheta_0][\bar{\epsilon}(z - \zeta/2) - \sin^2 \vartheta_0]}} , \quad (16б)$$

Первое соотношение справедливо для случая горизонтального дрейфа неоднородностей со скоростью $\vec{v}(v_x, v_y)$ и применимо при $v_x \neq 0$, второе — при $v_y \neq 0$. Толщина слоя с неоднородностями z_0 много меньше характерного (исследуемого) масштаба $l_z = 2\pi/\alpha_z$ неоднородностей вдоль оси \vec{z} ($\alpha_z z_0 \ll 1$) и горизонтальное смещение луча в слое $x_0 = z_0 K \operatorname{tg} \vartheta_0$ много меньше масштаба $l_x = 2\pi/\alpha_x$ неоднородностей вдоль оси \vec{x} ($\alpha_x z_0 K \operatorname{tg} \vartheta_0 \ll 1$).

Итак, как и в случае вертикального зондирования для тонкого слоя с неоднородностями, в случае наклонного зондирования измеряемый спектр фазовых флуктуаций не зависит от формы ионосферного слоя.

Но если даже толщина слоя с неоднородностями z_0 много меньше характерного масштаба l_z неоднородностей ($\alpha_z z_0 \ll 1$), но горизонтальное смещение луча велико ($x_0 \alpha_x \gg 1$), то выражения для спектра фазовых флуктуаций отраженного КВ сигнала принимают вид (ср. (4)):

$$P_{\varphi}(\nu) \simeq k_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y d\alpha_z \Phi_{\epsilon} \left(\frac{\nu - \alpha_y v_y}{v_x}, \alpha_y, \alpha_z \right) F \left(\frac{\nu - \alpha_y v_y}{v_x} K \operatorname{tg} \vartheta_0 \right), \quad (17а)$$

$$P_{\varphi}(\nu) \simeq k_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y d\alpha_z \Phi_{\epsilon} \left(\alpha_x, \frac{\nu - \alpha_x v_x}{v_y}, \alpha_z \right) F \left(\alpha_x K \operatorname{tg} \vartheta_0 \right), \quad (17б)$$

где

$$F(\alpha) = |f(\alpha)|^2 = \left| \int_0^{z_0} \frac{\exp(-i\alpha z)}{\sqrt{\bar{\epsilon}(z) - \sin^2 \vartheta_0}} dz \right|^2 . \quad (18)$$

Далее, проводя необходимые преобразования по аналогии со случаем вертикального зондирования (см. выше), получим следующие выражения для высокочастотной части ($\nu/v \gg \alpha_0$) спектров фазовых флуктуаций принимаемого КВ сигнала, отраженного от толстого неоднородного слоя $((\nu/v) K \operatorname{tg} \vartheta_0 L \gg 1)$:

$$P_{\varphi}(\nu) \sim (\nu/v)^{-(p-2)} F \left((\nu/v) K \operatorname{tg} \vartheta_0 \right), \quad (19а)$$

$$P_{\varphi}(\nu) \sim (\nu/v)^{-(p-1)}. \quad (19б)$$

Первое соотношение справедливо для случая дрейфа неоднородностей вдоль оси \vec{y} ($v_y \equiv v$), т.е. поперек радиотрассы, второе — для дрейфа вдоль трассы ($v_x \equiv v$). В частном случае линейного слоя ($F(x) \sim x^{-1}$) соотношения (19а), (19б) совпадают (ср. [3]). Но в случае произвольного неоднородного ионосферного слоя измеряемые спектры фаз флуктуаций могут существенно различаться (ср. (19а) и (19б)).

Для спектра крупномасштабных неоднородностей ионосферы анизотропной формы (10) соответствующие выражения для измеряемых спектров фазовых флуктуаций отраженных КВ сигналов будут иметь вид:

$$P_{\varphi}(\nu) \sim (\nu/v)^{-(p-1)} F\left((\nu/v)K \operatorname{tg} \vartheta_0\right), \quad (20a)$$

$$P_{\varphi}(\nu) \sim (\nu/v)^{-p}. \quad (20б)$$

В частном случае линейного неоднородного слоя соотношения (20а), (20б) совпадают, но показатель спектра отличается на единицу по сравнению со случаем изотропной ионосферной турбулентности вида (1).

Итак, при исследовании спектральных характеристик крупномасштабных неоднородностей верхней ионосферы методами вертикального и наклонного КВ радиозондирования измеряемые спектры флуктуаций фаз отраженных сигналов в общем случае существенно зависят от формы профилей электронной концентрации ионосферы. Поэтому для корректной интерпретации результатов подобных измерений необходимо использование станций синхронного вертикального и наклонного зондирования, позволяющих получать соответствующие ионограммы и вычислять текущие спектры регулярных распределений диэлектрической проницаемости ионосферы (см. (5), (8)).

Следует указать также на одну специфическую трудность в интерпретации результатов фазовых спектральных измерений методом вертикального зондирования. Она заключается в том, что довольно часто характерный масштаб неоднородного слоя может быть сравним с исследуемыми масштабами неоднородностей (десятки километров) и тогда возникнет неопределенность в оценке параметра p (см. (8), (9)). Поэтому при проведении подобных исследований наиболее предпочтительным является метод наклонного радиозондирования ионосферы, свободный от указанного недостатка. Тем не менее и в рамках этого метода может остаться открытым вопрос об идентификации спектральной формы крупномасштабных ионосферных неоднородностей (см. (1), (10)), поскольку относительные изменения в измеряемых фазовых спектральных характеристиках принимаемых сигналов зачастую отсутствуют (ср. (19) и (20)).

Работа выполнена в рамках проекта 93-02-15893 РФФИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. — М.: Наука, 1984.
2. Алимов В. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. N 6. С. 619.
3. Гайлит Т. А., Гусев В. Д., Ерухимов Л. М., Шпиро П. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. N 7. С. 795.
4. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
Н. Новгород

Поступила в редакцию
23 апреля 1994 г.

**ON THE SPECTRUM OF LARGE-SCALE INHOMOGENEITIES OF THE
UPPER IONOSPHERE**

V. A. Alimov

There has been considered the possibility to measure the structure of a large-scale turbulence of the upper ionosphere by vertical and oblique short-wave radio-sounding methods. General expressions have been derived for the spectrum of phase fluctuations of a short-wave signal reflected from the ionospheric layer with an arbitrary regular permittivity profile and a given spectrum of inhomogeneities. We have analysed a number of particular cases most typical for the phase measurements at vertical and oblique short-wave radio-sounding of a randomly-inhomogeneous ionosphere. It has been shown, in particular, that, by using these methods, the spectra of phase fluctuations of reflected signals may depend essentially on the form of ionosphere electron density profiles. Therefore, to interpret correctly the results of such measurements it is necessary to use the stations of synchronous vertical and oblique sounding allowing to get corresponding ionograms and to calculate current spectra of a regular permittivity distribution of the ionosphere. Some specific difficulties have been noted in the interpretation of the results of phase measurements of ionosphere inhomogeneity spectral characteristics by vertical and oblique sounding methods.

МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ

М. Е. Горбунов

В работе рассмотрены теория возмущений для лучей и для эйконала. Показано, что при вычислении любых величин эти две теории дают полностью эквивалентные результаты. В качестве примера рассматривается задача рефракции в произвольной неоднородной среде.

Теории возмущений для лучей и для эйконала [1] (в дальнейшем ТВЛ и ТВЭ) находят широкое применение при расчетах волновых полей в неоднородных средах в геометрооптическом приближении. Так в работе [2] рассматривалась задача определения лучевых траекторий в атмосфере, а в работе автора [3] рассматривалась обратная задача атмосферной рефракции в рамках первого приближения ТВЛ. Заметим, что в обеих работах использовалась ТВЛ.

В [1] высказывается точка зрения, что ТВЛ лучше, чем ТВЭ. В частности, ТВЛ позволяет описывать появление каустик, тогда как ТВЭ этого не может. В данной работе мы покажем, что на самом деле ТВЛ и ТВЭ равноценны.

Пусть задан источник поля в некоторой среде с показателем преломления $n(\vec{r})$. Пусть $n(\vec{r}) = n_0(\vec{r}) + \delta n(\vec{r})$, причем для среды $n_0(\vec{r})$ поле известно. Будем вычислять возмущение δf некоторой физической величины f (которая может быть векторной или скалярной), зависящей от поля. Возмущение δf выражается некоторым (вообще говоря, нелинейным) функционалом от δn . Для построения первого порядка теории возмущений нужно выделить линейную часть этого функционала в точке $\delta n = 0$.

В качестве малого параметра можно использовать не δn , а $\delta \epsilon$ (где $\epsilon = n^2$), как это делается в [1, 2]. Вопрос о том, какой из этих вариантов лучше, рассматривался в [4], где показано, что δn предпочтительнее.

В рамках приближения геометрической оптики можно описывать поле, задавая лучевую картину и начальные значения, скажем, на некотором волновом фронте. Вместо лучевой картины достаточно знать поле эйконала $\Phi(\vec{r})$ (лучи являются линиями тока векторного поля $\nabla \Phi$).

Описания поля при помощи лучевой картины и при помощи поля эйконала равноценны. Это позволяет предположить, что если при вычислении одной и той же физической величины f мы будем пользоваться ТВЛ или ТВЭ, то получаемые результаты будут идентичны. Ниже мы покажем это

на примере конкретных вычислений. Будем для простоты рассматривать двумерный случай.

Пусть задана двумерная произвольная среда $n(\vec{r})$, в которой зафиксированы две произвольные точки A (приемник) и B (источник). Будем вычислять возмущение $\delta\psi$ угла прихода луча к приемнику, пользуясь ТВЛ и ТВЭ (именно эта задача решалась автором в [3] для постановки обратной задачи).

В рамках ТВЭ $\delta\psi$ вычисляется как угол между исходным и возмущенным волновыми фронтами. Пусть в окрестности точки A на невозмущенном волновом фронте введена координата z_A (расстояние вдоль фронта, отсчитываемое от точки A). Пусть $\delta\Phi$ — возмущение эйконала на невозмущенном волновом фронте, проходящем через точку A . Тогда

$$\delta\psi = \frac{1}{n_0(A)} \frac{d\delta\Phi}{dz_A}. \quad (1)$$

Иными словами, для вычисления $\delta\psi$ необходимо проварьировать невозмущенный луч так, чтобы он проходил через точку B и приходил в окрестность точки A . Введем на невозмущенной траектории векторы \vec{l} и \vec{m} — соответственно касательный и нормальный (рис. 1). Возмущение эйконала в точке A , вычисленное в первом порядке, равно [1]:

$$\delta\Phi = \int \delta n(\vec{r}_0(s)) ds. \quad (2)$$

Пусть $\vec{m} dz$ — бесконечно малая вариация лучевой траектории. Тогда

$$\frac{d\delta\Phi}{dz_A} = \int_B^A \langle \vec{m}, \nabla \delta n \rangle \frac{dz}{dz_A} ds + \int_B^A \delta n(\vec{l}, \dot{\vec{m}}) \frac{dz}{dz_A} ds. \quad (3)$$

(Здесь и далее точка означает полную производную по s). Второй член в этом выражении возникает из-за вариации длины траектории δs (рис. 1). Для вычисления $(\vec{l}, \dot{\vec{m}})$ запишем вариационный принцип для невозмущенной траектории:

$$\delta \int n_0 ds = \int \langle \vec{m}, \nabla n_0 \rangle z ds + \int n_0(\vec{l}, \dot{\vec{m}}) z ds = 0. \quad (4)$$

Поэтому в силу произвольности вариации z имеем:

$$(\vec{l}, \dot{\vec{m}}) = - \frac{\langle \vec{m}, \nabla n_0 \rangle}{n_0}. \quad (5)$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\delta\psi = \frac{1}{n_0(A)} \int_B^A \left\langle \vec{m}, \nabla \delta n - \delta n \frac{\nabla n_0}{n_0} \right\rangle \frac{dz}{dz_A} ds. \quad (6)$$

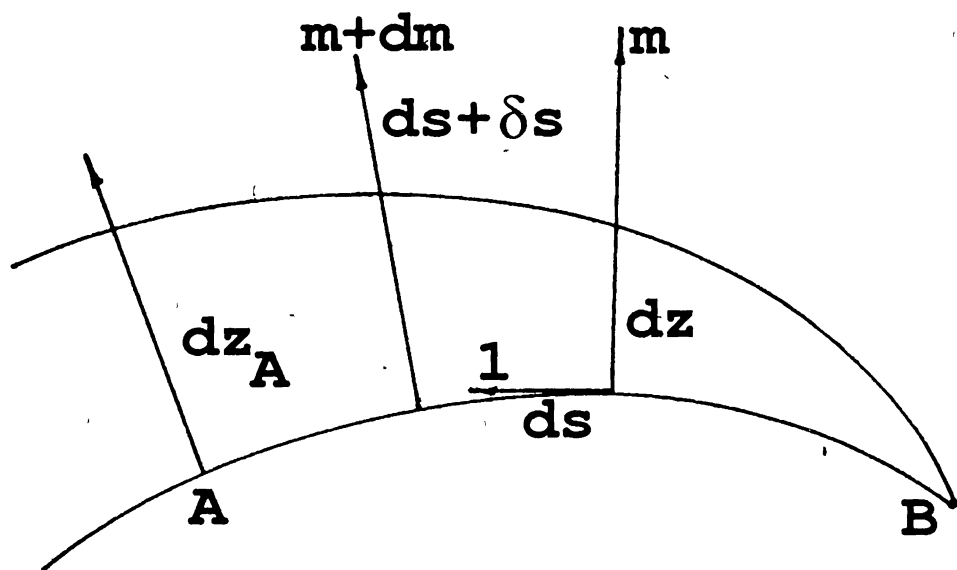


Рис. 1.

Проведем теперь аналогичные вычисления с использованием теории возмущений для лучей (эти выкладки обобщают рассмотрение [3] на случай произвольной невозмущенной среды n_0).

Запишем уравнение траектории луча в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{m}z. \quad (7)$$

Получим уравнение для z в первом порядке теории возмущений. Для этого запишем вариационный принцип:

$$\delta \int n(\vec{r}_0 + \vec{m}z) \frac{ds'}{ds} ds = 0. \quad (8)$$

Здесь s — длина, отсчитываемая вдоль невозмущенной траектории, s' — длина, отсчитываемая вдоль возмущенной траектории. Обозначим

$$\frac{ds'}{ds} = Q(z, \dot{z}) = \left| \frac{d}{ds}(\vec{r}_0 + \vec{m}z) \right|. \quad (9)$$

Как и выше, обозначим $\vec{l} = \dot{\vec{r}}_0$. Ясно, что $(\vec{l}, \vec{m}) = 0$ и, следовательно, $|\dot{\vec{l}}| = |\dot{\vec{m}}|$. Поскольку \vec{l} и \vec{m} — единичные векторы, $(\vec{l}, \dot{\vec{l}}) = (\vec{m}, \dot{\vec{m}}) = 0$. Тогда

$$Q^2(z, \dot{z}) = |\vec{l} + \dot{\vec{m}}z + \vec{m}\dot{z}|^2 = 1 + 2(\vec{l}, \dot{\vec{m}})z + \dot{\vec{l}}^2 z^2 + \dot{z}^2. \quad (10)$$

Величина $(\vec{l}, \dot{\vec{m}})$ вычислена выше.

$$\dot{\vec{l}}^2 = \dot{\vec{m}}^2 = (\vec{l}, \dot{\vec{m}})^2 = \frac{(\vec{m}, \nabla n_0)^2}{n_0^2}. \quad (11)$$

Таким образом,

$$Q^2(z, \dot{z}) = 1 - 2 \frac{\langle \vec{m}, \nabla n_0 \rangle}{n_0} z + \frac{\langle \vec{m}, \nabla n_0 \rangle^2}{n_0^2} z^2 + \dot{z}^2. \quad (12)$$

Обозначим

$$G \equiv n(\vec{r}_0 + \vec{m}z) Q(z, \dot{z}). \quad (13)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид:

$$\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{ds} \frac{\partial G}{\partial \dot{z}} = 0. \quad (14)$$

Дальнейшие вычисления будем проводить в рамках 1-го порядка теории возмущений, т.е. удерживая члены не выше первого порядка по z и δn .

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \langle \vec{m}, \nabla n \rangle Q + \frac{n}{2Q} \left(-2 \frac{\langle \vec{m}, \nabla n_0 \rangle}{n_0} + 2 \frac{\langle \vec{m}, \nabla n_0 \rangle^2}{n_0^2} z \right), \quad (15)$$

$$Q = 1 - \frac{\langle \vec{m}, \nabla n_0 \rangle}{n_0} z.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \left\langle \vec{m}, \nabla \delta n - \delta n \frac{\nabla n_0}{n_0} \right\rangle - \frac{\langle \vec{m}, \nabla n_0 \rangle^2}{n_0} z, \quad (16)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{z}} = \frac{n}{2Q} 2\dot{z} = n_0 \dot{z}.$$

В результате получаем линеаризованное уравнение:

$$\ddot{z} + \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{ds} \dot{z} + \frac{\langle \vec{m}, \nabla n_0 \rangle^2}{n_0^2} z = \frac{1}{n_0} \left\langle \vec{m}, \nabla \delta n - \delta n \frac{\nabla n_0}{n_0} \right\rangle. \quad (17)$$

Его общее решение имеет вид:

$$z = C_1 \zeta_1 + C_2 \zeta_2 + \int_0^s \frac{1}{n_0} \left\langle \vec{m}, \nabla \delta n - \delta n \frac{\nabla n_0}{n_0} \right\rangle \frac{\bar{W}(\sigma, s)}{W(\sigma)} d\sigma, \quad (18)$$

где

$$W(\sigma) = \dot{\zeta}_1(\sigma) \zeta_2(\sigma) - \zeta_1(\sigma) \dot{\zeta}_2(\sigma),$$

$$\bar{W}(\sigma, s) = \zeta_1(\sigma) \zeta_2(s) - \zeta_1(s) \zeta_2(\sigma),$$

ζ_1 и ζ_2 — линейно-независимые решения однородного уравнения.

Интегральный член здесь представляет решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Обозначим его z^* . Константы C_1 и C_2 отыскиваются из граничных условий: $z(A) = z(B) = 0$:

$$C_1 = z^*(B) \frac{\zeta_2(A)}{\bar{W}(A, B)},$$

$$C_2 = -z^*(B) \frac{\zeta_1(A)}{\bar{W}(A, B)}.$$
(19)

Возмущение угла прихода луча вычисляется как

$$\delta\psi = \left. \frac{dz}{ds} \right|_A = C_1 \dot{\zeta}_1(A) + C_2 \dot{\zeta}_2(A) =$$

$$= \int_A^B \frac{1}{n_0} \left\langle \vec{m}, \nabla \delta n - \delta n \frac{\nabla n_0}{n_0} \right\rangle \frac{W(A)}{W(s)} \frac{\bar{W}(s, B)}{\bar{W}(A, B)} ds.$$
(20)

Воспользуемся теперь формулой Лиувилля:

$$W(s) = W(A) \exp \left(- \int_A^s \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{ds} d\sigma \right) = W(A) \frac{n_0(A)}{n_0(s)}.$$
(21)

Таким образом, мы приходим к формуле:

$$\delta\psi = \frac{1}{n_0(A)} \int_B^A \left\langle \vec{m}, \nabla \delta n - \delta n \frac{\nabla n_0}{n_0} \right\rangle \frac{\bar{W}(s, B)}{\bar{W}(A, B)} ds.$$
(22)

Заметим теперь, что $\bar{W}(s, B)$ является обращающимся в нуль в т. B решением однородного уравнения возмущения траектории, т.е. уравнения (17) при $\delta n = 0$. Поэтому, если мы варьируем невозмущенную траекторию так, что она проходит через точку B , то всегда вариация траектории

$$z = \nu W(s, B) + O(\nu),$$
(23)

где ν — малый параметр. Следовательно,

$$\frac{dz}{dz_A} = \frac{\bar{W}(s, B)}{\bar{W}(A, B)}.$$
(24)

Таким образом, результаты вычисления $\delta\psi$ в рамках теории возмущений для эйконала и для лучей оказываются в точности совпадающими.

Рассмотрим теперь простой пример: невозмущенная среда однородна, а возмущение отрицательно и сосредоточено в некотором круге, достигая

максимальной абсолютной величины в центре круга и плавно меняясь до 0 на краях (слабая отрицательная линза).

Пусть $\vec{r}_0(s)$ — невозмущенная лучевая траектория, параметризованная длиной дуги s ; $\vec{r}(s) = \vec{r}_0(s) + \delta\vec{r}(s)$ — соответствующая возмущенная траектория.

Будем считать, что обе траектории приходят в некоторую фиксированную точку. Возмущение эйконала, поскольку оно выражается интегралом от δn по невозмущенным лучам, будет сосредоточено в трубке лучей, прошедших через область возмущения.

В рамках ТВЛ необходимо найти в линейном приближении решение дифференциального уравнения лучевых траекторий. В декартовых координатах это уравнение имеет вид:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (25)$$

Линеаризуя его по δn и $\delta\vec{r}$, получим уравнение первого порядка ТВЛ:

$$\frac{d^2 \delta\vec{r}}{ds^2} = \nabla_{\perp} \delta n \quad (26)$$

(∇_{\perp} обозначает перпендикулярную невозмущенным лучам составляющую градиента). Его решением (с нулевыми начальными условиями) является

$$\delta\vec{r}(s) = \int_0^s (s-\sigma) \nabla_{\perp} \delta n(\vec{r}_0(\sigma)) d\sigma. \quad (27)$$

Вне области возмущения $\delta\vec{r}$ будет линейно зависеть от s , т. е. ТВЛ даст в однородной среде прямые возмущенные лучи.

Итак, ТВЭ дает возмущение поля только внутри трубки лучей, прошедших через линзу, тогда как ТВЛ довольно хорошо описывает лучевую картину поля, давая за возмущением расходящиеся прямые лучи. Отсюда однако не следует, что ТВЛ лучше, чем ТВЭ, поскольку вычислялись разные физические величины: эйконал Φ и лучевые траектории $\vec{r}(s)$.

Если теперь, следуя [4], построить “квазилучи”, определяемые как линии тока векторного поля $\nabla\Phi$, где Φ — поле эйконала, построенное в первом порядке ТВЭ, то они будут вести себя иначе, чем лучи, построенные в первом порядке ТВЛ. В рассматриваемом случае квазилучи не будут прямыми за линзой: они будут асимптотически приближаться к граничным лучам трубки, в которой сосредоточено возмущение эйконала.

Причина несовпадения квазилучей с лучами ТВЛ понятна: процедура построения квазилучей ТВЭ нелинейна, тогда как лучи ТВЛ строятся в линейном приближении. Можно однако предположить, что если линеаризовать уравнения квазилучей, то мы придем к уравнению лучей ТВЛ. Покажем, что это действительно так.

Рассмотрим некоторый невозмущенный луч $\vec{r}_0(s)$ и квазилуч $\vec{r}(s)$ с теми же начальными условиями. Уравнение квазилуча имеет вид:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \delta\vec{l}(\vec{r}), \quad (28)$$

где $\delta\vec{l}$ — возмущение направляющего вектора $\nabla\Phi$, которое можно характеризовать углом $\delta\psi$. Линеаризация этого уравнения состоит в замене $\delta\vec{l}(\vec{r})$ на $\delta\vec{l}(\vec{r}_0)$. Как мы видели выше, ТВЛ и ТВЭ дают одинаковые значения $\delta\psi$, а значит и $\delta\vec{l}$. Уравнение лучей ТВЛ может также быть получено линеаризацией уравнения (28), поэтому ясно, что линеаризованные уравнения квазилучей совпадут с уравнениями ТВЛ.

По аналогии с квазилучами можно ввести квазиэйконал, вычисляемый интегрированием показателя преломления n вдоль возмущенных лучей, вычисленных в первом порядке ТВЛ. Из вариационного принципа сразу же следует, что квазиэйконал отличается от эйконала, вычисленного в первом порядке ТВЭ, на величину второго порядка.

Заметим, что ни квазилучи, ни квазиэйконал нельзя рассматривать как результат применения первого порядка теории возмущений, поскольку процедуры их построения нелинейны. Линеаризация же в обоих случаях приводит (как и должно быть) к первому порядку ТВЛ или ТВЭ, соответственно.

Выводы. ТВЛ и ТВЭ равноценны: имея лучевую картину ТВЛ мы можем построить поле эйконала, даваемое ТВЭ; имея поле эйконала ТВЭ, можно построить лучевую картину ТВЛ. В частности, если ТВЛ дает появление каустик, то ТВЭ позволяет получить о каустиках ту же информацию. Тот же факт, что каустики не проявляются непосредственно в поле эйконала ТВЭ, отражает просто неудачный выбор физической величины, характеризующей поле: теория возмущений описывает лишь малые вариации вычисляемых величин, тогда как возмущения эйконала на каустиках не малы.

Можно сказать, что ТВЛ и ТВЭ есть разные технические приемы, дающие в конечном счете один и тот же результат, и следовательно, выбор между ними должен основываться лишь на соображениях простоты вычислений.

Аналогичные рассуждения можно провести для любого порядка теории возмущений.

Автор выражает благодарность А. С. Гурвичу, Б. Е. Кинберу и В. Е. Осташеву за обсуждение затронутых в статье вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. 304 с.

2. Баранов В. А., Кравцов Ю. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. N 1. С. 52.
3. Горбунов М. Е. //Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. N 11. С. 1295.
4. Аптер Б. Ф., Кинбер Б. Е. //В сб.: Оптическая томография. Тезисы докладов Всесоюзного семинара, Таллинн, 1988. С. 28.

Институт физики атмосферы,
г. Фрязино Московской обл.

Поступила в редакцию
6 июня 1994 г.

PERTURBATION METHODS IN GEOMETRICAL OPTICS

M. E. Gorbunov

There have been considered the perturbation theories for the rays and eikonal. It has been shown that these theories give completely equivalent results in the calculation of any values. As an example, the problem of refraction in an arbitrary inhomogeneous medium has been considered.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ С РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Ю. К. Архипенко, В. Н. Красильников

Рассмотрена задача об одномерном распространении нестационарного электромагнитного возмущения в однородной ионосферной плазме с релаксирующей проводимостью при наличии горизонтального геомагнитного поля. Построена приближенная функция Грина в предположении, что динамика электромагнитного возмущения определяется механизмом диффузии, причем источником последней служат звуковые волновые движения. Получено, что релаксация проводимости среды может приводить к появлению уединенного предвестника возмущения, предшествующего моменту прихода фронта звуковой волны.

При исследовании ионосферной плазмы иногда возникает необходимость оценить электромагнитные поля, порожденные кратковременным возмущением слоя среды. Такое возмущение может иметь различную природу: прогрев, вызванный поглощением импульса высокоэнергетичного излучения, сторонние токи и т.п. При генерации не слишком низкочастотных полей для решения задачи достаточно воспользоваться уравнениями Максвелла. Так, в работе [1], где рассматривалось возбуждение полей импульсными источниками тока, было показано, что поведение амплитуды поля определяется, в основном, законами диффузии. При возбуждении более низкочастотных полей приходится иметь дело с системой уравнений магнитогидродинамики. Для ее решения полезно знать функцию Грина, соответствующую задаче Коши.

В данной работе строится функция Грина для одномерной задачи возмущения низкочастотных ($f \sim (10^{-2} \div 1,0)$ Гц) электромагнитных полей в плазме с однородными, но нестационарными электрическими свойствами при наличии силы гравитации (\vec{g}) и горизонтального геомагнитного поля (\vec{B}_0). Конкретным примером такой задачи может служить возмущение неподвижных изотермических слоев нижней ионосферы за счет их быстрого прогрева, вызванного локальным поглощением пришедшего извне излучения. Помимо прогрева среды, стороннее высокоэнергетичное излучение обычно вызывает дополнительную ионизацию плазмы, величина которой может намного превосходить значение естественной, но сравнительно быстро убывает за счет процессов рекомбинации. Таким образом, коэффициенты в магнитогидродинамических уравнениях оказываются зависящими от времени, что существенно усложняет задачу. Однако, при

условии, что скорость звука много больше альфвеновской, которое выполняется на высотах менее 200 км [2], удастся построить приближенное решение для такой нестационарной плазмы. Предложенный метод позволяет оценить генерируемое поле, не привлекая аппарата преобразований Фурье, а также дать ясную физическую интерпретацию полученным результатам.

Слабые низкочастотные возмущения электромагнитного поля и скорости среды, возникающие в ионосферной плазме, подчиняются замкнутой системе линеаризованных уравнений магнитогидродинамики [3, 4]. Если считать, что задаваемый источник возмущения распределен вдоль оси OZ декартовой системы координат, а внешнее магнитное поле — параллельно оси OX : $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$, то вышеупомянутую систему можно свести к системе связанных уравнений для возмущений компонент v_z и E_y :

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \gamma g \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{c_A^2}{B_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (S v_z) = \frac{1}{B_0} \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} (S E_y) \right). \quad (2)$$

Здесь c_0^2 — квадрат скорости звука, $c_A^2 = B_0 / (\rho(z) \mu_0)$ — квадрат альфвеновской скорости, величина

$$S(t) = \mu_0 \frac{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2}{\sigma_{\perp}}; \quad S(0) = S_0 \quad (3)$$

отражает меняющиеся во времени электрические свойства среды, σ_{\perp} и σ_H — наведенные педерсеновская и холловская проводимости соответственно.

Для компонент E_x , v_x и v_y получаются самостоятельные уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{\parallel} E_x); \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

где σ_{\parallel} — продольная проводимость. Возмущение вертикальной компоненты электрического поля можно определить по формуле

$$E_z = (E_y + B_0 v_z) \sigma_H / \sigma_{\perp}.$$

Чтобы построить решение уравнений (1), (2), (4), необходимо задать начальные условия для соответствующих функций.

Для определенности будем считать, что возмущение ионосферы произошло за счет мгновенного прогрева первоначально изотермической среды, имеющей температуру T_0 . Пусть распределение профиля скачка температуры в момент времени $t = 0$ (сразу же после процесса прогрева) описывается функцией $T(z, 0) = \varepsilon T_0 f(z)$, где $\varepsilon \ll 1$, что позволяет применять

линеаризованную систему уравнений магнитогидродинамики. Тогда, используя уравнения Максвелла и уравнение движения из этой системы, нетрудно показать, что

$$\vec{v}(z, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{t=0} = \varepsilon \vec{e}_z \left(gf - \frac{c_0^2}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} \right); \quad \vec{E}(z, 0) = 0. \quad (5)$$

В силу начальных условий (5) уравнения (4) имеют нулевые решения. Поэтому вся задача сводится к решению системы (1), (2) с начальными условиями (5).

Для этого сначала требуется развязать уравнения. Ниже покажем, что при некоторых условиях, накладываемых на величину $S(t)$, это удастся сделать. В результате уравнение, которому подчиняется возмущение v_z (или E_y), оказывается третьей степени относительно времени. Следовательно, для компоненты v_z (или E_y) нужно иметь три начальных условия. Их можно получить из системы (1), (2) с помощью соотношений (5):

$$v_z(z, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial v_z}{\partial t} \right|_{t=0} = \varepsilon g \left(f - \frac{c_0^2}{\gamma g} \frac{\partial f}{\partial z} \right); \quad \left. \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} \right|_{t=0} = 0; \quad (6)$$

$$E_y(z, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial E_y}{\partial t} \right|_{t=0} = -B_0 \left. \frac{\partial v_z}{\partial t} \right|_{t=0}; \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \right|_{t=0} = -\frac{B_0}{S_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\left. \frac{\partial v_z}{\partial t} \right|_{t=0} \right).$$

Чтобы из системы (1), (2) выделить самостоятельные уравнения для E_y и v_z , требуется так видоизменить входящие в нее уравнения, чтобы дифференциальные операторы, действующие на исключаемую функцию, коммутировали между собой. Так, чтобы исключить функцию E_y , достаточно обе части уравнения (1) разделить на $c_A^2(z)$. Тогда операторы, стоящие в правых частях системы, окажутся коммутирующими. Вспоминая, что c_A^2 подчиняется барометрическому закону, получаем уравнение для вертикальной компоненты скорости:

$$\frac{\partial}{\partial t} (Sw) - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{\gamma g}{c_0} \right)^2 w = c_A^2(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial (Sv_z)}{\partial t} \right), \quad (8)$$

где

$$w = \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \gamma g \frac{\partial v_z}{\partial t}.$$

Добиться исключения v_z из системы (1), (2) удастся после введения новой функции $y(z, t) = S(t) v_z(z, t)$, в результате чего система (1), (2)

записывается в форме

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{q(z, t)}{B_0}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \gamma g \frac{\partial y}{\partial z} + \beta y = \left(2q \frac{\partial \ln S}{\partial t} - c_A^2(z) S(t) \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) / B_0,$$

где

$$q(z, t) = \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} (S E_y); \quad (10)$$

$$\beta = \left(\frac{\partial \ln S}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial^2 \ln S}{\partial t^2}.$$

Очевидно, что исключить функцию $y(z, t)$ из системы (9) можно только при условии $\beta = \text{const}$, которое выполняется для убывающих функций $S(t)$, имеющих вид

$$S(t) = S_0 / (1 + \alpha t); \quad S(t) = S_0 e^{-\alpha t}, \quad (11)$$

где $S_0 = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$.

Заметим, что зависимости (11) хорошо описывают различные рекомбинационные процессы в плазме [5].

Тогда для функции $q(z, t)$ можно записать следующее дифференциальное выражение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma g \frac{\partial}{\partial z} - 2 \frac{\partial \ln S}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \beta - 2 \frac{\partial^2 \ln S}{\partial t^2} \right) q(z, t) = \\ = -c_A^2(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial t} (S E_y). \end{aligned} \quad (12)$$

Подстановка в него (10) даст уравнение для возмущения E_y .

Итак, мы получили уравнения (8) и (12), которым подчиняются возмущения v_z и E_y , с соответствующими начальными условиями (6) и (7). В правых частях этих уравнений стоит один и тот же дифференциальный оператор, который препятствует поэтапному решению задачи. Если в уравнениях (8), (12) от функций w и q перейти к возмущениям v_z и E_y , то в их левых частях будут присутствовать такие же операторы, но коэффициентом при них будет служить квадрат не альфвеновской, а звуковой скорости. Следовательно, в случае $c_0^2 \gg c_A^2$ правой частью можно пренебречь. На примере стационарной плазмы можно показать, что в

этом случае пренебрежение правыми частями в обоих уравнениях не приводит к качественным погрешностям в решении. Это обстоятельство позволяет предположить, что для нестационарной плазмы замена неоднородных уравнений (8), (12) однородными также не даст существенной ошибки.

Поэтому поведение возмущения v_z можно приближенно описать с помощью уравнения

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \gamma g \frac{\partial v_z}{\partial z} = w(z, t) \quad (13)$$

с начальными условиями (6), где функция w является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(S w) - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{\gamma g}{c_0}\right)^2 w = 0; \quad w(z, 0) = 0. \quad (14)$$

В силу тривиальности начального условия, w имеет нулевое решение, независимо от вида функции $S(t)$. Следовательно, уравнение (13) однородно, и его решение не содержит параметров, отражающих электрические свойства среды, т. к. они не присутствуют ни в самом уравнении, ни в начальных условиях (6). Поэтому распространение возмущения v_z осуществляется только посредством волновых движений со скоростью звука c_0 .

Возмущение E_y подчиняется неоднородному уравнению диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t}(S E_y) - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -q(z, t) \quad (15)$$

с нулевым начальным условием, в котором функция q связана простым соотношением $q(z, t) = S(t) x(z, t)$ с решением однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \gamma g \frac{\partial x}{\partial z} - 2x \frac{\partial \ln S}{\partial t} = 0, \quad (16)$$

начальными условиями которого служат

$$x(z, 0) \equiv x_0 = B_0 \left. \frac{\partial v_z}{\partial t} \right|_{t=0} = \varepsilon B_0 g \left(f - \frac{c_0^2}{\gamma g} \frac{\partial f}{\partial z} \right);$$

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv x_1 = x_0 \left. \frac{\partial \ln S}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Построение решения уравнения (16), а затем (15) не вызывает затруднений. Следует отметить, что функция $x(z, t)$ стоит в правой части уравнения (15), описывающего диффузионный процесс. Следовательно, источником диффузии поля E_y служит волновое движение возмущения, распространяющегося со скоростью c_0 , на амплитуду которого влияет

динамика электрических свойств плазмы. Иными словами, каждая точка пространства z , в которую пришло звуковое возмущение от прогретой области, в каждый момент времени t является источником диффузии поля с амплитудой, равной $S(t) \mathbf{x}(z, t)$.

Строго говоря, уравнение (15) является диффузионным не для поля E_y , а для связанной с ним функции $\varphi(z, \tau) = S(t(\tau)) E_y(z, t(\tau))$, где $\tau = \int_0^t dt'/S(t')$. Функция $\varphi(z, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -Q(z, \tau); \quad Q(z, \tau) = S^2(t(\tau)) \mathbf{x}(z, t(\tau))$$

с нулевыми начальными условиями и определяется с помощью формулы Пуассона:

$$\varphi(z, \tau) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau(t)} \frac{1}{\sqrt{\tau - \tau'}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi, \tau') \exp\left(-\frac{(z - \xi)^2}{4(\tau - \tau')}\right) d\xi \right] d\tau'.$$

Следовательно, искомое поле представляется в виде двойного интеграла

$$E_y(z, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi} S(t)} \int_0^t \frac{S(t')}{\sqrt{\tau(t) - \tau(t')}} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(\xi, t') \exp\left(-\frac{(z - \xi)^2}{4(\tau(t) - \tau(t'))}\right) d\xi \right] dt'. \quad (17)$$

Выражение (17) справедливо для первоначального возмущения среды произвольной формы. Если же интересоваться функцией Грина рассматриваемой задачи, когда $f(z) = \delta(z)$, то внутренний интеграл в (17) вычисляется в явном виде. Чтобы получить более наглядные формулы и простые физические интерпретации, в дальнейшем пренебрежем влиянием силы тяжести. В этом случае функция $\mathbf{x}(z, t)$ будет удовлетворять однородному волновому уравнению и определяться с помощью формулы Даламбера

$$\mathbf{x}(z, t) = -\frac{\varepsilon B_0 c_0^2}{2\gamma} \times \left[\frac{1}{c_0} \frac{\partial \ln S}{\partial t} \Big|_{t=0} (f(z + c_0 t) - f(z - c_0 t)) + \frac{\partial}{\partial z} (f(z + c_0 t) + f(z - c_0 t)) \right]. \quad (18)$$

После подстановки этого выражения в (17), получим функцию Грина для рассматриваемого случая:

$$E_y(z, t) = -\frac{\varepsilon B_0}{4\sqrt{\pi}\gamma} \frac{c_0}{S(t)} \int_0^t \frac{S(t')}{\sqrt{\tau(t) - \tau(t')}} \times \\ \times \left[\left(\alpha - c_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \exp \left(-\frac{(z + c_0 t)^2}{4(\tau(t) - \tau(t'))} \right) - \right. \\ \left. - \left(\alpha + c_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \exp \left(-\frac{(z - c_0 t')^2}{4(\tau(t) - \tau(t'))} \right) \right] dt'. \quad (19)$$

В качестве иллюстрации приведем функцию Грина, вычисленную по формуле (19) в случае стационарной проводимости ($\alpha = 0$):

$$E_y(z, t) = \frac{\varepsilon B_0}{4\gamma} S_0 c_0^2 e^{ac_0 t} \times \\ \times \left\{ e^{az} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{S_0}{t}} \left(\frac{z}{2} + c_0 t \right) \right) - \operatorname{sign}(z + c_0 t) \right] + \right. \\ \left. + e^{-az} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{S_0}{t}} \left(\frac{z}{2} - c_0 t \right) \right) - \operatorname{sign}(z - c_0 t) \right] \right\}; \quad a \equiv c_0 S_0 = \text{const.} \quad (20)$$

Это выражение позволяет качественно оценить происходящие явления. Главной особенностью возмущенного поля является мгновенность его появления во всех точках пространства задолго до того, как туда дойдет возмущение, распространяющееся по волновым законам со скоростью звука. Однако, поле, возникшее на расстоянии $z \gg c_0 t$, экспоненциально мало. Фронт возмущения, характеризующийся разрывом функции $E_y(z, t)$ и имеющий координаты $z = \pm c_0 t$, движется со скоростью звука c_0 : по мере удаления от начала координат, величина разрыва остается неизменной и равной $\Delta_0 = S_0 c_0^2 (\varepsilon B_0 / 2\gamma)$. Поле в начале координат отсутствует, т. к. E_y — нечетная по z функция. После прохождения фронта величина поля с течением времени экспоненциально спадает. Таким образом, наибольшего значения возмущение электрического поля в плазме с постоянной проводимостью достигает в окрестности фронта, движущегося со звуковой скоростью.

Введение релаксации проводимости среды ($\alpha \neq 0$) вносит заметное изменение в динамику возмущения поля E_y . Для определенности будем считать, что проводимость изменяется по экспоненциальному закону, т. е. $S(t) = S_0 \exp(-\alpha t)$. В этом случае интеграл (19) не удастся взять в явном виде, поэтому для получения оценок возмущенного поля пришлось прибегнуть к численному интегрированию. Результаты этих вычислений

приведены на рис. 1, 2 (сплошные кривые), где представлены распределение поля E_y по высоте z в различные моменты времени (рис. 1) и его динамика на разных высотах (рис. 2). Полученные значения возмущения электрического поля E_y нормированы на величину $\epsilon B_0 / (4\gamma \sqrt{\pi})$. Приведенные зависимости вычислены при следующих значениях параметров: $\alpha = 0,05 \text{ с}^{-1}$; $c_0 = 1000 \text{ м/с}$; $S_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ с/м}^2$. На этих графиках для сравнения изображены пунктирные кривые, соответствующие полю в среде с теми же параметрами, но с постоянной проводимостью ($\alpha = 0$).

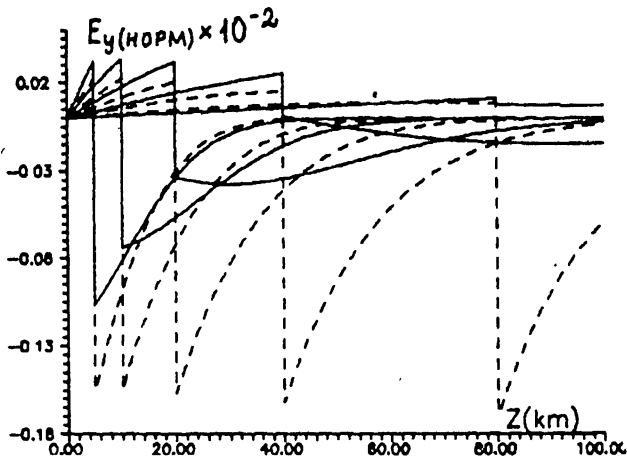


Рис. 1

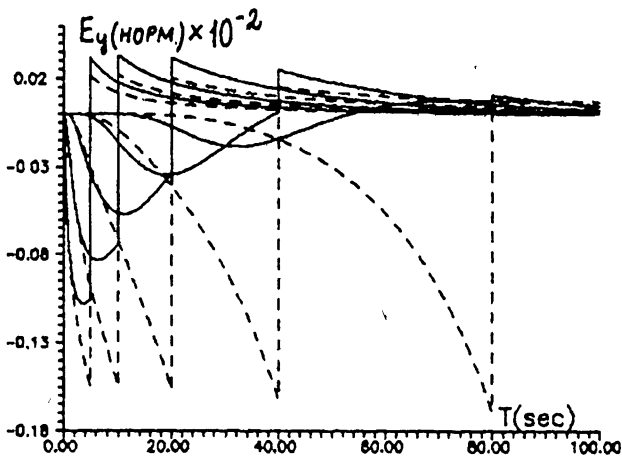


Рис. 2

Основные качественные различия в поведении поля в средах с постоянной и релаксирующей проводимостями наблюдаются при достаточно

больших временах ($\alpha t > 1$) в областях, расположенных перед фронтом возмущения ($z > c_0 t$). В отличие от уже рассмотренного случая (20), при $\alpha \neq 0$ в этих областях возникает отчетливый экстремум поля, который с течением времени уменьшается и удаляется от фронта (см. рис. 1). Численные расчеты показывают, что время появления этого экстремума и его абсолютная величина уменьшаются с ростом параметра α . Данный экстремум можно рассматривать как предвестник возмущения. На рис. 2, изображающем динамику поля, видно, что существование такого уединенного предвестника обусловлено резким спадом поля в окрестности фронта волны, вызванным убыванием проводимости. В частности, из анализа численных данных следует, что величина разрыва функции $E_y(z, t)$ изменяется приблизительно по закону $\sim \Delta_0 \exp(-\alpha t)$, где t — момент времени, в который фронт возмущения проходит через рассматриваемую точку пространства.

Таким образом, в плазме с релаксирующей проводимостью на конечных расстояниях от источника существуют уединенные предвестники возмущенного поля, которые наблюдаются значительно раньше момента прохождения разрыва (при $t > z/c_0$) и могут превосходить по величине поле в окрестности фронта.

Предложенный метод позволил описать электромагнитные возмущения в областях, где $c_0 \gg c_A$ и процессы диффузии и волновых движений протекают независимо друг от друга. Там же, где происходит сильное взаимодействие между этими двумя процессами, рассмотренный метод применять не следует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1992. Т. 35. С. 375.
2. Данилов А. Д. Химия ионосферы. — Л.: Гидрометеиздат, 1967. 295 с.
3. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. 552 с.
4. Сорокин В. М., Федорович Г. В. Физика медленных МГД-волн в ионосферной плазме. — М.: Энергоиздат, 1982. 135 с.
5. Медведев Ю. А., Степанов Б. М., Федорович Г. В. // В кн.: Вопросы метрологии ионизирующих излучений: научные труды. — М.: Атомиздат, 1975. С. 204.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
8 декабря 1993 г.

**THE NONSTATIONARY ELECTROMAGNETIC PERTURBATIONS IN
MAGNETOPLASMA WITH RELAXING CONDUCTIVITY***Yu. K. Arkhipenko, V. N. Krasil'nikov*

The problem on one-dimensional propagation of a nonstationary electromagnetic perturbation in a homogenous ionospheric plasma with relaxing conductivity given the horizontal geomagnetic field has been considered. Supposing the sound speed is much more than Alfvén one the approximate Green's function has been constructed. Under this condition the dynamics of electromagnetic perturbations has been shown to be determined by a diffusion mechanism, with the sound wave motions being a diffusion source. It has been obtained that the relaxation of plasma conductivity may cause the appearance of a perturbation solitary precursor preceding the moment of the arrival of a sound wave front.

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

А. М. Силаев

Рассмотрена задача оптимального оценивания параметров нестационарного потока импульсных сигналов, принимаемых аддитивно с шумом, с учетом скачкообразного изменения средней частоты следования импульсов. Получен рекуррентный алгоритм оптимального оценивания момента скачка и частоты следования импульсов в текущем времени. В качестве примера приведено решение задачи оптимального оценивания параметров наблюдаемой последовательности испытаний Бернулли. Даны результаты моделирования синтезированного алгоритма на ЭВМ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания сигнально-помеховой обстановки в ряде задач необходимо рассматривать модели возмущений импульсного типа [1–3]. Последовательности импульсных возмущений заранее известной формы, но со случайными амплитудами и моментами появления, могут описывать, например, траектории маневрирующих объектов в задачах слежения за ними, резкие изменения параметров сигналов и помех в радиосвязи, сигналы в оптической связи, результаты измерений в системах технической и медицинской диагностики и т. п. С помощью методов теории условных марковских процессов [4, 5] задача оптимальной фильтрации сигналов при совместном действии импульсных и шумовых возмущений была решена в работах [6, 7]. В настоящей работе развитая ранее теория применяется для оптимального оценивания параметров нестационарного потока импульсных возмущений в дискретном времени — таких как средняя частота следования импульсов и случайный момент изменения значения этой частоты.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что наблюдаемый случайный процесс описывается в дискретном времени уравнением

$$\vec{x}_{k+1} = F_k \vec{x}_k + G_k \vec{\xi}_k + \sum_{i=1}^{\infty} \vec{A}_i \delta_{kt_i}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где F_k, G_k — заданные матрицы; $\{\vec{\xi}_k\}$ — последовательность независимых векторных величин с плотностями вероятности $\rho_\xi(\vec{\xi}_k)$, описывающая аддитивное шумовое возмущение процесса; \vec{A}_i — вектор амплитуды; t_i — момент появления i -го импульсного возмущения; δ_{kt_i} — символ Кронекера

$$\delta_{kt_i} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = t_i, \\ 0, & \text{при } k \neq t_i, \quad (i = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Будем считать, что амплитуды импульсных возмущений статистически взаимонезависимы и имеют при разных i одинаковые априорные плотности вероятности $P_A(\vec{A}_i)$, а статистика моментов появления импульсов не зависит от амплитуд и описывается схемой нестационарных испытаний Бернулли — вероятность $\lambda(\tau, k)$ появления очередного импульса в момент времени k не зависит от моментов появления предыдущих импульсов и претерпевает скачкообразное изменение в момент времени τ :

$$\lambda(\tau, k) = \begin{cases} \lambda_0, & \text{при } k < \tau, \\ \lambda_1, & \text{при } k \geq \tau, \end{cases} \quad (2)$$

где λ_0 и λ_1 имеют смысл средних частот появления импульсных возмущений соответственно до и после момента скачка τ . Будем предполагать, что λ_0, λ_1 — непрерывные случайные величины, для которых заданы априорные плотности вероятности $P_{\lambda_0}(\lambda_0), P_{\lambda_1}(\lambda_1)$, определенные при $0 \leq \lambda_0 \leq 1, 0 \leq \lambda_1 \leq 1$; τ — дискретная случайная величина, для которой задана функция априорной вероятности $P_\tau(\tau)$ возможных значений момента появления скачка τ при $\tau = 0, 1, 2, \dots$.

Отметим, что при такой модели импульсных возмущений условные априорные вероятности упорядоченных моментов появления импульсов при фиксированных значениях τ и моментов появления предыдущих импульсов будут равны

$$P(t_1 | \tau) = \lambda(\tau, t_1) \prod_{k=0}^{t_1-1} [1 - \lambda(\tau, k)], \quad (t_1 = 0, 1, \dots), \quad (3)$$

$$P(t_n | t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1, \tau) = P(t_n | t_{n-1}, \tau) = \\ = \lambda(\tau, t_n) \prod_{k=t_{n-1}+1}^{t_n-1} [1 - \lambda(\tau, k)],$$

$$(t_n = t_{n-1} + 1, t_{n-1} + 2, \dots; \quad n = 2, 3, \dots).$$

В частности, если к моменту времени t_n скачок в статистике импульсных возмущений еще не произошел ($t_n < \tau$), то $\lambda(\tau, k) = \lambda_0$, и из (3) следуют геометрические распределения для условных вероятностей моментов скачков

$$P(t_1 | \tau) = \lambda_0(1 - \lambda_0)^{t_1}, \quad (3')$$

$$P(t_n | t_{n-1}, \tau) = \lambda_0(1 - \lambda_0)^{t_n - t_{n-1} - 1}, \quad (t_1 \geq 0; \quad t_n > t_{n-1}; \quad n \geq 2).$$

Отсюда видно, что выражения (3), (3') представляют из себя условные вероятности моментов t_i не только при фиксированном значении τ , но и при заданных значениях λ_0, λ_1 . Поскольку параметры $\lambda_0, \lambda_1, \tau$ сами предполагаются случайными, то точечный процесс, описывающий моменты появления импульсов, является процессом с двойной случайностью [8, 9]. Отметим, что наблюдаемый процесс \vec{x}_k , заданный уравнением (1), в принятой формулировке задачи является марковским только в совокупности со случайными параметрами $\lambda_0, \lambda_1, \tau$. Однако, если, например, заранее известно, что $k < \tau$ и $\lambda(\tau, k) = \lambda_0$ — фиксированная постоянная величина, то случайный процесс \vec{x}_k будет сам обладать свойством марковости, и для его плотности вероятности в дискретном времени можно записать уравнение, аналогичное уравнению Колмогорова-Феллера для процессов в непрерывном времени [7].

Задача настоящей работы заключается в нахождении алгоритма оптимального оценивания неизвестных параметров $\lambda_0, \lambda_1, \tau$ последовательности импульсных возмущений по результатам наблюдений $\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_T\} \equiv \vec{x}_0^T$ процесса \vec{x}_k на интервале времени $[0, T]$ и в исследовании точности получаемых оптимальных оценок $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\tau}$.

3. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЧАСТОТЫ СЛЕДОВАНИЯ ИМПУЛЬСОВ

Наиболее полную информацию о параметрах λ_0, λ_1 содержит апостериорная плотность вероятности $P(\lambda_0, \lambda_1 | \vec{x}_0^T) \equiv W(\lambda_0, \lambda_1; T)$ совокупности этих величин. В частности, оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1$ можно найти как математические ожидания плотности вероятности

$$\hat{\lambda}_j \equiv \hat{\lambda}_j(T) = \int_0^1 d\lambda_0 \int_0^1 d\lambda_1 \lambda_j W(\lambda_0, \lambda_1; T), \quad (j = 0, 1). \quad (4)$$

При этом точность оценивания можно характеризовать соответственно дисперсиями

$$D_j \equiv D_j(T) = \int_0^1 d\lambda_0 \int_0^1 d\lambda_1 (\lambda_j - \hat{\lambda}_j)^2 W(\lambda_0, \lambda_1; T), \quad (j = 0, 1). \quad (5)$$

Будем представлять апостериорную плотность вероятности $W(\lambda_0, \lambda_1; k)$ при $k = 0, 1, \dots, T$ в виде суммы

$$W(\lambda_0, \lambda_1; k) = p_0(k) W_0(\lambda_0, \lambda_1; k) + p_1(k) W_1(\lambda_0, \lambda_1; k), \quad (6)$$

где $p_0(k) \equiv P(\tau \geq k | \vec{x}_0^k)$, $p_1(k) = 1 - p_0(k) \equiv P(\tau < k | \vec{x}_0^k)$ — апостериорные вероятности неоявления ($\tau \geq k$) и появления ($\tau < k$) скачкообразного изменения свойств потока импульсных возмущений в модели сигнала (1), (2) к моменту времени k ; $W_0(\lambda_0, \lambda_1; k) \equiv P(\lambda_0, \lambda_1 | \tau \geq k, \vec{x}_0^k)$ и $W_1(\lambda_0, \lambda_1; k) \equiv P(\lambda_0, \lambda_1 | \tau < k, \vec{x}_0^k)$ — условные апостериорные плотности вероятности параметров λ_0, λ_1 при условии отсутствия скачка к моменту времени k и соответственно появления скачка к этому моменту времени.

Используя развитые ранее методы марковской теории оптимальной фильтрации случайных процессов в дискретном времени [7, 10, 11], для функций $p_0(k)$, $W_0(\lambda_0, \lambda_1; k)$, $W_1(\lambda_0, \lambda_1; k)$ можно получить рекуррентный алгоритм вычисления в темпе поступления новых наблюдаемых значений процесса \vec{x}_k при $k = 1, 2, \dots, T$.

Уравнения данного алгоритма имеют вид

$$p_0(k+1) = \frac{\Phi_0(k+1)[1 - \nu(k)]p_0(k)}{\Phi_0(k+1)[1 - \nu(k)]p_0(k) + \Phi_{01}(k+1)\nu(k)p_0(k) + \Phi_1(k+1)p_1(k)};$$

$$W_0(\lambda_0, \lambda_1; k+1) = W_0(\lambda_0, k+1)P_{\lambda_1}(\lambda_1);$$

$$W_0(\lambda_0, k+1) = g(\lambda_0, k+1)W_0(\lambda_0, k)/\Phi_0(k+1); \quad (7)$$

$$W_1(\lambda_0, \lambda_1; k+1) = g(\lambda_1, k+1) \times \left\{ \frac{\beta(k+1)W_0(\lambda_0, k)P_{\lambda_1}(\lambda_1)}{\Phi_{01}(k+1)} + \frac{[1 - \beta(k+1)]W_1(\lambda_0, \lambda_1; k)}{\Phi_1(k+1)} \right\},$$

$$(k = 0, 1, \dots, T-1)$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{\tau}(i) = 1; \quad W_0(\lambda_0, 0) = P_{\lambda_0}(\lambda_0); \quad (8)$$

$$W_1(\lambda_0, \lambda_1; 0) = P_{\lambda_0}(\lambda_0)P_{\lambda_1}(\lambda_1)$$

и обозначениями

$$g(\lambda, k+1) \equiv (1 - \lambda)\Pi(\vec{x}_{k+1} | \vec{x}_k) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\vec{x}_{k+1} - \vec{A} | \vec{x}_k)P_A(\vec{A})d\vec{A};$$

$$\Phi_0(k+1) \equiv \int_0^1 g(\lambda_0, k+1)W_0(\lambda_0, k)d\lambda_0;$$

$$\Phi_{01}(k+1) \equiv \int_0^1 g(\lambda_1, k+1) P_{\lambda_1}(\lambda_1) d\lambda_1; \quad (9)$$

$$\Phi_1(k+1) \equiv \int_0^1 g(\lambda_1, k+1) W_1(\lambda_1, k) d\lambda_1;$$

$$\beta(k+1) \equiv \frac{\Phi_{01}(k+1) \nu(k) p_0(k)}{\Phi_{01}(k+1) \nu(k) p_0(k) + \Phi_1(k+1) p_1(k)};$$

$$\nu(k) \equiv P_\tau(k) / \sum_{i=k}^{\infty} P_\tau(i), \quad (k = 0, 1, \dots, T-1),$$

где $W_1(\lambda_1, k) \equiv P(\lambda_1 | \tau < k, \vec{x}_0^k) = \int_0^1 W_1(\lambda_0, \lambda_1; k) d\lambda_0$ — условная плотность вероятности параметра λ_1 в предположении, что к моменту времени k скачок уже произошел, $\Pi(\vec{x}_{k+1} | \vec{x}_k)$ — переходная плотность вероятности случайной последовательности $\{\vec{x}_k\}$, соответствующая стохастическому уравнению (1) без учета импульсных возмущений $\vec{x}_{k+1} = F_k \vec{x}_k + G_k \xi_k$. Отсюда видно, что переходная плотность вероятности $\Pi(\vec{x}_{k+1} | \vec{x}_k)$ выражается через плотность вероятности шумового возмущения $\rho_\xi(\vec{\xi}_k)$. Например, если G_k — единичная матрица, то

$$\Pi(\vec{x}_{k+1} | \vec{x}_k) = \rho_\xi(\vec{x}_{k+1} - F_k \vec{x}_k).$$

Уравнения (4)–(9) образуют искомый алгоритм оптимального оценивания параметров λ_0, λ_1 по наблюдаемой реализации сигнала \vec{x}_0^T .

Из уравнений (6)–(8) следует, что случайные величины λ_0 и λ_1 , априорно статистически независимые, при учете наблюдений \vec{x}_0^k уже после первого шага $k \geq 1$ становятся статистически взаимосвязаны, т.к. плотность вероятности $W(\lambda_0, \lambda_1; k)$ не представляется в виде произведения безусловных плотностей $W_{\lambda_0}(\lambda_0, k) W_{\lambda_1}(\lambda_1, k)$. Проинтегрировав (6) и (7) по λ_0 , получим алгоритм вычисления апостериорной плотности вероятности величины λ_1 :

$$W_{\lambda_1}(\lambda_1, k) = p_0(k) P_{\lambda_1}(\lambda_1) + p_1(k) W_1(\lambda_1, k); \quad (10)$$

$$W_1(\lambda_1, k+1) = g(\lambda_1, k+1) \left\{ \frac{\beta(k+1) P_{\lambda_1}(\lambda_1)}{\Phi_{01}(k+1)} + \frac{[1 - \beta(k+1)] W_1(\lambda_1, k)}{\Phi_1(k+1)} \right\},$$

$$(k = 0, 1, \dots, T-1).$$

Отсюда видно, что весовые функции $p_0(k), p_1(k) = 1 - p_0(k)$ регулируют вклад априорных и апостериорных данных в результирующую плотность вероятности параметра λ_1 .

Для апостериорной плотности вероятности величины λ_0 из (6), (7) после интегрирования по λ_1 можно получить выражение

$$W_{\lambda_0}(\lambda_0, k) = p_0(k) W_0(\lambda_0, k) + p_1(k) \int_0^1 W_1(\lambda_0 | \lambda_1; k) W_1(\lambda_1, k) d\lambda_1, \quad (11)$$

где введена вспомогательная условная апостериорная плотность вероятности $W_1(\lambda_0 | \lambda_1; k) = P(\lambda_0 | \lambda_1, \tau < k, \vec{x}_0^k)$ параметра λ_0 при условии фиксированной величины λ_1 и в предположении, что к моменту времени k скачок уже произошел. В свою очередь, для $W_1(\lambda_0 | \lambda_1; k)$ из (7), (10) получим рекуррентное уравнение

$$\begin{aligned} W_1(\lambda_0 | \lambda_1; k+1) &= \frac{W_1(\lambda_0, \lambda_1; k+1)}{W_1(\lambda_1, k+1)} = \\ &= \frac{\nu(k) p_0(k) W_0(\lambda_0, k) P_{\lambda_1}(\lambda_1) + p_1(k) W_1(\lambda_0 | \lambda_1; k) W_1(\lambda_1, k)}{\nu(k) p_0(k) P_{\lambda_1}(\lambda_1) + p_1(k) W_1(\lambda_1, k)}, \quad (12) \\ &(k = 0, 1, \dots, T-1). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (11), (12) наряду с уравнениями (7), (10) для функций $p_0(k)$, $W_0(\lambda_0, k)$, $W_1(\lambda_1, k)$ позволяют вычислить апостериорную плотность вероятности параметра λ_0 для любого момента дискретного времени $k = 1, 2, \dots, T$.

Интересно отметить, что, как следует из уравнений алгоритма, при оценивании значений λ_0 , λ_1 не требуется вычислять апостериорные вероятности $P_\tau(\tau | \vec{x}_0^k)$ момента появления скачка τ для каждого из его возможных значений $\tau \geq 0$ и не требуется оценивать сам момент скачка τ . Достаточно лишь вычислять вспомогательные функции $p_0(k) \equiv \sum_{i=k}^{\infty} P_\tau(i | \vec{x}_0^k)$,

$p_1(k) \equiv \sum_{i=0}^{k-1} P_\tau(i | \vec{x}_0^k) = 1 - p_0(k)$, что значительно упрощает алгоритм оценивания, т.к. позволяет вместо анализа каждого отдельного возможного значения момента скачка τ исследовать лишь интегральные характеристики вероятностей появления ($k > \tau$) или неоявления ($k \leq \tau$) скачка к текущему моменту времени k .

Заметим также, что предположение о независимости и одинаковой распределенности амплитуд импульсных возмущений, а также о гесметрическом распределении условных вероятностей моментов появления импульсов (3) позволило, по-существу, провести усреднение по всем амплитудам \vec{A}_i и моментам появления t_i импульсов при выводе уравнений (7)–(9). Тем самым при оценивании параметров λ_0 , λ_1 учитывается интегральный вклад всех импульсных возмущений в модели наблюдаемого сигнала (1). При другой априорной статистике импульсных возмущений в общем случае нельзя ожидать, что удастся провести подобное усреднение по \vec{A}_i и t_i .

В итоге может потребоваться обработка каждого отдельного импульса в (1), что значительно усложнит алгоритм оценивания.

4. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ МОМЕНТА СКАЧКА τ

Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка произвольной функции $f(\tau)$ момента скачка τ находится как среднее значение по апостериорным вероятностям возможных значений τ :

$$\hat{f}_\tau(k) \equiv \sum_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) P_\tau(\tau | \vec{x}_0^k).$$

Следуя [12, 13], можно показать, что $\hat{f}_\tau(k)$, по аналогии с (6), можно представить в виде взвешенной суммы условных оценок

$$\hat{f}_\tau(k) = p_0(k) f_0(k) + p_1(k) f_1(k), \quad (13)$$

где $p_0(k)$ находится из (7), $p_1(k) = 1 - p_0(k)$. При этом условная оценка $f_0(k)$ равна

$$f_0(k) = \frac{\sum_{\tau=k}^{\infty} f(\tau) P_\tau(\tau | \vec{x}_0^k)}{\sum_{\tau=k}^{\infty} P_\tau(\tau | \vec{x}_0^k)} = \frac{\sum_{\tau=k}^{\infty} f(\tau) P_\tau(\tau)}{\sum_{\tau=k}^{\infty} P_\tau(\tau)}, \quad (14)$$

т.е. определяется через априорно заданные функции $f(\tau)$, $P_\tau(\tau)$. Для условной оценки

$$f_1(k) = \frac{\sum_{\tau=0}^{k-1} f(\tau) P_\tau(\tau | \vec{x}_0^k)}{\sum_{\tau=0}^{k-1} P_\tau(\tau | \vec{x}_0^k)}$$

справедливо рекуррентное уравнение

$$f_1(k+1) = \frac{\Phi_{01}(k+1) \nu(k) p_0(k) f(k) + \Phi_{1f}(k+1) p_1(k) f_1(k)}{\Phi_{01}(k+1) \nu(k) p_0(k) + \Phi_{1f}(k+1) p_1(k)}. \quad (15)$$

Здесь функция

$$\Phi_{1f}(k+1) \equiv \int_0^1 g(\lambda, k+1) W_{1f}(\lambda, k) d\lambda \quad (16)$$

находится путем интегрирования по еще одной вспомогательной плотности вероятности $W_{1f}(\lambda, k)$, для которой рекуррентное уравнение имеет вид

$$W_{1f}(\lambda, k+1) = g(\lambda, k+1) \times \left\{ \frac{\beta_{1f}(k+1) P_{\lambda_1}(\lambda)}{\Phi_{01}(k+1)} + \frac{[1 - \beta_{1f}(k+1)] W_{1f}(\lambda, k)}{\Phi_{1f}(k+1)} \right\}, \quad (17)$$

$$(k = 0, 1, \dots, T-1).$$

Причем

$$\beta_{1f}(k+1) \equiv \frac{\Phi_{01}(k+1) \nu(k) p_0(k) f(k)}{\Phi_{01}(k+1) \nu(k) p_0(k) f(k) + \Phi_{1f}(k+1) p_1(k) f_1(k)}. \quad (18)$$

Начальные условия к уравнениям (15), (17) могут быть выбраны любыми $f_1(0)$, $W_{1f}(\lambda, 0)$, т. к. при $k = 0$ имеем $p_0(k) \equiv 1$ и, следовательно, $p_1(k) = 0$. Функции $\nu(k)$, $g(\lambda, k+1)$, $\Phi_{01}(k+1)$, $\Phi_{1f}(k+1)$ определяются уравнениями (9).

Полагая $f(\tau) = \tau$, из (11)–(18) получим алгоритм оптимального в среднеквадратическом смысле оценивания момента скачка τ . Для вычисления апостериорной дисперсии момента τ , характеризующей точность оценивания, необходимо, подставив $f(\tau) = \tau^2$ в алгоритм (11)–(18), вычислить сначала $\widehat{\tau^2}(k)$, а затем, используя также $\widehat{\tau}(k)$, восстановить дисперсию по формуле $D_\tau(k) = \widehat{\tau^2}(k) - [\widehat{\tau}(k)]^2$.

5. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим предельный случай в модели сигнала (1), когда \mathbf{x}_k — скалярный процесс, $F_k = G_k = 0$, и все амплитуды импульсных возмущений равны единице, т.е. $A_i = 1$ при всех i . Наблюдаемая последовательность $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_T\} \equiv \mathbf{x}_1^T$ состоит из нулей и единиц и представляет из себя последовательность испытаний Бернулли [14], вероятность появления единиц в которых λ описывается выражением (2).

Для данного примера функции в формулах (9), (16) принимают вид

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) &= \delta(\mathbf{x}_{k+1}); & P_A(A) &= \delta(A-1); \\ g(\lambda, k+1) &= (1-\lambda) \delta(\mathbf{x}_{k+1}) + \lambda \delta(\mathbf{x}_{k+1}-1); \\ \Phi_j(k+1) &= [1 - \hat{\lambda}_j(k)] \delta(\mathbf{x}_{k+1}) + \hat{\lambda}_j(k) \delta(\mathbf{x}_{k+1}-1); & (19) \\ \Phi_{01}(k+1) &= (1 - \hat{\lambda}_{pr}) \delta(\mathbf{x}_{k+1}) + \hat{\lambda}_{pr} \delta(\mathbf{x}_{k+1}-1), \\ & (k = 0, 1, \dots, T-1; \quad j = 0, 1, 1f), \end{aligned}$$

где $\delta(\mathbf{x})$ — дельта-функция Дирака; $\hat{\lambda}_0(k)$, $\hat{\lambda}_1(k)$, $\hat{\lambda}_{1f}(k)$, $\hat{\lambda}_{pr}$ — средние значения плотностей вероятности $W_0(\lambda_0, k)$, $W_1(\lambda_1, k)$, $W_{1f}(\lambda, k)$, $P_{\lambda_1}(\lambda_1)$

соответственно. Для дальнейших записей удобно ввести вспомогательную функцию

$$h(\lambda, k) = \begin{cases} 1 - \lambda, & \text{при } x_k = 0, \\ \lambda, & \text{при } x_k = 1. \end{cases}$$

Подставляя (19) в (7), (10), (15), (17), (18), получим следующий рекуррентный алгоритм оценивания. В начальный момент времени необходимо задать

$$p_0(0) = 1; \quad W_0(\lambda, 0) = P_{\lambda_0}(\lambda), \quad (0 \leq \lambda \leq 1);$$

$$\hat{\lambda}_0(0) = \int_0^1 \lambda P_{\lambda_0}(\lambda) d\lambda;$$

$$\hat{\lambda}_1(0) = \hat{\lambda}_{1f}(0) = \hat{\lambda}_{pr} = \int_0^1 \lambda P_{\lambda_1}(\lambda) d\lambda.$$

Функции $W_1(\lambda, 0)$, $W_{1f}(\lambda, 0)$ при $0 \leq \lambda \leq 1$, $W_1(\lambda_0 | \lambda_1; 0)$ при $0 \leq \lambda_0 \leq 1$, $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, а также значение $f_1(0)$ можно выбрать произвольными, т. к. $p_1(0) = 1 - p_0(0) = 0$. При $k = 0, 1, \dots, T - 1$ проводятся рекуррентные вычисления по формулам

$$\begin{aligned} p_0(k+1) &= \\ &= \frac{h[\hat{\lambda}_0(k), k+1][1 - \nu(k)]p_0(k)}{h[\hat{\lambda}_0(k), k+1][1 - \nu(k)]p_0(k) + h[\hat{\lambda}_1(k), k+1]p_1(k) + h(\hat{\lambda}_{pr}, k+1)\nu(k)p_0(k)}; \\ f_1(k+1) &= \frac{h(\hat{\lambda}_{pr}, k+1)\nu(k)p_0(k)f(k) + h[\hat{\lambda}_{1f}(k), k+1]p_1(k)f_1(k)}{h(\hat{\lambda}_{pr}, k+1)\nu(k)p_0(k) + h[\hat{\lambda}_1(k), k+1]p_1(k)}; \\ W_0(\lambda, k+1) &= \frac{h(\lambda, k+1)W_0(\lambda, k)}{h[\hat{\lambda}_0(k), k+1]}; \\ W_1(\lambda, k+1) &= \frac{h(\lambda, k+1)[\nu(k)p_0(k)P_{\lambda_1}(\lambda) + p_1(k)W_1(\lambda, k)]}{h(\hat{\lambda}_{pr}, k+1)\nu(k)p_0(k) + h[\hat{\lambda}_1(k), k+1]p_1(k)}; \\ W_{1f}(\lambda, k+1) &= \frac{h(\lambda, k+1)[\nu(k)p_0(k)f(k)P_{\lambda_1}(\lambda) + p_1(k)f_1(k)W_{1f}(\lambda, k)]}{h(\hat{\lambda}_{pr}, k+1)\nu(k)p_0(k)f(k) + h[\hat{\lambda}_1(k), k+1]p_1(k)f_1(k)}; \end{aligned} \quad (20)$$

($0 \leq \lambda \leq 1$).

$$\begin{aligned}
 W_1(\lambda_0 | \lambda_1; k + 1) &= \\
 &= \frac{\nu(k) p_0(k) W_0(\lambda_0, k) P_{\lambda_1}(\lambda_1) + p_1(k) W_1(\lambda_1, k) W_1(\lambda_0 | \lambda_1; k)}{\nu(k) p_0(k) P_{\lambda_1}(\lambda_1) + p_1(k) W_1(\lambda_1, k)}, \\
 &\quad (0 \leq \lambda_0 \leq 1; \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 1).
 \end{aligned}$$

При этом после вычисления плотностей вероятности на каждом шаге дискретного времени находятся средние значения

$$\hat{\lambda}_j(k + 1) = \int_0^1 \lambda W_j(\lambda, k + 1) d\lambda, \quad (j = 0, 1, 1f), \quad (21)$$

которые используются для расчетов по формулам (20) на следующем шаге.

Предположим, что априорные вероятности различных значений момента скачка τ одинаковы на интервале наблюдения

$$P_\tau(\tau) = \begin{cases} 1/T, & \text{при } \tau = 0, 1, \dots, T - 1, \\ 0, & \text{при } \tau < 0, \tau \geq T. \end{cases}$$

Тогда из (9) получим

$$\nu(k) = 1/(T - k), \quad (k = 0, 1, \dots, T - 1). \quad (22)$$

Отсюда видно, что $\nu(T - 1) = 1$. Поэтому, как следует из (20), функция $p_0(k)$ в конце интервала наблюдений принимает нулевое значение $p_0(T) = 0$. Таким образом, для апостериорных плотностей вероятности параметров λ_0 , λ_1 и оценки $\hat{f}_\tau(T)$ функции $f(\tau)$ из (10), (11), (13) получим

$$\begin{aligned}
 W_{\lambda_0}(\lambda_0, T) &= \int_0^1 W_1(\lambda_0 | \lambda_1; T) W_1(\lambda_1, T) d\lambda_1; \\
 W_{\lambda_1}(\lambda_1, T) &= W_1(\lambda_1, T); \quad \hat{f}_\tau(T) = f_1(T); \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$(0 \leq \lambda_0 \leq 1; \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 1).$$

Уравнения (20)–(23) решают поставленную задачу оптимального оценивания параметров λ_0 , λ_1 и случайного момента скачка τ для рассматриваемого примера наблюдаемой последовательности испытаний Бернулли.

Заметим, что решение уравнения (20) для функции $W_0(\lambda, k)$ можно найти непосредственно для любого момента времени в виде

$$W_0(\lambda, k) = \frac{(k+1)!}{n!(k-n)!} \lambda^n (1-\lambda)^{k-n} P_{\lambda_0}(\lambda), \quad (24)$$

$$(0 \leq \lambda \leq 1; \quad k = 1, 2, \dots, T),$$

где n — число единиц в наблюдаемой последовательности x_1, x_2, \dots, x_k (n — число успехов в k испытаниях Бернулли). Это решение, как и следовало ожидать, совпадает с известным решением для апостериорной плотности вероятности параметра λ , полученным с помощью байесовского подхода в предположении отсутствия скачков в статистике наблюдаемой последовательности [14]. Если начальная априорная плотность вероятности равномерная $P_{\lambda_0}(\lambda) = 1$ при $0 \leq \lambda \leq 1$, из (24) получим среднее значение и дисперсию апостериорной плотности вероятности $W_0(\lambda, k)$:

$$\hat{\lambda}_0(k) = \frac{n+1}{k+2}; \quad D_0(k) = \frac{(n+1)(k-n+1)}{(k+3)(k+2)^2} = \frac{\hat{\lambda}_0(k)[1-\hat{\lambda}_0(k)]}{k+3}, \quad (25)$$

$$(k = 1, 2, \dots, T; \quad 0 \leq n \leq k).$$

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При практической реализации алгоритма (20)–(23) определенные интегралы в (21), (23) можно приближенно вычислять с помощью разработанных методов численного интегрирования [15] по формуле

$$\hat{\lambda}(k) = \int_0^1 \lambda W(\lambda, k) d\lambda \approx \sum_{i=1}^m \lambda_i W(\lambda_i, k) \Delta\lambda_i.$$

При этом интервал интегрирования $[0, 1]$ разбивается на m отрезков, каждый величиной $\Delta\lambda_i$. В заранее определенных точках (узлах) λ_i этих отрезков вычисляются значения апостериорной плотности вероятности $W(\lambda_i, k)$. Расчет этих значений можно проводить параллельно для всех m узлов с использованием рекуррентных формул (20). Выбирая число m достаточно большим, можно с достаточной степенью точности находить интегралы в (21), (23) и в то же время достаточно детально восстанавливать апостериорные плотности вероятности параметров λ_0, λ_1 на интервале $[0, 1]$. Оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1$ параметров λ_0, λ_1 находятся как средние значения плотностей вероятности $W_{\lambda_0}(\lambda_0, T), W_{\lambda_1}(\lambda_1, T)$ в конце наблюдений. Дисперсии этих

плотностей D_0, D_1 соответственно характеризуют точность оценивания по реализации наблюдаемого сигнала \mathbf{x}_1^T :

$$D_j \approx \sum_{i=1}^m (\lambda_i - \hat{\lambda}_j)^2 W_{\lambda_j}(\lambda_i, T) \Delta \lambda_i, \quad (j = 0, 1).$$

Практическая реализация алгоритма оценивания (20)–(23) упрощается в связи с тем, что для всех узловых точек λ_i интервала $[0, 1]$ изменения параметра λ_1 вычисления значений функций $W_1(\lambda, k+1)$, $W_{1f}(\lambda, k+1)$ по формулам (20) проводятся по одной и той же схеме. Кроме того, вместо вычисления двумерного массива условной плотности вероятности $W_1(\lambda_0 | \lambda_1, k+1)$ достаточно находить лишь одномерные массивы средних значений $\hat{\lambda}_0(\lambda_1, k+1)$ и средних квадратов $\hat{\lambda}_0^2(\lambda_1, k+1)$ этой плотности вероятности в тех же самых узловых точках λ_i . К трудностям, появляющимся при реализации алгоритма, можно отнести возникающую задачу оптимального выбора числа узлов m . Очевидно, что для улучшения точности оценивания параметров $\lambda_0, \lambda_1, \tau$ необходимо увеличивать m . С другой стороны, рост m приводит к увеличению времени обработки каждого наблюдаемого значения процесса \mathbf{x}_k . Таким образом, выбор числа m зависит от конкретных особенностей рассматриваемой задачи и ограничен возможностями вычислительной техники.

На рис. 1–5 представлены результаты моделирования алгоритма оценивания (20)–(23), полученные следующим образом. Моделировалась последовательность независимых случайных величин \mathbf{x}_k , принимающих значения 0 или 1, так, что вероятность появления единицы при $k = 1, 2, \dots, \tau^*$ была равна λ_0^* , а при $k = \tau^* + 1, \tau^* + 2, \dots, T$ была равна λ_1^* . По каждой реализации сформированного сигнала \mathbf{x}_1^T вычислялись оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки $\hat{\tau}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1$ и апостериорные дисперсии D_τ, D_0, D_1 в соответствии с алгоритмом (20)–(23). Затем путем усреднения по 50 независимым реализациям приближенно находились средние значения оценок $\bar{\tau}, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1$, средние значения апостериорных дисперсий $\bar{D}_\tau, \bar{D}_0, \bar{D}_1$, а также смещения оценок $\Delta_\tau = \bar{\tau} - \tau^*, \Delta_0 = \bar{\lambda}_0 - \lambda_0^*, \Delta_1 = \bar{\lambda}_1 - \lambda_1^*$. При этом априорные плотности вероятности параметров λ_0, λ_1 в алгоритме оценивания задавались равномерными $P_{\lambda_0}(\lambda) = P_{\lambda_1}(\lambda) = 1$ при $0 \leq \lambda \leq 1$, а при вычислении интегралов в формулах (21), (23) использовался модифицированный метод прямоугольников [15] с разбиением интервала интегрирования $[0, 1]$ на $m = 50$ равных отрезков и заданием узловых точек в серединах этих отрезков.

На рис. 1, 2 даны графики смещения Δ_τ и средней апостериорной дисперсии \bar{D}_τ момента τ в зависимости от положения его истинного значения τ^* на интервале наблюдения $[0, T - 1]$ при $T = 501$, $\lambda_0^* = 0,5$ и при различных истинных значениях λ_1^* параметра λ_1 . Кривые 1–6 на рисунках получены соответственно для $\lambda_1^* = 0; \lambda_1^* = 0,1; \lambda_1^* = 0,2; \lambda_1^* = 0,3; \lambda_1^* = 0,4;$

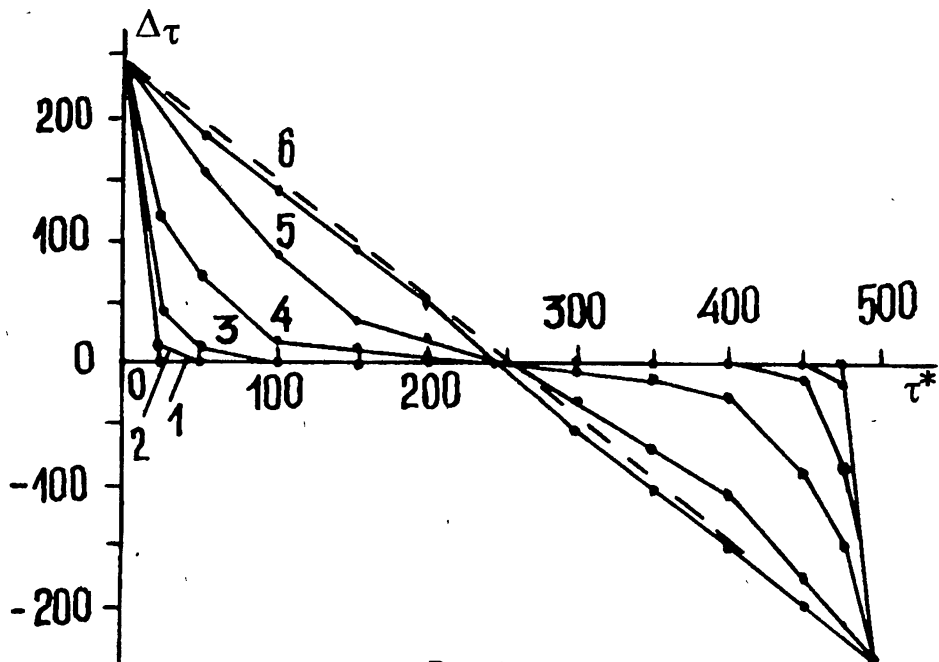


Рис. 1

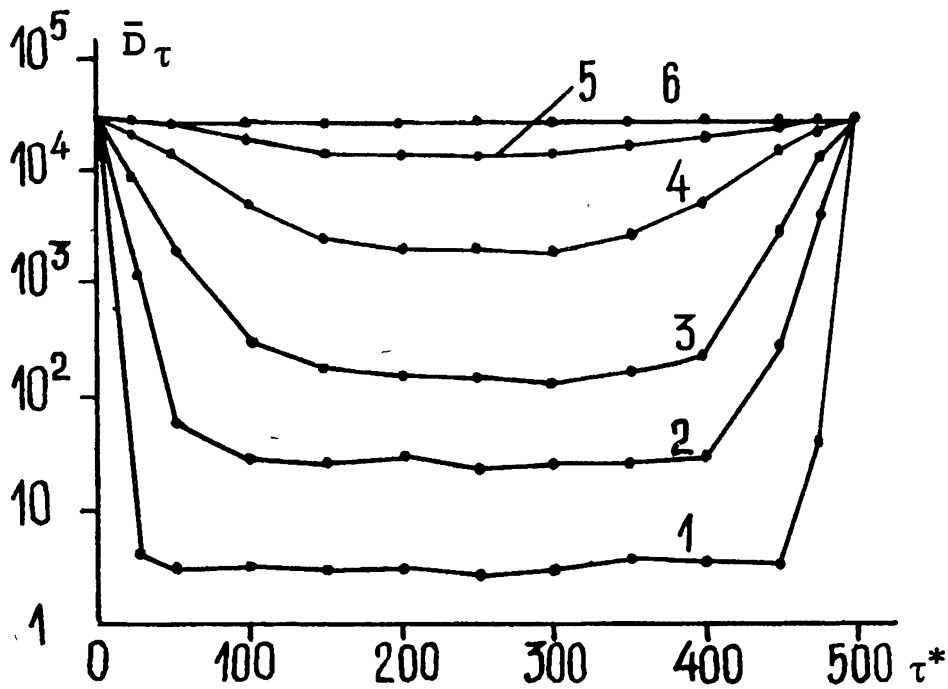


Рис. 2

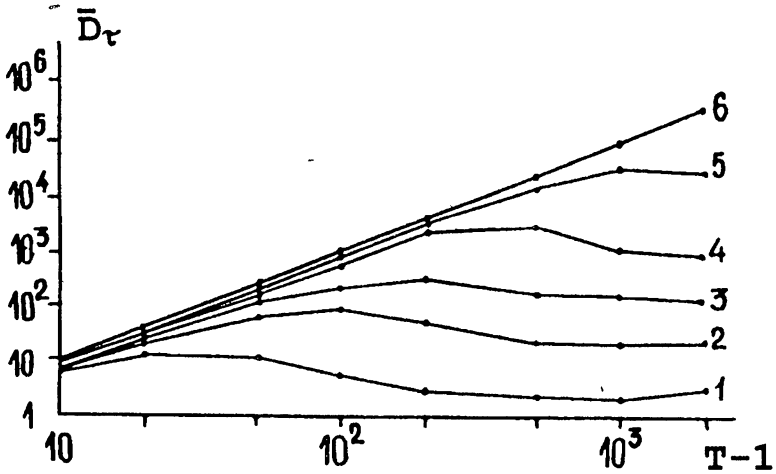


Рис. 3

$\lambda_1^* = 0,5$. Результаты при $\lambda_1^* > 0,5$ на рисунках не приведены, т. к. получаются близкими к результатам моделирования при истинном значении параметра λ_1 , равном $1 - \lambda_1^*$. Из рисунков видно, что оценка $\hat{\tau}$ в общем случае имеет некоторое смещение от истинного значения в сторону априорного среднего значения случайного момента скачка $\hat{\tau}_{pr} = (T - 1)/2 = 250$. Но чем больше разница между истинными значениями λ_0^* и λ_1^* параметров последовательности x_1^T до и после скачка, а также, чем ближе реальное значение момента скачка τ^* к априорному $\hat{\tau}_{pr}$, тем меньше смещение оценки Δ_τ и апостериорная дисперсия \bar{D}_τ , т. е. тем точнее происходит оценивание. В частности, при $\lambda_1^* = 0,1$, $\tau^* = 250$ имеем $\bar{D}_\tau \approx 22$, т. е. оценивание происходит с ошибкой, не превышающей всего несколько шагов дискретного времени. Если же $\lambda_0^* = \lambda_1^* = 0,5$, а также в случае, если скачок происходит в самом начале или конце наблюдений, т. е. $\tau^* = 0$ или $\tau^* = 500$, оценка $\hat{\tau}$ вырабатывается близкой к априорной оценке $\hat{\tau} \approx \hat{\tau}_{pr} = 250$. В этих случаях алгоритм, по-существу, не может по наблюдаемым данным обнаружить появление скачка, и наилучшим в смысле минимума среднеквадратичной ошибки является априорное среднее значение $\hat{\tau}_{pr}$. При этом сама ошибка оценивания — апостериорная дисперсия момента скачка — велика и близка к априорной дисперсии $D_{pr} = (T^2 - 1)/12$ распределения $P_\tau(\tau)$, равномерного на интервале $[0, T - 1]$. Таким образом, по величине D_τ можно судить о точности формируемой оценки $\hat{\tau}$.

На рис. 3 представлены зависимости дисперсии \bar{D}_τ от величины интервала наблюдения T при $\lambda_0^* = 0,5$, $\tau^* = \hat{\tau}_{pr} = (T - 1)/2$ и при различных истинных значениях λ_1^* параметра λ_1 . Данные графики характеризуют потенциальную точность оценивания момента скачка τ по наблюдаемой реализации сигнала x_1^T . Видно, что при увеличении интервала наблюдений T , начиная с некоторого порогового значения T_n , тем большего,

чем меньше разница между λ_0^* и λ_1^* , графики приближенно становятся постоянными. Таким образом, точность оценивания момента скачка не улучшается при добавлении новых наблюдаемых значений последовательности x_1^T , далеких от истинного момента скачка. Результаты моделирования показали, что оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}_1$, вырабатываемые алгоритмом (20)–(23), также в общем случае несколько смещены от истинных значений λ_0^* , λ_1^* в сторону априорных средних $\hat{\lambda}_{0pr} = \hat{\lambda}_{1pr} = 0,5$. Однако, величина смещений очень мала и может быть объяснена неточностью процедуры оценивания, вызванной случайностью наблюдаемых реализаций (малым числом усреднений при моделировании).

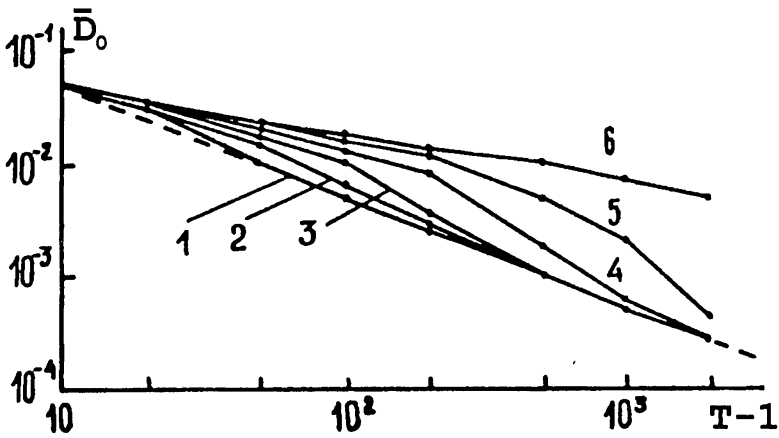


Рис. 4

На рис. 4, 5 даны графики апостериорных дисперсий \bar{D}_0 , \bar{D}_1 параметров λ_0 , λ_1 в зависимости от величины интервала наблюдения T при различных истинных значениях λ_1^* . При этом последовательность x_1^T моделировалась так, что $\lambda_0^* = 0,5$; $\tau^* = \hat{\tau}_{pr} = (T - 1)/2$. Пунктиром на этих рисунках для сравнения приведены графики теоретических апостериорных дисперсий величин λ_0 , λ_1 , рассчитанные по формуле (25) в предположении, что момент скачка заранее известен и равен $\tau^* = (T - 1)/2$, а $\hat{\lambda}_0 \approx \lambda_0^*$, $\hat{\lambda}_1 \approx \lambda_1^*$. Величины апостериорных дисперсий \bar{D}_0 , \bar{D}_1 характеризуют потенциальную точность оценивания параметров λ_0 , λ_1 . Из рисунков видно, что при увеличении T дисперсии \bar{D}_0 , \bar{D}_1 уменьшаются, т. е. точность оценивания параметров λ_0 , λ_1 улучшается. При этом, чем больше T , тем лучше аппроксимация \bar{D}_0 , \bar{D}_1 теоретическими зависимостями $\bar{D}_j \approx \lambda_j^*(1 - \lambda_j^*)/(T/2)$, ($j = 0, 1$). В результате можно рассчитать требуемую длину интервала наблюдений T для получения заданной точности оценивания. Таким образом, результаты моделирования подтвердили работоспособность синтезированного алгоритма (20)–(23) и позво-

лили исследовать потенциальную точность оценивания параметров нестационарной последовательности испытаний Бернулли.

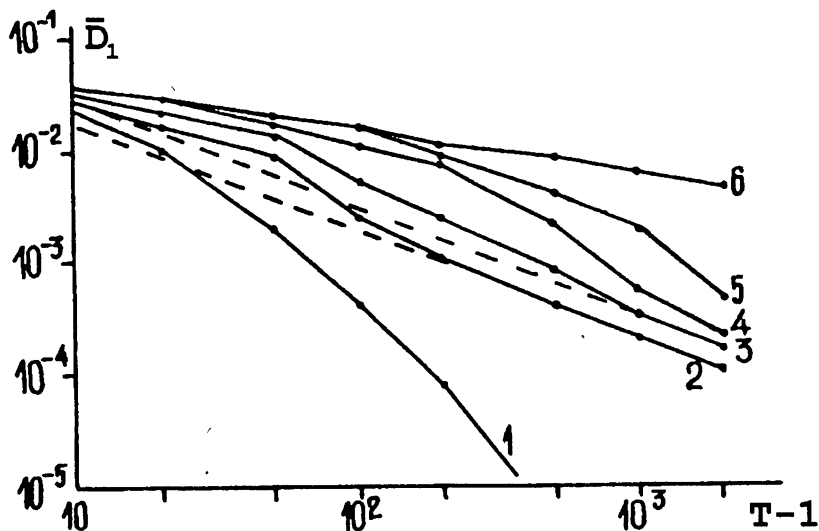


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриценко Н. С., Кириченко А. А., Коломейцева Т. А., Логинов В. Н., Тихомирова И. Г. // Зарубежная радиоэлектроника, 1963. № 4. С. 3.
2. Тихонов В. И., Ершов Л. А. // Радиотехника и электроника, 1979. Т. 24. № 3. С. 551.
3. Тихонов В. И., Теплинский И. С. // Радиотехника и электроника, 1989. Т. 34. № 4. С. 792.
4. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. — М.: Гос. ун-т, 1966.
5. Тихоцов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Сов. радио, 1975.
6. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1983. Т. 26. № 8. С. 981.
7. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1985. Т. 28. № 7. С. 850.
8. Snyder D. L. Random point processes. — New York, London, Sydney, Toronto: Wiley and Sons, 1975.
9. Солодов А. В., Солодов А. А. Статистическая динамика систем с точечными процессами. — М.: Наука, 1988.

10. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Автоматика и телемеханика, 1985. N1. С. 48.
11. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1992. Т. 35. N11-12. С. 938.
12. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 32. N1. С. 62.
13. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Автоматика и телемеханика, 1992. N1. С. 63.
14. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. / Под ред. Э. Ллойда и др. — М.: Финансы и статистика, т. 1 — 1989; т. 2 — 1990.
15. Волков Е. В. Численные методы. — М.: Наука. 1987.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 января 1994 г.

**OPTIMAL ESTIMATION OF PARAMETERS OF NONSTATIONARY
RANDOM PULSE SEQUENCE IN DISCRETE TIME**

A. M. Silaev

The optimal estimation of parameters of nonstationary random pulse sequence with a jump-like variation of the mean pulse-recurrence frequency has been solved. The random pulse sequence is observed additively with the noise. The recurrent algorithm of the optimal estimate of the pulse-recurrence frequency and its jump moment in real time is derived. As an example the optimal estimation problem of Bernoulli trial parameters is presented. Results of computer simulation experiments are presented.

УДК 621.37:621.391

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПИРСОНОВСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

В. А. Казаков, А. М. Лавров

С использованием ортогональных разложений условных плотностей вероятности находятся аналитические выражения для коэффициентов, входящих в кинетические уравнения, которые описывают немарковские процессы с пирсоновскими распределениями.

1. Известно, что кинетическое уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова описывает эволюцию плотностей вероятности непрерывного марковского процесса. В [1] без использования свойства марковости было выведено иное кинетическое уравнение для условной плотности вероятности $w(\mathbf{x}, t | X, T)$ немарковского непрерывного процесса. В общем случае в [1] предполагается, что в процессе $\mathbf{x}(t)$ имеется произвольное множество фиксированных значений $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, относящихся соответственно к временам $T = \{t_1, t_2, \dots, t_r\}$. При этом уравнение [1] имеет вид:

$$\frac{\partial w(\mathbf{x}, t | X, T)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \mathbf{x}^n} [A_n(\mathbf{x}, t, X, T) w(\mathbf{x}, t | X, T)], \quad (1)$$

$A_n(\mathbf{x}, t, X, T)$ — кинетические коэффициенты, определяемые согласно [2] соотношением

$$A_n(\mathbf{x}, t, X, T) = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \tilde{\alpha}_n(\hat{t} | \mathbf{x}, t, X, T) \Big|_{\hat{t}=t+0}, \quad (2)$$

здесь $\tilde{\alpha}_n(\hat{t} | \mathbf{x}, t, X, T)$ — условная n -я моментная функция приращения случайного процесса за время $\hat{t} - t > 0$. Наличие в (1), (2) множества X, T свидетельствует о немарковости процесса, поскольку отражает эффект последствия.

Когда $t \gg t_r$, статистические связи между текущим сечением \mathbf{x}, t и фиксированным множеством X, T ослабевают, и процесс входит в стационарный режим. При этом кинетические коэффициенты и условная плотность вероятности перестают зависеть от времен, т. е.

$$A_n(\mathbf{x}, t, X, T) = A_n(\mathbf{x}, t) = A_n(\mathbf{x}), \quad w(\mathbf{x}, t | X, T) = w(\mathbf{x}, t)_r = w(\mathbf{x}),$$

а левая часть уравнения (1) обращается в нуль.

В частном случае уравнение (1) описывает эволюцию плотности вероятности $w(x, t)$ марковского процесса и полностью совпадает с классическим уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова. При этом из-за отсутствия последействия в силу марковского свойства $\tilde{\alpha}_n(\hat{t} | x, t, X, T) = \tilde{\alpha}_n(\hat{t} | x, t)$, что автоматически ведет к тому, что

$$A_n(x, t, X, T) = A_n(x, t), \quad w(x, t | X, T) = w(x, t).$$

В [1, 2] показано, что для дифференцируемых процессов коэффициенты (2) вырождаются, так что уравнение (1) оказывается справедливым лишь для узкого класса немарковских недифференцируемых процессов.

В [3] выведено другое кинетическое уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x, t | X, T)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [B_n(x, t, X, T) w(x, t | X, T)] \quad (3)$$

с кинетическими коэффициентами

$$B_n(x, t; X, T) = \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}^2} \tilde{\alpha}_n(\hat{t} | x, t, X, T) \Big|_{\hat{t}=t+0}, \quad (4)$$

которые для немарковских дифференцируемых процессов не вырождаются. Следует иметь в виду, что коэффициенты (4) можно вычислять и для недифференцируемых случайных процессов, в том числе и для марковских. По этой причине уравнение (3) описывает эволюцию условной плотности вероятности произвольных непрерывных случайных процессов.

В [4] для гауссовских процессов найдено условие, при котором уравнение (3) получается из уравнения (1) путем дифференцирования во времени. Показано [4], что для гауссовских процессов этому условию удовлетворяет лишь одномерный марковский процесс. Для немарковских гауссовых процессов уравнение (3) является совершенно самостоятельным. В [5] найдены разложения условных плотностей вероятности для пирсоновских процессов по ортогональным полиномам.

В настоящей работе, во-первых, на основе [5] вычисляются кинетические коэффициенты (2), (4); во-вторых, основной результат работы [4] обобщается на немарковские непрерывные процессы с пирсоновскими распределениями. Аналитические выкладки ниже проводятся для стационарного случая, когда множество X, T является пустым. При этом кинетические уравнения (1), (3) упрощаются, а кинетические коэффициенты (2), (4) определяются соотношениями:

$$A_n(x, t) = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \tilde{\alpha}_n(\hat{t} | x, t) \Big|_{\hat{t}=t+0}, \quad (5)$$

$$B_n(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}^2} \tilde{\alpha}_n(\hat{t} | x, t) \Big|_{\hat{t}=t+0}. \quad (6)$$

2. Вычислим кинетические коэффициенты (5), (6), исходя из полученных в [5] разложений условных плотностей вероятности по полиномам $Q_n(x)$, удовлетворяющим условию ортогональности с весом $P(x)$:

$$\int_c^d Q_m(x) Q_n(x) P(x) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (7)$$

Функция $P(x)$ подчиняется дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{a(x)}{b(x)} P(x), \quad (8)$$

где

$$a(x) = a_0 + a_1 x, \quad b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2, \quad (9)$$

причем $b(x) > 0$ для $x \in (c, d)$, а на концах интервала (c, d) выполняются предельные соотношения

$$\lim_{x \rightarrow c+0} b(x) P(x) = \lim_{x \rightarrow d-0} b(x) P(x) = 0. \quad (10)$$

Функция $P(x)$ совпадает с одномерной плотностью вероятности процесса $x(t)$ [5].

Запишем разложение условной плотности вероятности [5] в согласованных с (5), (6) обозначениях:

$$w(y, \hat{t} | x, t) = P(y) \sum_{k=0}^{\infty} [R(\tau)]^{\gamma_k/\gamma_1} Q_k(y) Q_k(x), \quad (11)$$

где $\tau = \hat{t} - t > 0$; $R(\tau)$ — корреляционная функция процесса; коэффициенты γ_k входят в дифференциальное уравнение [5, 6]

$$\gamma_k P(y) Q_k(y) = [b(y) P(y) Q_k'(y)]', \quad (12)$$

причем

$$\gamma_k = k [a_1 + (k+1)b_2] \leq 0. \quad (13)$$

С учетом (9) условная n -я моментная функция приращения $y - x$ за время τ определится соотношением:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n(\hat{t} | x, t) &= \int_c^d (y-x)^n w(y, \hat{t} | x, t) dy = \\ &= \sum_{k=0}^n [R(\tau)]^{\gamma_k/\gamma_1} Q_k(x) \int_c^d (y-x)^n Q_k(y) P(y) dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь учтено, что многочлен степени n по y $(y-x)^n$ ортогонален $Q_k(y)$ при $k > n$. Обозначим

$$J_{kn} = J_{kn}(x) = \int_c^d (y-x)^n Q_k(y) P(y) dy. \quad (15)$$

С учетом (5), (6), (14), (15) имеем:

$$A_n(x, t) = A_n(x) = R'(0_+) \gamma_1^{-1} \sum_{k=0}^n \gamma_k Q_k(x) J_{kn}(x), \quad (16)$$

$$B_n(x, t) = B_n(x) = [R'(0_+)]^2 \gamma_1^{-2} \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 Q_k(x) J_{kn}(x) + \\ + [R''(0_+) - (R'(0_+))^2] \gamma_1^{-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k Q_k(x) J_{kn}(x). \quad (17)$$

Для вычисления коэффициентов (16), (17) рассмотрим интеграл общего вида

$$I = \int_c^d f(y) [\gamma_k P(y) Q_k(y)] dy. \quad (18)$$

Имея в виду (12), дважды проинтегрируем (18) по частям. С учетом граничных условий (8), опуская аргумент, получаем:

$$I = \int_c^d (f' b P + f' b' P + f' b P') Q_k(y) dy. \quad (19)$$

Но в силу (8) $b P' = a P$, так что (18), (19) преобразуются к виду

$$I = \gamma_k \int_c^d f(y) Q_k(y) P(y) dy = \\ = \int_c^d \left\{ f''(y) b(y) + f'(y) [a(y) + b'(y)] \right\} Q_k(y) P(y) dy. \quad (20)$$

Воспользуемся формулой Кристоффеля–Дарбу для ортонормированных полиномов [6, с. 19]:

$$\sum_{k=0}^n Q_k(y) Q_k(x) = \lambda_n \frac{Q_{n+1}(y) Q_n(x) - Q_{n+1}(x) Q_n(y)}{y-x} = \frac{\Delta_n(y, x)}{y-x}, \quad (21)$$

где $\lambda_n = \mu_n/\mu_{n+1}$, $\mu_n > 0$ — старший коэффициент в многочлене $Q_n(x)$, а μ_{n+1} — в $Q_{n+1}(x)$.

С учетом (20), (21) сумма, входящая в (16), запишется в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n Q_k(x) \gamma_k \int_c^d f(y) P(y) Q_k(y) dy = \\ = \int_c^d [f''b + f'(a+b')] \frac{\Delta_n(y, x)}{y-x} P(y) dy. \end{aligned} \quad (22)$$

В частности, полагая $f(y) = (y-x)^n$, получаем выражение для кинетических коэффициентов $A_n(x)$:

$$\begin{aligned} A_n(x) = R'(0_+) \gamma_1^{-1} \left\{ n(n-1) \int_c^d (y-x)^{n-3} b(y) \Delta_n(y, x) P(y) dy + \right. \\ \left. + n \int_c^d (y-x)^{n-2} [a(y) + b'(y)] \Delta_n(y, x) P(y) dy \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как, согласно (9), $b(y)$ — многочлен степени ≤ 2 , то при $n \geq 3$ соотношение $(y-x)^{n-3} b(y)$ есть многочлен степени не выше $n-1$, который заведомо ортогонален $Q_{n+1}(y)$ и $Q_n(y)$. Тем самым первое слагаемое в (23) обращается в нуль при $n \geq 3$. Так как $a(y)$, согласно (9), многочлен степени ≤ 1 , то при $n \geq 2$ соотношение $(y-x)^{n-2} [a(y) + b'(y)]$ есть многочлен степени не выше $n-1$, который заведомо ортогонален $Q_{n+1}(y)$ и $Q_n(y)$. Тогда второе слагаемое в (23) обращается в нуль при $n \geq 2$.

Следовательно,

$$A_n(x) = 0 \quad \text{для } n \geq 3. \quad (24)$$

Докажем теперь следующее утверждение: если $Q(y)$ есть многочлен степени не выше n , то

$$J = \int_c^d Q(y) \sum_{k=0}^n Q_k(y) Q_k(x) P(y) dy = Q(x). \quad (25)$$

Представим $Q(y)$ в виде $Q(y) = \sum_{j=0}^n c_j Q_j(y)$, тогда

$$\begin{aligned} J = \int_c^d \left[\sum_{j=0}^n c_j Q_j(y) \right] \left[\sum_{k=0}^n Q_k(y) Q_k(x) \right] P(y) dy = \sum_{j,k=0}^n c_j Q_k(x) \times \\ \times \int_c^d Q_j(y) Q_k(y) P(y) dy = \sum_{j,k=0}^n c_j Q_k(x) \delta_{jk} = \sum_{j=0}^n c_j Q_j(x) = Q(x). \end{aligned} \quad (26)$$

С учетом (21), (25), (26) из соотношения (23) получаем:

$$\begin{aligned}
 A_1(x) &= R'(0_+) \gamma_1^{-1} \int_c^d (y-x)^{-1} [a(y) + b'(y)] \Delta_1(y, x) P(y) dy = \\
 &= R'(0_+) \gamma_1^{-1} \int_c^d [a(y) + b'(y)] [Q_0(y) Q_0(x) + Q_1(y) Q_1(x)] P(y) dy = \\
 &= R'(0_+) \gamma_1^{-1} [a(x) + b'(x)]. \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2(x) &= 2R'(0_+) \gamma_1^{-1} \int_c^d (y-x)^{-1} b(y) \Delta_2(y, x) P(y) dy = \\
 &= 2R'(0_+) \gamma_1^{-1} \int_c^d b(y) \left[\sum_{k=0}^2 Q_k(y) Q_k(x) \right] P(y) dy = \frac{2R'(0_+) b(x)}{\gamma_1}. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Аналогичные, но более громоздкие выкладки на основе (17) приводят к следующим формулам, определяющим кинетические коэффициенты $B_n(x)$:

$$B_1(x) = R''(0_+) \gamma_1^{-1} [a(x) + b'(x)], \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 B_2(x) &= 2R''(0_+) \gamma_1^{-1} b(x) + \\
 &+ 2[R''(0_+)]^2 \gamma_1^{-2} [a'b + 2bb'' + a^2 + 3ab' + 2(b')^2], \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$B_3(x) = 12[R'(0_+)]^2 \gamma_1^{-2} b(x) [a(x) + 2b'(x)], \quad (31)$$

$$B_4(x) = 24[R'(0_+)]^2 \gamma_1^{-2} b^2(x), \quad (32)$$

$$B_n(x) = 0 \quad \text{для } n \geq 5. \quad (33)$$

Как видно из (27)–(32), коэффициенты $A_n(x)$, $B_n(x)$ целиком определяются заданной корреляционной функцией $R(\tau)$ и видом полиномов $a(x)$, $b(x)$, входящих в уравнение Пирсона (8).

3. В [5] разложение (11) условных плотностей осуществлено по полиномам Эрмита, Лагерра и Якоби. Поскольку каждому из этих трех видов полиномов соответствуют свои собственные виды многочленов $a(x)$, $b(x)$ (9), то конкретизация формул (27)–(32) для соответствующих пирсоновских распределений не составляет труда.

а) Полиномы Эрмита.

Выберем $a(x) = -\gamma x$, $b(x) = \gamma \sigma^2$. Это гауссовский случай. Тогда, согласно (13), $\gamma_n = -n\gamma$ и $\gamma_1 = -\gamma$. Следовательно,

$$A_1(x) = R'(0_+)x; \quad A_2(x) = -2\sigma^2 R'(0_+), \quad A_n(x) \equiv 0 \text{ для } n \geq 3. \quad (34)$$

В частном случае гауссовского марковского процесса

$$R(\tau) = \exp(-\gamma|\tau|) \quad (35)$$

имеем

$$A_1(x) = -\gamma x, \quad A_2(x) = 2\gamma\sigma^2, \quad (36)$$

что совпадает с классическими соотношениями.

Выражения для кинетических коэффициентов $B_n(x)$ принимают вид:

$$B_1(x) = R''(0_+)x; \quad B_2(x) = 2[R'(0_+)]^2(x^2 - \sigma^2) - 2\sigma^2 R''(0_+), \quad (37)$$

$$B_3(x) = -12\sigma^2[R'(0_+)]^2 x, \quad B_4(x) = 24\sigma^4[R'(0_+)]^2. \quad (38)$$

В частном случае (35) получаем:

$$\begin{aligned} B_1(x) &= \gamma^2 x, & B_2(x) &= 2\gamma^2 x^2 - 4\gamma^2 \sigma^2, & B_3(x) &= -12\gamma^2 \sigma^2 x, \\ B_4(x) &= 24\gamma^2 \sigma^4, & B_n(x) &\equiv 0 \text{ для } n \geq 5. \end{aligned} \quad (39)$$

Соотношения (39) совпадают с известными [3].

б) Полиномы Лагерра.

Выберем $a(x) = \lambda(\alpha - x/2\sigma^2)$, ($\alpha > -1$), $b(x) = \lambda x$, тогда $\gamma_k = -\lambda k/2\sigma^2$, $\gamma_1 = -\lambda/2\sigma^2$, и, согласно (27), (28), выписываем формулы для кинетических коэффициентов:

$$A_1(x) = R'(0_+) [x - 2\sigma^2(\alpha + 1)], \quad (40)$$

$$A_2(x) = -4\sigma^2 R'(0_+)x, \quad A_n(x) = 0 \text{ для } n \geq 3. \quad (41)$$

В частности, при $R(\tau) = \exp(\gamma_1|\tau|) = \exp(-2\gamma|\tau|)$ имеем:

$$A_1(x) = 2\gamma [2\sigma^2(\alpha + 1) - x], \quad A_2(x) = 8\gamma\sigma^2 x. \quad (42)$$

Аналогично можно получить соотношения для кинетических коэффициентов $B_n(x)$:

$$\begin{aligned} B_1(x) &= R''(0_+) [x - 2\sigma^2(\alpha + 1)], \\ B_2(x) &= -4\sigma^2 R''(0_+)x + 2[R'(0_+)]^2 [x^2 - 4\sigma^2(\alpha + 2)x + 4\sigma^4(\alpha^2 + 3\alpha + 2)], \\ B_3(x) &= 24\sigma^2 [R'(0_+)]^2 [2\sigma^2(\alpha + 2)x - x^2], \\ B_4(x) &= 96\sigma^4 [R'(0_+)]^2 x^2, \quad B_n(x) \equiv 0 \text{ для } n \geq 5. \end{aligned} \quad (43)$$

В частности [5], при $\alpha = 0$ и $R(\tau) = [\rho(\tau)]^2$ коэффициенты (42)–(43) относятся к кинетическим уравнениям, описывающим плотность вероятности квадрата рэлеевского процесса. Здесь $\rho(\tau)$ — медленно меняющийся множитель в выражении для нормированной корреляционной функции квази-гармонических колебаний.

в) Полиномы Якоби.

Выберем

$$\begin{aligned} a(x) &= \lambda[(\alpha c + \beta d) - (\alpha + \beta)x] = \lambda[\alpha(c - x) + \beta(d - x)], \\ b(x) &= \lambda[-x^2 + (c + d)x - cd] = \lambda(d - x)(x - c), \\ &(\alpha > -1, \beta > -1), \end{aligned} \quad (44)$$

тогда

$$\gamma_k = -\lambda_k(k + \alpha + \beta + 1), \quad \gamma_1 = -\lambda(\alpha + \beta + 2). \quad (45)$$

С учетом (44), (45) формулы (27)–(33) приобретают вид:

$$A_1(x) = R'(0_+) \left[x - \frac{c(\alpha + 1) + d(\beta + 1)}{\alpha + \beta + 2} \right], \quad (46)$$

$$A_2(x) = \frac{2R'(0_+)}{\alpha + \beta + 2} [x^2 - (c + d)x + cd], \quad (47)$$

$$B_1(x) = R''(0_+) \left[x - \frac{(\alpha + 1)c + (\beta + 1)d}{\alpha + \beta + 2} \right], \quad (48)$$

$$\begin{aligned} B_2(x) &= 2 \frac{R''(0_+)}{\alpha + \beta + 2} [x^2 - (c + d)x + cd] + \\ &+ \frac{2[R'(0_+)]^2}{(\alpha + \beta + 2)^2} \left\{ x^2 [(\alpha + \beta)^2 + 7(\alpha + \beta) + 14] - \right. \\ &- x [2(\alpha c + \beta d)(\alpha + \beta + 3) + 4(\alpha + \beta)(c + d) + 14(c + d)] + \\ &\left. + cd(\alpha + \beta + 6) + (\alpha c + \beta d)^2 + 3(\alpha c + \beta d)(c + d) + 2(c + d)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} B_3(x) &= \frac{12[R'(0_+)]^2}{(\alpha + \beta + 2)^2} [-x^2 + (c + d)x - cd] \times \\ &\times [(\alpha + 1)c + (\beta + 1)d - (\alpha + \beta + 2)x], \end{aligned} \quad (50)$$

$$B_4(x) = \frac{24[R'(0_+)]^2}{(\alpha + \beta + 2)^2} [x^2 - (c + d)x + cd]^2. \quad (51)$$

Как известно [7], для дифференцируемых, т. е. немарковских процессов $R'(0_+) = 0$. В связи с этим для подобных процессов коэффициенты $A_n(x)$ согласно (27), (28), (34), (40), (41), (46), (47) обращаются в нуль, и кинетическое уравнение (1) вырождается. Вместе с тем среди кинетических коэффициентов $B_n(x)$ (29)–(32), (37), (38), (43), (48)–(51) в нуль обращаются лишь высшие коэффициенты $B_3(x)$, $B_4(x)$, а коэффициенты $B_1(x)$, $B_2(x)$ остаются отличными от нуля, и уравнение (3) сохраняет свой смысл.

4. В заключение обсудим еще один вопрос, заключающийся в следующем: может ли кинетическое уравнение (3) быть получено из уравнения (1) простым дифференцированием по t ? Для гауссовских процессов эта проблема изучена в [4]. Там же приведены общие соотношения, связывающие кинетические коэффициенты $A_n(x)$ и $B_n(x)$ (см. соотношение (7) в [4]). Если воспользоваться выражениями (27)–(32) и подставить их в условия (7) из [4], то после преобразований можно прийти к выводу о том, что уравнение (3) для процессов с пирсоновскими распределениями получается дифференцированием по t соответствующего уравнения (1) тогда и только тогда, когда корреляционная функция $R(\tau)$ удовлетворяет соотношению

$$R''(0_+) = [R'(0_+)]^2. \quad (52)$$

Аналогичное условие, но только для гауссовых процессов получено в [4]. Условию (52) удовлетворяет корреляционная функция (35), относящаяся к одномерным марковским процессам. Следовательно, уравнение (3) для немарковских процессов с пирсоновскими распределениями является самостоятельным.

Допустим, что для некоторого процесса $x(t)$, функция $R(\tau)$ не удовлетворяет условию (52). Тогда, если процесс недифференцируемый ($R'(0_+) \neq 0$), то для него можно найти коэффициенты A_n и B_n . Следовательно, плотность вероятности такого процесса будет описываться как уравнением (1), так и уравнением (3). Так как порядок производной по времени в уравнении (1) ниже, чем в уравнении (3), то в этом случае естественно использовать первое из этих уравнений. Если процесс дифференцируемый ($R'(0_+) = 0$), то кинетические коэффициенты A_n и уравнение (1) вырождаются. Кинетические коэффициенты B_n не вырождаются, уравнение (3) сохраняет свой смысл, и именно его следует использовать для описания процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pawula R. F. //Trans. IEEE. 1967. V. IT-13, N 1. P. 33.
2. Казаков В. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 11. С. 1344.

3. Казаков В. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. N 11. С.1309.
4. Казаков В. А., Лавров А. М. //Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36. N 10. С. 942.
5. Казаков В. А., Лавров А. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37. N 12. С. 1559.
6. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1976. 328 с.
7. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982. 624 с.

Рязанская государственная
радиотехническая академия

Поступила в редакцию
9 февраля 1994 г.

KINETIC EQUATIONS FOR NON-MARKOV PROCESSES WITH PEARSON DISTRIBUTIONS

V. A. Kazakov, A. M. Lavrov

By using orthogonal expansions of conditional probability densities we have found the analytical expressions for the coefficients of kinetic equations describing non-Markov processes with Pearson distributions.

УДК 621.396.677.71

ЗЕРКАЛЬНЫЙ ЩЕЛЕВОЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ В КАЧЕСТВЕ ОБЛУЧАТЕЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО РЕФЛЕКТОРА

А. П. Вольвач, Г. И. Комарь, В. П. Шестопалов

Проведено теоретическое и экспериментальное исследование зеркального щелевого излучателя (ЗЩИ), построенного на основе зеркальной щелевой линии (ЗЩЛ), и параболического рефлектора, сопряженного с облучателем в виде ЗЩЛ-ЗЩИ-гибридного модуля.

Разработка физических принципов построения микроэлектронных модулей в коротковолновой части миллиметрового диапазона длин волн является актуальной задачей современной радиофизики [1]. В работах [1, 2] и др. развивается новое направление миллиметровой микроэлектроники, основанное на использовании в качестве базовой линии передачи зеркальной щелевой линии (ЗЩЛ). Для ЗЩЛ характерна миниатюрность и широкополосность, а также сравнительно небольшое затухание миллиметровых волн. Она характеризуется несколькими режимами работы, в частности, режимом медленных поверхностных волн (режим линии передачи) и режимом быстрых вытекающих волн. Последний позволяет на базе основного типа колебания ЗЩЛ построить адекватные по полосе частот, габаритам и потерям щелевые излучатели [1, 2]. Применения других типов излучателей [3] совместно с ЗЩЛ-модулями связаны со значительными габаритами и меньшей полосой частот всего устройства в целом и потребуют разработки специального устройства сопряжения.

Наиболее широкое распространение в миллиметровом диапазоне длин волн получили разновидности зеркальных и линзовых антенн (ЗА и ЛА) [3]. Работа [4] посвящена исследованию распределения поля в фокальной плоскости контррефлектора и выбору места расположения цилиндрического щелевого излучателя (ЦЩИ) [1, 2, 5] в фокальной области двойного эллиптического контррефлектора. Однако, случай [4] не исчерпывает возможные варианты компоновок щелевого излучателя и ЗА.

В данной работе обсуждаются сопряжение ЗЩИ с полем параболического рефлектора, оптимизация геометрии рефлектора с облучателем и результат экспериментального исследования рассматриваемой ЗА.

1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗЕРКАЛЬНОГО ЩЕЛЕВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Схема лабораторного макета ЗЩИ приведена на рис. 1. На рис. 1а показана форма поперечного сечения ЗЩИ; на рис. 1б представлена ЗЩИ длиной $L_{об}$, согласованная нагрузка N в виде слюдяной пластинки, покрытой слоем никрома (собственный КСВ $\sim 1,03$), смонтированные на проводящей подложке шириной $2L_3$. Возбуждается ЗЩИ в данном случае от волноводно-щелевого перехода (ВЩП) [7] (на рис. 1 не показан). Основной тип колебания ЗЩИ — цилиндрическая щелевая волна [1, 2]; соответствующее ей распределение электрического E -поля показано на рис. 1в (где λ_g — длина волны в ЗЩИ).

При величине диэлектрической проницаемости диэлектрического заполнения ЗЩИ $\epsilon = 1$ распространяющаяся вдоль ЗЩИ щелевая волна будет всегда быстрой [8, 9], т. е. фазовая скорость $v_\phi > c$ (c — скорость света в вакууме), $v_\phi(\epsilon = 1) = ck/h'_z$ ($k = 2\pi/\lambda_0$, λ_0 — рабочая длина волны, h'_z — реальная часть постоянной распространения щелевой волны [1, 2]). Поле излучения имеет три компоненты электромагнитного поля E_z , H_y и H_x [5, 8], а максимум диаграммы направленности (ДН) излучения ориентирован под углом $\gamma_1 = \alpha_0$ к продольной оси OX_1 [8], $\cos \alpha_0 = c/v_\phi = h'_z/k$ ($h'_z = k \sqrt{1 - \lambda_0^2/(32\eta\pi ab)}$, где $\eta = \frac{\pi d_0}{2d_1} + \ln(4\sqrt{ab}/(\sqrt{\pi}d_1))$, $\lambda_g = 2\pi/h'_z$). Форма ДН поля излучения в продольной плоскости ЗЩИ описана в [5, 6, 8]. Коэффициент полезного действия (K_{Π}) щелевого излучателя обсуждался в [4, 5]. В [5] показано, что величина дифракционных потерь h''_g в щелевом излучателе достаточно велика, и при конечных длинах излучателя $L_{об}$ излучается практически вся мощность генератора (90% и более). Влияние тепловых потерь в металле h''_g на величину K_{Π} не учитывалось. Учет h''_g приводит к следующему выражению для K_{Π} :

$$K_{\Pi} = \exp\{-2h''_g L_{об}\} - \exp\{-2h''_g L_{об}\}, \quad (1)$$

выражение для h''_g приведено в [10, 11].

Анализ выражения (1) показывает, что потери в металле h''_g , как правило, на 1–3 порядка меньше дифракционных потерь h''_g : так h''_g обычно составляет (0,1 ÷ 10) дБ/м в зависимости от λ_0 и геометрических параметров ЗЩИ, а h''_g могут достигать сотен и даже тысяч дБ/м.

Рассмотрим ЗЩИ, у которого критическая длина волны $\lambda_{кр} = 17,7$ мм [2], переходная длина волны $\lambda_{пер}$ в рассматриваемом случае равна нулю, т. е. $\epsilon = 1$. Ширину одномодового диапазона будет определять ограничительная длина волны $\lambda_{огр} = 3,6$ мм ($2a = 1,81$ мм, $b = 1,8$ мм, $2d_2 = 0,5$ мм, $d_1 = 0,71$ мм). Тогда на одной из выбранных $\lambda_0 = 6,5$ мм для рассматриваемого ЗЩИ $h''_g \approx 9$ дБ/м, $h''_g \approx 1892$ дБ/м, поэтому величина K_{Π} ЗЩИ для $L_{об} = 70$ мм составляет порядка 82%; для $\lambda_0 = 4$ мм соответственно $h''_g \approx 10$ дБ/м; $h''_g \approx 1039$ дБ/м и $K_{\Pi} \approx 66\%$.

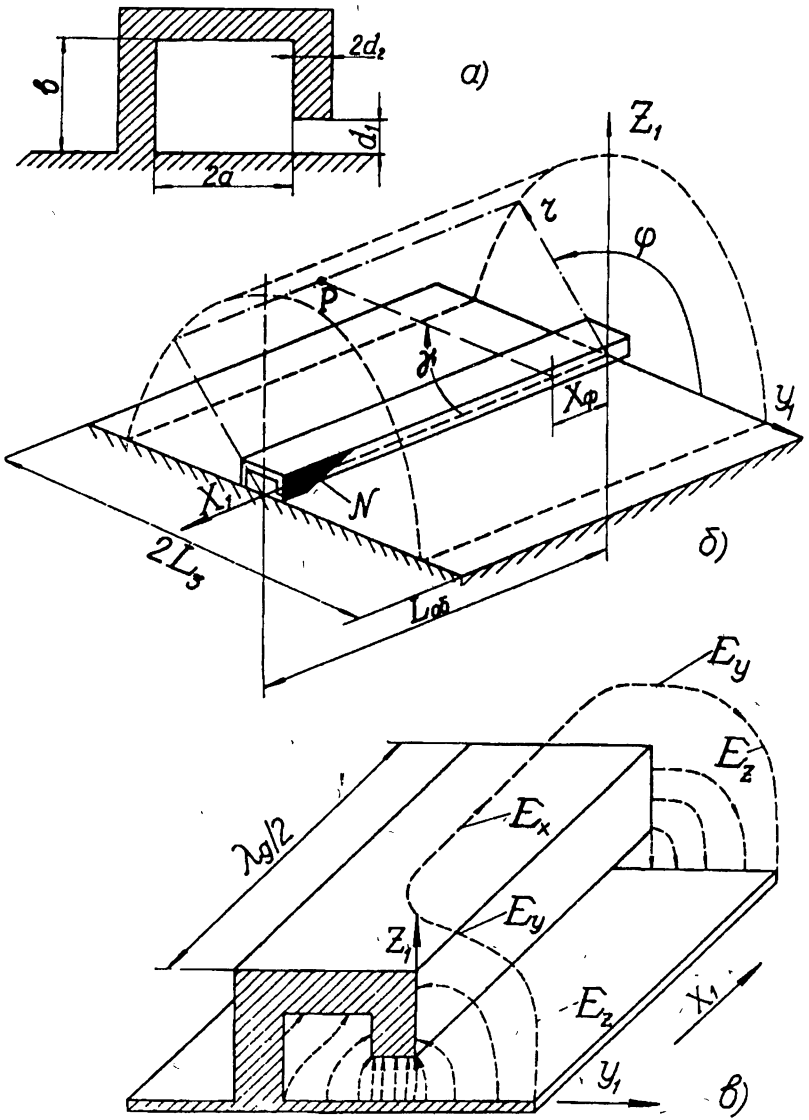


Рис. 1

С учетом результатов [2, 12] объемную ДН ЗЩИ можно представить в следующем виде:

$$E_\varphi \approx \exp\{-ikr\} r^{-1} S(\gamma_1 k L_{об}) M(kb, \varphi) T(kL_3, \varphi), \quad (2)$$

где r — полярный радиус точки наблюдения (рис. 1). $S(\gamma_1, kL_{об})$ — ДН излучения в продольной плоскости из [2]; для $2a = b$

$$M(kb, \varphi) = \frac{1}{\pi kb \sin \gamma_1} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \exp\left\{\frac{im\pi}{2}\right\} \cos\left[m\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]}{H_m^{(2)'}(kb \sin \gamma_1)} \right|;$$

$$T(kL_3, \varphi) \approx F \left[\sqrt{\varkappa} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] + F \left[\sqrt{\varkappa} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]^{-1}$$

$$\text{при } \varphi \leq \pm \frac{\pi}{2};$$

$$T(kL_3, \varphi) \approx F \left[\sqrt{\varkappa} \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] - F \left[\sqrt{\varkappa} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\text{при } \varphi \geq \pm \frac{\pi}{2};$$

$\varepsilon_0 = 1$; для $m \neq 0$, $\varepsilon_m = 2$; $\varkappa = 2kL_3 \sin \gamma_1$; $H_m^{(2)'}$ — первая производная от функции Ханкеля [13], $F(z)$ — интеграл Френеля [13].

2. СОПРЯЖЕНИЕ ЗЩИ С ПОЛЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО РЕФЛЕКТОРА

Эффективное сопряжение облучателя с полем рефлектора требует, чтобы облучатель перехватывал все лучи, переизлучаемые рефлектором [14]. Поперечный ЗЩИ мал по сравнению с длиной волны ($ka, kb < 1$), и его можно исключить из данного рассмотрения. ЗЩИ свойственно черенковское излучение с боковой поверхности щелевого цилиндра в диапазоне углов $\gamma_1 = \alpha_0 \pm \Delta\alpha_{0,5}/2$ [5]; фазовый центр ДН отстоит от начала излучателя на величину X_Φ [5] (рис. 1). Обсуждая свойства фокусирующего рефлектора уместно вспомнить, что в прифокальной области зеркала лучи сфокусированного пучка образуют каустическую поверхность и пересекают фокальную ось системы не в одной точке фокуса, а в пределах некоторого отрезка $2X_{f\Sigma}$ (рис. 2а), характеризуемого длиной фокального

пятна [4]: $X_{f\Sigma} = \frac{C_0}{\cos \psi}$, где $C_0 = (\lambda_0 \sin \psi) \left[2\pi \sin^2 \frac{\psi}{2} \right]^{-1}$.

Исходя из сказанного, длину ЗЩИ $L_{об}$ следует выбрать больше длины фокального пятна $2X_{f\Sigma}$, а ширина диаграммы направленности $\Delta\alpha_\Delta$ (по

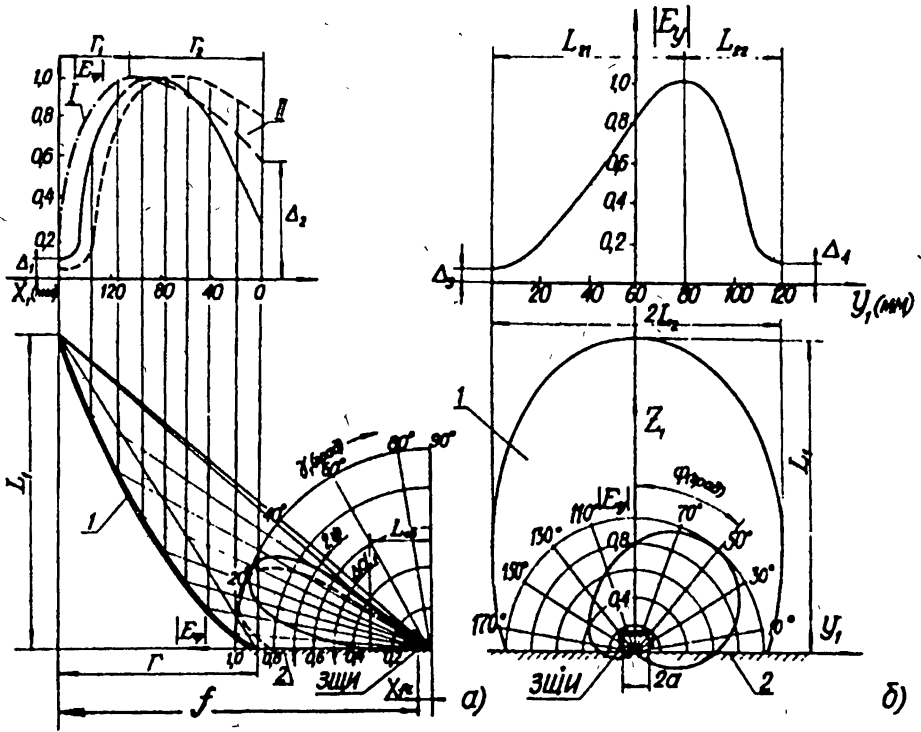


Рис. 2

уровню Δ от максимального значения) должна совпадать с сектором углов 2ψ (рис. 2а) (цифрами на рис. 2 обозначены: 1 — параболический рефлектор, 2 — проводящая подложка, 3 — ЗЩИ). Задача состоит в том, чтобы по заданным ψ , K_{Π} интенсивности поля на краю рефлектора Δ_1 , Δ_2 и уровню боковых лепестков определить $L_{об}$, d_1 и $2a = b$. Эта проблема сводится к решению следующего трансцендентного уравнения [15, 16]

$$\varepsilon_1 \operatorname{ctg} 2\psi + \varepsilon_f - \varepsilon_1 C = \frac{\pi A_{\Delta j} Y_{\Pi}}{\alpha_0 2 \sin \alpha_0}, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_1 = kL_1; \quad \varepsilon_f = kX_{f\Pi}; \quad \alpha_0 = 0,5 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} 2\psi + \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_1} \right),$$

$$\varepsilon_f = \left[\sin^2 \frac{\psi}{2} \operatorname{ctg} \psi \right]^{-1}; \quad C = \frac{\Gamma}{L_1}; \quad Y_{\Pi} = \frac{\ln(1 - K_{\Pi})}{3\Pi};$$

$$\Pi = \operatorname{th} \left[-\frac{1}{3} \ln(1 - K_{\Pi}) \right].$$

Пример решения уравнения (3) приведен на рис. 3 сплошными линиями (зависимость ε_1 от 2ψ) для C от 0,3 до 3 и $d_2 = 0,1d_1$, $K_{\Pi} = 0,98$

и $\Delta_1 = 0,1$. На этом же рисунке показаны соответствующие (3) зависимости угла излучения ЗЩИ $2\alpha_0$ (в градусах), длина ЗЩИ $kL_{об}$ и длины фокального пятна рефлектора α_f от 2ψ .

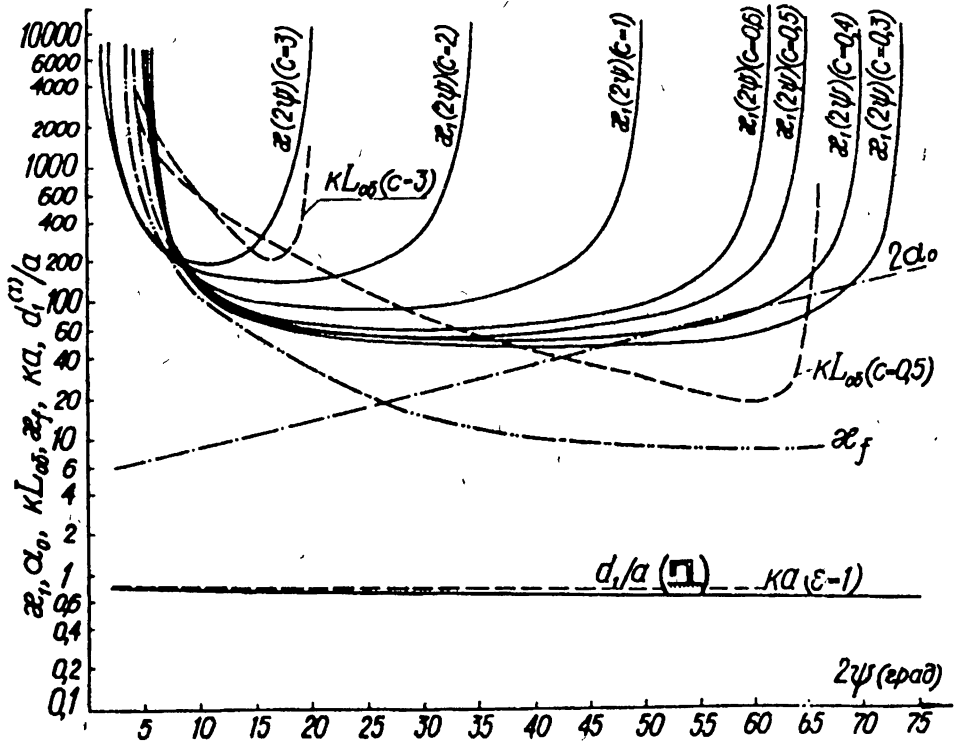


Рис. 3

Как видно, зависимость α_1 от ψ имеет “корытообразную” форму, причем наименьшие значения α_1 обеспечиваются при $20^\circ \leq 2\psi \leq 50^\circ$; более предпочтительным представляется диапазон углов $40^\circ \leq 2\psi \leq 50^\circ$, т. к. $\alpha_1 \sim 60$ обеспечивается меньшими значениями $kL_{об}$. Выбирая ψ из (3), легко найти геометрические параметры соответствующего ЗЩИ [4]

$$kL_{об} = \pi A_{\Delta j} Y_{\pi} / (\psi 2 \sin \psi), \quad (4)$$

$$\frac{d_1}{\sqrt{ab}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \left(S_H + \frac{d_2}{d_1} \right) \right\}, \quad (5)$$

$$k \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{\pi^2}{16 S_H [1 - \cos^2 \psi]}}, \quad (6)$$

где $S_H = A_{\Delta j} \pi \operatorname{tg} \psi / (48 \Pi(\psi))$, $A_{\Delta j}$ — коэффициент, определяющийся только величиной Δj , его значения выписаны в [4]. Зависимости d_1/a и ka (для $b = 2a$) от ψ также приведены на рис. 3 (для $C = 0,5$).

В случае однощелевого ЗЩИ высокий K_{Π} обеспечивается при достаточно широких щелях $d_1/a > 0,6$, что не всегда желательно, т.к. нарушаются условия распространения щелевой волны. Уменьшить d_1 можно различными путями; например, применяя двухщелевой ЗЩИ. Как следует из [10], значения S_H для двухщелевого ЗЩИ можно вычислить следующим образом

$$S_H^{(\text{II})} = 2S_H. \quad (7)$$

Тогда соответствующие значения $d_1^{(\text{II})} / \sqrt{d^{(\text{II})} b^{(\text{II})}}$ можно определять из (6) с учетом (7), а

$$k\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8S_H^{(\text{II})}(1 - \cos^2 \psi)}}. \quad (8)$$

Сопоставляя (6) и (8), делаем вывод, что $k\sqrt{a^{(\text{II})} b^{(\text{II})}} = k\sqrt{ab}$.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗА С ЗЩИ-ОБЛУЧАТЕЛЕМ

Проведено экспериментальное исследование объемных ДН ЗЩИ-облучателя и ЗА с ЗЩИ-облучателем, геометрия которых приведена на рис. 1 и рис. 2. Фотографии внешнего вида ЗЩИ и выбранного варианта ЗА с ЗЩИ-облучателем представлены на рис. 4а и рис. 4б соответственно, где 1 — параболический рефлектор, 2 — металлическая подложка, 3 — ЗЩИ, 4 — волноводно-щелевой переход, 5 — отрезок стандартного волновода.

Пример ДН ЗЩИ приведен на рис. 5 (зависимости $|E_{\varphi}|$ от φ и γ_1). На рис. 5а показаны зависимости $|E_{\varphi}|$ от γ_1 , полученные при различных значениях φ , а также теоретическая кривая (показана пунктиром), рассчитанные согласно [5] ($2a = 1,81$ мм, $b = 1,8$ мм, $2d_2 = 0,5$ мм, $d_1 = 0,71$ мм). Из рис. 5а следует, что ЗЩИ излучает в полупространство, расположенное над проводящей подложкой, причем ширина главного лепестка $\Delta\alpha_{0,5}$ ДН ЗЩИ в продольной плоскости при выбранной $L_{0,6}$ сравнительно невелика ($\Delta\alpha_{0,5} \sim 20^\circ$).

На рис. 5б показана ДН ЗЩИ в поперечной плоскости Z_1OY_1 (зависимость E_{φ} от φ при $\gamma_1 = 22^\circ$). В этих ДН проявляется экранирующее действие и подложки щелевого цилиндра. ДН на рис. 5б сравнительно удовлетворительно описываются множителем $M(kb, \varphi)T(kL_3, \varphi)$ из выражения (2).

Итоговые объемные ДН ЗЩИ, построенные на основе экспериментальных и теоретических данных, приведены на рис. 3в и рис. 3г соответственно. Сопоставление рис. 5 с [5, 6] позволяет сделать вывод о том, что ДН ЗЩИ представляет собой приблизительно половину черенковского конуса излучения цилиндрического щелевого излучателя (ЦЩИ); причем

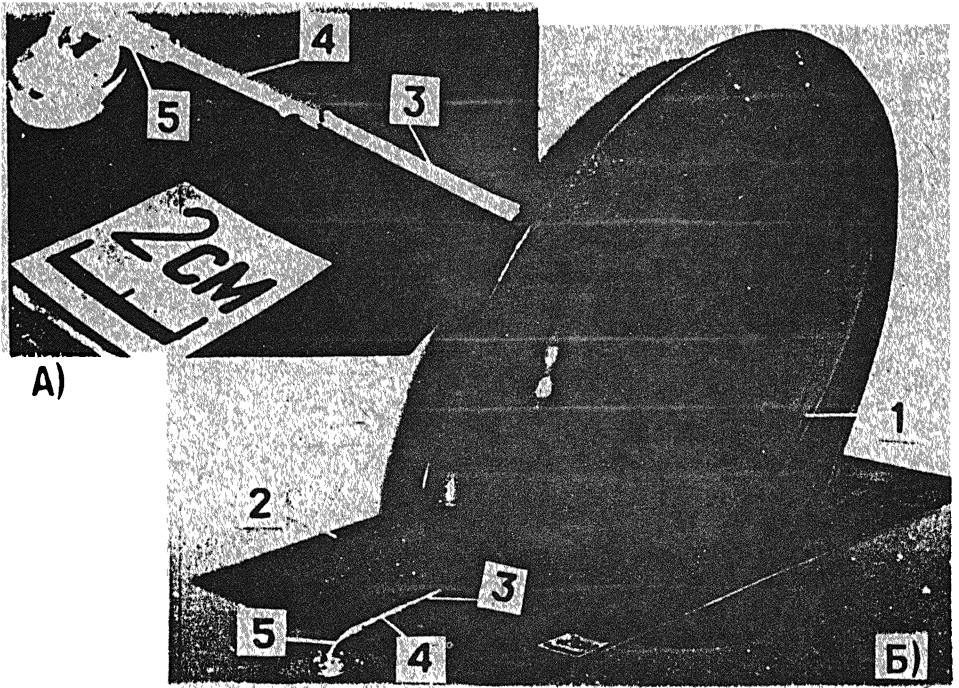


Рис. 4

она ориентирована в полупространство, расположенное над подложкой. Угол наклона полуконуса над продольной осью ЗЩИ (OX_1), как и в случае ПЩИ, определяется фазовой скоростью щелевой волны v_ϕ , ширина ДН в продольной плоскости

$$\Delta\alpha_{0,5} = 5,6 / (kL_{\text{оф}} \sin \alpha_0) \quad [\text{рад.}] \quad (9)$$

(где $L_{\text{оф}} = 3 \text{th}(h_g''L/3)/h_g''$ — эффективная длина ЗЩИ); в поперечной плоскости ДН ЗЩИ определяется экранирующим действием щелевого цилиндра и подложки и имеет “полуизотропный” характер. Ширину главного лепестка в поперечной плоскости можно оценивать по формуле

$$\Delta\varphi_{0,5} \simeq 51 \frac{\lambda_0}{2a + 2d_2} \quad [\text{град.}] \quad (10)$$

Величина $\Delta\varphi_{0,5}$ составляет $\sim 100^\circ$ и может достигать $140^\circ \div 150^\circ$.

Условия формирования ДН в случае черенковского механизма таковы, что главный лепесток, как правило, имеет несимметричную форму [17]; когда $\alpha_0 < 45^\circ$ интенсивность поля главного лепестка спадает от максимального значения быстрее в сторону возрастания γ_1 , чем в сторону убывания γ_1 ; когда $\alpha_0 > 45^\circ$, то наоборот. Только при $\alpha_0 \sim 45^\circ$ главный

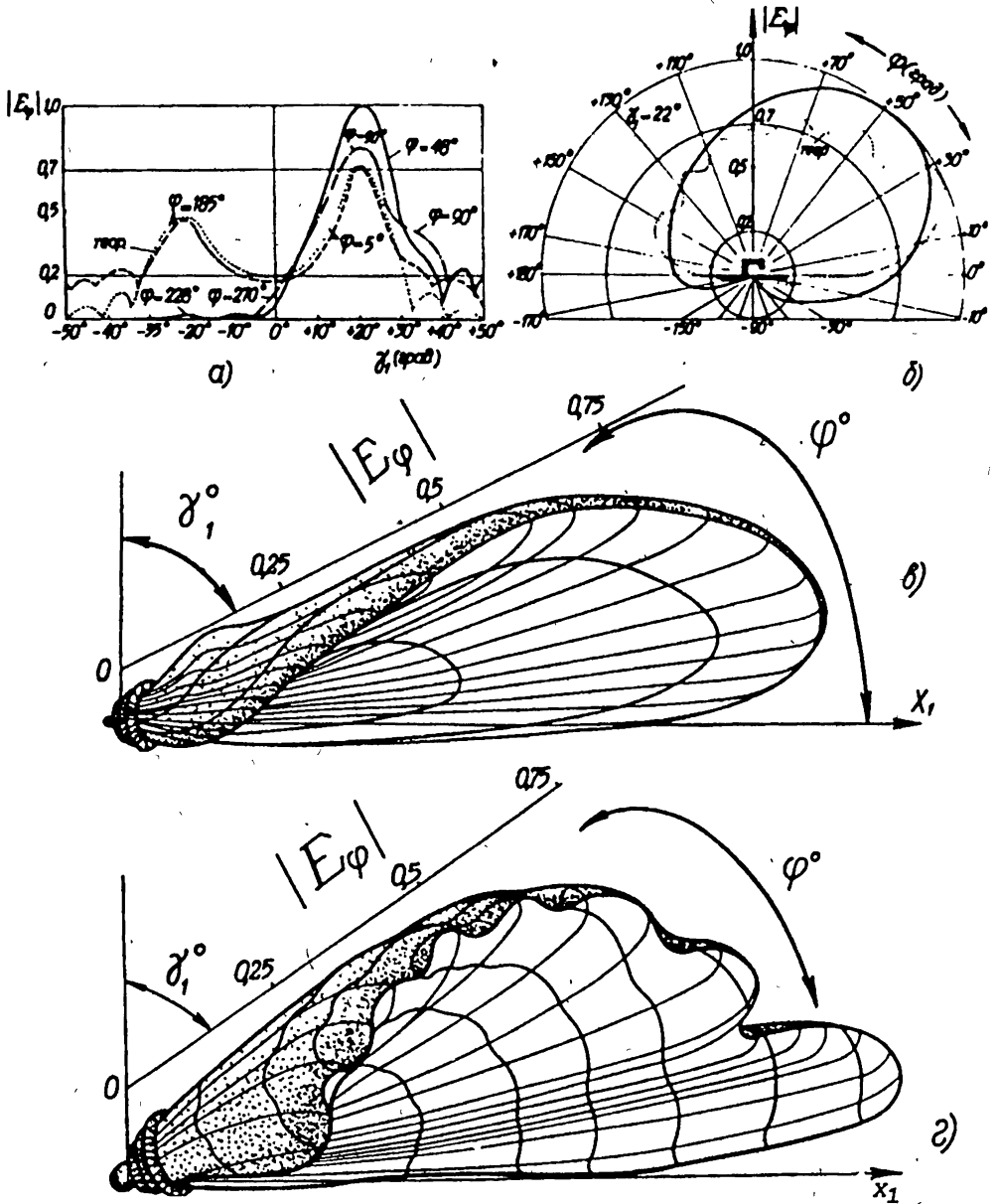


Рис. 5

лепесток ДН ЗЩИ достаточно симметричен. Несимметрия ДН облучателя приводит к несимметричному распределению поля в раскрыве ЗА (см. сплошную ($\lambda_0 = 6,5$ мм) и штриховую ($\lambda_0 = 4,84$ мм) линии рис. 2а). Функции распределения на рис. 2а удобно аппроксимировать двумя параболическими кривыми (кривая I и кривая II):

$$E_{y\text{I}} = 1 - (1 - \Delta_2) \left(\frac{\Gamma_1 - X_1}{\Gamma_1} \right)^2, \quad (11)$$

— кривая I для $0 < X_1 < \Gamma_2$;

$$E_{y\text{II}} = 1 - (1 - \Delta_1) \left(\frac{\Gamma_2 - X_1}{\Gamma_2} \right)^2, \quad (12)$$

— кривая II для $\Gamma_2 < X_1 < \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$, причем $\Delta_1 = S(0, kL_{06})$ (см. (2)), $\Delta_2 = S\left(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha_\Delta}{2}, kL_{06}\right)$. Исходя из (11), (12) и с учетом [18], можно вычислить ДН излучения рассматриваемой ЗА (здесь $\Delta\alpha_\Delta$ — ширина ЗЩИ по уровню Δ [4]) в плоскости Z_1OY_1 . Таковая формула приведена в [19].

Из [19] следует, что ДН такой ЗА получается достаточно симметричной относительно максимума ДН, ориентированного под углом $\gamma_1 = 90^\circ$. Ширина главного лепестка $\Delta\alpha_{0,5} = \Delta\alpha_{\text{I}} + \Delta\alpha_{\text{II}}$, причем $\Delta\alpha_{\text{I}} = \Delta\alpha_{\text{II}} = 26 \frac{\lambda_0}{A_{1,2}}$ [град.], где

$$A_{1,2} = \Gamma_{1,2} \sqrt{1 - 0,33(1 - \Delta_{1,2})}. \quad (13)$$

Уровень первого бокового лепестка в децибелах можно оценить по формуле

$$|E_1/E_m|^2 \approx (20,6 - 7,4 \Delta j) - \sin(2\pi \Delta j) \text{ [дБ]}. \quad (14)$$

В (14) в качестве Δj необходимо выбирать наибольшее из Δ . В плоскости Z_1OY_1 форма ДН также описывается соотношением из [19] с заменой γ_1 на φ , $\Delta_{1,2}$ на $\Delta_{3,4}$, $\Gamma_{1,2}$ на L_{12} и L_{22} (см. рис. 2б, построенный для $\lambda_0 = 6,5$ мм).

Коэффициент усиления G_A рассматриваемой ЗА согласно [18] определяется формулой

$$G_A = N_d K_\Pi = \frac{4\pi}{\lambda_0^2} S_A K_\Pi, \quad (15)$$

где N_d — коэффициент направленного действия ЗА,

$$S_A \approx 3(A_1 + A_2)(A_3 + A_4), \quad A_{3,4} = L_{12,22} \sqrt{1 - 0,33(1 - \Delta_{3,4})},$$

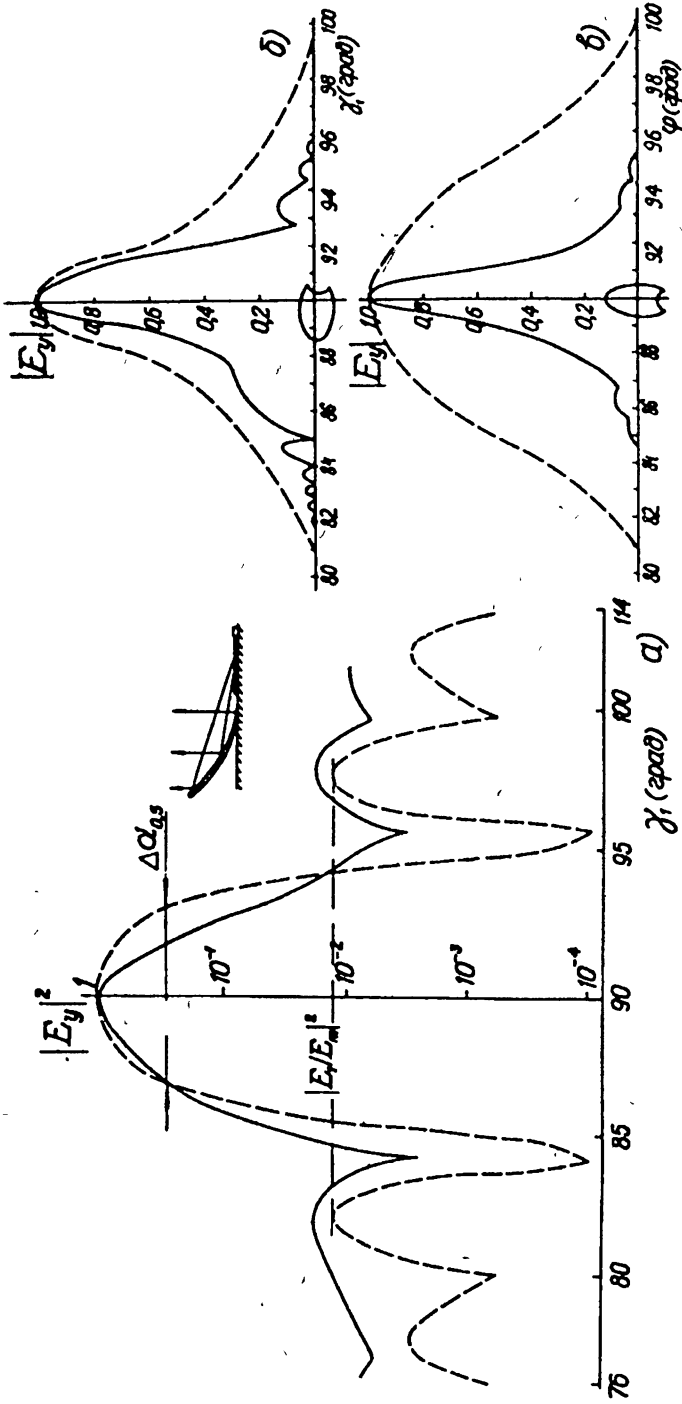
$L_{12} + L_{22}$ — поперечный габарит раскрыва ЗА в плоскости Y_1OZ_1 (см. рис. 2б).

Проведено экспериментальное исследование описанной ЗА с ЗЩИ облучателем в мм диапазоне длин волн. Лабораторный макет состоял из ЗЩИ и параболического отражателя, смонтированных на единой проводящей подложке (см. фотографию на рис. 46). Отражатель выполнен из пластмассы с напыленным в вакууме слоем алюминия. При этом рассматривались $\Delta_1 = 0,6$; $\Delta_2 = 0,1$; $\Gamma_1 = 48$ мм; $\Gamma_2 = 32$ мм; $2L_2 \approx 100$ мм; $L_{об} = 30$ мм, $f = 140$ мм; $\lambda_0 = 5,9$ мм. Такая ЗА обеспечивает $\Delta\alpha_{0,5} \approx 4,5^\circ$ (теоретическое значение $\sim 5,0^\circ$) и уровень боковых лепестков $|E_1/E_m|^2 \approx -14$ дБ (теоретический уровень $\sim -16,7$ дБ). Сравнительно высокий уровень экспериментального значения первых боковых лепестков ЗА связан, очевидно, со значительной погрешностью изготовления пластмассовой основы зеркала. Коэффициент усиления ЗА с выбранными габаритами и полученным $K_{П}$ ЗЩИ составляет $G \sim 25$ дБ. На рис. 6а проведено сопоставление формы теоретической (пунктирная линия) и экспериментальной (сплошная линия) ДН ЗА $E_y(\gamma_1)$.

На рис. 6б, в представлены ДН $E_y(\gamma_1)$ и $E_y(\varphi)$, полученные в результате экспериментального исследования ЗА с аналогичными облучателями в плоскостях $Z_1O X_1$ и $Z_1O Y_1$ соответственно для $\lambda_0 = 4,3$ мм (штриховая линия) и $\lambda_0 = 2$ мм (сплошная линия).

Проведено теоретическое и экспериментальное исследование ЗА с ЗЩИ облучателем. Получены аналитические соотношения, позволяющие рассчитывать все геометрические параметры ЗА и сопряженного с ней ЗЩИ. Проведенное экспериментальное исследование показало применимость полученных соотношений для инженерных расчетов параметров ЗА (см. также [19]). Результаты данной работы представляют интерес в связи с разработкой элементарной базы на основе зеркальной щелевой линии (ЗЩЛ) [1, 2] и позволяют сопрягать гибридные модули мм диапазона с зеркалами и линзами апертурных антенн. Так как для согласования ЗЩИ с полем зеркала необходимо сопрягать продольные размеры ЗЩИ и фокального пятна, а поперечные габариты ЗЩИ малы, появляется дополнительная возможность для размещения в поперечной плоскости фокального пятна матрицы развязанных между собой ЗЩИ.

Экспериментальное исследование развязки между двумя соседними ЗЩИ в четырехмиллиметровом диапазоне показало, что величина развязки может превышать 100 дБ (см. также [16, 20]). Применение в качестве облучателя ЗА матрицы ЗЩИ позволяет существенно расширить возможности ЗА, изменить архитектуру радиоэлектронного устройства на основе ЗЩЛ-ЗЩИ и за счет этого упростить фидерную часть устройства. В частности, в зависимости от конкретной конструкции матрицы ЗЩИ, в ЗА можно осуществлять: а) развязку режимов приема и передачи; б) параллельный прием под разными углами и на разных поляризациях и др.



ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопапов В. П. Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники. — Киев: Наук. думка, 1985. Т. 1. 214 с.; Т. 2. 255 с.
2. Комарь Г. И., Шестопапов В. П. //Радиотехника и электроника, 1987. Т. 32. № 7. С. 1345.
3. Воскресенский Д. И., Максимов и др. //Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1985. Т. 28. № 2. С. 4.
4. Комарь Г. И., Сулима А. В., Шестопапов В. П. //Препринт АН УССР. № 361. — Харьков, 1988.
5. Комарь Г. И., Шестопапов В. П. //Препринт ИРЭ АН УССР. — Харьков, 1987.
6. Комарь Г. И., Куприн А. А., Шестопапов В. П. // Изв. вузов. Радиофизика, 1987. Т. 30. № 3. С. 328.
7. Комарь Г. И., Нефедов Ю. И. //Изв. вузов. Радиофизика, 1985. Т. 28. № 7. С. 936.
8. Комарь Г. И., Шестопапов В. П. //Радиотехника и электроника, 1985. Т. 31. № 7. С. 1312.
9. Комарь Г. И. //ДАН УССР. Сер. А, 1985. № 4. С. 51.
10. Комарь Г. И., Шестопапов В. П. //Препринт ИРЭ АН УССР. № 229. — Харьков, 1983.
11. Комарь Г. И. Диссертация. — Харьков, 1984.
12. Уэйт Д. Р. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем / Пер. с англ. под ред. Г. В. Кисунько. — М.: Сов. радио, 1963. 251 с.
13. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции / Пер. с нем. под ред. Л. И. Седова. — М.: Наука, 1977. 342 с.
14. Бахрах Л. Д., Галимов Г. К. Зеркальные сканирующие антенны: теория и методы расчета. — М.: Наука, 1981. 304 с.
15. Вольвач А. П., Комарь Г. И., Шестопапов В. П. //В кн.: Тезисы докл. Всесоюзной науч.-техн. конф. — Тбилиси: Тбил. ВНИИЭП, 1988. С. 205.
16. Вольвач А. П., Комарь Г. И. //В кн.: Тезисы докл. I Всесоюзной науч.-техн. конф. — М.: МАИ, 1988. С. 157.
17. Комарь Г. И. Физика и техника миллиметровых и субмиллиметровых волн. — Киев: Наук. думка, 1983. С. 138.
18. Кочержевский Г. Н., Ерохин Г. А., Козырев Н. Д. Антенно-фидерные устройства. — М.: Радио и связь, 1989. 351 с.
19. Вольвач А. П., Комарь Г. И., Шестопапов В. П. //В кн.: Элементная база, приборы и техника миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. — Харьков: ИРЭ АН УССР, 1990. С. 46.

20. Комарь Г. И., Поединчук А. Е. // В кн.: Тезисы докл. I Всесоюзной науч.-техн. конф. — М.: МАИ, 1988. С. 129.

Институт радиофизики и
электроники Академии наук
Украины

Поступила в редакцию
12 января 1994 г.

IMAGE SLOT RADIATOR AS AN EXCITER OF A PARABOLIC REFLECTOR

A. P. Vol'vach, G. I. Komar', V. P. Shestopalov

Theoretical and experimental investigations of a reflector antenna (RA) with an image slot radiator (ISR) as an exciter developed on the basis of an image slot line (ISL) have been carried out. Analytical expressions have been obtained for an engineering calculation of geometric parameters of the RA and the exciter. Advanced variants of practical using of RA conjugated with ISL-ISR-hybrid modules are discussed.

УДК 518.344

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА НА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДИАФРАГМАХ

А. А. Вертий, И. В. Иваниценко, Н. А. Попенко, И. Я. Гудым

В работе представлен автоматизированный радиофизический комплекс миллиметрового диапазона длин волн. Проведены измерения пространственных амплитудных и фазовых распределений электромагнитного поля на двух ортогональных компонентах при дифракции электромагнитных волн, падающих на препятствие под углами, близкими к углам скольжения. Исследовалась дифракция волн на отверстиях и кольцевой щели в металлическом экране. Приведены диаграммы направленности и коэффициент пропускания в зависимости от относительного диаметра отверстия и кольцевой щели. Показано наличие экстремума в зависимости угла максимального излучения от ширины кольцевой щели.

ВВЕДЕНИЕ

Существующие в настоящее время математические методы решения задач достаточно полно описывают рассеянное электромагнитное поле при дифракции плоской волны на препятствиях простой геометрической формы. В этой связи можно отметить работы Уфимцева [1], где введена концепция краевых волн, формирующихся на границах объекта, а также цикл задач дифракции, в которых учтен поверхностный импеданс [2, 3]. Экспериментальная методика изучения амплитудных распределений дифракционных полей для различных препятствий описана в [4]. В данной работе представлен радиофизический комплекс миллиметрового диапазона длин волн, с помощью которого проведены измерения пространственных амплитудно-фазовых и поляризационных распределений рассеянных полей при дифракции электромагнитных волн, падающих на препятствие под углами, близкими к углам скольжения. Объектами исследования являлись отверстие и кольцевая щель в металлическом экране.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Блок-схема автоматизированного радиофизического комплекса представлена на рис. 1. Электромагнитная волна из генератора СВЧ по-

ступает на вход элемента возбуждения. В проведенных экспериментах элемент возбуждения представляет собой открытый конец волновода,

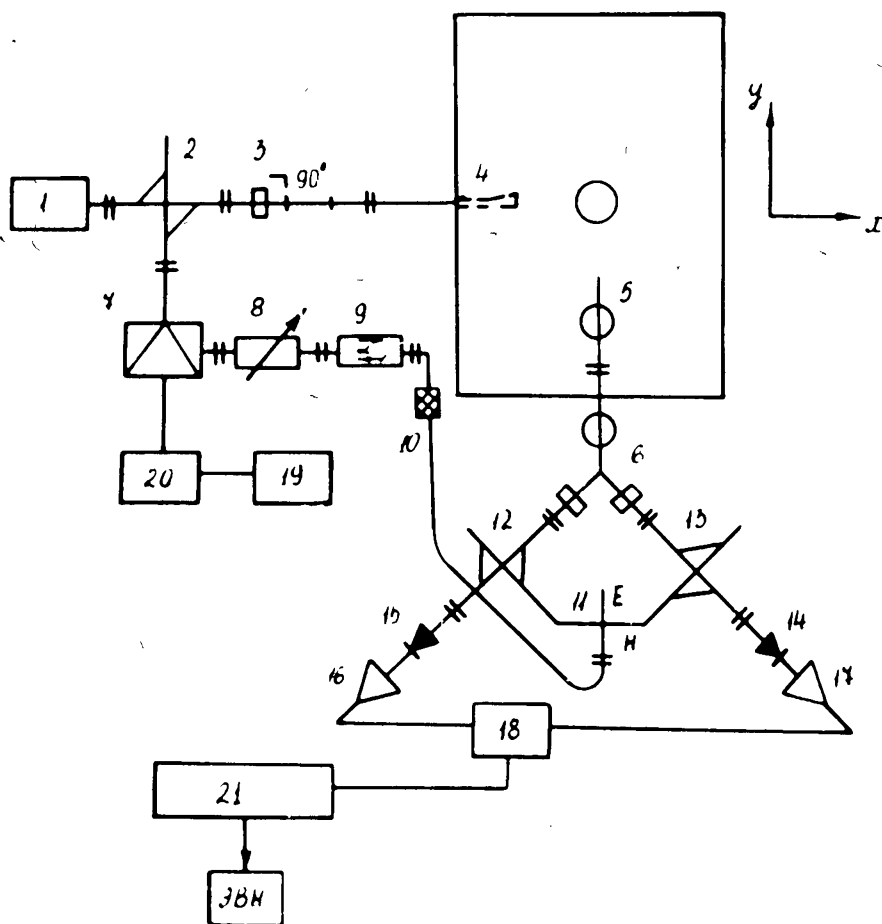


Рис. 1. Блок-схема квазиоптического комплекса миллиметрового диапазона: 1 — СВЧ генератора; 2 — направленный ответвитель; 3 — изгиб волновода на 90° ; 4 — элемент возбуждения; 5 — открытый конец круглого волновода; 6 — разделитель поляризации; 7 — фазовый модулятор; 8 — развязывающий аттенуатор; 9 — ферритовый вентиль; 10 — диэлектрический волновод; 11 — двойной тройник; 14, 15 — детекторные головки; 16, 17 — НЧ резонансные усилители; 18 — низкочастотный фазометр; 19 — звуковой генератор ГЗ-37; 20 — усилитель мощности; 21 — устройство сопряжения с вычислительной машиной.

согласованный со свободным пространством и расположенный на металлическом экране. Поле, излучающееся из его раскрыва, можно предста-

вить в виде суперпозиции плоских волн [5]:

$$A_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y) P \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) \exp \left[-2j\pi \left(\frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y \right) \right] dx dy, \quad (1)$$

где α , β — направляющие косинусы нормали к фронту плоской волны. Приемный элемент в виде открытого конца волновода или рупорной антенны располагался на подвижной каретке трехмерного сканирующего устройства, траектория движения которой задается с пульта оператора. Поляризационные характеристики электромагнитной волны измерялись методом разложения ее на ортогонально-поляризованные компоненты с переносом информации о сдвиге фаз между компонентами на низкую промежуточную частоту с помощью фазового модулятора. При этом предусматривалась возможность записи амплитудных и фазовых распределений рассеянного поля на каждой из компонент. Значения амплитуды и фазы электромагнитного поля в каждой точке пространства записывались в виде массива данных, и после обработки последнего информация о пространственной структуре представлялась в виде яркостных картин на экране дисплея или распечаток на принтере. Рассматривался случай H -поляризации падающей волны. Отверстие в экране располагалось на расстоянии $2,5\lambda$ от элемента возбуждения. Размер области сканирования при записи амплитудно-фазовых распределений составлял $10\lambda \times 10\lambda$.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Процесс формирования пространственной структуры электромагнитного поля в теневой области при изменении диаметра отверстия в экране демонстрируется амплитудно-фазовыми распределениями, приведенными на рис. 2. В нашем случае в возбуждающем поле присутствуют волны, падающие на поверхность экрана под углом Брюстера $\theta_B = z_s/S$ (где z_s — поверхностный импеданс) и возбуждающие поверхностные волны. Рассеянное на отверстии в экране поле можно представить в виде суперпозиции следующих составляющих:

$$F_{\text{рас.}}(\theta, \alpha) = F_{\text{д.р.ч.т.}} + F_{\text{д.н.ч.т.}} + F_{\text{п.в.}} \quad (2)$$

где $F_{\text{д.р.ч.т.}}$ — поле, рассеянное равномерной частью тока, $F_{\text{д.н.ч.т.}}$ — поле, рассеянное неравномерной частью тока, $F_{\text{п.в.}}$ — поле, сформированное поверхностной волной. При значениях параметра отверстия $ka < 4,1$ ($k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны, a — радиус отверстия) интенсивность дифракционного поля падает вследствие запредельности дифракционного объекта для поля излучения на фиксированной длине волны. При $ka \simeq 4,1$ амплитудное распределение поля практически симметрично относительно

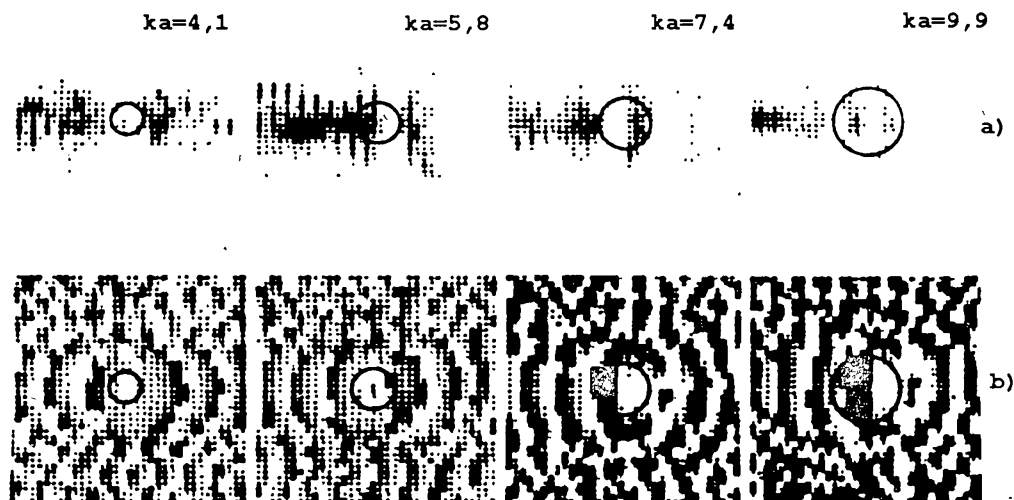


Рис. 2. Амплитудные и фазовые распределения электромагнитного поля в теневой области при изменении радиуса отверстия для основной компоненты поля: а — амплитуда; б — фаза.

диаметра отверстия благодаря, по-видимому, вкладу неравномерной части тока. По мере увеличения диаметра отверстия до значений $ka \simeq 9,9$ в ближнем поле постепенно формируется дифракционное поле в направлении, совпадающем с осью излучения (рис. 2а). Фазовые портреты ближнего дифракционного поля представляют собой систему расходящихся от отверстия волновых фронтов. Наиболее четкая их структура наблюдается вдоль заданного направления распространения возбуждающей электромагнитной волны. По мере увеличения диаметра отверстия радиус кривизны эквифазных поверхностей увеличивается (рис. 2б).

Амплитудные и фазовые распределения рассеянного поля на кросс-компоненте, в соответствии с моделью [1], определяются только неравномерной частью тока (рис. 3). Пространственное распределение поля излучения имеет выраженную ось симметрии, совпадающую с направлением распространения падающей волны. Видно, что в ближнем поле в области, расположенной против центра отверстия, кросс-компонента дифракционного поля равна нулю. Интенсивность излучения и его пространственная структура зависят от параметра ka , а именно, при его увеличении возрастает как количество лепестков, так и интенсивность поля в лепестках, расположенных вблизи направления распространения падающей волны. Однако, при этом относительный вклад в общее поле неравномерной части тока на кросс-компоненте должен уменьшаться при увеличении ka . Пространственная амплитудная структура поля кросс-компоненты электромагнитной волны обуславливает качественное отличие и в фазовых

портретах для основной и кросс-компонент (рис. 2, 3). Последние имеют вид раскручивающейся от центра спирали, размытой при больших значениях ka . По мере уменьшения параметра ka распределение фазы более четко имитирует известный в гидродинамике эффект "воронки" (рис. 3б).

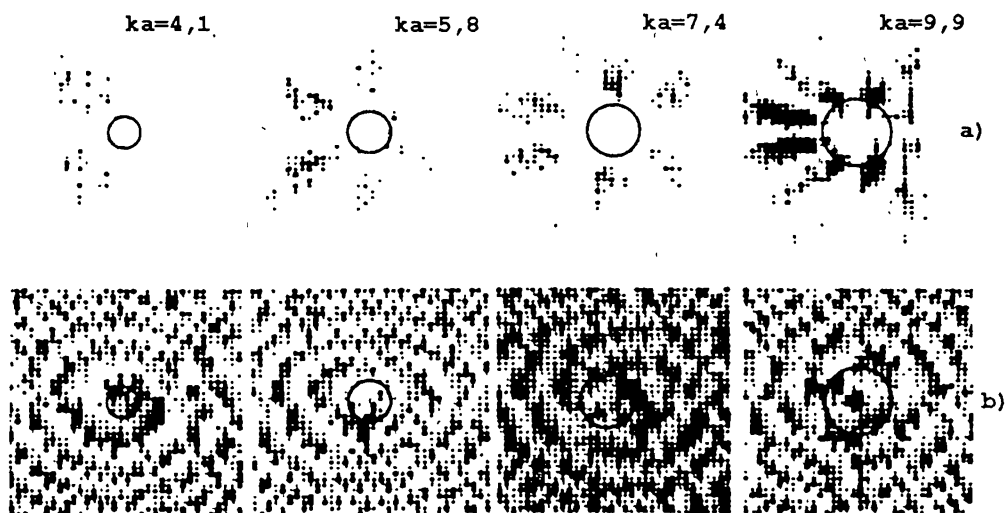


Рис. 3. Амплитудные и фазовые распределения электромагнитного поля в теневой области при изменении радиуса отверстия a для кросс-компоненты: а — амплитуда; б — фаза.

Об относительных вкладах основной и кросс-компонент можно судить по состоянию поляризации в рассеянном поле. Исходя из приведенных выше амплитудно-фазовых распределений, можно говорить о сложной поляризационной картине поля. На рис. 4 приведены поляризационные эллипсы для двух характерных строк в плоскости сканирования: а — вдоль диаметра, перпендикулярного направлению распространения падающей волны; б — вдоль параллельной строки, касательной к дальней кромке отверстия. Как и следовало ожидать, дифракционное поле в точках, расположенных симметрично относительно направления распространения падающей волны, противофазно.

При исследовании дифракции волн на объектах, как правило, измеряются следующие характеристики рассеянного поля: диаграмма направленности $F(\theta)$ и коэффициент пропускания σ_s . В нашем случае для отверстия в экране с параметром $ka \simeq 9,9$ наблюдается однолепестковая диаграмма направленности с максимумом излучения, ориентированным под углом $\theta = 245^\circ$ (рис. 5а). Данному углу максимального излучения соответствует угол падения плоской волны $\varphi = 65^\circ$ [1]. Расчетная диаграмма направленности для данного угла падения плоской волны на отверстие в экране

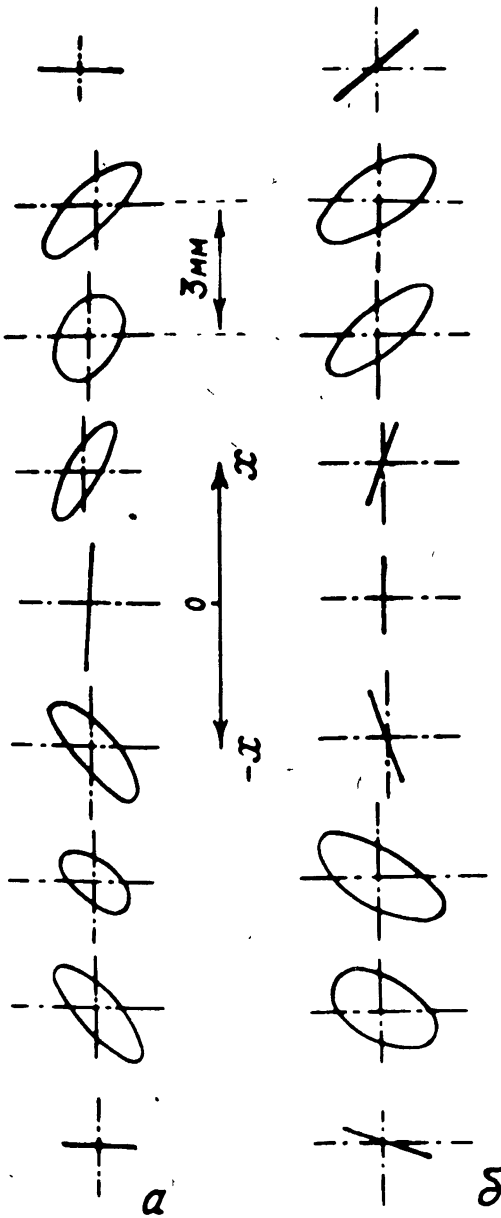


Рис. 4. Изменение состояния поляризации электромагнитного поля в теневой области для двух строк при параметре отверстия $ka \approx 9,9$.

по мере увеличения диаметра отверстия коэффициент пропускания увеличивается. Осциллирующий характер зависимости объясняется тем, что токи, наводимые на противоположных гранях отверстия, параллельны его

приведена на рис. 5а (кривая E_p). Отметим существенную разность в ширинах диаграмм направленности, которая обусловлена спецификой используемого способа возбуждения, поскольку в соответствии с видом поля источника (1) экспериментальная диаграмма направленности будет представлять собой суперпозицию диаграмм направленностей от плоских волн с весовой функцией $P(\gamma)$:

$$P(\gamma) = \frac{a}{4} ka \cos \gamma, \quad (3)$$

где γ — угол падения плоской волны.

Экспериментальное моделирование описанной ситуации, а именно, измерение амплитудных распределений в ближнем поле теневой области при различных углах падения плоской волны, иллюстрирует сказанное выше (рис. 5б). По мере изменения угла падения изменяется местоположение максимума излучения в рассеянном поле и его интенсивность.

Измерение коэффициента пропускания σ_s отверстия проводилось следующим образом. С теневой стороны экрана устанавливался элемент, эквивалентный падающему, и измерялось отношение сигнала на входе приемного элемента к сигналу на выходе передающего элемента (рис. 6). Видно, что

краям, и, следовательно, в зависимости от соотношения их фаз (при изменении параметра ka) наблюдается уменьшение или возрастание токов на поверхности [4].

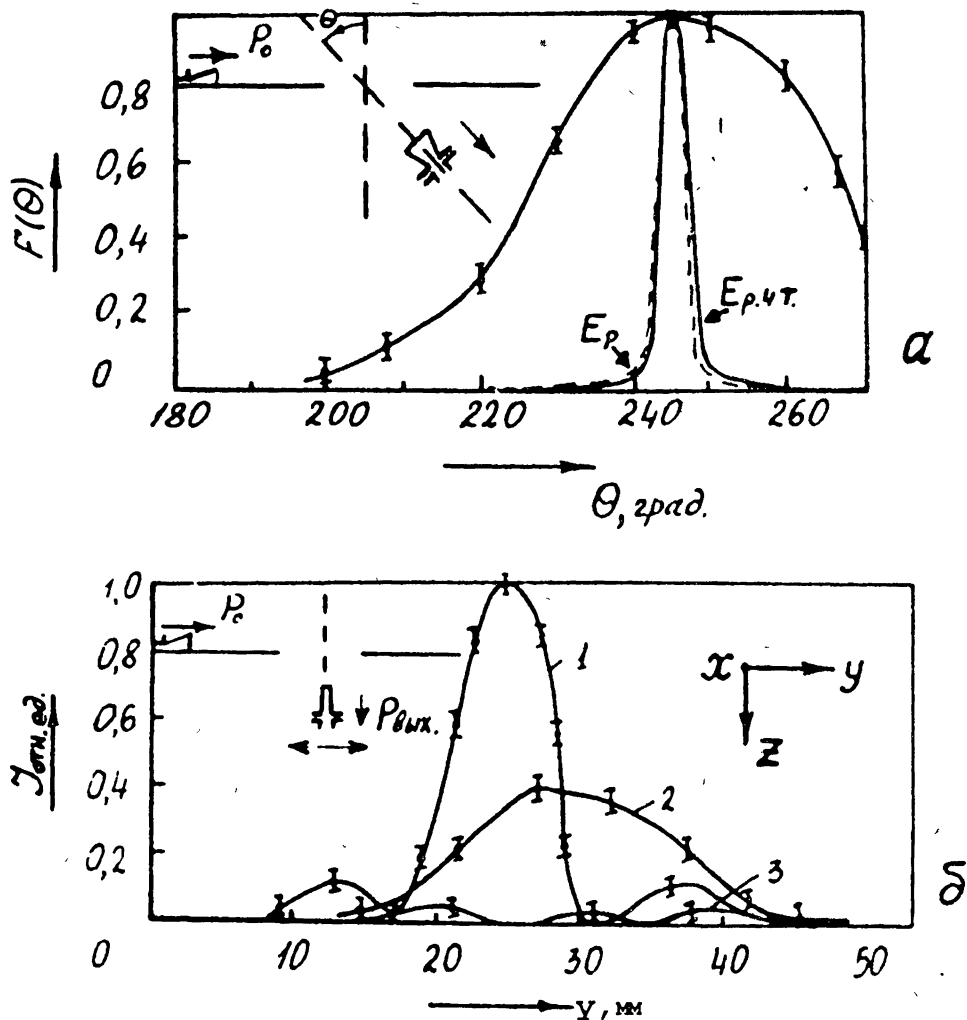


Рис. 5. Распределение электромагнитного поля в теневой области для отверстия при $ka \approx 9,9$: а) диаграмма направленности; б) амплитудное распределение поля в ближней зоне (1 — $\varphi = 65^\circ$, 2 — $\varphi = 70^\circ$, 3 — $\varphi = 80^\circ$).

При экранировании отверстия с параметром $ka = 9,9$ дисками различных диаметров коэффициент пропускания возрастает по мере уменьшения диаметра последних (рис. 7). В частности, можно отметить, что при диаметре диска, практически совпадающем с диаметром отверстия (кольцевая щель $\sim 0,4\lambda$), σ_s уменьшается в шесть раз. При ширине кольцевой щели, соответствующей параметру $kd \approx 6,8$, величина коэффициента про-

пускания соответствует его значению для отверстия в экране.

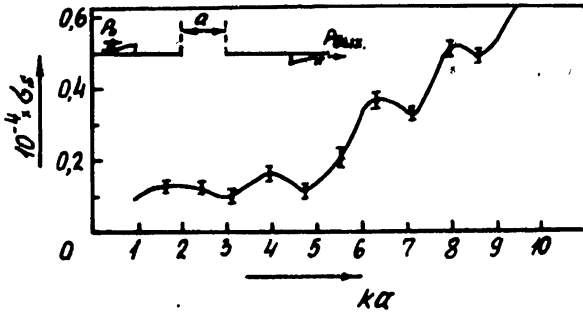


Рис. 6. Зависимость коэффициента пропускания для отверстия в экране от параметра ka .

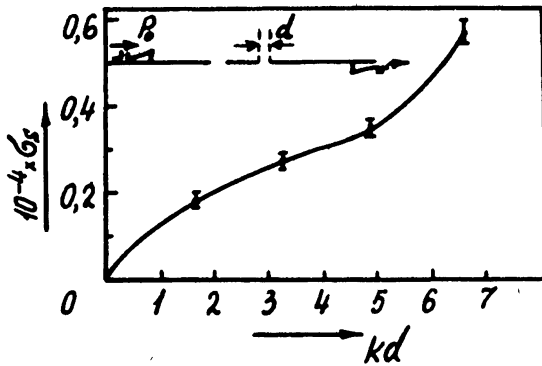


Рис. 7. Зависимость коэффициента пропускания для кольцевой щели в экране от параметра kd .

Изменение структуры ближнего поля для случая кольцевой щели естественным образом определяет смещение направления максимального излучения в диаграмме направленности. На рис. 9 представлена зависимость угла максимального излучения в теневой области от параметра kd . Зависимость имеет экстремум в области параметра $kd \approx 3,2$. С физической точки зрения его наличие можно объяснить, исходя из вида пространственной структуры ближнего поля: при $kd < 3,2$ кольцевая щель формирует в теневой области рассеянное поле, состоящее из суперпозиции волн, переизлученных как ребрами диска, так и самого отверстия. Начиная же с $kd \sim 3,2$ и более, вклад поля, рассеянного ребрами отверстия, становится доминирующим. При этом угол максимального излучения при $kd \approx 6,8$ совпадает с аналогичным углом для отверстия. Приведенные рассуждения иллюстрируются распределениями ближних дифракционных полей (рис. 8).

Проведенные параллельно измерения пространственной структуры поля в ближней зоне показали, что до значений $kd' \approx 3,3$ кольцевая щель формирует распределение, отличное от поля дифракции на отверстии, как на основной, так и на кросс-компонентах (рис. 8). Однако, уже при $kd \approx 6,6$ и более положения максимумов в распределениях обеих компонент практически совпадают с положениями максимумов в распределении поля для отверстия в экране. Некоторые отличия наблюдаются в относительном распределении интенсивностей: для кольцевой щели поле на основной компоненте вблизи диска имеет большую амплитуду. Для кросс-компоненты распределение интенсивностей отличается не-

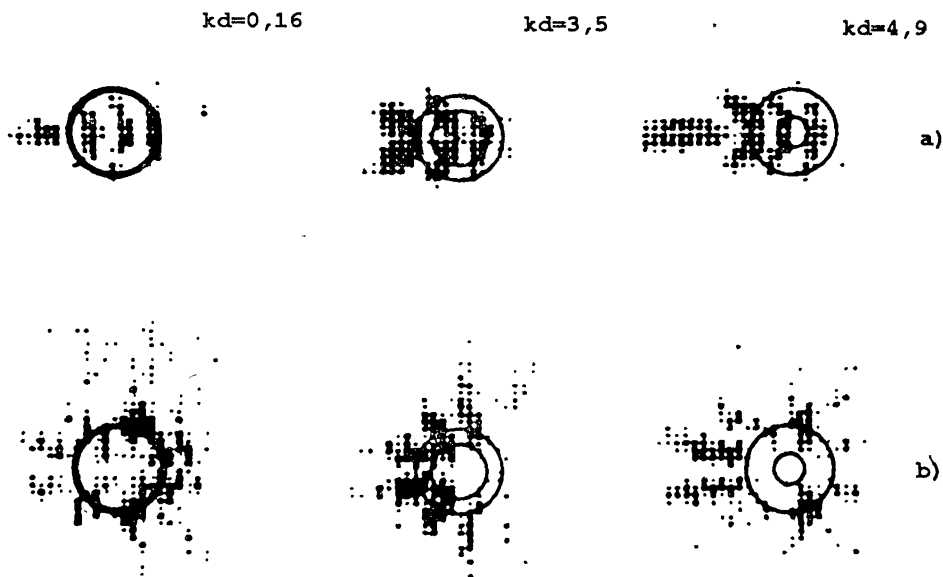


Рис. 8. Амплитудные распределения электромагнитного поля в теневой области для кольцевой щели при изменении ее ширины: а — основная компонента электромагнитного поля; б — кросс-компонента электромагнитного поля.

Представленный комплекс позволил выделить поле, сформированное неравномерной частью тока, а также определить амплитудные и фазовые соотношения между ортогональными компонентами в дифракционном поле. К сожалению, в рамках данной экспериментальной методики не представляется возможным выделить в “чистом” виде поле, связанное с поверхностной волной. Тем не менее, о его наличии можно судить по изменению параметров поляризационного эллипса в заданной точке приема при нанесении на поверхности экрана различных тонкопленочных покрытий (рис. 10).

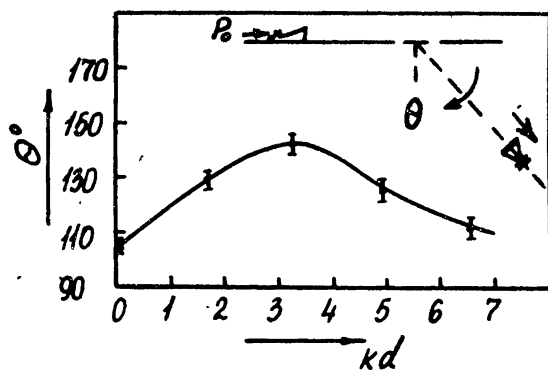
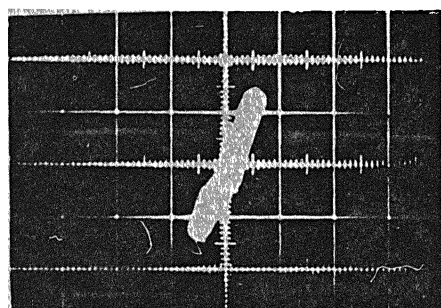
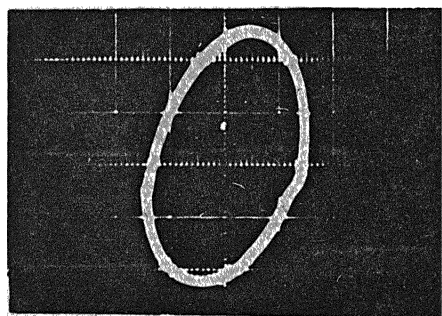


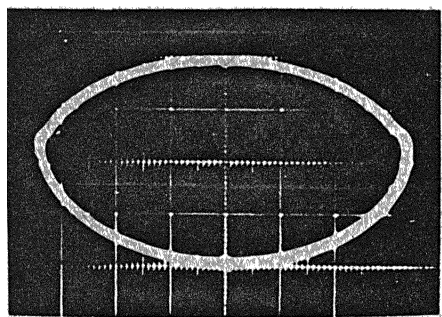
Рис. 9. Зависимость направления максимального излучения от ширины кольцевой щели.



а)



б)



в)

Рис. 10. Поляризационные эллипсы в точке пространства $\{x_0, y_0\}$ при изменении импеданса металлического экрана: а — чистый металл; б, в — тонкие поглощающие покрытия различных типов.

ВЫВОДЫ

1. В работе представлен радиофизический комплекс, позволяющий получать амплитудно-фазовые пространственные распределения электромагнитных полей на двух ортогональных компонентах при дифракции электромагнитной волны на различных объектах.

2. Приведены яркостные картины рассеянного поля в зоне Френеля при дифракции на отверстии в металлическом экране электромагнитных волн, падающих под углами, близкими к углам скольжения. Показана динамика пространственной структуры поля по мере увеличения параметра ka .

3. Проведены исследования пространственного распределения рассеянного поля при экранировании отверстия в экране металлическими дисками различных диаметров. Установлено, что при значении параметра $kd \gtrsim 3,3$ распределение рассеянного поля в теневой области качественно повторяет распределение электромагнитного поля при дифракции на отверстии. При этом коэффициенты пропускания отверстия и кольцевой щели в экране становятся равными при $kd = 6,2$.

4. Показано наличие экстремума в зависимости угла максимального излучения от параметра kd .

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. — М.: Сов. радио, 1962. 242 с.
2. Малюжинец Г. Д. // Докл. АН СССР, 1958. Т. 121. N 3. С. 436.
3. Кравченко В. Ф., Лихачев В. М., Сташкевич А. И. // Докл. АН СССР, 1989. Т. 308. N 2. С. 329.
4. Кинг Р., У Тай-Чзунь. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. — М.: Иностранная литература, 1962. 193 с.
5. Гудмен Дж. Введение в Фурье оптику. — М.: Мир, 1970. 364 с.

Институт радиофизики и
электроники АН Украины

Поступила в редакцию
2 сентября 1993 г.

**THE INVESTIGATION OF THE ELECTROMAGNETIC WAVE
DIFFRACTION AT THE AXISYMMETRIC DIAPHRAGMS IN A
MILLIMETER WAVE RANGE**

A. A. Vertiy, I. V. Ivanchenko, N. A. Popenko, I. Ya. Gudym

The automated radiophysical complex for the millimeter wave range has been presented. We have measured the space amplitude and phase distributions of the electromagnetic field on two orthogonal components at the diffraction of electromagnetic waves incident on an obstacle under the angles close to the grazing ones. The wave diffraction on the aperture and the circular slot in the metal screen was investigated. The patterns and transmission coefficient as functions of the relative aperture diameter and circular slot have been given. The extremum has been found in the dependence of the maximum radiation angle on the width of the circular slot.

УДК 621.391.019.4

КОМПЕНСАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ СНИЖЕНИЯ ПОМЕХ В ДИАПАЗОНЕ СВЕРХНИЗКИХ ЧАСТОТ

А. А. Горбачев, В. Д. Красильников, Я. Г. Родионов

Рассматриваются вопросы использования компенсационного метода снижения помех в диапазоне сверхнизких частот (СНЧ). Анализируется эффективность зонно-компонентной компенсации при действии атмосферных помех типа молниевых разрядов и квазигармонических помех промышленной частоты. Приводятся результаты экспериментальной проверки эффекта компенсации помех в натуральных условиях.

В радиотехнических исследованиях, связанных с геоэлектрической разведкой и изучением электромагнитного поля Земли, используется сверхнизкочастотный (СНЧ) диапазон волн — от десятков герц до единиц килогерц. В этом диапазоне сильное мешающее действие оказывают атмосферные и промышленные помехи. Уровень этих помех во входных узлах приемников, как правило, превышает уровень полезного сигнала, а сами помехи имеют негауссовую форму. Используемые для снижения импульсных помех нелинейные преобразования типа ограничителей амплитуд оказываются неэффективными при наличии во входной смеси дополнительных квазигармонических помех, т. к. при ограничении имеет место подавление слабых полезных сигналов указанными помехами. В этих условиях одним из путей снижения помех является компенсационный метод, основанный на минимизации выходного помехового уровня за счет вычитания помех из разных каналов приема. Компенсация помех представляет линейную операцию и, в принципе, не связана с искажениями структуры обрабатываемого сигнала. В данной статье рассматриваются особенности применения компенсационного устройства (КУ) в диапазоне СНЧ.

При ограниченном числе радиопомех, приходящих в точку приема с фиксированных направлений, структурная схема КУ содержит n параллельных каналов, каждый из которых включает процессор, работающий по методу наискорейшего спуска. Выходной суммарный отклик системы перемножается с каждым i -м входным воздействием ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), подвергается интегрированию и усилению, в результате чего в каждом канале формируется весовой коэффициент W_i , управляющий коэффициентом передачи i -го канала в нужном направлении. Совокупность весовых коэффициентов W_i минимизирует мощность остаточного напряжения на выходе сумматора системы. Нулевой канал является сигнальным. Он

имеет отдельную антенну, ориентированную на направление приема полезного сигнала. В сигнальном канале процессор отсутствует, а весовой коэффициент W_0 является постоянным, определяющим исходный коэффициент передачи канала. Обозначая через γ_i , S_i сигнальные функции на входах каналов КУ, где S_i — комплексная огибающая i -го сигнального вектора единичной длины, γ_i — постоянный множитель, и полагая $S_i = 1$, напомним матричное уравнение КУ

$$\begin{bmatrix} p_0 \Lambda^* \\ \Lambda M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \Gamma \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $p_0 = x_0^2$ — мощность принимаемой смеси в сигнальном канале, Λ — вектор-столбец корреляций входных напряжений компенсационных каналов (при $i \geq 1$) с напряжением сигнального канала, M — матрица размером $n \times n$:

$$\Lambda = E \begin{bmatrix} x_1 x_0 \\ x_2 x_0 \\ \dots \\ x_n x_0 \end{bmatrix}; \quad M = E \begin{bmatrix} x_1 x_1 & \dots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & \dots & x_2 x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n x_1 & \dots & x_n x_n \end{bmatrix}; \quad (2)$$

Λ^* — сопряженная матрица, полученная транспонированием вектора-столбца Λ , E — оператор статистического усреднения, Γ — вектор-столбец множителей γ_i , W — вектор-столбец весовых коэффициентов W_i ($i = 1, 2, \dots$). Уравнение (1) распадается на два уравнения:

$$p_0 W_0 + \Lambda^* W = \gamma_0; \quad \Lambda W_0 + M W = \Gamma. \quad (3)$$

Адаптация КУ описывается правым уравнением (3). Отсюда получаем выражение для оптимальных весовых коэффициентов системы с учетом наведения полезных сигналов в компенсационные каналы

$$W_{\text{опт}} = -M^{-1}(\Gamma + \Lambda W_0), \quad (4)$$

где M^{-1} — матрица, обратная M . Постоянный весовой коэффициент W_0 устанавливается из соображений необходимого усиления полезного сигнала $\gamma_0 S_0$. Если полезный сигнал присутствует только в сигнальном канале, то $\Gamma = 0$, и имеет место известное выражение для $W_{\text{опт}}$ [1]

$$W_{\text{опт}} = -M^{-1} \Lambda W_0.$$

Формирование весовых коэффициентов в системе происходит тем быстрее, чем больше мощность входного воздействия.

При двухканальном КУ ($n = 1$), нормальных помехах в каналах с дисперсиями σ_0^2 , σ_1^2 и коэффициентом корреляции помеховых процессов

ρ_k имеем $M = E(x_1 x_1) = \sigma_1^2$, $\Lambda = E(x_1 x_0) = \rho_k \sigma_1 \sigma_0$, откуда $W_{\text{онт}} = -(\sigma_0/\sigma_1) \cdot \rho_k W_0$. Остаточная дисперсия помехи на выходе КУ $\sigma_\Sigma^2 = \sigma_0^2(1 - \rho_k^2)$, а эффективность компенсации, определяющая относительную величину снижения уровня помех, имеет вид [2]

$$\eta = \sigma_0^2/\sigma_\Sigma^2 = 1/(1 - \rho_k^2).$$

Статистические свойства помех в СНЧ диапазоне зависят от конкретных временных и метеорологических условий работы приемной аппаратуры. На рис. 1 в качестве примера приведена кривая плотности вероятностей огибающей суммарной помехи в районе южной Карелии (сплошная кривая). Измерения проводились в летне-осенний период при спокойной грозовой обстановке. Использовался приемник с диапазоном частот (30 ÷ 300) Гц при полосе пропускания (2 ÷ 5) Гц. Для сравнения пунктирной линией изображена полученная расчетным путем логарифмически-нормальная ПВ, параметры которой близки к параметрам экспериментальной кривой. Рисунок показывает, что измеренная в данных условиях помеха достаточно точно описывается логарифмически-нормальным распределением.

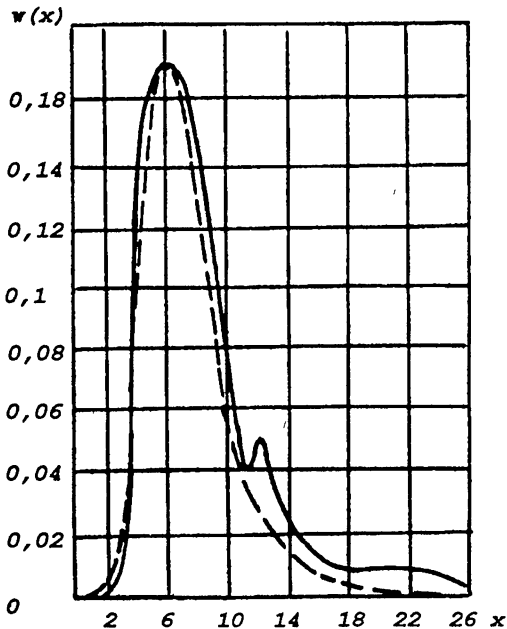


Рис. 1.

В СНЧ диапазоне для снижения помех целесообразно использовать различную зависимость электрической и магнитной составляющих поля от расстояний до источника излучения. Это открывает принципиальные возможности компенсации помех в одной зоне приема при сохране-

нии приемлемого уровня сигналов, приходящих из другой пространственной зоны. Предварительное обсуждение возможностей такой компенсации сделано в [3]. Данный способ можно определить как способ зонно-компонентной компенсации радиопомех.

Оценим эффективность двухканальной неадаптивной зонно-компонентной компенсации атмосферных радиопомех типа молниевых разрядов и квазигармонических помех промышленной частоты. Значения импульсного тока молнии $I(t)$ и высоты молниевых каналов $h(t)$ в ряде измеренных случаев определяются выражениями

$$I(t) = Ae^{-\alpha t} - Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t};$$

$$h(t) = (V_0/(ab)) [(b-a) - (be^{-\alpha t} - ae^{-\beta t})],$$

причем практические значения параметров и коэффициентов равны: $A = 20$ кА, $B = 25$ кА, $C = 5$ кА, $\alpha = 5 \cdot 10^4$ с⁻¹, $\beta = 5 \cdot 10^5$ с⁻¹, $\gamma = 7 \cdot 10^2$ с⁻¹, $a = 6 \cdot 10^4$ с⁻¹, $b = 7 \cdot 10^5$ с⁻¹, $V_0 = 3 \cdot 10^8$ м/с. В ближней зоне, т. е. при условии $\rho \ll \lambda$, где ρ — расстояние до источника помех, λ — длина излучаемой волны, для вертикального электрического E_z и горизонтального магнитного H_x полей при абсолютной проводимости Земли можно приближенно записать

$$E_z(t) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{m(t')}{\rho^3} dt'; \quad H_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{m(t')}{\rho^2}, \quad (5)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая постоянная свободного пространства, равная $(36\pi \cdot 10^9)^{-1}$ Ф/м, $m(t')$ — переменный вертикальный момент, равный произведению $I(t)h(t)$; $t' = t - \rho/c$, c — скорость света ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Показатель эффективности зонно-компонентного КУ с предварительным интегрированием магнитной составляющей определяется выражением

$$Q = \frac{\int_0^T [E_z(t) - \beta H_x(t)]^2 dt}{\int_0^T [E_z(t) + \beta H_x(t)]^2 dt}, \quad (6)$$

где β — компенсирующий коэффициент ($\beta = \text{const}$), значение которого выбирается из условия минимизации Q для заданной помехи, T — интервал наблюдения, в течение которого помеху можно считать стационарным процессом. Из (5), (6) следует, что числитель подынтегрального выражения в (6) обращается в нуль при модуле компенсирующего коэффициента $|\beta| = 1/(\epsilon_0 \omega \rho)$, где $\omega = 2\pi f$ — частота колебаний помехового источника. Отсюда следует, что полная компенсация помехи ($Q = 0$) возможна только на одной частоте ω и на фиксированном расстоянии ρ_0 до источника помех. В дальней зоне (при $\rho > \lambda$) имеем

$$E_z(t) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2 \rho} \frac{dm(t')}{dt}; \quad H_x(t) = \frac{1}{2\pi c \rho} \frac{dm(t')}{dt}, \quad (7)$$

причем $E_z/H_x = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = z_0$, где $z_0 = 120\pi$ — импеданс свободного пространства, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость. При введении перед $H_x(t)$ множителя $\beta = 1/(\epsilon_0\omega\rho)$ находим $E_z - \beta H_x = H_x \left(z_0 - \frac{1}{\epsilon_0\omega\rho} \right)$. Это означает, что поля из дальней зоны компенсируются только в случае, когда $\omega\rho = 1/(z_0\epsilon_0)$. Следовательно, условием компенсации помех из ближней зоны при отсутствии компенсации полезных полей, приходящих из дальней зоны, можно считать

$$f\rho < 1/(2\pi z_0\epsilon_0) = 4,8 \cdot 10^7 \text{ м/с.} \quad (8)$$

В частности, при $f = 1$ кГц, $\rho = 10$ км их произведение составляет 10^7 , что меньше величины в правой части выражения (8), т.е. использование КУ для подавления такой помехи из ближней зоны еще можно считать целесообразным. С уменьшением f и ρ выигрыш за счет компенсации помех возрастает. Практически антенные системы и КУ в целом приходится настраивать на направление наиболее интенсивной помехи с какого-то фиксированного направления φ_0 . С других направлений помехи подавляются в меньшей степени.

Произведенные расчеты для молниевой помехи с указанными выше параметрами и с использованием выражения (6) для $T = 5 \cdot 10^{-3}$ с, $\Delta f = 3$ кГц (Δf — ширина частотной полосы приема) показали, что практически обеспечить удовлетворительную компенсацию такой помехи в широком диапазоне частот не представляется возможным (условие $Q \ll 1$ не выполняется). Однако, на практике часто прием осуществляется в узкой частотной полосе (порядка единиц Гц). Расчеты в этих условиях показали, что при приеме в полосе $\Delta f = 2$ Гц, на центральной частоте $f_0 = 45$ Гц, эффективность КУ для молниевой помехи составляет $Q = 0,75 \cdot 10^{-4}$, а в полосе $\Delta f = 4$ Гц — $Q = 5 \cdot 10^{-4}$, т.е. приближенно можно считать $Q \simeq 0$. Это означает, что зонно-компонентная компенсация при узкополосном приеме и единичном источнике помех является достаточно эффективной. Вместе с тем следует отметить, что это наблюдается лишь для ограниченного интервала расстояний до источника помех (при $\rho \simeq \rho_0$). Для других ρ выигрыш в снижении помех падает. Отсюда следует, что зонно-компонентная компенсация не обеспечивает одновременное эффективное подавление всех помех ближней зоны, т.е. не является инвариантной по отношению к совокупности воздействующих на приемник помех.

Оценим далее значение Q для гармонической помехи от горизонтального электрического диполя с учетом конечной проводимости Земли. Считаем, что КУ настраивается на компенсацию помехи, находящейся на расстоянии ρ_0 от него с угловой ориентировкой на направление φ_0 . В данном случае $k_1\rho_0 \ll 1$, где $k_1 = \sqrt{j\sigma\omega\mu_0}$ — волновое число, σ — проводимость Земли под помеховым диполем ($\sigma = 10^{-4}$ См/м). Применительно к помехам от горизонтального диполя при $\rho \neq \rho_0$, $\varphi \neq \varphi_0$ с учетом выражений

полей [4] находим

$$Q = \left[\frac{(2 \cos \varphi + \sin \varphi)(\cos \varphi_0 + \sin \varphi_0)\rho_0 - (2 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0)(\cos \varphi + \sin \varphi)\rho}{(2 \cos \varphi + \sin \varphi)(\cos \varphi_0 + \sin \varphi_0)\rho_0 + (2 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0)(\cos \varphi + \sin \varphi)\rho} \right]^2.$$

При $\varphi = \varphi_0$ имеем $Q = (\rho - \rho_0)^2 / (\rho + \rho_0)^2$. Зависимость Q от ρ для горизонтального излучающего диполя при $\rho_0 = 1$ км, $\varphi_0 = 30^\circ$ и при приеме на магнитную и электрическую антенны показана на рис. 2. Отсюда видно, что эффективное подавление помехи наблюдается при расстояниях ρ , близких к ρ_0 . Для помех, принимаемых из дальних зон, значения Q близки к единице, что практически означает отсутствие компенсации.

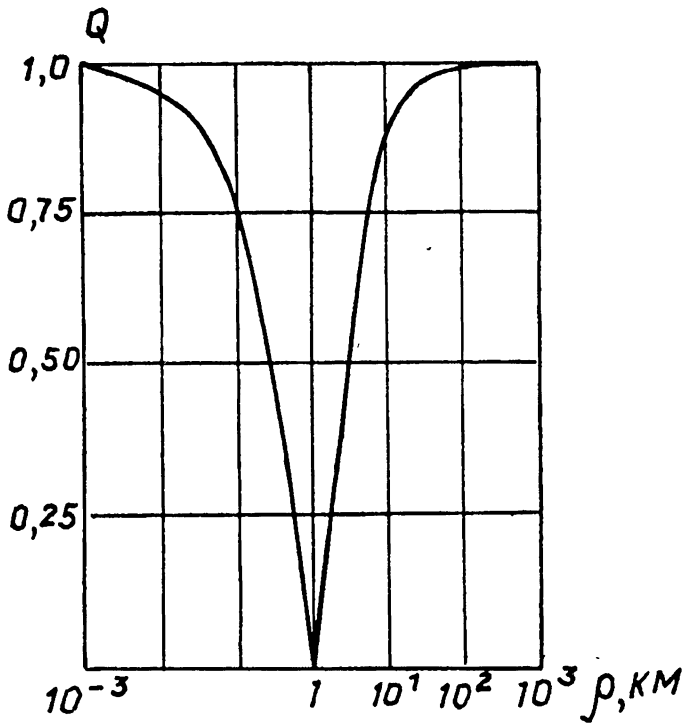


Рис. 2.

Была проведена экспериментальная проверка эффекта зонно-компонентной компенсации помех в натуральных условиях при использовании КУ с диапазоном частот (30 ÷ 300) Гц. В качестве магнитной антенны применялась рамка с площадью 1 м^2 , в качестве горизонтальной электрической антенны — провод длиной 10 м, заземленный на дальнем конце. База между антеннами — порядка 5 м. Выходной эффект фиксировался в узкой частотной полосе (0,02 Гц) с помощью самописца. Удаленность от

линий электропередач была порядка 1 км. Установлено, что КУ обеспечивал снижение уровня выбранной гармоники сетевой помехи в среднем на $(20 \div 26)$ дБ, что уменьшало вероятность перегруза приемника и ограничивало нежелательный эффект подавления слабого полезного сигнала, приходящего из дальней зоны. Суммарная мощность всей совокупности помех, поступающих на приемник, снижалась за счет компенсации примерно в 3 раза. Во всех случаях не наблюдалось каких-либо заметных изменений в структуре и уровне полезного сигнала.

Выводы. При приеме сигналов СЧЧ диапазона возможно использование зонно-компонентной компенсации помех, основанной на вычитании помех из разных каналов приема с учетом различной зависимости электрического и магнитного полей от расстояния до источника помех.

Зонно-компонентная компенсация эффективна при подавлении помехи от одного источника. При воздействии совокупности разных помех данная компенсация обеспечивает ограниченный выигрыш в снижении помех — порядка 3-х раз по мощности.

Компенсационный метод в диапазоне СЧЧ реализуется сравнительно простыми техническими средствами и, в принципе, не связан с искажениями структуры принимаемого сигнала. Его использование позволяет повысить реальную чувствительность приемного устройства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Applebaum S. P. // IEEE Trans. on Antennas and Propagat., 1976. V. AP-24. N 5. P. 585.
2. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1981. 357 с.
3. Гут Р. Э., Маневич М. Л., Собчаков Л. А., Удальев Ю. Э. // Изв. вузов. Радиофизика, 1980. Т. 23. N 11. С. 1314.
4. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. — Л.: Недра, 1972. 343 с.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
г. Н. Новгород

Поступила в редакцию
8 декабря 1993 г.

**COMPENSATION METHODS FOR THE INTERFERENCE DECREASE IN
THE RANGE OF ULTRALOW FREQUENCIES***A. A. Gorbachev, V. D. Krasil'nikov, Ya. G. Rodionov*

Problems are considered for the application of compensation method of interference decrease in the range of ultralow frequency (ULF). The efficiency of zone-component compensation is analyzed under the action of atmospheric interferences of the type of thunderstorm discharge as well as quasi-harmonic noises of industrial frequency. Experimental results are given for verifying the effect of interference compensation under natural conditions.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 539.194

СУБМИЛЛИМЕТРОВЫЙ СПЕКТР ДИМЕРА $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$
В РАВНОВЕСНОЙ ГАЗОВОЙ ФАЗЕ*Н. Ф. Зобов, Е. Н. Карякин, А. Ф. Крупнов, Р. Д. Суенрам*

В работе сообщается о первом наблюдении микроволнового спектра молекулярного комплекса $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ в равновесной газовой фазе. Ранее спектр комплекса $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ наблюдался только в неравновесных холодных сверхзвуковых молекулярных пучках. Как и в предыдущей работе [1], посвященной наблюдению равновесного спектра димера HF-HF , использовался субмиллиметровый микроволновый спектрометр с лампами обратной волны (ЛОВ) и акустическим детектором (РАД) и охлаждаемая ячейка поглощения. Измерены частоты субмиллиметровых линий, продолжающих известные из пучковых исследований серии. Обнаружены новые серии, принадлежащие, по-видимому, более высоковозбужденным состояниям димера. Приводятся первоначальные результаты анализа полученного спектра совместно с известными ранее данными.

Исследование спектров молекулярных комплексов микроволновыми методами является сравнительно новой областью молекулярной спектроскопии. Наиболее легко спектры комплексов наблюдаются в холодных струях газов, истекающих в вакуум и испытывающих при адиабатическом расширении глубокое (до единиц градусов Кельвина) охлаждение, которого невозможно добиться в равновесных условиях ввиду конденсации газов. В то же время наблюдение спектров комплексов в равновесных условиях дает возможность новых исследований — от наблюдения более высоких состояний комплексов до измерений энергии связи, уширения и сдвига линий комплексов и т. д. Число наблюдений спектров комплексов в равновесных условиях сравнительно невелико, и увеличение числа наблюдавшихся в равновесных условиях комплексов представляет значительный интерес. Ранее мы сообщали о наблюдении первого субмиллиметрового равновесного спектра димера HF-HF [1]. В настоящей работе сообщается о первом наблюдении равновесного спектра важного комплекса $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$, состоящего из весьма распространенных компонент. Ввиду большей сложности входящих в него молекул комплекс испытывает целый ряд внутренних движений большой амплитуды, что приводит к усложнению спектра и уменьшению интенсивности отдельных линий (“рассыпанию” спектра),

что делает задачу его наблюдения и интерпретации весьма затруднительной.

Записи спектра $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ были получены с помощью спектрометра РАД с субмиллиметровым синтезатором частоты [2] в диапазоне от 206 ГГц до 380 ГГц. При записи использовалась смесь NH_3 и паров H_2O с суммарным давлением около 1 Тор и отношением $(\text{NH}_3):(\text{H}_2\text{O})$ в смеси, от 10:1 до 6:1. Температура в ячейке поддерживалась на уровне 230 К, постоянная времени при записи спектра — 3 с. Изменение частоты ЛОВ производилось путем сканирования частоты опорного сантиметрового синтезатора [2]. Через фиксированные частотные интервалы на записи спектра ставились метки. Частоты линий определялись интерполяцией. На рис. 1 представлена часть записи спектра димера $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ в районе 328 ГГц. При записи спектра использовалась амплитудная модуляция. Точность измерений составила по нашим оценкам несколько мегагерц из-за небольшого отношения сигнал/шум, густоты спектра (влияния крыльев соседних линий) и большой ширины самих линий.

$$J = 27 - 26$$

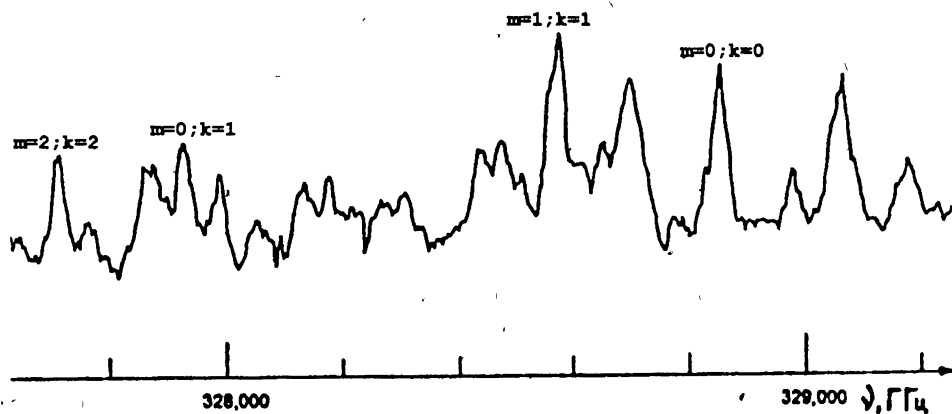


Рис. 1.

Первоначальным доказательством того, что наблюдается спектр димера $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$, было появление спектра лишь при охлаждении смеси $\text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O}$ и соответствующие зависимости интенсивности спектра от температуры и давления смеси газов. Окончательная идентификация наблюдаемого спектра как спектра димера $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ была получена с помощью результатов работы [3] после измерения частот спектральных линий.

Анализ записанного спектра был произведен нами на основе резуль-

татов работ [4] и [5]. В работе [4] были исследованы микроволновый и дальний инфракрасный спектры димера $\text{NH}_3 - \text{H}_2\text{O}$ в диапазонах $36 \text{ ГГц} \div 86 \text{ ГГц}$ и $520 \text{ ГГц} \div 800 \text{ ГГц}$ с использованием плоского холодного сверхзвукового пучка. Наблюдались 7 чисто вращательных микроволновых *a*-типа линий и почти 300 *b*-типа дальних инфракрасных вращательно-туннельных линий. Измеренный микроволновый спектр работы [5] состоит из нескольких десятков чисто вращательных линий в основном и возбужденных колебательных состояниях.

При нашем анализе полученного спектра были использованы частоты микроволновых переходов в основном колебательном состоянии из работы [5] и данные в дальней инфракрасной области из работы [4]. Для идентификации исследованного нами спектра мы обрабатывали частоты измеренных в настоящей работе субмиллиметровых чисто вращательных переходов совместно с частотами переходов из различных дальних инфракрасных полос работы [4], которые различаются квантовыми числами *K* (проекция углового момента димера на ось *a*) и *m* (проекция углового момента внутреннего вращения NH_3 на ось симметрии аммиака). Каждая полоса была обработана с использованием восьми параметров: по три *B*, *D*, *H* константы для верхнего и нижнего состояний и двух частот, определяющих начала полос для орто- и парасостояний по отношению к туннелированию воды в димере $\text{NH}_3 - \text{H}_2\text{O}$. Лишь с одной полосой в каждом случае было достигнуто согласие в пределах экспериментальных ошибок. Таким образом, по согласию данных была определена идентификация наблюдавшихся нами серий, которая и приведена в табл. 1.

Результаты обработки спектра димера $\text{NH}_3 - \text{H}_2\text{O}$ приведены в табл. 1, а полученные спектроскопические постоянные — в табл. 2. Из приведенных результатов видно, что для обработки измеренного спектра по полосам с экспериментальной точностью достаточно выше приведенных констант.

При анализе записанного спектра были обнаружены несколько последовательностей спектральных линий с *B* и *D* константами, близкими к константам димера $\text{NH}_3 - \text{H}_2\text{O}$ в основном состоянии. Мы считаем, что это чисто вращательные переходы, аналогичные уже идентифицированным, но принадлежащие более высоко возбужденным (с большими *m* и *K*) состояниям. К сожалению, ни наш анализ, ни анализ работы [4] не позволяют в настоящее время провести идентификацию этих переходов. Такой анализ является предметом последующей работы.

Работа была выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант N 94-02-05424-а) и Международного Научного Фонда (грант N R8I000), которым авторы выражают свою благодарность.

Т а б л и ц а 1

Наблюдавшиеся чисто вращательные переходы димера аммиак-вода
в различных состояниях внутреннего вращения (m, K) в [МГц]

Эксп. частота	Эксп.- Теор.	J'	J''	Эксп. частота	Эксп.- Теор.	J'	J''
Состояние (0,0)				Состояние (0,-1)			
208132.0	-8.8	17	16	207549.0	10.6	17	16
220294.0	0.9	18	17	219640.0	-16.8	18	17
232426.0	-3.4	19	18	231770.0	10.4	19	18
244548.0	-1.1	20	19	243832.0	-14.1	20	19
268753.0	18.0	22	21	267965.0	-1.1	22	21
280811.0	11.7	23	22	279992.0	-5.9	23	22
292849.0	5.8	24	23	292014.0	4.2	24	23
304867.0	1.2	25	24	304000.0	-0.5	25	24
316871.0	4.8	26	25	315970.0	0.5	26	25
328850.0	6.6	27	26	327923.0	7.5	27	26
340795.0	-1.4	28	27	339832.0	-5.7	28	27
352729.0	4.4	29	28	351739.0	3.7	29	28
364631.0	4.4	30	29	363618.0	10.9	30	29
376493.0	-8.5	31	30	375448.0	-4.2	31	30
Состояние (0,1)				Состояние (1,0)			
233029.0	-17.8	19	18	207763.0	6.2	17	16
245211.0	12.8	20	19	219850.0	8.2	18	17
269441.0	-5.9	22	21	231912.0	8.5	19	18
293616.0	-1.6	24	23	279902.0	12.5	23	22
317710.0	7.2	26	25	291804.0	-10.3	24	23
329705.0	-5.9	27	26	303684.0	-23.6	25	24
341698.0	3.1	28	27	315577.0	8.9	26	25
353654.0	0.3	29	28	327397.0	2.4	27	26
365588.0	1.6	30	29	339195.0	9.5	28	27
375505.0	13.1	31	30	350930.0	-9.5	29	28
				362666.0	10.7	30	29
				374320.0	-11.6	31	30

Продолжение табл. 1

Эксп. частота	Эксп.-Теор.	J'	J''	Эксп. частота	Эксп.-Теор.	J'	J''
Состояние (1,1)				Состояние (2,2)			
207941.0	-2.9	17	16	219442.0	-19.9	18	17
220075.0	-11.3	18	17	231563.0	3.2	19	18
232197.0	-16.1	19	18	243642.0	0.0	20	19
244330.0	6.5	20	19	279800.0	13.8	23	22
280541.0	-5.5	23	22	291804.0	6.9	24	23
292585.0	2.7	24	23	303790.0	2.3	25	24
304593.0	-3.5	25	24	315760.0	2.8	26	25
316583.0	-5.8	26	25	327709.0	4.4	27	26
328570.0	11.9	27	26	339622.0	-6.8	28	27
340500.0	-3.3	28	27	351523.0	-6.0	29	28
352427.0	3.3	29	28	363407.0	2.8	30	29
364316.0	-2.0	30	29	375251.0	-2.0	31	30
376188.0	2.5	31	30				

Т а б л и ц а 2

Спектроскопические константы димера аммиак – вода
для различных состояний (m, K)

m, K	B [МГц]	D [кГц]	H [Гц]
(0,0)	6142.6458(10)	35.720(41)	-0.509(37)
(1,1)	6136.4124(88)	35.09(44)	-0.526(39)
(0,1)	6159.1137(72)	36.27(35)	-0.297(33)
(0,-1)	6124.5499(38)	35.258(38)	-0.397(39)
(1,0)	6141.584(40)	53.66(49)	-0.302(43)
(2,2)	6117.65(53)	32.7(10)	-0.783(83)
(2,1)	6141.56(26)	53.5(25)	

ЛИТЕРАТУРА

1. Зобов Н. Ф., Карякин Е. Н. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. N 11. С. 1415.
2. Alekhin Yu. I., Pavlovsky O. P., Altshuller G. M., Karyakin E. N., Krupnov A. F., Pavel'ev D. G., Shkaev A. P. //Int. J. of IR and MM Waves. 1990. V. 11. N 8. P. 961.
3. Herbine P., Dyke T. R. //J. Chem. Phys. 1985. V. 83. N 8. P. 3768.
4. Stockman P. A., Bumgarner R. E., Suzuki S., Blake G. A. //J. Chem. Phys. 1992. V. 96. N 4. P. 2496.

5. Fraser G. T., Suenram R. D. //J. Chem. Phys. 1992. V. 96. N 10. P. 7287.

Институт прикладной физики
РАН, г. Н. Новгород, Россия;
Отделение молекулярной физики
Национального института
стандартов и технологии США

Поступила в редакцию
14 июля 1994 г.

SUBMILLIMETER SPECTRUM OF $\text{NH}_3 - \text{H}_2\text{O}$ DIMER IN AN EQUILIBRIUM GAS PHASE

N. F. Zobov, E. N. Karyakin, A. F. Krupnov, R. D. Suenram

The first observation is reported in the paper of the microwave spectrum of $\text{NH}_3 - \text{H}_2\text{O}$ molecular complex in an equilibrium gas phase. Earlier the spectrum of $\text{NH}_3 - \text{H}_2\text{O}$ complex was observed only in nonequilibrium cold supersonic molecular beams. As in the previous paper [1] dealt with the observation of the equilibrium spectrum of $\text{HF} - \text{HF}$ dimer, there used a submillimeter spectrometer with BWT and an acoustic detector and a cooled absorption cell. We have measured submillimeter line frequencies continuing those series known from the beam investigations. New series have been discovered which correspond obviously to the excited states of the dimer. Primary results of the analysis of the spectrum obtained together with the early known data are given.

УДК 538.576.54

РАССЕЯНИЕ ВЫСШИХ ГАРМОНИК СТАТИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

Л. В. Васенкова, А. А. Горбачев

Широкое распространение радиотехнических средств предъявляет повышенные требования к вопросам использования спектра радиочастот.

Л. В. Васенкова, А. А. Горбачев

743

Проблема тесноты в эфире и его загрязненности обостряется возрастающим уровнем помех различного происхождения. К ним могут быть отнесены контактные помехи, возникающие при рассеянии радиоволн на механических конструкциях, содержащих несовершенные электрические контакты, обладающие, как известно, нелинейной проводимостью. Интерес к рассеянию радиоволн на телах с локальными нелинейностями связан с рядом и других прикладных задач. Например, поиском засыпанных снежными лавинами людей с находящимися на них пассивными маркерами. Поэтому исследования механизмов и характеристик рассеяния нелинейных помех и методов поиска их источников представляются актуальными.

В работе [1] исследованы пространственные характеристики рассеяния системы из двух и четырех нелинейных рассеивателей (НР), определенным образом расположенных в пространстве. Рассмотрим рассеяние высших гармоник статистической системой из N одинаковых простейших нелинейных рассеивателей при падении на них монохроматической электромагнитной волны с частотой ω . Будем полагать, что каждый НР имеет изотропную диаграмму рассеяния, независимый от частоты поперечник рассеяния на n -й гармонике σ_0 . НР расположены случайно в некотором двумерном пространстве с характерным размером $L \ll R_0$, где R_0 — расстояние от центра тяжести системы до точки приема, расположенной в этом же пространстве. Будем считать, что продольный \bar{y} и поперечный \bar{x} среднеквадратичные размеры системы для каждой реализации ее одни и те же, а центр тяжести системы совпадает с началом координат. Соотношение $L \ll R_0$ позволяет считать изменение потока падающего поля в области L незначительным и поэтому σ_0 , в общем случае зависящий от этого потока, при дальнейшем анализе полагать для всех НР одним и тем же.

Как известно [2], суммарное поле, рассеянное системой из N линейных рассеивателей в обратном направлении, может быть представлено в виде

$$E_p = \frac{E_1 \sqrt{\sigma_0} \exp\{-j2kR_0\}}{R_0 \sqrt{4\pi}} \sum_{\nu=1}^N \exp\{-j(2kx_\nu \varphi + 2ky_\nu)\}, \quad (1)$$

где $E_1 = A \exp\{j\omega t\}$ поле в центре тяжести системы, создаваемое источником падающей волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число ($\lambda \ll L$), x_ν и y_ν — координаты ν -го рассеивателя, φ — достаточно малый угол между осью y и направлением на точку приема. В случае нелинейного рассеяния на n -й гармонике значение $\lambda_n = \frac{2\pi c}{\omega n}$. Специфика рассеяния волн на простейших НР, в качестве которых могут выступать полуволновые вибраторы с нелинейной нагрузкой в виде диода, состоит в том, что фаза рассеянного сигнала, если этот сигнал является нелинейным продуктом (НП) четного порядка будет зависеть от направления включения нелинейного элемента в НР. Фаза меняется на π при изменении направления его включения на

обратное.

Для выяснения качественной картины формирования рассеянного поля предположим, что НР могут принимать с равной вероятностью две ориентации, соответствующие рассеянию без потери фазы и сдвигу ее на π . Учитывая сказанное система может быть разбита на два подмножества m и ℓ ($m + \ell = N$), отличающихся сдвигом по фазе, вносимом в рассеянный сигнал при нелинейном преобразовании спектра падающего поля. Ее эффективный поперечник рассеяния (ЭПР) может быть представлен в виде

$$\sigma = 4\pi R_0^2 \left| \frac{E_p}{E_1} \right|^2 = \sigma_0 \left| \sum_{\nu=1}^m \exp\{-j(2kx_{\nu}\varphi + 2ky_{\nu})\} + \sum_{\gamma=1}^{\ell} \exp\{-j(2kx_{\gamma}\varphi + 2ky_{\gamma} + \pi)\} \right|^2. \quad (2)$$

Если координаты всех рассеивателей статистически независимы, то каждое из слагаемых (2) можно рассматривать как сумму большого числа синусоидальных колебаний со случайными аргументами, распределенными равномерно в интервалах

$$2kx_{\min} < 2kx_{\nu\gamma} < 2kx_{\max} \quad \text{и} \quad 0 < 2ky_{\nu\gamma} < 2\pi.$$

Модуль суммы при достаточно большом N распределен по закону Релея. Среднестатистическое по φ значение будет равно

$$\bar{\sigma}_{\varphi} = \sigma_0 N, \quad (3)$$

Таким образом в этом случае так же, как и при линейном рассеянии и при n нечетном, среднее по φ значение σ равно арифметической сумме ЭПР одиночных рассеивателей.

Остановимся на частных случаях. Пусть все N рассеивателей сосредоточены в достаточно узкой полосе Δy , чтобы можно было считать $y_{\nu\gamma} = y_0$ (рассеиватели расположены в плоскости фронта волны). Очевидно, что при n нечетном ($\ell = 0$) и $\varphi = 0$, поскольку

$$\left| \sum_{\nu=1}^N \exp(-j2ky_0) \right| = N,$$

величина ЭПР будет равна

$$\sigma = \sigma_0 N^2, \quad (4)$$

т. е. имеет место когерентное сложение рассеиваемых сигналов. При четном n

$$\sigma = \sigma_0 (m - \ell)^2, \quad (5)$$

т.е. σ — случайная величина, при этом $0 \leq \sigma \leq \sigma_0 N^2$. Поскольку m так же как и ℓ распределено по биномиальному закону, то можно показать, что среднее значение (5) по множеству реализаций системы будет равно

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 N. \quad (6)$$

Расположим такую же полосу рассеивателей вдоль оси y . Тогда при n нечетном

$$0 \leq \left| \sum_{\nu=1}^N e^{-2ky_\nu} \right| \leq N,$$

т.е. $0 \leq \sigma \leq \sigma_0 N^2$.

Среднее значение $\bar{\sigma}$ по множеству реализации равно $\sigma_0 N$. Легко видеть, что такое же значение $\bar{\sigma}$ будет иметь место и при четном n . Возвратимся к общему случаю (2). При статистической зависимости элементов множеств m и ℓ по своему положению, например, при $m = \ell$ и $x_\nu = x_\gamma$, $y_\nu = y_\gamma$ имеем тривиальный результат $\sigma = 0$. С уменьшением L , как это следует из (2), величина σ теряет зависимость от φ и стремится к

$$\sigma = \sigma_0 (m - \ell)^2,$$

а ее среднее по множеству реализаций, вследствие выше сказанного, равно $\bar{\sigma} = \sigma_0 N$. При n нечетном $\bar{\sigma} = \sigma_0 N^2$.

Обратимся к частотным свойствам системы. Зависимость обратного рассеяния данной системой от частоты получаем, подобно тому, как это сделано в [2], из (2), положив $\varphi = 0$ и выражая k через ω ,

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 \left| \sum_{\nu=1}^m \exp \left\{ -j2 \frac{n\omega}{c} y_\nu \right\} - \sum_{\gamma=1}^{\ell} \exp \left\{ -j2 \frac{n\omega}{c} y_\gamma \right\} \right|^2. \quad (7)$$

Заметим, что частотные свойства системы не зависят от ее протяженности вдоль фронта волны.

Найдем среднее число выбросов $\bar{\xi}$ огибающей принимаемого сигнала при перестройке частоты падающего поля на величину $\Delta\omega$. Распределение огибающей при изменении ω , как уже отмечалось, является релейским, а среднее число ее выбросов над средним уровнем не зависит от числа N . В рассматриваемом случае при изменении ω будут наблюдаться два одинаковых релейских процесса, создаваемых множествами m и ℓ , и их сумма будет иметь те же статистические свойства, что и слагаемые. Поэтому можно показать, что

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{y} \Delta\omega n}{2c} e^{-\pi/4}. \quad (8)$$

Аналогично, в виду симметрии φ и ω в (1) можно найти среднее число выбросов огибающей при повороте системы на угол φ :

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{x}\omega n\varphi}{2} e^{-\pi/4}. \quad (9)$$

Таким образом, анализ показывает, что существенные различия в средних уровнях помех, возникающих на четных и нечетных гармониках, имеют место в случае протяженных множеств НР, когда наибольший размер их находится в плоскости фронта падающей волны, а также при детерминированном расположении НР. В последнем случае уровень нелинейных продуктов может быть снижен соответствующим порядком размещения их источников. Среднее число выбросов огибающей принимаемого сигнала при изменении частоты падающего поля и угла наблюдения зависит при прочих равных условиях, так же как и для системы линейных рассеивателей [2], соответственно от продольного и поперечного размеров множества. Это обстоятельство может быть использовано для получения оценок размеров области, занимаемой источниками помех.

ЛИТЕРАТУРА

1. Babanov N. Yu., Gorbachev A. A., Zaboronkova T. M., Lartsov S. V. Investigation of system of nonlinear interference sources // 12 th Intern. Wroclaw Symp. EMC. 1994.
2. Варшавчик М. Л., Кобак В. О. // 1972. Т. 17. N 1. С. 149.

Научно-исследовательский
радиофизический институт,
Н.Новгород

Поступила в редакцию
12 мая 1994 г.

THE SCATTERING OF HIGHER HARMONICS BY A STATISTICAL SYSTEM OF NONLINEAR SCATTERERS

L. V. Vasenkova, A. A. Gorbachev