

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ**

**Известия высших учебных заведений**

**РАДИОФИЗИКА**

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XXXVIII N 5

Нижний Новгород

1995

**Содержание**

Волков Е. И., Романов В. А. Бифуркации в системе двух одинаковых диффузионно-сцепленных релаксационных брюсселяторов.....	373
Якимов И. Л. Математическое моделирование двумерных задач дифракции на экранах сложной формы .....	402
Савченко В. В. Метод минимакса энтропии в задаче идентификации линейных динамических объектов.....	415
Пименов С. Ф., Руденко М. А. Отражение радиоволн, многослойной средой с шероховатыми границами и неоднородностями диэлектрической проницаемости слоев.....	422
Исааков М. В., Пермяков В. А. Излучение щелевых антенн через нелинейный плазменный слой.....	436
Шкиль В. М., Рыжак А. В. Дифракция плоских волн на ёшепелете с многослойным диэлектрическим включением.....	444
Новиков В. В., Соловьев Ю. Н. Асимптотика собственных волн плавно-нерегулярного сферического анизотропного волновода .....	457
Фильченков С. Е., Юнаковский А. Д. Применение гармонических возмущений к расчёту периодически гофрированных волноводов.....	467
Малышев В. М., Усыченко В. Г. Метод определения числа независимых источников НЧ-шума в нелинейных двухполюсниках .....	481

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С.Я.БРАУДЕ, А.В.ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В.Л.ГИНЗБУРГ (главный  
редактор), Л.М.ЕРУХИМОВ (зам.главного редактора),  
В.В.ЖЕЛЕЗНИКОВ, В.А.ЗВЕРЕВ, Ю.Л.КЛИМОНТОВИЧ,  
А.Н.КОНДРАТЕНКО, Ю.В.КРАВЦОВ, В.Н.КРАСИЛЬНИКОВ,  
А.Н.МАЛАХОВ, В.В.НИКОЛЬСКИЙ, В.Ю.ПЕТРУНЬКИН,  
М.И.РАБИНОВИЧ, А.И.САИЧЕВ, А.А.СЕМЕНОВ, С.А.ТАГЕР,  
В.И.ТАЛАНОВ, В.В.ТАМОЙКИН, Д.И.ТРУБЕЦКОВ,  
В.И.ТУРЧИН, В.П.УРЯДОВ, Г.И.ФРЕЙДМАН, А.В.ЯКИМОВ

Ответственный секретарь редакции О.А.ШЕЙНЕР

Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.  
Усл.печ.л. 12, 60. Усл.кр.-отт. 12, 60. Уч.-изд.л. 13, 90  
Тираж 400 экз. Заказ 400/с Цена 3000 р.

---

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,  
ул.Большая Печерская, 25,  
Научно-исследовательский радиофизический институт,  
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика".  
Телефон 36-01-71, e-mail [rjf@nirfi.sci-nnov.ru](mailto:rjf@nirfi.sci-nnov.ru)

---

Отпечатано с готового набора

Типография НОКГС ООП  
603600, Нижний Новгород, ул.Ошарская, 64

# БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ДИФФУЗИОННО-СЦЕПЛЕННЫХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ БРЮССЕЛЯТОРОВ

*E. I. Волков, B. A. Романов*

Проведен двухпараметрический бифуркационный анализ динамики системы двух одинаковых асимметрично сцепленных брюсселяторов. Вычислены границы устойчивости неоднородных стационарных состояний и периодических аттракторов как функции силы связи и одного из свободных параметров. Изучались возможности существования различных аттракторов, приводящих к мультиритмичности динамики, рассмотрены бифуркационные переходы между ними. Показано, что релаксационность осциллятора играет важнейшую роль в упрощении фазовой диаграммы, поскольку устраняет перекрытие областей существования различных решений. Предполагается, что результаты характеризуют, в первую очередь, свойства диффузионной связи, поэтому могут быть применены при исследовании систем других осцилляторов.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Сцепленные нелинейные осцилляторы применяют для описания широкого класса явлений, таких как мультиритмичность сердца [3], сложное поведение электрических контуров [9], ансамблей эпителиальных клеток [4], химических реакций [5–8, 10] и т. д. Явление нарушения симметрии в системах одинаковых осцилляторов — существование неоднородных стационарных решений (IHSS) — впервые наблюдали Prigogine and Lefever [1] при исследовании диффузионно связанных одинаковых брюсселяторов. Tyson and Kauffman [2] на этой же модели подробнее исследовали область существования таких решений, обнаружили пространственно неоднородный предельный цикл (IHLC), но не определили границ устойчивости IHSS и IHLC и их взаимосвязь. Bar-Eli в работах [5–7] показал, что IHSS существуют в широкой области параметров для многих моделей химических осцилляторов и поэтому представляют значительный интерес. Моделируя два сцепленных реактора Белоусова–Жаботинского механизмом, предложенным Field–Körös–Noyes, он изучал связь IHSS с противофазным периодическим решением, но бифуркационный анализ не довел до конца. В работе [8], на модели двух связанных идентичных брюсселяторов с нескаллярной связью  $D_x \neq D_y$ , был тщательно изучен переход

к хаотическому аттрактору от синфазного режима через последовательность бифуркаций: синфазный — противофазный режим — тор — хаотический аттрактор. Режимы, при которых появляются новые частоты, квазипериодическое и хаотическое поведения, найдены численно и проверены в экспериментах на химических реакторах [10]. В той же работе авторы предложили наглядное, хотя не всегда корректное, качественное объяснение устойчивости противофазного режима.

В работах [11–13], для слабо нелинейных моделей (каждый осциллятор вблизи бифуркации Хопфа) и при некоторых дополнительных упрощениях структуры векторного поля индивидуального осциллятора, авторам удалось аналитически доказать существование и устойчивость различных неоднородных решений: противофазного, квазипериодического, "фазовой ловушки", IHSS. Были изучены области устойчивости на параметрической плоскости и некоторые бифуркации в границах окон устойчивости этих решений. Однако, большинство реальных химических и биологических процессов описываются релаксационными осцилляторами, векторное поле которых нельзя рассматривать как слабо нелинейное.

Исследование сцепленных релаксационных гипотетических осцилляторов, описывающих процессы в клеточных мембранах, было проведено в работах [14, 15]. Показано, что, если связь ввести только по медленной переменной, то противофазный режим существует в широкой области параметров, и несимметрия связи и самой развертки колебаний увеличивают область, где сосуществуют синфазный и противофазный режимы (частотный триггер).

К сожалению, выполненные до сих пор и не связанные между собой работы, ограничивались очень узкой областью параметров: так, например, в [8] изучались решения, появляющиеся только в области (0.05295–0.05206) по параметру связи. Остались невыясненными вопросы: о величине областей устойчивости синфазного, противофазного и пространственно неоднородного решений, о бифуркационных переходах между ними и всеми стационарными состояниями, возможность сосуществования этих решений и роль релаксационности.

В этой работе мы провели двухпараметрический бифуркационный анализ стационарных и периодических решений модели двух одинаковых брюсселяторов, сцепленных только по медленной переменной. В отличие от гипотетических мембранных осцилляторов и от осцилляторов, взятых в "нормальной форме" [11–13], брюсселятор является не только широко известной моделью, но и описывает реальную химическую реакцию [16]. Мы показали, что ранее найденное в узкой области параметрического пространства вблизи бифуркации Хопфа противофазное решение более характерно для достаточно релаксационных осцилляторов. Нами получены в параметрическом пространстве границы областей существования и устойчивости однородных и неоднородных решений, а именно: син-

фазного, IHSS, IHLC, противофазного квазипериодического и хаотического режимов. Проведена классификация найденных решений и выяснена возможность их существования, сделан анализ бифуркаций переходов между ними. Результаты объединяют предыдущие работы и подтверждают гипотезу, выдвинутую ранее в [12], что существует универсальная структура последовательностей бифуркаций в границах окон устойчивости, обусловленная диффузионной связью.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Для поиска решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений применялись подпрограммы из библиотек NAG, CERN и программа интерактивного построения траекторий TRAX, разработанная в Центре Компьютерных Исследований в Пущино. Эти программы являются модификациями метода Рунге–Кутта–Мерсона с двойной точностью. Основные результаты по бифуркационному анализу получены с помощью программного пакета AUTO, любезно предоставленного нам проф. Н. В. Keller.

AUTO [17] — набор программ на Фортране, предназначенный для продолжения стационарных или периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений по параметру, по методу псевдо-дуг (вычисляются траектории в расширенном пространстве переменных и параметров). Периодические решения аппроксимируются сеткой точек по методу коллокаций Гаусса. Важной особенностью является то, что для продолжения решения по параметру не требуется проводить интегрирование системы, т. к. итерируется первоначально заданное решение. Вдоль получающихся ветвей вычисляются показатели Ляпунова (для стационарных решений) или Флоке (для периодических), определяются точки бифуркаций и касательные векторы к другим ветвям. Математические алгоритмы позволяют в ряде случаев осуществлять “переключение ветвей”, а также двухпараметрическое продолжение сингулярных точек.

## 3. ДИНАМИКА ИЗОЛИРОВАННОГО БРЮССЕЛЯТОРА

Модель осциллятора, используемая нами, имеет вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= A - (B + 1)x + x^2y, \\ dy/dt &= Bx - x^2y. \end{aligned} \quad (1)$$

Свойства системы (1) хорошо изучены, и мы ограничимся перечислением лишь тех из них, которые понадобятся в дальнейшем.

Стационарное решение системы  $X_s = A$ ,  $Y_s = B/A$  теряет устойчивость при  $B = A^2 + 1$ , и возникает устойчивый предельный цикл.

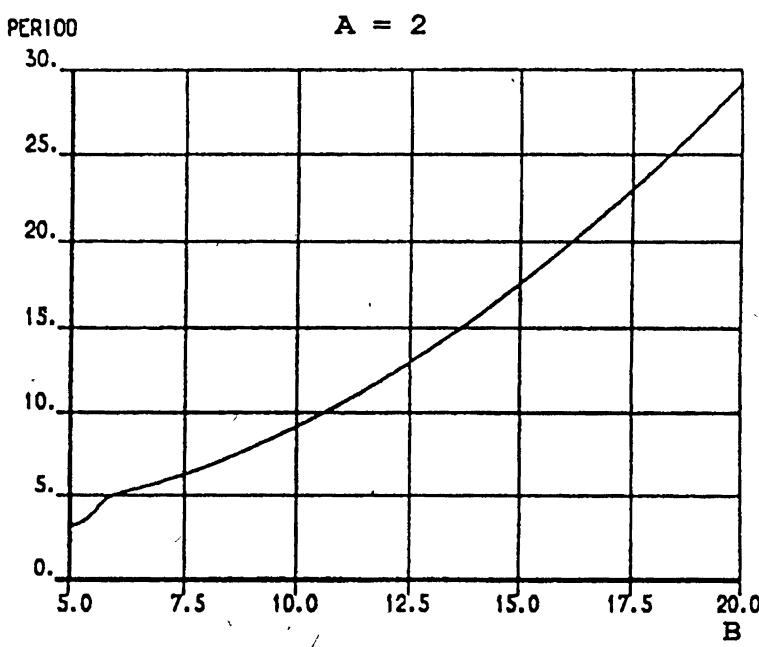
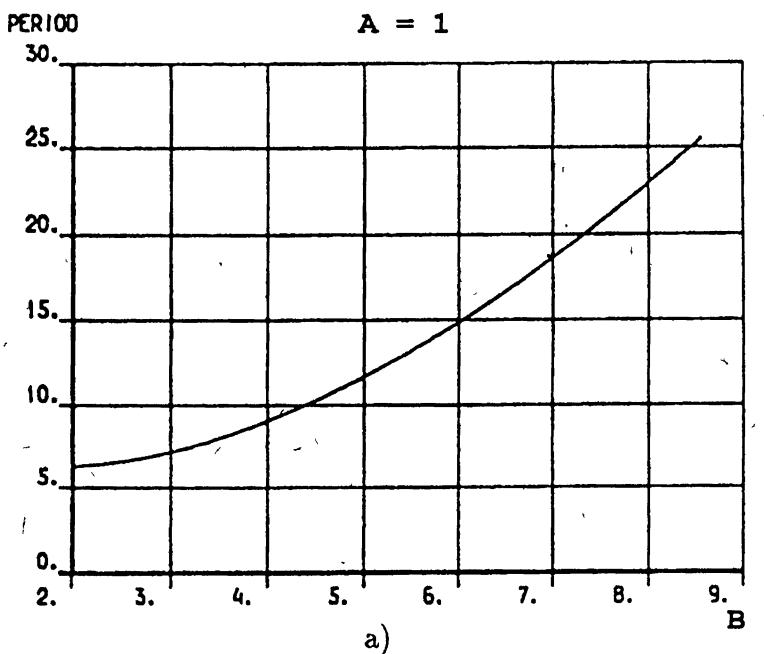
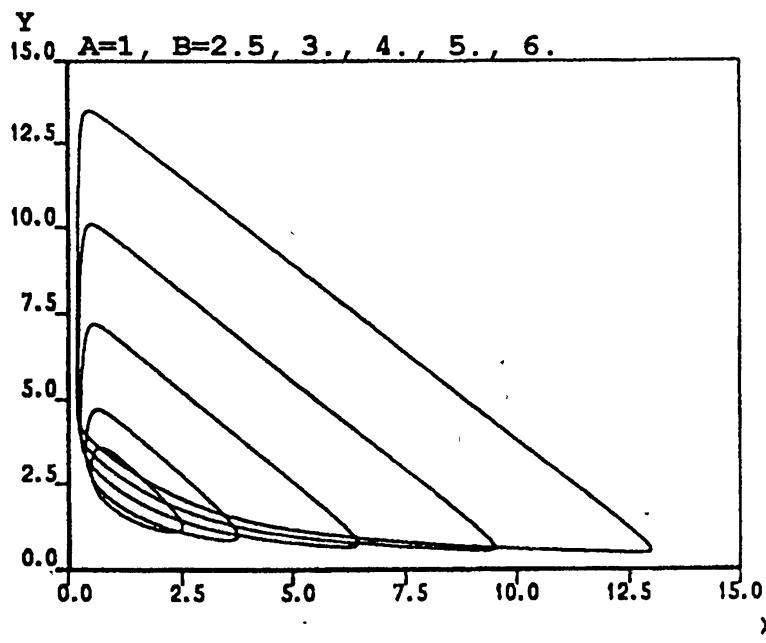
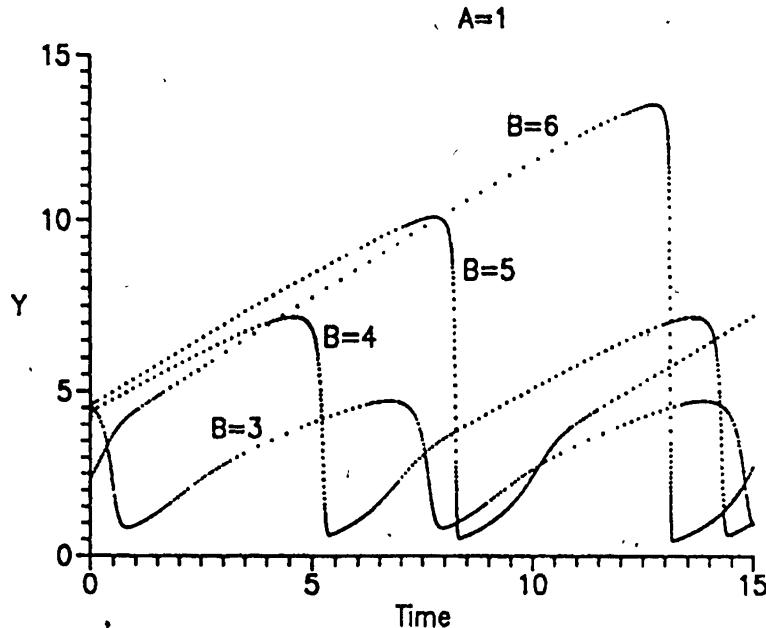


Рис. 1 а, б. Свойства одного брюсселятора.

а), б) зависимость периода колебаний от  $B$  при  $A = 1$  и  $A = 2$ .



в)



г)

Рис. 1 в, г. Свойства одного брюсселятора.

в), г) форма цикла и развертка колебаний, соответственно.

На рис. 1а, б показана зависимость периода колебаний от  $B$  для  $A = 1$  и  $A = 2$ , фазовый портрет системы, при различных  $B$ , представлен на рис. 1в, развертки по времени приведены на рис. 1г. Движение по циклу происходит по часовой стрелке. Изоклины системы (1) имеют вид:

$$y^{x=0}(x) = \frac{B+1}{x} - \frac{A}{x^2} \text{ — изоклина } x \text{ с вершиной } x = \frac{2A}{B+1}, y = \frac{(B+1)^2}{4A},$$

$$y^{y=0}(x) = \frac{B}{x} \text{ — изоклина } y, \text{ изображены на рис. 2.}$$

Численные расчеты показывают, что размер предельного цикла по  $y$  ( $y_{\max} - y_{\min}$ ) аппроксимируются выражением  $(B + 1)^2 / 4A$ .

Можно выделить три характерных времени движения для этого предельного цикла (см. рис. 2):

$T_{\text{медл.}} \simeq$  (пропорционально)  $\simeq 1/v_{x=0} \simeq 1/A$  — время движения по медленному (левому) участку изоклины  $x$ ;

время переска на изоклину  $y$  —

$$T_{\text{быстр.}} \simeq 1/x^2 y \simeq 1/(B/A)^3; \text{ и}$$

$T_{\text{дов. медл.}} \simeq 1/v_{y=0} \simeq 1/(x - A) \simeq 8A/(B + 1)^2$  — время движения по изоклине  $y$ . Таким образом:

$$T_{\text{медл.}} : T_{\text{быстр.}} : T_{\text{дов. медл.}} = \frac{1}{A} : \frac{1}{(B/A)^3} : \frac{8A}{(B + 1)^2}.$$

Понятие релаксационности введем как  $T_{\text{медл.}} / (T_{\text{быстр.}} + T_{\text{дов. медл.}})$ . Например, при  $B > 3$  при  $A = 1$  и  $B > 6$  при  $A = 2$  колебания становятся резко релаксационными (см. рис. 1в, г), где  $x$  — быстрая,  $y$  — медленная переменные.

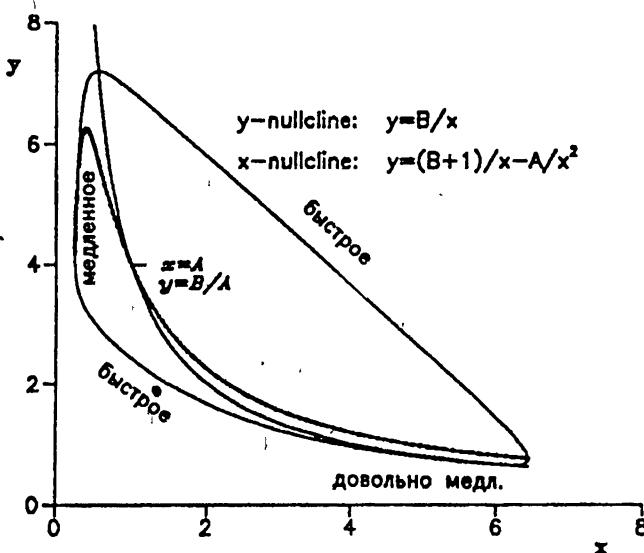


Рис. 2. Изоклины и характерные скорости на цикле брюсселятора.

Влияние параметра  $A$  на релаксационность осциллятора можно оценить следующим образом: при увеличении  $A$  возрастают характерные

величины параметра  $B$  (т. к.  $B_{\text{crit}} = A^2 + 1$ ), поэтому для предельного цикла относительно уменьшается  $T_{\text{медл}}$  и растет  $T_{\text{быстр}}$ , т. е. релаксационность падает.

Для этой модели надо отметить слабую зависимость скорости движения по медленному участку от величины параметра  $B$  (наклон медленных участков на рис. 1г приблизительно одинаков):  $v_{\text{медл}} = \dot{y}_{\text{медл}} = -A - A/(B+1)$  (т. к.  $\dot{x} = 0$ ). (Всюду ниже предполагается  $A > 1$ , а  $B > A^2 + 1$ .) Таким образом, параметр  $A$  определяет скорость на медленном участке цикла, а параметр  $B$  — его длину. Поэтому период колебаний растет тоже как  $O(B^2)$ .

#### 4. ДВА СВЯЗАННЫХ БРЮССЕЛЯТОРА. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим модель, в которой два идентичных брюсселятора соединены через полупроницаемую мембрану диффузионной связью по медленной переменной:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= A - (B+1)x_1 + x_1^2 y_1, \\ dy_1/dt &= Bx_1 - x_1^2 y_1 + D(y_2 - y_1), \\ dx_2/dt &= A - (B+1)x_2 + x_2^2 y_2, \\ dy_2/dt &= Bx_2 - x_2^2 y_2 + D(y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (2) для упрощения анализа мы исключили связь по быстрой переменной, уменьшив тем самым число свободных параметров до трех ( $A, B, D$ ). Это приближение необходимо также сделать потому, что в релаксационной системе связь по быстрым переменным, воздействуя на самый чувствительный — медленный участок цикла, разрушает неоднородные решения (см. [12, 13]). Роль такого упрощения будет подробнее рассмотрена при обсуждении результатов.

Точка  $x_{1,2} = A$ ,  $y_{1,2} = B/A$ , очевидно, является стационарным (однородным) решением при любом выборе параметров. Собственные значения матрицы Ляпунова в этой точке следующие:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (B - 1 - A^2) \pm \sqrt{(B - 1 - A^2)^2 - 4A^2} \right\},$$

не зависят от  $D$ ,

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \left\{ (B - 1 - A^2 - 2D) \pm \sqrt{(B - 1 - A^2 - 2D)^2 - 4(A^2 + 2D(1 - B))} \right\}.$$

Отметим линии бифуркаций:

- $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$  при  $B = A^2 + 1$  (бифуркации Хопфа: когда пара сопряженных  $\lambda_i$  пересекает мнимую ось,
- $\operatorname{Re} \lambda_{3,4} = 0$  при  $B = A^2 + 1 + 2D$  (бифуркации Хопфа —  $HB1$ ),
- $\lambda_4 = 0$  при  $B = A^2/2D + 1$  (простые сингулярные точки —  $BP$ ).

Обозначим  $p$  число таких  $\lambda_1$ , у которых  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ , и построим полученные линии бифуркаций на плоскости  $(B - D)$  (см. рис. 3). Введение связи оказывает влияние на бифуркацию Хопфа  $B_{\text{ср}} = A^2 + 1$ : при  $D > 1/2$  для  $B < B_{\text{ср}}$  однородное стационарное решение неустойчиво ( $p = 1$ ), поэтому рождающееся в бифуркации Хопфа  $p = 1 \rightarrow p = 3$  синфаэное решение будет неустойчивое.

Надо отметить, что взаимодействие брюсселяторов, зависит не только от параметра связи  $D$ , но и от величины  $B$ , т. к. она определяет размер предельного цикла  $(y_2 - y_1) \approx O(B^2)$ .

Кривая  $B = A^2/2D + 1$  пересекается с линией  $B = A^2 + 1 + 2D$  в точке  $E$ :

$$B_E = A^2 + 1 + 2D_E, \quad D_E = \left( \sqrt{A^4 + 4A^2} - A^2 \right) / 4,$$

в которой  $\lambda_{3,4} = 0$ . Для ориентации, при  $A = 1$ :  $B_E = 2.618$  при  $B_{\text{ср}} = 2$ , а  $D_E = 0.309$ , т. е. мы имеем дело со слабо релаксационными осцилляторами.

Кривая  $\lambda_4 = 0$ :  $B = A^2/2D + 1$  ( $BP$ ), в соответствии с теорией бифуркаций (см., например, [17]), определяет точки ветвления однородного стационарного решения  $x_{1,2} = A$ ,  $y_{1,2} = B/A$  на неоднородные (IHSS) — они симметричны относительно замены  $x_1, y_1 \rightarrow x_2, y_2$ . Аналитическим расчетом можно получить (см. [2]) условия их существования:

при  $B > A^2/2D + 1$  (см. рис. 3 — линия  $BP$ ) — только два неоднородных стационарных решения (осцилляторы “заперты” слева и справа от точки  $x = A$ ,  $y = B/A$ );

область, где есть четыре неоднородных стационарных решения: при  $D < A^2/4$  и  $2A/\sqrt{D} - 1 < B < A^2/2D + 1$ .

Сравнивая левое и правое неравенства, отметим, что область с четырьмя IHSS лежит выше  $B = 3$  при любых  $A$ . Следовательно, полная граница в параметрическом пространстве области существования неоднородных стационарных решений — это: линия точек поворота —  $LP$  (бифуркация, в которой устойчивое и неустойчивое решения, сливаясь, исчезают):

$$B = 2A/\sqrt{D} - 1 \quad (B > 3),$$

$$B = A^2/2D + 1 \quad (B < 3) — \text{линия точек ветвления } \lambda_4 = 0.$$

Мы будем рассматривать систему только при  $B > A^2 + 1$ , поэтому для  $A > \sqrt{2}$  ( $B = 3 = A^2 + 1$ ) границей будут только точки поворота  $LP$ .

Исследование устойчивости и бифуркаций неоднородных стационарных решений проводилось с помощью программы AUTO.

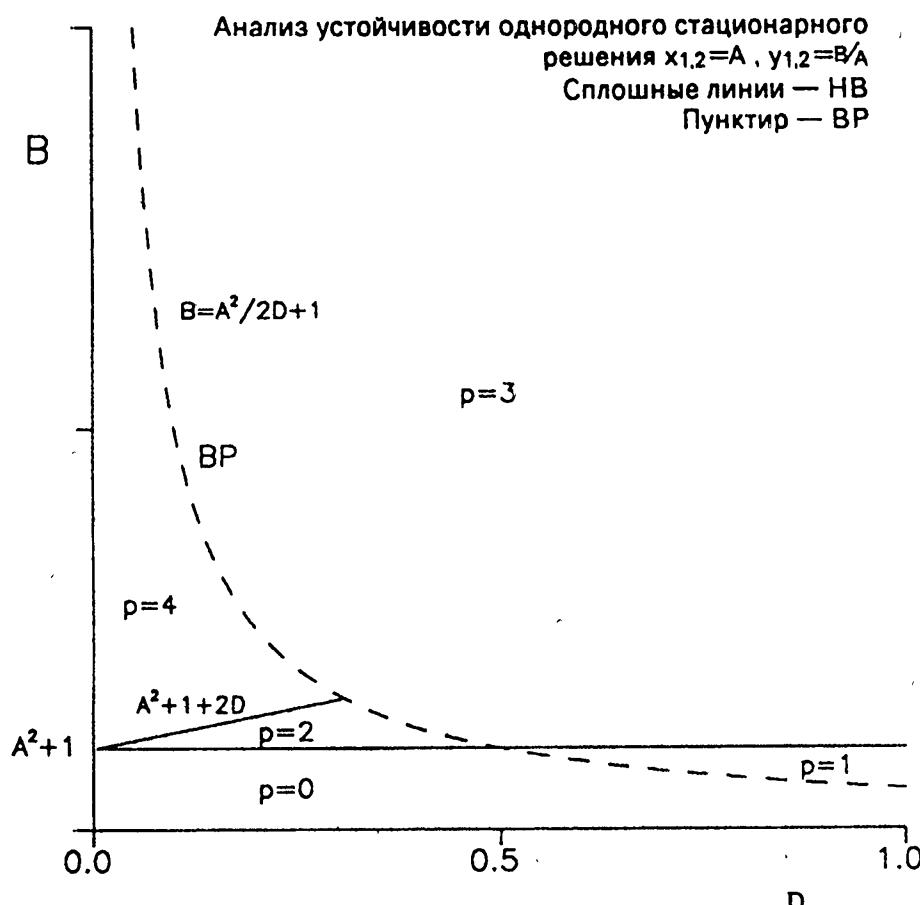


Рис. 3. Бифуркации однородного стационарного состояния (2), полученные аналитически. Указаны характерные величины для параметра  $D$ .

На рис. 4а, б, в, г показаны диаграммы продолжения однородного решения на плоскости ( $Y_1 - D$ ) для  $A = 1$  и  $A = 2$ , что соответствует горизонтальным сечениям рис. 3.  $Y_1$  — стационарное значение медленной переменной. Символом ■ обозначены бифуркации Хопфа ( $NB$ ), т. е. те значения параметра связи  $D$ , при которых стационарное решение системы (2), соответствующее выбранной ветви, претерпевает бифуркацию Хопфа (точки  $NB1$  соответствуют указанным выше); □ — точка пересечения ветвей  $BP$ , соответствует  $\lambda_4 = 0$ . Сплошной участок на ветвях — это открытое Prigogine and Lefever [1] устойчивое неоднородное стационарное решение. Область его устойчивости ограничена в параметрическом пространстве точками  $NB3$  (бифуркациями Хопфа), что связано с

рождением периодических решений (см. ниже). Из рис. 4а, б видно, что при  $A = 1$  эта область уменьшается при увеличении  $B$  от 2.5 до 2.9 (исчезает при  $B \approx 2.94$ ).

Точки  $HB1, 2, 3, BP$  и  $LP$  (см. диаграммы на рис. 4) продолжены по параметрам  $D$  и  $B$ , полученные кривые на плоскости  $(B - D)$  для  $A = 1$  и  $A = 2$  помечены на рис. 5а, б и рис. 6а, б индексом "st", соответственно. На диаграммах нанесены также и другие бифуркационные кривые, которые будут обсуждаться в следующих пунктах. Пунктиром обозначены линии точек простых бифуркаций ( $BP$ ), сплошными линиями — линии точек  $LP$ ,  $HB$  и др. бифуркаций стационарных и периодических решений. Кривая  $B = A^2/2D + 1$  — пунктирная линия  $BP_{st}$  — на рис. 5б показана только для  $B < 3$ . Видим, что устойчивость однородного состояния, исследованная аналитически (рис. 3), предопределяет основное разбиение плоскости управляющих параметров.

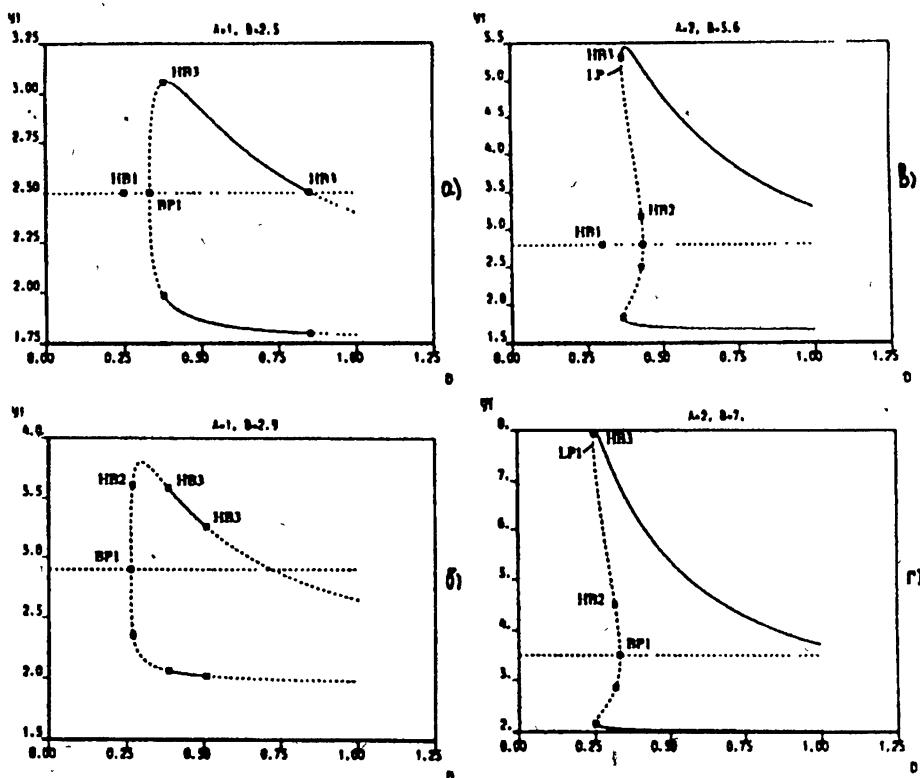


Рис. 4. Диаграммы бифуркаций стационарных состояний (2). Горизонтальный пунктир соответствует неустойчивому однородному состоянию.

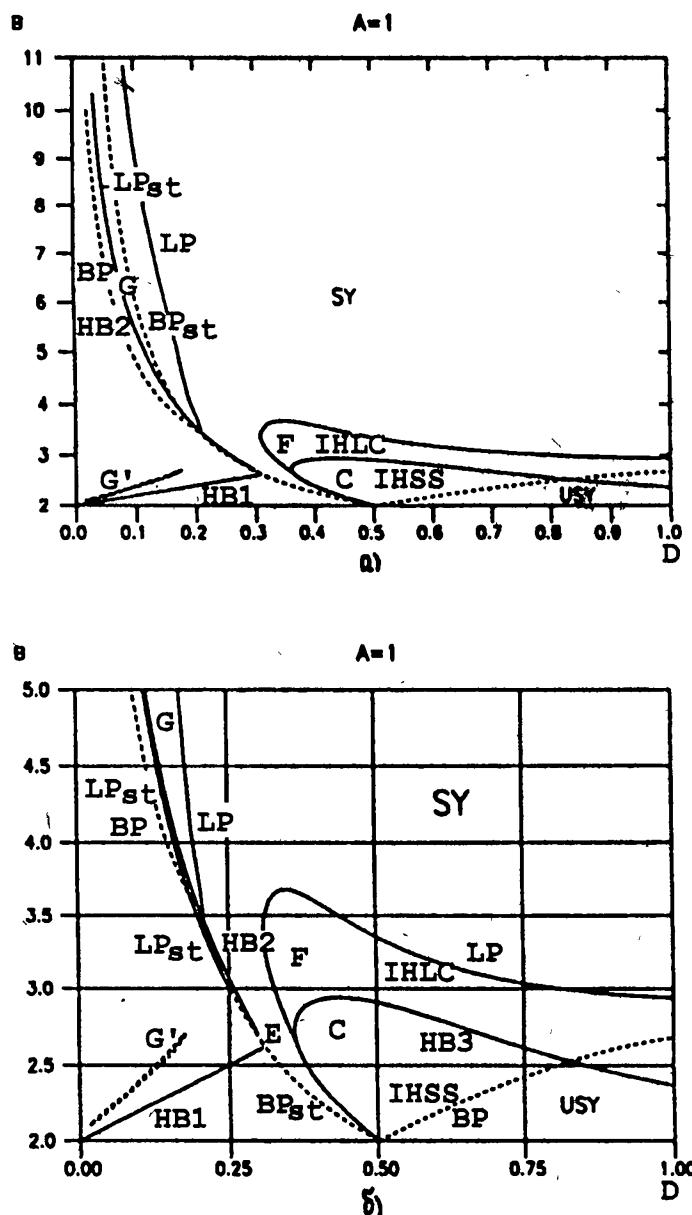


Рис. 5 а, б. Бифуркации решений (2) на плоскости  $(D - B)$ . Индексом "st" помечены линии бифуркаций стационарных решений. SY и USY — области устойчивого и неустойчивого синфазного режима, C — IHSS, F — IHLC, G, G' — противофазного решения.

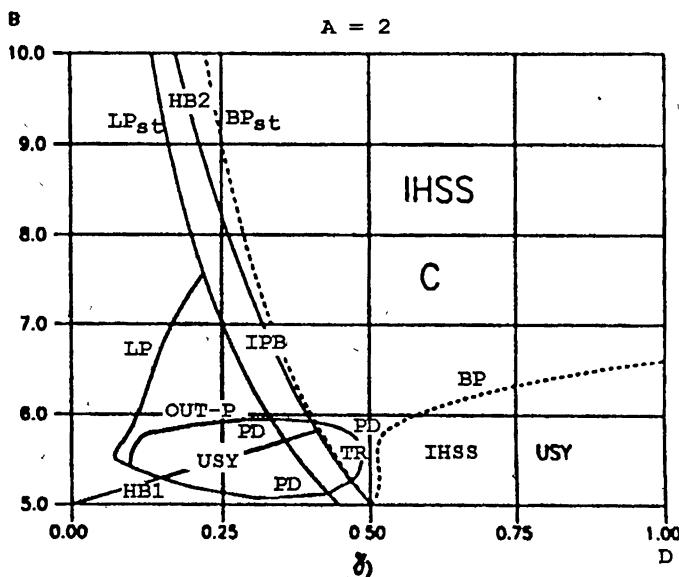
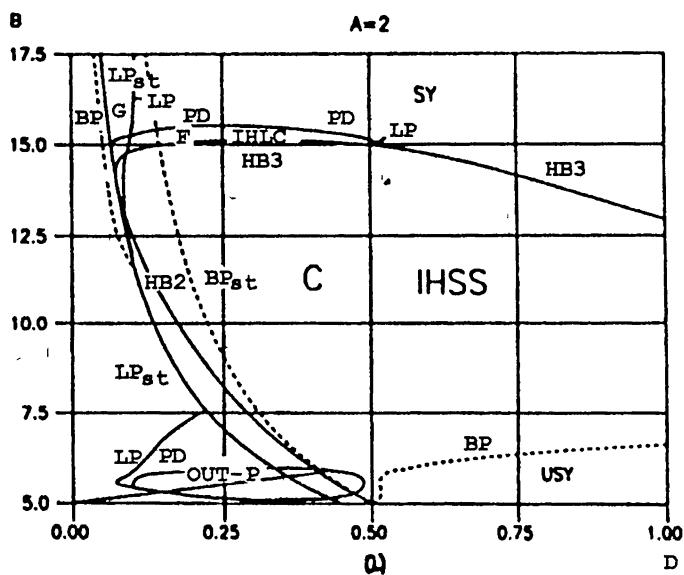


Рис. 6 а, б. Тé же бифуркационные кривые для  $A = 2$ . OUT-P (серый цвет) — область устойчивого петлевого противофазного режима.

Кривая точек  $HB3$  (на рис. 5, 6) ограничивает область устойчивости неоднородных стационарных решений (область  $C$ ). При  $A = 1$  область  $C$  лежит ниже  $B \approx 3$ , поэтому не была обнаружена в работе Bar-Eli [5]. С увеличением  $A$  (с уменьшением релаксационности) область  $C$  расширяется. При  $A = 2$  точки  $HB3$  и  $LP_{st}$  очень близки (см. рис. 4:  $\Delta D 10^{-4}$ ), поэтому на рис. 6а, б для  $B < 14$  показана только линия точек  $LP_{st}$ .

Следует отметить также, что линия точек  $HB3$  на рис. 6а при  $B_{singul} \approx 13.96$ ,  $D_{singul} = 0.0715$ , в сингулярной точке коразмерности 2, тангенциальную подходит к линиям точек  $LP_{st}$  и  $HB2$ . При этих значениях параметров изменяется направление бифуркаций Хопфа  $HB3$  и наблюдается усложнение поведения системы — появляются другие бифуркации.

## 5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

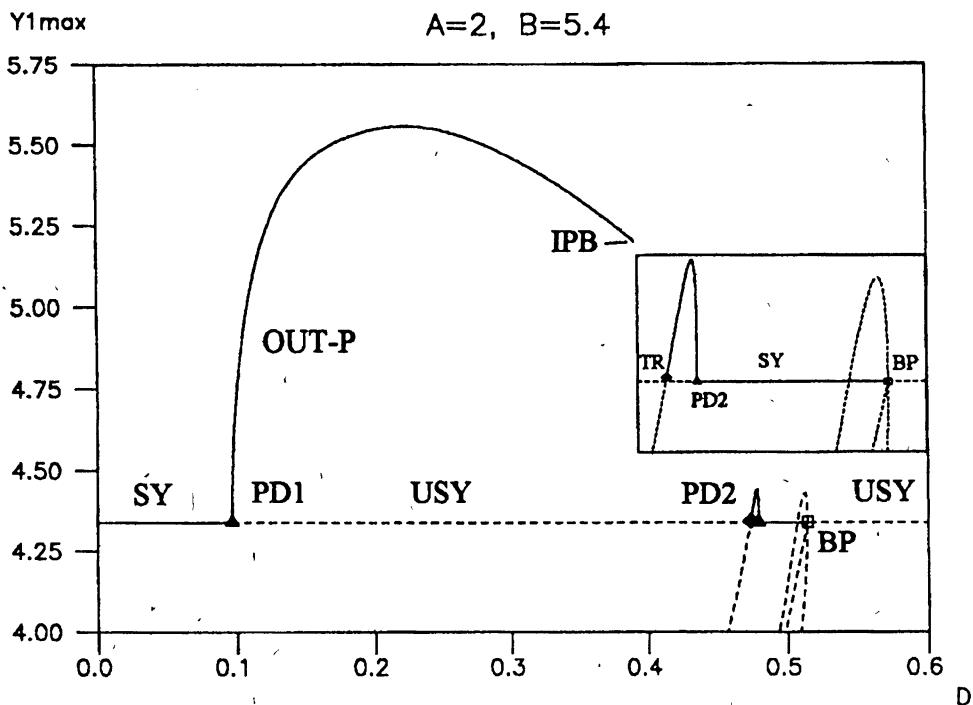


Рис. 7. Бифуркации синфазного решения.

**а)** Синфазное периодическое решение ( $SY$ ): Система (2) имеет решение, называемое синфазным (однородным), когда  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ . Это решение устойчиво для большинства значений параметров, кроме области, расположенной вблизи  $B = B_{cr}$  для  $D > 1/2$ , где рождается неустойчивый

синфазный цикл при бифуркации неустойчивого однородного стационарного состояния. На рис. 7 представлены диаграммы продолжения синфазного режима при  $A = 2$ ,  $B = 5.4$  по параметру связи. По вертикальной оси отложена амплитуда колебаний переменной  $y$ . Пунктирной линией показаны неустойчивые, сплошной — устойчивые решения. Правее точки  $BP$  однородное периодическое решение неустойчиво. Эта простая бифуркация —  $BP$  (один из показателей Флоке выходит из единичного круга) не приводит к рождению каких бы то ни было устойчивых решений и означает, что неравномерность движения по циклу превышает притяжение брюсселяторов  $D(y_2 - y_1)$ . Ветви неустойчивых неоднородных периодических решений, рождающихся в  $BP$  и существующих при  $D < D_{BP}$  с устойчивым синфазным режимом, характеризуют бассейн притяжения синфазного решения, т. к. эти циклы принадлежат сепаратрисной поверхности, разделяющей бассейны притяжения  $SY$  и  $IHSS$ , также устойчивых при этих значениях параметров.

При малых значениях  $D$  синфазное решение устойчиво (обозначено  $SY$ ). В точке, отмеченной  $PD1$ , с ним происходит бифуркация удвоения периода (один из показателей Флоке проходит через  $-1$ ), синфазное решение теряет устойчивость (обозначено  $USY$ ), и возникает устойчивый неоднородный периодический режим ( $OUT-P$ ), который будет описан в пункте в). С увеличением параметра  $D$ , в точке  $PD2$  синфазное решение вновь становится устойчивым в бифуркации удвоения периода при исчезновении другого устойчивого неоднородного решения.

Наличие этих бифуркаций удвоения периода при  $A = 2$ , возможно, объясняется более сложной зависимостью периода цикла свободного брюсселятора от параметра  $B$  для значений  $(5.4 \div 5.9)$ , как видно из рис. 16. На рис. 5, 6 показаны кривые продолжения по параметрам  $B$  и  $D$  точек  $PD1$ ,  $PD2$ ,  $BP$  — границ устойчивости синфазного решения. Точки  $PD1$  и  $PD2$  лежат на одной кривой, которая ограничивает область, обозначенную  $USY$ , в которой синфазное решение неустойчиво. Другая область  $USY$  расположена справа от кривой  $BP$ . Для остальных значений параметров синфазное решение устойчиво. Для значения  $A = 1$  не обнаружены бифуркации  $PD1$  и  $PD2$ , и синфазное решение при  $D < 1/2$  всегда устойчиво. Расчеты показывают, что бифуркация удвоения периода синфазного решения отсутствует для  $A < 1.25$ , и оно устойчиво при  $D < 0.5$ .

б) Пространственно неоднородный предельный цикл ( $IHLC$ ). Будем называть пространственно неоднородным предельным циклом такое периодическое решение системы двух связанных идентичных осцилляторов, при которых они движутся неодинаково вокруг пространственно разделенных центров (т. е. такой четырехмерный предельный цикл имеет несоппадающие проекции на плоскости  $x_i - y_i$  осцилляторов).

На рис. 8а, б показан вид проекций предельных циклов такого решения

на плоскость  $(x - y)$  при разном выборе параметров. Осцилляторы движутся по своим предельным циклам вокруг неустойчивых неоднородных стационарных решений. На рис. 8в представлена зависимость периода IHLC от величины  $D$  при  $B = 3.2$ .

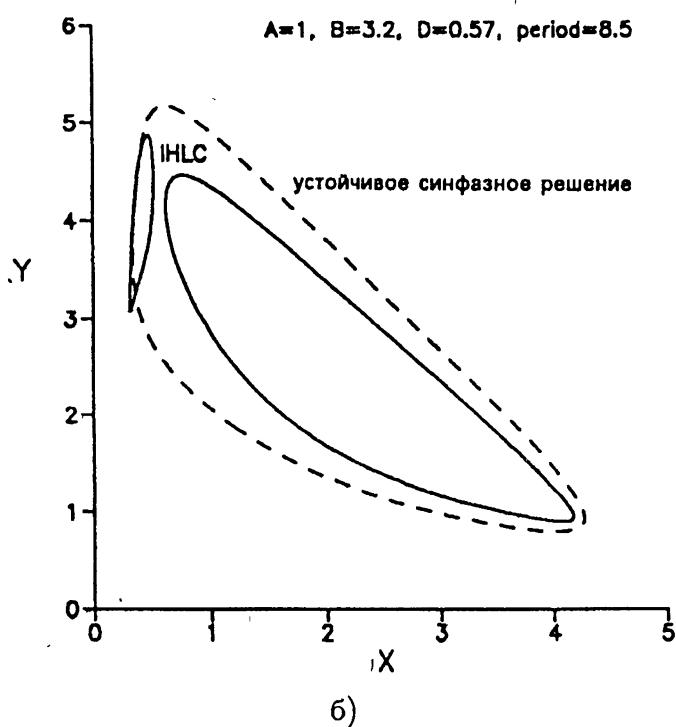
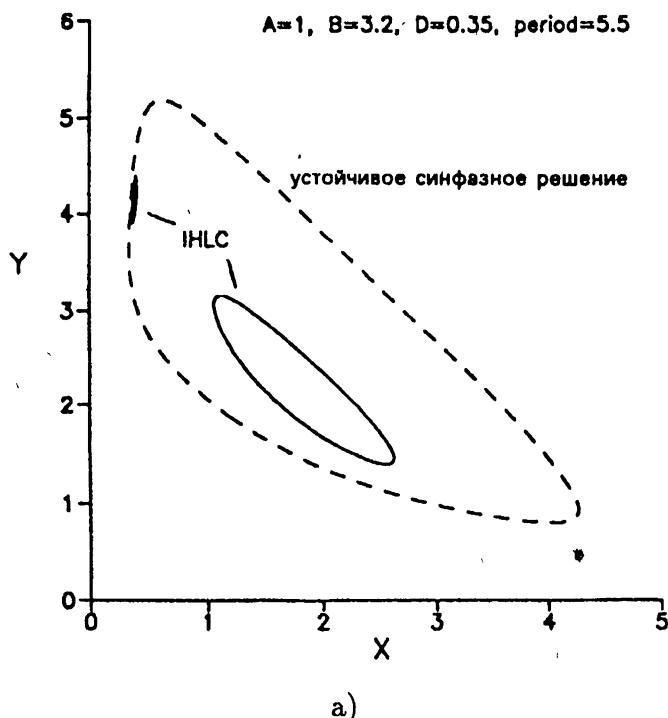
Качественно представить себе наличие такого решения можно, если рассматривать систему как два осциллятора, каждый вблизи бифуркации Хопфа, с разными уравнениями для медленной переменной: у одного член  $D(y_2 - y_1)$  добавлен, а у другого вычен. Поэтому у каждого свое стационарное решение-седло, лежащее на изоклине  $x$ , одно — слева, другое — справа от точки  $x_s = A$ ,  $y_s = B/A$ , вокруг которых они вращаются, проходя максимумы и минимумы с небольшим сдвигом по фазе.

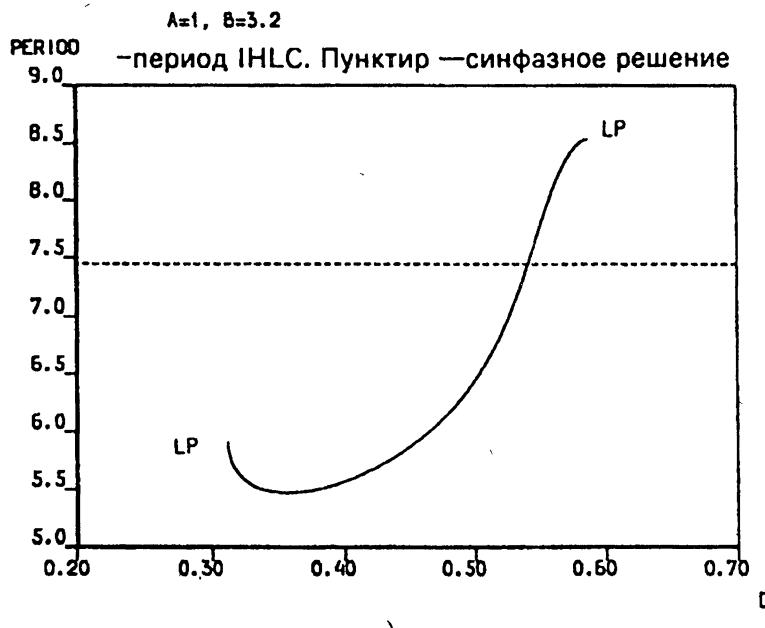
Как мы уже отмечали, устойчивое неоднородное периодическое решение рождается в бифуркации Хопфа при потере устойчивости неоднородных стационарных решений (точки  $HB3$  на рис. 4). Поэтому этот режим (обозначим эту область  $F$ ) существует при значениях параметров, выбранных над областью  $C$  на плоскости  $(D - B)$ . С помощью пакета AUTO получены границы области на плоскости бифуркационных параметров, внутри которой неоднородное периодическое решение устойчиво (см. рис. 5, 6). При  $A = 1$  границей устойчивости решения являются точки  $LP$  и  $HB3$ . При значениях  $D$  внутри области  $(USY \cap F)$  пространственно неоднородный цикл — единственное устойчивое решение системы (2).

Для  $A > 1.25$  граница области  $F$  устроена сложнее. На рис. 6а видно, что устойчивый IHLC при  $A = 2$  существует лишь для значений  $D < 0.61$ , когда  $HB3$  становится суперкритической, и сверху появляется соответствующая граница устойчивости — линия точек  $LP$  (место появления показано на рис. 6а жирной стрелкой). Но при  $D$  меньших некоторого значения  $D_{cr}$  тип верхней границы устойчивости IHLC по параметру  $B$  изменяется от  $LP$  к бифуркации удвоения периода. Рис. 9 показывает продолжение IHLC по параметру  $B$  при  $D = 0.2$ , которое выявило последовательность бифуркаций удвоения периода IHLC для  $D < D_{cr}$ . Численный расчет показывает, что  $D_{cr} = 1/2$  и не зависит ни от  $A$ , ни от  $B$  для всех  $A > 1.25$  (на рис. 6а точка  $D = D_{cr}$  отмечена стрелкой). Для первых трех бифуркаций число Фейгенбаума равно:

$$\delta = (B_2 - B_1)/(B_3 - B_2) \cong 5.9.$$

Таким образом, возникает хаотический аттрактор, обладающий небольшим бассейном притяжения и существующий с синфазным решением. На плоскости  $(D - B)$  он расположен в тонком слое вблизи линии точек  $PD$  (например,  $A = 2$ ,  $D = 0.1$ , для значений  $B \in (15.322 - 15.324)$ ). Каскады бифуркаций удвоения периода происходят для всех значений  $D < D_{cr}$  и  $D > D_{singul}$ , т. е. сингулярной точки соприкосновения линий бифуркаций  $HB3$  и  $LP_{st}$ .





в)

Рис. 8 а, б, в. а), б) Проекции IHLC на плоскость  $(x - y)$ , в) Зависимость периода IHLC от  $D$ .

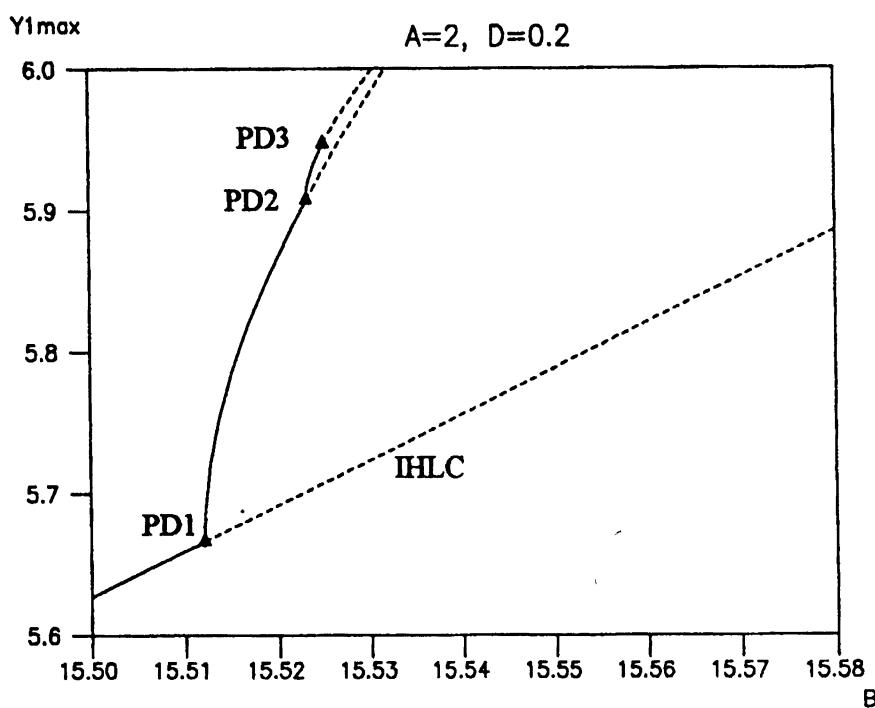


Рис. 9. Каскад бифуркаций удвоения периода IHLC.

в) Противофазное решение (OUT-P). В отличие от IHLC, при котором осцилляторы движутся вокруг пространственно разделенных центров, система (2) имеет другое симметричное периодическое решение, называемое противофазным, когда осцилляторы движутся по одной и той же орбите, но с фазовым сдвигом  $T/2$  ( $T$  — период одного цикла). Проекция такого цикла на плоскость  $(y_1 - y_2)$  симметрична относительно линии  $y_1 = y_2$ .

В точках бифуркаций Хопфа  $HB1$  однородного стационарного состояния (см. рис. 4а, в) происходит рождение неустойчивого противофазного решения. На рис. 10 показана бифуркационная диаграмма продолжения его по параметру  $D$ . По вертикальной оси отложена амплитуда колебаний. Пунктирными линиями, как и прежде, отмечены неустойчивые решения, сплошными — устойчивые. Двигаясь справа налево, видим, что в точке бифуркации в тор ( $TR$ : два комплексно-сопряженных показателя Флоке попадают в единичный круг) противофазное решение приобретает устойчивость для  $D \in (0.1518 - 0.1592)$ . Эта бифуркация означает, что седловое противофазное решение рождает некоторое неустойчивое квазипериодическое решение, а само слева от  $TR$  становится устойчивым (эта бифуркация аналогична субкритической бифуркации Хопфа). Осцилляторы движутся по одному и тому же циклу, сходному с синфазным, но несколько меньшему по амплитуде — такое решение будем называть простым противофазным решением. Этот термин скорее качественный, но необходим в дальнейшем для классификации решений.

При дальнейшем уменьшении  $D$  (рис. 10, врезка) противофазное решение теряет устойчивость в простой бифуркации  $BP$  типа “вилка”, когда появляются два устойчивых периодических решения. Они несимметричные, потому что проекции их орбит на плоскость  $(y_1 - y_2)$  несимметричны относительно линии  $y_1 = y_2$ . Поскольку для любого решения системы (2) существует симметричное ему решение относительно плоскости  $(x_1 = x_2, y_1 = y_2)$  (т. е. перестановки осцилляторов), верхняя ветвь на рис. 10 показывает амплитуду колебаний первого осциллятора, а нижняя — второго. Циклы, появляющиеся в бифуркации  $BP$  решений, близки к противофазному, но осцилляторы движутся по немного отличающимся орбитам. Эти решения теряют устойчивость в бифуркации в тор  $TR1$ , и при  $D \rightarrow 0$  верхняя ветвь приближается к синфазному циклу (первый осциллятор), в то время как нижняя стремится к однородному стационарному решению (второй осциллятор).

Бифуркации  $TR$ ,  $TR1$  связаны с рождением или исчезновением квазипериодических решений. Прямым интегрированием уравнений (2) для  $A = 1$ ,  $B = 2.6$ ,  $D = 0.151$  найден квазипериодический режим, в котором амплитуда колебаний ближдует от амплитуды орбиты первого осциллятора до амплитуды орбиты второго, при сдвиге фаз между брюсселяторами примерно равному  $T/2$ . Такой квазипериодический режим в

ряде работ [8, 13] называют “противофазным”. Исследование области его устойчивости не проводилось. К сказанному добавим, что при стремлении  $B$  к  $B_E$  точка  $HB1$  приближается к линии точек  $BP_{st}$  стационарных решений (кривой  $\lambda_4 = 0$ ), а период рождающегося неустойчивого противофазного движения неограниченно растет (т. к. из теории бифуркаций Хопфа  $T = 2\pi/\omega$ ,  $\omega = \text{Im}(\lambda_4) = 0$ ).

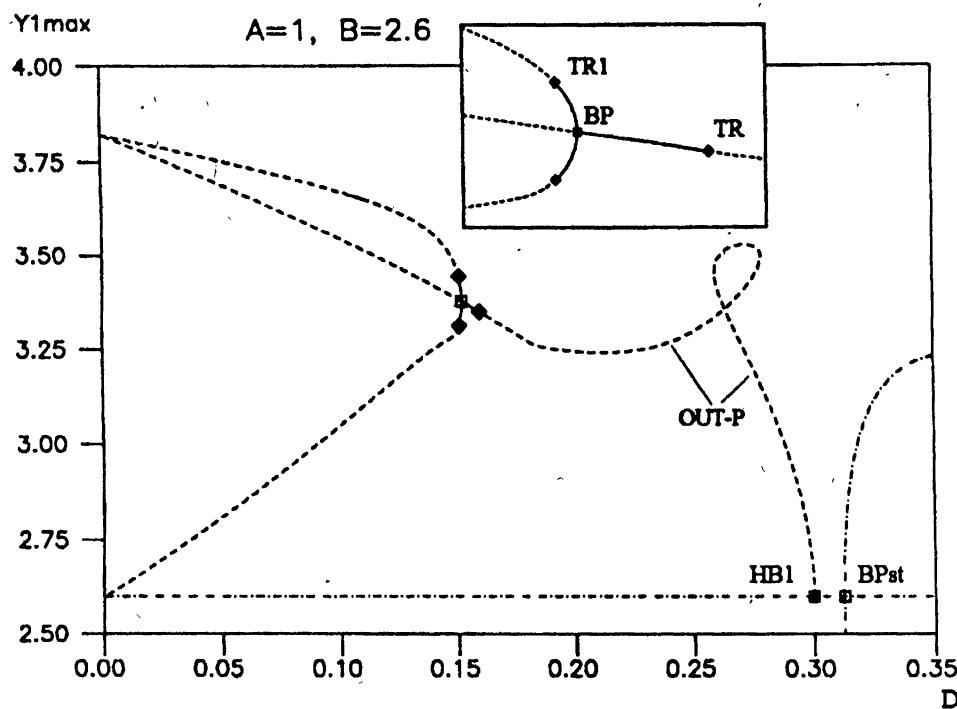
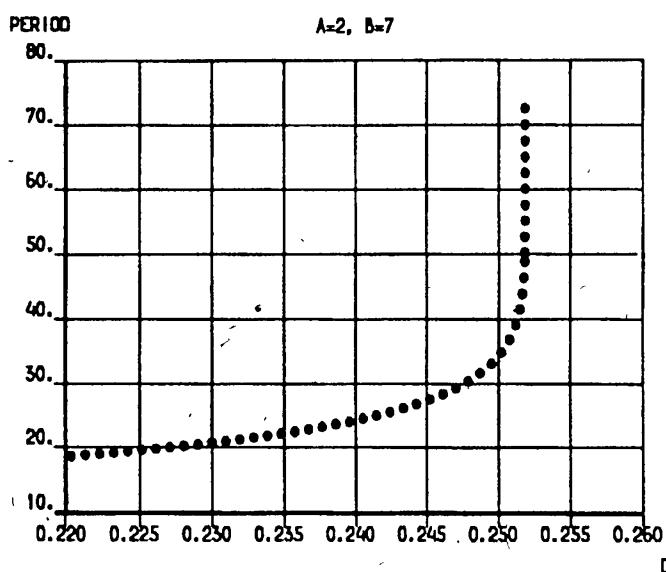


Рис. 10. Бифуркации противофазного режима, возникающего в  $HB1$ .

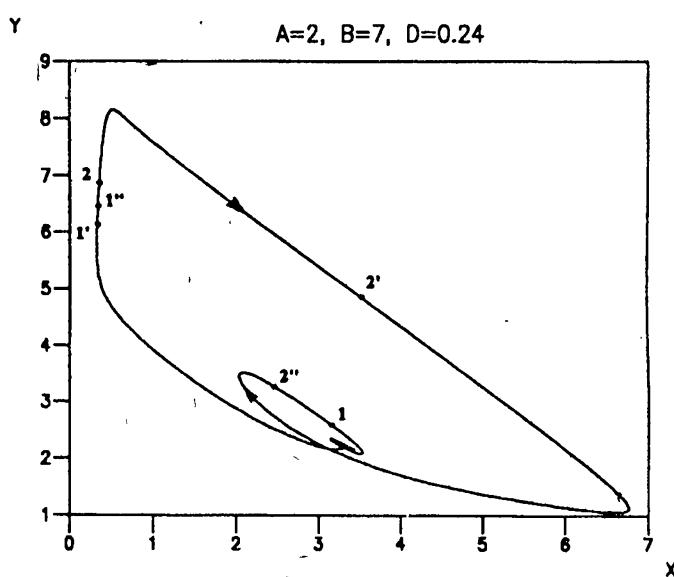
На рис. 5 на плоскости параметров ( $B - D$ ) показаны границы устойчивости простого противофазного решения и близких к нему несимметричных решений — узкая область, обозначенная  $G'$ . При  $A = 1$  и малых значениях  $B$  противофазный режим неустойчив везде, кроме  $G'$ .

Для  $A = 2$  и малых  $B$  (но  $B > A^2 + 1$ ) в точках  $HB1$  происходит рождение неустойчивого простого противофазного режима (как на рис. 10), но бифуркаций в тор нет, и в точке  $BP$ , лежащей на этой ветви, не рождаются устойчивые решения.

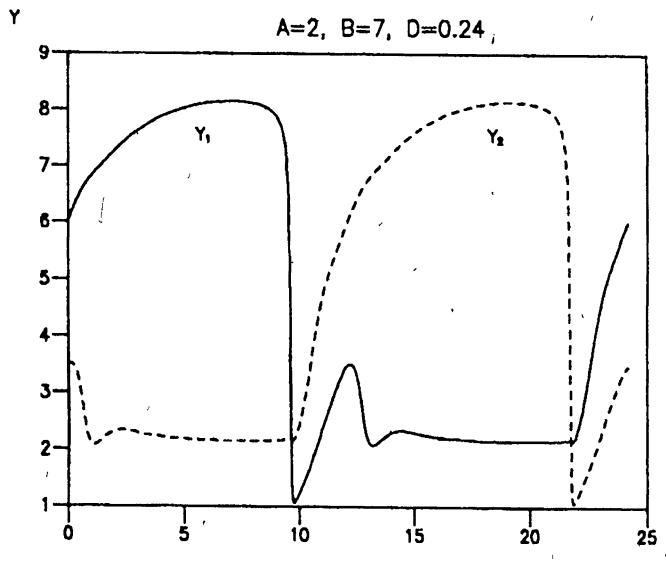
Другой интересный тип противофазного решения — “фазовая ловушка”, как было указано выше, рождается в бифуркации  $PD1$  потери устойчивости синфазного решения (см. рис. 7). (В работе [13] для системы уравнений в переменных “амплитуда”–“разность фаз” двух осцилляторов дано следующее определение такого решения:  $r_j(t+T) = r_j(t)$ ,  $\phi(t+T) = \phi(t)$ .) В точке  $PD1$  синфазный цикл удваивается, между брюсселяторами воз-



a)



б)



в)

Рис. 11 а, б, в. Свойства петлевого противофазного решения.  
 а) Бифуркация с бесконечным периодом,  
 б) фазовый портрет,  
 в) развертка колебаний обоих осцилляторов.

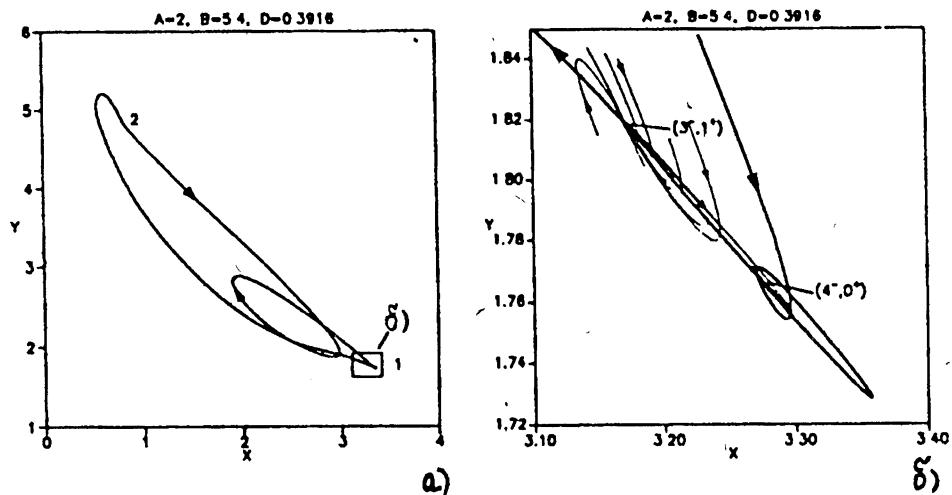


Рис. 12. Бифуркация с бесконечным периодом петлевого противофазного решения. б) увеличения части цикла в квадрате 1. Показаны некоторые близкие траектории и стационарные состояния.

никает разность фаз (см. рис. 11б): первый осциллятор делает виток по внутренней петле цикла, второй остается на внешней (поз. 1, 2), затем первый приостанавливается, а второй проходит по внешней петле (поз. 1', 2'), потом по внутренней (поз. 1'', 2''), приостанавливается и т. д. В отличие от IHLC осцилляторы движутся по одному и тому же циклу. Такой цикл — назовем его петлевым — намного превосходит по амплитуде и периоду синфазный и сильно зависит от управляющего параметра. При удалении от бифуркации внутренняя петля стягивается вокруг однородного стационарного решения-фокуса (для  $B < (A+1)^2$ ), а время движения по ней увеличивается. Характерный вид предельного цикла и развертки для таких значений параметров показан на рис. 11б, в, 12а. Для такого решения фазу движения (к тому же являющуюся в наших переменных лишь качественной характеристикой) имеет смысл вводить только для большой петли, тогда термин “фазовая ловушка” неуместен, и решение будет по определению противофаизным.

С увеличением параметра  $D$  до границы области  $C$  с петлевым противофаизным решением происходит бифуркация бесконечного периода — IPB (см. рис. 7, рис. 11а). В работе [12] для упрощенной слабонелинейной системы доказано, что бифуркация с бесконечным периодом возможна в случае, когда области противофаизного решения и IHSS не перекрываются, но соприкасаются вдоль линии  $LP_{st}$ . Тогда противофаизное решение претерпевает такую бифуркацию на границе области IHSS, т. к. при соответствующем значении параметра на цикле появляется пара устойчивых неоднородных стационарных решений, которые останавливают движение. По мере приближения к точке бифуркации бесконечного периода на временной развертке колебаний появляется пологий участок.

Система (2) демонстрирует более сложное поведение — области устойчивости IHSS и противофаизного режима перекрываются:  $A = 2$ ,  $B = 5.4$ ,  $D_{IPB} = 0.39160$ ,  $D_{LP_{st}} = 0.39063$  — граница области существования IHSS,  $D_{HB3} = 0.39068$  — граница устойчивости IHSS. Такой же результат получен при  $B = 7$  (рис. 11а). Это можно объяснить тем, что противофаизный цикл при значениях параметров, соответствующих границе области  $C$ , проходит вне бассейна притяжения неоднородных стационарных решений.

Рассмотрим эту бифуркацию подробнее (рис. 12). Двигаясь по параметру связи  $D$  слева направо к области перекрывания, мы увидим, что неоднородные стационарные решения становятся устойчивыми в результате субкритической бифуркации Хопфа HB3 (см. рис. 4в, г). В ней рождается неустойчивый неоднородный предельный цикл (IHLC), период которого сравним с петлевым противофаизным. Поскольку синфазное периодическое решение неустойчиво, то этот цикл принадлежит сепаратриссе двух существующих аттракторов (в области перекрывания). С увеличением  $D$  противофаизный цикл и IHLC приближаются с разных сторон

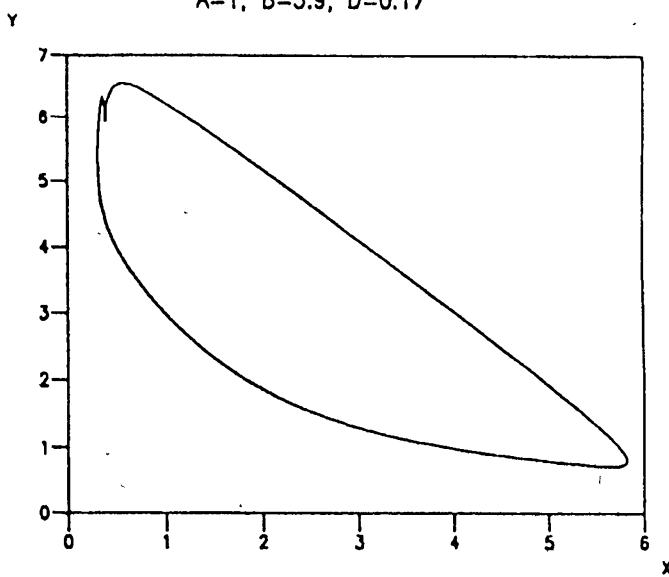
к седловому IHSS, принадлежащему ближней стороне неоднородной ветви стационарных решений (см. рис.4). Это стационарное состояние имеет три устойчивых и одно неустойчивое направления ( $3^-, 1^+$ ). На близких к нему участках цикла время движения резко увеличивается. Бифуркация бесконечного периода происходит (см. рис. 12), когда изображающая точка с противофазного цикла притягивается по устойчивым направлениям к этому седловому IHSS, затем попадает на его единственное неустойчивое направление, переходит по нему к устойчивому неоднородному состоянию ( $4^-, 0^+$ ).

На рис. 6 построены границы устойчивости петлевого противофазного решения (границы области, закрашенной серым цветом). Они состоят из линий:  $PD$  (точки  $PD_1$  снизу — при малых  $B$ );  $LP$  — точек поворота (граница слева — в них происходит слияние и исчезновение устойчивого и неустойчивого петлевых противофазных решений) и точек  $IPB$  (граница справа — линия отдельно не изображена на рис. 6а, б, т. к. очень близка к линиям точек  $HB3$  и  $LP_{st}$  неоднородных стационарных решений). Появление линии точек  $LP$  связано с изменением направления бифуркации удвоения периода  $PD_1$ : тогда в ней рождается неустойчивое петлевое противофазное решение. Петлевой противофазный режим не существует при  $B \approx A^2 + 1$ , когда устойчив только синфазный режим. Внутри области, ограниченной линией  $PD$ , и левее  $HB3$  (на рис. 6б изображена только близкая линия  $LP_{st}$ ), петлевой противофазный режим остается единственным устойчивым решением системы (2), справа от  $HB3$  существует с IHSS, а выше линии  $PD$  — с синфазным. Пересечение линии  $PD$  (или области USY) с кривыми  $HB1$ ,  $BP_{st}$  и  $HB2$  не изменяет поведение системы (2), т. к. последние являются бифуркациями неустойчивых стационарных состояний.

Бифуркационные точки  $PD_2$  (см. рис. 7, врезка) внутри области  $C$  приводят к появлению сложных решений. Рождающееся в  $PD_2$  устойчивое противофазное петлевое решение ("фазовая ловушка") испытывает бифуркацию в тор ( $TR$ ). Для параметров  $A = 2$ ,  $B = 5.4$ : величины  $D_{PD_2} = 0.479564$ ,  $D_{TR} = 0.473857$ . Родившееся квазипериодическое решение устойчивое, соответствует найденному в [8] для двух брюсселяторов, спаянных диффузионной связью по обеим переменным с  $D_x/D_y = 0.1$ . Авторы наблюдали переход с противофазного решения к IHSS через бифуркацию в тор и странный аттрактор для значений параметров  $A = 2$ ,  $B = 5.5$ ,  $D_y \approx 0.52$ . Сравнивая наши результаты, видим, что введение связи по быстрой переменной  $x$  неизначительно сдвинуло положение точек бифуркаций. Сложный переход  $SY \rightarrow OUT-P \rightarrow$  тор  $\rightarrow$  странный аттрактор наблюдается в узкой полосе левее бифуркации  $PD_2$ , внутри области  $USY \cap C$ , ограниченной линией  $PD$  (см. рис. 6б, метка  $TR$ ), т. е. существует с устойчивыми IHSS.

Система (2) при больших  $B$  имеет также другой тип противофазного

$$A=1, B=3.9, D=0.17$$



а)

$$A=1, B=3.9, D=0.17$$

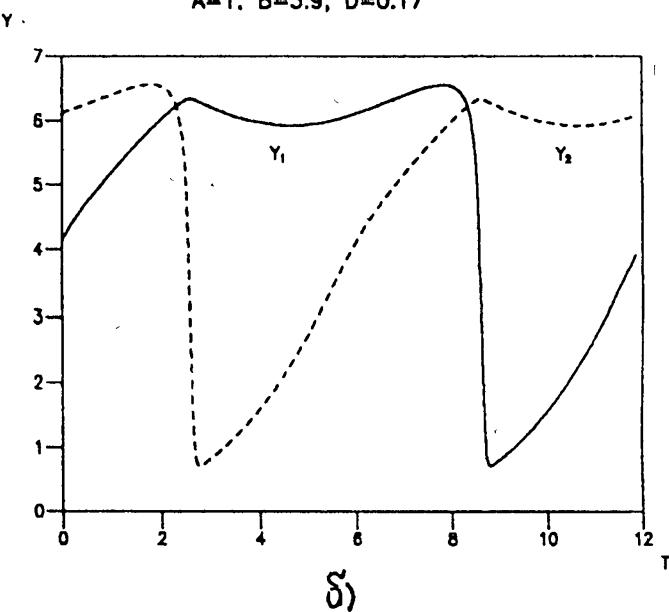


Рис. 13. а) Фазовый портрет противофазного решения,  
б) развертка колебаний обоих осцилляторов.

решения, не связанный непосредственно с бифуркациями синфазного режима и стационарных состояний. Продолжением по  $B$  вверх противофазного решения из области  $G'$  при  $A = 1$  на плоскости  $(D - B)$  найдена более значительная область его устойчивости, обозначенная  $G$  на рис. 5, 6. Существование области  $G$  обусловлено взаимным торможением движущихся осцилляторов при значительном притяжении их к предельному циклу. Период колебаний заметно больше, чем у соответствующего синфазного режима. При движении по этому циклу брюсселяторы два раза за период оказываются близки к неоднородным стационарным решениям (см. рис. 13а, б). Поэтому для значений параметров левее линии  $LP$  — границы существования IHSS (рис. 5, 6), скорость осцилляторов в это время лишь уменьшается, не меняя направления, а при  $D$  и  $B$  правее: осциллятор на верхней медленной части цикла — изоклине  $x$  — немногого возвращается назад, и второй его догоняет, а при сокращении расстояния между ними до значения  $(y_2 - y_1) = (A - z_1)/D \simeq (A - A/B)/D$  вновь движется вверх. На развертке, на медленном участке, образуется прогиб, а на фазовом портрете — петля.

Чтобы найти границы области  $G$  мы продолжили противофазное решение по параметру  $D$  (см. рис. 14). Видим, что рождающиеся в простых бифуркациях  $BP$ , ветви несимметричных периодических решений самозамкнуты, т. е. устойчивость этого противофазного режима не связана непосредственно с другими типами решений системы (2). Несимметричные периодические решения принадлежат сепаратриссе, отделяющей бассейн притяжения противофазного решения от бассейна устойчивого синфазного режима. С уменьшением параметра  $B$  простые бифуркации  $BP$  сближаются и исчезают. С увеличением  $B$  ветви сепаратрисных решений приближаются к вертикальной касательной в левой точке  $BP$ , одновременно увеличивается их несимметрия (разность амплитуд) — это означает рост бассейна притяжения противофазного режима. При значениях  $B > 4.1$ ,  $A = 1$  (и для всех  $B$  при  $A = 2$ ) ветвь противофазного решения поворачивает, и правая  $BP$  превращается в  $LP$  (см. кривую  $LP$  справа на рис. 5, 6).

Таким образом, граница области  $G$  изображена на рис. 5, 6: самая крайняя слева линия  $BP$  — это линия, полученная продолжением по двум параметрам точки  $BP$ , отмеченной на рис. 14, граница справа —  $LP$  (точки поворота ветви противофазного решения). При  $D$  и  $B$  правее линии  $LP$  сила притяжения между осцилляторами превосходит притяжение к циклу, и система переходит к синфазному режиму. Как видим на рис. 5, 6, область  $G$  расширяется с увеличением параметра  $B$ , несмотря на увеличение эффективного взаимодействия  $D(y_2 - y_1) \approx O(B^2)$ , которое стимулирует переход к синфазному режиму.

Для значения  $A = 2$  на плоскости  $(B - D)$  картина похожа, но область  $G$  перекрывается с областью  $C$  — устойчивых неоднородных стационар-

ных решений, как легко видеть на рис. 6. При выборе параметра  $B$  ниже области  $F$ , в области перекрытия, седловые ( $3^-, 1^+$ ) и устойчивые неоднородные стационарные состояния лежат далеко от цикла. Поэтому период колебаний противофазного решения изменяется незначительно, и нет бифуркации бесконечного периода.

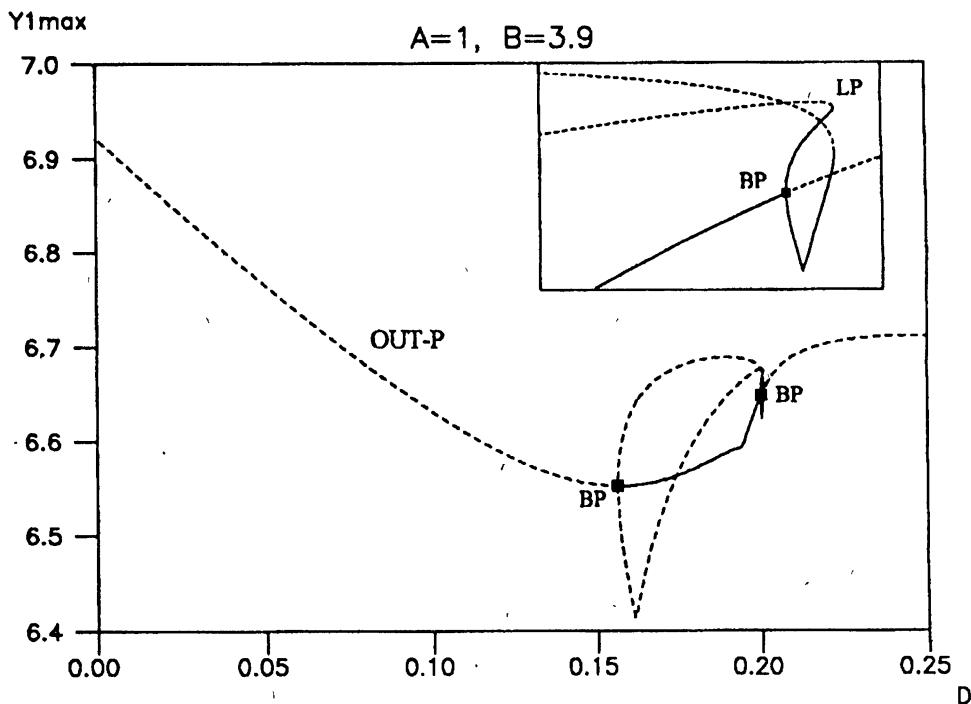


Рис. 14. Диаграмма бифуркаций противофазного решения.

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В последнее десятилетие центр тяжести исследований нелинейной динамики переместился с изучения двумерных систем на объекты большей размерности. Применение известных методов исследования позволило нам показать, что уже два одинаковых сцепленных простых нелинейных осциллятора демонстрируют множество режимов. Модель (2), несмотря на исключение связи по быстрой переменной, имеет весь классический набор устойчивых решений подобных систем: синфазное, противофазное, пространственно неоднородное стационарное решение, пространственно неоднородный предельный цикл, квазипериодическое и хаотическое решения, которые могут сосуществовать, порождая мультиритмичность и мультистационарность.

Введение связи по  $z$   $D_z \simeq D_y$ , в случае большой релаксационности затруднит наблюдение неоднородных устойчивых движений, из-за сильного воздействия на медленный самый чувствительный участок цикла. В случае симметричной связи  $D_x = D_y$ , который рассматривается многими авторами [10, 12, 13], синфазное решение всегда асимптотически устойчиво, т. е. нет никаких его бифуркаций, и поэтому невозможны такие интересные решения как петлевой противофазный режим.

Двухпараметрический анализ показал зависимость существования и устойчивости изучаемых решений от релаксационности осцилляторов. С увеличением  $A$  (уменьшением релаксационности) видно быстрое расширение области устойчивости неоднородных стационарных состояний и петлевого противофазного режима. Отметим, что неоднородный предельный цикл при  $A = 2$  существует лишь вблизи линии  $HB3$  (рис. 6), имеет малый бассейн притяжения, незначительную амплитуду и малый период по сравнению с периодом изолированного осциллятора.

Существование такого решения как IHLC не является исключительным свойством системы (2). Поскольку IHLC непосредственно рождается в бифуркации Хопфа из IHSS, то он должен с необходимостью присутствовать вблизи  $HB3$  широкого класса систем, имеющих неоднородные стационарные состояния (если бифуркация Хопфа субкритическая, то IHLC неустойчивый).

Область устойчивого простого противофазного режима  $G$  появляется, когда осцилляторы становятся достаточно релаксационными. В отличие от других моделей (например, [15]) для системы (2) расширение области  $G$  по параметру  $D$  замедляется. Это связано с тем, что член  $D(y_2 - y_1)$  растет как  $O(B^2)$ , что быстрее, чем увеличение притяжения к циклу. По-видимому, только область  $G$  характерна для всех релаксационных осцилляторов, в то время как  $G'$  и петлевой противофазный режим устойчивы лишь для некоторых мягких систем с аналогичными бифуркациями  $HB1$  и  $PD1, 2$ . Независимость устойчивости этого типа противофазного режима от других решений системы, рост бассейна притяжения с ростом релаксационности — следствия притягивающего свойства диффузионной связи, мало зависящие от индивидуальных свойств осциллятора.

Численный анализ позволяет избавиться от предположений близости к бифуркации Хопфа каждого осциллятора и слабости связи. Искусственный выбор сильно упрощенных уравнений индивидуального осциллятора в [12] хотя и позволил провести аналитическое исследование бифуркаций, но привел к исключению эффектов, связанных с перекрытием окон устойчивости различных решений. Введение третьего управляющего параметра  $A$  в нашей модели позволило рассмотреть различные случаи существования периодических решений и наборы возникающих бифуркаций. Тем не менее, наблюдается большое сходство поведения настолько отличающихся моделей на уровне типов бифуркаций и классов решений, что,

вероятно, определяется свойствами диффузионной связи.

Можно предположить обобщение полученных результатов на сходные задачи о диффузионном сцеплении двух двумерных осцилляторов. Поскольку периодические решения (за исключением возможных изолированных решений) связаны с ограниченным набором бифуркаций состояний равновесия, который уже изучен, во всех таких системах расположение в параметрическом пространстве областей существования периодических решений, в основном, определяется расположением соответствующих бифуркаций стационарных состояний. Т.е., например: из двухпараметрического анализа нашей модели видим, что области периодических решений либо ограничиваются бифуркациями стационарных решений, либо располагаются вдоль них. Следовательно, разбиение параметрического пространства таких систем с точностью до перехода к некоторым другим параметрам должно быть универсальным. Хотя такой переход возможен лишь теоретически, подобная универсальность, позволяющая быстро получить общее представление о фазовой динамике, существенно упрощает полное исследование конкретной системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Prigogine I., Lefever R. // J. Chem. Phys., 1968. V. 48. P. 1695.
2. Tyson J., Kauffman S. // J. Math. Biol., 1975. V. 1. P. 289.
3. Honerkamp J. // J. Math. Biol., 1983. V. 18. P. 69.
4. Linkens D. A. // Bull. Math. Biol., 1977. V. 39. P. 359.
5. Bar-Eli K. // J. Phys. Chem., 1984. V. 88. P. 3616, 6174.
6. Bar-Eli K. // J. Phys. Chem., 1985. V. 14. P. 242.
7. Bar-Eli K. // J. Phys. Chem., 1990. V. 94. P. 2368.
8. Schreiber I., Marek M. // Phys. Lett., 1982. V. 91. P. 263.
9. Ланда П.С. Автоколебания в системах с многими степенями свободы. — М.: Наука, 1979.
10. Growley F., Epstein I. // J. Phys. Chrm., 1989. V. 93. P. 2496.
11. Kawato M., Suzuki R. // J. Theor. Biol., 1980. V. 86. P. 547.
12. Aronson D. G., Doudet E. J., Othmer H. G. // Physica, 1987. V. 25D. P. 20.
13. Aronson D. G., Ermentrout G. B., Kopell N. // Physica, 1990. V. 41D. P. 403.
14. Волков Е. И., Перцова Т. Б. // Краткие сообщения по физике ФИАН, 1987. Т. 11. С. 48.
15. Volkov E. I., Stolyarov M. N. // Phys. Lett., 1991. V. 159A. P. 61.
16. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Наука, 1984.

17. Doedel E. G., Keller H. G., Kernevez J. P. // Int. J. Bifurcation and Chaos, 1991. V. 3. P. 493–520.

Физический институт им.  
П. Н. Лебедева РАН

Поступила в редакцию  
31 марта 1993 г.

**BIFURCATIONS IN THE SYSTEM OF TWO IDENTICAL  
DIFFUSION-COUPLED RELAXATIONAL BRUSSELATORS**

*E. I. Volkov, V. A. Romanov*

The two-parametrical bifurcation analysis of the dynamics of two identical asymmetrically coupled Brusselators has been made. The stability boundaries of inhomogeneous steady states and periodic attractors have been calculated as a function of the constraint force and one of the free parameters. The co-existence of different attractors giving rise to the multirhythm were studied as well as bifurcation transitions between them. It has been shown that the stiffness of an oscillator plays an essential role in simplification of the phase diagram since it removes the overlapping of different solutions. It is supposed that results characterize primarily the properties of diffusion-like coupling and, therefore, they can be applied in the investigation of other oscillators systems.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ЭКРАНАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

И. Л. Якимов

Проведено математическое моделирование двумерных задач дифракции  $E$ -поляризованной волны на проводящих экранах сложной формы и конфигурации, основанное на использовании метода эквивалентных источников. Рассмотрены некоторые вопросы построения программы для ЭВМ и оценки точности вычислений. Приведены примеры численных расчетов для некоторых характерных дифракционных задач.

## ВВЕДЕНИЕ

Наиболее эффективным средством решения задач дифракции на телах сложной формы являются в настоящее время различные численные методы. При разработке численных методов одним из самых важных и трудоемких этапов является создание адекватной математической модели и ее программная реализация на ЭВМ. В настоящей статье формулируются основные принципы построения математической модели для решения двумерных задач дифракции  $E$ -поляризованной волны на проводящем экране сложной формы методом эквивалентных источников и рассматриваются некоторые вопросы численной реализации.

## ПОСТАНОВКА ДИФРАКЦИОННОЙ ЗАДАЧИ. МЕТОДИЧЕСКАЯ ОСНОВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Термином "экран сложной формы" будем в дальнейшем называть проводящий экран  $AB$ , имеющий большую протяженность вдоль одной из осей (например,  $z$ ) и состоящий, в общем случае, из двух частей: плоского экрана больших электрических размеров —  $A$  и экрана  $B$ , имеющего произвольную форму сечения (в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ ) с характерными размерами порядка одной или нескольких длин волн. На рис. 1 представлено сечение экрана сложной формы  $AB$  в плоскости  $X0Y$ . Следует отметить, что экран  $B$  может представлять собой систему тел, например, иметь конфигурацию дифракционной решетки.

Такое представление объекта дифракции позволяет создать единую математическую модель для решения двух типов задач:

— дифракция в квазиоптической области на плоском экране с нерегулярной частью резонансных размеров — дифракция на экране  $AB$  (общий случай);

— дифракция в резонансной области — дифракция на экране  $B$  (в отсутствие части  $A$ ).

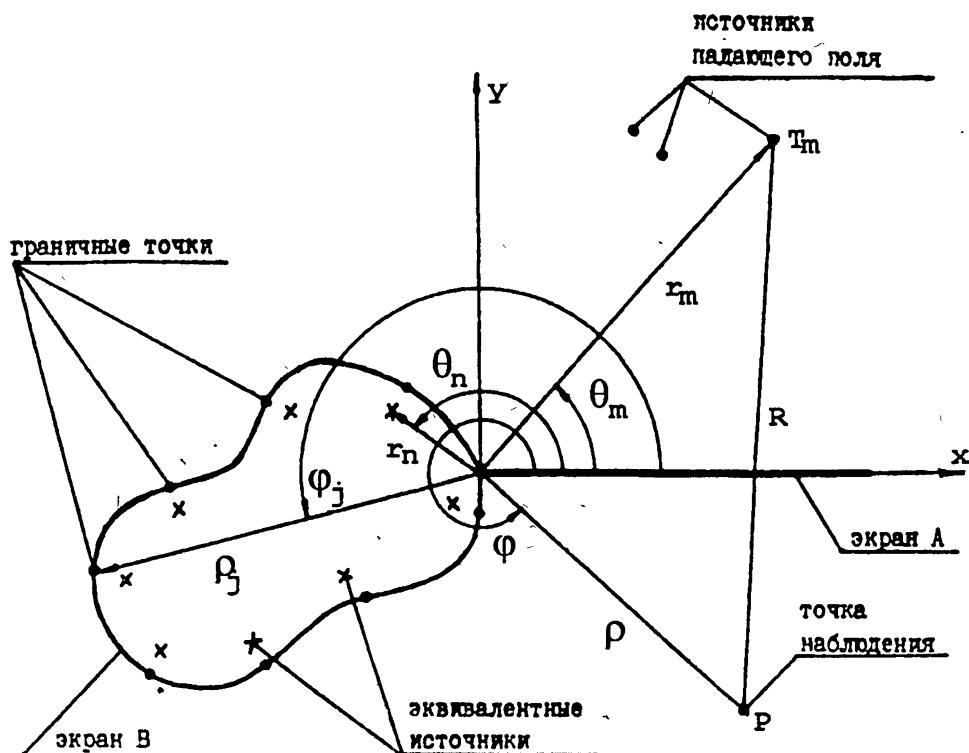


Рис. 1.

Теоретической основой для построения математической модели является метод эквивалентных источников, подробно описанный в [2] и развитый применительно к решению задач дифракции на экранах в работах [3, 4]. Метод универсален по отношению к форме экрана и виду падающего поля и достаточно прост с точки зрения численной реализации. Сущность метода состоит в том, что искомое дифракционное поле представляется в виде суперпозиции полей конечного комплекта эквивалентных источников, располагаемых вне исследуемой области. Поля эквивалентных источников удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца в области решения и уравнению Гельмгольца с истокообразной правой частью вне ее, а также условию излучения на бесконечности. В соответствии с общим принципом метода, граничные условия удовлетворяются в конечном числе точек на поверхности дифрагирующего тела.

## ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Падающее поле  $E_0$ , в общем случае, моделируется суперпозицией полей бесконечных нитей тока — излучателей цилиндрических волн с  $E$ -поляризацией — и записывается следующим образом:

$$E_0 = \sum_{m=1}^M C_m G_m(r_m, \rho), \quad (1)$$

где  $C_m$  — комплексная амплитуда возбуждения  $m$ -го излучателя,  $r_m, \rho$  — векторы, определяющие положение  $m$ -го излучателя и точки наблюдения соответственно (рис. 1);  $M$  — количество излучателей. Функция  $G$  в выражении (1) имеет смысл функции Грина.

Существенным для построения математической модели, является тот факт, что в соответствии с методом эквивалентных источников объект дифракции заменяется системой источников, а поле дифракции  $\tilde{E}$  представляется в виде обобщенного полинома по системе комплексных функций  $G_n$ , являющихся полями этих источников:

$$\tilde{E} = \sum_{n=1}^N Q_n G_n(r_n, \rho), \quad (2)$$

где  $N$  — количество эквивалентных источников,  $r_n$  — вектор, определяющий положение  $n$ -го эквивалентного источника (рис. 1).

Неизвестные коэффициенты ряда  $Q_n$  в (2), имеющие смысл комплексных амплитуд возбуждения эквивалентных источников, определяются из граничных условий на поверхности  $S$  идеально проводящего дифрагирующего тела, записанных методом коллокаций в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^M C_m G_m(r_m, \rho_j) + \sum_{n=1}^N Q_n G_n(r_n, \rho_j) = 0 \Big|_{\rho_j \in S}, \quad (3)$$

где  $j = 1, \dots, N$ ;  $\rho_j$  — вектор, определяющий положение  $j$ -й граничной точки (рис. 1).

Решив систему (3) и определив значения  $Q_n$ , можно рассчитать полное поле  $E$  в любой точке пространства по формуле:

$$E = E_0 + \tilde{E}, \quad (4)$$

где  $E_0$  и  $\tilde{E}$  определяются в соответствии с (1) и (2).

При решении задачи дифракции на экране вида  $B$  (в отсутствие плоского экрана больших электрических размеров) функция  $G$  представляется в виде функций Ханкеля (временная зависимость падающего поля  $e^{-i\omega t}$ ):

$$G^B(r, \rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi/4} H_0^{(i)}(k|r - \rho|). \quad (5)$$

При решении задачи на экране вида  $AB$  (общий случай), часть  $A$  моделируется идеально проводящей полуплоскостью [4], и функция  $G$  представляется в виде решения Макдональда для полуплоскости [1]:

$$G^{AB}(r, \rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/4} \left\{ e^{ikR} I(P, 2kR) - e^{ikR'} I(P', 2kR') \right\}, \quad (6)$$

где

$$I(u, v) = \int_u^{\infty} \frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2 + v}} d\mu;$$

$$P = -2 \sqrt{\frac{k r \rho}{r + \rho + R}} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}; \quad P' = -2 \sqrt{\frac{k r \rho}{r + \rho + R'}} \cos \frac{\Theta + \varphi}{2},$$

$r, \theta, \rho, \varphi$  — координаты источника (реального или эквивалентного) и точки наблюдения соответственно,  $R, R'$  — расстояние от точки наблюдения до источника и его зеркального отображения соответственно.

Представление функции  $G$  в виде (5) или (6) обеспечивает для полученного решения (4) соответствие уравнениям Максвелла, граничным условиям и условиям излучения на бесконечности, а значит и адекватность математической модели решаемой дифракционной задаче соответствующего типа.

## ВОПРОСЫ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ. ТОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Наличие универсальной математической модели позволяет организовать численные расчеты для различных дифракционных задач по единой программе для ЭВМ.

Структурная схема программы расчетов приведена на рис. 2. В первом блоке задаются основные исходные данные: тип задачи (наличие или отсутствие полубесконечного экрана), параметры излучателей падающего поля, количество эквивалентных источников, характерные размеры объекта дифракции и т. д. На основе этих данных во втором блоке рассчитываются координаты граничных точек и эквивалентных источников, а в третьем — значения падающего поля в граничных точках в соответствии с формулой (1).

В четвертом блоке, в соответствии с (3), формируется система уравнений, которая затем решается с помощью стандартной процедуры решения систем линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами методом исключения с выбором главного элемента.

В пятом блоке проводится расчет значений модуля и фазы комплексных амплитуд возбуждения эквивалентных источников  $Q_n$ , которые передаются в шестой блок, где, в соответствии с (2) или (4), рассчитываются

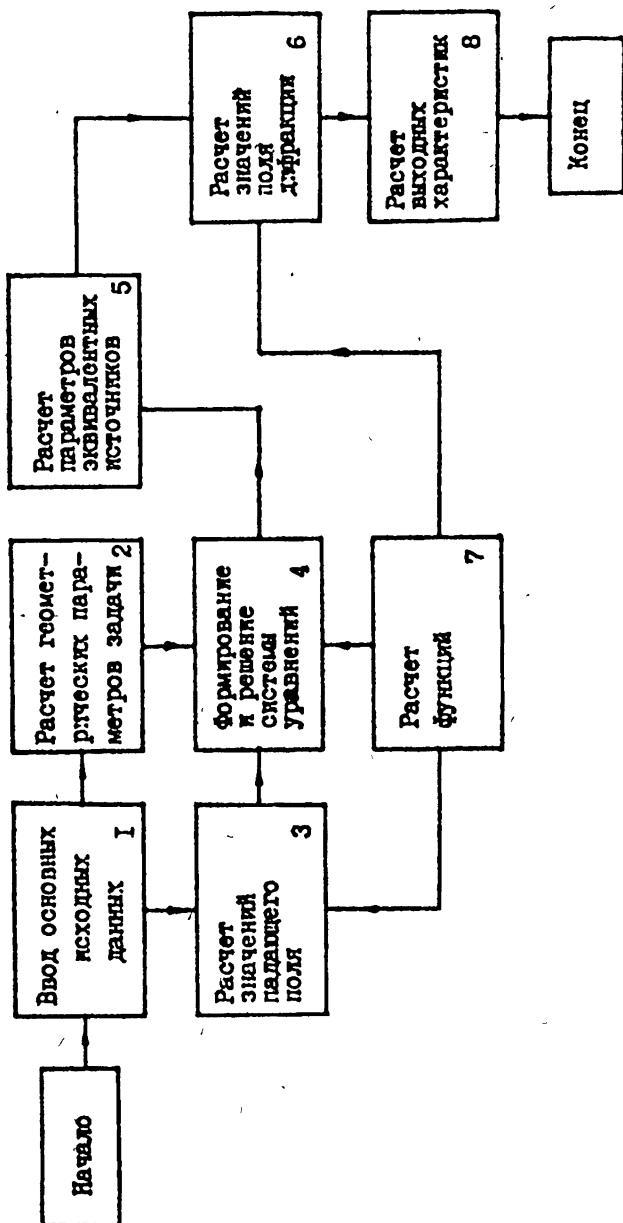


Рис. 2.

значения соответственно дифракционного или полного поля в заданных точках пространства.

Седьмой блок обеспечивает вычисление значений функции  $G$  для третьего, четвертого и шестого блоков по формулам (5) или (6) в зависимости от типа задачи.

Восьмой блок предназначен для расчета различных выходных характеристик, определяемых условиями исходной практической задачи (диаграммы рассеяния, коэффициенты ослабления, уровень вносимых фазовых искажений и т. п.).

Точность численных расчетов по данной программе, в первую очередь, определяется точностью расчета функции  $G$  в седьмом блоке. При решении дифракционной задачи в резонансной области (на экране  $B$ ), точность вычислений искомого поля определяется фактически точностью расчета функции Ханкеля (см. (5)), для которого использовалось представление в виде ряда из [5], что обеспечивает на порядок меньшую погрешность ( $|\epsilon| < 10^{-7}$ ) и уменьшение времени счета в  $\sim 40$  раз, по сравнению с соответствующей стандартной процедурой из библиотеки математических программ для ЕС ЭВМ.

При решении дифракционной задачи в общем случае (на экране вида  $AB$ ) точность вычислений поля определяется точностью расчета значений интеграла  $I(u, v)$  в (6). Для проведения расчетов  $I(u, v)$  удобно представить в следующем виде:

$$I(u, v) = I(0, v) - \tilde{I}(u, v), \quad (7)$$

где

$$\tilde{I}(u, v) = \int_0^u \frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2 + v}} d\mu.$$

Заменой переменных  $t = 2\mu^2/v + 1$  интеграл  $I(0, v)$  сводится к табличному, воспользовавшись формулой из [6], получим:

$$I(u, v) = i \frac{\pi}{4} e^{-iv/2} H_0^{(1)}(v/2) - \tilde{I}(u, v). \quad (8)$$

С учетом высокой точности расчета функции Ханкеля  $H_0^{(1)}(x)$ , точность вычисления значений  $I(u, v)$  определяется точностью вычисления интеграла  $\tilde{I}(u, v)$ . В программе (рис. 2) расчет значений  $\tilde{I}(u, v)$  организован по формуле Симпсона, и погрешность вычислений  $\Delta$ , в соответствии с [7], зависит, в первую очередь, от величины верхнего предела интегрирования  $u$  ( $\Delta \sim u^5$ ), который для данной задачи является функцией координат источника и точки наблюдения (6).

Как видно из геометрии задачи (рис. 1), величина  $u = P$ , а значит и погрешность вычислений  $\Delta$ , будет увеличиваться с ростом значений  $|r|$ .

и  $|\rho|$ , достигая максимальных значений при совпадении направлений на источник и точку наблюдения ( $\theta = \varphi$ ).

Проведенные численные оценки показали, что при значениях  $|r|, |\rho| \sim \sim 100\lambda$ , количество разбиений  $\ell$  участка интегрирования, необходимое для расчета  $\tilde{I}(u, v)$  с погрешностью

$$\varepsilon_0 = \left| (\tilde{I}(\ell) - \tilde{I}(2\ell)) / \tilde{I}(2\ell) \right| \leq 10^{-3},$$

не превосходит величины  $\ell_{\max} = 2 \cdot 10^3$ , что позволяет достаточно оперативно проводить необходимые вычисления.

Для оценки точности решений  $E(G^B)$  и  $E(G^{AB})$ , полученных при реализации математической модели в случае экрана  $B$  и в общем случае экрана  $AB$ , (4)–(6), было проведено их сравнение с известными точными решениями для тонкой ленты  $E'_B$  и полуплоскости  $E'_{AB}$ , соответственно. В качестве  $E'_B$  использовалось решение в виде ряда по функциям Матье [8], а в качестве  $E'_{AB}$  — решение Макдональда для полуплоскости, возбуждаемой линейным источником [1].

Для количественных оценок совпадения численных  $E$  и точных  $E'$  решений рассчитывались следующие характеристики:

$\delta_1 = E - E'$  — абсолютная погрешность,

$\delta_2 = \delta_1/E'$  — относительная погрешность.

Геометрия тестовой задачи приведена на рис. 3. Экран  $B$  представляет собой тонкую ленту шириной  $D$ , которая в общем случае сложного экрана  $AB$  является продолжением полуплоскости. Границные точки и эквивалентные источники расположены в соответствии с общими принципами метода эквивалентных источников [2].

В [2] определены зависимости точности расчетов поля от расстояния между граничными точками и сформулированы общие рекомендации по выбору количества источников. Так, для тел, не имеющих изломов поверхности, точность не хуже единиц процентов получается при расположении источников и граничных точек с шагом  $b \leq 0,1\lambda$ .

С точки зрения оптимизации расположения источников и граничных точек наибольший интерес представляет исследование зависимости точности расчетов поля от параметра  $b/c$  — отношения шага расположения граничных точек “ $b$ ” к минимальному расстоянию между источником и граничной точкой [9].

На рис. 3а, б представлены зависимости максимальных, в рассматриваемом диапазоне изменения координат точек наблюдения, значения абсолютной  $|\delta_1|_{\max}$  (пунктир) и относительной  $|\delta_2|_{\max}$  (сплошные кривые) погрешностей от параметра  $b/c$ . Рис. 3а соответствует случаю сложного экрана вида  $AB$ . Расчеты проведены при различных  $N$  (кривые с индексом 1 —  $N = 20$ , 2 —  $N = 30$ ) для следующих значений геометрических параметров задачи:  $D = 0,5\lambda$ ,  $y_p = -3\lambda$ ,  $\Delta x_p = 0,1\lambda$  в диапазоне  $\Delta\theta = \pm 45^\circ$ ,

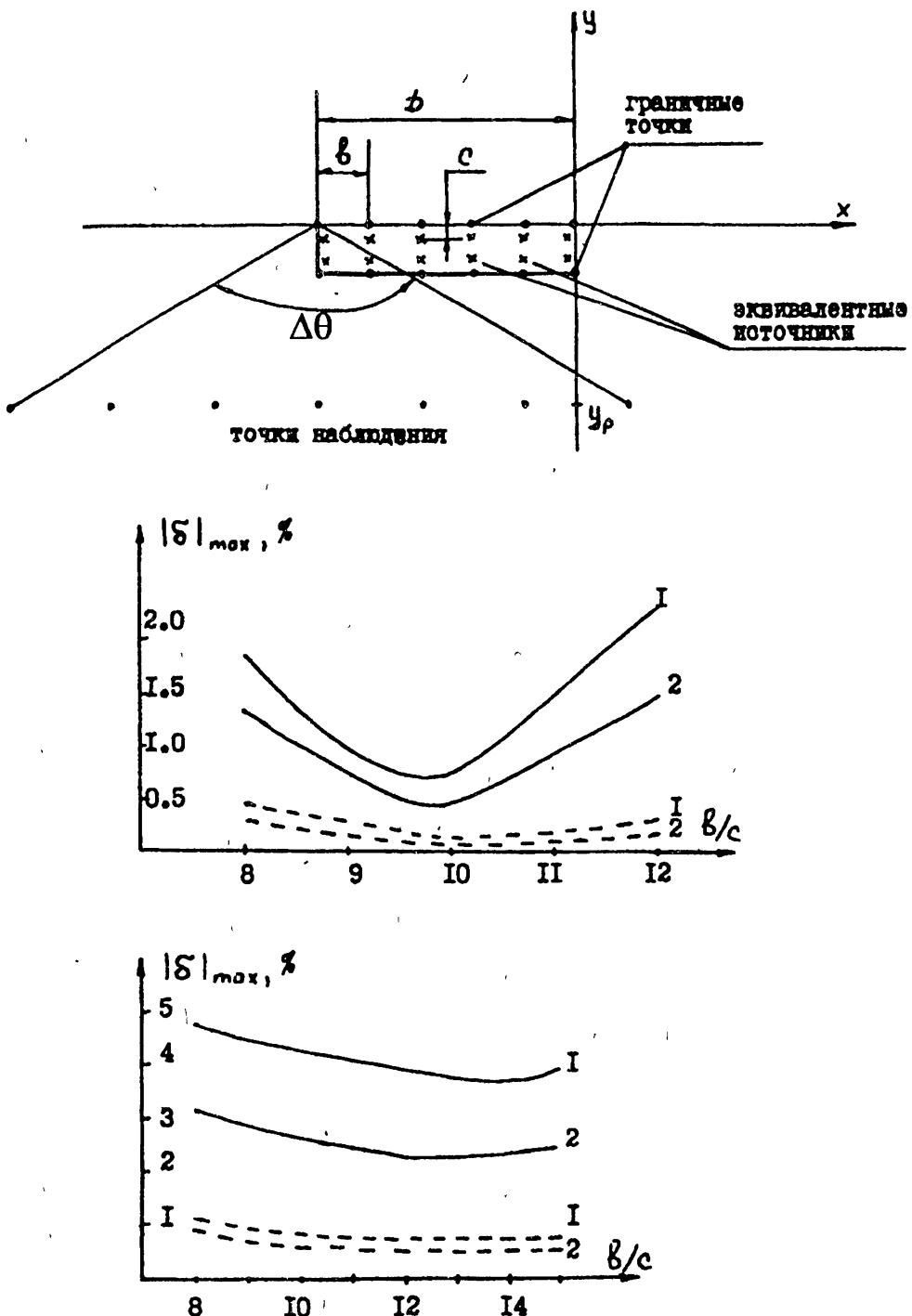


Рис. 3.

координаты линейного источника  $y_0 = 100\lambda$ ,  $x_0 = -D$ . Рис. 3б соответствует случаю экрана  $B$  в виде тонкой ленты.

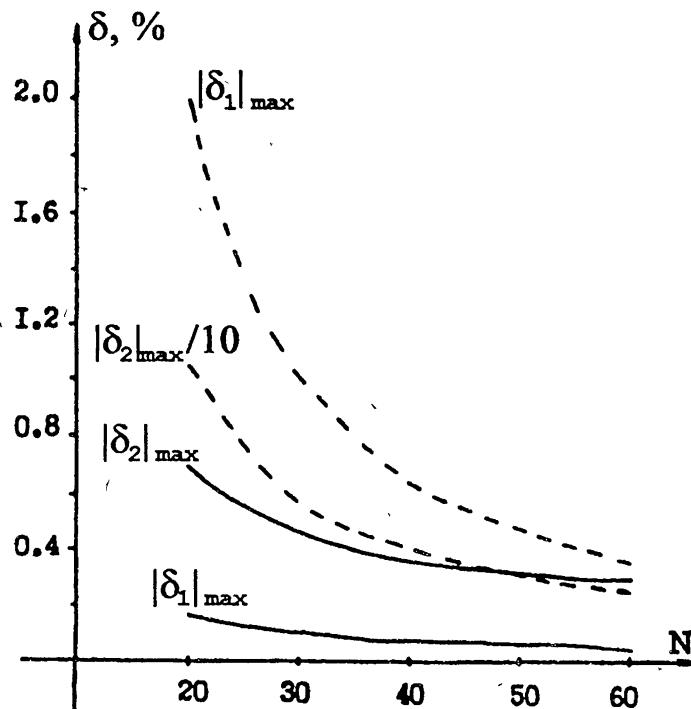


Рис. 4.

Расчеты проведены для дальней зоны и нормального падения плоской волны при  $D/\lambda = \sqrt{28}/\pi$ ,  $\Delta\theta = \pm 45^\circ$ , кривые с индексом 1 —  $N = 40$ , 2 —  $N = 60$ . Все кривые, представленные на рис. 3а, б, достигают минимальных значений в диапазоне изменения параметра  $b/c$  от 9 до 15, причем в этом диапазоне зависимость погрешностей от значений  $b/c$  неизначительна. Результаты тестовых вычислений показывают, что для рассмотренных параметров задачи возможно проведение расчетов с абсолютной погрешностью  $\sim 0,5\%$  и относительной погрешностью  $\sim 2 \div 3\%$ .

На рис. 4 приведены зависимости значений погрешностей от количества эквивалентных источников, рассчитанные для каждого  $N$  при оптимальном соотношении  $b/c$ . Сплошные кривые на рис. 4 соответствуют экрану  $AB$ , пунктир — экрану  $B$ . Характер кривых на рисунке подтверждает хорошую сходимость получаемых приближенных решений к точному с ростом количества источников.

## ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Разработанная программа позволяет решать широкий круг дифракционных задач. Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов.

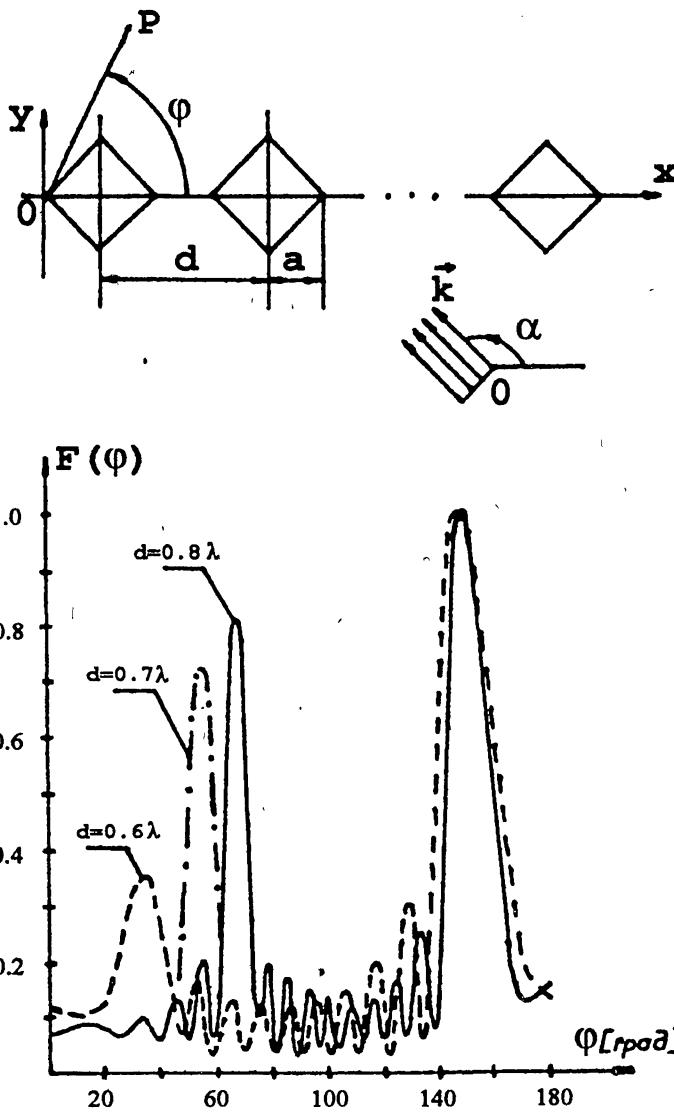


Рис. 5.

На рис. 5, 6 представлены геометрия и результаты решения задач дифракции в реzonансной области (на экране вида  $B$ ) для случая падения плоской волны ( $M = 1$ ,  $r_m \rightarrow \infty$ ,  $C_m = 1$ ).

На рис. 5 приведены нормированные диаграммы рассеяния  $F(\phi) = \tilde{E}(\phi)/\tilde{E}_{\max}$  решеток из 10 цилиндров квадратного сечения ( $a = 0,125\lambda$ )

с различными межэлементными расстояниями  $d$  ( $d = 0,6\lambda$  — пунктир,  $d = 0,7\lambda$  — штрих-пунктир,  $d = 0,8\lambda$  — сплошная кривая). Падающая плоская волна характеризуется направлением  $\alpha = 150^\circ$  ( $\alpha = \theta - \pi$ ). Диаграммы имеют характерные паразитные максимумы, амплитуда которых увеличивается с ростом  $d$ . На рис. 5 видно также отклонение главных максимумов от “идеального” направления  $\varphi = 150^\circ$ , обусловленное межэлементным взаимодействием в решетке.

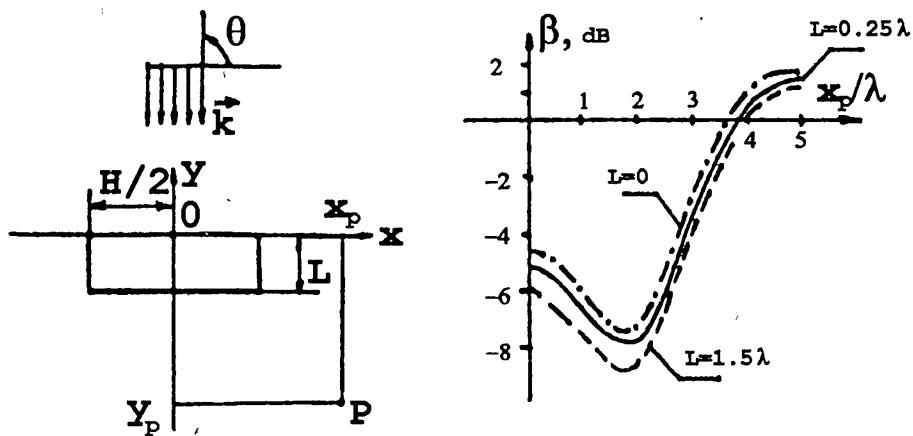


Рис. 6.

На рис. 6 представлены функции ослабления  $\beta = 20 \lg(|E|/|E_0|)$  экранов прямоугольного сечения ( $L = 0,25\lambda$  — сплошная кривая,  $L = 1,5\lambda$  — пунктир) и плоского тонкого экрана ( $L = 0$  — штрих-пунктир). Расчеты проводились при следующих геометрических параметрах задачи:  $H = 3\lambda$ ,  $y_p = -20\lambda$ ,  $\theta = \pi/2$ . Рис. 6 иллюстрирует одинаковый характер зависимости ослабления от координаты  $x$  точки наблюдения для прямоугольных экранов и ленты. При этом, с увеличением  $L$ , происходит улучшение защитных свойств экрана и увеличение размера зоны ослабления.

На рис. 7 представлены геометрия и результаты решения задачи дифракции цилиндрической волны, испускаемой точечным источником ( $C_m = 1$ ,  $|r_m| = 100\lambda$ ,  $\theta_m = 3\pi/2$ ), на сложном экране вида  $AB$  (рис. 1). В рассматриваемом случае экран  $B$  представляет собой дифракционную решетку из 5-ти цилиндров круглого сечения с параметрами  $h = 3\lambda$ ,  $h_1 = h_2$  (рис. 7). Рис. 7 иллюстрирует зависимость функции ослабления  $\beta$  от угла затенения  $\gamma_p$  для экрана сложной формы (пунктир) и полуплоскости (сплошная кривая) при  $y_p = 10^3\lambda$ . Вблизи границы свет–тень (малые значения  $\gamma_p$ ) экран сложной формы обеспечивает более эффективное ослабление, чем плоский экран той же высоты, однако, с ростом  $\gamma_p$  его защитные свойства ухудшаются.

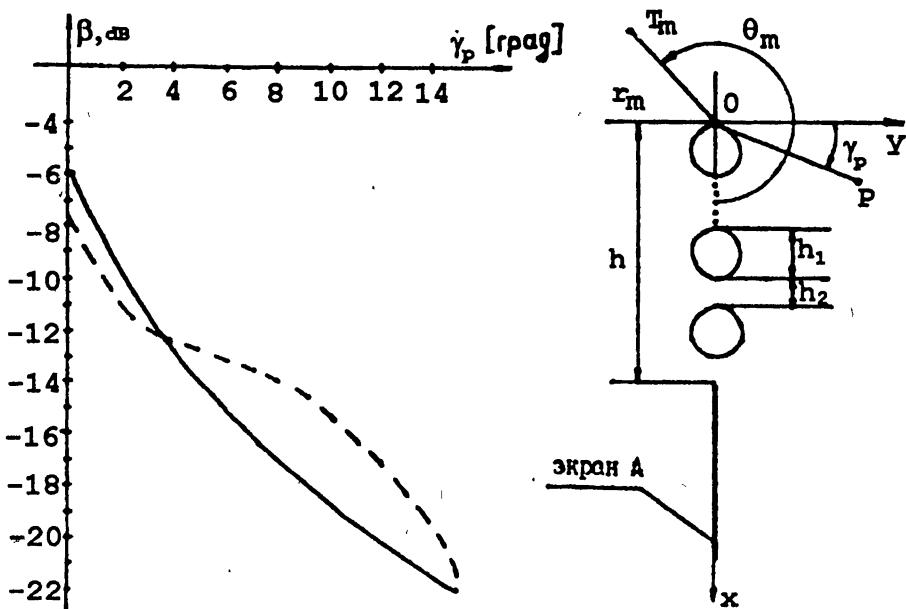


Рис. 7.

## ВЫВОДЫ

На основе метода эквивалентных источников создана математическая модель для решения задач дифракции на экранах различной формы, конфигурации и электрических размеров.

Проведена численная реализация математической модели в виде универсального пакета программ для ЕС ЭВМ, позволяющего с высокой точностью проводить расчеты дифракционного поля.

С помощью разработанного пакета программ получены оригинальные зависимости, характеризующие дифракционные свойства различных экранов сложной формы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
2. Малакшинов Н. П., Ерихов В. Г. // Антennы, 1977. Т. 25. С. 53.
3. Малакшинов Н. П., Ерихов В. Г., Якимов И. Л. Радиотехника и электроника, 1980. Т. 25. № 8. С. 1607.
4. Ерихов В. Г., Малакшинов Н. П., Якимов И. Л. / Краткие тексты докладов IX Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. Т. 1. — Телави, 1985. С. 537.

5. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. С. 191.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. Н. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. С. 323.
7. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. Т. 1. — М.: Наука, 1976. С. 23.
8. Горгошидзе А. Н. // Радиотехника и электроника, 1975. Т. 20. № 7. С. 1355.
9. Якимов И. Л. / В сб. Радиофизика. — М.: МРТИ АН СССР, 1991. С. 25.

Московский радиотехнический  
институт РАН

Поступила в редакцию  
31 марта 1993 г.

**MATHEMATICAL SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS  
OF DIFFRACTION ON COMPOSITE SCREENS**

*I. L. Yakimov*

Mathematical simulation of two-dimensional problems of diffraction of a  $E$ -polarized electromagnetic wave on composite form conducting screens is given. The technique is based on the virtual source method. Some problems of mathematical programming and the accuracy of calculations are considered. We also perform the calculations of some typical diffraction problems.

УДК 519.72:621.396.96

**МЕТОД МИНИМАКСА ЭНТРОПИИ  
В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ  
ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

*B. B. Савченко*

На основе сведения задачи идентификации к задаче спектрального анализа предложена рекуррентная процедура вычислений, использующая информационный критерий минимакса энтропии. Рассмотрена ее связь с известным решением задачи по критерию наименьших квадратов. Представлены результаты математического моделирования. Показано, что метод минимакса энтропии дает выигрыши в качестве идентификации, характеризуется большей скоростью сходимости и, как результат, предельно малыми требованиями к длине анализируемой выборки.

### ВВЕДЕНИЕ

Метод минимакса энтропии (ММЭ) разработан для решения проблемы малых выборок наблюдений при спектральном анализе случайных временных рядов [1]. Его преимущества в точности и скорости сходимости исследованы в ряде работ [2, 3], в которых даны рекомендации по его практическому применению. В развитие выводов предыдущих работ, ниже рассматриваются возможности метода ММЭ в задаче идентификации линейных динамических объектов по выборочным данным ограниченного объема.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан некоторый динамический объект, на вход которого подается воздействие  $\eta(t)$  типа "белого" (независимого) шума, а с выхода снимается напряжение  $y(t)$ , определенное на ограниченном временном интервале  $t \leq T < \infty$ . Воспользуемся линейной моделью динамического объекта по формуле авторегрессии  $M$ -го порядка

$$\hat{y}(t) = - \sum_{m=1}^M c_m \hat{y}(t-m) + \eta(t) \quad (1)$$

и после этого поставим задачу поиска оптимального вектора параметров  $\vec{c} \triangleq (1, c_1, \dots, c_M)^T$ , где т — обозначает транспонирование. В довольно

общем виде решение такой задачи реализуется в рамках структурной схемы, изображенной на рис. 1 [4]. Здесь ВЦФ — вычислитель целевой функции  $J(\vec{C})$ , управляющий по критерию  $J(\cdot) \rightarrow \text{extr}$  (экстремум) блоком адаптации модели (БА). Воспользуемся распространенным критерием минимума среднего квадрата отклонения  $J(\cdot) = \mathbf{E} \left\{ [\hat{y}(t) - y(t)]^2 \right\}$  формируемой модели  $\hat{y}(t)$  относительно наблюдения  $y(t)$ , где  $\mathbf{E}$  — символ математического ожидания.

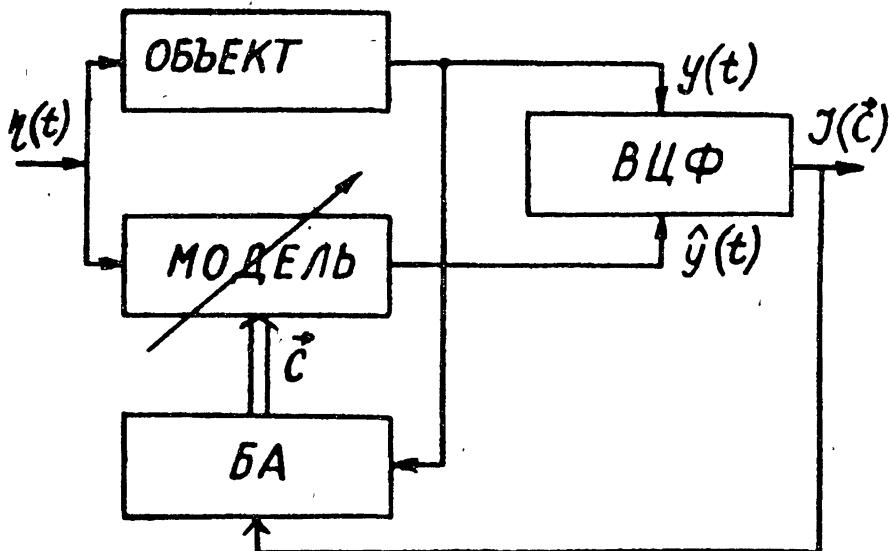


Рис. 1.

Из математической статистики известно, что оптимальным в указанном смысле является вектор коэффициентов линейной среднеквадратической регрессии

$$\vec{C} = \sigma_M^2 \mathbf{B}_M^{-1} \vec{\Gamma}_M, \quad (2)$$

определенный по корреляционной матрице наблюдений  $\mathbf{B}_M \stackrel{\Delta}{=} \|b_{i,m}\|$  размера  $(M+1) \times (M+1)$ . Здесь  $\sigma_M^2 \stackrel{\Delta}{=} (\vec{\Gamma}_M^T \mathbf{B}_M^{-1} \vec{\Gamma}_M)^{-1}$ ;  $\vec{\Gamma}_M \stackrel{\Delta}{=} (1, 0, \dots, 0)^T$  — вектор-столбец размера  $M+1$ ;  $\mathbf{B}_M^{-1}$  — матрица, обратная матрице  $\mathbf{B}_M$ . При неизвестной матрице  $\mathbf{B}_M^{-1}$  в выражение (2) войдет выборочная оценка матрицы  $B_M^{-1}(T)$  по выборке  $\{y(t)\}$  заданного объема  $T < \infty$ . Наиболее удобной для практического применения полагают рекуррентную процедуру оценивания оптимального вектора параметров модели вида

$$c_i(t) = c_i(t-1) - \gamma(t) y(t-i) z(t), \quad (3)$$

$$z(t) = y(t) + \sum_{i=1}^M c_i(t-1) y(t-i) \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

где  $\gamma(t)$  — переменный шаг итераций [4]. При выборе последнего из условия  $\gamma(t) = \gamma_0 = \text{const} \leq \text{Sp}^{-1} \mathbf{B}_M$  ( $\text{Sp}$  — след матрицы  $\mathbf{B}_M$ ), последовательность итераций (3) сходится в среднем квадратическом к оптимальному вектору (2).

Возможен иной подход [5], учитывающий однозначную связь корреляционной матрицы наблюдений  $\mathbf{B}_M$  с их спектральной плотностью мощности (СПМ) вида

$$b_{im} = \int_{-F}^F G_M(f) \exp[j 2\pi(i-m)f/F] df, \quad i, m \leq M, \quad (4)$$

где  $F$  — максимальная частота спектра. Поскольку СПМ заранее неизвестна, воспользуемся ее оценкой  $G_M^{(T)}(f)$  по выборке наблюдений  $\{y(t)\}$  ограниченного объема  $T$ . В рамках такого подхода задача определения оптимального вектора коэффициентов (2) сводится к задаче спектрального анализа имеющихся наблюдений. Для ее решения применим метод ММЭ в формулировке

$$G_M^{(T)}(f) = 1 / \left( \sum_{m=0}^M \lambda_m^{(T)} K_m^{2(T)}(f) \right), \quad (5)$$

использующий информацию об амплитудно-частотных характеристиках

$$K_m^{(T)}(f) \triangleq \left| 1 + \sum_{i=1}^m a_{i,m}^{(T)} \exp(-j 2\pi i f / F) \right| \quad (6)$$

набора параллельно включенных декорреляторов (ДК) порядков с 1-го по  $M$ -й включительно. При этом  $K_0(f) \equiv 1$ , а вектор весовых коэффициентов  $\{\lambda_m^{(T)}\}$  находится по набору дисперсий откликов  $\sigma_m^{2(T)}$  всех ДК путем решения системы уравнений

$$\int_{-F}^F K_m^{2(T)}(f) \left[ \sum_{i=0}^M \lambda_i^{(T)} K_i^{2(T)}(f) \right]^{-1} df = \sigma_m^{2(T)}, \quad m = \overline{0, M}, \quad (7)$$

где  $\sigma_0^2 \triangleq \mathbf{E}\{y^2(t)\} = \text{const}$  — дисперсия анализируемого процесса  $y(t)$  [1]. На множестве известных алгоритмов настройки ДК, оптимальных по критерию минимума среднеквадратических отклонений  $\sigma_m$  [4], выражение (5) определяет множество различных модификаций оценок СПМ по методу ММЭ. В случае использования в качестве ДК классического  $m$ -канального

автокомпенсатора помех (АКП) с корреляционной обратной связью, процесс адаптивной настройки коэффициентов ДК может быть представлен в виде

$$a_{i,m}(t) = a_{i,m}(t-1) - \gamma_0 y(t-i) z_m(t), \quad (8)$$

$$z_m(t) = y(t) + \sum_{i=1}^m a_{i,m}(t-1) y(t-i), \quad t = 1, 2, \dots,$$

где  $z_m(t)$  — процесс на выходе ДК  $m$ -го порядка. В момент  $t = T$  по набору полученных коэффициентов  $\{a_{i,m}^{(T)}\}$ ,  $i, m \leq M$ , вычисляется требуемый набор амплитудно-частотных характеристик ДК (6). Совокупность выражений (4)–(8) совместно с (2) определяет рекуррентный алгоритм решения задачи идентификации линейных динамических объектов вида (1) по методу ММЭ.

В частном случае одноканальной обработки при  $m = M$  из (5) получаем известную оценку СПМ по методу максимальной энтропии (МЭ)  $G_{M\Theta}^{(T)}(f) = \sigma_M^{2(T)} [2F K_M^{2(T)}(f)]^{-1}$ , которая совместно с (4) приводит к результату (3) при переобозначении переменных  $a_{i,m} = c_i$  [5]. Таким образом, предложенная выше процедура вычислений охватывает в своих модификациях, как частный случай, решение задачи идентификации по методу наименьших средних квадратов (НК) [4].

Закономерен в этой связи вопрос о преимуществах метода ММЭ по сравнению с указанным общеизвестным. Ответ на него дают результаты проведенного математического моделирования на ЭВМ.

## РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В качестве объекта анализа (рис. 1) использовался чистополосный фильтр 10-го порядка, выходное напряжение которого  $y(t)$  представляло собой случайный гауссовский процесс с дисперсией  $\sigma_0^2 = 0,5$  и математическим ожиданием  $E\{y(t)\} = 0$ . Настраиваемая модель была представлена чистополосным фильтром 5-го порядка, коэффициенты  $\{c_m\}$  которого формировались в БА согласно выражениям (2), (4)–(8). Набор ДК различных порядков  $m \leq 5$  был реализован на базе адаптивного решетчатого фильтра предсказания (РФ) 5-го порядка [6], динамика которого в дискретном времени  $t$  описывалась системой рекуррентных уравнений

$$e_m(t) = e_{m-1}(t) + \rho_m(t-1) b_{m-1}(t-1),$$

$$b_m(t) = b_{m-1}(t-1) + \rho_m(t-1) e_{m-1}(t),$$

$$\rho_m(t) = \rho_m(t-1) - \alpha_1 e_m(t) b_{m-1}(t-1) / \tilde{\sigma}_m^2(t),$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_m^2(t) &= \hat{\sigma}_m^2(t-1) \alpha_2 + 0,5 [e_m^2(t) + b_m^2(t-1)], \\ t &= 1, 2, \dots, T \quad \forall m = \overline{1, 5}\end{aligned}$$

при заданных начальных условиях  $e_0(t) = b_0(t) = y(t)$ ,  $\hat{\sigma}_m^2(0) = \rho_m(0) = 0 \forall m$ . Здесь  $e_m(t)$ ,  $b_m(t)$  — ошибки прямого и обратного предсказания  $m$ -го звена РФ;  $\{\varphi_m(t)\}$  — вектор коэффициентов отражения;  $\alpha_{1(2)} = \text{const}$ . При этом требуемый в (5) набор частотных характеристик (6) рассчитывался для финального момента времени  $t = T$  с использованием рекурсии Левинсона  $a_{i,m} = a_{i,m-1} + \varphi_m(T) a_{m-i,m-1}$  при  $a_{0,m} = 1 \forall m$ . Применительно к решаемой задаче перспективность такой интерпретации набора ДК вытекает из того, что РФ предсказания  $M$ -го порядка строится по схеме каскадного соединения РФ предсказания низших порядков  $m < M$  и обладает высоким быстродействием. Совокупность весовых коэффициентов  $\{\lambda_m^{(T)}\}$  определялась из (7) путем итеративного решения

$$\begin{aligned}\lambda_m^{(T)}(i) &= \lambda_m^{(T)}(i-1) + \\ &+ \gamma_m \left\{ \int_{-F}^F K_m^{2(T)}(f) \left[ \sum_{p=0}^M \lambda_p^{(T)}(i-1) K_p^{2(T)}(f) \right]^{-1} df - \sigma_m^{2(T)} \right\}, \\ i &= 1, 2, \dots, \quad m \leq 5\end{aligned}$$

с инициализацией  $\lambda_M^{(T)}(0) = 2F \cdot \sigma_M^{-2(T)}$ ,  $\lambda_m^{(T)} = 0$  и заданным шагом  $\gamma_m > 0$  при числе итераций  $I = 100$ . Элементы корреляционной матрицы модели (4) вычислялись с применением стандартной подпрограммы БПФ. С применением библиотечной подпрограммы обращения матриц вычислялась матрица  $\mathbf{B}_M^{-1}$ . Критерий качества идентификации  $J(\cdot)$  рассчитывался как средний по выборке объема  $K = 200$  квадрат отклонения  $\hat{J}(\cdot) = \sum_{t=1}^K [y(t) - \hat{y}(t)]^2 / K$ . Моделирование проведено аспирантом С. В. Холопенковым, которому автор выражает свою признательность.

Результаты моделирования представлены на рис. 2 графиками зависимости  $\hat{J}(T)$  от длины интервала анализа  $T$ , полученными усреднением по 10 независимым реализациям (кривая 1 соответствует методу ММЭ, кривая 2 — методу НК). Видно, что метод ММЭ даёт выигрыш в качестве идентификации, характеризуется большей скоростью сходимости и, как результат, предельно малыми требованиями к длине анализируемой выборки. Его преимущества особенно существенны в условиях малых выборок наблюдений, в то время как в асимптотике при  $T \rightarrow \infty$  оба метода дают идентичные результаты [7].

Наглядное представление об указанных преимуществах метода ММЭ дает сравнение представленных на рис. 3а, б типичных реализаций оценок СПМ по методу ММЭ (кривая 1) и методу НК (кривая 2) при двух

различных объемах выборки  $T = 20$  и  $40$  соответственно. Здесь же для сопоставления штриховыми линиями показана истинная СПМ анализируемого процесса  $y(t)$ . Видно, что достигаемый при применении метода ММЭ эффект в задаче идентификации, естественно, может быть связан с более высокой точностью спектрального анализа, особенно в области главного лепестка СПМ. При этом уже 2-3 интервалов корреляции анализируемого процесса (случай  $T = 20$ ) оказывается вполне достаточно для качественного решения задачи идентификации.

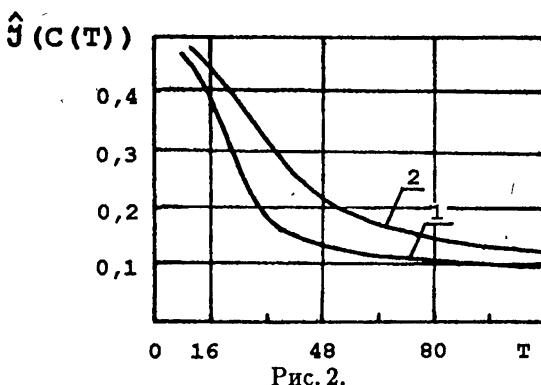


Рис. 2.

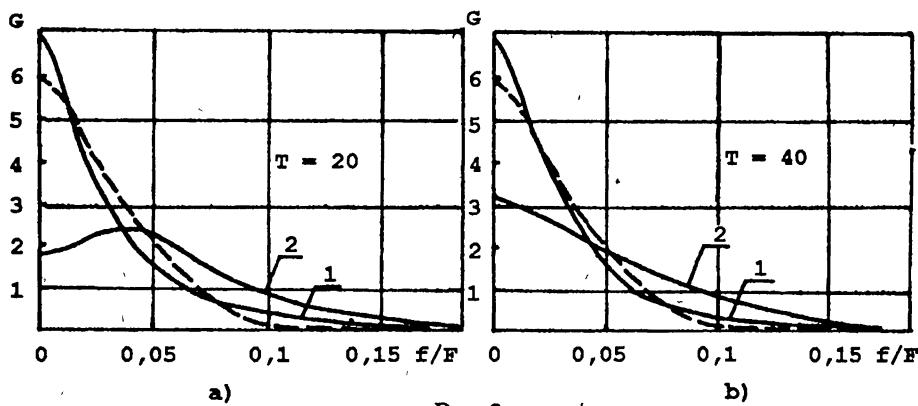


Рис. 3.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на основании выявленных возможностей в отношении сокращения требований к объему выборки наблюдений, можно говорить о существенном расширении области применения рекуррентных методов идентификации и распространении ее на задачи с медленно меняющимися процессами и процессами с кусочной стационарностью на интервалах, не превышающих нескольких интервалов корреляции.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Савченко В. В. // Автоматика и телемеханика, 1988. № 10. С. 101.
2. Савченко В. В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1990. Т. 33. № 5. С. 74.
3. Акатьев Д. Ю., Костюнин А. Н. // Автометрия, 1991. № 6. С. 68.
4. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. — М.: Наука, 1968.
5. Кей С. Т., Марпл С. Л. // ТИИЭР, 1981. Т. 69. № 11. С. 5.
6. Фридландер Б. // ТИИЭР, 1982. Т. 70. № 8. С. 54.
7. Савченко В. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1991. Т. 34. № 3. С. 268.

Нижегородский государственный  
технический университет

Поступила в редакцию  
1 марта 1993 г.

### THE MINIMAX ENTROPY METHOD IN THE PROBLEM OF IDENTIFICATION OF LINEAR DYNAMIC OBJECTS

V. V. Savchenko

On the basis of reducing the identification problem into that of the spectral analysis a recurrent calculation procedure, is suggested which uses the informational minimax entropy criterion. Its connection with the known solution by the method of least squares is considered. The results of mathematical modelling are presented. It is shown that the minimax entropy method provides the better quality of identification, it is characterized by a better speed of convergence, and, as a result, it demands a shorter length of a sample.

# ОТРАЖЕНИЕ РАДИОВОЛН МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДОЙ С ШЕРОХОВАТЫМИ ГРАНИЦАМИ И НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СЛОЕВ

*С. Ф. Пименов, М. А. Руденко*

Теоретически исследовано рассеяние радиоволн многослойной средой с крупномасштабными неровностями границ и неоднородностями диэлектрической проницаемости слоев. Показано, что существуют различные механизмы, приводящие к осциллирующей зависимости некогерентной составляющей отраженной мощности  $P_{\text{нк}}$  от обратной длины волны  $\lambda^{-1}$  и толщин слоев. Показано также, что при слабых отражениях эффект замирания рассеяния для  $n$ -слойной среды имеет по крайней мере порядок  $P_{\text{нк}}/P_{\text{k}} \sim (\sigma_{h_i}/\lambda)^{2n}$ , где  $\sigma_{h_i}^2$  — дисперсия неровностей верхней границы,  $P_{\text{k}}$  — когерентная составляющая отраженной мощности.

Рассеяние радиоволн слоистыми средами рассматривалось ранее в целом ряде работ (см., например, [1–6]). В частности, в [6] для двухслойной среды в приближении Кирхгофа получены аналитические выражения для когерентной и некогерентной составляющих отраженной мощности при произвольной корреляции между неровностями границ. В данной работе результаты [6] обобщены на случай многослойной среды, причем учитываются также флуктуации диэлектрических проницаемостей слоев. Корреляция между неровностями границ и неоднородностями слоев считается произвольной.

Пусть среда, заполняющая нижнее полупространство, разделена в среднем плоскими границами на  $n$  горизонтальных слоев. Обозначим величины, относящиеся к  $i$  слою ( $i = 1, \dots, n$ ) следующим образом:  $H_{i+1}$  — средняя толщина слоя ( $i = 1, \dots, n - 1$ , нижний  $n$  слой, полубесконечный),  $h_i(x, y)$  — вертикальное (вдоль оси  $z$ ) отклонение  $i$  границы среды от среднего положения,  $\epsilon_{i+1}$  — средняя диэлектрическая проницаемость (постоянна в пределах слоя),  $\delta\epsilon_{i+1}(x, y)$  — неоднородность диэлектрической проницаемости (считается зависящей только от горизонтальных координат). В верхнем полупространстве, диэлектрическая проницаемость которого  $\epsilon_1 = 1$ , на расстоянии  $R_0$  от среды в точке  $A$  находятся излучатель и приемник. Примем следующие ограничения на параметры среды. Будем считать, что неровности границ пологие (среднеквадратичные отклонения границ  $\sigma_{h_i}$  малы по сравнению с радиусами корреляции  $l_{h_i}$ ), а их радиусы корреляции  $l_{h_i}$  и радиусы кривизны  $R_{c_i}$  существенно превы-

шают длину волны электромагнитного излучения  $\lambda$ : при  $\delta\epsilon_1 = 0$  для однородного нижнего полупространства (при  $n = 1$ ) эти ограничения соответствуют условиям применимости приближения Кирхгофа [7, 8]. Кроме того, радиусы корреляции неоднородностей диэлектрической проницаемости  $l_{\epsilon,i+1}$  также полагаем существенно превышающими длину волны  $\lambda$ . Это ограничение позволяет при  $n = 1$  распространить подход [7, 8] на случай  $\delta\epsilon_2 \neq 0$ . Будем считать также, что все коэффициенты отражения от границ между слоями  $R_j$ , за исключением может быть одного, малы  $|R_j| \ll 1$ . Если к перечисленным условиям добавить требование того, чтобы система приповерхностных слоев была достаточно тонкой, такой что:

$$\left( \sum_{p=1}^{n-1} \left( \left( \max \left( \sigma_{h,p}^2 (\sqrt{\epsilon_p} - \sqrt{\epsilon_{p+1}})^2, \lambda^2 \right) / l_{h,p}^2 \right) \sum_{i=p}^{n-1} (H_{i+1} \epsilon_i / \sqrt{\epsilon_{i+1}}) \right)^2 \right) \ll \lambda^2, \quad (1)$$

то методом касательной плоскости можно воспользоваться и для такой многослойной среды. Условие (1) отражает требование малости изменения фазового набега луча в среде при его отклонении от нормали на углы преломления  $\theta_h \sim (1 - (\epsilon_i / \epsilon_{i+1})^{1/2}) \sigma_{h,i} / l_{h,i}$  и на углы рассеяния  $\theta_p \sim \lambda / l_{h,i}$ . В (1) также содержится существенное требование, чтобы для каждой из границ точки пересечения ее лучом при проходе в прямом и в обратном направлении были удалены на расстояние заметно меньшее радиуса корреляции неровностей. При выполнении перечисленных выше требований напряженность отраженного поля и комплексное напряжение на входе приемника в т.  $A$  получаются непосредственно из соотношений, выведенных для полуограниченной среды (см. [9, 10]) заменой присутствующего там Френелевского коэффициента отражения на коэффициент отражения от многослойной среды  $w_n$ . При этом комплексное напряжение на входе приемника  $\dot{U}$ , соответствующее основным поляризациям, запишется в следующем виде:

$$\dot{U} = \frac{Q_1}{R_0^2 \lambda^2} \int dx dy G^2(\alpha, \beta) \exp \left\{ -\frac{4\pi i}{\lambda} \tilde{R}_0 \right\} \exp \left\{ \frac{4\pi i}{\lambda} h_1 \right\} w_n, \quad (2)$$

где  $Q_1 = A_a \sqrt{2P_a R_a}$ , величины  $G(\alpha, \beta) = \exp \left\{ -1,38(x^2 + y^2) / (R_0^2 \theta_A^2) \right\}$ ,  $\theta_A$ ,  $A_a$ ,  $R_a$  — диаграмма направленности, ширина диаграммы направленности, эффективная площадь и активное сопротивление антенны,  $P_a$  — мощность, поступающая в антенну,  $\tilde{R}_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + R_0^2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = x/R_0$ ,  $\operatorname{tg} \beta = y/R_0$ . В (2) используется коэффициент отражения от  $n$ -слойной среды  $w_n$  для случая нормального падения. Пренебрежение его угловой зависимостью в области интегрирования по  $dx dy$ , дающей основной вклад в (2), оказывается оправданным в волновой зоне ( $\lambda \ll R_0$ ) при выполнении основных ограничений приближения Кирхгофа ( $\lambda \ll l_{h,i}, l_{\epsilon,i+1}, R_{c,i}$ );

$\sigma_{h,i} \ll l_{h,i}$ ). Коэффициент отражения от  $n$ -слойной среды  $w_n$  может быть представлен, как обычно, в виде рекуррентного соотношения:

$$\begin{cases} w_1 = R_n, \\ w_{n-j+1} = \left( R_j + w_{n-j} e^{2i\phi_j} \right) / \left( 1 + R_j w_{n-j} e^{2i\phi_j} \right), \end{cases} \quad (3)$$

где  $R_j = (\sqrt{\varepsilon_{j+1}} - \sqrt{\varepsilon_j}) / (\sqrt{\varepsilon_{j+1}} + \sqrt{\varepsilon_j})$  — френелевский коэффициент отражения от границы раздела  $j-1$  и  $j$  слоя,  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $\phi_j$  — величина фазового набега в  $j$  слое. Для вычислений, однако, удобнее представить  $w_n$  в виде разложения в  $(n-1)$ -мерный ряд Тейлора по степеням фазовых множителей  $\exp\{2i\phi_j\}$ . При принятом выше предположении об  $R_j$  этот ряд достаточно быстро сходится. Условия его сходимости  $|Y| < 1$  определяются свойствами общего знаменателя  $D$  задаваемой соотношениями (3) дроби, который сводится к виду  $D = 1 + Y$ . В частности, для двухслойной среды получаем просто  $|R_1 R_2| < 1$ , а для трехслойной среды —  $|R_1 R_2 \exp\{2i\phi_1\} + R_2 R_3 \exp\{2i\phi_2\} + R_1 R_3 \exp\{2i\phi_1 + 2i\phi_2\}| < 1$ . Кроме того, в коэффициентах  $A_{m_l}$ , указанного выше ряда и в фазовых набегах  $\phi_j$  будем удерживать лишь линейные по  $\delta\varepsilon_{j+1}(x, y)$  слагаемые (пренебрегая в  $\phi_j$  также и произведением  $\delta\varepsilon_{j+1}(x, y) h_i(x, y)$ ). Тогда выражение для  $w_n$  приобретает вид:

$$w_n = \sum_{m_l=0}^{\infty} (A_{m_l} + \delta A_{m_l}) \exp \left\{ 2i \sum_{j=1}^{n-1} m_j \phi_j \right\}, \quad (4)$$

где  $l = 1, \dots, n-1$ ,  $A_{m_l} = A_{m_1 m_2 \dots m_{n-1}}$  — невозмущенные коэффициенты разложения  $w_n$  по степеням фазовых множителей,

$$\delta A_{m_l} \cong \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{j+1}} A_{m_l} \delta \varepsilon_{j+1}, \quad (5)$$

$$\phi_j \cong -\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_{j+1}} \left( H_{j+1} + h_j - h_{j+1} + H_{j+1} \frac{\delta \varepsilon_{j+1}}{2\varepsilon_{j+1}} \right). \quad (6)$$

Принятое для (5) приближение соответствует отбрасыванию в (4) слагаемых более высокого порядка малости по  $\delta\varepsilon_{j+1}(x, y)$ , чем первый. Точная сумма этих слагаемых  $\Delta w_n$  проще всего определяется непосредственно из (3) путем несложных, но громоздких преобразований (алгебраическим путем выделяется часть дроби (3), пропорциональная нулевым и первым степеням  $\delta\varepsilon_{j+1}(x, y)$ ). Приведем лишь значение этой суммы для двухслойной среды  $\Delta w_2$ , когда  $\delta\varepsilon_2 = 0$  (см. приложение (п.1)). В (6) принятое приближение соответствует отбрасыванию слагаемого  $\Delta\phi_j$  (см. приложение (п.2)).

Коэффициенты  $A_{m_l}$  таковы, что если какой-либо индекс  $m_k = 0$ , а индекс  $m_j$  с большим порядковым номером  $j > k$  отличен от нуля, то  $A_{m_l} \equiv 0$ . Кроме того, если все  $m_j$  не равны нулю при  $j < k$  и все  $m_j = 0$  при  $j \geq k$ , то все  $\frac{\partial^q}{(\partial \varepsilon_{j+2})^q} A_{m_l} \equiv 0$  при  $j \geq k$ . Это видно из того, что фазовый множитель  $\exp\{2i\phi_j\}$  и коэффициент отражения от нижней  $(n-j)$ -слойной среды  $w_{n-j}$  входят в (3) в виде произведения, и никак иначе. Обращение же в ноль  $m_j$  в  $A_{m_l}$  соответствует отбрасыванию части рекуррентной цепи, пропорциональной  $\exp\{2i\phi_j\}$ , вместе с которой отбрасывается и зависимость от  $w_{n-j}$ .

Вычислим корреляторы вида  $\langle \dot{U}(\lambda_1) \rangle \langle \dot{U}(\lambda_2) \rangle / 2R_a \equiv \langle \dot{U}_1 \rangle \langle \dot{U}_2 \rangle / 2R_a$  и  $\langle \dot{U}(\lambda_1) \dot{U}(\lambda_2) \rangle / 2R_a \equiv \langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle / 2R_a$  (выбор различных  $\lambda_1, \lambda_2$  позволяет использовать эти величины, в частности, для анализа рассеяния импульсного радиоизлучения), пренебрегая  $\delta A_{m_l}$  и удерживая в (6) лишь слагаемые нулевого и первого порядка по  $h_j, h_{j+1}$  и  $\delta \varepsilon_{j+1}$ . Это соответствует выполнению неравенств:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{j+1}} A_{m_l} \ll \frac{2\pi H_{j+1}}{\lambda \sqrt{\varepsilon_{j+1}}} A_{m_l}, \quad (7)$$

$$\frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_{j+1}} h_i \frac{\delta \varepsilon_{j+1}}{2\varepsilon_{j+1}} \ll \pi, \quad (i = j, j+1), \quad (8)$$

$$\frac{4\pi}{\lambda} H_{j+1} \sqrt{\varepsilon_{j+1}} \frac{\delta \varepsilon_{j+1}^2}{8\varepsilon_{j+1}^2} \ll \pi. \quad (9)$$

Отметим, что при выполнении (8), (9) слагаемые в (6), пропорциональные  $h_j, h_{j+1}$  и  $\delta \varepsilon_{j+1}$ , все еще могут существенно превышать  $\pi$ . В результате получаем:

$$\begin{aligned} \langle \dot{U}_1 \rangle \langle \dot{U}_2 \rangle &= \frac{Q_1^2}{R_0^4 \lambda_1^2 \lambda_2^2} \int dx dy dx' dy' G^2(\alpha, \beta) G^2(\alpha', \beta') \times \\ &\times \exp \left\{ -4\pi i \left( \frac{\tilde{R}_0}{\lambda_1} + \frac{\tilde{R}'_0}{\lambda_2} \right) \right\} \times \\ &\times \sum_{m_l, k_p=0}^{\infty} A_{m_l} A_{k_p} \exp \left\{ -4\pi i \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{m_j}{\lambda_1} + \frac{k_j}{\lambda_2} \right) \sqrt{\varepsilon_{j+1}} H_{j+1} \right\} \times \\ &\times \left\langle \exp \left\{ \frac{4\pi i}{\lambda_1} \sum_{j=1}^n \left[ \left( m_{j-1} \sqrt{\varepsilon_j} - m_j \sqrt{\varepsilon_{j+1}} \right) h_j - m_j \sqrt{\varepsilon_{j+1}} H_{j+1} \frac{\delta \varepsilon_{j+1}}{2\varepsilon_{j+1}} \right] \right\} \right\rangle \times \\ &\times \left\langle \exp \left\{ \frac{4\pi i}{\lambda_2} \sum_{j=1}^n \left[ \left( k_{j-1} \sqrt{\varepsilon_j} - k_j \sqrt{\varepsilon_{j+1}} \right) h'_j - k_j \sqrt{\varepsilon_{j+1}} H_{j+1} \frac{\delta \varepsilon'_{j+1}}{2\varepsilon_{j+1}} \right] \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и далее  $m_n = k_n = 0$ ,  $m_0 = k_0 = 1$ .

$$\begin{aligned} \langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle &= \frac{Q_1^2}{R_0^4 \lambda_1^2 \lambda_2^2} \int dx dy dx' dy' G^2(\alpha, \beta) G^2(\alpha', \beta') \times \\ &\times \exp \left\{ -4\pi i \left( \frac{\tilde{R}_0}{\lambda_1} + \frac{\tilde{R}'_0}{\lambda_2} \right) \right\} \times \\ &\times \sum_{m_l, k_p=0}^{\infty} A_{m_l} A_{k_p} \exp \left\{ -4\pi i \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{m_j}{\lambda_1} + \frac{k_j}{\lambda_2} \right) \sqrt{\varepsilon_{j+1}} H_{j+1} \right\} \times \\ &\times \left\langle \exp \left\{ \frac{4\pi i}{\lambda_1} \sum_{j=1}^n \left[ (m_{j-1} \sqrt{\varepsilon_j} - m_j \sqrt{\varepsilon_{j+1}}) h_j - m_j \sqrt{\varepsilon_{j+1}} H_{j+1} \frac{\delta \varepsilon_{j+1}}{2\varepsilon_{j+1}} \right] \right. \right. + \right. \\ &+ \left. \left. \left. \frac{4\pi i}{\lambda_2} \sum_{j=1}^n \left[ (k_{j-1} \sqrt{\varepsilon_j} - k_j \sqrt{\varepsilon_{j+1}}) h'_j - k_j \sqrt{\varepsilon_{j+1}} H_{j+1} \frac{\delta \varepsilon'_{j+1}}{2\varepsilon_{j+1}} \right] \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Случайные величины ( $h_i$ ,  $\delta \varepsilon_i$ ,  $h'_i$ ,  $\delta \varepsilon'_i$ ), по которым производится усреднение в (10), (11) (обозначенное угловыми скобками), представим в виде компонент  $4n$ -мерного вектора  $\vec{W}$

$$\vec{W} = \left( h_1, \dots, h_n, \frac{\delta \varepsilon_2}{2\varepsilon_2}, \dots, \frac{\delta \varepsilon_{n+1}}{2\varepsilon_{n+1}}, h'_1, \dots, h'_n, \frac{\delta \varepsilon'_2}{2\varepsilon'_2}, \dots, \frac{\delta \varepsilon'_{n+1}}{2\varepsilon'_{n+1}} \right) \quad (12)$$

и предположим статически однородное гауссово распределение этих величин с  $4n$ -мерной плотностью распределения  $S$ :

$$S(\vec{W}) = [(2n)^{4n} \det \|\hat{B}\|]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \vec{W} \hat{B}^{-1} \vec{W} \right\}, \quad (13)$$

где  $B_{rt} = \langle W_r W_t \rangle \equiv \rho_{rt} \sigma_r \sigma_t$  — ковариационная матрица,  $\rho_{rt}$  — корреляционная матрица,  $\sigma_r^2$  — дисперсии величин  $W_r$ . Очевидно,  $\sigma_r^2 = \langle h_i^2 \rangle \equiv \sigma_{h_i}^2$  при  $r = i$  и  $r = i + 2n$ , а также  $\sigma_r^2 = \langle (\delta \varepsilon_{i+1}/2\varepsilon_{i+1})^2 \rangle \equiv \sigma_{\varepsilon_{i+1}}^2$  при  $r = i + n$  и  $r = i + 3n$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Определим  $4n$ -мерные векторы  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\beta}'$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\beta} &= \left( \frac{2\pi}{\lambda_1} (1 - m_1 \sqrt{\varepsilon_2}), \frac{2\pi}{\lambda_1} (m_1 \sqrt{\varepsilon_2} - m_2 \sqrt{\varepsilon_3}), \dots \right. \\ &\quad \dots, \frac{2\pi}{\lambda_1} m_{n-1} \sqrt{\varepsilon_n}, -\frac{2\pi}{\lambda_1} m_1 \sqrt{\varepsilon_2} H_2, -\frac{2\pi}{\lambda_1} m_2 \sqrt{\varepsilon_3} H_3, \dots \\ &\quad \dots, -\frac{2\pi}{\lambda_1} m_{n-1} \sqrt{\varepsilon_n} H_n, 0, \dots, 0 \Big) , \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \vec{\beta}' &= \left( 0, \dots, 0, \frac{2\pi}{\lambda_2} (1 - k_1 \sqrt{\varepsilon_2}), \frac{2\pi}{\lambda_2} (k_1 \sqrt{\varepsilon_2} - k_2 \sqrt{\varepsilon_3}), \dots \right. \\ &\quad \dots, \frac{2\pi}{\lambda_2} k_{n-1} \sqrt{\varepsilon_n}, -\frac{2\pi}{\lambda_2} k_1 \sqrt{\varepsilon_2} H_2, -\frac{2\pi}{\lambda_2} k_2 \sqrt{\varepsilon_3} H_3, \dots \\ &\quad \dots, -\frac{2\pi}{\lambda_2} k_{n-1} \sqrt{\varepsilon_n} H_n, 0 \Big) , \end{aligned} \quad (15)$$

(последние  $2n + 1$  компоненты вектора  $\vec{\beta}$  и первые  $2n$  компонент вектора  $\vec{\beta}'$  равны 0). Тогда выражения в угловых скобках в (10), (11) приобретают вид  $\langle \exp(2i\vec{b}\vec{W}) \rangle$ , где  $\vec{b}$  последовательно принимает значения  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\beta}'$  и  $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\beta}'$ , а сами результаты усреднений описываются соотношением:

$$\langle \exp(2i\vec{b}\vec{W}) \rangle = \exp\{-2\vec{b}\vec{B}\vec{b}\}. \quad (16)$$

В частности, произведение средних в (10) дает:

$$\exp\{-\gamma(m_l, k_p)\} = \exp\left\{-2 \sum_{i,j=1}^{4n} \alpha_i \sigma_i A_{ij} \sigma_j \alpha_j (\mu(i)\mu(j) + \nu(i)\nu(j))\right\}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \mu(i) &= \begin{cases} 1, & 0 < i \leq 2n, \\ 0, & 2n < i \leq 4n, \end{cases} & \nu(i) &= \begin{cases} 0, & 0 < i \leq 2n, \\ 1, & 2n < i \leq 4n, \end{cases} \\ A_{ij} &= \rho_{ij}(0). \end{aligned}$$

Среднее в (11) равно:

$$\begin{aligned} \exp\{-\gamma(m_l, k_p) - \Delta^{m_l, k_p}\} &= \exp\{-\gamma(m_l, k_p)\} \times \quad (18) \\ &\times \exp\left\{-4 \sum_{i,j=1}^{4n} \alpha_i \sigma_i \rho_{ij} \sigma_j \alpha_j \mu(i)\nu(j)\right\}. \end{aligned}$$

Подставляя (17) в (10), с учетом  $\tilde{R}_0 \cong R_0 + (x^2 + y^2)/2R_0$  получим:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \dot{U}_1 \rangle \langle \dot{U}_2 \rangle}{2R_a} &= -\frac{Q_1^2}{8R_a R_0^2 \lambda_1 \lambda_2} \exp\left\{-4\pi i R_0 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right\} \times \\ &\times \sum_{m_l, k_p=0}^{\infty} A_{m_l} A_{k_p} \exp\left\{-4\pi i \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{m_j}{\lambda_1} + \frac{k_j}{\lambda_2}\right) \sqrt{\varepsilon_{j+1}} H_{j+1}\right\} \times \quad (19) \\ &\times \exp\{-\gamma(m_l, k_p)\}. \end{aligned}$$

Для вычисления коррелятора  $\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle / 2R_a$  воспользуемся разложением  $\exp\{-\Delta^{m_l, k_p}\}$  в ряд по степеням  $\sigma_i$ ,  $\sigma_j$ :

$$\exp\{-\Delta^{m_l, k_p}\} = 1 + \sum_{\substack{S_{ij}=0, \\ \Sigma S_{ij}>0}}^{\infty} \prod_{i,j=1}^{4n} d_{S_{ij}}^{m_l, k_p} \rho_{ij}^{S_{ij}}, \quad (20)$$

где

$$d_{S_{ij}}^{m_l, k_p} = (-4\sigma_i \sigma_j \alpha_i \alpha_j \mu(i)\nu(j))^{S_{ij}} / [S_{ij}!]. \quad (21)$$

В результате, считая  $\rho_{ij} = A_{ij} \exp \left\{ -(x - x')^2 l_{x,i,j}^{-2} - (y - y')^2 l_{y,i,j}^{-2} \right\}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle}{2R_a} &= \frac{Q_1^2}{8R_a R_0^2 \lambda_1 \lambda_2} \exp \left\{ -4\pi i R_0 \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right\} \times \\ &\times \sum_{m_l, k_p=0}^{\infty} A_{m_l} A_{k_p} \exp \left\{ -4\pi i \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{m_j}{\lambda_1} + \frac{k_j}{\lambda_2} \right) \sqrt{\varepsilon_{j+1}} H_{j+1} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\gamma(m_l, k_p) \right\} \times \\ &\times \left\{ -1 + \sum_{\substack{s_{ij}=0, \\ 2s_{ij}>0}}^{\infty} \prod_{i,j=1}^{4n} d_{S_{ij}}^{m_l, k_p} A_{ij}^{S_{ij}} B_{x,S_{ij}} B_{y,S_{ij}} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} B_{x,y,S_{ij}} &= \frac{\pi}{R_0} (\lambda_1 \lambda_2)^{-1/2} \left( \frac{1}{2} l_{x,y,S_{ij}}^{-2} \left[ \frac{\pi i}{R_0} \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1,38}{R_0^2} \left( \frac{1}{\theta_A^2(\lambda_1)} + \frac{1}{\theta_A^2(\lambda_2)} \right) \right] - \frac{\pi^2}{R_0^2 \lambda_1 \lambda_2} \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{z} > 0,$$

$$l_{x,y,S_{ij}}^{-2} = \sum_{i,j=1}^{4n} S_{ij} l_{x,y,i,j}^{-2}. \quad (24)$$

Влияние рассеяния волн неоднородностями  $\delta\varepsilon_i$  и неровностями  $h_j$  на величину  $\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle / 2R_a$  в рамках принятого приближения (соотношения (7)–(9)) полностью характеризуется уменьшением модулей слагаемых ряда (19) за счет экспоненциальных множителей  $\exp \left\{ -\gamma(m_l, k_p) \right\}$ . В общем случае декременты затухания  $\gamma(m_l, k_p)$  являются положительно определенными квадратичными формами относительно переменных  $\sigma_i$ . При условии полной скоррелированности  $|A_{ij}| = 1$  всех  $W_i$  величины  $\gamma(m_l, k_p)$  становятся неотрицательными квадратичными формами, которые могут быть представлены в виде суммы двух полных квадратов:

$$\begin{aligned} \gamma(m_l, k_p) &= \\ &= 2 \left\{ \sum_{i,j=1}^{2n} \beta_i(m_l) \sigma_i A_{ij} \sigma_j \beta_j(m_l) + \sum_{i,j=2n+1}^{4n} \beta'_i(k_p) \sigma_i A_{ij} \sigma_j \beta'_j(k_p) \right\} = \quad (25) \\ &= 2 \left\{ \left( \sum_{i=1}^{2n} q_i \beta_i(m_l) \sigma_i \right)^2 + \left( \sum_{i=2n+1}^{4n} q_i \beta'_i(k_p) \sigma_i \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

где  $q_i = \pm 1$ ,  $A_{ij} = q_i q_j$ , т. е. для обращения  $\gamma(m_l, k_p)$  в ноль кроме  $|A_{ij}| = 1$  необходимо выполнение условий:

$$\sum_{i=1}^{2n} \beta_i(m_l) q_i \sigma_i = 0, \quad \sum_{i=2n+1}^{4n} \beta'_i(k_p) q_i \sigma_i = 0. \quad (26)$$

Анализ соотношений (26) показывает, что если  $\sigma_1 \equiv \sigma_{h_1}$  не равна 0, то одновременно в 0 могут быть обращены  $(2(n-1))^2$  декрементов  $\gamma(m_l, k_p)$ . При  $\alpha_1 = 0$ , но отличных от нуля других каких-либо входящих в (26)  $\sigma_i$ , не все, но неограниченное число  $\gamma(m_l, k_p)$  могут обращаться в 0. В этом случае, если для двух наборов чисел  $m_l$  и  $k_p$  выполнены условия (26), то они, как видно из (14), (15), будут выполнены и для любых наборов чисел  $Mm_l$  и  $Kk_p$  ( $M, K$  — целые положительные). И, наконец, если все только  $m_l$ , либо все только  $k_p$  равны 0, то соответствующие  $\gamma(m_l, k_p)$  не могут обращаться в 0 при отличной от нуля  $\sigma_{h_1}$  и

$$(\gamma(0, k_p))^2_{\min} = 2 \left( \frac{2\pi}{\lambda_1} \sigma_{h_1} \right)^2, \quad (\gamma(m_l, 0))^2_{\min} = 2 \left( \frac{2\pi}{\lambda_2} \sigma_{h_1} \right)^2.$$

Отметим также, что в случае слабоотражающих внутренних границ ( $R_j \ll 1$ ,  $j = 2 \dots n$ ) при  $\varepsilon_2 < 4$  волна, отраженная верхней границей, рассеивается неровностями этой границы сильнее, чем волна, отраженная какой-либо внутренней границей (как и в двухслойной среде [6]). В силу этого для  $n$ -слойной среды остается справедливым вывод [6], что при определении глубины слоя по когерентной составляющей отраженной мощности влияние ложных отражений от крупномасштабных шероховатых неоднородностей и неровностей уменьшается с ростом  $\sigma_{h_1}$  при  $\varepsilon_2 < 4$ . Поскольку такое же условие имеет место при любых соотношениях  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (а не только при  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ), то этот вывод можно распространить и на случай импульсного подповерхностного зондирования  $n$ -слойной среды.

Свойства рассеянных волн рассмотрим на примере некогерентной составляющей отраженной мощности  $P_{\text{нк}} \equiv (\langle \dot{U}_1 \dot{U}_2 \rangle - \langle \dot{U}_1 \rangle \langle \dot{U}_2 \rangle) / 2R_a$ ,  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ . При этом ограничимся первым порядком теории возмущений, удерживая в выражении  $P_{\text{нк}}$  лишь квадратичные по  $\sigma_i$  слагаемые, снимем ограничение (7), а учет возмущений коэффициентов отражения проведем в рамках приведенной выше техники вычислений с помощью соотношения:

$$A_{m_l} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{j+1}} A_{m_l} \delta \varepsilon_{j+1} \approx \quad (27)$$

$$\approx A_{m_l} \exp \left\{ 2i \sum_{j=1}^n \left( -i \varepsilon_{j+1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{j+1}} (\ln A_{m_l}) \frac{\delta \varepsilon_{j+1}}{2\varepsilon_{j+1}} \right) \right\},$$

которое выполняется с необходимой для первого порядка теории возмущений точностью. Из (27) получим поправки к векторам  $\vec{\beta}$  и  $\vec{\beta}'$ :

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\beta} = & \left( 0 \dots 0, -i\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial\varepsilon_2} \ln A_{m_l}, -i\varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial\varepsilon_3} \ln A_{m_l}, \dots \right. \\ & \left. \dots, -i\varepsilon_{n+1} \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{n+1}} \ln A_{m_l}, 0 \dots 0 \right),\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\beta}' = & \left( 0 \dots 0, -i\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial\varepsilon_2} \ln A_{k_p}, -i\varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial\varepsilon_3} \ln A_{k_p}, \dots \right. \\ & \left. \dots, -i\varepsilon_{n+1} \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{n+1}} \ln A_{k_p} \right).\end{aligned}$$

Здесь первые  $n$  и последние  $2n$  компонент вектора  $\Delta\vec{\beta}$  и первые  $3n$  компонент вектора  $\Delta\vec{\beta}'$  равны 0. Заменяя в (17), (18)  $\beta_i$  на  $\tilde{\beta}_i \equiv \beta_i + \Delta\beta_i$  и  $\beta'_i$  на  $\tilde{\beta}'_i \equiv \beta'_i + \Delta\beta'_i$  и ограничиваясь квадратичными по  $\sigma_i$  слагаемыми ( $\sum S_{ij} = 1$ ), из (19) и (22) находим  $P_{hk}$ :

$$\begin{aligned}P_{hk} = & \frac{Q_1^2}{2R_a R_0^2 \lambda^2} \sum_{m_l, k_p=0}^{\infty} A_{m_l} A_{k_p} \sigma_t^2(m_l, k_p) \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{4\pi i}{\lambda} \sum_{j=1}^{n-1} (m_j - k_j) \sqrt{\varepsilon_{j+1}} H_{j+1} \right\}.\end{aligned}\quad (29)$$

Здесь  $\sigma_t^2$  — безразмерная эффективная дисперсия ( $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\beta}'_i + \tilde{\beta}_i$ ):

$$\sigma_t^2(m_l, k_p) = \sum_{i,j=1}^{4n} \tilde{\alpha}_i \sigma_i A_{ij} \sigma_j \tilde{\alpha}_j \mu(i) \nu(j) B_{x,1} B_{y,1}. \quad (30)$$

Ограничивааясь случаем  $\pi^2 \theta_A^2 l_{x,y,S_{ij}}^2 / \lambda^2 \gg 1$  (при этом величина  $B_{x,1} B_{y,1} \approx -1$ ), считая также  $A_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{i,j+2n} + \delta_{i+2n,j}$ , получаем:

$$\sigma_t^2(m_l, k_p) = \sigma_{th}^2(m_l, k_p) + \sigma_{teH}^2(m_l, k_p) + \sigma_{teHA}^2(m_l, k_p) + \sigma_{teA}^2(m_l, k_p), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{th}^2(m_l, k_p) &= \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{h_j}^2 (m_{j-1} \sqrt{\varepsilon_j} - m_j \sqrt{\varepsilon_{j+1}}) (k_{j-1} \sqrt{\varepsilon_j} - k_j \sqrt{\varepsilon_{j+1}}), \\ \sigma_{teH}^2(m_l, k_p) &= \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{n-1} (\sigma_{e_{j+1}}^2 k_j m_j H_{j+1}^2 \varepsilon_{j+1}), \\ \sigma_{teHA}^2(m_l, k_p) &= -\frac{2\pi i}{\lambda} \sum_{j=1}^n \sigma_{e_{j+1}}^2 H_{j+1} \varepsilon_{j+1}^{3/2} \left( m_j \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{j+1}} \ln A_{k_p} - k_j \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{j+1}} \ln A_{m_l} \right), \\ \sigma_{teA}^2(m_l, k_p) &= \sum_{j=1}^n \sigma_{e_{j+1}}^2 \varepsilon_{j+1}^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{j+1}} \ln A_{k_p} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{j+1}} \ln A_{m_l}.\end{aligned}\quad (32)$$

Каждая из величин в (32) связана с определенным механизмом рассеяния  $m_l$  и  $k_p$  волн:  $\sigma_{th}^2(m_l, k_p)$  появляется благодаря рассеянию  $m_l$  и  $k_p$  волн на неровностях одних и тех же верхних границ,  $\sigma_{teH}^2(m_l, k_p)$  обусловлена рассеянием  $m_l$  и  $k_p$  волн на одних и тех же неоднородностях верхних слоев,  $\sigma_{teA}^2(m_l, k_p)$  возникает из-за рассеяния  $m_l$  и  $k_p$  волн на скоррелированных флуктуациях коэффициентов отражения от соседних границ,  $\sigma_{teHA}^2(m_l, k_p)$  порождается корреляцией флуктуаций коэффициентов отражения от границ с неоднородностями диэлектрической проницаемости прилегающих слоев. Среди  $\sigma_{teH}^2(m_l, k_p)$ ,  $\sigma_{teA}^2(m_l, k_p)$ ,  $\sigma_{teHA}^2(m_l, k_p)$  при выполнении условия (7) наибольшей оказывается  $\sigma_{teH}^2(m_l, k_p)$ , в противоположном случае —  $\sigma_{teA}^2(m_l, k_p)$ . Величина  $\sigma_{teHA}^2(m_l, k_p)$ , являющаяся чисто мнимой, по модулю занимает промежуточное положение между  $\sigma_{teH}^2(m_l, k_p)$  и  $\sigma_{teA}^2(m_l, k_p)$ . В случае  $\delta\epsilon_i = 0$  и  $n = 2$  (двухслойная среда) выражения (19) и (29) переходят в результаты работы [6], при  $\delta\epsilon_1 = 0$  и  $n = 1$  (однородное полупространство) (19) и (29) совпадают с соответствующими выражениями, полученными в [9, 10].

Рассмотрим  $P_{hk}$  в приближении слабых отражений от внутренних границ ( $R_j \ll 1$ ,  $j = 2, \dots, n$ ,  $R_1$  не мало). Удерживая лишь минимальные степени  $R_j$  для каждого из описанных выше процессов рассеяния, из (29) получим следующее явное выражение для некогерентной составляющей отраженной мощности (здесь  $\epsilon \equiv \epsilon_2 \cong \epsilon_{j+1}$ ):

$$\begin{aligned}
 P_{hk} = & \frac{Q_1^2}{R_a R_0^2 \lambda^2} \frac{2\epsilon}{(\sqrt{\epsilon} + 1)^4} \left[ \frac{\pi^2}{\epsilon \lambda^2} \sigma_{h_1}^2 R_1^2 (\sqrt{\epsilon} + 1)^4 + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n \sigma_{\epsilon_{j+1}}^2 - \sigma_{\epsilon_{n+1}}^2 / 2 \right) + \frac{16\pi^2}{\lambda^2} \epsilon \sum_{p=1}^{n-1} R_{p+1}^2 \left( \sum_{j=1}^p \sigma_{\epsilon_{j+1}}^2 H_{j+1}^2 \right) + \\
 & + \frac{8\pi^2}{\lambda^2} (1/\sqrt{\epsilon} - 1) (\sqrt{\epsilon} + 1)^2 \sigma_{h_1}^2 R_1 \sum_{l=1}^{n-1} R_{l+1} \cos \left\{ \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon} \sum_{j=1}^l H_{j+1} \right\} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{\epsilon_{j+1}}^2 \cos \left\{ \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon} H_{j+1} \right\} + \\
 & + \frac{32\pi^2 \epsilon}{\lambda^2} \sum_{l>p=1}^{n-1} R_{l+1} R_{p+1} \left( \sum_{j=1}^p \sigma_{\epsilon_{j+1}}^2 H_{j+1}^2 \right) \cos \left( \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon} \sum_{i=p+1}^l H_{i+1} \right) - \\
 & - \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon} \sum_{l>p=0}^{n-1} R_{l+1} \left( H_{p+2} \sigma_{\epsilon_{p+2}}^2 - H_{p+1} \sigma_{\epsilon_{p+1}}^2 (1 - \delta_{p,0}) \right) \times \\
 & \times \left. \sin \left\{ \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon} \sum_{j=p+1}^l H_{j+1} \right\} \right]. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Первые три слагаемых в (33) не содержат осциллирующей зависимости от

$4\pi/\lambda$  и обусловлены корреляцией  $m_l$  и  $k_p$  волн при  $l_{\max} = p_{\max}$ . Остальные четыре происходят из  $\sigma_{th}^2(m_l, k_p)$ ,  $\sigma_{teA}^2(m_l, k_p)$ ,  $\sigma_{teH}^2(m_l, k_p)$  и  $\sigma_{teHA}^2(m_l, k_p)$  соответственно и обладают следующими свойствами. Четвертое слагаемое в аргументах косинусов содержит расстояния между верхней и внутренними границами, пятое слагаемое — лишь толщины слоев, шестое — всю совокупность расстояний между внутренними границами, наконец, седьмое слагаемое содержит не косинусоидальную, а синусоидальную зависимость от  $4\pi/\lambda$ , причем аргументы синусов пропорциональны всевозможным расстояниям между границами среды. Отметим также, что в данном приближении  $P_{nk}$  зависит от дисперсии неровностей только верхней границы. Условия того, что рассеяние верхней границей среды является основным эффектом, имеют следующий вид:

$$\left|1/\sqrt{\epsilon} - 1\right| \left(2\pi\sigma_{h_1}/\lambda\right)^2 R_j R_1 \gg \frac{\sigma_{\epsilon_i}}{4(\sqrt{\epsilon} + 1)^2}, \quad \frac{4\epsilon}{(\sqrt{\epsilon} + 1)^2} R_1 R_p \left(\frac{2\pi H_i}{\lambda}\right)^2 \sigma_{\epsilon_i}^2.$$

Очевидно, что при сколь угодно малых  $R_j$  они не могут быть выполнены, так как нарушится первое из неравенств. В этом случае основным эффектом оказывается рассеяние на скоррелированных флюктуациях коэффициентов отражения от соседних границ (определенным является пятое слагаемое в (33), которое пропорционально не  $R_j$ , а производным от  $R_j$  по  $\epsilon_j, \epsilon_{j+1}$ ).

Как и в двухслойной среде [6], при полной скоррелированности неровностей на границах ( $h_j = \mu_j h_1$ ) в отсутствие вариаций диэлектрической проницаемости имеет место эффект замирания рассеяния. Действительно, обозначим произведения двух последних сомножителей в (2) через

$$Z = \exp \left\{ \frac{4\pi i}{\lambda} h_1 \right\} w_n \quad (34)$$

и покажем, что можно подобрать такую среду, где, по крайней мере в случае слабых отражений, разложение  $Z$  в ряд Тейлора по степеням  $h_1$  начинается с  $h_1^n$ . Для этого необходимо:

$$\left. \frac{\partial^{(l)} Z}{\partial h_1^l} \right|_{h_1=0} = \sum_{j=0}^{n-1} \left[ R_{j+1} e^{2i\Phi_j} \left( 2i \frac{\partial \Phi_j}{\partial h_1} \right)^l \right] \Bigg|_{h_1=0} = 0, \quad (35)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} h_1,$$

$$\Phi_j = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ h_1 - \sum_{k=1}^j \sqrt{\epsilon_{k+1}} (H_{k+1} + (h_k - h_{k+1})) \right], \quad j > 0,$$

$$l = 1, \dots, l_{\max}.$$

Выражение (35) дает систему однородных линейных уравнений относительно  $R_{j+1}e^{2i\Phi_j}$  с матрицей коэффициентов  $\|(ix_j)^l\|$ ,  $x_j = 2\partial\Phi_j/\partial h_1$ . Пока  $l_{\max}$  в (35) меньше числа слоев в среде  $n$ , всегда можно подобрать среду с такими  $\epsilon_j$  и  $H_j$  (поскольку  $\epsilon_j$  и  $H_j$  определяются по  $R_j$  и  $\Phi_j$ ), чтобы система (35) имела нетривиальное решение, т. к. число неизвестных в (35) больше числа уравнений. При  $l_{\max} = n$  определитель матрицы коэффициентов имеет следующий вид:

$$\text{Det} \|(ix_j)^l\| = \prod_{j=0}^{n-1} (ix_j) W[(ix_0), (ix_1), \dots, (ix_{n-1})],$$

где  $W[(ix_0), (ix_1), \dots, (ix_{n-1})] = \prod_{j,p=0}^{n-1} [(ix_j) - (ix_p)]$  — определитель Вандермонда [11]. Если все  $x_j$  отличны от нуля, и  $x_j$  не равен  $x_p$  при разных  $p$  и  $j$ , то  $\text{Det} \|(ix_j)^l\|$  не равен 0, и система нетривиальных решений не имеет. При  $l_{\max} > n$  нетривиальных решений нет, так как их нет для первых  $n$  уравнений системы (35). Следовательно, все производные в (35) до  $(n-1)$  порядка включительно могут обращаться в ноль, и разложение  $Z$  может начинаться с  $n$ -ой степени  $h_1$ . Условие малости  $R_j$ , которое использовалось выше, таково:  $R_j \ll (\sigma_{h_1}/\lambda)^{n-1}$ . Нетрудно видеть, что при замирании рассеяния отношение некогерентной составляющей отраженной мощности к когерентной будет:

$$P_{\text{нк}}/P_k \sim (\sigma_{h_1}/\lambda)^{2n}.$$

Отметим, что в этом случае когерентная составляющая отраженной мощности  $P_k$  не может обращаться в ноль. Действительно, условие  $P_k = 0$  равносильно условию  $Z = 0$ , которое получается из системы (35) при  $l = 0$ . Дополнив это условие требованием обращения в ноль всех производных  $Z$  по  $h_1$  до  $n-1$  включительно, опять получим систему однородных линейных уравнений относительно  $R_{j+1}e^{2i\Phi_j}$  с матрицей, определитель которой является определителем Вандермонда. В связи с этим указанная система не имеет нетривиальных решений. Совпадение нескольких  $x_j$  (такое возможно вследствие произвольности  $\mu_j$ ) при любых сколь угодно больших  $l_{\max}$  порождает нетривиальные решения (35), из которых, однако, следует  $P_{\text{нк}} = P_k = 0$ .

Таким образом, в рамках приближения Кирхгофа в виде частичных разложений в ряд Тейлора по степеням дисперсий неровностей границ и неоднородностей диэлектрической проницаемости слоев получены явные выражения для двухволновых корреляторов вида  $\langle \dot{U}(\lambda_1) \rangle \langle \dot{U}(\lambda_2) \rangle / 2R_a$ ,  $\langle \dot{U}(\lambda_1) \dot{U}(\lambda_2) \rangle / 2R_a$  (19), (20). С учетом флуктуаций коэффициентов отражения от внешней и внутренних границ среды в первом порядке теории

возмущений получено и исследовано выражение некогерентной  $P_{\text{нк}}$  (29) составляющей отраженной мощности. В частности, показано, что при слабоотражающих внутренних границах ( $R_j \ll 1$ ) основной вклад в осциллирующую зависимость  $P_{\text{нк}}$  от обратной длины волны и толщин слоев дает рассеяние на скоррелированных флуктуациях коэффициентов отражения от соседних границ ( $\sigma_{teA}^2 \sim 1$ ). При этом в  $P_{\text{нк}}$  сохраняется информация лишь о толщине слоев. Вторым по порядку величины при  $R_j \ll 1$  оказывается вклад в осцилляции  $P_{\text{нк}}$  процессов скоррелированного рассеяния на неровностях верхней границы ( $\sigma_{teH}^2 \sim R_j$ ). В соответствующем этому процессу четвертом слагаемом в (33) сохраняется информация о расстояниях между верхней и внутренними границами среды.

Показано также, что по крайней мере при слабых отражениях от всех границ  $n$ -слойной среды порядок эффекта замирания рассеяния определяется количеством слоев  $n$ , при этом отношение  $P_{\text{нк}}/P_k \sim (\sigma_{h_1}/\lambda)^{2n}$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ

$$\begin{aligned} \Delta w_2 = & (\delta R_2)^2 (1 - R_1^2)(1 + x)^{-2} \left( R_1 \exp\{4i\phi_1\} (1 + x + \delta x)^{-1} + \right. \\ & + \exp\{2i\phi_1\} \left( \sqrt{\varepsilon_3 + \delta \varepsilon_3} + \sqrt{\varepsilon_2} \right) \times \\ & \times \left. \left( \sqrt{\varepsilon_3 + \delta \varepsilon_3} + \sqrt{\varepsilon_2} + 2\sqrt{\varepsilon_3} \right) \left( 4\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \right)^{-1} \right), \end{aligned} \quad (\text{п.1})$$

где

$$\begin{aligned} x &= R_1 R_2 \exp\{2i\Phi_1\}, \\ \delta x &= R_1 \delta R_2 \exp\{2i\Phi_1\}, \\ \delta R_2 &= 2\sqrt{\varepsilon_2} \delta \varepsilon_3 \left( \sqrt{\varepsilon_3 + \delta \varepsilon_3} + \sqrt{\varepsilon_2} \right)^{-1} \left( \sqrt{\varepsilon_3 + \delta \varepsilon_3} + \sqrt{\varepsilon_3} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi_j = & \pi \left( \lambda \sqrt{\varepsilon_{j+1}} \right)^{-1} \left( (H_{j+1} + h_j - h_{j+1}) \delta \varepsilon_{j+1}^2 \times \right. \\ & \times \left. \left( \sqrt{\varepsilon_{j+1} + \delta \varepsilon_{j+1}} + \sqrt{\varepsilon_{j+1}} \right)^{-2} - (h_j - h_{j+1}) \delta \varepsilon_{j+1} \right). \end{aligned} \quad (\text{п.2})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зубкович С. Г. Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности. — М.: Сов. радио, 1968. 224 с.
2. Зубкович С. Г. // Труды ААНИИ. Радиофизические методы в исследованиях Северного Ледовитого океана и Арктики, 1968. Т. 284. С. 89.

3. Fung A. K., Eom H. J. // Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 1981. V. 26. N 5. P. 397.
4. Тимченко А. И. // Изв. вузов. Радиофизика, 1986. Т. 29. N 1. С. 55.
5. Жук Н. П., Третьяков О. А., Яровой А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика, 1986. Т. 29. N 4. С. 447.
6. Пименов С. Ф., Руденко М. А. // Изв. вузов. Радиофизика, 1992. Т. 35. N 3–4. С. 275.
7. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. 424 с.
8. Бреховских Л. М. // ЖЭТФ, 1952. Т. 23. N 3 (9). С. 275; 289.
9. Гарнакерьян А. А., Сосунов А. А. Радиолокация морской поверхности. — Ростов-на-Дону: Гос. ун-т, 1978. 144 с.
10. Гарнакерьян А. А., Сосунов А. А. // Радиотехника и электроника, 1976. Т. 21. N 11. С. 2300.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1977. 832 с.

Научно-исследовательский  
институт физики при Ростовском  
государственном университете

Поступила в редакцию  
17 марта 1993 г.

**THE REFLECTION OF RADIO WAVES BY MULTILAYER MEDIUM  
WITH ROUGH BOUNDARIES AND INHOMOGENEOUS DIELECTRIC  
CONSTANTS OF THE LAYERS**

*S. F. Pimenov, M. A. Rudenko*

The scattering of radio waves by a multilayer medium with large-scale roughnesses of the boundaries and inhomogeneous dielectric constants of the layers is analyzed theoretically. It is shown that there are different mechanisms resulting in oscillating dependence of the incoherent component of the reflected power  $P_i$  on the inverse wave length  $\lambda^{-1}$  and layer thicknesses. It is also shown that the fading effect at scattering by a multilayer medium is at least of the order of  $P_i/P_c \sim (\sigma_{h_1}/\lambda)^{2n}$ , where  $\sigma_{h_1}^2$  and  $P_c$  are the dispersion of the upper boundary roughnesses and the coherent component of the reflected power.

УДК 621.396; 621.371

# ИЗЛУЧЕНИЕ ЩЕЛЕВЫХ АНТЕНН ЧЕРЕЗ НЕЛИНЕЙНЫЙ ПЛАЗМЕННЫЙ СЛОЙ

*M. B. Исаков, B. A. Пермяков*

На основе численного решения нелинейного уравнения Гельмгольца рассмотрено излучение щелевых антенн, возбуждаемых  $H$ -волной через слой плазмы при повышенном уровне мощности. Анализировался случай положительной ( $\partial\epsilon/\partial|E| > 0$ ) и отрицательной ( $\partial\epsilon/\partial|E| < 0$ ) нелинейности. Для отрицательной нелинейности исследован эффект ограничения прошедшей мощности. Для положительной нелинейности рассмотрено образование самоподдерживающегося волноводного канала. Показано существование бистабильности при изменении питающей мощности. Проанализирована структура плазмы вблизи антенн при высоком уровне излучаемой мощности.

## ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные эффекты при распространении электромагнитных волн в плазме могут быть существенны вблизи антенн, излучающих в плазму, так как именно в ближних полях достигается наибольшая интенсивность. Однако, исследование полей излучения антенн в нелинейных средах до сих пор было ограничено только сравнительно простыми моделями. В частности, в работах [1, 2] была предложена модификация параболического уравнения для задач излучения дипольных и щелевых антенн, учитывающая линейную расходимость поля. Но, исследования, проведенные на плоских моделях [3, 4] показали, что при сильной нелинейности необходимо учитывать отраженные внутри нелинейной среды поля, и, следовательно, приближение параболического уравнения становится неприменимым. В работе [5] для анализа излучения антенн применялось одномодовое волноводное приближение. Однако, такое приближение ограничено случаем достаточно тонкого нелинейного слоя. В данной работе на основе численного анализа в строгой постановке исследуется излучение щелевых антенн через нелинейный слой при толщине слоя порядка длины волны.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача излучения щелевой антенны, возбуждаемой  $H$ -волной плоского волновода, через плоскую диэлектрическую пластину

и нелинейный плаэменный слой, расположенные в отрезке широкого волновода с фланцем.

Геометрия задачи изображена на рис. 1. При данном возбуждении поле в плоском волноводе имеет единственную компоненту электрического поля  $E = E_y$ . В пределах области, занятой плаэмой, поле описывается нелинейным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta E + k^2 \epsilon(|E|) E = 0. \quad (1)$$

На стенках волновода поле  $E$  должно удовлетворять нулевым граничным условиям:

$$E(-d/2, z) = E(d/2, z) = 0. \quad (2)$$

Если рассматривать только симметричное возбуждение, то в силу симметрии задачи получаемое решение также должно быть симметричным. При этом можно рассматривать только половину области, а на оси излучающей системы записать граничное условие:

$$\frac{\partial E(x, z)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (3)$$

На границах линейных и нелинейного диэлектриков искомое решение должно удовлетворять условиям непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей. В данной задаче наибольший интерес представляют поля в области, занятой плаэмой. Для того, чтобы не рассчитывать поля в пределах линейной вставки, скачок ширины волновода и линейный диэлектрик между фланцем питающего волновода и нелинейной средой также учитываются в граничных условиях на освещенной стороне нелинейного диэлектрика. Исключив волны в линейном диэлектрике, окончательно получим граничное условие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} - \frac{2}{d} \sum_{m=1}^M \left( \sum_{p=1}^M W_1^{mp} \int_0^{d/2} E(\xi, 0) \cos\left(\frac{\pi p \xi}{d}\right) d\xi \right) \cos\left(\frac{\pi p x}{d}\right) = \\ = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^M W_2^{mp} E_{1p}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{d}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

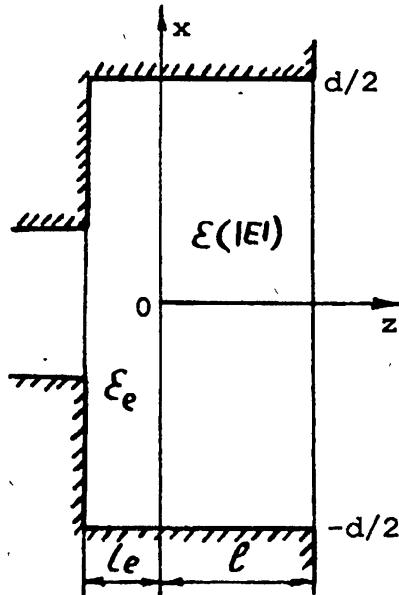


Рис. 1.

где  $W_1$  и  $W_2$  — матрицы размера  $M \times M$  и  $M \times N$  ( $M$  — число мод, удерживаемых в узком волноводе,  $N$  — число мод, удерживаемых в широком волноводе), равные

$$W_1 = (\Gamma_3 S_{22} + \Gamma_4)(\Gamma_1 S_{22} + \Gamma_2)^{-1},$$

$$W_2 = \left( -(\Gamma_3 S_{22} + \Gamma_4)(\Gamma_1 S_{22} + \Gamma_2)^{-1} \Gamma_1 + \Gamma_2 \right) S_{21}.$$

Здесь  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  — диагональные матрицы размером  $M \times M$  с элементами на главной диагонали соответственно  $\Gamma_1 = \exp(-\gamma_n l_e)$ ,  $\Gamma_2 = \exp(\gamma_n l_e)$ ,  $\Gamma_3 = (-\gamma_n \exp(-\gamma_n l_e))$ ,  $\Gamma_4 = (\gamma_n \exp(\gamma_n l_n))$ , а  $S$  — обобщенная матрица рассеяния, причем ее блоки  $S_{22}$  описывают волны, рассеянные в широком волноводе при возбуждении стыка двух волноводов со стороны широкого волновода, а  $S_{21}$  — волны в широком волноводе при возбуждении стыка со стороны узкого волновода.

На неосвещенной границе нелинейного диэлектрика, с учетом условий излучения на бесконечности, граничные условия можно записать в виде:

$$\frac{\partial E(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=l} + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - p^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi, \ell) e^{ip\xi} d\xi \right) e^{-ipx} dp = 0. \quad (5)$$

Решение (1) ищется методом простой итерации

$$\Delta E^{n+1} + k^2 \epsilon (|E^n|) E^{n+1} = 0. \quad (6)$$

Перейдем от (6) к обобщенной постановке задачи, умножив (6) на некоторую функцию  $f$  и проинтегрировав по области  $\Omega$ , занятой нелинейной средой. Применяя первую функцию Грина, получим

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial E^{n+1}}{\partial n} f d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla E^{n+1} \nabla f d\Omega + k^2 \int_{\Omega} \epsilon (|E^n|) E^{n+1} d\Omega = 0, \quad (7)$$

где  $\Omega : \{x, x \in [0, d/2]; z, z \in [0, \ell]\}$  — половина волновода, занятого нелинейной средой,  $\partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ . Решение (7) ищется методом Галеркина. В качестве базисных функций выбираются  $\psi_{ij} = \varphi_i(x)\varphi_j(z)$ , где  $\varphi_k$  — кубический В-сплайн [6]. При этом В-сплайны были построены так, чтобы на границе волновода ( $x = d/2$ ) они обращались в нуль, и, таким образом, искомое решение автоматически удовлетворяло условию (2). Аналогично можно построить сплайн-функции, удовлетворяющие условию (3). Выбрав в качестве  $f$  последовательно все функции  $\psi_{ij}$  и учитывая условия (4, 5), получим систему линейных алгебраических уравнений, решение которой даст нам распределение поля на  $n + 1$  итерации в нелинейном слое. При практической реализации данного алгоритма для решения системы алгебраических уравнений использовался обобщенный метод бисопряженных градиентов [7].

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Были рассмотрены два закона локальной нелинейной зависимости диэлектрической проницаемости от амплитуды поля, а именно "кубичная" нелинейность

$$\epsilon = (\epsilon'_0 + \epsilon'_0 |E|^2) + i(\epsilon''_0 + \epsilon''_2 |E|) \quad (8)$$

и дробно-рациональная зависимость

$$\epsilon = \frac{u|E|^2 + p}{v|E|^2 + q}. \quad (9)$$

Как (8), так и (9) могут описывать положительную ( $\partial\epsilon/\partial I > 0$ ,  $I = |E|^2$ ) или отрицательную нелинейность ( $\partial\epsilon/\partial I < 0$ ). Положительная нелинейность может определяться, например, страйкционным или нагревным механизмом нелинейности. Отрицательная нелинейность в плазме определяется в первую очередь дополнительной ионизацией в поле мощной волны. Кубичная нелинейность достаточно широко была исследована ранее для случая падения плоской волны на плоский слой или полупространство [3, 4]; ее использование позволяет провести сравнение с плоскими моделями и выявить эффекты, связанные с неодномерностью задачи. Зависимость (9) описывает физически важный случай нелинейности с насыщением.

Возбуждающий волновод принимался одномодовым (ширина  $k_0 d = 4$ ). Линейный диэлектрик, отделяющий антенну от нелинейной среды, имел толщину  $k_0 l_e = 0.1$ , а его диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 4$ .

В плазме с отрицательной нелинейностью важную роль играет эффект ограничения прошедшей мощности, который был подробно исследован ранее на модели распространения плоских волн [4]. В [8] было рассмотрено проявление этого эффекта при распространении мощной волны в волноводе с нелинейным запаздыванием.

На рис. 2 для рассматриваемой щелевой антенны приведены рассчитанные зависимости прошедшей мощности от падающей при различных значениях ширины отрезка волновода с нелинейной средой (кривая 1 —  $k_0 d = 12$ , кривая 2 —  $k_0 d = 22$ ). Толщина нелинейного слоя  $k_0 l = 6$ . Для сравнения на этом же рисунке приведена аналогичная

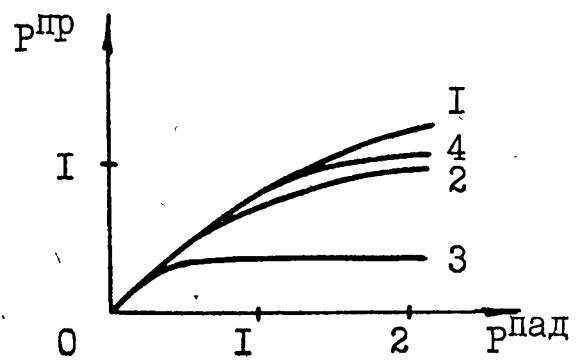


Рис. 2.

зависимость для задачи распространения мощной волны в однородном по ширине волноводе с нелинейной вставкой, возбуждаемой волной основной моды (ширина волновода равна ширине отрезка волновода в модели излучения антенны с  $k_0 d = 22$ ; кривая 3). В расчетах рассматривалась кубичная нелинейность (8). Видно, что при излучении антенн также наблюдается эффект ограничения прошедшей мощности, но уровень прошедшей мощности существенно выше, чем при распространении волны в волноводе, и переход к ограничению прошедшей мощности при изменении падающей происходит более плавно, чем в волноводной модели. Это отличие определяется тем, что в волноводе образующаяся при увеличении мощности область сверхкритической плазмы занимает значительную часть нелинейной среды. При излучении антены сверхкритическая область примыкает к излучающему волноводу, а в остальной части нелинейной среды диэлектрическая проницаемость остается близкой к единице. Влияние нелинейности среды на диаграмму направленности незначительно: при изменении падающей мощности происходит изменение величины лепестков диаграммы направленности в пределах 10% от их первоначального уровня. Зависимость прошедшей мощности от ширины отрезка волновода с нелинейной средой в рассматриваемой модели показывает, что отраженные от боковых стенок отрезка волновода волны достаточно существенно влияют на формирование поля, излучаемого рассматриваемой антенной. Дальнейшее увеличение ширины отрезка волновода ограничено возможностями вычислительных средств, так как приводит к росту решаемой системы алгебраических уравнений. Если ввести дополнительные потери вблизи стенок волновода, то можно исключить влияние отраженной от стенок волны.

Зависимость прошедшей мощности от падающей для данного случая также представлена на рис. 2 (кривая 4, ширина отрезка волновода  $k_0 d = 22$ , линейные потери. В такой постановке рассматриваемая задача может служить хорошей моделью излучения щелевой антенны, закрытой слоем диэлектрика, через нелинейный плазменный слой. Эффект ограничения при этом также существует и сохраняет все качественные характеристики, отмеченные выше.

Для случая положительной нелинейности представляется более естественным рассматривать зависимость (9), описывающую нелинейность с насыщением. При проведении численных расчётов численные значения параметров были приняты следующими:  $p = -0.5$ ,  $q = 1$ ,  $u = v = 1$ . Такой выбор параметров описывает бесстолкновительную плазму с положительной нелинейностью, закритическую в слабых полях и докритическую в сильных. Расчёты проводились при длине нелинейного слоя  $k_0 l = 6$  и ширине внешнего волновода  $k_0 d = 12$  и  $k_0 d = 18$ . На рис. 3 приведены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от мощности, подводимой к антенне. Эти зависимости с

графической точностью совпадают для обоих значений ширины внешнего волновода. Зависимости коэффициентов отражения и прохождения (и соответственно прошедшая мощность) носят гистерезисный характер. На рис. 4 приведены распределения амплитуды поля в нелинейной среде при одном и том же уровне падающей мощности, но находящиеся на различных ветвях гистерезисной кривой. Видно, что при увеличении поля от малых значений оно сосредоточено вблизи излучателя и экспоненциально убывает при удалении от него.

При превышении уровня падающей мощности некоторого значения это распределение становится неустойчивым, и формируется волноводный канал, ширина которого по уровню  $\epsilon = 0$  примерно равна ширине возбуждающего волновода. На обеих ветвях гистерезисной кривой поле не выходит на стеки внешнего волновода, и, таким образом, для данного типа нелинейности наша модель достаточно точно аппроксимирует задачу излучения антенны из-под плазменного слоя. Форма образующегося волноводного канала практически совпадает с самоподдерживающимся волноводным каналом, изученным ранее в задаче распространения мощной волны в нелинейном волноводе при нелинейности такого же типа [9]. Однако, в отличие от волноводной задачи, при рассмотрении излучения антенны через нелинейный слой не возникают автоколебания распределения поля в плазме [9, 10]. Это объясняется тем, что возбуждающий пучок в рассматриваемом случае узкий и, следовательно, не возникают условия для самофокусировочной неустойчивости на периферии пучка.

Следует отметить, что эффект бистабильности сохраняется и в случае малых потерь в плазме. Увеличение потерь как и в одномерном случае [3, 4], приводит к исчезновению бистабильности. Диаграмма направленности антенны при переходе с одной ветви гистерезисной кривой на другую меняется незначительно. После образования волноводного канала наблюдается небольшое уширение диаграммы направленности (в пределах  $5^\circ$ ), что можно объяснить уменьшением области локализации излучающего поля на границе нелинейного слоя и свободного пространства.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-02-16062).

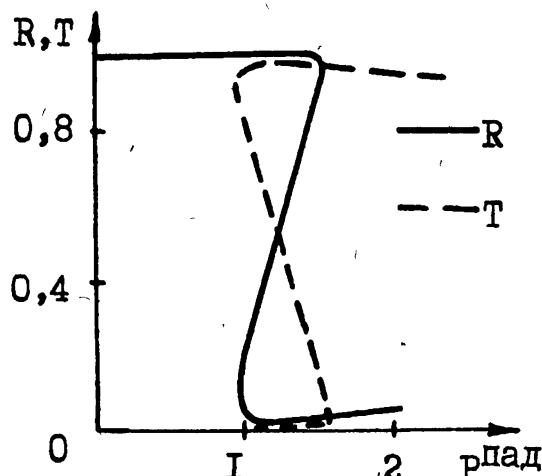


Рис. 3.

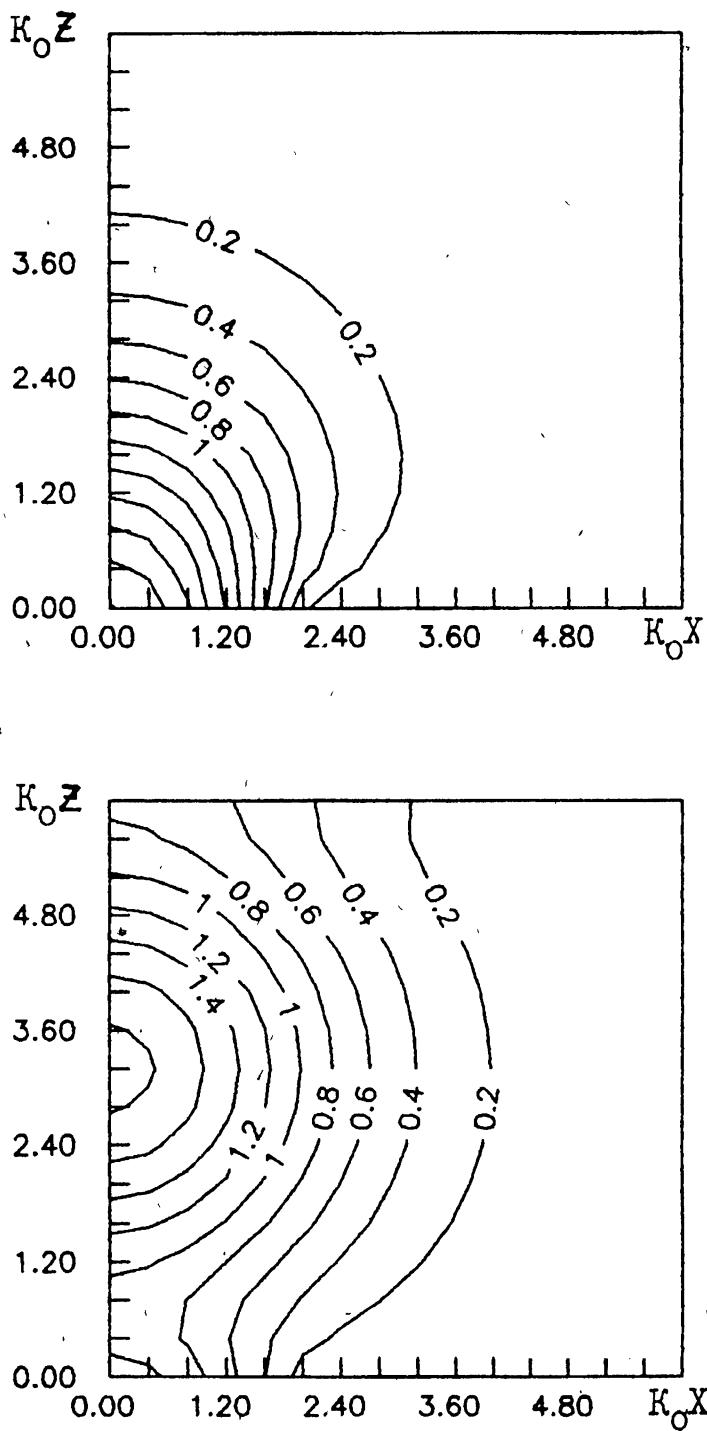


Рис. 4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chandra P., Tripathi V. K. // Appl. Phys., 1976. V. 9. N 9. С. 339.
2. Исаков М. В., Пермяков В. А., Тихомиров П. Ю., Шаров В. Б. // Сб. научн. тр. — М.: МЭИ, 1987. N 152. С. 50.
3. Розанов Н. Н. // Журн. эксп. и теор. физ., 1981. Т. 80. Вып. 1. С. 96.
4. Багдасарян О. В., Пермяков В. А. // Изв. вузов. Радиофизика, 1978. Т. 21. N 9. С. 1352.
5. Ванзин П. А., Пермяков В. А. // Сб. научн. тр. — М.: МЭИ, 1985. N 75. С. 40–45.
6. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1981. 216 с.
7. Sarker T. K. // J. of Electromagnetic waves and applications, 1987. V. 1. N 3. С. 228.
8. Исаков М. В., Крылов А. Н., Павлов А. Л., Пермяков В. А. // Радиотехника, 1988. N 11. С. 78.
9. Исаков М. В., Пермяков В. А. // Радиотехника и электроника, 1992. Т. 37. Вып. 2. С. 222.
10. Исаков М. В., Пермяков В. А. // Письма в ЖТФ, 1991. Т. 17. Вып. 17. С. 73.

Московский энергетический  
институт

Поступила в редакцию  
8 июня 1993 г.

**RADIATION OF SLOT ANTENNAS THROUGH THE NONLINEAR  
PLASMA LAYER**

*M. V. Isakov, V. A. Permyakov*

The radiation of slot antenna, being excited by a waveguide with a high intensity  $H$  wave through the plasma layer has been considered using the numerical solution of the nonlinear Helmholtz equation. The positive ( $\partial\epsilon/\partial|E| > 0$ ) and negative ( $\partial\epsilon/\partial|E| < 0$ ) nonlinearities were analyzed. For the negative nonlinearity the effect of limitation of the passed power has been investigated. For the positive nonlinearity the formation of a self-focusing waveguide has been considered. The existence of bistability under changes of the exciting power has been showed. The plasma structure in the antenna near-zone has been analyzed in the presence of the high intensity field.

**ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН  
НА ЭШЕЛЕТТЕ  
С МНОГОСЛОЙНЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ  
ВКЛЮЧЕНИЕМ**

*B. M. Шкиль, A. B. Рыжак*

На основе процедуры полуобращения получено строгое решение задачи дифракции  $H$ -поляризованных волн на эшелетте, расположенному в диэлектрических слоях. Выявлены особенности формирования рассеянного поля, обусловленные наличием диэлектрического включения. Основное внимание уделено изучению диапазонных рассеивающе-поглощающих свойств структуры. Приведены результаты численных расчетов.

**1. ПОСТАНОВКА И СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ  
К БЕСКОНЕЧНЫМ СИСТЕМАМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА**

Дифракционные решетки пилообразного профиля широко используются в оптике и технике СВЧ. Рассеивающие свойства таких структур наиболее полно исследованы в [1–3]. Однако, в ряде практических приложений они используются в сочетании с диэлектрическими слоями [4, 5], влияние которых в настоящее время еще мало изучено, особенно, когда речь идет о диапазонных свойствах структуры. Интерес к таким исследованиям в настоящее время значительно вырос. Это связано как с традиционными радиотехническими приложениями рассматриваемых структур, так и с рядом их новых возможностей, например, перспективами создания устройств с требуемыми свойствами [6].

В данной работе такое исследование проводится применительно к случаю дифракции  $H$ -поляризованных волн, что позволяет дополнительно, по сравнению со случаем  $E$ -поляризации, выявить особенности формирования рассеянного поля, обусловленные существованием нулевой волноводной волны (волны ТЕМ) в соответствующем волноводном районе, образованным гранями эшелетта (рис. 1).

Метод, используемый в работе, базируется на строгой теории [1, 7] и позволяет свести краевую задачу к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений 2-го рода Фредгольмовского типа.

Пусть на идеально проводящий прямоугольный эшелетт, расположенный в диэлектрических слоях (рис. 1) падает плоская  $H$ -поляризованная волна единичной амплитуды. Решетка находится в диэлектрическом слое

$\epsilon = \epsilon_1$  и  $\mu = \mu_1$ , над которым находится многослойная диэлектрическая структура с проницаемостями слоев  $\epsilon = \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_0$ ;  $\mu = \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_0$  и общей толщиной  $h_1$ . Необходимо определить рассеянное поле.

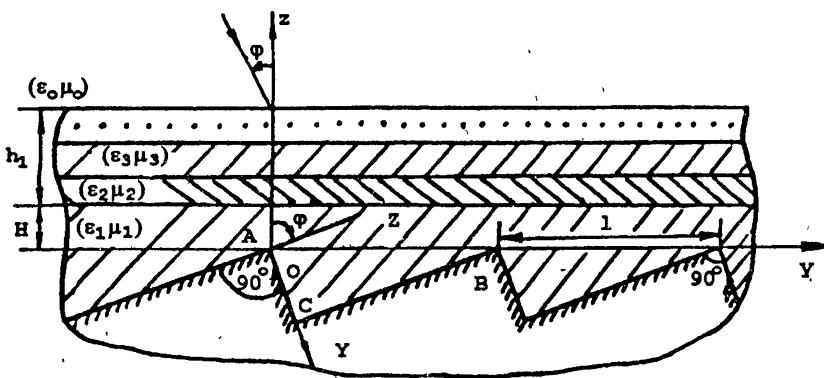


Рис. 1.

Требуя, чтобы полное поле удовлетворяло условиям излучения на бесконечности, квазипериодичности, конечности интеграла энергии в любой ограниченной области пространства, которые обеспечивают единственность решения исходной электродинамической задачи [1, 7], представим его в частичных областях в следующем виде

$$\begin{aligned} E_{x_0} &= \exp \left[ i \frac{2\pi}{\ell} \Phi_0 y - i \frac{2\pi}{\ell} \Gamma_0 (z - H - h_1) \right] + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp \left[ i \frac{2\pi}{\ell} \Phi_n y + i \frac{2\pi}{\ell} \Gamma_{n_0} (z - H - h_1) \right] \quad (z \geq H + h_1); \\ E_{x_1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left( i \frac{2\pi}{\ell} \Phi_n y \right) \times \\ &\times \left[ c_{n_1} \exp \left( i \frac{2\pi}{\ell} \Gamma_{n_1} z \right) + d_{n_1} \exp \left( -i \frac{2\pi}{\ell} \Gamma_{n_1} (z - H) \right) \right] \quad (0 \leq z \leq H). \end{aligned}$$

Поля в слоях с  $\epsilon = \epsilon_k$ ,  $\mu = \mu_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) записываются аналогично, а их определяющие векторы  $c_{n_k}$  и  $d_{n_k}$  представляют собой амплитуды пространственных гармоник, распространяющиеся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси  $Oz$ .

Неизвестные бесконечномерные векторы  $a_{n_k}$ ,  $c_{n_k}$ ,  $d_{n_k}$ , будем искать в классе числовых последовательностей  $\tilde{l}_2$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 |n| < \infty,$$

обеспечивающим выполнение условия конечности интеграла энергии [7].

Сшивая поля и их нормальные производные на границах частичных областей и применяя соответствующим образом [1, 7] вторую формулу Грина к контуру АВС (рис. 1) с учетом граничных условий на эшелете, в результате получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений первого рода

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\tilde{c}_{n_1}}{\Gamma_n^+ - \omega_q} + \frac{\tilde{d}_{n_1}}{\Gamma_n^- + \omega_q} \right) = -\beta_q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\tilde{c}_{n_1}}{\Gamma_n^+ + \omega_q} + \frac{\tilde{d}_{n_1}}{\Gamma_n^- - \omega_q} \right), \quad (1)$$

$$q = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{d}_{n_1} = T_n^{011} \Phi_n^- \delta_n^0 + R_n^{110} \frac{\Phi_n^-}{\Phi_n^+} \tilde{c}_{n_1} e_{n_1}, \quad (2)$$

$$a_n = R_n^{011} \delta_n^0 + T_n^{110} \frac{\tilde{c}_{n_1}}{\Phi_n^+} e_{n_1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tilde{c}_{n_1} = c_{n_1} \Phi_n^+, \quad \tilde{d}_{n_1} = d_{n_1} \Phi_n^-, \quad \alpha = \ell/\lambda, \quad \Gamma_n^\pm = \Gamma_{n_1} \cos \psi \pm \Phi_n \sin \psi,$$

$$\Gamma_{n_1} = \sqrt{\alpha^2 \epsilon'_1 \mu'_1 - \Phi_n^2}, \quad \Phi_n = n + \alpha \sin \varphi, \quad \Phi_n^\pm = \Gamma_{n_1} \sin \psi \mp \Phi_n \cos \psi,$$

$$\omega_q = \sqrt{\alpha^2 \epsilon'_1 \mu'_1 - (q/2 \cos \psi)^2},$$

$$\beta_q = \frac{\exp \left[ i \left( \Phi_0 + \omega_q \sin \psi - \frac{q}{2} \right) 2\pi \right] - 1}{\exp \left[ i \left( \Phi_0 - \omega_q \sin \psi - \frac{q}{2} \right) 2\pi \right] - 1},$$

$\lambda$  — длина волны в свободном пространстве;  $\epsilon'_1, \mu'_1$  — соответственно относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости слоя, в котором находится эшелетт. Экспоненциальный множитель  $e_{n_1} = \exp \left( i \frac{2\pi}{\ell} \Gamma_{n_1} H \right)$  учитывает фазовые набеги или затухание гармоник поля в слое  $0 \leq z \leq H$ . Величины  $R_n^{ikl}$  и  $T_n^{ikl}$  имеют смысл соответственно коэффициентов отражения и прохождения для  $n$ -й пространственной гармоники, падающей из полупространства с  $\epsilon = \epsilon_i$  и  $\mu = \mu_i$  на многослойную диэлектрическую структуру толщиной  $h_k$  (рис. 1), лежащую на полубесконечном слое диэлектрика с  $\epsilon = \epsilon_\ell$  и  $\mu = \mu_\ell$ . Они имеют стандартный вид [8].

Решение в виде (1)–(3) получено путем подчинения полного поля всем условиям исходной краевой задачи. Соотношения (1)–(2) представляют собой совместную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений первого рода, в результате решения которой по формуле (3) определяются амплитуды волн искомого в свободном пространстве поля. Од-

нако, построение численного алгоритма на основе (1)–(3) невозможно из-за некорректной формулировки исходной электродинамической задачи в виде уравнений 1-го рода. Некорректность полученной системы обусловлена свойствами матричного оператора (необратимость и т. д.) и проявляется в слабой устойчивости решений соответствующих конечномерных систем и в отсутствии сходимости их к точному решению с ростом числа учитываемых уравнений при произвольном способе усечения [1, 7]. В силу этого, исходная система требует дополнительных преобразований.

## 2. СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Покажем, что бесконечная система 1-го рода (1), (2) может быть сведена к эквивалентным системам 2-го рода Фредгольмовского типа, допускающим эффективное численное решение. Это оказывается возможным на основе аналитического обращения главной части матричного оператора с элементами вида  $(\Gamma_n^\pm - \omega_q)$  в знаменателе. Аппарат аналитического обращения матричных операторов такого типа разработан в теории периодических решеток [1, 7], где метод частичного обращения оператора задачи был применен для построения строгого решения задачи рассеяния волн на решетках типа “эшелетт” и “жалюзи”. Обобщение этого метода на случай более сложных систем продемонстрируем на примере данной задачи.

Для проведения эквивалентных преобразований в нашем случае требуется знать решение  $\gamma_{ns}^+$  и  $\alpha_{np}^+$  следующих бесконечных систем уравнений с одинаковыми матричными операторами и различными правыми частями

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{ns}^+}{\Gamma_n^+ - \omega_q} = \frac{1}{\Gamma_s^- + \omega_q} \quad (q = 0, 1, 2, \dots; s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{np}^+}{\Gamma_n^+ - \omega_q} = \delta_q^p \quad (q, p = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Ключевым моментом при этом является построение убывающих на бесконечности мероморфных функций комплексного переменного  $\varphi_s^\pm(w)$  и  $f_p^\pm(w)$  по заданным распределениям нулей и полюсов.

Решения систем (4) и (5) определяются соответственно вычетами этих функций в точках  $\Gamma_n^\pm$ :

$$\gamma_{ns}^+ = \operatorname{Res} \varphi_s^+(\Gamma_n^+), \quad \alpha_{np}^+ = \operatorname{Res} f_p^+(\Gamma_n^+).$$

Функции  $\varphi_s^+(w)$  и  $f_p^+(w)$  имеют вид бесконечных произведений. Их можно найти в [1] на стр. 203 и в [7] на стр. 123. Только в данном случае

в них необходимо заменить  $\omega$  на  $\omega \sqrt{\epsilon_i' \mu_i'}$ . Кроме того, они обладают следующим свойствами

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{ns}^+}{\Gamma_n^+ + \omega_q} = \frac{1}{\Gamma_s^- - \omega_q} - \varphi_s^+(-\omega_q) \quad (6)$$

$$(s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad q = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{np}^+}{\Gamma_n^+ + \omega_q} = -f_p^+(-\omega_q) \quad (q, p = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Используем соотношения (4)–(7) для регуляризации системы (1), (2). Полагая  $c_{n_1} = c_n + b_n$ , из (1) получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\Gamma_n^+ - \omega_q} = -\beta_q \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n + b_n}{\Gamma_n^+ + \omega_q} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{d}_{s_1} e_{s_1}}{\Gamma_s^- - \omega_q} \right), \quad (8)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{\Gamma_n^+ - \omega_q} = - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{d}_{s_1} e_{s_1}}{\Gamma_s^- + \omega_q}, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Известный обратный оператор системы (4) позволяет коэффициенты  $b_n$  из (9) найти в явном виде

$$b_n = - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_{ns}^+ \tilde{d}_{s_1} e_{s_1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

Тогда подстановка (10) в (8) с учетом (6) преобразует (8) к следующему виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\Gamma_n^+ - \omega_q} = -\beta_q \left[ \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{c_s}{\Gamma_s^+ + \omega_q} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{d}_{s_1} e_{s_1} \varphi_s^+(-\omega_q) \right], \quad (11)$$

$$q = 0, 1, 2, \dots$$

Известный обратный оператор главной части позволяет выразить величины  $c_n$  из (11) с учетом (5) следующим образом

$$c_n = - \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{np}^+ \beta_p \left[ \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{c_s}{\Gamma_s^+ + \omega_q} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{d}_{s_1} e_{s_1} \varphi_s^+(-\omega_p) \right]. \quad (12)$$

Будем искать решение  $c_n$  в виде

$$c_n = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{np}^+ \beta_p D_p \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (13)$$

Тогда, подставляя (13) в (12), с учетом (7), (10) приходим к следующему представлению для  $\tilde{c}_{n_1}$ :

$$\tilde{c}_{n_1} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{np}^+ \beta_p D_p - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{d}_{s_1} e_{s_1} \gamma_{ns}^+ \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (14)$$

где новые неизвестные  $D_p$  удовлетворяют следующей бесконечной системе уравнений

$$D_p = \sum_{m=0}^{\infty} D_m \beta_m f_m^+(-\omega_p) - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{d}_{s_1} e_{s_1} \varphi_s^+(-\omega_p), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Заметим, что именно в этих двух операциях — использовании  $\alpha_{np}^+$ ,  $\gamma_{ns}^+$  при получении (10), (12) и использовании (6), (7) при получении (11), (15) — и заключается процедура частичного обращения оператора системы (1). Уравнения (15) совместно с (2) представляют полную систему уравнений. Однако, численная реализация указанных уравнений даже после исключения одного из них путем подстановки не позволяет эффективно использовать возможности ЭВМ. Поэтому ниже проведем алгоритмизацию решения, позволяющую перейти к последовательному решению простых операторных уравнений с несколькими правыми частями.

С этой целью величины  $\tilde{d}_{n_1}$  представим через неизвестные  $t_{np}$  и  $\tilde{d}_{n_1}^1$  следующим образом

$$\tilde{d}_{n_1} = \sum_{p=0}^{\infty} t_{np} D_p \beta_p + \tilde{d}_{n_1}^1; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16)$$

Тогда, выражая из (2)  $\tilde{c}_{n_1}$  через  $\tilde{d}_{n_1}$  и подставляя полученное при этом выражение в (14), с учетом (16) после некоторых преобразований получаем следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений 2-го рода относительно неизвестных  $t_{np}$  и  $\tilde{d}_{n_1}^1$ :

$$t_{np} = -R_n^{110} e_{n_1} \frac{\Phi_n^-}{\Phi_n^+} \sum_{s=-\infty}^{\infty} t_{sp} \gamma_{ns}^+ e_{s_1} + R_n^{110} e_{n_1} \frac{\Phi_n^-}{\Phi_n^+} \alpha_{np}^+ \quad (17)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\tilde{d}_{n_1}^1 = -R_n^{110} e_{n_1} \frac{\Phi_n^-}{\Phi_n^+} \sum_{s=-\infty}^{\infty} t_{sp} \gamma_{ns}^+ e_{s_1} + T_n^{011} \Phi_n^- \delta_n^0. \quad (18)$$

Далее определим величины  $D_p$ , входящие в (15). Для этого подставим (16) в (15) и после несложных преобразований получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно искомых коэффициентов  $D_p$ :

$$D_p = \sum_{m=0}^{\infty} S_{pm} D_m + Q_p, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где

$$S_{pm} = \beta_m \left[ f_m^+(-\omega_p) - \sum_{s=-\infty}^{\infty} t_{sm} \varphi_s^+(-\omega_p) e_{s_1} \right],$$

а

$$Q_p = - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_s^+(-\omega_p) e_{s_1} \tilde{d}_{s_1}^1.$$

Таким образом, алгоритм решения задачи сводится к последовательности следующих операций. Из уравнений (17), (18) находим неизвестные матрицы  $t_{np}$  и вектор  $\tilde{d}_{s_1}^1$ , далее по найденным решениям формируется оператор и правая часть уравнения (19), решение которого с помощью пересчетных формул (16), (14), (3) позволяет полностью определить все решения задачи. Численный алгоритм, построенный по схеме (17), (18), (19), оказывается эффективнее, чем алгоритм по схеме (15), (2), как по скорости счета, так и по возможному диапазону изменения параметров. Для уравнений (17), (18), (19) справедливы теоремы об однозначной их разрешимости в  $\ell_2$ , которые следуют непосредственно из полной непрерывности операторов этих систем в  $\ell_2$  [7]. Экономичность и высокая точность определяют перспективность использования полученного алгоритма при машинном проектировании устройств СВЧ на основе эшелетта.

### 3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Цель проведения численных расчетов — исследование влияния диэлектрического заполнения на дифракционные свойства эшелетта. Особое внимание удалено влиянию диэлектрика на характер перераспределений энергий

$$E_{a_n} = |a_n|^2 \operatorname{Re} \Gamma_n / \Gamma_0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

между высшими пространственными гармониками, связанного с проявлением зеркальных резонансов и поглощающих свойств диэлектрического включения. Для выяснения физики процессов расчеты проводились для случая двухслойной диэлектрической структуры.

Влияние диэлектрика обусловлено тремя факторами: во-первых, в общем случае наличием отражений от границ диэлектрических слоев, во-вторых, количеством распространяющихся высших пространственных гармоник в диэлектрических слоях ( $\operatorname{Re} \Gamma_{n_k} > 0, k = 1, 2, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и в свободном пространстве и, в-третьих, количеством распространяющихся волноводных волн в соответствующем волноводном районе, образованном гранями эшелетта ( $\operatorname{Re} \omega_q > 0, q = 0, 1, 2, \dots$ ).

Так, на рис. 2 представлены зависимости энергий пространственных гармоник от угла асимметрии эшелетта  $\psi$  ( $\varphi = 0^\circ$ ;  $\alpha = \ell/\lambda = 1,5$ ;

$H/\ell = h_1/\ell = 0,1$ ;  $\epsilon'_1 = \epsilon'_2 = 2$ ;  $\operatorname{tg} \delta_{\epsilon'_1} = \operatorname{tg} \delta_{\epsilon'_2} = 0,1$ ;  $\mu'_1 = \mu'_2 = 1$ ;  $\operatorname{tg} \delta_{\mu'_1} = \operatorname{tg} \delta_{\mu'_2} = 0$ ). При указанных же и  $\varphi$  в свободном пространстве существуют только 0-й и  $\pm 1$ -й порядки спектра, в то время, как в диэлектрическом слое существуют еще  $\pm 2$ -е пространственные гармоники в условиях, близких к режиму скольжения. По этой причине влияние последних во всем диапазоне изменения угла  $\psi$  является незначительным на дифракционные зависимости. Для рассматриваемого случая характерным является то, что при  $\psi = 45^\circ$  исчезает 3-я волноводная волна (точки исчезновения волноводных волн по мере роста угла  $\psi$  и их номера на графиках обозначены вертикальными рисками).

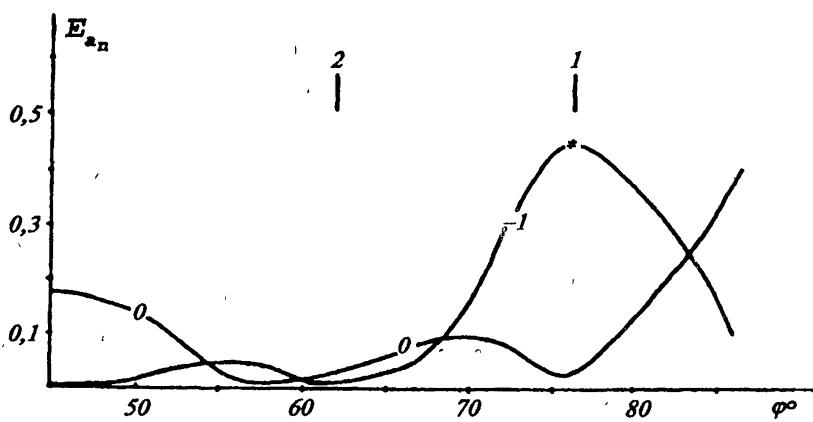


Рис. 2.

После исчезновения второй волноводной волны ( $\psi \geq 62^\circ$ ) наблюдается рост энергии  $-1$ -й гармоники, которая достигает своего максимума в точке зеркального резонанса (здесь и далее они обозначены звездочками). Этот резонанс имеет место в том случае, когда направление рассения одной из гармоник (в данном случае  $-1$ -й) близко к направлению луча, зеркально отраженного от освещенной грани щелеватта [1]. Максимум зеркального резонанса при нормальном падении по частоте наблюдается вблизи значений [6]

$$\omega_{0,p_n} = -n / \left( \sqrt{\epsilon'_1 \mu'_1} \sin 2\psi \right). \quad (20)$$

При выбранном же он имеет место при  $\psi = 76^\circ$ , а в случае отсутствия диэлектрического включения — при  $\psi = 69^\circ$ .

Увеличение относительной диэлектрической проницаемости приводит к смещению точек зеркального резонанса в сторону больших значений угла асимметрии, а введение потерь в диэлектрик — к уменьшению уровня относительной доли энергии резонирующей гармоники и к сглаживанию резонансных эффектов, обусловленных аномалиями Вуда и появлением

волноводных волн. Для представленных зависимостей характерно то, что первая волноводная волна исчезает вблизи точки зеркального резонанса, то есть, при  $\psi > 76^\circ$  в соответствующем волноводном районе существует только 0-я волна (волна ТЕМ). Ее влияние наиболее характерно проявляется в том, что даже при больших углах асимметрии эшелетта (вплоть до  $\psi = 85^\circ$ ) уровень поглощенной энергии рассеянного поля остается достаточно высоким и составляет величину более 50%, чего в случае рассеяния  $E$ -поляризованных волн не наблюдается. Аналогичные закономерности проявляются в дифракционных зависимостях при изменении параметров  $\alpha, \varphi, \epsilon, \mu$ .

Далее рассмотрим особенности влияния диэлектрика на дифракционные свойства эшелетта в диапазоне изменения угла падения  $\varphi$  первичной волны — рис. 3 ( $\alpha = 2,2; H/l = h_1/l = 0,2; \epsilon'_1 = 2; \operatorname{tg} \delta_{\epsilon'_1} = 0,05; \epsilon'_2 = 1,5; \operatorname{tg} \delta_{\epsilon'_2} = 0; \mu'_1 = \mu'_2 = 1; \operatorname{tg} \delta_{\mu'_1} = \operatorname{tg} \delta_{\mu'_2} = 0; \psi = 80^\circ$ ).

При выбранных положительных началах отсчета углов  $\varphi$  и  $\psi$  (рис. 1) в области положительных углов падения преобладающее освещение — пологая грань эшелетта, а в области отрицательных — непологая. Последнее, в основном, и определяет характер дифракционных зависимостей. Так, в области  $\varphi > 0$  при выбранном  $\alpha$  в свободном пространстве всегда существуют 0-я, -1-я и -2-я распространяющиеся гармоники. Кроме того, при определенных  $\varphi > 0$  в диэлектрических слоях появляются еще распространяющиеся +1, +2, -3, -4-й порядки спектров, но их влияние, как показывают расчеты, на дифракционное взаимодействие между диэлектрическими слоями незначительно. Незначительно также и влияние первой волноводной волны, поскольку она при рассматриваемых  $\alpha, \epsilon'_1$  и  $\psi$  существует в режиме, близком к критическому. Таким образом, дифракционное взаимодействие между слоями и волноводным районом здесь определяется -1-м порядком спектра и нулевой волноводной волной. В силу этого, на рис. 3 -1-я пространственная гармоника является доминирующей в широком диапазоне положительных углов падения с достаточно постоянным значением энергии —  $E_{a-1} \approx 0,5$ , а в случае отсутствия диэлектрических потерь ее уровень достигает величины  $\approx 0,9$ . Стабильность дифракционных зависимостей определяет, в свою очередь, относительное постоянство поглощаемой энергии в широком диапазоне углов облучения. Расчеты показывают, что в диапазоне  $-28^\circ \leq \varphi \leq 74^\circ$  процент поглощенной энергии лежит соответственно в пределах 32...30%, в области  $74^\circ < \varphi \leq 84^\circ$  — 29...17,4%, а в диапазоне  $84^\circ < \varphi \leq 89^\circ$  — 15...4%.

Иные закономерности в дифракционных зависимостях наблюдаются при отрицательных углах падения. Здесь при  $\varphi \approx -21^\circ$  начинает распространяться +3-я пространственная гармоника, после чего начинается процесс перераспределения между ее энергией и энергией -1-й гармоники. Параметры задачи при этом такие, что направление распространения +3-й гармоники в области максимума энергии близко к направлению луча,

дважды зеркально отразившегося от обоих склонов канавки. Этот режим рассеяния в теории периодических решеток [1] известен под названием "двойной зеркальный резонанс" (его положение на рис. 3 отмечено штрихами). Ни одна другая гармоника не находится столь близко к указанному условию, поэтому и наблюдается доминирование +3-й гармоники. Отметим здесь, что при отсутствии потерь в диэлектрике, значения ее энергии в диапазоне углов  $-53^\circ \leq \varphi \leq -33^\circ$  достигают величин  $0,9 \dots 0,95$ . Кроме того, в указанном случае в диапазоне  $-60^\circ \leq \varphi \leq -56^\circ$  наблюдался бы пик значения энергии +4-й гармоники на уровне  $\approx 0,6$ , но наличие даже незначительных потерь в диэлектрике привело к его устраниению. Процент поглощенной энергии в указанных выше диапазонах углов достигает величин  $80 \dots 94\%$ .

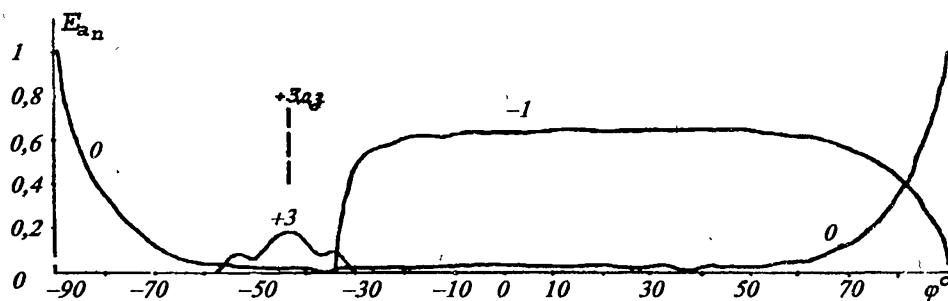


Рис. 3.

Примечательной особенностью представленных на рис. 3 зависимостей является полная симметрия зависимости энергии нулевой гармоники от угла падения. В рассматриваемом случае выполняются соотношения взаимности в теории дифракционных решеток [3]. Причем, в диапазоне  $-70^\circ < \varphi < 70^\circ$  значения ее энергии не превышают 10%. Последнее может найти практическое применение, например, при проектировании радиопоглощающих устройств с малым значением уровня индикаторы бистатического рассеяния в широком диапазоне углов облучения [6].

На рис. 4 представлены зависимости энергий пространственных гармоник от частотного параметра  $\alpha$  ( $\varphi = 0^\circ$ ;  $\psi = 75^\circ$ ;  $h_1/l = H/l = 0,2$ ;  $\epsilon'_1 = \epsilon'_2 = 2$ ;  $\mu'_1 = \mu'_2 = 1$ ;  $\operatorname{tg} \delta_{\epsilon'_1} = \operatorname{tg} \delta_{\epsilon'_2} = \operatorname{tg} \delta_{\mu'_1} = \operatorname{tg} \delta_{\mu'_2} = 0$ ). Для приведенных параметров также, как и в случае отсутствия диэлектрического включения [1, 3], наблюдается явление поочередной с уменьшением длины волны трансформации основной доли энергии рассеянного поля в высшие пространственные гармоники, энергия которых достигает максимума в точках зеркального резонанса. Для решетки с диэлектрическим включением по сравнению с решеткой без него основное отличие состоит в том, что с увеличением относительной диэлектрической проницаемости за счет укорочения длины волны происходит смещение положения точек

зеркального резонанса, определяемых соотношением (20), в длинноволновую область. Последнее, в свою очередь, приводит к смещению всей дифракционной картины в длинноволновую область. Влияние нулевой волноводной волны проявляется в том, что  $-1$ -я пространственная гармоника почти сразу же после ее возникновения становится доминирующей в достаточно широкой области длин волн со значением энергии, превышающем уровень 0,9. Поддержанию этого режима способствует также возникновение первой волны (точки появления волноводных волн и их номера по мере роста параметра  $\alpha$  обозначены рисками). Количественные и качественные отличия в дифракционных зависимостях с ростом  $\epsilon'_1$  и  $\mu'_1$  начинают существенно проявляться, когда положение точки зеркального резонанса на  $-1$ -й гармонике, определяемого соотношением (20), смещено в одноволновую область, где соответствующая резонирующая гармоника в свободном пространстве не является распространяющейся. С физической точки зрения для указанной гармоники начинает выполняться условие полного внутреннего отражения в диэлектрическом слое и процесс переотражений в нем приводит к тому, что доминирующими в рассеянном поле может быть как  $0$ -й, так и  $+1$ -й порядок спектра, что для пологого эшелетта в свободном пространстве не наблюдается. Это в равной степени относится и к зависимостям, характеризующим поведение более высоких порядков спектра. Еще одна особенность, связанная с возрастанием относительной диэлектрической проницаемости, заключается в том, что при  $\epsilon' > 5$  интенсивность трансформации падающего поля в высшие порядки спектра постепенно начинает ослабевать, и ярко выраженная асимметрия рассеянного поля, характерная для пологого эшелетта в свободном пространстве, проявляется слабо. Введение потерь в диэлектрик приводит к поглощению энергии и дополнительно к сглаживанию характерных резонансов [2, 4, 5].

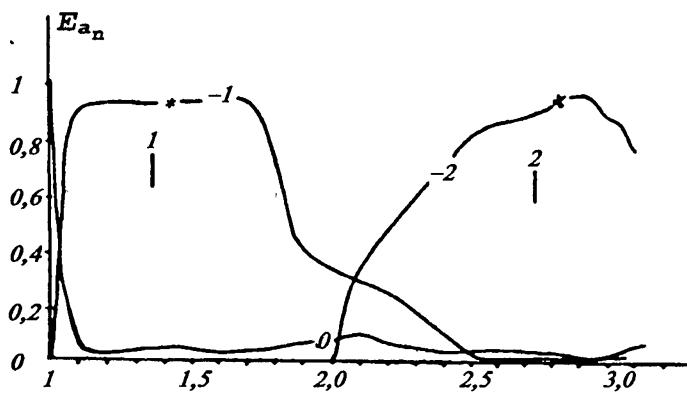


Рис. 4.

Когда диэлектрические слои обладают магнитными свойствами ( $\mu' > 1$ ), появляется дополнительная возможность управления характери-

стиками рассеянного поля, в том числе и поглощением. Так, для частотных зависимостей энергий пространственных гармоник, представленных на рис. 5 ( $\varphi = 0^\circ$ ;  $\psi = 75^\circ$ ;  $h_1/l = H/l = 0,2$ ;  $\epsilon'_1 = \mu'_1 = 3$ ;  $\epsilon'_2 = \mu'_2 = 2$ ;  $\operatorname{tg} \delta_{\epsilon'_1} = \operatorname{tg} \delta_{\epsilon'_2} = \operatorname{tg} \delta_{\mu'_1} = \operatorname{tg} \delta_{\mu'_2} = 0,01$ ), даже при относительно малых значениях диэлектрических и магнитных потерь процент поглощаемой энергии изменяется в пределах 75...94% с пиками поглощения справа от точек возникновения волноводных волн, величина которых растет с увеличением частотного параметра, то есть, рассматриваемая структура становится малоотражающей в широком диапазоне длин волн. Влияние толщины диэлектрических слоев,  $h_1$  и  $H$ , здесь и ранее начинает проявляться после того, как их величина превышает значение периода решетки.

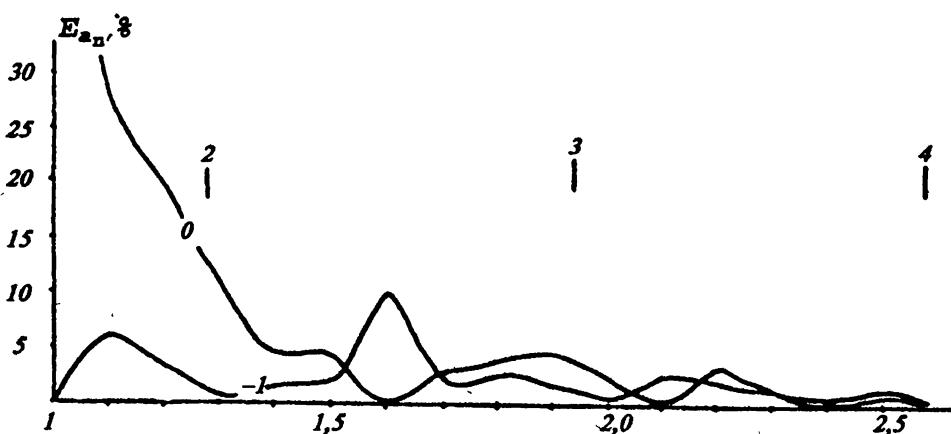


Рис. 5.

Таким образом, наличие диэлектрического включения позволяет расширить возможности получения структур на основе эшелетта с требуемыми дифракционными свойствами.

Авторы благодарят С. А. Масалова за обсуждение результатов и полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. — Харьков: Гос. ун-т, 1973.
2. Electromagnetic theory of gratings / Ed. by R. Petit. — N. Y.: Springer, 1980.
3. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1: Дифракционные решетки. — Киев: Наукова Думка, 1986.

4. Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. — М.: Гос. ун-т, 1983.
5. Корсунов В. В. // Радиотехника и электроника, 1989. Т. 34, N 5. С. 931.
6. Масалов С. А., Рыжак А. В., Шкиль В. М. // Радиотехника и электроника, 1991. Т. 36. N 6. С. 1107.
7. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. — Киев: Наукова Думка, 1984.
8. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. С. 53.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию

29 апреля 1993 г.

**SCATTERING OF H-POLARIZED PLANE WAVES BY AN ECHELETTE  
WITH A MULTI-LAYER DIELECTRIC**

*V. M. Shkil', A. V. Ryzhak*

On the basis of the semi-inversion method a strict solution is obtained for the problem of diffraction of *H*-polarized waves by an echelle placed in dielectric layers.

The peculiarities of a scattered field caused by the presence of a dielectric are found.

**АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ВОЛН  
ПЛАВНО-НЕРЕГУЛЯРНОГО  
СФЕРИЧЕСКОГО АНИЗОТРОПНОГО ВОЛНОВОДА**

*B. B. Новиков, Ю. Н. Соловьев*

На основе ряда Дебая, модифицированного применительно к методу горизонтальных лучей и вертикальных мод, построена асимптотика собственных волн плавно-нерегулярного сферического анизотропного волноводного канала.

**1.** В работе результаты, полученные в [1], обобщаются на случай сферического волновода. Асимптотика собственных волн плавно-нерегулярного волновода находится в волновой зоне по отношению к источнику и антисимметрии, где  $ka\theta \gg 1$  и  $ka(\pi - \theta) \gg 1$ . Здесь  $k$  — волновое число в вакууме,  $a$  — радиус Земли,  $\theta$  — угловое расстояние между источником и точкой наблюдения. В результате наряду с параметром плавности [1], характеризующим медленность изменения свойств волновода в касательных к земной поверхности направлениях, возникает второй параметр малости  $\operatorname{ctg} \theta / ka \ll 1$ . Поэтому при построении асимптотики решения уравнений Максвелла оказывается целесообразным использовать классический ряд Дебая (разложение решения по обратным степеням волнового числа  $k$ ), модифицированный применительно к методу горизонтальных лучей и вертикальных мод.

В данной работе асимптотика получена в виде, содержащем секулярные члены. Однако, соответствующим изменением формы асимптотического разложения можно добиться того, чтобы в поправках к адиабатическому приближению эти члены отсутствовали [1, 2].

**2.** Гармонические во времени ( $e^{-i\omega t}$ ) электромагнитные поля в холодной плазме с тензором относительной комплексной диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}(\vec{r}, w)$  вне источников подчиняются однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = ik \vec{\alpha}, \quad \operatorname{rot} \vec{\alpha} = -ik \hat{\epsilon} \vec{E}, \quad (1)$$

в которых  $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  — волновое число в вакууме,  $\vec{\alpha} = Z_0 \vec{H}$ ,  $Z_0 = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2}$  — характеристический импеданс вакуума. При использовании сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$  и введении вектор-функции

$$\vec{W} = (W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6)^{\text{tp}} = r \sqrt{\sin \theta} \vec{U},$$

(2)

$$\vec{U} = (\vec{E}, \vec{H})^{\text{tp}} = (E_\theta, E_\varphi, E_r, e_\theta, e_\varphi, e_r)^{\text{tp}},$$

уравнения (1) могут быть записаны в следующем виде

$$\hat{\Gamma}_\theta \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \hat{\Gamma}_\varphi \frac{\partial \vec{W}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \hat{\Gamma}_0 \vec{W} - ikrl_r(\hat{\epsilon}) \vec{W} = 0, \quad (3)$$

где

$$\hat{\Gamma}_\theta = \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \hat{\Gamma}_\varphi = \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$\hat{\Gamma}_0 = \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \hat{l}_r = \left[ \begin{array}{c|ccc} -\hat{\epsilon} & 0 & D & 0 \\ \hline 0 & D & 0 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{I} \end{array} \right],$$

$$D \equiv \frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \hat{I} — \text{единичная матрица.}$$

Для упрощения задачи будем считать, что волновод ограничен двумя идеально-проводящими сферическими поверхностями  $r = r_h$  и  $r = r_b$ , расположенные в Земле и в ионосфере соответственно ниже и выше областей, существенных для отражения радиоволн. При этом решения уравнений (1) и (3) должны удовлетворять граничным условиям по координате  $r$ :

$$E_\theta = E_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r = r_b, r_h, \quad , \text{откуда} \quad (4)$$

$$W_1 = W_2 = 0 \quad \text{при} \quad r = r_b, r_h.$$

В качестве граничных условий по координатам  $\theta$  и  $\varphi$  будем использовать начальное значение

$$\vec{W} = \vec{W}_0(r, \theta_0, \varphi_0) \quad (5)$$

на некоторой замкнутой кривой  $\varphi_0 = \varphi_0(\theta_0)$ , расположенной в волновой зоне, при  $r \in (r_h, r_b)$ , и требовать возрастания фазы решения по мере удаления от источника.

Найдем частное решение уравнения (3), имеющее формальное асимптотическое разложение

$$\vec{W}(r, \theta, \varphi) = e^{ikat(\theta, \varphi)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\vec{A}_l(r, \theta, \varphi)}{(ika)^l}. \quad (6)$$

Это выражение представляет собой ряд Дебая, в котором фаза  $\Phi = kat = \Phi(\theta, \varphi)$  согласно методу горизонтальных лучей и вертикальных мод считается не зависящей от координаты  $r$ . Отсюда ясно, что разложение (6) целесообразно использовать для описания полей низших мод, распространяющихся под скользящими углами к Земле и ионосфере и являющихся основными на низких частотах.

Подставляя (6) в (3), стандартным образом приходим к системе заполняющих уравнений

$$\hat{L}_r \vec{A}_0 - \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \hat{\Gamma}_\theta \vec{A}_0 - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \hat{\Gamma}_\varphi \vec{A}_0 = 0, \quad (7)$$

$$\hat{L}_r \vec{A}_{l+1} - \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \hat{\Gamma}_\theta \vec{A}_{l+1} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \hat{\Gamma}_\varphi \vec{A}_{l+1} = \vec{F}_l \quad (l \geq 0), \quad (8)$$

в которой  $\hat{L}_r = \hat{L}_r(\hat{\epsilon}) = \frac{r}{a} \hat{l}_r(\hat{\epsilon})$  — поперечный оператор волноводной задачи,

$$\vec{F}_l = \hat{\Gamma}_\theta \frac{\partial \vec{A}_l}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \hat{\Gamma}_\varphi \frac{\partial \vec{A}_l}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \hat{\Gamma}_0 \vec{A}_l.$$

Исходя из (4), потребуем, чтобы вектор-функции  $\vec{A}_l$  удовлетворяли граничным условиям  $A_{l,1} = A_{l,2} = 0$  при  $r = r_h, r_b$ .

**3.** Обратимся к уравнению (7) для нулевого члена асимптотического разложения. Прежде всего положим

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \lambda \cos \chi, \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \lambda \sin \chi, \quad (9)$$

где  $\chi$  представляет собой угол между волновой нормалью (нормалью к фазовому фронту) и ортом  $\vec{e}_\theta(\theta, \varphi)$ , так что

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} / \frac{\partial \tau}{\partial \theta}. \quad (10)$$

Тогда уравнение (7) принимает вид

$$\hat{L}_r \vec{A}_0 - \lambda \hat{\Gamma}_t \vec{A}_0 = 0, \quad \hat{\Gamma}_t = \hat{\Gamma}_\theta \cos \chi + \hat{\Gamma}_\varphi \sin \chi \quad (11)$$

и с учетом граничных условий по координате  $r$  для  $\vec{A}_0$  совпадает с уравнением для собственных функций и собственных значений поперечного оператора

$$\hat{L}_r(\hat{\epsilon}) \vec{\psi}_m = \lambda_m \hat{\Gamma}_t \vec{\psi}_m, \quad \psi_{m,1} = \psi_{m,2} = 0 \quad \text{при } r = r_h, r_b. \quad (12)$$

В силу используемых граничных условий спектр оператора является дискретным, и мы считаем его простым. Из (12), в принципе, определяются собственные функции  $\vec{\psi}_m = \vec{\psi}_m(r, \theta, \varphi; \chi)$  и собственные значения  $\lambda_m = \lambda_m(\theta, \varphi; \chi)$  при произвольном угле  $\chi$ . Для определенности положим  $\operatorname{Im} \lambda_m > 0$  при  $m \geq +1$  и  $\operatorname{Im} \lambda_m < 0$  при  $m \leq -1$  ( $m \neq 0$ ).

Поскольку в дальнейшем удобно опираться на нормированные собственные функции, то сформулируем “сопряженную” задачу. Введем сопряженный оператор  $\hat{L}_r^+$  с помощью соотношения

$$[\hat{L}_r \vec{\psi}, \vec{\varphi}] = [\vec{\psi}, \hat{L}_r^+ \vec{\varphi}], \quad (13)$$

в котором использовано псевдоскалярное произведение

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \int_{r_h}^{r_b} \frac{1}{r} \vec{a} \cdot \vec{b} dr = \sum_{s=1}^6 \int_{r_h}^{r_b} \frac{1}{r} a_s b_s dr.$$

Из (13) следует, что  $\hat{L}_r^+ = \hat{L}_r(\vec{\varepsilon}^T)$ , а область определения сопряженного оператора совпадает с областью определения исходного оператора ( $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  при  $r = r_h, r_b$ ). Задачу на собственные функции и собственные значения сопряженного оператора поставим следующим образом

$$\hat{L}_r(\vec{\varepsilon}^T) \vec{\varphi}_n = -\lambda_n^+ \hat{\Gamma}_t \vec{\varphi}_n, \quad \varphi_{n,1} = \varphi_{n,2} = 0 \quad \text{при } r = r_h, r_b. \quad (14)$$

Подаяя затем в (13)  $\vec{\psi} = \vec{\psi}_m$ ,  $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_n$  и учитывая (12) и (14), а также соотношение  $[\vec{a}, \hat{\Gamma}_t \vec{b}] = -[\hat{\Gamma}_t \vec{a}, \vec{b}]$ , находим

$$(\lambda_m - \lambda_n^+) [\hat{\Gamma}_t \vec{\psi}_m, \vec{\varphi}_n] = 0.$$

Отсюда при  $[\hat{\Gamma}_t \vec{\psi}_m, \vec{\varphi}_m] = N_m \neq 0$  (нет вырождения, спектр простой) следует, что  $\lambda_m^+ = \lambda_m$ , т. е. собственные значения исходного и сопряженного операторов совпадают, и вытекает соотношение ортогональности

$$[\hat{\Gamma}_t \vec{\psi}_m, \vec{\varphi}_n] = N_m \delta_{mn}, \quad (15)$$

где  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера,  $N_m = N_m(\theta, \varphi; \chi)$  — нормировочный интеграл.

Нормированные собственные функции определим следующим образом

$$\vec{\psi}'_m = \frac{\vec{\psi}_m}{\sqrt{N_m}}, \quad \vec{\varphi}'_n = \frac{\vec{\varphi}_n}{\sqrt{N_n}}.$$

Для них соотношение (15) принимает вид  $[\hat{\Gamma}_t \vec{\psi}'_m, \vec{\varphi}'_n] = \delta_{mn}$ .

Отметим, что уравнения и соотношения (11)–(15) справедливы при произвольном угле  $\chi$ . Однако, если интересоваться частным решением уравнений Максвелла вида (6) для  $p$ -ой собственной волны ( $\lambda = \lambda_p$ ), то угол  $\chi_p(\theta, \varphi)$  для нее определяется равенством (10), содержащим эйконал  $\tau_p(\theta, \varphi)$ . Уравнение же для  $\tau_p$  следует из соотношений (9), которые приводят к уравнению горизонтального эйконала

$$\left( \frac{\partial \tau_p}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau_p}{\partial \varphi} \right)^2 = \lambda_p^2(\theta, \varphi, \chi_p), \quad (16)$$

$$\chi_p = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau_p}{\partial \varphi} / \frac{\partial \tau_p}{\partial \theta} \right).$$

В результате из уравнения (7) мы получаем уравнение (16) для  $\tau_p$  и с точностью до произвольного множителя, зависящего от  $\theta$  и  $\varphi$ , определяем нулевой член асимптотического ряда (6).

$$\vec{A}_c^{(p)} = a_{c,p}^{(p)}(\theta, \varphi) \vec{\psi}_p'(r, \theta, \varphi; \chi_p) = \frac{a_{0,p}^{(p)}(\theta, \varphi)}{\sqrt{N_p^{(p)}}} \vec{\psi}_p^{(p)}, \quad (17)$$

где

$$\vec{\psi}_p^{(p)} = \vec{\psi}_p(r, \theta, \varphi; \chi_p), \quad N_p^{(p)} = N_p(\theta, \varphi; \chi_p).$$

Для нахождения  $a_{c,p}^{(p)}$  необходимо обратиться к уравнению (8) для  $\vec{A}_{l+1}^{(p)}$ .

**4.** Уравнение (8) для  $p$ -ой собственной волны записывается в виде

$$\hat{L}_r \vec{A}_{l+1}^{(p)} - \lambda_p^{(p)} \hat{\Gamma}_t^{(p)} \vec{A}_{l+1}^{(p)} = \vec{F}_l^{(p)}, \quad (18)$$

где

$$\lambda_p^{(p)} = \lambda_p(\theta, \varphi; \chi_p), \quad \hat{\Gamma}_t^{(p)} = \hat{\Gamma}_\theta \cos \chi_p + \hat{\Gamma}_\varphi \sin \chi_p.$$

Как показано в [1], вследствие того, что матрица  $\hat{\Gamma}_t$  является вырожденной, система собственных функций

$$\vec{\psi}_m^{(p)} = \vec{\psi}_m'(r, \theta, \varphi; \chi_p) \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

не является полной, и разложение по собственным функциям нуждается в пополнении. С этой целью вводятся проекторы

$$\hat{P}_0 = \hat{I} + \hat{\Gamma}_t^2, \quad \hat{P}_1 = -\hat{\Gamma}_t^2,$$

обладающие свойствами  $\hat{P}_0 \hat{\Gamma}_t = \hat{\Gamma}_t \hat{P}_0 = 0$  и  $\hat{P}_1 \hat{\Gamma}_t = \hat{\Gamma}_t \hat{P}_1 = \hat{\Gamma}_t$ . При этом решение уравнения (18) дается разложением

$$\vec{A}_{l+1}^{(p)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{l+1,m}^{(p)} \vec{\psi}_m^{(p)} + \vec{B}_{l+1}^{(p)} + a_{l+1,p}^{(p)} \vec{\psi}_p^{(p)}, \quad (19)$$

в котором штрих у суммы означает отсутствие в ней слагаемого с  $m = p$ , а вектор  $\vec{B}_{l+1}^{(p)}$  таков, что  $\hat{P}_c^{(p)} \vec{B}_{l+1}^{(p)} = \vec{B}_{l+1}^{(p)}$ . После подстановки (19) в (18) и проектирования получающегося уравнения в подпространства, отвечающие  $\hat{P}_c^{(p)}$  и  $\hat{P}_1^{(p)}$ , находим

$$\hat{P}_c^{(p)} \hat{L}_r \vec{B}_{l+1}^{(p)} = \hat{P}_c^{(p)} \vec{F}_l^{(p)}, \quad (20)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\lambda_m^{(p)} - \lambda_p^{(p)}) a_{l+1,m}^{(p)} \hat{\Gamma}_t^{(p)} \vec{\psi}_m^{(p)} = \hat{P}_1^{(p)} \vec{F}_l^{(p)} - \hat{P}_1^{(p)} \hat{L}_r \vec{B}_{l+1}^{(p)}, \quad (21)$$

где

$$\lambda_m^{(p)} = \lambda_m(\theta, \varphi; \chi_p).$$

Из уравнения (20) получаем

$$\vec{B}_{l+1}^{(p)} = \frac{a}{r} \hat{\gamma}^{(p)} \hat{P}_c^{(p)} \vec{F}_l^{(p)}, \quad \hat{\gamma}^{(p)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon_{tt}^{(p)}} \hat{I}, & 0 \\ 0, & \hat{I} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{tt}^{(p)} = \varepsilon_{\theta\theta} \cos^2 \chi_p + (\varepsilon_{\theta\varphi} + \varepsilon_{\varphi\theta}) \sin \chi_p \cos \chi_p + \varepsilon_{\varphi\varphi} \sin^2 \chi_p,$$

а из (21) при использовании соотношения ортогональности (15) и уравнения (20) определяем коэффициенты разложения в ряду по собственным функциям

$$a_{l+1,m}^{(p)} = \frac{[\vec{F}_l^{(p)}, \vec{\varphi}_m^{(p)}]}{\lambda_m^{(p)} - \lambda_p^{(p)}} \quad (m \neq p).$$

Последнее слагаемое в разложении (19) является решением однородного уравнения (18) при произвольном коэффициенте  $a_{l+1,p}^{(p)}$ . Для построения единственного решения этого уравнения необходимо потребовать выполнения условия

$$[\vec{F}_l^{(p)}, \vec{\varphi}_p^{(p)}] = 0 \quad (l \geq 0),$$

которое приводит к уравнению для  $a_{l,p}^{(p)}$

$$S_{\theta,p}^{(p)} \frac{\partial a_{l,p}^{(p)}}{\partial \theta} + \frac{S_{\varphi,p}^{(p)}}{\sin \theta} \frac{\partial a_{l,p}^{(p)}}{\partial \varphi} + \beta_p a_{l,p}^{(p)} + \vec{R}_l^{(p)} = 0. \quad (22)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$S_{\theta,p}^{(p)} = \left[ \hat{\Gamma}_\theta \vec{\psi}_p^{(p)}, \vec{\varphi}_p^{(p)} \right], \quad S_{\varphi,p}^{(p)} = \left[ \hat{\Gamma}_\varphi \vec{\psi}_p^{(p)}, \vec{\varphi}_p^{(p)} \right], \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \beta_p &= \left[ \hat{\Gamma}_\theta \frac{\partial \vec{\psi}_p^{(p)}}{\partial \theta}, \vec{\varphi}_p^{(p)} \right] + \frac{1}{\sin \theta} \left[ \hat{\Gamma}_\varphi \frac{\partial \vec{\psi}_p^{(p)}}{\partial \varphi}, \vec{\varphi}_p^{(p)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \left[ \hat{\Gamma}_0 \vec{\psi}_p^{(p)}, \vec{\varphi}_p^{(p)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_l^{(p)} &= \left[ \hat{\Gamma}_\theta \frac{\partial \vec{C}_l^{(p)}}{\partial \theta}, \vec{\varphi}_p^{(p)} \right] + \frac{1}{\sin \theta} \left[ \hat{\Gamma}_\varphi \frac{\partial \vec{C}_l^{(p)}}{\partial \varphi}, \vec{\varphi}_p^{(p)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \left[ \hat{\Gamma}_0 \vec{C}_l^{(p)}, \vec{\varphi}_p^{(p)} \right], \end{aligned}$$

$$\vec{C}_l^{(p)} = \begin{cases} 0, & \text{при } l = 0, \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{l,m}^{(p)} \vec{\psi}_m^{(p)} + \vec{B}_l^{(p)}, & \text{при } l \geq 1. \end{cases}$$

Для величин  $S_{\theta,p}^{(p)}$  и  $S_{\varphi,p}^{(p)}$  можно получить более простые выражения, содержащие только угол  $\chi$  и собственное число. С этой целью обратимся к задаче (12) при произвольном угле  $\chi$ . Дифференцируя уравнение (12) по  $\chi$  и домножая результат скалярно на  $\vec{\varphi}_m$ , находим

$$\left[ \hat{\Gamma}_n \vec{\psi}_m, \vec{\varphi}_m \right] = -\frac{1}{\lambda_m} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \chi} N_m, \quad (24)$$

где

$$\hat{\Gamma}_n = \frac{\partial \hat{\Gamma}_t}{\partial \chi} = -\hat{\Gamma}_\theta \sin \chi + \hat{\Gamma}_\varphi \cos \chi.$$

Тогда (24) совместно с (15) позволяют определить  $S_{\theta,m}$  и  $S_{\varphi,m}$  (при произвольном угле  $\chi$ ). Полагая затем  $m = p$  и  $\chi = \chi_p$ , получаем

$$\begin{aligned} S_{\theta,p}^{(p)} &= \cos \chi_p + \frac{1}{\lambda_p} \frac{\partial \lambda_p}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\chi_p} \sin \chi_p, \\ S_{\varphi,p}^{(p)} &= \sin \chi_p - \frac{1}{\lambda_p} \frac{\partial \lambda_p}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\chi_p} \cos \chi_p. \end{aligned} \quad (25)$$

5. Таким образом, построение асимптотики (6) для  $p$ -й собственной волны сферического анизотропного нерегулярного волновода сводится к решению уравнений (16) и (22). При этом необходимо задание начальных

условий на некоторой замкнутой линии  $\theta_0 = \theta_0(\varphi_0)$  (в частности,  $\theta_0 = \text{const}$ ), расположенной в волновой зоне. В случае плавно-нерегулярного волновода, пространственный масштаб изменения свойств которого в касательных к земной поверхности направлениях много больше длины волны, можно выбрать угол  $\theta_0$ , отвечающим началу волновой зоны, и считать, что при  $\theta \leq \theta_0$  волновод является регулярным. Тогда начальные условия могут быть получены из решения задачи о поле в регулярном волноводе. При этом под регулярным волноводом следует понимать волновод, свойства которого в местной декартовой системе координат с началом в источнике не меняются в касательных к земной поверхности направлениях. В настоящее время отсутствует аналитическое решение для такого волновода, поэтому мы рассмотрим только вопрос о начальных условиях для уравнения горизонтального эйконала, который может быть решен непосредственно на основании этого уравнения.

Используем для построения решения уравнения (16) метод комплексных лучей (комплексных характеристик) [3], являющийся обобщением классического метода характеристик [4], на случай комплексного значения  $\lambda_p$  в уравнении горизонтального эйконала. Выбирая в качестве параметра вдоль луча координату  $\theta$ , запишем характеристическую систему уравнений для (16) в следующем виде (опускаем индекс "p")

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{S_\varphi}{S_\theta}, \quad (26)$$

$$\frac{d\chi}{d\theta} = \frac{1}{\lambda S_\theta} \left[ -\sin \chi \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \lambda \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{\cos \chi}{\sin \theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \right],$$

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\lambda}{S_\theta}, \quad (27)$$

где  $S_\theta$  и  $S_\varphi$  даются выражениями (25) и для нерегулярного волновода  $\lambda = \lambda(\theta, \varphi, \chi)$ , причем  $\chi$  представляет собой угол между волновой нормалью и ортом  $\vec{e}_\theta(\theta, \varphi)$ . Уравнения (26) определяют луч, вообще говоря комплексный из-за комплексности  $\lambda$ , а уравнение (27) — эйконал вдоль него. Из первого уравнения (26) следует, что вектор  $\vec{S} = S_\theta \vec{e}_\theta + S_\varphi \vec{e}_\varphi$  касателен к лучу. Угол  $\delta$  между ортом  $\vec{e}_\theta(\theta, \varphi)$  и вектором  $\vec{S}$  определяется выражением

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{S_\varphi}{S_\theta} = \frac{\sin \chi - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \chi} \cos \chi}{\cos \chi + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \chi} \sin \chi} = \operatorname{tg}(\chi - \gamma), \quad (28)$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \chi}$$

и в случае анизотропного волновода  $\left(-\frac{\partial \lambda}{\partial \chi} \neq 0\right)$  не совпадает с углом  $\chi$ . Заметим, что уравнение (22) может быть также записано в характеристической форме. Как нетрудно видеть, характеристики уравнения (22) совпадают с характеристиками уравнения эйконала, поэтому вдоль луча (26)

$$\frac{da_l}{d\theta} = -\frac{\beta a_l + R_l}{S_\theta}.$$

Имея в виду построение решения системы уравнений (26) вблизи источника для регулярного волновода, введем вместо  $\chi$  угол  $\alpha = \chi + \varphi$ , представляющий собой при  $\theta \ll 1$  угол между волновой нормалью и ортом  $\vec{e}(\theta, \varphi)|_{\varphi=0}$ . Тогда для регулярного волновода  $\lambda = \lambda(\alpha)$ , и уравнения (26)–(27) преобразуются к следующей системе

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{\sin \theta} \operatorname{tg}(\alpha - \gamma - \varphi), \quad \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{(1 - \cos \theta) \sin(\alpha - \varphi) \cos \gamma}{\sin \theta \cos(\alpha - \gamma - \varphi)}, \quad (29)$$

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\lambda \cos \gamma}{\cos(\alpha - \gamma - \varphi)}, \quad (30)$$

где  $\gamma$  дается выражением (28), поскольку  $\frac{\partial \lambda}{\partial \chi} = \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}$ . При  $\theta \ll 1$  можно приблизительно положить  $\frac{d\alpha}{d\theta} = 0$ , так что вдоль луча  $\alpha = \operatorname{const}$  и  $\gamma(\alpha) = \operatorname{const}$ . В этом приближении из первого уравнения (29) следует равенство

$$\theta \sin(\alpha - \gamma - \varphi) = \operatorname{const} = \theta_n \sin(\alpha - \gamma - \varphi_n), \quad (31)$$

в котором индекс “n” отвечает некоторой точке на луче. Считая, что луч выходит из источника, расположенного при  $\theta = 0$ , и полагая  $\theta_n = 0$ , на основании (31) получаем

$$\varphi = \alpha + \gamma(\alpha) = \operatorname{const}, \quad (32)$$

т. е. луч представляет собой геодезическую линию, идущую из источника в точку наблюдения. Задавая угол  $\varphi$  точки наблюдения, из (32), в принципе, определяем  $\alpha = \alpha(\varphi)$ . Тогда решение уравнения (30) дается выражением

$$\tau(\theta, \varphi) = \lambda(\alpha) \theta \cos \gamma(\alpha) + \tau_0, \quad (33)$$

где  $\alpha = \alpha(\varphi)$ , а  $\tau_0$  — постоянная, которая может быть найдена только из общего решения задачи о поле в регулярном волноводе. Выражение (33) представляет собой по существу решение уравнения горизонтального эйконала в плоском волноводе (но с собственным значением  $\lambda$  для сферического волновода) и может быть использовано в качестве начального

условия при  $\theta = \theta_0$  для построения решения уравнения (16) с точностью до постоянной  $\tau_0$  в сферическом нерегулярном волноводе.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеев А. Д., Новиков В. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1991. Т. 34. № 7. С. 790.
2. Авдеев А. Д., Буслаев В. С., Попов А. В. / В кн: Распространение волн в слоистых средах. — Казань, 1988. С. 6.
3. Кравцов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика, 1967. Т. 10. № 9. С. 1283.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV. — М., 1981.

Санкт-Петербургский  
государственный университет

Поступила в редакцию  
15 июля 1993 г.

### THE ASYMPTOTICS OF EIGEN WAVES OF THE SMOOTH IRREGULAR SPHERICAL ANISOTROPIC WAVEGUIDE

*V. V. Novikov, Yu. N. Solov'ev*

The asymptotics of eigen waves of the smooth irregular anisotropic spherical waveguide as a series in reverse degrees of the wave number is constructed. The equations for the horizontal eikonal and for the complex amplitudes of separate members of the series are received. The approximate solution of the horizontal eikonal equation for the regular waveguide is found. It can be used as an initial condition for the definition of the eikonal in the irregular waveguide.

УДК 621.385.6 + 617.958

# ПРИМЕНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ К РАСЧЕТУ ПЕРИОДИЧЕСКИ ГОФРИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ

*C. E. Фильченков, A. D. Юнаковский*

Предложено использование гармонического возмущения профиля бесконечного осесимметричного периодически гофрированного волновода для расчета его электродинамических характеристик. В основу анализа положен метод интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода. Задача решена аналитически для возмущения цилиндрического волновода. Эти аналитические результаты явились основой для решения обратной задачи восстановления профиля волновода по заданной дисперсионной кривой.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В мощных приборах релятивистской ВЧ электроники широко применяются полые плавно гофрированные волноводы. Они имеют высокую электропрочность и обеспечивают эффективное взаимодействие электронного пучка с высокочастотным полем [1, 2]. В работах [3, 4] был предложен вариант метода интегральных уравнений для расчетов широкого класса периодических гофрированных волноводов. В настоящей работе решается задача о возмущении интегрального уравнения для осесимметрических волн электрического типа путем возмущения профиля волновода. Для возмущенной задачи построено интегральное уравнение, и для случая круглого цилиндрического волновода найден явный вид решения. На его основе решена обратная задача о восстановлении профиля волновода по заданной дисперсионной зависимости.

Рассмотрим осесимметрические волны электрического типа, распространяющиеся в волноводе с идеально проводящими стенками, профиль которых в цилиндрических координатах описывается уравнением:

$$\begin{cases} r = R(z) \\ -\infty < z < +\infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{cases} \quad (1)$$

где функция  $R(z)$  непрерывно дифференцируемая и периодическая с периодом  $2\pi$ . Электромагнитное поле внутри волновода можно описать одной азимутальной компонентой магнитного вектора Герца  $\Pi_\varphi(r, z)$ , удовлетворяющей уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \Pi_\varphi + k^2 \Pi_\varphi - \Pi_\varphi / r^2 = 0, \quad (2)$$

граничному условию на внутренней поверхности волновода:

$$\left[ 1 + r \frac{\partial}{\partial r} - r R' \frac{\partial}{\partial r} \right] \Pi_\varphi \Big|_{r=R(z)-0} = 0 \quad (3)$$

и условию Флоке:

$$\Pi_\varphi(r, z + 2\pi) = \exp(ih_0 2\pi) \Pi_\varphi(r, z). \quad (4)$$

Здесь  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\omega$  — круговая частота,  $c$  — скорость света,  $r = R(z) - 0$  — обозначение внутренней поверхности волновода,  $h_0$  — параметр Флоке.

Поле собственных волн задачи (2)–(4) ищем в виде

$$\Pi_\varphi(r, z) = i\pi \int_0^{2\pi} \alpha(z_0) \int_{n=-\infty}^{+\infty} B_{11}(g_n r, g_n r_0) \exp(ih_n(z - z_0)) dz_0, \quad (5)$$

где  $\alpha(z)$  — поверхностная плотность азимутального магнитного тока, удовлетворяющая тому же условию Флоке (4):

$$\alpha(z + 2\pi) = \exp(ih_0 2\pi) \alpha(z),$$

а функция

$$B_{ij}(x, y) = \begin{cases} J_i(x) H_j^{(1)}(y), & x < y \\ J_j(y) H_i^{(1)}(x), & x > y \end{cases}, \quad (6)$$

причем  $B_{ij}(x, y) = (B_{ij}(x + 0, x) + B_{ij}(x, x + 0))/2$ . Здесь использованы обозначения:  $r_0 \equiv R(z_0)$ ,  $h_n = h_0 + n$ ,  $g_n^2 = k^2 - h_n^2$ ,  $\operatorname{Re} g_n > 0$  при  $k > |h_n|$ ,  $\operatorname{Im} g_n > 0$  при  $k < |h_n|$ .

Ядро интеграла (5) представляет из себя функцию Грина задачи (2), (4) во всем пространстве, что позволяет перейти от граничного условия (3) к одномерному интегральному уравнению [4]:

$$\beta(z) = \int_0^{2\pi} \beta(z_0) K(z, z_0) dz_0, \quad (7)$$

с ядром

$$K(z, z_0) = -\frac{r}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ h_n R'(z) B_{11}(g_n r, g_n r_0) + i g_n B_{01}(g_n r, g_n r_0) \right\} \exp(in(z - z_0))$$

относительно новой периодической плотности

$$\beta(z) = \alpha(z) \exp(-ih_0 z).$$

В уравнении (7) использованы обозначения:  $r \equiv R(z)$ ,  $r_0 \equiv R(z_0)$ .

Значения волнового числа  $k$  и параметра Флоке  $h_0$ , при которых уравнение (7) имеет нетривиальные решения, образуют дисперсионную характеристику данного волновода.

Члены ряда в ядре интегрального уравнения (7) имеют по  $n$  асимптотику:  $\exp(-|n|(r - r_0) + in(z - z_0))$ , т. е. ряд сходится равномерно всюду, кроме окрестностей точек  $r = r_0$ .

В случае  $r = r_0$  члены этого ряда имеют асимптотику  $\exp(in(z - z_0)) / |n|$ , и ряд сходится условно при  $z \neq z_0$ .

Точка  $z = z_0$  не является точкой сходимости, но функция, определяемая этим рядом, имеет логарифмический характер особенности:

$$\ln \sin^2((z - z_0)/2). \quad (8)$$

Из всего сказанного о свойствах ряда вытекает, что ядро интегрального уравнения (7) квадратично суммируемо, т. е. интегральный оператор является вполне непрерывным [5].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о возмущении интегрального уравнения (7) путем возмущения профиля:

$$\bar{r} \equiv \bar{R}(z) = r + \varepsilon r_\varepsilon. \quad (9)$$

При этом ядро интегрального уравнения (7), его решение и волновое число в невырожденном случае, т. е. когда данному  $h_0$  соответствует некратное  $k$ , допускают разложение в ряд по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \bar{K}(z, z_0) &= K(z, z_0) + \varepsilon K_1(z, z_0) + \varepsilon^2 K_2(z, z_0) + \dots \equiv \\ &\cong K(z, z_0) + \varepsilon K_\varepsilon(z, z_0), \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\bar{\beta}(z) = \beta(z) + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2(z) + \dots \equiv \beta(z) + \varepsilon \beta_\varepsilon(z), \quad (10.2)$$

$$\bar{k} = k + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots \equiv k + \varepsilon k_\varepsilon. \quad (10.3)$$

Подставляя возмущенные значения (10) в интегральное уравнение (7) и проводя необходимые преобразования, получаем уравнение для возмущения плотности:

$$\begin{aligned} \beta_\varepsilon(z) &= \int\limits_0^{2\pi} [\beta(z_0) K_\varepsilon(z, z_0) + \beta_\varepsilon(z_0) K(z, z_0)] dz_0 + \\ &+ \varepsilon \int\limits_0^{2\pi} \beta_\varepsilon(z_0) K_\varepsilon(z, z_0) dz_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем нормировку новой плотности  $\bar{\beta}(z)$ , потребовав, чтобы интеграл от нее сохранялся при возмущении профиля:

$$\int_0^{2\pi} \bar{\beta}(z) dz = \int_0^{2\pi} \beta(z) dz.$$

Отсюда уравнение

$$\int_0^{2\pi} \beta_\epsilon(z) dz = 0 \quad (12)$$

вместе с (11) образуют систему, из которой можно найти возмущение плотности  $\beta_\epsilon(z)$  и волнового числа  $k_\epsilon$  при возмущении заданного профиля, используя известные из решения (7) значения  $\beta(z)$  и  $k$ .

Однако, вследствие того, что ядро интегрального уравнения (7) представляет собой ряд, записать явный вид его разложения по степеням возмущения достаточно сложно. Поэтому далее, для построения теории возмущения, мы ограничимся конечным числом членов ряда в ядре, и будем рассматривать возмущение каждого члена отдельно.

Прежде всего, используя (10.3) выпишем возмущение  $g_n$ :

$$\bar{g}_n = g_n + \epsilon \frac{k_\epsilon k}{g_n} - \epsilon^2 \frac{k_\epsilon^2 h_n^2}{2g_n^3} + o(\epsilon^2) \equiv g_n + \epsilon g_n^\epsilon.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} g_n^\epsilon = 0.$$

Далее рассмотрим возмущение аргументов функции Бесселя:

$$\bar{g}_n \bar{r} = g_n r + \epsilon(g_n^\epsilon r + g_n r_\epsilon) + \epsilon^2 g_n^\epsilon r_\epsilon.$$

Очевидно, что коэффициент  $g_n r_\epsilon$  неограниченно возрастает с ростом  $n$ . Из условия ограничения этого коэффициента появляется условие ограничения количества членов ряда при построении теории возмущения. Будем учитывать только те члены ряда в ядре интегрального уравнения (7), для которых выполняется условие:

$$|g_n| \leq A_\epsilon < +\infty. \quad (13)$$

Далее будем говорить, что  $n \in E(\epsilon)$ , если для заданного  $\epsilon$  значение  $n$  удовлетворяет условию (13).

Подставляя возмущенные значения (10) в интегральное уравнение (7), проводя необходимые преобразования и введя обозначения:

$$J_i(\bar{g}_n \bar{r}) = J_i(g_n r) + \varepsilon J_i^\varepsilon(g_n r),$$

$$H_i^{(1)}(\bar{g}_n \bar{r}) = H_i^{(1)}(g_n r) + \varepsilon H_i^\varepsilon(g_n r),$$

$$B_{ij}^\varepsilon(x, y) = \begin{cases} J_i^\varepsilon(x) H_j^{(1)}(y) + J_i(x) H_j^\varepsilon(y), & \bar{x} < \bar{y} \\ J_j^\varepsilon(y) H_i^{(1)}(x) + J_j(y) H_i^\varepsilon(x), & \bar{x} > \bar{y} \end{cases}, \quad (14)$$

$$B_{ij}^{\varepsilon\varepsilon}(x, y) = \begin{cases} J_i^\varepsilon(x) H_j^\varepsilon(y), & \bar{x} < \bar{y} \\ J_j^\varepsilon(y) H_i^\varepsilon(x), & \bar{x} > \bar{y} \end{cases},$$

$$\bar{x} = x + \varepsilon x_\varepsilon,$$

$$\bar{y} = y + \varepsilon y_\varepsilon,$$

получаем уравнение для возмущения плотности:

$$\begin{aligned} \beta_\varepsilon(z) &= F(\varepsilon, z) \equiv \\ &\equiv -\frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \beta(z_0) \sum \left\{ h_n R'(z) B_{11}^\varepsilon(g_n r, g_n r_0) + h_n r'_\varepsilon B_{11}(g_n r, g_n r_0) + \right. \\ &+ i g_n B_{01}^\varepsilon(g_n r, g_n r_0) + i g_n^\varepsilon B_{01}(g_n r, g_n r_0) + \\ &+ \varepsilon \left[ h_n R'(z) B_{11}^{\varepsilon\varepsilon}(g_n r, g_n r_0) + h_n r'_\varepsilon B_{11}^\varepsilon(g_n r, g_n r_0) + \right. \\ &+ i g_n B_{01}^{\varepsilon\varepsilon}(g_n r, g_n r_0) + i g_n^\varepsilon B_{01}^\varepsilon(g_n r, g_n r_0) \Big] \exp(in(z - z_0)) dz_0 - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ r_\varepsilon \beta(z_0) + r \beta_\varepsilon(z_0) \right] \times \\ &\times \sum \left\{ h_n R'(z) B_{11}(g_n r, g_n r_0) + i g_n B_{01}(g_n r, g_n r_0) + \right. \\ &+ \varepsilon \left[ h_n R'(z) B_{11}^\varepsilon(g_n r, g_n r_0) + h_n r'_\varepsilon B_{11}(g_n r, g_n r_0) + \right. \\ &+ i g_n B_{01}^\varepsilon(g_n r, g_n r_0) + i g_n^\varepsilon B_{01}(g_n r, g_n r_0) \Big] \exp(in(z - z_0)) dz_0 - \\ &- \varepsilon \frac{r_\varepsilon}{2} \int_0^{2\pi} \beta_\varepsilon(z_0) \sum \left\{ h_n R'(z) B_{11}(g_n r, g_n r_0) + i g_n B_{01}(g_n r, g_n r_0) \right\} \times \\ &\times \exp(in(z - z_0)) dz_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь суммирование выполняется для  $n \in E(\varepsilon)$ .

### 3. КРУГЛЫЙ ВОЛНОВОД

Рассмотрим подробнее частный случай волновода — круглый цилиндр  $R(z) \equiv r = \text{const}$ , для которого известны аналитическое решение уравнения (7) и дисперсионная зависимость

$$\beta(z) \equiv 1,$$

$$k = \sqrt{h_0^2 + (x_0/r)^2},$$

где  $x_0$  — корень уравнения  $J_0(x_0) = 0$ .

Из уравнения (15) при  $\epsilon = 0$  получаем связь возмущения плотности с возмущением профиля ( $n \neq 0$ ):

$$\int_0^{2\pi} \beta_\epsilon(z) \exp(-inz) dz = \Delta_n(h_0, r) \int_0^{2\pi} r_\epsilon \exp(-inz) dz, \quad (16)$$

$$\Delta_n(h_0, r) \equiv$$

$$\equiv \frac{J_1(g_0 r) H_1^{(1)}(g_0 r)[g_0^2 - nh_0] - g_n^2 J_0(g_n r)[H_0^{(1)}(g_n r) - H_1^{(1)}(g_n r)/(g_n r)]}{g_n J_0(g_n r) H_1^{(1)}(g_n r)},$$

а из уравнения (12) — выражение для возмущения волнового числа:

$$k_\epsilon = -g_0^2/(2\pi r k) \int_0^{2\pi} r_\epsilon dz. \quad (17)$$

Следует отметить, что гармоники этого решения прямо связаны с соответствующими гармониками профиля. Аналогичная связь встречалась в [7] для задачи дифракции.

Из (17) следует, что на первый порядок возмущения волнового числа оказывает влияние лишь изменение нулевой гармоники профиля волновода, т. е. изменение радиуса цилиндра. Для круглого цилиндрического волновода естественно потребовать, чтобы возмущение профиля не затрагивало нулевую гармонику, или, чтобы

$$\int_0^{2\pi} r_\epsilon dz = 0. \quad (18)$$

Поэтому далее будем рассматривать возмущение волнового числа по второму порядку параметра возмущения:

$$\bar{k} = k + \epsilon^2 \bar{k}_\epsilon. \quad (19)$$

Тогда из уравнения (12), приравняв нулю коэффициенты при первой степени параметра возмущения  $\varepsilon$ , получаем выражение для возмущения волнового числа:

$$\bar{k}_\varepsilon = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n(h_0, r) \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_0^{2\pi} r_\varepsilon \exp(-inz) dz \right|^2, \quad (20)$$

$$\delta_n(h_0, r) \equiv \frac{1}{kr} \left\{ \frac{g_0^2}{r} - \frac{[g_0^2 - nh_0]^2 J_1(g_n r)}{g_n J_0(g_n r)} - \frac{[g_0^2 + nh_0]^2 J_1(g_{-n} r)}{g_{-n} J_0(g_{-n} r)} \right\}.$$

Итак, получили, что гармоники возмущения плотности линейно зависят от гармоник возмущения профиля, а возмущение волнового числа — квадратично.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Зависимость модуля функции  $\Delta_n(h_0, r)$  (см. (16)) от радиуса волновода  $r$  для значений параметра Флоке  $h_0$ , равных 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45, при  $n = -1$  показана на рис. 1; эта функция имеет асимптотику:

при  $r \rightarrow 0$

$$\Delta_n(h_0, r) \rightarrow \frac{2x_0^2}{n^2 + 2nh_0} \times \frac{1}{r^3}; \quad (21)$$

при  $r \rightarrow +\infty$

$$\Delta_n(h_0, r) \rightarrow \sqrt{n^2 + 2nh_0} - i\pi nh_0 J_1(x_0) H_1^{(1)}(x_0) r. \quad (22)$$

Здесь и далее  $x_0 = 2.404 \dots$  — первый корень функции Бесселя  $J_0(x)$ .

Зависимость функции  $-\delta_n(h_0, r)$  от радиуса для тех же значений параметра Флоке для  $n = 1$  и  $n = 5$  показана на рис. 2 и 3 соответственно; ее асимптотика такая:

при  $r \rightarrow 0$

$$\delta_n(h_0, r) \rightarrow -\frac{2x_0^3}{r^5} \left( \frac{1}{n^2 + 2nh_0} + \frac{1}{n^2 - 2nh_0} \right); \quad (23)$$

при  $r \rightarrow +\infty$

$$\delta_n(h_0, r) \rightarrow -\frac{n^2 h_0}{r^5} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2nh_0}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2nh_0}} \right). \quad (24)$$

Если у функций  $\Delta_n$  и  $\delta_n$  есть особенности при некоторых значениях  $h_0$ , то невозмущенная задача имеет кратные корни. Эти особенности указывают на нарушение условий применимости построенной теории возмущений по целым степеням  $\varepsilon$  [6].

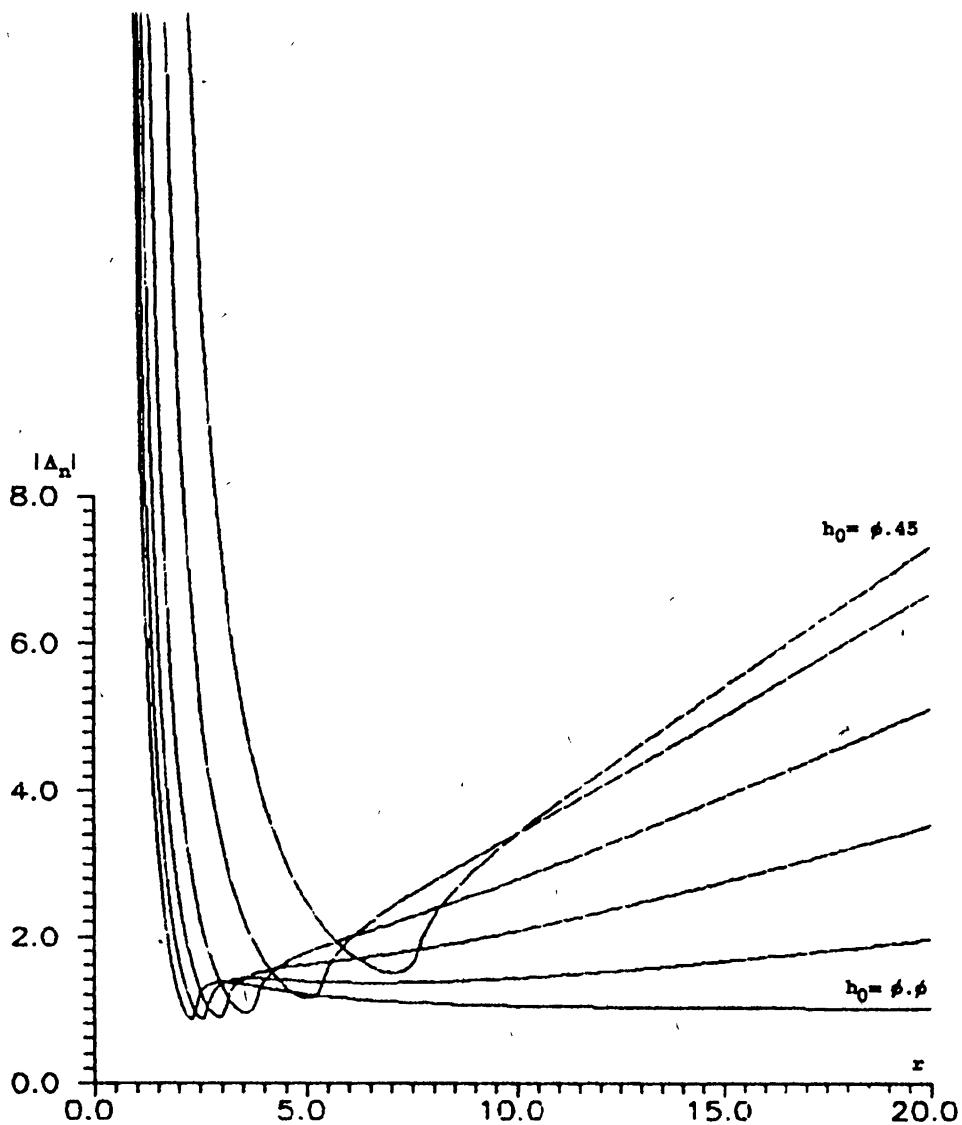


Рис. 1.

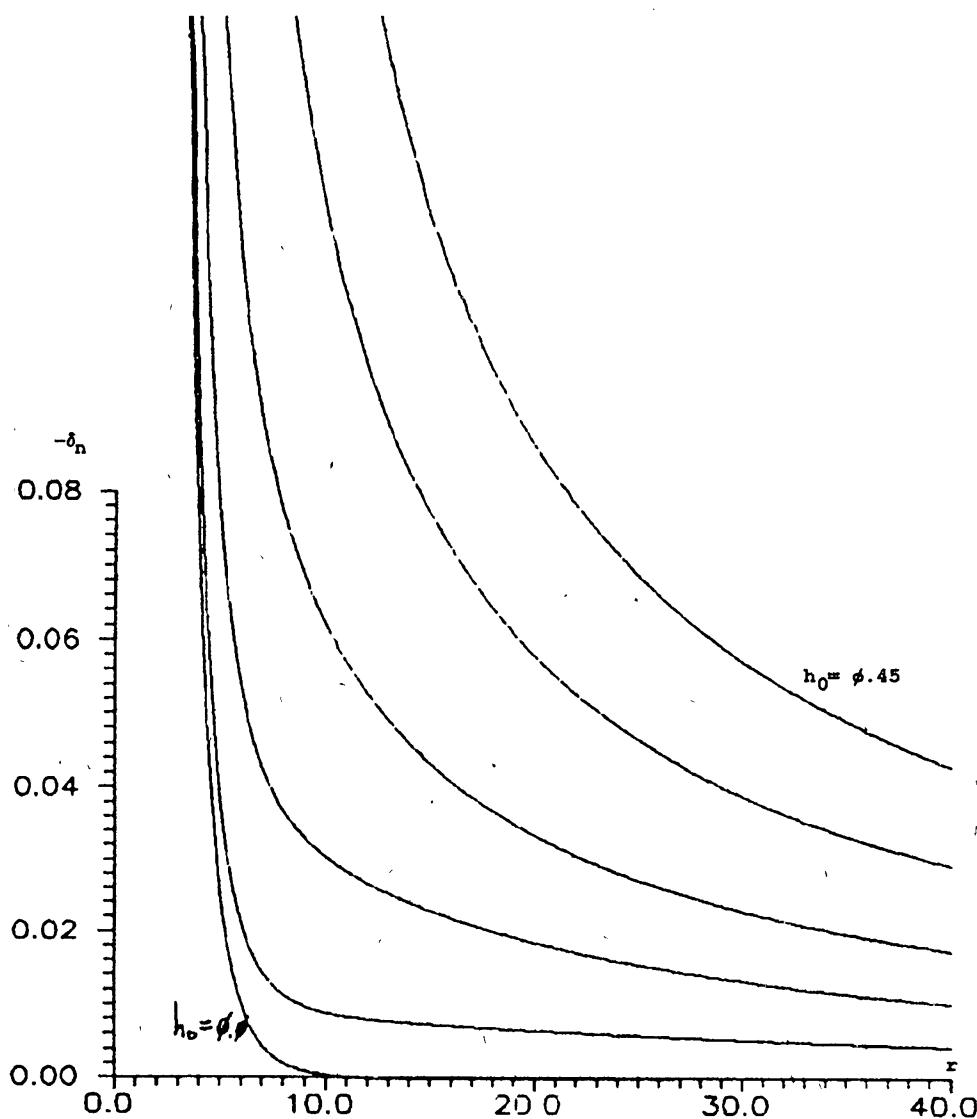


Рис. 2.

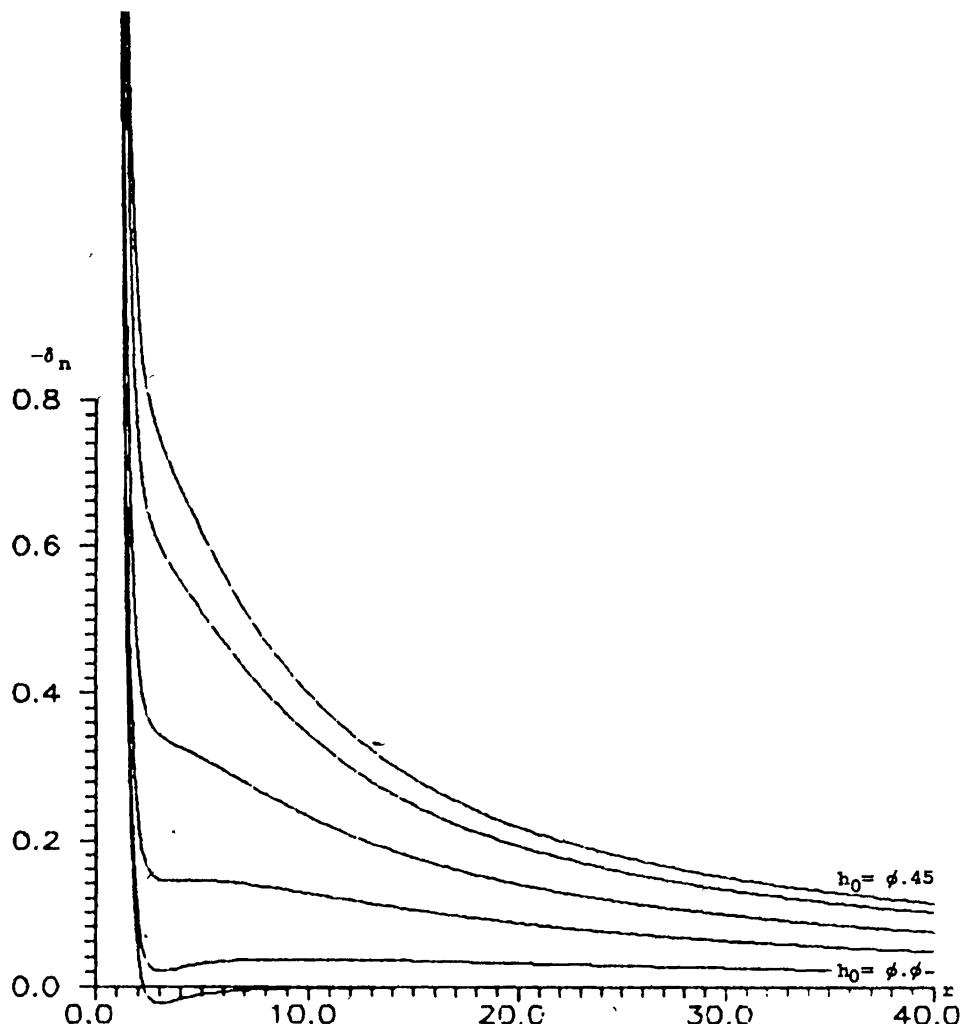


Рис. 3.

Была проведена проверка выражений (16) и (20) путем сравнения значений возмущений, полученных по приведенной теории, с результатами расчетов дисперсионных характеристик гофрированных волноводов по имеющейся программе, основанной на нахождении спектра интегрального уравнения (7). Характерные результаты этой проверки приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

$h_0$	$\epsilon$	$n = 1$				$n = 2$			
		$\mu_{-1}$	$\mu_1$	$k$	$\Delta k$	$\mu_{-2}$	$\mu_1$	$k$	$\Delta k$
0.0	0.00	5.702 0.1036	5.702 0.1036	240483	-1448000	1.054 0.5255	1.054 0.5255	240483	-398300
	0.01	0.0566 0.0010	0.0566 0.0010	240339	-144	0.0105 0.0053	0.0105 0.0053	240443	-40
	0.02	0.1108 0.0020	0.1108 0.0020	239921	-562	0.0210 0.0105	0.0210 0.0105	240324	-159
	0.10	0.3805 0.0082	0.3805 0.0082	231112	-9371	0.9650 0.0512	0.9650 0.0512	236765	-3718
	0.00	9.913 0.0999	3.886 0.1096	241313	-1755000	1.599 0.4635	0.6633 0.6326	241313	-423900
	0.01	0.0978 0.0010	0.0386 0.011	241140	-173	0.0160 0.0046	0.0066 0.0063	241271	-42
	0.02	0.1882 0.0019	0.0757 0.0022	240643	-670	0.0318 0.0093	0.0132 0.0127	241144	-169
	0.10	0.5459 0.0065	0.2729 0.0095	231253	-10060	0.1457 0.0428	0.0595 0.0646	237390	-3923
0.4	0.00	30.88 0.0983	2.870 0.1183	243787	-4308000	2.466 0.4259	0.3444 0.8759	243787	-514400
	0.01	0.2824 0.0009	0.0283 0.0012	243391	-396	0.0246 0.0043	0.0034 0.0088	243735	-52
	0.02	0.4705 0.0015	0.0548 0.0023	242452	-1335	0.0490 0.0085	0.0068 0.0176	243582	-205
	0.10	0.8123 0.0031	0.1977 0.0105	231492	-12295	0.2179 0.0359	0.0345 0.1042	239176	-4611

Таблица 1 содержит результаты сравнения возмущения цилиндрического волновода  $r = 1$  функциями  $r_e = \cos(nz)$  при  $n = 1$  и  $n = 2$ . Строки “ $\epsilon = 0$ ” содержат: значения функции  $\Delta_n$  (столбцы 1, 2, 5, 6), волновые числа  $k$  цилиндрического волновода (столбцы 3 и 7) и значения функции  $\delta_n$  (столбцы 4 и 8). В остальных строках приведены значения соответствующих гармоник плотности  $\beta_n$  (столбцы 1, 2, 5, 6), волновые числа  $k$  возмущенного волновода (столбцы 3 и 7) и возмущения волнового числа

$\Delta k$  (столбцы 4, 8). В столбцах 3, 4, 7, 8 содержатся указанные значения, умноженные на  $10^5$ . В столбцах 1, 2, 5, 6 сверху указаны действительные, а снизу — мнимые части комплексных чисел.

Таблица 2

$h_0$	$\epsilon$	$n = 1$				$n = 2$			
		$\mu_{-1}$	$\mu_1$	$k$	$\Delta k$	$\mu_{-2}$	$\mu_1$	$k$	$\Delta k$
0.0	0.0	0.4086	0.4086	48096	-632	0.9320	0.9320	48096	-62
		0.4385	0.4385			0.4656	0.4656		
	0.1	0.0407	0.0407	48090	-6	0.0919	0.0919	48096	0
		0.0437	0.0437			0.0463	0.0463		
	0.3	0.1190	0.1190	48038	-58	0.2517	0.2517	48088	-8
		0.1279	0.1279			0.1340	0.1340		
	1.0	0.3174	0.3174	47263	-833	0.4826	0.4826	47693	-403
		0.3363	0.3363			0.3386	0.3386		
0.2	0.0	0.2091	0.5844	52089	-1954	0.6655	1.189	52089	-1765
		0.7779	0.0606			1.263	-0.341		
	0.1	0.0208	0.0583	52070	-19	0.0652	0.1178	52072	-17
		0.0776	0.0060			0.1259	-0.034		
	0.3	0.0611	0.1721	51913	-176	0.1714	0.3323	51936	-153
		0.2290	0.0156			0.3689	-0.104		
	1.0	0.1699	0.4984	50094	-1995	0.2160	0.7964	50496	-1593
		0.6549	-0.017			1.036	-0.376		
0.4	0.0	0.2090	0.7468	62556	-8658	0.3864	1.440	62556	-6062
		0.5351	-0.330			2.043	-1.154		
	0.1	0.0204	0.0745	62470	-86	0.0378	0.1427	62496	-60
		0.0537	-0.033			0.2042	-0.116		
	0.3	0.0492	0.2187	61802	-754	0.1005	0.4038	62032	-524
		0.1665	-0.108			0.6091	-0.355		
	1.0	0.2308	0.5330	56028	-6528	0.2912	0.8763	57654	-4902
		0.8812	-0.605			1.992	-1.440		

Таблица 2 содержит результаты сравнения для  $r = 5$  с теми же функциями возмущения профиля. Способ размещения информации тот же, что и в таблице 1.

### 5. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Далее, основываясь на формуле (20), была решена задача о восстановлении профиля волновода, исходя из заданных точек зависимости волнового числа  $k$  от параметра Флоке  $h_0$ . Решение этой задачи состояло в минимизации целевой функции, равной сумме квадратов разностей между

заданными и вычисленными по формуле (20) значениями волнового числа, при условии, что все неизвестные (квадраты гармоник профиля) — неотрицательные числа. В таблице 3 приведены некоторые результаты этой задачи.

Таблица 3

Интервал <i>h</i>	Сетка	Число точек	<i>R</i> <sub>0</sub>	<i>R</i> <sub>1</sub>	<i>R</i> <sub>2</sub>	<i>ε</i>
0.0 – 0.475	H	28	4.99945	0.22567	0.22236	2.8 E – 6
			9.99920	0.28925	0.06967	2.1 E – 8
0.0 – 0.475	P	20	5.00005	0.22381	0.22708	2.4 E – 6
			9.99935	0.28844	0.07388	1.7 E – 8
0.0 – 0.25	H	15	5.00018	0.29906	0	1.6 E – 10
			10.0000	0.29849	0	1.5 E – 10
0.0 – 0.25	P	11	5.00019	0.29902	0	9.0 E – 11
			10.0000	0.29854	0	9.9 E – 11
0.25 – 0.475	H	14	4.98732	0.21229	0.27966	1.1 E – 6
			9.99265	0.28439	0.10133	8.2 E – 9
0.25 – 0.475	P	10	4.98541	0.21122	0.28509	1.0 E – 6
			9.99254	0.28445	0.10123	7.9 E – 9
0.2 – 0.3	H	13	5.00001	0.29963	0	4.8 E – 10
			9.99979	0.29898	0	1.3 E – 10
0.2 – 0.3	P	11	5.00010	0.29916	0	2.0 E – 10
			9.99974	0.29911	0	1.2 E – 10
0.2 – 0.3	P	6	5.00000	0.29964	0	2.5 E – 10
			9.99932	0.29990	0	2.5 E – 11
0.2 – 0.3	P	5	5.00001	0.29964	0	2.6 E – 10
			9.99921	0.29441	0	2.8 E – 11

Все вычисления проводились с учетом первых шести (включая нулевую) гармоник профиля. Вычисления проводились с абсолютной точностью  $10^{-5}$  для нулевой гармоники профиля.

Для проверки были выбраны следующие 28 значений параметра Флоке: 0.0, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.125, 0.15, 0.175, 0.2, 0.21, 0.22, 0.225, 0.23, 0.24, 0.25, 0.26, 0.27, 0.275, 0.28, 0.29, 0.3, 0.325, 0.35, 0.375, 0.4, 0.425, 0.45, 0.475.

Вычисления проводились для различных интервалов  $h_0$  и различных комбинаций из выбранных узлов.

В таблице 3 приведены результаты для профилей

$$R(z) = 5.0 + 0.3 \cos z,$$

и

$$R(z) = 10.0 + 0.3 \cos z.$$

В столбцах "Сетка" буква "Н" означает неравномерную (по всем имеющимся узлам), а "Р" — равномерную сетку.

В столбцах " $R_0$ ", " $R_1$ " и " $R_2$ " приведены полученные абсолютные значения гармоник профиля. При этом остальные ( $R_3 - R_5$ ) были равны нулю.

В столбцах " $\epsilon$ " приведены значения целевой функции.

Из таблиц видно, что в восстанавливаемом профиле нет накопления гармоник. Это говорит о достаточной регулярности обратной задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Релятивистская высокочастотная электроника / Материалы Всесоюзного семинара. — Горький, 1979.
2. Быков Н.М., Губанов В.П., Гунин А.В. и др. //Релятивистская высокочастотная электроника. — Горький: ИПФ АН СССР, 1988. Вып. 5. С. 101.
3. Белов В.Е., Родыгин Л.В., Фильченков С.Е., Юнаковский А.Д. //Изв. вузов. Радиофизика, 1988. Т. 31. № 2. С. 180.
4. Ковалев Н.Ф., Фильченков С.Е., Юнаковский А.Д. //Препринт N 268. — Горький: ИПФ АН СССР, 1990.
5. Функциональный анализ. СМБ. — М.: Наука, 1964. С. 67.
6. Рид М, Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. — М.: Мир, 1982. С. 14.
7. Копосова Е. В., Петелин М. И. //Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 32. № 2. С. 1178.

Институт прикладной физики  
РАН, Н. Новгород

Поступила в редакцию  
11 июня 1993 г.

## APPLICATION OF HARMONIC PERTURBATIONS TO THE CALCULATION OF PERIODICALLY-CORRUGATED WAVEGUIDES

*S. E. Fil'chenkov, A. D. Yunakovskij*

The harmonic perturbation of an infinite axially-symmetric periodically-corrugated waveguide is used for the calculation of its electrodynamic characteristics. The analysis is based on the method of Fredholm-type integral equations of the second kind. The problem is solved analytically for a cylindrical waveguide. The inverse problem solution to find waveguide's shape is based on these analytical results.

УДК 621.372.44

# МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ ИСТОЧНИКОВ НЧ ШУМА В НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКАХ

*B. M. Малышев, B. G. Усыченко*

Даны теоретическое обоснование и способ практической реализации импульсного метода определения числа взаимно независимых источников НЧ шума в нелинейных приборах. В основе метода лежит измерение коэффициента взаимной корреляции флуктуаций амплитуды двух периодических последовательностей импульсов тока с различными амплитудными значениями.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует необходимость в шумовых моделях приборов, в рамках которых давалось бы физическое обоснование и объяснение зависимостей спектральной интенсивности флуктуаций тока от приложенных напряжений. Практическая ценность шумовых моделей очевидна: для расчета флуктуаций в нелинейных радиоустройствах шумовые характеристики прибора так же необходимы, как ВАХ.

При разработке шумовой модели основные вопросы относятся к источникам НЧ шума: сколько их, где они геометрически локализованы, с какими параметрами прибора связаны, как меняются коэффициенты их модуляционного воздействия на ток при его изменении в широких пределах? Для получения адекватных ответов необходимы экспериментальные методы определения числа независимых источников шума и их спектральных характеристик. Используемые некоторыми исследователями специфические методы, например, люминесцентно-корреляционный [1] или сверхвысокочастотный [2], имеют ограниченное применение. В настоящей статье обсуждается достаточно универсальный метод, хорошо зарекомендовавший себя при разработке шумовой модели ДБШ [3].

## 1. ИСТОЧНИКИ ШУМА

Первичными источниками НЧ шума в полупроводниках являются флуктуации концентрации носителей заряда [4], порождаемые их взаимодействием с разнообразными структурными дефектами решетки, и,

возможно, флуктуации подвижности носителей [5]. В нелинейном приборе всегда можно выделить области, которые отличаются одна от другой электрофизическими характеристиками. Если размеры этих областей намного превышают длину дебаевского экранирования, то влияние каждой из них на ток может быть учтено в ВАХ определенным феноменологическим параметром. Например, при исследовании диодов [6] выделяют: область пространственного заряда, квазинейтральную область, боковую поверхность или краевую область. При этом в качестве феноменологических параметров выступают: высота барьера, сопротивление базы, сопротивление утечки. Первичные источники шума, локализующиеся в разных местах одной и той же области, будут практически одинаково модулировать ток, и индивидуальный вклад каждого из них трудноизмерим. Поэтому в шумовой модели часто используют вторичные источники шума, под которыми понимают флуктуации феноменологических параметров [6–8]. В общем случае ВАХ нелинейного двухполюсника может быть представлена в виде

$$i = i(U, \bar{x}), \quad (1)$$

где  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$  — вектор взаимно независимых параметров, флуктуации которых порождают шумы тока

$$\delta i = \sum_{j=1}^N a_j(i) \frac{\delta x_j}{x_j}. \quad (2)$$

Здесь  $a_j(i) = x_j \frac{\partial i}{\partial x_j}$  — коэффициент локального модуляционного воздействия флуктуаций параметра на ток. Считаем, что относительные флуктуации параметров  $\frac{\delta x_j}{x_j}$  не зависят от напряжения и тока. Тогда из (2) следует выражение для спектра токового шума

$$S(i, \Omega) = \sum_{j=1}^N a_j^2(i) S_j(\Omega), \quad (3)$$

где  $S_j(\Omega)$  — энергетический спектр флуктуаций  $\frac{\delta x_j}{x_j}$ .

## 2. КОЭФФИЦИЕНТ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

Рассмотрим свойства нормированного взаимного энергетического спектра — коэффициента корреляции — между флуктуациями тока  $\delta i$  при двух различных значениях  $U_1$  и  $U_2$ , которым соответствуют токи  $i_1$  и  $i_2$ .

В соответствии с определением [9], на основании (2), (3), коэффициент корреляции может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned}
 R(i_1, i_2, \Omega) &= \frac{S(i_1, i_2, \Omega)}{\sqrt{S(i_1, \Omega) S(i_2, \Omega)}} = \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^N a_j(i_1) a_j(i_2) S_j(\Omega)}{\sqrt{\sum_{j=1}^N a_j^2(i_1) S_j(\Omega) \sum_{j=1}^N a_j(i_2) S_j(\Omega)}}. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Здесь  $S(i_1)$ ,  $S(i_2)$  — энергетические спектры флуктуаций тока, измеренные при значениях тока  $i_1$  и  $i_2$ ;  $S(i_1, i_2)$  — взаимный энергетический спектр.

В соответствии с (4),  $R(i_1, i_2, \Omega)$  обладает следующими свойствами:

1.  $R(i_1, i_2) = R(i_2, i_1);$
2.  $R(i_1, i_1) = R(i_2, i_2) = 1;$
3. Если источник шума один, то  $R(i_1, i_2) = 1$  при любых значениях  $i_1$ ,  $i_2$ ;
4. Если источников несколько, а коэффициенты  $a_j$  пропорциональны друг другу, т.е.  $a_k(i) = m_{kl} a_l(i)$ , где  $m_{kl}$  — коэффициент пропорциональности, то  $R(i_1, i_2) = 1$  при любых значениях  $i_1$ ,  $i_2$ .
5. Если источников шума несколько, а модуляционные коэффициенты  $a_j(i)$  меняются от тока различным образом (см. рис. 1а), то  $R(i_1, i_2)$  будет спадать с ростом  $\Delta i = |i_1 - i_2|$ , переходя в плато в области, где преимущественный вклад дает один источник шума (см. рис. 1б).

Таким образом, по выявленным плато в измеренной зависимости  $R(i_1, i_2)$ , можно найти число независимых источников шума и определить диапазоны токов, в пределах которых действие каждого из них является определяющим. Идентификация же самих источников шума с флуктуациями конкретных феноменологических параметров возможна только при наличии шумовой модели. Например, таким образом.

Пусть построена теоретическая шумовая модель прибора, базирующаяся на  $k$  независимых источниках шума. Измеренная зависимость  $R(i_1, i_2)$  имеет  $m$  плато в избранном диапазоне токов  $i_1 - i_2$ . Если  $m > k$ , то модель требует доработки. Если  $m \leq k$ , то модель может быть верна, а несовпадение  $m$  и  $k$  может быть вызвано ограниченностью выбранного диапазона токов. В любом из этих случаев модель может быть проверена экспериментально. Одна из возможных процедур такова.

1. Поскольку в области плато превалирует один источник, то используя (3), можно оценить его интенсивность

$$S_j = S(i)/a_j^2(i), \quad (5)$$

где  $S(i)$  — спектральная интенсивность токового шума, измеренная в центре плато зависимости  $R(i_1, i_2)$ ;  $a_j(i)$  — теоретически рассчитанный модуляционный коэффициент. Расчет проводим для всех  $k$  источников, используемых в модели, и для токов  $i$  каждого из  $m$  плато. В результате получаем  $mk$  интенсивностей источников шума.

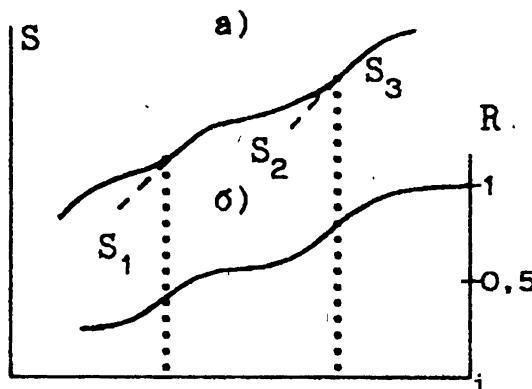


Рис. 1.

2. Составляя из этих  $mk$  вариантов любые  $m$  сочетаний различных источников шума, рассчитываем для них по формуле (4) теоретические зависимости  $R(i_1, i_2)$ , оперируя при этом модуляционными коэффициентами конкретных феноменологических параметров, и сравниваем расчетные кривые с измеренной. Зависимость, давшая соответствие с опытом, определит конкретные источники шума.

Однако, при постоянном смещении прибор не может находиться одновременно в двух состояниях, определяемых токами  $i_1$  и  $i_2$ . Это исключает возможность измерения  $S(i_1, i_2, \Omega)$  и определения  $R(i_1, i_2)$  в режиме стационарного питания и требует привлечения импульсных методов.

### 3. ОБОСНОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОГО МЕТОДА

Используем для питания двухполюсника периодическую последовательность П-образных импульсов напряжения  $U$ , имеющих на периоде  $T$  два импульса разной амплитуды (рис. 2). Импульсы тока прибора с амплитудами  $I_1$  и  $I_2$  образуют две периодические последовательности

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_1 \cdot f(t - nT), \\ i_2(t) &= I_2 \cdot f(t - \alpha - nT), \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2 \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau_{\eta}/2 \\ 0, & |t| > \tau_{\eta}/2 \end{cases}$$

— функция, описывающая форму импульсов;  $\tau_{\eta}$  — длительность импульсов;  $\alpha$  — задержка одного импульса относительно другого.

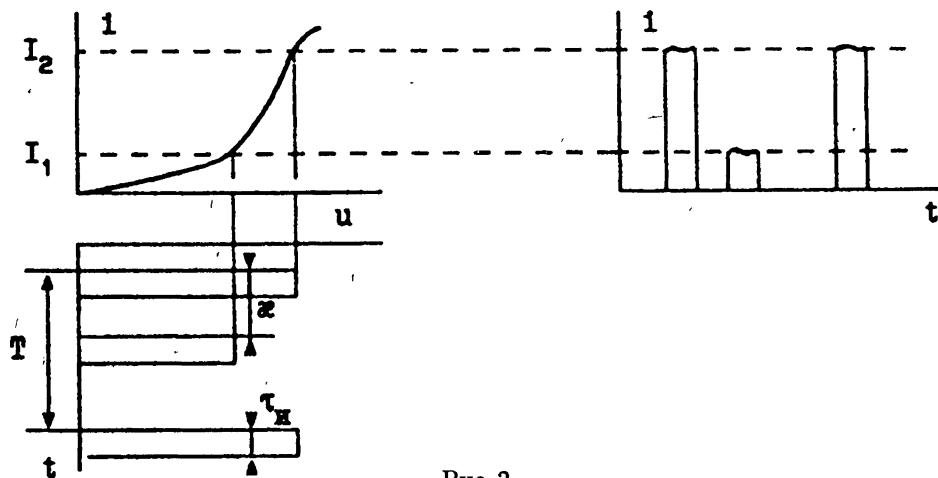


Рис. 2.

Источники шума модулируют амплитуды импульсов тока, и импульсные флуктуационные процессы в соответствии с (2) имеют вид:

$$\delta i_1(t) = \delta I_1 \cdot f(t - nT) = \left[ \sum_{j=1}^N a_j(I_1) \frac{\delta x_j}{x_j} \right] \cdot f(t - nT), \quad (7)$$

$$\delta i_2(t) = \delta I_2 \cdot f(t - \alpha - nT) = \left[ \sum_{j=1}^N a_j(I_2) \frac{\delta x_j}{x_j} \right] \cdot f(t - \alpha - nT).$$

Согласно определению [9], взаимный энергетический спектр случайных процессов  $y(t)$  и  $z(t)$

$$F_{y,z}(\Omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} m_1 \left\{ \frac{2}{T_1} \hat{y}_k(j\Omega) \hat{z}_k^*(j\Omega) \right\},$$

где  $\hat{y}_k(j\Omega)$  и  $\hat{z}_k^*(j\Omega)$  — Фурье-компоненты усеченные на периоде  $T_1$   $k$ -х реализаций  $\hat{y}_k(t)$  и  $\hat{z}_k(t)$  случайных процессов  $y(t)$  и  $z(t)$ ;  $m_1$  — первый момент — среднее значение по всему ансамблю реализаций. Используя эту формулу, найдем взаимный энергетический спектр процессов (7)

$$F(I_1, I_2, \Omega) = \frac{I_1 I_2}{Q^2} [S_{\xi\eta}(\Omega) + \Delta S_{\xi\eta}(\Omega)], \quad (8)$$

где  $Q = T/\tau_{\text{в}}$ ;  $\xi = \frac{\delta I_1}{I_1}$ ,  $\eta = \frac{\delta I_2}{I_2}$  — относительные флуктуации амплитуд импульсов тока,  $S_{\xi\eta}$  — их взаимный энергетический спектр,

$$\begin{aligned} \Delta S_{\xi\eta}(\Omega) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2} [\exp(jn\omega_1 \alpha) S_{\xi\eta}(\Omega - n\omega_1) + \exp(-jn\omega_1 \alpha) S_{\xi\eta}(\Omega + n\omega_1)] \end{aligned} \quad (9)$$

— суммарный вклад комбинационных составляющих шума. Здесь  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ,  $\psi = \frac{n\pi}{Q}$ . Если спектр  $S_{\xi\eta}(\Omega)$  финитный или нарастающий при уменьшении  $\Omega$ , например,  $S_{\xi\eta} \sim \Omega^{-1}$ , то на достаточно низких частотах  $\Delta S_{\xi\eta}(\Omega)$  стремится к нулю.

Спектр  $S(i_1, i_2, \Omega)$ , необходимый для расчета коэффициента корреляции (4), связан со спектром  $S_{\xi\eta}(\Omega)$  соотношением

$$S(i_1, i_2) = I_1 I_2 S_{\xi\eta} = Q^2 F(I_1, I_2) - I_1 I_2 \Delta S_{\xi\eta}. \quad (10)$$

Отсюда видно, что при  $\Delta S_{\xi\eta} \rightarrow 0$  его можно найти по измеренному спектру  $F(I_1, I_2)$  из равенства  $S(i_1, i_2) = Q^2 F(I_1, I_2)$  с ошибкой  $\Delta S(i_1, i_2) = -I_1 I_2 \Delta S_{\xi\eta}$ .

#### 4. ПОГРЕШНОСТИ

Относительная погрешность определения коэффициента корреляции

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta S(i_1, i_2)}{S(i_1, i_2)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta S(i_1)}{S(i_1)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta S(i_2)}{S(i_2)}\right)^2} \quad (11)$$

выражается через относительные ошибки входящих в (4) измеряемых спектральных величин. Среднеквадратическая погрешность измерения энергетических спектров  $S(i_1)$ ,  $S(i_2)$  на постоянном токе, например, аналоговым анализатором спектра с полосой пропускания  $\Delta f$  и временем осреднения  $\tau_0$ , при доверительной вероятности 68% рассчитывается по известной [10] формуле

$$\frac{\delta S(i)}{S(i)} = \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\tau_0 \Delta f}}. \quad (12)$$

Относительная ошибка определения взаимного спектра

$$\frac{\Delta S(i_1, i_2)}{S(i_1, i_2)} = \frac{\Delta S_{\xi\eta}}{S_{\xi\eta}} \quad (13)$$

находится сложнее. Оценим ее по максимуму.

При достаточно низких частотах анализа  $\Omega \ll \omega_1$  можно положить  $S_{\xi\eta}(\Omega - n\omega_1) = S_{\xi\eta}(\Omega + n\omega_1)$ . Применение неравенства Коши-Шварца [11]  $|S_{\xi\eta}| \leq \sqrt{S_\xi S_\eta}$  преобразует (9) в формулу

$$|\Delta S_{\xi\eta}| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2} \sqrt{S_\xi(\Omega + n\omega_1) S_\eta(\Omega + n\omega_1)} \cdot |\cos(n\omega_1 \infty)|,$$

которая с помощью неравенства Коши-Буняковского [11]  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2}$ , где  $a_n$  и  $b_n$  — любые комплексные числа, преобразуется к виду

$$|\Delta S_{\xi\eta}| \leq 2 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2} S_\xi(\Omega + n\omega_1)} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2} S_\eta(\Omega + n\omega_1)}.$$

Используя выражения для  $F(I_1, \Omega)$  и  $F(I_2, \Omega)$ , вытекающие из (8) при  $\infty = 0$ , перепишем последнее неравенство в форме

$$|\Delta S_{\xi\eta}| \leq 2 \sqrt{Q^2 F(I_1) - I_1^2 S(i_1)} \sqrt{Q^2 F(I_2) - I_2^2 S(i_2)}$$

и найдем верхнюю оценку относительной ошибки

$$\frac{\Delta S(i_1, i_2)}{S(i_1, i_2)} \leq \frac{2}{Q^2 F(I_1, I_2)} \sqrt{Q^2 F(I_1)(1 + \varepsilon) - I_1^2 S(i_1)(1 - \varepsilon)} \times \quad (14)$$

$$\times \sqrt{Q^2 F(I_2)(1 + \varepsilon) - I_2^2 S(i_2)(1 - \varepsilon)}.$$

Здесь учтено, что каждое из слагаемых под радикалом измеряется с флюктуационной погрешностью  $\varepsilon \ll 1$ . Если предварительно установлено, что  $S_{\xi\eta} \sim \Omega^{-\gamma}$ , то относительную ошибку (14) можно сделать достаточно малой, проводя измерения на частотах  $\Omega \ll \omega_1/2$ , а ее точное значение можно найти, воспользовавшись формулами или графиками, приведенными в работе [13].

На основании вышеизложенного, процедура измерения  $R(i_1, i_2)$  выглядит следующим образом:

— измеряем энергетические спектры токовых шумов  $S(i_1)$  и  $S(i_2)$  при двух значениях стационарного тока  $i_1$  и  $i_2$ ;

— переходя на импульсное питание, создаем импульсы тока с амплитудами  $I_1 = i_1$  и  $I_2 = i_2$ , измеряем взаимный энергетический спектр  $F(I_1, I_2)$  и спектры  $F(I_1)$ ,  $F(I_2)$ ;

— в качестве оценки  $S(i_1, i_2)$  принимаем значение  $Q^2 F(I_1, I_2)$ , рассчитываем  $R(i_1, i_2)$  по формуле (4), а погрешность оцениваем по формуле (11) с использованием (12), (13).

## 5. РЕАЛИЗАЦИЯ

Был разработан двухканальный корреляционный измеритель флюктуаций амплитуды импульсов, в котором использовался метод выборки [13]. Функциональная схема измерителя изображена на рис. 3.

Каждый измерительный канал содержит: малошумящий импульсный усилитель (МШИУ), фильтр низкой частоты (ФНЧ), устройство выборки и запоминания отсчетов (УВЗ). УВЗ формирует выборку амплитуды импульсов и хранит отсчет до прихода следующего импульса. Работа УВЗ управляется коммутатором. В течение паузы УВЗ заперт, и собственные шумы малошумящих усилителей не проходят на выход. Это исключает их влияние на чувствительность измерителя. Однако, применение УВЗ, в котором считывание отсчета происходит в течение короткого промежутка времени, приводит к тому, что высокочастотные флюктуации амплитуды, составляющие которых лежат на частотах  $f > 1/T$ , переносятся в область низких частот с весом, почти равным единице, в то время как в формуле (8) их вклад в  $\Delta S_{\xi\eta}(\Omega)$  пропорционален  $\sin^2 \psi / \psi^2$ . Чтобы уменьшить ошибку наложения, создаваемую этим эффектом, перед УВЗ вводится корректирующий ФНЧ [14].

Для измерения взаимного энергетического спектра необходимо обеспечить условия, при которых каждый канал пропускал бы флюктуации импульсов только одной амплитуды  $I_1$  или  $I_2$ . С этой целью каждый МШИУ стробируется вспомогательными импульсами, поступающими от устройств синхронизации (УС1 и УС2), запускаемых задающими импульсными генераторами ИГ1 и ИГ2. Полученные на выходе УВЗ каждого канала низкочастотные флюктуации поступают на вход коррелометра  $\sum / \Delta$  суммарно-разностного типа [15], позволяющего измерять их взаимный спектр с помощью анализатора спектра АС.

Для формирования импульсного процесса, изображенного на рис. 2, на диод, включенный последовательно с измерительным сопротивлением  $R_n$ , подаются импульсы от синхронизированных импульсных генераторов ИГ1 и ИГ2. Для уменьшения их собственных флюктуаций желательно использовать малошумящие ограничители-модуляторы (ОМ1 и ОМ2), с помощью которых можно также откалибровать измеритель, вводя амплитудную модуляцию от звуковых генераторов ЗГ1 и ЗГ2.

Созданный нами измеритель работает как в импульсном, так и в непрерывном режимах. При измерении на постоянном токе с ограничителями-модуляторами ОМ1 и ОМ2 на обследуемый диод ( $D$ ) подается постоянное смещение, МШИУ переводятся в режим усиления непрерывного сигнала, УВЗ полностью открываются. В экспериментах использовались импульсы длительностью  $\tau = 1-5$  мксек и частотой следования 10–50 кГц. Наивысшая частота анализа исследуемых шумов не превышала 2 кГц. Для проверки правильности восстановления  $S(i_1, i_2)$  по  $F(I_1, I_2)$  на модуля-

торы ОМ1 и ОМ2 от генераторов равномерного шума через формирующуюшие  $RC$ -цепи, обеспечивающие финитность спектров, подавались шумовые модулирующие напряжения. Результаты проверки подтвердили правильность теоретических выводов. Измеренные шумовые характеристики конкретного диода (ДБШ) приведены в [3].

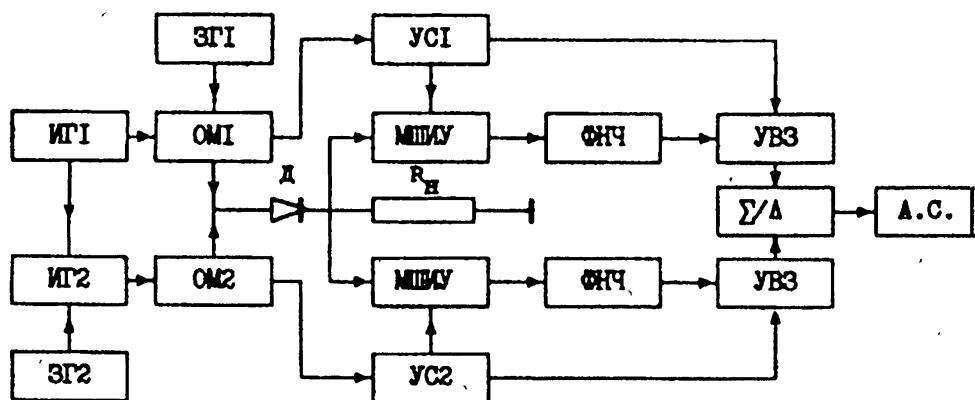


Рис. 3.

В заключение отметим, что импульсный метод пригоден для исследования не только двухполюсников. Кроме того, он существенно расширяет возможности эксперимента. Например, можно осуществить коммутацию таким образом, чтобы через импульс прибор работал в режиме ВЧ. Тогда, используя детектор, можно изучать корреляцию между флюктуациями колебания и шумами квазистатического тока. Помимо этого, полезными могут оказаться опыты с импульсами разной полярности.

## ЛИТЕРАТУРА

- Лукьянчикова Н. Б. Флуктуационные явления в полупроводниках и полупроводниковых приборах. — М.: Радио и связь, 1990. 296 с.
- Мещеряков А. В. // Электронная техника. Серия 1. Электроника СВЧ, 1983. N 4. С. 25.
- Малышев В. М., Усыченко В. Г. // Изв. вузов. Радиофизика, 1992. Т. 35. N 5. С. 407.
- Левинштейн М. Е., Румянцев С. Л. // ФТП, 1983. Т. 17. N 10. С. 1830.
- Hooge F. N., Rleinpenning T. G., and Vandamme L. K. // Reports on progress in physics, 1981. V. 44. N 5. P. 479.
- Якимов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1984. Т. 27. N 1. С. 120.
- Hsu S. T. // IEEE, 1971. V. ED-18. N 10. P. 882.
- Wall E. L. // Solid-State Electron, 1976. V. 19. N 5. P. 389.

9. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. — М.: Сов. радио, 1974. 552 с.
10. Ван-дер-Зил А. Флуктуации в радиотехнике и физике. — М.: Госэнергоиздат, 1958. 296 с.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Мир, 1978. 832 с.
12. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. С. 23.
13. Емельянов А. Ф., Усыченко В. Г. // Электронная техника. Серия 1. Электроника СВЧ, 1977. № 10. С. 33.
14. Емельянов А. Ф., Усыченко В. Г. // Электронная техника. Серия 1. Электроника СВЧ, 1980. № 1. С. 69.
15. Корнилов С. А. Спектрально-корреляционные методы измерения флуктуационной нестабильности непрерывных СВЧ-колебаний. Обзоры по электронной технике Серия 1. Электроника СВЧ. — М.: ЦНИИ "Электроника", 1977. 57 с.

Санкт-Петербургский  
государственный технический  
университет

Поступила в редакцию  
21 апреля 1993 г.

**THE METHOD TO DETERMINE THE NUMBER OF UNCORRELATED  
LOW FREQUENCY NOISE SOURCES IN NONLINEAR TWO-POLE  
NETWORKS**

*V. M. Malyshev, V. G. Usyuchenko*

It has been given the theoretical ground and the practical way of the realization of the pulsed method to determine the number of uncorrelated low-frequency noise sources in nonlinear networks. The method is based on measuring the cross-correlation factor of amplitude fluctuations of two sets of current periodic pulses.