

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XXXVIII N 3-4

Нижегород

1995

С о д е р ж а н и е

Труды II Международной школы-семинара
“Динамические и стохастические волновые явления”

- Сутин А. М., Назаров В. Е. Нелинейные акустические методы диагностики трещин.....169
- Есипов И. Б., Папшин А. Е., Овчинников О. Б. Распространение акустического импульса конечной амплитуды в гранулированной среде.....188
- Беляков А. А., Мальцев А. А. Адаптивная система активного гашения акустического поля с дополнительным каналом идентификации.....196
- Казарова А. Ю., Любавин Л. Я., **Нечаев А. Г.** Интерференционный алгоритм диагностики морского дна.....202
- Реутов В. П., Троицкая Ю. И. Нелинейный инкремент ветровых волн на воде и их возбуждение вблизи порога устойчивости.....206
- Реутов В. П., Рыбушкина Г. В. Мягкое и жесткое возбуждение волн на упругом покрытии в турбулентном пограничном слое.....211
- Широков Ю. В., Казаков Л. Н. Нелинейная динамика дискретных связанных систем фазовой синхронизации.....217
- Аурелл Э., Вертгейм И. И. Спектральные свойства невязких решений уравнения Бюргерса со случайными начальными условиями.....225
- Демиховский В. Я., Каменев Д. И., Luna-Acosta G. A. Квантовый циклотронный резонанс в вырожденной системе. квазиэнергетические состояния.....232

Кузнецов А. С., Шалфеев В. Д. О формировании структур в решетке связанных бистабильных активных элементов	241
Кочетов А. В., Литвак А. Г., Миронов В. А., Шер Э. М. Возбуждение нелинейных поверхностных мод волновыми пучками	246
Малахов А. Н., Панкратов А. Л. Точное значение времени релаксации динамической системы с шумом, описываемой произвольным симметричным потенциальным профилем	256
Максимов И. Л., Шалаев И. Ю. Модифицированный метод Бэклунда в теории нелинейных волн в сверхпроводниках	262
Анфиногентов В. Г. Нелинейная динамика электронного потока с виртуальным катодом в ограниченном пространстве дрейфа	268
Матросов В. В., Шалфеева М. В. О влиянии связей на нелинейную динамику двух каскадно-связанных управляемых генераторов	275
Богомолов Я. Л., Гинзбург Н. С., Голубятникова Е. Р. Стохастическое торможение частиц в поле некогерентной накачки или в случайном магнитостатическом поле и эффективное усиление монохроматического электромагнитного излучения	280
Курин В. В., Юлин А. В. Стимулированное излучение электромагнитных волн джозефсоновскими вихрями	287
Гинзбург Н. С., Зотова И. В., Сергеев А. С. Сверхизлучение в ансамблях классических электронов-осцилляторов в условиях группового синхронизма	292
Лапин В. Г. О незеркальном "полном внутреннем отражении" мощных электромагнитных волн	298
Антипов О. Л., Беллев С. И., Кужелев А. С. Ориентационное самообращение волнового фронта светового пучка в слое нематического жидкого кристалла с взаимной обратной связью	304
Лехтинен Н. Г., Марков Г. А., Файнштейн С. М. Возбуждение ионосферного альфвеновского резонатора плазменно-волновым разрядом	312

Миловский Н. Д., Федяев О. Э., Шешин В. Ю. Взаимодействие встречных произвольно поляризованных волн в резонансной среде из хаотически ориентированных молекул.....	318
Ведерко А. В., Марченко В. Ф., Сухоруков А. П. Экспериментальное наблюдение медленных и неподвижных солитонов.....	325
Комиссарова М. В., Сухоруков А. П. Бистабильность оптических солитонов, формирующихся при нелинейных взаимодействиях волн с кратными частотами.....	331
Кустов Л. М., Лебедев В. В., Мартыянов А. И. Экспериментальное исследование пространственного распределения интенсивности кавитационных процессов.....	337
Марков Г. А., Умнов А. Л. Экспериментальное исследование явления взаимолокализации поля и плазмы на антенне, работающей в режиме коронообразования.....	342
Антонец В. А., Клочков Б. Н., Тухватулин Р. Т., Шувалева В. Н. Неоднородное распределение эритроцитов в слое суспензии при действии вибрации.....	349
Антонец В. А., Клочков Б. Н., Ковалева Э. П. Виброакустические процессы и структурные перестройки в мышечной ткани.....	357

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С.Я.БРАУДЕ, А.В.ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В.Л.ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л.М.ЕРУХИМОВ (зам.главного редактора), В.В.ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В.А.ЗВЕРЕВ, Ю.Л.КЛИМОНТОВИЧ, А.Н.КОНДРАТЕНКО, Ю.В.КРАВЦОВ, В.Н.КРАСИЛЬНИКОВ, А.Н.МАЛАХОВ, В.В.НИКОЛЬСКИЙ, В.Ю.ПЕТРУНЬКИН, М.И.РАБИНОВИЧ, А.И.САИЧЕВ, А.А.СЕМЕНОВ, С.А.ТАГЕР, В.И.ТАЛАНОВ, В.В.ТАМОЙКИН, Д.И.ТРУБЕЦКОВ, В.И.ТУРЧИН, В.П.УРЯДОВ, Г.И.ФРЕЙДМАН, А.В.ЯКИМОВ

· Ответственный секретарь редакции О.А.ШЕЙНЕР

Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.
Усл.печ.л. 18, 03. Усл.кр.-отг. 18, 03. Уч.-изд.л. 18, 34
Тираж 440 экз. Заказ 1117 Цена 3000 р.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,
ул.Большая Печерская, 25,
Научно-исследовательский радиофизический институт,
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика".
Телефон 36-01-71, e-mail rfj@nirfi.nnov.ru

Отпечатано с готового набора

Межвузовская типография
при Нижегородском государственном университете
603600, Нижний Новгород, ул.Большая Покровская, 37

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДИАГНОСТИКИ ТРЕЩИН

А. М. Сутин, В. Е. Назаров

Дается краткий обзор экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов, обусловленных наличием трещин в твердотельных средах, и обсуждаются возможности использования этих эффектов для диагностики трещин. Предложены физические модели одиночной трещины и трещиноватой среды, в рамках которых объясняются наблюдаемые явления.

1. ВВЕДЕНИЕ

Акустические методы неразрушающего контроля широко используются в различных областях техники [1-3], строительстве [4], медицине [5] и т. д. Подобные методы часто применяются и в повседневной жизни; так по звучанию изделий из хрусталя и фарфора определяется наличие в них полостей и трещин, по шуму двигателя автомобиля можно диагностировать его неисправность и т. д. Масштабы использования акустических методов простираются от тысяч км при томографии океана [6] и прозвучивании Земли [7], до микрон при ультразвуковой микроскопии [8]. В настоящее время практически все методы акустического контроля основаны на принципах линейной акустики, т. е. происходит излучение и прием волн одних и тех же частот (взаимодействие волн и генерация комбинационных частот во внимание не принимаются). Действительно, нелинейные эффекты при взаимодействии акустических волн довольно малы, поэтому уровни вновь возникающих сигналов не превышают долей процента, а в большинстве случаев значительно меньше. Однако для диагностических целей важно то, что эти сигналы определяются совсем другими, а именно нелинейными акустическими параметрами, которые, как правило, более чувствительны к наличию дефектов и изменениям структуры среды, чем линейные (скорость звука, коэффициенты поглощения и рассеяния). Что же касается низкого уровня нелинейно рассеянных волн, то их выделение на фоне значительно более интенсивных волн накачки легко осуществляется путем частотной фильтрации.

Настоящая работа представляет собой краткий обзор теоретических и экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов

в твердотельных средах, содержащих трещины, и направлена на демонстрацию возможностей нелинейных методов акустической диагностики подобных дефектов.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА УПРУГОМ КОНТАКТЕ

2.1. Физическая природа искажений волны при ее прохождении через упругий контакт

Понять физическую природу нелинейности, связанной с трещиной, проще всего при рассмотрении прохождения звука через упругий контакт двух твердых поверхностей. Сначала качественно рассмотрим простейший нелинейный эффект, заключающийся в модуляции звуковых волн вибрациями. Пусть продольная высокочастотная звуковая волна проходит через упругий контакт двух шероховатых поверхностей, который подвержен воздействию низкочастотного внешнего напряжения. В зависимости от фазы низкочастотного колебания, площадь контакта шероховатых поверхностей изменяется, а именно: в фазе сжатия площадь контакта поверхностей возрастает по сравнению с начальной, а в фазе разрежения — уменьшается. В результате амплитуды прошедшей и отраженной акустических волн будут также меняться в соответствии с изменением площади контактирующих поверхностей. Таким образом, прошедшая и отраженная волны приобретут амплитудную модуляцию с частотой внешнего воздействия. Подобный эффект использовался нами для контроля усталости металлов и обнаружения в нем трещин [9].

Аналогичным образом может быть качественно объяснено и искажение монохроматической волны, проходящей через такой контакт. В этом случае изменение площади контакта создается уже самой волной. Это приводит к тому, что амплитуда прошедшей волны в фазе сжатия становится больше, чем в фазе разрежения, а в ее спектре появляются составляющие на частотах, кратных частоте исходной, монохроматической волны. Такой эффект наблюдался экспериментально в работе [10], где приводится его теоретическое описание для простой модели контакта в виде системы пружинок разной длины.

2.2. Математическая модель трещины

Рассмотрим теперь модель трещины и найдем зависимости расстояния между поверхностями трещины и ее объема от действующего в среде напряжения.

Будем считать, что трещина — узкий разрез в твердом теле изменяет свой объем под действием только нормального к ней напряжения σ_{nn} , а

изменение ее объема ΔV , связано с этим напряжением нелинейной зависимостью $\Delta V = F(\sigma_{nn}/E)$, где E — модуль Юнга твердого тела. Эту зависимость при относительно малых напряжениях $\sigma \ll E$ можно разложить в ряд Тейлора с точностью до квадратичного слагаемого:

$$\Delta V = \alpha (\sigma_{nn}/E) + \frac{\beta}{2} (\sigma_{nn}/E)^2, \quad (1)$$

где α и β — линейный и нелинейный коэффициенты упругости трещины. Такого разложения достаточно для описания квадратичных нелинейных эффектов, преобладающих в твердом теле. (Для описания нелинейных эффектов более высоких порядков необходимо учитывать следующие члены ряда, но это выходит за рамки настоящей статьи.)

Для определения коэффициентов упругости α и β рассмотрим модель трещины, представляющую собой упругий контакт плоских шероховатых поверхностей [11], ограниченных окружностью радиуса R . Отметим, что подобными шероховатыми свойствами обладают поверхности реальных трещин в различных твердых телах (горных породах, металлах и т.д.) [12, 13]. Здесь мы будем считать, что поверхности трещин прижаты друг к другу напряжением σ_0 , обусловленным внутренними напряжениями в твердом теле, возникающими вблизи границы раскрытой трещины.

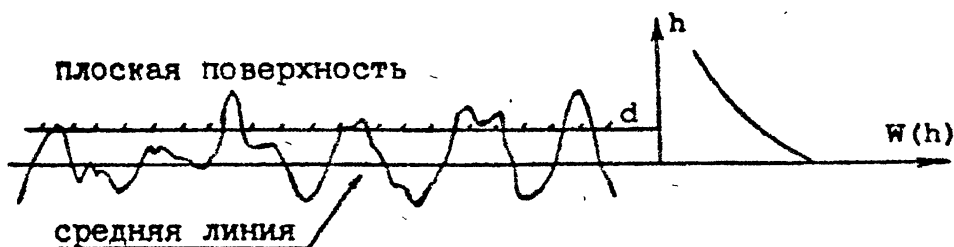


Рис. 1.

Как известно [11], при контакте упругих тел без трения, контактные напряжения зависят только от относительного профиля поверхностей. Таким образом, при расчете упругих свойств контакт в трещине может быть заменен контактом плоской жесткой поверхности с эквивалентным телом, имеющим начальный профиль, соответствующий зазору между недеформированными шероховатыми поверхностями (рис. 1). Для нахождения сил упругости, обусловленных сжатием неровностей, используем результаты анализа, выполненного в работе [11]. Эквивалентная шероховатая поверхность характеризуется функцией распределения $W(h)$ высот h вершин, отсчитываемых от, так называемой, средней линии (рис. 2), так что $W(h)dh$ — количество вершин с высотами от h до $h + dh$, приходящихся на единицу площади поверхности трещины. Рассмотрим контакт, в котором под действием напряжения σ расстояние от средней линии до

жесткой поверхности становится равным d . При этом неровности с высотами вершин, первоначально превышающими d , становятся плоскими и их высота уменьшается на величину $\delta = h - d$. Сила f , требуемая для сжатия каждой неровности зависит от смещения δ и вида неровности. Относительно неровностей поверхностей трещин будем предполагать, что вблизи их вершин они имеют форму:

- части шаровидной поверхности с радиусом a ;
- тупоугольных конуса или клина, с углом раствора $2\phi \simeq \pi$.

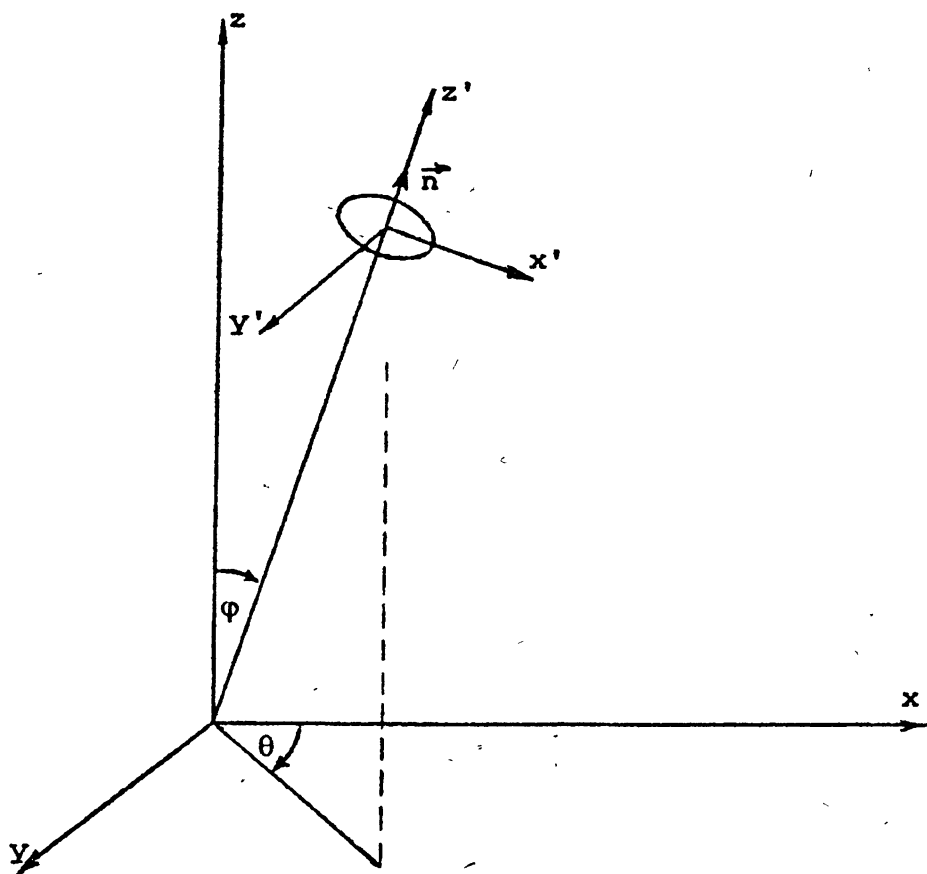


Рис. 2.

Сила f , требуемая для сжатия одной вершины, определяется следующими выражениями [11]

- для шара:

$$f = (4/3)2^{-1/2}\delta^{3/2}a^{1/2}E^*;$$

- для конуса:

$$f = \pi \delta^2 E^* \operatorname{tg} \phi; \quad (2)$$

- для клина:

$$f = \delta L E^*;$$

где $E^* = E/2(1 - \nu^2)$, L — длина клина, ν — коэффициент Пуассона твердого тела.

Для нахождения зависимости напряжения $\sigma_1(d)$, создаваемого сжатием вершин, от смещения δ надо просуммировать силы для всех неровностей, находящихся в контакте, т. е. для тех неровностей, которые имеют высоту $h \geq d$:

$$\sigma_1(d) = - \int_d^{\infty} f(h-d) W(h) dh. \quad (3)$$

Этот интеграл может быть вычислен аналитически только для некоторых видов функции распределения вершин по высотам. В частности, при экспоненциальном распределении вершин ($W(h) = n(\pi R^2 h_s)^{-1} \exp(-h/h_s)$, n — количество вершин неровностей, находящихся на номинальной площади поверхности трещины, $h_s = 2^{1/2} h_0$, h_0 — эффективная высота неровностей каждой шероховатой поверхности трещины) из (3) имеем:

$$\sigma_1(d) = - n E_1 \exp(-d/h_s), \quad (4)$$

где для неровностей

- с шаровидными вершинами:

$$E_1 = (2\pi)^{-1/2} h_s^{3/2} a^{1/2} R^{-2} E^*;$$

- с коническими вершинами:

$$E_1 = h_s^2 R^{-2} E^* \operatorname{tg} \phi;$$

- с клиновидными вершинами:

$$E_1 = \pi^{-1} h_s L R^{-2} E^*.$$

Выражение (4) определяет напряжение, обусловленное сжатием неровностей. Для трещины, находящейся в равновесии, это напряжение будет скомпенсировано другим статическим сжимающим напряжением σ_0 , обусловленным внутренними напряжениями в твердом теле вблизи границы раскрытой трещины. Будем считать, что это напряжение равно взятому с обратным знаком напряжению, необходимому для раскрытия круглой

трещины с идеально ровными поверхностями до объема, равного объему трещины с шероховатыми поверхностями. Нормальные смещения $U_0(r)$ точек поверхности круглой трещины с ровными поверхностями под действием однородного напряжения σ_0 описываются выражением [14]:

$$U_0(r) = 4(1 - \nu^2) [R^2 - r^2]^{1/2} \sigma_0 / \pi E, \quad (5)$$

а ее объем равен:

$$V_0 = 16(1 - \nu^2) R^3 \sigma_0 / 3E, \quad (6)$$

где r — радиальная координата в плоскости трещины. Объем трещины в нашей модели определяется выражением:

$$V_1 = \pi R^2 d_0, \quad (7)$$

где d_0 — расстояние между средними линиями шероховатых поверхностей. Приравнивая эти объемы получаем связь напряжения σ_0 с расстоянием d_0 между поверхностями рассматриваемой трещины:

$$\sigma_0(d_0) = 3\pi E d_0 / 16R(1 - \nu^2). \quad (8)$$

Допущения, при которых найдено напряжение σ_0 довольно грубое, поскольку в нашей модели неровные поверхности трещины параллельны друг другу, а при раскрытии первоначально плоской трещины ее поверхности являются эллиптическими. Однако разумно предположить, что внутренние напряжения в твердом теле, сжимающие трещину, дают приблизительно одинаковое сжатие в обоих случаях.

В состоянии равновесия напряжение σ_0 компенсируется упругостью контакта ее шероховатых поверхностей σ_1 , определяемой уравнением (4), т. е.:

$$3\pi E d_0 / 16R(1 - \nu^2) = nE_1 \exp(-d_0/h_s). \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) определяют сжимающее напряжение σ_0 и статическое расстояние d_0 между поверхностями рассматриваемого контакта.

При падении на трещину акустической волны напряжение $\bar{\sigma}$ в этой волне будет приводить к изменению расстояния между ее поверхностями на величину \bar{d} таким образом, что будет выполняться соотношение:

$$\bar{\sigma} = \sigma_0(d_0 + \bar{d}) - \sigma_1(d_0 + \bar{d}). \quad (10)$$

Полагая в этом уравнении $\bar{\sigma} \ll \sigma_0$, $\bar{d} \ll d_0$ и, подставляя выражения (4), (8), получаем зависимости для изменений расстояния \bar{d} между поверхностями трещины и ее объема ΔV от приложенного напряжения:

$$\bar{d} = h_s [(\bar{\sigma}/\sigma_0)(1 + h_s/d_0)^{-1} + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}/\sigma_0)^2(1 + h_s/d_0)^{-3}], \quad (11)$$

$$\Delta V = \pi R^2 \bar{d}. \quad (12)$$

Из сравнения уравнений (1), (12) находим выражения для линейного и нелинейного коэффициентов упругости трещины:

$$\alpha = \pi h_s R^2 (E/\sigma_0)(1 + h_s/d_0)^{-1}, \quad (13)$$

$$\beta = \pi h_s R^2 (E/\sigma_0)^2 (1 + h_s/d_0)^{-3}. \quad (14)$$

Заметим, что при $R \gg d_0$ уравнения (1), (11)–(14) описывают также и нелинейные свойства упругого контакта; в этом случае статическое напряжение σ_0 задается, вообще говоря, произвольно и определяется внешними условиями.

Зная коэффициенты α и β можно описать нелинейные эффекты при прохождении акустической волны через контакт или трещину. В частности, процесс модуляции звуковой волны низкочастотными вибрациями для обобщенной модели трещины рассматривался в работе [15]. Подстановка в общие формулы этой работы выражений (13), (14) дает возможность рассчитать модуляцию звука вибрациями для данной модели трещины. Процесс генерации второй гармоники при падении акустической волны на трещину рассматривался в [10], где рассчитаны уровни вторых гармоник в прошедшем и отраженном сигналах для модели трещины, заданной в общем виде (1). Выражения (13), (14), вместе с полученными в [10] соотношениями, позволяют рассчитывать уровни гармоник в нелинейно рассеянной на трещине волне и проследить как этот уровень зависит от различных параметров трещин: радиуса, концентрации, вида неровностей и т. д.

2.3. Экспериментальные исследования нелинейных эффектов при взаимодействии акустических волн на трещине

Первые попытки использования нелинейных эффектов для диагностики трещин были выполнены с образцами керамической плитки, используемой для теплоизоляции космических аппаратов. Отслоение или непрочность такой плитки от корпуса аппарата может привести к его перегреву и гибели, поэтому диагностика таких дефектов является актуальной. Эксперименты по наблюдению нелинейных эффектов были выполнены с отдельной плиткой, соединенной через упругий слой фетра с металлической пластиной, имитирующей жесткий корпус аппарата [16]. Исследуемый образец помещался на вибростенд, который возбуждал колебания элемента. При этом теплозащитное покрытие вместе с упругим связывающим слоем составляло механический резонатор, в котором роль массы играло покрытие, а упругость определялась связывающим слоем. Для четкого наблюдения нелинейных эффектов возбуждение резонатора производилось на его собственной частоте, составляющей 470 Гц. Регистрация

сигналов производилась акселерометром, приклеенным к поверхности теплозащитной плитки. При исследовании образца с хорошим контактом уровень второй гармоники был довольно мал. Для имитации трещины, фетр связывающего слоя надрезался бритвой, при этом уровень второй гармоники в принимаемом сигнале возрастал на 10 дБ, что объясняется увеличением нелинейности системы. Физическая причина нелинейности в данном случае предельно проста — наличие разреза уменьшает упругость слоя при растяжении по сравнению со сжатием, поскольку при растяжении трещина раскрывается и ее упругость определяется меньшей контактной площадью. Теоретическое описание этого эффекта изложено в работе [16].

Аналогичный метод использовался нами недавно совместно с Научно-исследовательским центром фирмы "RECHINEY" (Франция) применительно к диагностике трещин в графитовых электродах. Исследовались графитовые электроды длиной 3.2 м и толщиной около 0.6 м. С помощью вибростенда, прикрепленного к торцу электрода, производилось возбуждение продольных упругих волн в электроде на частоте одной из низших собственных мод. Смещения другого торца стержня определялось лазерным измерителем скорости. При анализе принятого сигнала главное внимание уделялось измерениям уровня второй гармоники. В проведенных экспериментах возбуждение производилось на частотах 400 Гц и 800 Гц, соответствующих первой и второй продольным модам электрода. В электродах с трещинами наблюдалось резкое возрастание уровня второй гармоники, что обусловлено нелинейностью, связанной с закрытием и раскрытием трещин при их колебаниях. В качестве информационного использовался параметр, пропорциональный отношению уровня второй гармоники к квадрату уровня сигнала основной частоты. При наличии трещин этот параметр превышал соответствующий параметр для бездефектного электрода в 3-8 раз.

Как уже отмечалось выше, одним из наиболее удобных для диагностических целей нелинейных эффектов является модуляция высокочастотных акустических волн низкочастотными вибрациями. Впервые этот эффект использовался для наблюдения возрастания нелинейного акустического параметра стали при накоплении дефектов за счет статического нагружения образца [9]. Однако использование подобного метода на практике затруднено в связи с необходимостью создавать вибрации при помещении образцов на громоздкий вибростенд. Более простой выглядит схема диагностики, когда низкочастотные вибрации создаются путем удара [17]. Нами исследовались стальные образцы специальной формы, имитирующие сварной шов. Дефект создавался под действием циклической нагрузки на испытательной разрывной машине. Наблюдение трещины производилось с помощью стробоскопа. Глубина трещины составляла около 1.5 см и невооруженным глазом она была практически не видна. Частота излу-

ния устанавливалась вблизи резонансной частоты образца, в наших экспериментах она была около 60 кГц. Затем производилось слабое постукивание молотком по образцу. Наблюдалось сильное уширение спектра принятого сигнала для образца с трещиной, что обусловлено модуляцией акустической волны при колебаниях трещины, тогда как для целого образца такая модуляция отсутствовала. Разница боковых составляющих спектров сигнала в образце с трещиной и в образце без трещины достигала 20 дБ. В экспериментах производилась также регистрация уровня акустического сигнала после удара. В целом образце удар не приводил к изменению амплитуды акустического поля. В образце с трещиной наблюдалось уменьшение уровня акустического поля в момент после удара, причем в ряде экспериментов сигнал падал до 20 дБ от начального уровня. Этот уровень возвращался к исходному, после того как колебания образца, вызванные ударом, затухнут.

2.4. Возможные схемы нелинейной томографии трещин

Изложенные выше методы позволяют определить наличие трещины, но не пригодны для определения ее местоположения. Нелинейные акустические методы могут быть модернизированы для этих целей. Самый простой вариант состоит в использовании обычного эхолокационного принципа. Производится излучение и прием импульсного синусоидального сигнала, однако, в отличие от обычной эхолокации, прием отраженного сигнала осуществляется на частоте второй гармоники излученного сигнала. Как мы уже говорили выше, амплитуда второй гармоники при рассеянии акустической волны на трещине может значительно превышать уровень второй гармоники, генерируемой в однородной среде. Это и обеспечивает достаточную надежность выделения полезного сигнала на фоне помехи. Изложенный метод позволяет определять местоположение трещины при наличии сильных линейных отражений акустических волн от других неоднородностей, например границ среды. Такой метод уже был использован при диагностике газовых пузырьков в море [18, 19].

Отметим некоторые дополнительные преимущества нелинейного метода диагностики дефектов, связанные с использованием, так называемых сложных частотно-модулированных сигналов [20, 21]. Как известно, применение сложных сигналов было обусловлено повышением разрешающей способности радиолокаторов [22], работающих в линейном режиме. При нелинейном рассеянии частотно-модулированных сигналов их спектр расширяется (для n -ой гармоники в n раз). Соответственно, согласованная фильтрация n -ой гармоники частотно-модулированного сигнала приведет к увеличению его сжатия во времени (по сравнению с излучаемым сигналом) также в n раз. Таким образом, использование нелинейного рассеяния сложного частотно-модулированного сигнала с последу-

ющей согласованной фильтрацией одной из его высших гармоник позволяет повысить разрешающую способность нелинейного метода эхолокации трещин и других подобных дефектов.

Интересно также отметить, что нелинейное рассеяние другого вида сложного сигнала — фазоманипулированного, в котором фаза отдельных "дискретов" меняется друг относительно друга на 180° , не приводит к расширению спектра его высших гармоник: нечетная гармоника такого сигнала совпадает с исходным, а четная — становится простым сигналом.

Другая схема, позволяющая определить положение трещины нелинейными методами, основана на модуляции акустической волны, проходящей через трещину, более мощным импульсом накачки [15]. Эта схема близка к схеме нелинейной акустической томографии, предложенной японскими учеными [23–25], которая использовалась для определения пространственного распределения нелинейных акустических параметров в небольших биологических объектах. Позднее обсуждались возможности использования метода нелинейной томографии в сейсмологии [26–28]. Основная идея метода может быть сформулирована следующим образом: мощный импульс накачки проходит через трещину, изменяет ее раскрыв и, вследствие ее нелинейности, изменяет условия отражения и прохождения для непрерывной зондирующей волны. При этом может появиться дополнительное отражение от трещины и измениться фаза прошедшей волны. Соответственно возможные схемы нелинейной томографии могут быть основаны на регистрации отраженной или прошедшей через трещину волн.

В схеме, основанной на приеме отраженной волны, излучение волн сигнала и накачки происходит с одной стороны исследуемого объекта. Когда импульс накачки проходит через трещину он меняет коэффициент отражения для волны сигнала, что приводит к появлению дополнительного рассеянного поля. Это поле появляется только в момент прохождения через трещину импульса накачки и может быть определено даже на фоне сильной стационарной реверберации. Расстояние до трещины здесь определяется по времени t_1 задержки отраженного сигнала относительно времени излучения импульса накачки, и равно $2t_1C$, где C — скорость звуковых волн в исследуемом объекте.

При встречной схеме томографии излучение пробной гармонической волны происходит с одной стороны, а излучение импульса накачки и прием сигнальной волны с другой. При приеме выделяется фазовая модуляция сигнальной волны, обусловленная модуляцией упругости трещины. Здесь расстояние от трещины до точки приема определяется также по времени t_2 между излучением импульса накачки и приходом фазомодулированной сигнальной волны и равно $2t_2C$.

3. НЕЛИНЕЙНЫЙ АКУСТИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТР ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЫ

3.1. Что такое нелинейный акустический параметр

Выше мы рассматривали нелинейные акустические эффекты, возникающие при взаимодействии упругих волн на одиночной трещине. При наличии в твердом теле множества трещин нелинейные искажения волны на каждой трещине будут суммироваться. Такие среды удобно описывать, в так называемом гомогенном приближении, при этом среда предполагается однородной и характеризуется некоторыми эффективными значениями линейных и нелинейных модулей упругости. Здесь мы ограничимся моделью изотропной среды и будем рассматривать взаимодействие только продольных волн. (Взаимодействие сдвиговых волн для нас менее интересно, поскольку в силу симметрии смещений квадратичные нелинейные эффекты при взаимодействии таких волн не проявляются.)

Будем считать, что для продольных напряжений σ и деформаций ϵ уравнение состояния среды описывается непрерывной, вместе со своими производными, функцией $\sigma = \sigma(\epsilon)$. Для малых деформаций, обычно отвечающим акустическим волнам, это уравнение можно разложить в ряд Тейлора вблизи некоторых постоянных напряжения σ_0 и деформации ϵ_0 :

$$\sigma = \sigma'_\epsilon(\epsilon_0)\epsilon + \frac{1}{2}\sigma''_{\epsilon\epsilon}(\epsilon_0)\epsilon^2. \quad (15)$$

В акустике нелинейные свойства среды принято характеризовать нелинейным параметром γ , определяемым следующим образом:

$$\gamma = \sigma''_{\epsilon\epsilon}(\epsilon_0)/\sigma'_\epsilon(\epsilon_0). \quad (16)$$

Этот же параметр можно выразить и через зависимость скорости распространения C продольной волны от приложенного напряжения:

$$\gamma = 1/2\rho_0 C_0(\partial C/\partial \sigma), \quad (17)$$

$$C^2 = \sigma'_\epsilon(\epsilon)/\rho_0, \quad (18)$$

где ρ_0 — невозмущенная плотность среды. При подстановке (15) в уравнение Ньютона для продольных волн в стержне

$$\rho U_{tt} = \sigma_x(\epsilon), \quad \epsilon = U_x, \quad (19)$$

получаем волновое уравнение с квадратичной нелинейностью [25, 29, 30]:

$$U_{tt} - C_0^2 U_{xx} = -\gamma C_0^2 U_x U_{xx}, \quad (20)$$

где $C_0 = [E/\rho_0]^{1/2}$ — скорость продольной волны в стержне, $E = \sigma'_\epsilon(\epsilon_0)$.

В уравнениях (16), (17), (20) нелинейный параметр среды является безразмерной величиной; на его измерении основаны количественные методы нелинейной акустической диагностики различных сред.

Значения параметра γ для “обычных” однородных сред — газа, воды, стекла, плавленного кварца и т. д. лежат в диапазоне от 3 до 10 [25, 29]. Значительно большие его значения (до $10^3 - 10^4$) наблюдаются для сред со “сложной” структурой — воды с пузырьками газа [18, 19, 31], пористых пластизолей [31, 32], некоторых земных пород [33–37], зернистых сред [37–39]. С диагностической точки зрения наиболее важными являются данные, показывающие связь нелинейных акустических параметров с дефектами и прочностными свойствами конструкционных материалов. Первые эксперименты такого рода были выполнены довольно давно [40], в них наблюдалось сильное возрастание уровня второй гармоники для подвергаемых растяжению алюминиевых образцов, непосредственно перед их разрушением. Имеются многочисленные данные о связи прочности бетона с его нелинейными параметрами, что использовалось в нелинейных методах контроля прочности бетонов [41–43]. В работе [9] приведены результаты измерений нелинейного акустического параметра для стали, где накопление дефектов происходило в результате растяжения образцов на разрывной машине. Здесь нелинейный параметр измерялся по модуляции звукового поля в образце (60 – 100 кГц) низкочастотными вибрациями (40 – 80 Гц). Вибрации приводили к изменению скорости акустической волны в образце, пропорциональному, согласно выражению (17), параметру нелинейности. При этом изменялась резонансная частота образца, что и вызывало модуляции акустического поля. В измерениях наблюдалось сильное увеличение нелинейного параметра: от 30 для недеформированного до 1000 для деформированного, находящегося на грани разрушения, образца.

3.2. Модель нелинейной упругости трещиноватой среды

Несмотря на богатый экспериментальный материал, теоретические модели, позволяющие объяснять высокие значения нелинейных параметров микронеоднородных сред развиты явно недостаточно. Существуют довольно хорошо развитые модели для описания пузырьковых сред [44, 46] и, близких к ним, резиноподобных пористых сред [31]. Высокие значения нелинейных параметров зернистых сред интерпретируются исходя из модели контактной нелинейности Герца [37, 39]. Эксперименты по наблюдениям нелинейных эффектов в поликристаллических твердых телах (некоторых металлах и горных породах) объясняются в рамках гистерезисных зависимостей напряжение–деформация [35, 44, 45]. Теоретическое описание нелинейных эффектов в трещиноватых средах развито значительно слабее. Так в работе [47] рассмотрена модель пористой среды,

содержащей пустоты сфероидальной формы, из которой, однако, не следует заметного возрастания акустической нелинейности трещиноватой среды по сравнению с однородной. Мы используем описанную выше модель трещины для разработки модели трещиноватой среды, в рамках которой удастся объяснить высокие значения параметра ее акустической нелинейности.

В качестве анализируемого объекта, на примере которого мы получим линейные и нелинейные параметры трещиноватой среды, рассмотрим тонкий стержень, к которому приложено продольное напряжение.

Упругие параметры трещиноватой среды будем искать в следующих приближениях.

1. Каждая из трещин — узких разрезов, образованных внутри твердого тела, занимает площадь, ограниченную окружностью радиуса R , малого по сравнению с радиусом стержня.

2. Распределение трещин в материале стержня однородно и изотропно, так что в среда также является однородной и изотропной.

3. Концентрация трещин достаточно мала, так что они друг с другом не взаимодействуют.

4. Трещина изменяет свой объем под действием только нормального к ней напряжения, напряжения касательные к трещине не приводят к изменению ее объема.

5. Деформация трещиноватой среды складывается из деформации материала без трещин и деформации, обусловленной трещинами.

6. Нелинейные свойства трещиноватой среды в основном определяются нелинейностью трещин, материал вне трещин будем считать линейным и удовлетворяющим закону Гука.

Аналогичные предположения использовались и в работах [48-51], где решались задачи определения линейных упругих параметров твердого тела, содержащего изотропно-ориентированные трещины.

Пусть вдоль оси стержня, оси z , действует напряжение $\sigma_{zz} = \sigma$, однородное по всему стержню. Для стержня без трещин это напряжение создает продольную деформацию [52]:

$$U_{zz} = \sigma_{zz}/E, \quad (21)$$

где E — модуль Юнга твердого тела. В поперечных направлениях стержня имеют место деформации

$$U_{xx} = U_{yy} = -\nu U_{zz}, \quad (22)$$

а напряжения σ_{xx} и σ_{zz} отсутствуют. В результате, на элемент площадки dS в твердом теле, нормаль \mathbf{n} к которой ориентирована под углом ϕ к оси z , будут действовать нормальное σ_{nn} и касательное $\sigma_{n\phi}$ напряжения [53]:

$$\sigma_{nn} = \sigma \cos^2 \phi, \quad \sigma_{n\phi} = \sigma \sin \phi \cos \phi. \quad (23)$$

Для определения упругих параметров трещиноватой среды введем новую систему координат \mathbf{x}'_i и найдем дополнительные деформации dU_{xx} , dU_{yy} , dU_{zz} стержня, обусловленные наличием трещин, нормаль \mathbf{n} к поверхности которых совпадают с осью z' , а проекция этой нормали на плоскость $z = 0$, составляет угол Θ с осью x (ось y' параллельна оси y) (рис. 2). Согласно предположению (3), трещина будет раскрываться только под действием нормального напряжения $\sigma_{nn}(\phi)$. Очевидно, что в стержне возникнет дополнительная, вдоль оси z' , деформация $dU'_{z'z'}$, обусловленная раскрытием трещин, которая будет определяться выражением:

$$dU'_{z'z'} = \Delta V(\phi) N(\phi, \Theta) d\phi d\Theta, \quad (24)$$

где $N(\phi, \Theta)$ — функция распределения трещин по углам ϕ и Θ ($N(\phi, \Theta) d\phi d\Theta$ — количество трещин с ориентацией от ϕ и θ до $\phi + d\phi$ и $\Theta + d\Theta$, находящихся в единице объема среды), $\Delta V(\phi)$ — изменение объема одной трещины.

Все остальные компоненты тензора деформации dU'_{ik} будут равны нулю.

По правилу преобразования тензоров [54] от одной системы координат — новой (\mathbf{x}'_i) к другой — старой (\mathbf{x}_i):

$$U_{ik} = a_{il} a_{km} U'_{lm}, \quad (25)$$

где $a_{il} = \cos \phi_{il}$, ϕ_{il} — угол между осями \mathbf{x}_i и \mathbf{x}'_l , находим компоненты тензора dU_{ik} дополнительной деформации:

$$\begin{aligned} dU_{xx} &= dU'_{z'z'} \cos^2 \phi, \\ dU_{zz} &= dU'_{z'z'} \sin^2 \phi \cos^2 \Theta, \\ dU_{yy} &= dU'_{z'z'} \sin^2 \phi \sin^2 \Theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Интегрируя эти уравнения по ϕ и Θ , и учитывая компоненты деформации (21), (22) стержня без трещин получим компоненты тензора деформации стержня с трещинами:

$$U'_{zz} = \frac{\sigma}{E} \left(1 + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} N(\phi, \theta) \cos^4 \phi \left[\alpha + \frac{\beta \sigma}{2E} \cos^2 \phi \right] d\phi d\theta \right), \quad (27)$$

$$U'_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma}{E} \left(-\nu + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} N(\phi, \theta) \cos^2 \phi \sin^2 \theta \cos^2 \Theta \times \right. \\ \left. \times \left[\alpha + \frac{\beta\sigma}{2E} \cos^2 \phi \right] d\phi d\Theta \right), \quad (28)$$

$$U'_{\nu\nu} = \frac{\sigma}{E} \left(-\nu + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} N(\phi, \theta) \cos^4 \phi \left[\alpha + \frac{\beta\sigma}{2E} \cos^2 \phi \right] d\phi d\Theta \right).$$

В линейном приближении ($\beta = 0$) из этих уравнений можно найти компоненты тензора упругости анизотропного твердого при произвольном распределении трещин по углам ϕ , Θ .

При изотропной ориентации трещин по углам ϕ и Θ ($N(\phi, \Theta) = N_0/\pi^2$) среда, естественно, также будет изотропной; коэффициент Пуассона ν' такой среды определяется выражением:

$$\nu' = \frac{\nu - \alpha N_0/16}{1 + 3\alpha N_0/8}. \quad (29)$$

Из выражения (29) следует, что наличие трещин уменьшает коэффициент Пуассона трещиноватой среды, а при $\alpha N_0 > 16\nu$ он становится отрицательным. Из этого же выражения следует, что возможный диапазон изменения коэффициента Пуассона такой среды определяется неравенством:

$$-1/6 \leq \nu' \leq \nu \leq 1/2.$$

Как известно, коэффициент Пуассона твердого тела связан со скоростями продольной C_l и поперечной C_t упругих волн соотношением [52]:

$$\nu = \frac{1 - 2(C_t/C_l)^2}{2[1 - (C_t/C_l)^2]}. \quad (30)$$

В ряде измерений для пористых горных пород наблюдалось аномально большое отношение скоростей C_t и C_l ($C_t/C_l > 2^{-1/2}$), что соответствует отрицательным значениям коэффициента Пуассона [55].

Из сравнения уравнений (27) и (15), (16) находим модуль Юнга E_0 и параметр γ квадратичной нелинейности трещиноватой среды:

$$E_0 = E \left(1 + \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} N(\phi, \Theta) \cos^4 \phi d\phi d\Theta \right)^{-1}, \quad (31)$$

$$\gamma = \beta \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} N(\phi, \Theta) \cos^6 \phi d\phi d\Theta \left(1 + \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} N(\phi, \Theta) \cos^4 \phi d\phi d\Theta \right)^{-2} \quad (32)$$

Для изотропно-распределенных трещин из (31), (32) получаем:

$$E_0 = E(1 + 3\alpha N_0/8)^{-1}, \quad (33)$$

$$\gamma = (5\beta N_0/16)(1 + 3\alpha N_0/8)^{-2}.$$

Из выражений (31)–(33) следует, что при достаточно малой концентрации трещин $\left(\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} N(\phi, \Theta) \cos^4 \phi \, d\phi \, d\Theta \ll 1 \right)$, изменение модуля Юнга мало, в то время как изменение нелинейного параметра может быть значительно.

Для предложенной модели трещины коэффициенты α и β определяются уравнениями (13), (14). Это позволяет сделать оценки упругих характеристик трещиноватой среды. Предположим, что среда содержит изотропно-распределенные трещины со следующими параметрами: неровности поверхностей трещин имеют форму конусов с углом раствора $2\phi = 176^\circ$, $n \simeq 10^5$, характерная высота вершин неровностей $h_s = 10^{-6}$ см, радиус трещин $R = 10^{-1}$ см, $d_0 = 3 \cdot 10^{-6}$ см, модуль Юнга твердого тела $E = 3 \cdot 10^{11}$ гр/см \cdot с 2 , коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$, статическое напряжение $\sigma_0 = 6 \cdot 10^6$ гр/см \cdot с 2 , концентрация трещин $N_0 = 20$ см $^{-3}$. В этом случае, наличие трещин приводит к уменьшению модулю Юнга и коэффициента Пуассона твердого тела на 1%, а параметр квадратичной нелинейности достигает значения $\gamma \simeq 500$, что на 2 порядка превышает соответствующий параметр однородных сред [29].

Таким образом, предложенная модель трещиноватой среды и проведенное исследование ее упругих характеристик показывает, что наличие трещин в твердом теле может приводить к сильному изменению параметра квадратичной нелинейности, в то время как изменения модуля Юнга и коэффициента Пуассона незначительны. Это обстоятельство обеспечивает основное преимущество нелинейных методов диагностики трещин и других дефектов структуры твердых тел — существенно большую чувствительность перед обычно используемыми линейными методами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассказывается о первых шагах в развитии нелинейных акустических методов диагностики трещин. Изложенные здесь результаты экспериментальных исследований скорее являются демонстрационными, показывающими возможности таких методов, чем инструкцией по их применению. Предложенная здесь модель трещины и развитая на ее основе модель трещиноватой среды позволяют понять физику взаимодействия акустических волн в таких средах и объяснить аномально высокую нелинейность твердых тел, содержащих трещины.

На наш взгляд, рассмотренные методы нелинейной акустической диагностики еще далеки до совершенства и их дальнейшее развитие будет одним из перспективных направлений нелинейной акустики.

Авторы благодарят О. Д. Шишкину за помощь в освоении ТЕХ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-02-03508-а) и Международного научного фонда (грант № R8U000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Акустические методы и средства контроля. — В кн.: Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий. / Справочник. Т.2. — М.: Машиностроение, 1986. С.189.
2. Ермолов И. Н. Теория и практика ультразвукового контроля. — М.: Машиностроение, 1981. 240 с.
3. Collacott R.A. Structural integrity monitoring. — London: Chapman & Hall Ltd, 1985.
4. Джонс Р., Фокозару. Неразрушающие методы испытания бетонов. — М.: Стройиздат, 1974. 278 с.
5. Wells P. N. T. Biomedical Ultrasonics. — London: Academic Press.
6. Munk W., Wusch C. // Deap-Res.A. 1979. V.26. № 82. P.123.
7. Сейсмическая томография. / Под ред. Нолета. — М.: Мир, 1990.
8. Wickramasinghe H. E. // Acoustic microscopy. Present and future. IEE Proc. 1984. V.A131. № 4. P.282.
9. Коротков А. С., Славинский М. М., Сутин А. М. // Акуст. ж. 1994. Т.40. № 1. С.84.
10. Руденко О. В., Чинь Ань Ву. // Акуст. ж. 1994. Т.40. № 4. С.668.
11. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. — М.: Мир, 1989.
12. Mandelbrot B. B., Passoja D. E., Paulay A. J. // Nature. 1984. V.308. № 5961. P.721.
13. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. — San-Fransisco: Freeman, 1983.
14. Снеддон И. Преобразование Фурье. — М.: ИИЛ, 1955.
15. Sutin A. M., Zaitsev V. Yu., Belyaeva I. Yu., Nazarov V. E. // Submitted to the Journal of Vibration and Control.
16. Антонец В. А., Донской Д. М., Сутин А. М. // Механика композитных материалов. 1986. № 5. С.934.
17. Korotkov A. S. and Sutin A. M. // Submitted to Acoust. Letters.
18. Островский Л. А., Сутин А. М. — В кн.: Ультразвуковая диагностика. — Горький.: ИПФ АН СССР, 1983. С.137.

19. Sutin A. Breaking waves: IUTAM Symposium. Sydney, Australia, 1991. / M. L. Banner, R. H. J. Grimshaw (Editors). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1992. P.223.
20. Варакин Л. Е. Теория сложных сигналов. — М.: Сов. радио, 1970. 376 с.
21. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Сов. радио, 1977. 608 с.
22. Ширман Я. Д. Разрешение и сжатие сигналов. — М.: Сов. радио, 1974.
23. Ichida N., Sato T., Linzer M. // Ultrasonic Imaging. 1983. № 5. P.295.
24. Sato T., Fukusima A., Ishida N., Ishikama H., Miwa M., Igarashi Y., Shimura T., Murakani K. // Ultrasonic Imaging. 1985. № 7. P.49.
25. Наугольных К. А., Островский Л. А. Нелинейные волновые процессы в акустике. — М.: Наука, 1990. 238 с.
26. Беляева И. Ю., Сутин А. М. Сейсмическая томография нелинейных параметров. // Препринт № 308. — ИПФ РАН: Нижний Новгород, 1992. 26 с.
27. Назаров В. Е. // Физика Земли. 1994. № 4. С.82.
28. Беляева И. Ю., Зайцев В. Ю., Сутин А. М. // Физика Земли. 1994. № 12. С.44.
29. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. — М.: Наука, 1966. 520 с.
30. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975. 288 с.
31. Остроумов Г. А., Дружинин Г. А., Крячко В. М., Токман А. С. // Тезисы докладов IV Международного симпозиума по нелинейной акустике. — М.: МГУ, 1975. С.166.
32. Островский Л. А. // Акуст. журн. 1988. Т.34. № 5. С.908.
33. Беляева И. Ю., Тиманин Е. М. // Акуст. журн. 1991. Т.37. № 5. С.1026.
34. Береснев И. А., Николаев А. В., Соловьев В. С., Шалашов Г. М. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 10. С.32.
35. Николаев А. В. Проблемы нелинейной сейсмологии. — М.: Наука, 1987. С.5.
36. Зименков С. В., Назаров В. Е. // Физика Земли. 1993. № 1. С.13.
37. Johnson P. A., Rasolofosaon P., Zinzer B. — In: Advances in nonlinear acoustics. / Editor H. Nobak. — Singapore-New Jersey: World Scientific, 1993. P.376.
38. Беляева И. Ю., Зайцев В. Ю., Островский Л. А., Сутин А. М. // Физика Земли. 1994. № 10. С.39.
39. Belyaeva I. Yu., Ostrovsky L. A., Timanin E. M. // Acoustic Letters. 1992. V.15. № 11. P.221.
40. Беляева И. Ю., Зайцев В. Ю., Островский Л. А. // Акуст. журн. 1993. Т.39. № 1. С.25.
41. Конюхов Б. А. // Акуст. журн. 1971. Т.17. № 1. С.157.

42. Schkolnik I. // *Nondestr. Test. Eval.* 1993. V.10. P.351.
43. Школьник И.Э. Диагностика бетона: новые аспекты. — М.: Техно-проект, 1993. 328 с.
44. Робсман В. А. // *Акуст. журн.* 1991. Т.37. № 5. С.1038.
45. Nazarov V., Ostrovsky L., Soustova I., Sutin A. // *Physics of the Earth and Planetary Interiors.* 1988. V.50. № 1. P.65.
46. Назаров В. Е. // *Физика металлов и металловедение.* 1991. № 3. С.172.
47. Кобелев Ю. А., Островский Л. А. — В кн.: *Нелинейная акустика.* — Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С.143.
48. Вербицкий Т.З. — В кн.: *Проблемы нелинейной сейсмологии.* — М.: Наука, 1987. С.94.
49. Walsh J. B. // *J. Geophys. Res.* 1965. V.70. № 2. P.399.
50. Walsh J. B. // *J. Geophys. Res.* 1965. V.70. № 20. P.5249.
51. Walsh J. B. // *J. Geophys. Res.* 1966. V.71. № 10. P.2591.
52. Салганик Р. Л. // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1973. № 4. С.149.
53. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория упругости.* — М.: Наука, 1965.
54. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. *Теория упругости.* — М.: Наука, 1979.
55. Исакович М. А. *Общая акустика.* — М.: Наука, 1973.
56. Gregory A. R. // *Geophysics.* 1976. V.41. № 5. P.895.

Институт прикладной физики
РАН, Н.Новгород

Поступила в редакцию
6 февраля 1995 г.

NONLINEAR ACOUSTIC METHODS OF CRACK DIAGNOSTICS

A. M. Sutin, V. E. Nazarov

This paper is a brief review of nonlinear acoustic phenomena connected with cracks in solids. The nonlinear acoustic methods based on these effects are discussed. The physical models of a single crack and a medium with cracks are suggested to explain the observed phenomena.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЕ

И. Б. Есипов, А. Е. Пашии, О. Б. Овчинников

Вопросы, касающиеся исследования нелинейных свойств рыхлых или гранулированных водонасыщенных сред, возникают в связи с применением параметрических излучателей звука в задачах зондирования дна океана. Однако имеющиеся в настоящее время данные разрознены и в существенной степени противоречивы. Отмечается, что параметр нелинейности морских осадков в разных условиях может принимать различные величины, отличающиеся в десятки раз [1, 2]. С другой стороны, в последнее время появились работы, в которых рассматриваются определенные модели взаимодействия звуковых волн конечной амплитуды в насыщенных пористых средах [3, 4, 5]. Среди таких сред необходимо выделить гранулированные образования, отличающиеся аномально высокими нелинейными характеристиками. В связи с этим возникает вопрос о сопоставлении имеющихся теоретических представлений с результатами экспериментов. В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования нелинейного искажения акустического импульса при его прохождении через образец кобальто-марганцевой корковой конкреции. Такого рода образования покрывают обширные участки дна океана в районах, содержащих гидротермальные источники. Пористость таких конкреций составляет 50–60%, а структура представляет из себя плотно упакованные сферические гранулы размером в несколько десятых долей миллиметра.

Кратко обсудим терминологию, принятую для описания нелинейных свойств материалов. Обычно в акустике нелинейность характеризуется некоторыми параметрами, связанными с зависимостью скорости звука c от величины акустического давления p . Для газов и жидкостей в качестве меры нелинейности часто используют следующий параметр:

$$\epsilon = 1 + \rho_0 c_0 (dc/dp)_s, \quad (1)$$

где s — энтропия, ρ — плотность, p — давление, индекс 0 соответствует невозмущенному состоянию среды. Часто в акустике ограничиваются учетом квадратичной нелинейности среды, что для скорости звука предполагает линейную связь c с давлением p в акустической волне: $c = c_0 + \epsilon p / \rho_0 c_0$, где параметр ϵ , согласно (1), не зависит от давления, а

именно, $\epsilon = 1 + B/2A = (1 + \gamma)/2$, где A и B — коэффициенты соответственно при линейном и квадратичном членах тейлоровского разложения уравнения состояния среды $p = p(\rho)$, γ — показатель политропы.

Типичные значения ϵ для однородных сред лежат в диапазоне 1-10 (в частности, $\epsilon = 3,5$ для воды). Вместе с тем, для микронеоднородной среды, например, для жидкости с пузырьками газа, значение ϵ может достигать 10^4 [4]. Величины параметра нелинейности такого же порядка наблюдаются, например, для некоторых осадочных земных пород и поликристаллических металлов [6, 7].

Обсудим теперь постановку эксперимента. Мощный акустический импульс амплитуды до 30 атм возбуждался в воде при поглощении оптического импульса излучения CO_2 лазера. Длительность возбуждаемого импульса — около 1 мкс. Поперечный размер области возбуждения акустического сигнала равнялся 20 мм. Образец КМК размером в поперечнике 40 мм и толщиной 15 мм размещался на расстоянии 50 мм от области возбуждения акустического сигнала. Акустический приемник на основе поляризованной ПВДФ пленки размещался как впереди, так и позади зондируемого образца.

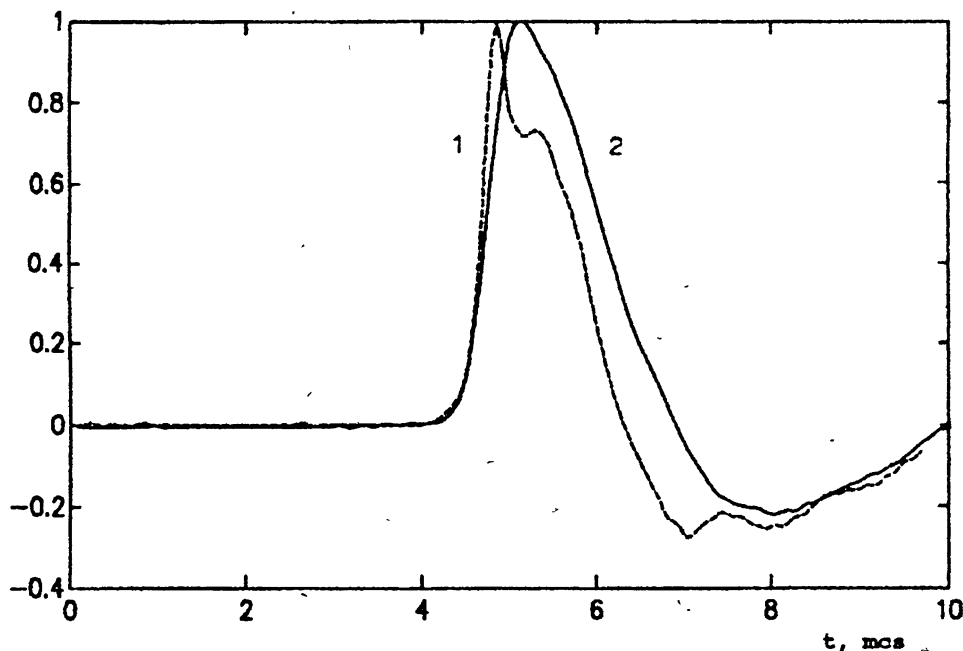


Рис. 1. Нормированные осциллограммы акустического импульса. 1 — падающий импульс, 2 — прошедший через образец КМК импульс, плотность энергии лазерного излучения $E = 0,08 \text{ J/cm}^2$.

На рис. 1, 2 приведены характерные осциллограммы как падающего, так и прошедшего акустических импульсов. Можно заметить, что в результате поглощения в образце КМК передний фронт прошедшего

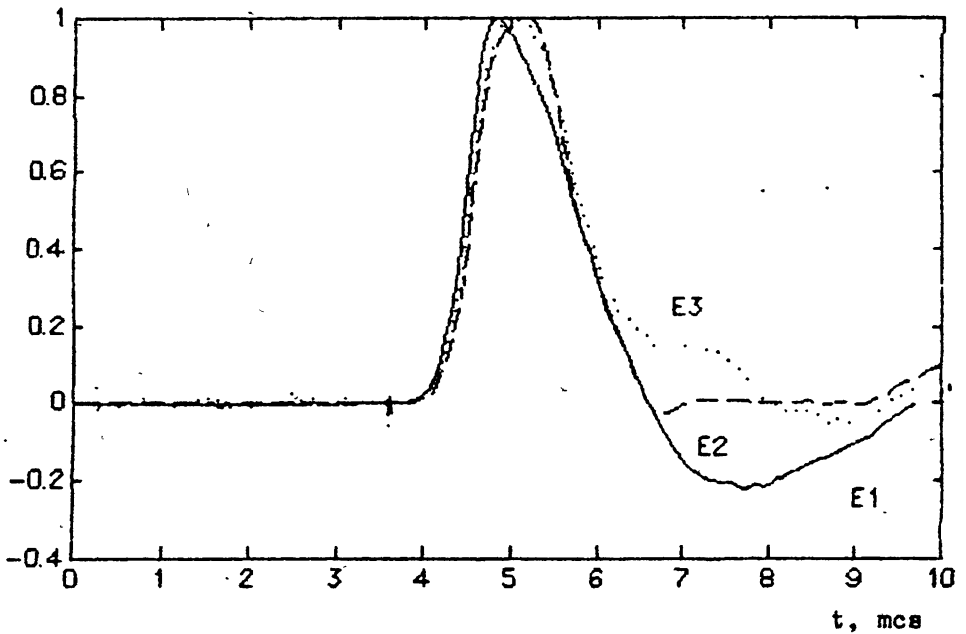


Рис. 2. Нормированные осциллограммы прошедшего через образец КМК акустического импульса. Плотность энергии лазерного излучения $E_1 = 0,08 \text{ J/cm}^2$; $E_2 = 0,80 \text{ J/cm}^2$; $E_3 = 1,20 \text{ J/cm}^2$.

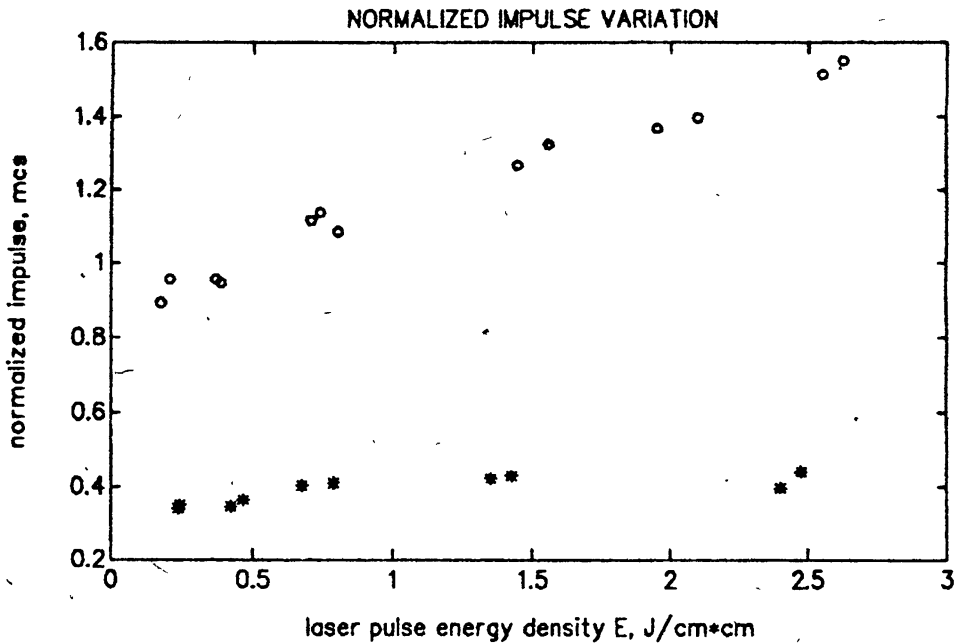


Рис. 3. Зависимость нормированного на амплитуду моментов падающего акустического импульса (1) и прошедшего импульса (2) от плотности энергии лазерного излучения.

импульса слегка затягивается, с увеличением амплитуды вершина импульса делается более пологой, также уменьшается, а при больших амплитудах полностью исчезает отрицательная фаза прошедшего сигнала.

Таким образом эти искажения импульса имеют ярко выраженный нелинейный характер, зависящий от амплитуды зондирующего сигнала.

Это свойство проиллюстрировано на рис. 3, где показана зависимость изменения нормированных моментов как падающего, так и прошедшего через КМК сигналов. Если момент падающего сигнала практически не меняется в широком диапазоне энергий возбуждающего сигнала лазерного излучения, то момент прошедшего КМК сигнала заметно увеличивается с возрастанием амплитуды. Это обстоятельство может быть связано с нарушением структуры КМК при прохождении импульса высокой амплитуды.

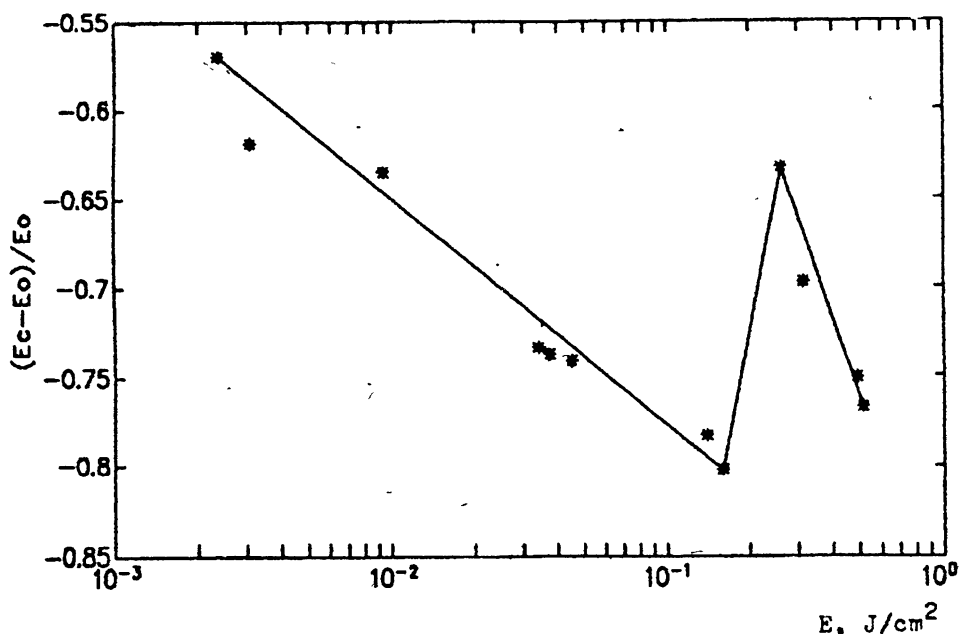


Рис. 4. Зависимость нормированной энергии прошедшего импульса от плотности энергии лазерного излучения. E_0 — энергия падающего импульса, E_c — энергия прошедшего импульса.

Интересно отметить, что нормированная энергия прошедшего сигнала при этом уменьшается с ростом амплитуды, как это показано на рис. 4. При достаточно высоких (около 20 атм) амплитудах зондирующего сигнала в этом случае можно заметить эффект своеобразного просветления образца, заключающегося в заметном уменьшении энергетических потерь. Это обстоятельство также свидетельствует косвенным образом об определенных изменениях во внутренней структуре образца.

В то же время следует обратить внимание на тот факт, что несмотря

на ярко выраженный нелинейный характер формы прошедшего сигнала, его амплитуда меняется от амплитуды падающего сигнала практически по линейному закону (рис. 5). Процесс лазерной генерации акустического сигнала также является линейным процессом. Таким образом, нелинейный характер трансформации формы прошедшего импульса заключается, в основном, в изменениях, происходящих на заднем склоне прошедшего импульса. Такой характер поведения акустического сигнала конечной амплитуды может быть связан с гистерезисным характером зависимости напряжение – деформация в образце (закона Гука).

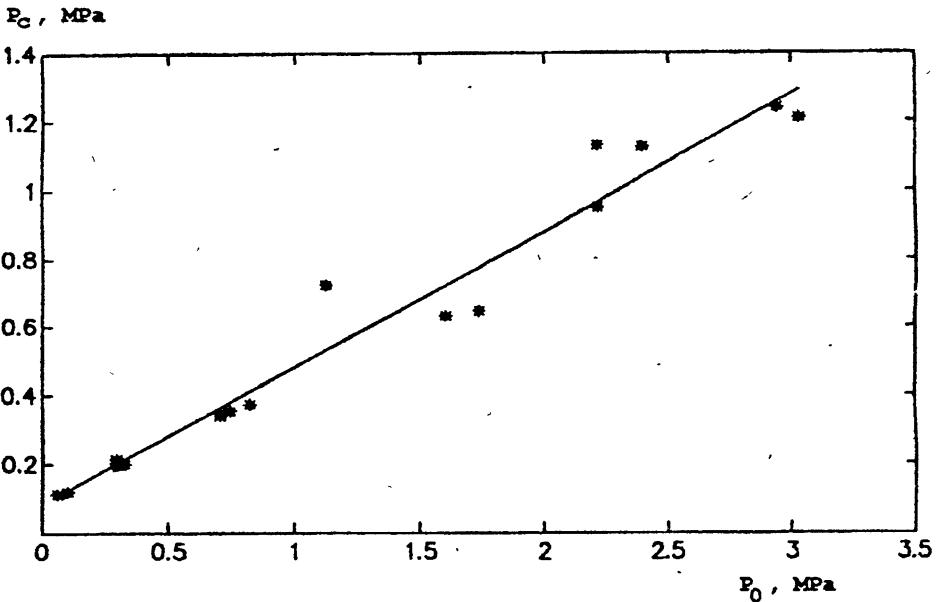


Рис. 5. Зависимость амплитуды прошедшего через образец КМК импульса от амплитуды падающего импульса.

Отмеченные изменения в форме прошедшего сигнала находят отражения в изменении соответствующих спектральных характеристик. На рис. 6 показаны типичные спектры падающего и прошедшего через образец импульсов различной амплитуды. Если спектры падающего на образец сигнала остаются подобными, что отражает линейный характер оптической генерации звукового импульса в воде, то спектры прошедшего сигнала меняются радикальным образом как в области высоких, так и в области низких частот. Заметим, что при зондировании образца КМК сигналом малой амплитуды в области высоких частот (более 700 кГц) происходит аномально высокое поглощение сигнала, увеличивающегося с частотой быстрее характерных зависимостей $f^{(1-2)}$ [8]. Это обстоятельство указывает на фрактальный характер строения КМК [9], которое нарушается при высоких амплитудах зондирования.

Следует заметить, что импедансные характеристики водонасыщенной КМК были близки соответствующим характеристикам воды, так плотность КМК равна $1,5 \text{ г/см}^3$ и c_0 равна $1,5 \text{ км/с}$. Поэтому существенная часть энергии падающего сигнала проходила через образец КМК.

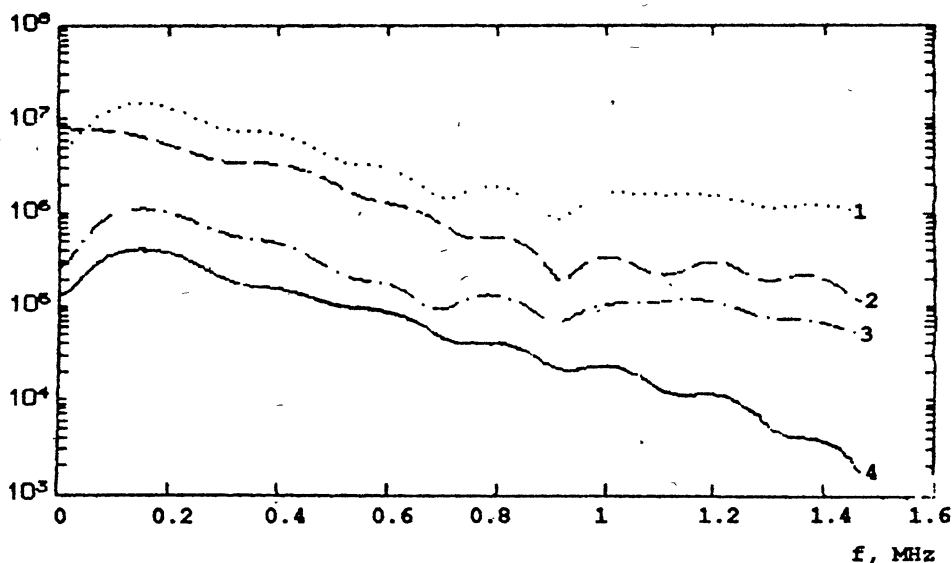


Рис. 6. Частотные спектры акустических импульсов. Плотность энергии лазерного излучения $E_1 = 1, 20 \text{ Дж/см}^2$, 1 — спектр падающего импульса, 2 — спектр прошедшего импульса. Плотность энергии лазерного излучения $E_1 = 0, 08 \text{ Дж/см}^2$; 3 — спектр падающего импульса, 4 — спектр прошедшего импульса.

Искажения профиля импульса, показанные на рис. 2, связаны с характером зависимости скорости распространения сигнала от амплитуды, что в соответствии с выражением (1) позволяет определить величину параметра нелинейности исследуемого образца. Простые оценки показывают, что в наших условиях эта величина достигает 400, что по порядку соответствует параметру нелинейности неконсолидированных геологических образований типа туфа [6, 7].

Таким образом, в результате проведенных экспериментальных исследований по распространению импульса конечной амплитуды через водонасыщенную гранулированную среду на примере акустического зондирования кобальто-марганцевой корковой конкреции можно сделать следующие выводы.

Обнаружен новый эффект нелинейного искажения профиля импульса конечной амплитуды, заключающийся в затягивании заднего склона акустического импульса в отличие от известного процесса, сопровождаемого укрупнением переднего склона при прохождении сигнала в однородной среде. Наблюдаемое искажение формы импульса сопровождается умень-

шением, а при достаточно высоких амплитудах полным исчезновением отрицательной фазы прошедшего сигнала. Это обстоятельство приводит к аномальному увеличению момента прошедшего импульса и сопровождается эффектом самопросветления водонасыщенной гранулированной среды, заключающимся в уменьшении энергетических потерь в КМК с ростом амплитуды зондирующего сигнала. Частотный анализ поглощения прошедшего сигнала указывает на фрактальный характер структуры КМК, который возможно нарушается при зондировании сигналами высокой частоты. Наблюдаемые эффекты выходят за рамки известных теоретических моделей нелинейного взаимодействия звуковых волн в гранулированной среде. Развитие адекватной теории, учитывающей отмеченные здесь экспериментальные факты, позволит развить представление о структуре кобальто-марганцевых конкреций.

С другой стороны, аномальные нелинейные свойства исследуемого образца указывают на возможность применения методов нелинейной акустики для развития неконтактного мониторинга водонасыщенных гранулированных корковых залежей на дне океана.

Настоящие исследования выполнялись при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 93-05-8118.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bjorno L. // *Acustica*. 1977. V. 38. N 4. P. 195.
2. Novem J. M. // *JASA*. 1979. V. 65. N 5. P. 1463.
3. Наугольных К. А., Островский Л. А. Нелинейные волновые процессы в акустике. — М.: Наука, 1990. — 231 с.
4. Ostrovsky L. A. Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity // *JASA*. V. 90. N 6. P. 3332.
5. Беляева И. Ю., Тиманин Е. М. Экспериментальное исследование нелинейных свойств поросодержащих упругих сред // *Акуст. журн.* 1991. N 6.
6. Беляева И. Ю., Зайцев В. Ю., Островский Л. А. // *Акуст. журн.* 1993. T. 39. N 1. C. 25.
7. Нестеренко В. Ф. // *Журн. прикл. мех. и техн. физ.* 1983. N 5. C. 136.
8. Biot M. A. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. V. 28. P. 179.
9. Зосимов В. В., Лямшев Л. М. // *Акуст. журн.* 1994. T. 40. N 5. C. 709.

Акустический институт
им. акад. Н. Н. Андреева, Москва

Поступила в редакцию
31 января 1995 г.

**THE PROPAGATION OF A FINITE-AMPLITUDE ACOUSTIC PULSE
IN A GRANULATED MEDIUM**

I. B. Esipov, A. E. Pashin, O. B. Ovchinnikov

АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА АКТИВНОГО ГАШЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ КАНАЛОМ ИДЕНТИФИКАЦИИ

А. А. Беляков, А. А. Мальцев

Исследуется адаптивная система активного гашения узкополосного случайного акустического поля, в которой для моделирования характеристик акустического нестационарного тракта используется дополнительный блок идентификации. Найдено условие устойчивости системы в целом. Проведена экспериментальная проверка работоспособности предложенной системы активного гашения.

Активное гашение случайных волновых полей является одним из перспективных методов звуко- и виброизоляции [1, 2]. Наиболее распространенным способом автоматической настройки систем активного гашения является адаптивный градиентный алгоритм, минимизирующий суммарную мощность остаточного поля в нескольких контрольных точках [3, 4]. Наряду с известными достоинствами данный алгоритм настройки имеет один существенный недостаток — необходимость использования предсказывающих фильтров в цепи опорных сигналов [4, 5]. Характеристики этих фильтров определяются значениями функций Грина волнового уравнения в точках расположения гасящих излучателей и контрольных приемников, а также параметрами элементов системы гашения, которые должны быть известны или измерены априори. Неточность в настройке предсказывающих фильтров приводит к ухудшению подавления исходного поля или к потере устойчивости всей системы. Проблема настройки предсказывающих фильтров становится особенно острой в тех случаях, когда каналы распространения звука имеют нестационарные характеристики.

В настоящей работе исследуется адаптивная система активного гашения (АСАГ) с дополнительным блоком идентификации, позволяющим автоматически корректировать параметры предсказывающих фильтров в соответствии с изменениями в акустических трактах гасящие излучатели—контрольные приемники.

1. Для простоты теоретического анализа рассмотрим узкополосную АСАГ (см. рис. 1), состоящую из одного гасящего излучателя и одного контрольного приемника остаточного поля, размещенных в акустическом пространстве (выделенном на схеме жирной линией) с коэффициентом передачи $\Gamma(i\omega)$ между ними. В состав системы электронного управления,

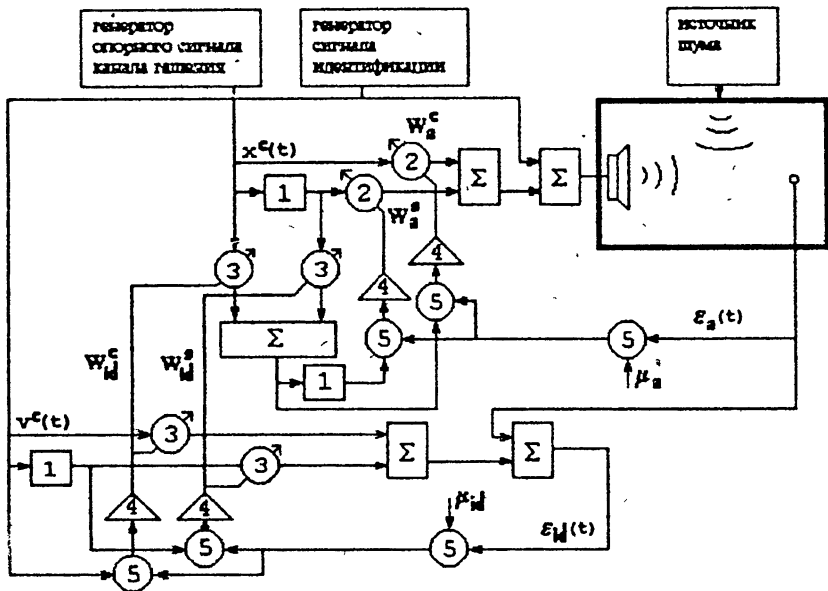


Рис. 1.

структурная схема которой приведена на рисунке, входят блок формирования сигнала гашения и блок идентификации. Эти блоки состоят из следующих элементов: 1 — фазовращающие цепочки на $\pi/2$, служащие для образования квадратурных составляющих опорных сигналов; 2 — регулируемые усилители блока гашения с коэффициентами усиления (весовыми коэффициентами) W_a^c и W_a^s ; 3 — регулируемые усилители блока идентификации с весовыми коэффициентами W_{id}^c и W_{id}^s ; 4 — интеграторы блоков гашения и идентификации с постоянными времени интегрирования T_a и T_{id} соответственно; 5 — перемножители сигналов. Как видно из структурной схемы блока управления, сигнал, подаваемый на гасящий излучатель, формируется путем квадратурного взвешивания (с весовыми коэффициентами W_a^c и W_a^s) гармонического опорного сигнала с частотой ω_a . Для определения характеристик акустического тракта распространения звука на гасящий излучатель подается слабый дополнительный гармонический сигнал идентификации с частотой ω_{id} , несколько отличающейся от частоты опорного сигнала. В качестве предсказывающего фильтра в цепи опорного сигнала будем использовать квадратурную цепочку с весовыми коэффициентами W_{id}^c и W_{id}^s , значения которых автоматически определяются в адаптивном канале идентификации, настраиваемом по дополнительному сигналу.

Настройка весовых коэффициентов блоков гашения и идентификации адаптивной системы описывается соответственно следующими уравнениями

ями:

$$T_a \dot{W}_a^{c,s} + W_a^{c,s} = \mu_a \varepsilon(t) \int_{-\infty}^t G(t-t') z^{c,s}(t') dt', \quad (1)$$

$$T_{id} \dot{W}_{id}^{c,s} + W_{id}^{c,s} = \mu_{id} \varepsilon_{id}(t) v^{c,s}(t), \quad (2)$$

где μ_a, μ_{id} — коэффициенты усиления в цепях корреляционных обратных связей блоков гашения и идентификации; $z^c(t), z^s(t)$ — квадратурные составляющие опорного сигнала блока гашения; $v^c(t), v^s(t)$ — квадратурные составляющие опорного сигнала блока идентификации; $\varepsilon(t)$ — сигнал остаточного поля на контрольном приемнике (сигнал ошибки канала гашения); $\varepsilon_{id}(t) = \varepsilon(t) - v^c(t)W_{id}^c - v^s(t)W_{id}^s$ — сигнал ошибки блока идентификации; $G(t-t')$ — импульсная переходная характеристика предсказывающего фильтра, определяемая весовыми коэффициентами $W_{id}^{c,s}$.

2. Проведем анализ системы уравнений (1), (2) в следующих предположениях. Характеристику акустического тракта системы гашения в рассматриваемой узкой полосе частот приближенно представим в виде $K(i\omega) \simeq |K(i\omega)|e^{-i\omega\tau_d}$, где τ_d — медленно флуктуирующая эквивалентная задержка распространения сигналов между излучателем и приемником. Полагая далее, что амплитуда дополнительного сигнала идентификации $v^c(t)$ мала по сравнению с сигналом исходного и гасящего полей, получим из (1) для весовых коэффициентов блока гашения следующую усредненную по периоду $T = 2\pi/\omega_a$ систему уравнений:

$$\begin{cases} T_a \dot{W}_a^c + W_a^c = \mu_a [U_0 U \{W_{id}^c \cos(\varphi_0 - \varphi) - W_{id}^s \sin(\varphi_0 - \varphi)\} - \\ - |K(i\omega_a)| U^2 \{W_a^c (W_{id}^c \cos \varphi_\tau + W_{id}^s \sin \varphi_\tau)\} + \\ + W_a^s (\sin \varphi_\tau - W_{id}^s \cos \varphi_\tau)], \\ T_a \dot{W}_a^s + W_a^s = \mu_a [U_0 U \{-W_{id}^c \sin(\varphi_0 - \varphi) - W_{id}^s \cos(\varphi_0 - \varphi)\} - \\ - |K(i\omega_a)| U^2 \{W_a^c (-W_{id}^c \sin \varphi_\tau + W_{id}^s \cos \varphi_\tau) + \\ + 2W_c^s (\cos \varphi_\tau + W_{id}^s \sin \varphi_\tau)\}], \end{cases} \quad (3)$$

где U_0, φ_0 — амплитуда и фаза сигнала исходного поля на контрольном приемнике; U, φ — амплитуда и фаза опорного сигнала блока гашения; $\varphi_\tau = \omega_a \tau_d$.

Из физического смысла задачи следует, что, с одной стороны, скорость настройки блока идентификации (определяемая μ_{id} и T_{id}) должна быть выбрана такой, чтобы весовые коэффициенты $W_{id}^{c,s}$ предсказывающего фильтра успевали отслеживать медленные флуктуации задержки τ_d и дрейфы параметров излучателя и приемника. С другой стороны, для устойчивой работы системы скорость изменений $W_{id}^{c,s}$ должна быть существенно ниже скорости настройки блока гашения. Поэтому необхо-

димо задавать $T_{id} \gg T_a$. Известно [5], что блок гашения обладает свойствами режекторного фильтра с центральной частотой ω_a и полосой режекции $\Pi_a = (2\mu_a U^2 |K(i\omega_a)|^2) / T_a$. Для того, чтобы исключить искажения сигнала идентификации блоком гашения, необходимо выполнить условие $\Pi_a < \Omega$, где $\Omega = \omega_a - \omega_{id}$.

В этих предположениях можно усреднить уравнения (2) по разностной частоте Ω и получить явное решение для весовых коэффициентов канала идентификации $W_{id}^{c,s}$ при нулевых начальных условиях. Подставляя эти выражения для $W_{id}^{c,s}$ в (3) получим систему уравнений второго порядка с коэффициентами, медленно изменяющимися во времени. Эта система описывает настройку весовых коэффициентов блока гашения при одновременной эволюции весовых коэффициентов блока идентификации. Перейдем от неавтономной системы второго порядка к автономной системе уравнений третьего порядка, сделав формальную замену $z = t$, $\dot{z} = 1$ и вводя новую переменную $y = \lambda z$, где $\lambda = (1 + \mu_{id} I^2) / T_{id}$ — множитель, характеризующий скорость настройки блока идентификации:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda \dot{W}_a^c + \frac{[1 + \kappa \cos(\Omega \tau_d)](1 - e^{-z})W_a^c}{T_a} + \frac{\kappa(1 - e^{-z})W_a^s}{T_a} &= \\ = \frac{(1 - e^{-z})\mu_a \mu_{id} U_0 U \cos(\psi_\tau + \varphi_0 - \varphi)}{1 + \mu_{ug} I^2}, \\ \lambda \dot{W}_a^s + \frac{[1 + \kappa \cos(\Omega \tau_d)](1 - e^{-z})W_a^s}{T_a} - \kappa(1 - e^{-z})W_a^c T_a &= \\ = \frac{(1 - e^{-z})\mu_a \mu_{id} U_0 U \sin(\psi_\tau + \varphi_0 - \varphi)}{1 + \mu_{ug} I^2}, \\ \dot{z} &= 1. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Здесь I, ψ — амплитуда и фаза опорного сигнала блока идентификации и $\kappa = (\mu_a \mu_{id} |K(i\omega_a)| |K(i\omega_{id})| I^2 U^2) / (1 + \mu_{id} I^2)$.

В силу принятых предположений о малости амплитуды сигнала идентификации и низкой скорости настройки блока идентификации можно считать, что $\lambda \ll 1$ и система (4) описывает разрывные движения. Фактически, быстрые движения определяют настройку блока гашения, медленные — блока идентификации. Воспользовавшись известным условием несущественности малого параметра [6], несложно получить критерий устойчивости поверхности медленных движений относительно быстрых движений:

$$1 + \frac{\mu_a \mu_{id} |K(i\omega_a)| |K(i\omega_{id})| I^2 U^2 (1 - e^{-\frac{(1 + \mu_{id} I^2)t}{T_{id}}}) \cos(\Omega \tau_d)}{1 + \mu_{id} I^2} > 0 \quad (5)$$

Заметим, что $\mu_a |K(i\omega_a)| |K(i\omega_{id})| U^2$ есть эффективный коэффициент усиления в цепи корреляционной обратной связи блока гашения, величина которого в реальных экспериментах задается порядка $10^2 - 10^3$ [5]. Величина

эффективного коэффициента усиления блока идентификации задается порядком единицы. Следовательно, после завершения процесса начальной настройки блока идентификации, предусаждающий фильтр будет моделировать (на частоте ω_{id}) медленно меняющиеся параметры акустического тракта, и критерием устойчивости предлагаемой системы гашения в целом будет неравенство

$$|(\omega_a - \omega_{id})\tau_d| < \pi/2 \quad (6)$$

В совокупности с требованием достаточной удаленности частоты сигнала идентификации от полосы режекции блока гашения, неравенство (6) ограничивает "сверху" разность частот сигналов гашения и идентификации при максимально возможной эквивалентной задержке в акустическом тракте гасящий излучатель—контрольный приемник.

3. Условия (5), (6) получены в предположении, что исходное поле не содержит спектральных составляющих вблизи частоты ω_{id} . Корректный учет шумовых составляющих исходного поля вблизи частоты сигнала идентификации показывает, что при больших отношениях сигнал/шум вероятность устойчивой работы системы в целом близка к единице.

Для проверки эффективности работы предлагаемой АСАГ с дополнительным каналом идентификации был создан лабораторный макет, в котором нестационарный акустический тракт имитировался управляемой электронной линией задержки. Блоки гашения и идентификации были реализованы с помощью сигнального процессора TMS320C26. Полученные экспериментальные результаты подтвердили работоспособность рассматриваемой системы при медленных (по сравнению со скоростью настройки блока идентификации) изменениях времени распространения гасящего сигнала.

В заключение отметим, что данный подход к построению АСАГ с идентификацией, следуя работам [3; 4], может быть обобщен и на более сложные системы компенсации широкополосных полей со многими гасящими излучателями и контрольными приемниками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов С. П., Мазанников А. А., Тютюкин В. В. // Акуст. журн. 1984. Т. 30. N 5. С. 653.
2. Беляков А. А., Мальцев А. А., Медведев С. Ю., Черепенников В. В. // Акуст. журн. 1993. Т. 39. N 3. С. 433.
3. Арзамасов С. Н., Мальцев А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 26. N 8. С. 1008.
4. Elliott S., Stothers I., Nelson Ph. // IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Process. 1987. V. 35. N 10. P. 1423.

5. Арзамасов С. Н., Мальцев А. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 6. С. 698.
6. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 384 с.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
7 февраля 1995 г.

**AN ADAPTIVE SYSTEM FOR ACTIVE CANCELLATION OF THE
ACOUSTIC FIELD WITH AN AUXILIARY IDENTIFICATION CHANNEL**

A. A. Belyakov, A. A. Mal'tsev

An adaptive system for active cancellation of the narrow-band random acoustic field with an auxiliary identification channel for modelling nonstationary acoustic plant is investigated. The system stability criterion is found. The active cancellation system proposed has been tested experimentally.

ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ДИАГНОСТИКИ МОРСКОГО ДНА

А. Ю. Казарова, Л. Я. Любавин, А. Г. Нечаев

Оценивается путем численного эксперимента эффективность определения скорости звука, плотности и коэффициента затухания звука в дне на основе предложенного авторами метода интерференционной томографии дна океана. Моделирование проводится в присутствии случайной шумовой помехи и при неизвестной мощности источника излучения.

В [1] рассмотрен томографический метод восстановления вертикальной структуры акустических характеристик морского дна (осадков) по измерениям пространственного распределения интенсивности (интерференционной структуры) акустического поля в подводном волноводе. В представленной ниже работе оценивается эффективность определения скорости звука, плотности и коэффициента затухания звука в дне на основе предложенного в [1] метода.

Рассмотрим модель океанического волновода со скачком скорости звука и плотности на границе вода ($0 \leq z \leq D$) — дно ($D \leq z$), где ось z системы координат $\{\vec{r}, z\}$ направлена вертикально вниз. Пусть поле скорости звука имеет вид $\vec{c}(z) = c(z) + \delta c(z)$, а плотности $\bar{\rho}(z) = \rho(z) + \delta \rho(z)$, где зависимости $c(z)$ и $\rho(z)$ есть априорно известные (например, средние для исследуемого района), оценки профилей скорости звука и плотности. Дно будем считать вязким, жидким полупространством с плавно меняющимися акустическими характеристиками и относительно слабым затуханием. Пусть $\gamma\omega/c$ — коэффициент затухания звукового поля по амплитуде, учитывающий ослабление обусловленное, как поглощением, так и рассеянием звуковых волн в дне (ω — циклическая частота).

Полагая отклонение скорости звука $\delta c(z)$, плотности $\delta \rho(z)$ и коэффициента затухания γ от значений в опорном волноводе ($\bar{c} = c, \bar{\rho} = \rho, \gamma = 0$) достаточно малыми, применим теорию возмущений. Ограничиваясь членами первого порядка малости по параметрам $\delta c, \delta \rho, \gamma$ включительно, можно получить линейное интегральное соотношение [1], связывающее возмущения в величине интенсивности звукового поля $\delta I = \bar{I} - I$, где \bar{I} и I — интенсивности в исходном и опорном волноводах, с параметрами $\delta c, \delta \rho, \gamma$. Из решения полученного интегрального уравнения 1 рода определяются неизвестные зависимости $\delta c(z), \delta \rho(z), \gamma(z)$. Для этого, в общем

случае, требуется измерение двумерной пространственной интерференционной структуры звукового поля в вертикальной плоскости, проходящей через источник и приемник.

Рассмотрим эффективность восстановления $\delta c, \delta \rho, \gamma$ в случае, когда присутствует случайная шумовая помеха и неизвестна мощность излучения источника (дно считаем однородным). Тогда интегральное уравнение относительно неизвестных параметров $\delta c(z), \delta \rho(z), \gamma(z)$ имеет вид

$$\bar{I}(a, z, z_0) - I(a, z, z_0) = I_{ns} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \eta_{ij} K_{ij}(a, z, z_0), \quad (1)$$

где \bar{I}, I — интенсивность звукового поля в исследуемом и опорном волноводе, I_{ns} — интенсивность шума, K_{ij} — выражаются через характеристики нормальных мод опорного волновода, $\eta_{i1} = \delta c_i, \eta_{i2} = \delta \rho_i, \eta_{i3} = \gamma$. Величину η_j , стоящую перед K_{1j} и K_{2j} , предварительно заменили на величины η_{1i} и η_{2i} , которые формально считаются независимыми друг от друга. На основе формулы было проведено численное моделирование реконструкции параметров дна (при этом определялась также и мощность излучения источника P_s).

В численном эксперименте рассматривалась модель со следующими параметрами: глубина моря $D = 295$ м, скорость звука в воде — $1,483$ км/с, в дне — $1,750$ км/с, плотность в дне — $1,13 \times 10^3$ кг/м³, частота звука — 14 Гц. Глубина источника звука $z = 75$ м, глубина приемника — $z_0 = 55$ м. В качестве интенсивности шума использовалась случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0; 2\langle I_{ns} \rangle]$, имеющая среднее $\langle I_{ns} \rangle$ и дисперсию $\langle I_{ns} \rangle^2/3$. Случайные значения интенсивности шума I_{ns} прибавлялись к значениям интенсивности звука в точках измерения. При численном восстановлении использовалась программа решения интегральных уравнений [2], основанная на методе регуляризации Тихонова. Восстановление проводилось по участку горизонтального разреза интенсивности звука в интервале расстояний от источника $0,5 - 8$ км.

Основываясь на результатах проведенного численного моделирования можно сформулировать ряд выводов. Во-первых, относительная погрешность определения $\delta c, \gamma$ и $\delta \rho$ возрастают для малых (параметр слабо влияет на интерференционную структуру звукового поля) и больших (нарушаются условия применимости теории возмущений) значениях. Во-вторых, при адекватной априорной оценке параметров дна, позволяющей применить теорию возмущений, превышение сигнала над шумом порядка или больше 10 дБ обеспечивает, даже в случае неизвестной мощности источника, возможность удовлетворительной реконструкции одного из параметров $\delta c, \gamma$ или $\delta \rho$ при точно известных других параметрах. При этом абсолютная погрешность восстановления для скорости звука не превышает величины $\Delta c = 0,5$ м/с, для коэффициента затухания величины

$\Delta\gamma = 35 \cdot 10^{-5}$ и для плотности $\Delta\rho = 10 \text{ кг/м}^3$, что оказывается достаточным для практических целей [3]. В-третьих, при одновременном восстановлении всех трех параметров ($\delta c, \gamma$ и $\delta\rho$) точность определения δc и γ примерно соответствует случаю, когда проводилась реконструкция одного параметра.

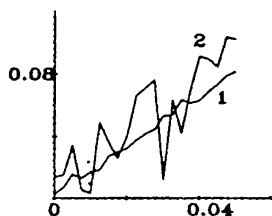


Рис. 1.

В качестве иллюстрации вышесказанного на рис. 1 и 2 представлены зависимости относительной погрешности восстановления скорости звука η_c и коэффициента затухания η_γ от величины отношения интенсивности шумовой помехи к максимальному значению интенсивности звукового поля для данного горизонтального разреза. Погрешности η_c и η_γ вычислялись по формулам $\eta_c = |c - c_r|/c$ и $\eta_\gamma = |\gamma - \gamma_r|/\gamma$, где c, γ — истинные значения, c_r, γ_r — значения, полученные в результате реконструкции. Расчёты сделаны при $\delta c = 50 \text{ м/с}$, $\gamma = 0,1$, и $\delta\rho = 400 \text{ кг/м}^3$. Графики с индексами 1 отвечают ядрам K_{1j} , а с индексами 2 — K_{2j} .

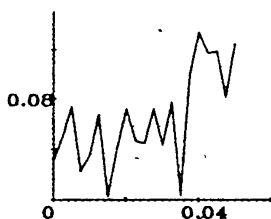


Рис. 2.

В тоже время точность определения $\delta\rho$ оказывается не совсем удовлетворительной, что обусловлено существенно более слабой чувствительностью интерференционной структуры звукового поля к возмущениям плотности по сравнению с чувствительностью к возмущениям в величине скорости звука или коэффициента затухания. В-четвертых, оптимизация схемы измерения, то

есть определение оптимального набора точек, в которых измеряется интенсивность, а также проведение измерений на нескольких частотах позволяет существенно повысить эффективность реконструкции параметров морского дна.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 93-02-15944).

ЛИТЕРАТУРА

1. Казарова А. Ю., Любавин Л. Я., Нечаев А. Г. // Акуст. журн. 1995. Т.41. № 3.
2. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. 225 с.
3. Акустика дна / Под ред. Купермана У., Енсена Ф. — М.: Мир, 1984. 454 с.

4. Акустика морских осадков / Под ред. Хэмптона Л. — М.: Мир, 1977. 533 с.

Институт прикладной физики
РАН, Н.Новгород

Поступила в редакцию
27 января 1995 г.

AN INTERFERENCE ALGORITHM FOR DIAGNOSTICS OF THE OCEAN BOTTOM

A. Yu. Kazarova, L. Ya. Lyubavin, A. G. Nechaev

The method of the ocean bottom interference tomography for determination of sound velocity, density and the sound attenuation coefficient in the bottom suggested by the authores is evaluated by numerical simulation. Simulation is made in the presence of random noise and in the case of unknown source power.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИНКРЕМЕНТ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА ВОДЕ И ИХ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВБЛИЗИ ПОРОГА УСТОЙЧИВОСТИ

В. П. Реутов, Ю. И. Троицкая

В рамках квазилинейного приближения исследуются амплитудные зависимости инкремента волн на воде, возбуждаемых турбулентным ветром.

Проведенные в последнее время исследования генерации поверхностных волн турбулентным ветром показали, что роль нелинейных эффектов в этом процессе весьма существенна [1-3]. Наибольший интерес представляет определение амплитудной зависимости скорости роста (инкремента) поверхностных волн и деформации профиля средней скорости ветра в атмосферном пограничном слое. Квадратичная по амплитуде добавка к инкременту линейной задачи входит в динамическое уравнение для модулированных волн вблизи порога устойчивости [4]. Информация о зависимости инкремента от амплитуды может быть использована также для уточнения границ применимости теории слабой турбулентности поверхностных волн.

В ряде работ (см., например, [2, 3]) для анализа нелинейных эффектов взаимодействия волн с турбулентным ветром использовалось прямое численное моделирование, опирающееся на сложные схемы параметризации турбулентности. Однако нелинейные эффекты могут быть описаны с хорошей точностью на основе более простого подхода, основанного на использовании квазилинейного приближения [4].

В настоящей работе на основе квазилинейной модели исследуются нелинейные характеристики взаимодействия двумерных волн на воде с турбулентным ветром. В отличие от [4] взволнованная поверхность предполагается гидродинамически гладкой и рассматривается широкий диапазон длин волн и динамических скоростей трения ветра. Кроме того, изучается стационарная генерация волн вблизи порога устойчивости.

Рассмотрим турбулентный пограничный слой над поверхностью воды, вдоль которой распространяется двумерная гармоническая волна с волновым числом k и амплитудой возвышения a . Оси x и y декартовой системы координат направим вдоль поверхности и по нормали к ней. Предполагается, что координатная система движется с фазовой скоростью волны c . Введем ортогональные криволинейные координаты ξ и η с помощью

соотношений

$$x = \xi + \operatorname{Re}[iae^{ik\xi - k\eta}], \quad y = \eta + \operatorname{Re}[ae^{ik\xi - k\eta}], \quad (1)$$

Координатная линия $\eta = 0$ с точностью до $(ka)^2$ совпадает с профилем волн Стокса. Применение криволинейных координат позволяет корректно описать волновое поле при возвышениях a , превышающих толщину вязкого подслоя в турбулентном пограничном слое. Для турбулентных напряжений σ_{ij} воспользуемся простейшей градиентной моделью:

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3}e\delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2)$$

Здесь e — средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций u_i — компоненты скорости в декартовых координатах, δ_{ij} — символ Кронекера ($i, j = 1, 2$). Коэффициент эффективной вязкости ветра ν равен сумме коэффициентов молекулярной (ν_a) и турбулентной вязкости. Предполагая поверхность воды гидродинамически гладкой, воспользуемся для ν выражением [5]

$$\nu = \nu_a [1 + \kappa\eta^+(1 - e^{-(\eta^+/L)^2})], \quad (3)$$

где u_* — скорость трения ветра, $\kappa = 0,4$ — постоянная Кармана, $\eta^+ = \eta u_*/\nu_a$, $L \simeq 22,4$.

Система уравнений гидродинамики, записанная через функцию тока ψ и завихренность χ , принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\chi J^3)}{\partial t} + J^2(\psi_n \chi_\xi - \psi_\xi \chi_n - J\Delta(\chi\nu)) = -2J\nu_{nn}\psi_{\xi\xi} - \\ - J_n((\psi_n \nu_n)_n - \nu_n \psi_{\xi\xi}) - J_\xi(2\nu_n \psi_{\xi n} - \psi_\xi \nu_{nn}) + \psi_n \nu_n \frac{J_\xi^2 + J_n^2}{J}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\psi_{\xi\xi} + \psi_{nn} = J\chi \quad (J = 1 - 2kae^{-k\eta} \cos k\xi + (ka)^2 e^{-2k\eta}).$$

Она должна быть дополнена граничными условиями непротекания и прилипания на поверхности раздела вода—воздух и условием отсутствия волновых возмущений на бесконечности. Для решения нелинейной системы (4) воспользуемся квазилинейной моделью в интерпретации [4], когда не учитываются высшие гармоники возмущения и решение ищется в виде

$$\chi = \chi_0(\eta) + \operatorname{Re}[\chi_1(\eta)e^{ik\xi}], \quad \psi = \psi_0(\eta) + \operatorname{Re}[\psi_1(\eta)e^{ik\xi}], \quad (5)$$

Средние поля $\chi_0(\eta)$ и $\psi_0(\eta)$ и амплитудные профили первой гармоники $\chi_1(\eta)$ и $\psi_1(\eta)$ удовлетворяют системе связанных уравнений. При этом в уравнениях для средних удерживаются члены второго порядка по малой

крутизне $ka \ll 1$. Контрольные вычисления с учетом второй гармоники показали, что ее вклад незначителен при достаточно малых ka . Средний волновой поток импульса зависит от вертикальной координаты η . Это приводит к деформации профиля средней скорости ветра $u_0(\eta)$, дающей амплитудную зависимость инкремента волны.

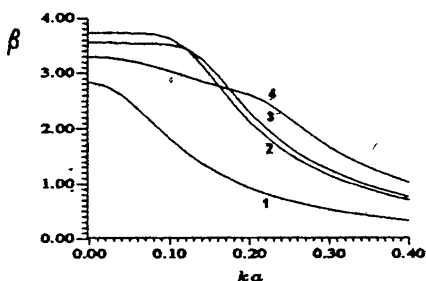


Рис. 1. Зависимость коэффициента взаимодействия волн с ветром β от крутизны волны при $k = 0,5 \text{ м}^{-1}$: 1 — $u_* = 18 \text{ см/с}$; 2 — $u_* = 23 \text{ см/с}$; 3 — $u_* = 24 \text{ см/с}$; 4 — $u_* = 30 \text{ см/с}$.

Используя сведение граничных условий к уровню $y = 0$, нетрудно показать, что в случае идеальной жидкости уравнение возбуждения поверхностной волны имеет вид $d\hat{a}/dt = -(i\rho_a/2c\rho_w)\hat{p}$, где \hat{p} и \hat{a} — комплексные амплитуды поверхностного давления, отнесенного к плотности воздуха ρ_a , и подъема поверхности ($|\hat{a}| = a$), ρ_w — плотность воды. В вязкой жидкости вблизи поверхности образуется динамический пограничный слой, благодаря которому в возбуждении волны участвует касательное напряжение, приложенное к поверхности жидкости. Пренебрегая течением в воде, для учета касательных и нормальных вязких напряжений достаточно сделать замену (см. об этом [7] с. 58) $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - \sigma_{22} + i\hat{\sigma}_{12}$, где $\hat{\sigma}_{22}$ и $\hat{\sigma}_{12}$ — комплексные амплитуды напряжений (2) (на поверхности $e = 0$). Расчеты проводились для безразмерного коэффициента взаимодействия волн с ветром β , через который выражается ветровая составляющая инкремента:

$$\gamma^{(a)} = \frac{1}{2}ck \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{u_*}{kc} \right)^2 \beta. \quad (6)$$

Используя приведенное выше уравнение возбуждения волны, можно представить β в виде $\beta = 2k^2(J/\rho_a u_*^2 k^2 a^2)$, где $J = (1/c)dE/dt$ — скорость увеличения импульса волны ($E = (1/2)\rho_w k c^2 a^2$ — плотность волновой энергии [7]). Поскольку $\rho_a u_*^2$ есть турбулентный поток импульса к воде, величина β по существу характеризует эффективность передачи импульса от течения к волне.

Конечно-разностная система уравнений для среднего течения и первой гармоники решалась методом итераций. При этом для решения систем линейных алгебраических уравнений использовался метод исключения Гаусса.

На рис. 1 показаны амплитудные зависимости коэффициента взаимодействия волн с ветром β для различных u_* . При малой крутизне волн ($ka \ll 1$) нелинейная добавка к инкременту квадратична по амплитуде:

$\beta = \beta_0 + \beta_1(ka)^2$. На рис. 2 представлены зависимости β_0 и параметра нелинейности β_1 от u_* для различных длин волн. Видно, что $\beta_1 < 0$ при значениях $k \geq 0,5 \text{ м}^{-1}$, при которых нелинейность уменьшает скорость роста волн. При $k \simeq 0,5 \text{ м}$ имеется небольшая область скоростей вблизи $u_*/c \simeq 0,04$, где $\beta_1 > 0$, и, следовательно, нелинейность ускоряет рост волн. Однако, приращение β в этом случае невелико, и следует говорить, скорее, об исчезновении зависимости β от крутизны волны при малых ka .

Для рассмотрения процесса генерации волн вблизи порога устойчивости представим ветровую составляющую инкремента и декремент затухания волны из-за потерь в воде, соответственно, в виде: $\gamma^{(a)} = \gamma_0^{(a)} - \gamma_1^{(a)}(ka)^2$ и $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1(ka)^2$, где $\gamma_0^{(a)}$ и $\gamma_1^{(a)}$ выражаются через β_0 и β_1 (см. (6)); $\gamma_0 = 2\nu_w k^2$ — скорость затухания волн на воде бесконечной глубины, (ν_w — кинематическая вязкость воды, γ_1 — параметр нелинейного затухания в воде). Значения скорости трения ветра u_{*c} и волнового числа k_c на пороге устойчивости находятся из условия $\gamma_0^{(a)} = \gamma_0$ с учетом дисперсионного соотношения для гравитационно-капиллярных волн. Расчеты в рамках нашей модели дают $u_* = 4,95 \text{ см/с}$ и $k_c = 1 \text{ см}$ (в теории Майлса [6], эти значения равны 4,4 см/с и 1,8 см).

При малых отклонениях u_* от u_{*c} можно записать уравнение Ландау для крутизны $s = ka$ волны с волновым числом $k = k_c$:

$$\frac{ds}{dt} = K(u_* - u_{*c})s - (\gamma_1 + \gamma_1^{(a)})s^3, \quad (7)$$

где $K = \left(\frac{\partial \gamma_0^{(a)}}{\partial u_*}\right)_c$. В стационарном режиме генерации (7) дает $s = C \left[\frac{U - U_c}{U_c}\right]^{1/2}$, где U и U_c — скорость ветра и ее критическое значение на произвольной высоте l в области логарифмического профиля скорости, C — постоянная, определенная выражением $C = [Ku_{*c}/(\gamma_1^{(a)} + \gamma_1)]^{1/2}$. Вычисления дают $K = 0,12 \text{ см}^{-1}$, $\gamma_0^{(a)} = \gamma_0 = 0,02 \text{ с}^{-1}$ и $\gamma_1^{(a)} = 57\gamma_0$; $U_c = 1,4 \text{ м/с}$ на высоте $l = 5 \text{ м}$. Для определения γ_1 в [1] использовалась формула из работы [8]. В нашем случае эта формула дает значения $\gamma_1 = 5,6\gamma_0$. Таким образом, на пороге устойчивости $\gamma_1^{(a)}/\gamma_1 \simeq 10,2$, то есть вклад нелинейности воздуха приблизительно на

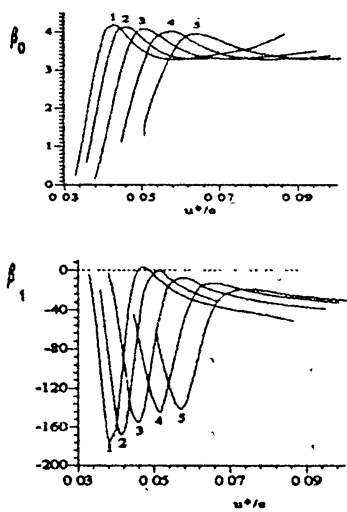


Рис. 2. Зависимость линейного коэффициента взаимодействия волны с ветром β_0 и параметра нелинейности β_1 от u_*/c : 1 — $k = 0,3 \text{ м}^{-1}$; 2 — $k = 0,5 \text{ м}^{-1}$; 3 — $k = 1 \text{ м}^{-1}$; 4 — $k = 2 \text{ м}^{-1}$; 5 — $k = 4 \text{ м}^{-1}$.

порядок превосходит вклад диссипативной нелинейности воды. При этом получается значение $C = 0,69$ вместо $C = 0,4$, найденного в [1], где учитывался только вклад нелинейности воды. Преобладание нелинейности воздуха можно объяснить тем, что при равенстве линейного поглощения и инкремента неустойчивости нелинейность усиливается вследствие резонансного взаимодействия волнового поля с ветром, несмотря на то, что эти резонансные эффекты ослабляются действием турбулентной вязкости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант NOV000) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-05-8075).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fabrikant A. L. //Wave Motion. 1980. V. 2. P. 355.
2. Chalikov D. V. //Boundary Layer Meteorol. 1986. V. 34. P. 63.
3. Al-Zanaidi M. A. and Hui W. H. //J. Fluid Mech. 1984. V. 148. P. 225.
4. Jenkins A. D. //J. Phys. Oceanogr. 1992. V. 22. N 8. P.843.
5. Miles J. W. //J. Fluid Mech. 1962. V. 13, pt. 3. P.433.
6. Смольяков А. В. //Акуст. ж. 1973. Т. 19. Вып. 3. С. 420.
7. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
8. Красильников В. А., Павлов В. И. //Вестн. Моск. ун-та. Физика и Астрон. 1972. Т. 13. N 1. С. 94.

Институт прикладной физики
РАН, Н. Новгород

Поступила в редакцию
7 февраля 1995 г.

THE NONLINEAR GROWTH RATE OF WIND WATER WAVES AND THEIR EXCITATION NEAR THE STABILITY THRESHOLD

V. P. Reutov, Yu. I. Troitskaya

The amplitude dependences of the growth rate of water waves generated by the turbulent wind are theoretically investigated.

УДК 532.59; 532.536

МЯГКОЕ И ЖЕСТКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НА УПРУГОМ ПОКРЫТИИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. П. Реутов, Г. В. Рыбушкина

Исследуется нелинейная стадия неустойчивости волн на упругих покрытиях, обтекаемых турбулентным пограничным слоем несжимаемой жидкости. Показано, что неустойчивость типа флаттера бегущих волн приводит к мягкому возбуждению волн, а неустойчивость типа "волновой дивергенции" определяет жесткое возбуждение.

Устойчивый интерес к проблеме генерации волн на упругих покрытиях, обтекаемых потоками жидкости или газа, определяется развитием исследований по управлению переходом к турбулентности в пограничном слое, снижению сопротивления обтекания и подавлению вибраций. К настоящему времени наибольшие успехи достигнуты в линейной теории неустойчивости волн на упругих покрытиях, находящихся под ламинарным пограничным слоем [1-3]. Сравнительно недавно начавшиеся исследования нелинейных эффектов также проводились для ламинарного обтекания [4, 5]. Однако наиболее впечатляющие картины волнового поля в экспериментах были получены на покрытиях, обтекаемых турбулентным пограничным слоем. В этом случае наблюдаются два различных режима генерации — флаттер бегущих волн и "волновая дивергенция". Флаттер, который наблюдается на покрытиях с малыми потерями, характеризуется фазовыми скоростями волн $c \approx (0,3-0,4)U$ (U — скорость свободного течения) и относительно малыми отклонениями поверхности покрытия [3, 6]. Режим дивергенции возникает на покрытиях с большими потерями и характеризуется малыми значениями фазовой скорости волн ($c \leq 0,05U$) и большими отклонениями поверхности покрытия [1, 2]. Целью данной работы является выяснение природы этих режимов возбуждения волн.

Следуя [1, 2] воспользуемся моделью покрытия в виде тонкой пластинки, расположенной на распределенном пружинном основании. Тогда уравнение для отклонения поверхности $\zeta(x, t)$ запишется в виде

$$m\zeta_{tt} + b\zeta_t + B\zeta_{xxxx} - T\zeta_{xx} + K\zeta = -p, \quad (1)$$

где m — масса на единицу площади, B — изгибная жесткость, T — коэффициент натяжения, K — упругость пружинного основания, b — коэффициент потерь, p — поверхностное давление. Параметры пластинки в (1)

подбираются так, чтобы в отсутствие жидкости ($p \equiv 0$) и потерь ($b = 0$) зависимость фазовой скорости бегущих волн $\zeta = (1/2)a \exp(ikx - i\omega t) + \text{к.с.}$ от волнового числа k была такой же, как для волн на поверхности вязко-эластичного слоя из резиноподобного материала. Для этого полагаем $B = 0$, $T = mc_t^2$, $K = 1, 4\pi c_t^2/d^2$, где $c_t = \sqrt{G/\rho_s}$ (G — сдвиговой модуль, ρ_s — плотность материала покрытия), d — толщина слоя. Используя вывод дисперсионного уравнения, данный в [7], был произведен анализ отклика поверхности слоя с потерями на внешнее давление и получено явное выражение для b в пределе $\omega \rightarrow 0$:

$$b = 2\rho_s c_t k d \gamma_t \frac{1 + 2(kd)^2 + \text{ch}(2kd)}{\text{sh}(2kd) - 2(kd)}, \quad (2)$$

где $\gamma_t = \tau_t c_t/d$ (τ_t — время релаксации). Отклик течения на прогиб пластинки можно описать с помощью “входной” комплексной упругости $Y(\omega, k) = \hat{p}/a$, где \hat{p} — комплексная амплитуда поверхностного давления. Для определения действительной части упругости в линейном пределе $Y_r^{(0)}$ была использована квазиламинарная модель, построенная в [8, 9]. На основе вычислений для $0 < k\delta \leq 15$ и $\text{Re}K = U\delta/\nu \sim 1,5-3 \cdot 10^4$ (где δ — толщина пограничного слоя, ν — кинематическая вязкость жидкости) была получена аппроксимация

$$Y_r^{(0)} = -k\rho \left[f(k)U - \frac{\omega}{k} \right]^2, \quad (3)$$

где $f = 1/(1 + 0,7k\delta)^{0,34}$ (ρ — плотность жидкости). При $k\delta \ll 1$, когда $f \approx 1$, (3) переходит в известное выражение для потенциального течения. Для определения мнимой части комплексной упругости была использована квазиламинарная модель, развитая в [10] для атмосферного пограничного слоя; в которой учитывается зависимость турбулентной вязкости от высоты. С точностью до квадратичных по амплитуде членов

$$Y_i = \rho \left(\frac{u_*}{\kappa} \right)^2 k [z_0(\omega, k) + z_1(\omega, k)|ka|^2],$$

где u_* — динамическая скорость трения, $\kappa \simeq 0,4$ — постоянная Кармана, $z_{0,1}$ — безразмерные функции.

Используя (1) и (3), можно получить дисперсионное уравнение линейной системы, которое в безразмерной записи имеет вид

$$D(\Omega, \alpha) \equiv D_r(\Omega, \alpha) + iD_i(\Omega, \alpha) = 0, \quad (4)$$

где $D_r = \sigma(\Omega^2 - \alpha^2 - 1, 4) + \alpha q \sigma [fV - (\Omega/\alpha)]^2$, $D_i = \beta\Omega - y_i$ и приняты обозначения: $\sigma = m/\rho_s d$, $q = \rho/\rho_s \sigma$, $\alpha = kd$, $V = U/c_t$, $\Omega = \omega d/c_t$, $\beta = b/\rho_s c_t$ и

$y_i = Y_i d / \rho_i c_i^2$ при $\alpha = 0$. Параметр σ (см. рис. 1) вычисляется путем сравнения коэффициента при ω^2 в разложении частотной зависимости входных упругостей слоя и пластинки. Рассматривались скорости течения $V^2 < [1 + (q/\alpha)(1,4 + \alpha^2)] / \alpha q f^2$, при которых дисперсионное уравнение консервативной задачи $D_r = 0$ имеет два действительных корня $\Omega_{1,2}(\alpha)$. На рис. 2 показано поведение этих корней при $q = 0,4$, $V = 0,65$. Медленные волны в интервале по α , отмеченном штриховкой, имеют отрицательную энергию, тогда как энергия быстрых волн всегда положительна. Нейтральная кривая на плоскости (α, V) определяется уравнениями $D_r = 0$ и $D_i = 0$. При малых β критическая скорость появления неустойчивости V_c определяется быстрыми волнами, т.е. возникает режим флаттера бегущей волны. При достаточно больших β критическая скорость определяется возбуждением медленных волн и реализуется режим волновой дивергенции. Результаты вычисления V_c для этих двух случаев и сравнение с экспериментом даны на рис. 3 (Δ, \circ — эксперимент для флаттера и дивергенции [3, 4], такие же темные символы — теоретический расчет для покрытий с $\rho \approx \rho_s$ и различными значениями G). На рис. 4 представлены зависимости от фактора потерь критической скорости течения (а) и фазовой скорости возбуждаемых волн (б) при $q = 0,4$ (1 — $G = 1117$ дин/см², 2 — $G = 84$ дин/см²). Вертикальные пунктирные линии разграничивают области дивергенции и флаттера.

Обращаясь к нелинейной задаче, домножим (4) на фурье-образ ζ и включим в это уравнение нелинейный сдвиг Y_i . Решение для ζ ищем в виде бегущей волны, имеющей частоту Ω_c и волновое число α_c , соответствующие порогу устойчивости, и медленную зависимость амплитуды от времени. Определим безразмерные переменные как $\tau = c_i t / d$, $A = k|a|$, $\gamma = (\rho/\rho_s)kd(u_s/\kappa c_i)^2 z_1$. Тогда при малой надкритичности $\epsilon = (V - V_c)/V_c$ можно получить уравнение Ландау для A в виде

$$\frac{dA}{d\tau} = R\epsilon A - \lambda_3 A^3, \quad (5)$$

где $R = V_c[s_2(D_r)'_V - s_1(D_i)'_V] / (s_1^2 + s_2^2)$, $\lambda_3 = -\gamma s_1 / (s_1^2 + s_2^2)$, и $s_{1,2} = (D_{r,i})'_\Omega$ (штрихи обозначают частные производные в критической точке Ω_c, α_c, V_c).

Важно иметь в виду, что в общем случае следует учитывать нелинейные сдвиги упругости слоя и реальной части Y . Чтобы исключить их влияние, ограничимся приближением слабо диссипативной среды, когда выполняется условие $|(D_i)'_\Omega / (D_r)'_\Omega| \equiv \mu \ll 1$. Тогда эти нелинейные сдвиги должны превышать нелинейный сдвиг Y_i в $1/\mu$ или более раз, чтобы они оказывали влияние на величину λ_3 .

Результаты вычисления коэффициентов (5) в режиме волнового флаттера и дивергенции даны в таблице (случаю флаттера соответствует $\beta = 0$). Параметр μ всегда был мал для флаттера и составлял $\approx 0,1$

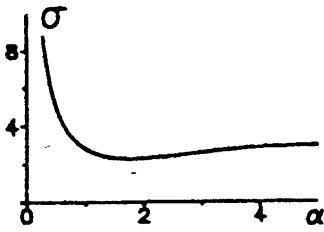


Рис.1

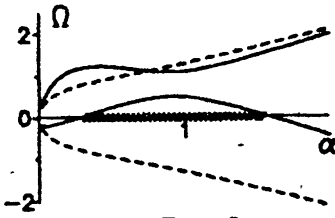


Рис.2

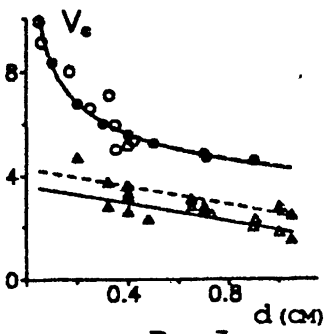
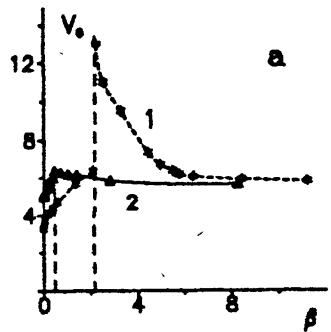
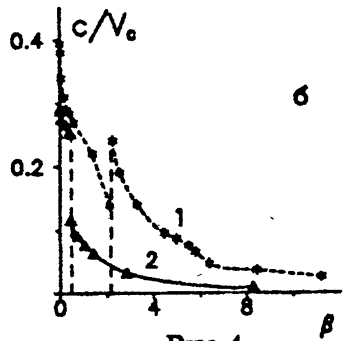


Рис.3



а



б

Рис.4

Таблица

d [см]	G [ДНН/см ²]	α_c	c/V_c	β	R	λ_3
0,4	20	0,8	0,098	0,22	0,84	-0,017
0,4	30	0,75	0,091	0,29	0,98	-0,060
0,32	737	1,2	0,364	0	0,0787	0,061
0,4	1117	1,4	0,391	0	0,0624	0,042

в расчетах для дивергенции.

Видно, что в режиме флаттера $\lambda_3 > 0$ и реализуется мягкое возбуждение волн, тогда как при дивергенции $\lambda_3 < 0$ и уравнение (5) имеет "взрывные" решения, определяющие жесткое возбуждение (см. данные для $\beta \neq 0$ в таблице).

Нелинейный сдвиг Y_i имеет один и тот же знак для обоих режимов ($z_1, \gamma < 0$). Однако он играет различную роль при флаттере и дивергенции, поскольку волновая энергия меняет знак, который совпадает со знаком $s_1 = (D_r)'_0$. Быстрые волны имеют положительную энергию ($s_1 > 0$), что дает $\lambda_3 > 0$, а медленные волны — отрицательную ($s_1 < 0$) и, соответственно, $\lambda_3 < 0$.

Проведенный анализ позволяет предположить, что волновая дивергенция с большой амплитудой волн на покрытиях с достаточно большими потерями связана с наличием жесткого режима возбуждения медленных волн.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-05-8075) и Международного научного фонда (грант NOV000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Carpenter P. W. and Garrad A. D. //J. Fluid Mech. 1985. V. 155. P. 465.
2. Carpenter P. W. and Garrad A. D. //J. Fluid Mech. 1986. V. 170. P. 199.
3. Gad-el-Hak M., Blackwelder R. F., and Riley J. //J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 257.
4. Rotenberry J. M. //Phys. Fluids A. 1992. V. 4. N 2. P. 270.
5. Pierce R. //Phys. Fluids A. 1992. V. 4. N 11. P. 2486.
6. Gad-el-Hak M. //Appl. Mech. Rev. 1986. V. 39. N 4. P. 511.
7. Duncan J. H., Waxman A. M., and Tulin M. P. //J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 177.
8. Реутов В. П. //ПМТФ. 1992. N 4. С. 74.
9. Реутов В. П. //ПМТФ. 1993. N 2. С. 58.
10. Реутов В. П., Троицкая Ю. И. //Изв. РАН. Физика атмос. и океана. 1995. N 4-5 (в печати).

Институт прикладной физики
РАН, Н. Новгород

Поступила в редакцию
7 февраля 1995 г.

**SOFT AND HARD WAVE EXCITATION ON AN ELASTIC COVERING
IN A TURBULENT BOUNDARY LAYER**

V. P. Reutov, G. V. Rybushkina

We investigate a nonlinear stage of the wave excitation on elastic coverings streamlined by a turbulent boundary layer of a noncompressed fluid. It has been shown that the travelling wave flutter instability leads to the soft wave excitation and the "wave divergence" instability defines the hard wave excitation.

УДК 621.396

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДИСКРЕТНЫХ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Ю. В. Широков, Л. Н. Казаков

Широкое внедрение дискретных систем фазовой синхронизации поставило ряд проблем, связанных с моделированием и исследованием многокольцевых связанных систем. Особенностью их, наряду с существующими между кольцами перекрестными связями, является наличие нескольких, в общем случае произвольных, периодов дискретизации. Существование последних, а также наличие периодических нелинейностей, характерных для фазовых детекторов, входящих в состав отдельных колец СФС, создает серьезные трудности уже на этапе моделирования. Следует отметить, что несмотря на большой интерес к подобным системам разработчиков, глубокие исследования их практически отсутствуют. Можно указать лишь несколько работ авторов данной статьи [1,2], в которых делается попытка поставить проблемы изучения связанных дискретных систем и наметить пути их решения.

В предлагаемой работе исследуется динамика двухкольцевой системы фазовой синхронизации параллельной структуры, в которой одно из колец формирует сигнал переноса для другого кольца. Подобные "связки" являются характерными для синтезаторов частоты и широко применяются на практике [3].

По сравнению с традиционными многокольцевыми моделями в рассматриваемую систему дополнительно введены узлы, с помощью которых учитывается взаимное влияние колец. Авторами проведено математическое моделирование объекта исследования, с помощью теории точечных отображений проведен анализ периодических и квазипериодических движений, получены области устойчивости в целом состояний синхронизма.

Структурная схема исследуемой системы приведена на рис. 1. В нее входят два однотипных бесфильтровых кольца, содержащие импульсно-фазовые детекторы (ИФД1 и ИФД2) "выборка—запоминание", делители с переменным коэффициентом деления (ДПКД1 и ДПКД2) с коэффициентами деления N_1 и N_2 соответственно, перестраиваемые по частоте генераторы (ПГ1 и ПГ2) и линейный частотный смеситель (См). Фазовые детекторы имеют пилообразную характеристику, представленную на рис. 2. С помощью линейных узлов с коэффициентами передачи (ϑ, μ) учитывается взаимное влияние колец.

Пусть входные частоты колец СФС $\omega_{вх1}$ и $\omega_{вх2}$, отношение периодов дискретизации в кольцах $T_{p1}/T_{p2} = k_1/k_2$ (k_1, k_2 — целые числа). Не нару-

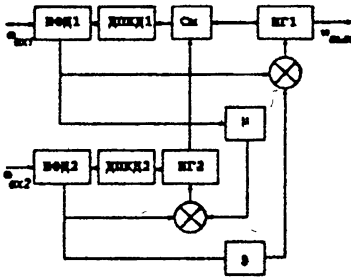


Рис. 1.

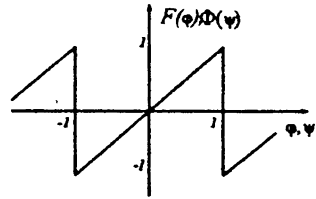


Рис. 2.

шая общности, положим $N_1 = N_2 = 1$. Введем дополнительное разбиение шкалы времени на отрезки $\Delta T = T_{p1}/k_1 = T_{p2}/k_2$, при этом любой дискретный момент времени в системе можно определить как $(n \cdot T + i \cdot \Delta T)$, где $T = \Delta T \cdot k_1 \cdot k_2$. Такое разбиение позволяет получить математическую модель в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_{n,i+1} = \varphi_{n,i} + \frac{\alpha}{k_1} \left\{ \gamma_{H1} - \left(1 - \frac{\mu}{l}\right) F(\varphi_{n,\eta(i)}) \right\} + \frac{(1 - \vartheta l)\beta}{k_2} \Phi(\psi_{n,\tau(i)}), \\ \psi_{n,i+1} = \psi_{n,i} + \frac{\beta}{k_2} \left\{ \gamma_{H2} - \Phi(\psi_{n,\tau(i)}) \right\} - \frac{\mu\alpha}{lk_1} F(\varphi_{n,\eta(i)}), \end{cases} \quad (1)$$

где $\varphi_{n,i}$, $\psi_{n,i}$ — разность фаз на входах первого и второго фазовых детекторов в дискретные моменты времени, $F(\varphi)$, $\Phi(\psi)$ — 2π -нормированные периодические пилообразные характеристики детекторов, $\alpha = \Omega_{y1} \cdot T_{p1}$, $\beta = \Omega_{y2} \cdot T_{p2}$ — обобщенные коэффициенты усиления колец, Ω_{y1} , Ω_{y2} — полосы удержания, T_{p1} , T_{p2} — периоды дискретизации в кольцах, μ , ϑ — параметры, характеризующие степень взаимосвязи колец, γ_{H1} , γ_{H2} — нормированные на полосы удержания начальные частотные расстройки в кольцах, $l = S_{ПГ1}/S_{ПГ2}$ — нормирующий коэффициент ($S_{ПГ1}$ — крутизна характеристики управления ПГ1, $S_{ПГ2}$ — крутизна характеристики управления ПГ2), $k_1/k_2 = T_{p1}/T_{p2}$ — соотношение периодов дискретизации, $\eta(i) = \left[\frac{i}{k_1} \right] \cdot k_1$, $\tau(i) = \left[\frac{i}{k_2} \right] \cdot k_2$ (здесь $[\cdot]$ — целая часть числа).

Анализ движения (1) довольно сложен. Стационарное состояние системы, определяемое из условия $\begin{cases} \varphi_{n,i+1} = \varphi_{n,i} \\ \psi_{n,i+1} = \psi_{n,i} \end{cases}$, $\forall n, i$, имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^0 = \frac{\left(\gamma_{H1} + (1 - \vartheta l) \frac{\beta k_1}{\alpha k_2} \gamma_{H2} \right)}{(1 - \mu \vartheta)}, \\ \psi^0 = \gamma_{H2} - \frac{\mu \alpha k_2}{\beta l k_1} \frac{\left(\gamma_{H1} + (1 - \vartheta l) \frac{\beta k_1}{\alpha k_2} \gamma_{H2} \right)}{(1 - \mu \vartheta)}, \end{cases} \quad (2)$$

Для расчета устойчивости стационарного состояния $(\varphi^0, \psi^0)^T$ стандартные методы, используемые в теории дискретных систем, не подходят. Предлагается рассматривать движение системы вблизи стационарного состояния в моменты времени $t = n \cdot T$, где $T = \Delta T \cdot k_1 \cdot k_2$ (т.е. в моменты времени, когда импульсы дискретизации в обоих кольцах СФС совпадают). В этом случае систему (1) можно представить в виде матричного уравнения $X_{n+1} = A \cdot X_n + B$, где $X_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n,0} \\ \psi_{n,0} \end{pmatrix}$. Элементы матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и вектора $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ рассчитываются отдельно для любого определенного соотношения $T_{p1}/T_{p2} = k_1/k_2$. При этом локальная устойчивость и характер движений вблизи стационарного состояния системы (1) определяются собственными значениями матрицы A .

На рис. 3 а, б, в, г приведены диаграммы локальной устойчивости в области параметров α, β для различных значений k_1, k_2 . Области устойчивости ограничены жирной линией и разделены на участки с характерными движениями: 1 — периодическое устойчивое движение, 2 — колебательное устойчивое движение. Анализ показал сильную зависимость в распределении области устойчивости от параметра μ и соотношения k_1/k_2 . Гораздо меньше проявляется влияние коэффициента ϑ , увеличение которого приводит к сжатию области устойчивости по оси β . При $\mu/l \rightarrow 1$ происходит сильное вытягивание диапазона устойчивости по параметру α (см. рис. 3 а, б). Интересная особенность проявляется для $k_1/k_2 \approx 1$. В этом случае при увеличении значений k_1 и k_2 наблюдается сложное искривление границ области устойчивости, а также разбиение ее на совокупность подобластей по типу движения. Иллюстрация этого приведена на рис. 3в. При малой взаимной зависимости колец СФС ($\vartheta \ll 1, \mu \ll 1$) соотношение периодов (k_1/k_2) сильной роли не играет и область локальной устойчивости близка к виду известного "прямоугольника" устойчивости для несвязанных колец (рис. 3г).

Пространством состояний отображения (1) является тор. Для удобства анализа введем понятие вектора состояния $(\varphi_{n,i}, \psi_{n,i})^T$, характеризующего состояние системы в дискретные моменты времени $n \cdot T + i \cdot \Delta T$. Нелинейный анализ системы (1) проведем с помощью метода точечных отображений. Введем некоторые понятия. Определим циклом $\left(\frac{q, r}{p}\right)$ периодическое движение периода p , при котором приращение координаты $\varphi \pmod{\pi}$ равно $2q$, приращение координаты $\psi \pmod{\pi}$ равно $2r$ за период времени $t = \Delta T \cdot p$. Вектор состояния системы $(\varphi_{n+1,0}, \psi_{n+1,0})$ полностью определяется последовательностью $(k_1 \cdot k_2)$ отображений вектора $(\varphi_{n,0}, \psi_{n,0})$, поэтому период любого циклического движения будет кратным $(k_1 \cdot k_2)$. Циклы вида $\left(\frac{p, 0}{k_1 \cdot k_2}\right)$ будем называть кратными захва-

тами по координате φ , аналогично циклы вида $\left(\frac{0, r}{k_1 \cdot k_2}\right)$ будем называть кратными захватами по координате ψ . Определить возникновение циклических движений можно из условия $\begin{cases} \varphi_{n+1,0} = \varphi_{n,0} \\ \psi_{n+1,0} = \psi_{n,0} \end{cases}, \forall n.$

Для пояснения возможных нелинейных движений рассмотрим плоскость состояний системы (1), представленную на рис. 4. Здесь прямая AB — линия отображения с сохранением координаты φ , определяемая из первого уравнения (1), прямая CD — линия отображения с сохранением координаты ψ , определяемая аналогично из второго уравнения (1), точка O — стационарное состояние, определяемое выражением (2). Прямые отображения с изменением координат на m_1, m_2 периодов по φ и по ψ определяются из условия

$$\begin{cases} \varphi_{n,i+1} = \varphi_{n,i} + 2 \cdot m_1 \pmod{\pi}, & \frac{i}{k_2} = \left[\frac{i}{k_2} \right] \\ \psi_{n,i+1} = \psi_{n,i} + 2 \cdot m_2 \pmod{\pi}, & \frac{i}{k_1} = \left[\frac{i}{k_1} \right] \end{cases}, \forall n, \quad (3)$$

а их пересечения образуют точки кратных захватов. На рис. 4 примерами таких прямых при $m_1 = 1, m_2 = -1$ являются прямые MN и KL . Кратным захватом по φ является точка O_1 , структура циклического движения, возникающего при движении из точки O_1 , имеет вид $\left(\frac{1, 0}{k_1 \cdot k_2}\right)$. Кратным захватом по ψ является точка O_2 , структура циклического движения, возникающего при движении из точки O_2 , имеет вид $\left(\frac{0, 1}{k_1 \cdot k_2}\right)$. Таким образом, для ситуации, изображенной на рис. 4, является характерным наличие как минимум трех устойчивых образований, т.е. состояние O не является глобально устойчивым. Кроме изображенных устойчивых движений O_1, O_2 в принципе могут существовать другие периодические движения. Рассмотрим условия их существования. На рис. 4 показаны области нелинейного отображения: Q_1, Q_2 — области, из которых происходит нелинейное отображение по ψ и φ соответственно, Q'_1, Q'_2 — области, в которые попадает вектор состояния в результате нелинейного отображения по тем же координатам. Любое нелинейное отображение (1) можно представить в виде:

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B + S,$$

где $S = (2 \cdot q, 2 \cdot r)^T$ — вектор нелинейного смещения на q периодов по координате φ и r периодов по координате ψ . Тогда для p -отображений системы (1) получим:

$$X_{n+p} = A^p \cdot X_n + \frac{E - A^p}{E - A} \cdot B + \sum_{j=1}^p A^{p-j} \cdot S_j, \quad (4)$$

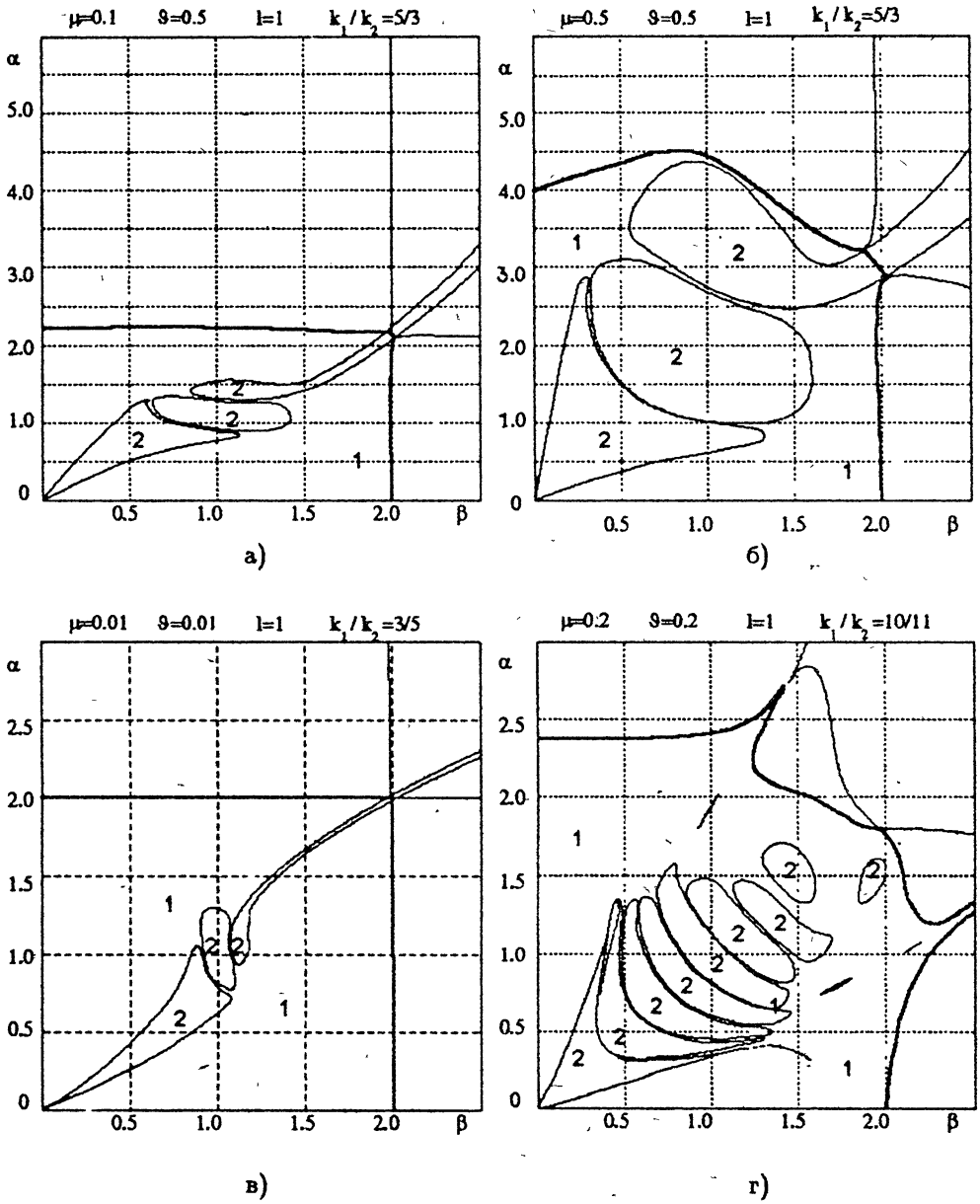


Рис. 3.

здесь $S_j = (2 \cdot q_j, 2 \cdot r_j)^T$ — вектор нелинейного смещения на $(n + j)$ -шаге отображений. В случае линейного отображения $S_j = (0, 0)^T$. Для циклического движения с периодом p необходимо условие

$$X_{n+p} = X_n, \quad (5)$$

при этом хотя бы один из векторов S_j должен иметь отличную от нуля координату. Таким образом, при тождественности отображений (1) и (4) найденные из уравнения (5) координаты вектора X_n будут являться точкой траектории циклического движения определенной структуры $\left(\frac{\sum q_j, \sum r_j}{p}\right)$. Анализ условий возникновения периодических движений заключается в определении областей начальных расстроек, в которых при тождественности отображений (1) и (4) выполняется условие (5). При этом легко доказать, что этот цикл будет устойчивым, если устойчива рассчитываемая матрица A .

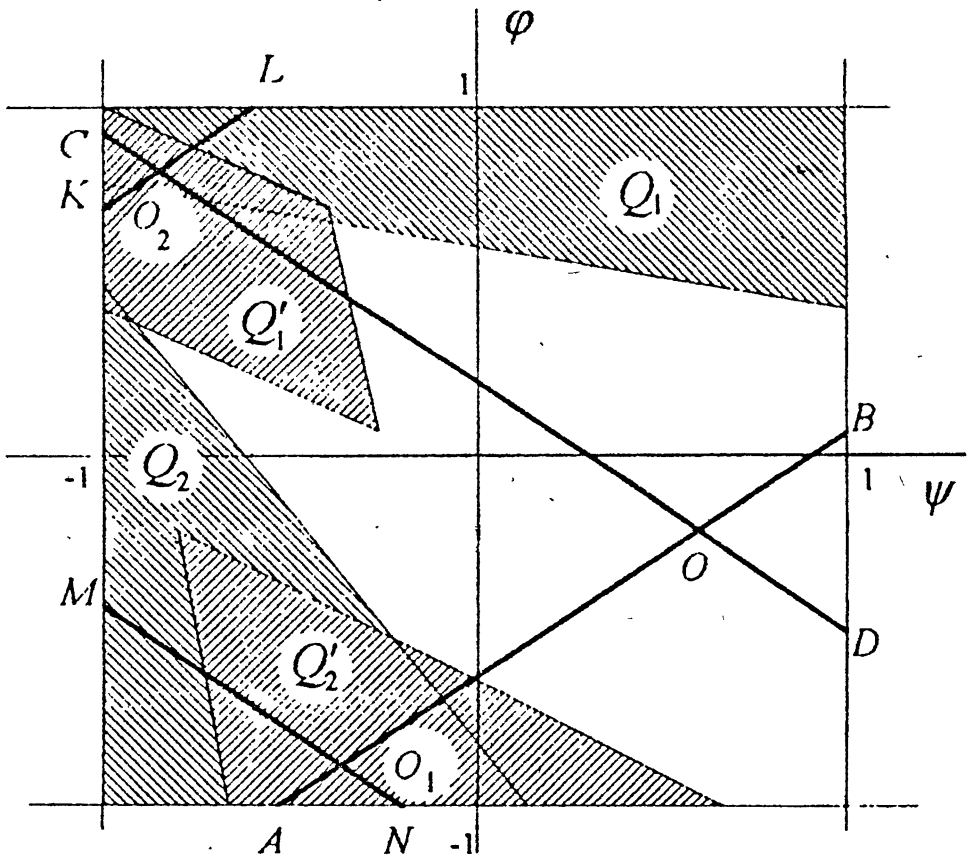


Рис. 4.

Выражения (3), (4) и (5) положены в основу алгоритма расчета областей существования периодических движений. На рис. 5а и рис. 5б приве-

дены такие области, соответственно, для слабых и сильных связей между кольцами. Штриховкой отмечены области существования стационарных состояний (СС). Жирными линиями выделены области существования кратных захватов. Распределение областей на рис. 5а типично для несвязанных колец. Область стационарных состояний - "чистая", с ней не пересекаются ни области кратных захватов, ни других периодических движений, которых достаточно много при больших начальных расстройках. При $\alpha > 1$, $\beta > 1$, а также при увеличении коэффициентов μ , ν появляются общие зоны у областей стационарных состояний и кратных захватов, кроме того, в область СС входят области некоторых периодических движений, ограничивающие глобальную устойчивость стационарного состояния. Области сложных периодических движений существенно зависят от отношения k_1/k_2 . Для примера на рис. 5б и рис. 5в приведено распределение таких областей для $\frac{k_1}{k_2} =$

$= 1/2$ и $\frac{k_1}{k_2} = 1/5$. Отметим заметное сужение областей ПЦ (не относящихся к кратным захватам). Рабочим диапазоном начальных расстройек в этом случае следует считать область под ломанной, образованной границами этих областей.

Анализ показал, что при увеличении связей между кольцами в область существования СС попадают области кратных захватов (рис. 5в), а также области возникновения других периодических движений. Отличительной особенностью областей существования циклов является их более узкий и вытянутый вид. С ростом значений k_1

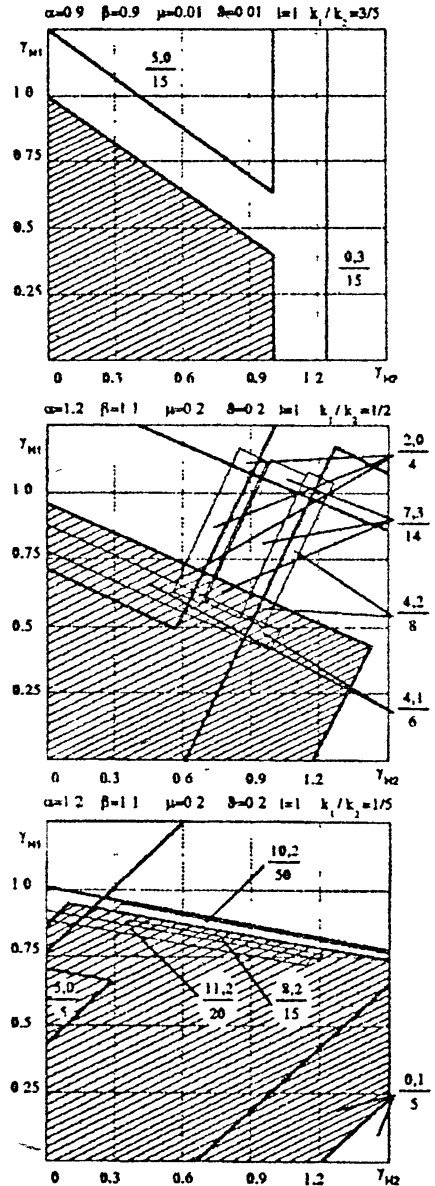


Рис. 5 а, б, в.

и k_2 области возникновения сложных периодических движений уменьшаются в размере и определяющую роль в определении глобальной устойчивости стационарного состояния играют области существования кратных захватов. Для слабых связей и малых коэффициентов усиления в кольцах картина распределения названных областей аналогична приведенной на рис. 5а. При увеличении связей между кольцами в область существования СС попадают области кратных захватов, а также области возникновения других периодических движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kazakov L. N., Shirokov Yu. V., Paley D. E. //In: Proceedings of School-conference "Differential Equations: Bifurcations and Chaos". Katsiveli, Crimea, Ukraine, May 3-14, 1994. P. 48.
2. Kazakov L. N., Shirokov Yu. V., Paley D. E. //In: Proceedings of Second International Scientific School-Seminar "Dynamic and Stochastic Wave Phenomena". Nizhny Novgorod, June 21-28, 1994.
3. Системы фазовой синхронизации с элементами дискретизации. - 2-е изд. доп. и перераб. /В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, В. Л. Карякин и др.; Под ред. В. В. Шахгильдяна. — М.: Радио и связь, 1989. — 320 с.

Ярославский государственный
университет

Поступила в редакцию
27 января 1995 г.

NONLINEAR DYNAMICS OF PHASE LOCK DISCRETE COUPLED SYSTEMS

Yu. V. Shirokov, L. N. Kazakov

УДК 534.222

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕВЯЗКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Э. Аурелл, И. И. Вертгейм

Уравнение Бюргера со случайными автомодельными начальными условиями исследуется численно в невязком пределе с использованием алгоритма параллельного быстрого преобразования Лежандра, реализованного на параллельном суперкомпьютере "Connection Machine CM-200". Обсуждается возможность применения результатов к задаче распространения нервного импульса по аксону. Предпринята попытка моделировать условия эксперимента, где плотность последовательности распространяющихся нервных импульсов, первоначально имевшей спектр, близкий к белому шуму, оказалась характерной для невязких решений уравнения Бюргера пилообразной формы, а для спектра мощности на масштабах, превышающих характерный временной интервал между двумя импульсами, реализовалась степенная асимптотика частотной зависимости с показателем, равным -1 ($1/f$ -шум). Полученные в расчетах спектральные зависимости демонстрируют, что для всех рассмотренных типов случайных начальных распределений форма спектра в режиме развитой "бюргерсовской турбулентности" (т. е. через достаточно большое время) характеризуется наличием двух частей со степенными асимптотиками, с различающимися в общем случае показателями степени, и достаточно резкой границей между ними. В области низких частот (волновых чисел) спектр остается практически таким же, как у начального распределения, и в высокочастотной области реализуется спектр с зависимостью $1/f^2$, определяемый характером решения в пределе нулевой вязкости. Переход между этими двумя частями всегда достаточно резкий, и не было обнаружено интервалов с каким-либо промежуточным степенным поведением спектра типа $1/f$. Таким образом, полученный в экспериментах по изучению распространения нервного импульса по аксону спектральный закон вида $1/f$ не может быть объяснен в рамках модели, основанной на уравнении Бюргера, и надо учитывать другие возможные механизмы.

Как известно, уравнение Бюргера со случайными автомодельными начальными условиями имеет многочисленные приложения в различных областях исследований — от акустических волн до движения потока транспорта и образования крупномасштабной структуры Вселенной [1,2]. Одним из интересных приложений является описание распространения нервного импульса по аксону [3]. В работе [3] были экспериментально исследованы некоторые свойства спектров таких импульсов, первоначально имевших временной спектр, близкий в широком интервале частот к белому шуму. В этих экспериментах было установлено, что структура плотности

импульсов после прохождения аксона близка к характерной для решений уравнения Бюргера пилообразной форме, а также, что на масштабах, превышающих характерный временной интервал между двумя импульсами реализуется степенная асимптотика частотной зависимости спектра мощности с показателем, равным -1 ($1/f$ -шум). Следуя этим выводам работы [3], мы попытались моделировать этот процесс численно, используя одномерное уравнение Бюргера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad v(x, t = 0) = v_0(x) \quad (1)$$

где μ — коэффициент кинематической вязкости среды. Этот выбор модели можно обосновать также тем, что решения уравнения Бюргера со случайными начальными условиями демонстрируют два механизма, присущих реальной турбулентности и нелинейным волновым процессам: нелинейный перенос энергии по спектру и ее вязкую диссипацию на малых масштабах. Уравнение (1) было первоначально предложено Бюргером [1], как одномерная модель турбулентности в течениях жидкости. Впоследствии было показано, что оно возникает при описании многих неравновесных процессов, когда выполняются определенные условия симметрии уравнений [4]. Уравнение Бюргера имеет приложения к нелинейной акустике, нелинейным волнам в термоупругих средах, динамике роста межфазных границ, моделированию распределения скорости и плотности в крупномасштабных структурах Вселенной и ко многим другим системам, в которых можно пренебречь эффектами дисперсии по сравнению с нелинейными (см. [2] и библиографию в ней). Таким образом, в этой модели учитывается влияние нелинейности и диссипации при распространении цепочки нервных импульсов по аксону. В качестве начальных условий используются следующие типы случайных распределений плотности нервных импульсов, или начальной скорости на языке стандартного уравнения Бюргера (все выражения приведены в дискретной форме, как они использовались в вычислениях, для функций, заданных на равномерной сетке $x_i = iL/N$ с N узлами в интервале $0 \leq x \leq L$):

тип 1, белый шум:

$$v_0^w(x) = -\frac{\partial S_0(x)}{\partial x}, \quad S_0^w(x_j) = \sum_{i=0}^j g_i,$$

тип 2, функция броуновского движения (интеграл от белого шума):

$$v_0^b(x_j) = \sum_{i=0}^j g_i,$$

тип 3, фрактальный белый шум (интегралом которого является фрактальная броуновская функция):

$$v_0^f(x) = \sum_k u_k e^{ikx}, \quad k = \frac{2\pi n}{L} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Здесь $S_0(x)$ — потенциал (действие) для начальной скорости, g_i — независимые случайные числа с гауссовским распределением вероятности, u_k — комплексные гауссовские случайные переменные с дисперсией $\langle |u_k|^2 \rangle \propto |k|^{-1-2h}$, где $-1 \leq h \leq 0$, u_k предполагаются выбранными независимо, при условии соблюдения эрмитовой симметрии $u_{-k} = u_k^*$. Со случайными автомодельными начальными условиями можно всегда рассмотреть достаточно большие пространственные и временные масштабы и затем перенормировать переменные таким образом, что перенормированная вязкость станет сколь угодно малой. В пределе нулевой вязкости решение (1) для поля скорости имеет следующую асимптотику:

$$v(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t}; \quad v(x, t) = -\frac{\partial S(x, t)}{\partial x}, \quad (2)$$

где $y(x, t)$ — координата абсолютного максимума функции

$$G(x, y, t) = S_0(y) - \frac{(x - y)^2}{2t}; \quad S_0(x) = \int^x v_0(y) dy. \quad (3)$$

Таким образом, в работе численно исследовались невязкие решения уравнения Бюргера на дискретной сетке с числом узлов до 2^{20} . Численные эксперименты выполнены с использованием параллельной версии алгоритма быстрого преобразования Лежандра (БПЛ), реализованного на параллельном суперкомпьютере "Connection Machine CM-200" в Центре Параллельных Вычислений в Стокгольме [5,6,8]. В алгоритме БПЛ используется свойство монотонного неубывания обратной лагранжевой функции $y(x, t)$, как функции координаты x , и специфические параллельные машинные команды "Connection Machine", позволяющие одновременно выполнять операцию нахождения локального максимума на заданных пространственных интервалах, границы которых меняются при последовательном делении пополам в процессе вычислений. Наиболее примитивный способ нахождения максимума (3) прямым перебором всех точек интервала требует для N точек порядка $O(N^2)$ арифметических операций на обычном компьютере с последовательной обработкой данных. Алгоритм БПЛ на таком компьютере требует порядка $O(N \log N)$ операций в одномерных задачах (для двумерных задач с использованием сетки с $N \times N$ узлами требуется порядка $O(N^2 \log^2 N)$ операций [7]). Предложенный алгоритм параллельного БПЛ требует всего порядка $O(\log^2 N)$ операций в идеальном случае параллельного компьютера с неограниченным

числом физических процессоров, соединенных между собой, как вершины гиперкуба (этот тип связи используется в моделях СМ-2 и СМ-200). В реально использованном компьютере "Connection Machine СМ-200" произвольное число процессоров эмулируется как виртуальные их конечным числом (в нашем случае 8192). Вследствие этого для числа операций алгоритма БПЛ при необходимости использовать большее число процессоров появляется дополнительная линейная зависимость от отношения числа узлов используемой сетки N (совпадающим с числом необходимых в идеальном варианте процессоров), к реальному числу физических процессоров. При использовании алгоритма параллельного БПЛ для рассматриваемого здесь класса одномерных задач, общие затраты машинного времени, включая ввод, вывод и инициализацию "Connection Machine", не превышали одной минуты в расчетах с числом узлов сетки до $N = 2^{20}$.

Как известно [1,2], решение уравнения Бюргерса с произвольными начальными условиями на достаточно больших временах представляет собой последовательность разрывных импульсов треугольной формы, что определяет асимптотическое поведение спектра в высокочастотной области, как $1/f^2$. Для автомодельных случайных начальных условий, кроме того, показано аналитически и численно [2,5,6], что асимптотическое поведение как спектров, так и самих решений уравнения Бюргерса определяется, в основном, крупномасштабной составляющей начального возмущения. Таким образом, эти решения определяются значением параметра h , который является показателем автомодельности начального распределения, т. е. $|u_0(x + \Delta) - u_0(x)| \sim \Delta^h$. Распределению типа 1 соответствует $h = -1/2$, а типа 2 — $h = 1/2$. Этот показатель связан соотношением $n = -1 - 2h$ с показателем в зависимости спектральной плотности от частоты f (или от волнового числа k в пространственной интерпретации) для начального распределения.

Рис. 1, 2 иллюстрируют описанное поведение решений для типов 1 и 2 начальных распределений, которые также приведены. Полученные в расчетах спектральные зависимости (рис. 3 а, б) демонстрируют, что для рассмотренных типов начальных распределений форма спектра в режиме развитой "бюргерсовской турбулентности" (т. е. через достаточно большое время) характеризуется наличием двух частей со степенными асимптотиками, с различающимися в общем случае показателями степени, и достаточно резкой границей между ними. В области низких частот (волновых чисел) спектр остается практически таким же, как у начального распределения, и в высокочастотной области реализуется спектр с зависимостью $1/f^2$, определяемый характером решения в пределе нулевой вязкости. Переход между этими двумя частями всегда достаточно резкий, и не было обнаружено интервалов с каким-либо промежуточным степенным поведением спектра типа $1/f$. В частности, для начального распределения типа 1 (белого шума), реализованного в экспериментах [3],

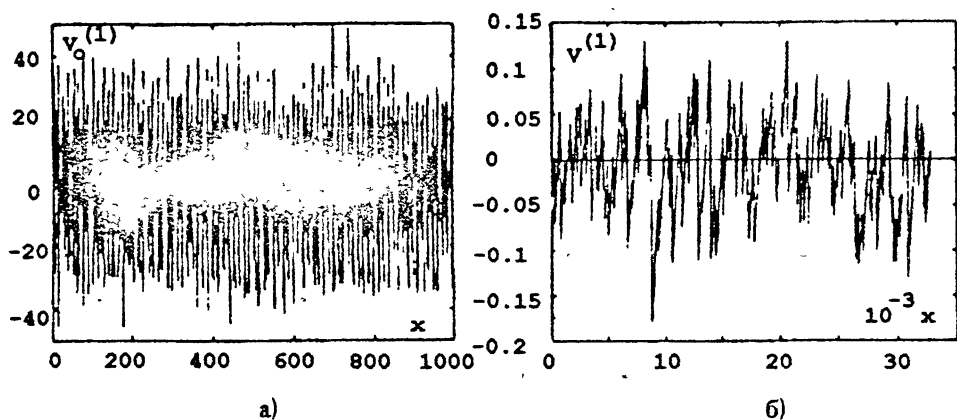


Рис. 1.

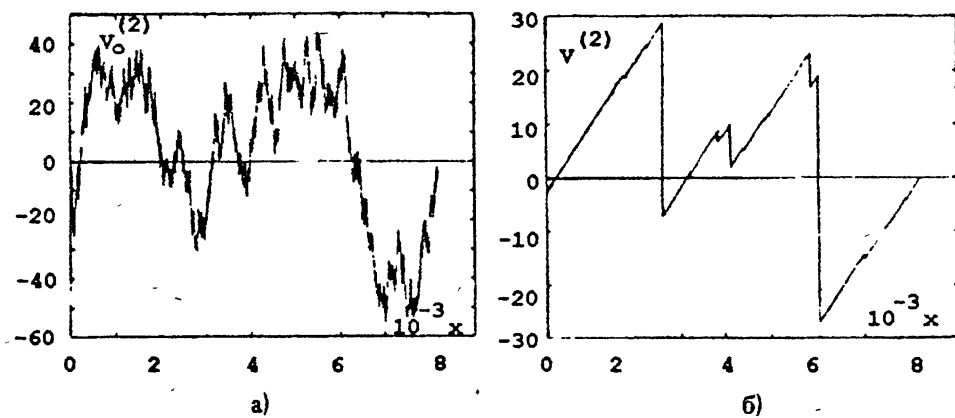


Рис. 2.

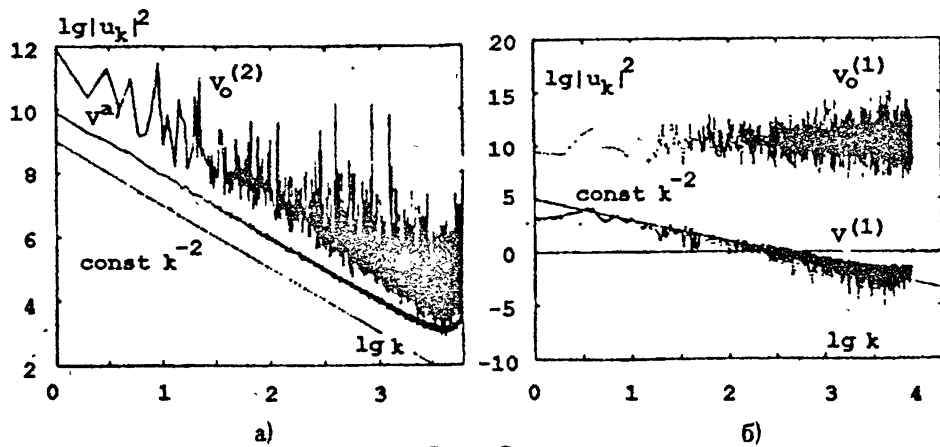


Рис. 3.

наблюдался резкий переход от показателя $n = 0$ на низких частотах к $n = -2$ на высоких (рис. 3 а). Для других типов начальных распределений асимптотический закон $1/f$ также не реализовался, за исключением случая, когда крупномасштабная часть начального спектра сама имела эту асимптотику. Как было показано в [5], числовая плотность разрывов размера λ в решениях уравнения Бюргерса на стадии развитой турбулентности подчиняется степенному закону, $s(\lambda) \sim \lambda^{-1-h}$. Первоначально предполагалось, что этот закон для одноточечной корреляционной функции разрывов может быть скорректирован с учетом степенного поведения двухточечной корреляционной функции и что это может привести к промежуточному интервалу, где реализуется наблюдавшаяся экспериментально зависимость $1/f$, в промежутке между асимптотиками f^0 (начальное распределение со спектром белого шума) и $1/f^2$ в высокочастотной области. Очевидно, что результаты численного исследования не подтверждают эту гипотезу.

Вывод, который можно сделать из вышеизложенного, состоит в том, что полученный в экспериментах по изучению распространения нервного импульса по аксону спектральный закон вида $1/f$ не может быть объяснен в рамках модели, основанной на уравнении Бюргерса. Видимо, надо учитывать другие возможные механизмы, такие как возможное отклонение нелинейности от строго квадратичного закона, наличие дисперсии и т. д. Остается также возможность того, что при учете конечной величины вязкости переход от закона f^0 к $1/f^2$ станет более гладким и, таким образом, на конечных масштабах и временах возможно появление достаточно широкого интервала с промежуточной зависимостью, с экспериментальной точностью удовлетворяющей закону $1/f$.

Работа выполнена при поддержке Шведского Совета по Естественным Наукам (Э.А) и Шведского Института (И.В). Авторы благодарны Центру Параллельных Вычислений Королевского Технологического Института (г. Стокгольм) за гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burgers J.M. The Nonlinear diffusion equation. — Dordrecht: Reidel, 1974.
2. Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I. Nonlinear waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays and particles. — Manchester University Press, 1991.
3. Musha T., Kosugi Y., Matsumoto G., Suzuki M. // IEEE Transaction on Biomedical Engineering. 1981. V. BME-28. N 9. P. 616.
4. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. — Berlin: Springer Verlag, 1983.

5. She Z.-S., Aurell E., Frisch U. // Comm. Math. Phys. 1992. V. 148. P. 623.
6. Aurell E., Gurbatov S.N., Wertgeim I.I. // Phys. Lett. A. 1993. V. 182. P. 109.
7. Noullez A. A Fast Algorithm for discrete Legendre transforms. Preprint. — Observatoire de Nice, 1992.
8. Aurell E. // In: Annual Report of Center for Parallel Computers. 1993. P. 68; Aurell E., Wertgeim I.I. // In: Proc. of Second European CM Users Meeting. /Eds. by Scholl H. and Alimi J.-M. — Meudon-Paris, 1993.

Стокгольмский университет,
Швеция;
Институт механики сплошных
сред Уральского отделения РАН,
Пермь, Россия

Поступила в редакцию
27 января 1995 г.

SPECTRAL PROPERTIES OF INVISCID SOLUTIONS OF THE BURGERS EQUATION WITH RANDOM INITIAL CONDITIONS

E. Aurell, I. I. Wertgeim

The Burgers equation with random self-similar initial conditions have been studied numerically in the inviscid limit by means of parallel Fast Legendre Transform Algorithm implemented on Connection Machine CM-200 parallel supercomputer. The possibility of application to the problem of the propagation of nervous impulse through axons is discussed. Modelling the recent experiments was attempted, where the form of the density of propagated nervous impulses, initially having power spectra close to the white noise distribution, was found similar to the triangular pulses that arise in the inviscid Burgers equation, and also that a $1/f$ power law is realized on scales larger than the typical inter-pulse distance. It has been shown, that for the inviscid Burgers equation model, the power spectra obtained for various types of initial conditions for the developed "Burgers turbulence" regime (i.e. for time sufficiently large), consists of two parts, with a rather sharp transition between them: at low wavenumbers the spectrum practically coincides with the initial spectra, and at high wavenumbers a $1/f^2$ power behaviour realizes. There is no interval with some intermediate law, like $1/f$. The conclusion to be made is that a true $1/f$ spectrum for nerve impulse propagation in an axon cannot be explained by the Burgers equation model, and that other mechanisms are to be taken into account.

КВАНТОВЫЙ ЦИКЛОТРОННЫЙ РЕЗОНАНС В ВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМЕ. КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ

В. Я. Демитовский, Д. И. Каменев, G. A. Luna-Acosta

Исследована квантовая динамика заряженной частицы, вращающейся в постоянном магнитном поле и поле монохроматической волны, распространяющейся перпендикулярно магнитному полю при условии циклотронного резонанса. Численно рассчитаны квазиэнергии и квазиэнергетические функции в резонансном приближении. Обсуждается предельный переход от квантовой модели к классической.

В последние годы пристальное внимание привлекает явление квантового нелинейного резонанса в двумерных системах и одномерных системах, находящихся под действием внешнего периодического поля [1-5]. Было показано, что, как и в классическом случае, при достаточно малой амплитуде возмущения квантовый нелинейный резонанс оказывается локализованным в гильбертовом пространстве. Если увеличивать амплитуду возмущения, то по достижении ею определенного значения, несколько резонансов могут перекрыться, что приведет к делокализации волновой функции. Однако нелинейный квантовый резонанс был исследован только для систем, которые в классическом пределе являются невырожденными, т. е. для которых выполнены условия теоремы КАМ. В данной работе обсуждается квантовый резонанс в системах, которые в классическом пределе являются вырожденными. Важной и в то же время простой физической моделью такой системы является частица, движущаяся в постоянном магнитном поле \mathbf{H} и поле продольной монохроматической волны, распространяющейся перпендикулярно \mathbf{H} . Такая модель позволяет, в частности, описать динамику электронов в проводниках и в квантовых гетероструктурах, помещенных в квантующее магнитное поле, в присутствие звуковой волны. В классической теории задача о движении частицы в магнитном поле и в поле продольной волны была детально исследована в работах Заславского, Сагдеева и др. [6].

Дадим вначале краткий обзор результатов этой теории. Гамильтониан заряженной частицы в магнитном поле и поле монохроматической

волны имеет вид

$$H = \frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} - V_0 \cos(\mathbf{kx} - \omega t), \quad (1)$$

где калибровка \mathbf{A} ($0, Hx, 0$) выбрана так, что магнитное поле направлено вдоль оси z , m — масса частицы, \mathbf{p} — импульс, \mathbf{k} — волновой вектор, ω — частота волны, V_0 — амплитуда возмущения. В резонансном приближении, когда $\omega = l\omega_c$, где $\omega_c = \frac{eH}{mc}$ — циклотронная частота, гамильтониан (1) имеет вид

$$\tilde{H} = -V_0 J_\ell[\mathbf{k}r(\tilde{I})] \cos \tilde{\theta}, \quad (2)$$

где \tilde{I} и $\tilde{\theta}$ — резонансные сопряженные канонические переменные действие-угол, ℓ — номер резонанса, $\ell = 1; 2; \dots$, $J_\ell(\mathbf{k}r)$ — функция Бесселя порядка ℓ . Эллиптические особые точки определяются как

$$\frac{dJ_\ell[\mathbf{k}r(\tilde{I})]}{d\tilde{I}} = 0, \quad \tilde{\theta} = 0, \quad \pi, \quad (3)$$

а гиперболические особые точки как

$$J_\ell[\mathbf{k}r(\tilde{I})] = 0, \quad \tilde{\theta} = \pi/2, \quad \tilde{\theta} = 3\pi/2. \quad (4)$$

Фазовый портрет системы в переменных действие-угол состоит из сетки сепаратрис, образующей квадратные ячейки, внутри которых лежат замкнутые фазовые траектории. Размер отдельной ячейки по действию определяется двумя соседними нулями функции Бесселя порядка ℓ и не зависит от амплитуды возмущения V_0 . В основном резонансном приближении система, описываемая (2), интегрируема в отличие от системы, описываемой гамильтонианом (1). Если в (1) принять во внимание нерезонансные члены, то сепаратриса "одевается" экспоненциально узким стохастическим слоем, двигаясь внутри которого частица может набирать энергию.

Перейдем теперь к рассмотрению квантовой задачи. Оператор Гамильтона имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - V_0 \cos(\mathbf{kx} - \omega t), \quad (5)$$

где \hat{H}_0 — гамильтониан гармонического осциллятора

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2}(x - x_0)^2 + \frac{\hat{p}_z^2}{2m}. \quad (6)$$

Импульсы p_x и p_y — интегралы движения, так что последний член в \hat{H}_0 может быть опущен. Центр осцилляций $x_0 = cp_y/eH$ — постоянная, которая может быть исключена из (5) соответствующим выбором начального времени $t = t_0$ (в дальнейшем мы положим $t_0 = 0$).

Решение уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(x, t) \quad (7)$$

разложим по собственным функциям гамильтониана H_0 .

$$\psi(x, t) = \sum_n C_n(t) \psi_n(x) \exp(-E_n t / \hbar), \quad (8)$$

где $\psi_n(x)$ — n -я волновая функция гармонического осциллятора, а $E_n = \hbar \omega_c (n + 1/2)$ — энергия на n -м уровне Ландау. Тогда для коэффициентов разложения $C_n(t)$ получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$i\hbar \dot{C}_n = \sum_m \left[V_{n, n+m}^{(1)} \sin(\omega t) + V_{n, n+m}^{(2)} \cos(\omega t) \right] C_{n+m} e^{-im\omega_c t}. \quad (9)$$

Матричные элементы $V_{n, n+m}^{(1)}$ ($V_{n, n+m}^{(2)}$) описывают переходы на нечётное (чётное) число уровней. В случае, если выполняется условие $n \gg 1 \gg \frac{\mu^2}{2}$ где $\mu = ka$, $a = \sqrt{\hbar c / eH}$ магнитная длина, матричные элементы имеют вид

$$V_{n, n+2m+1}^{(1)} = -\frac{V_0}{2} \frac{(-1)^m n^{m+1/2} e^{-\frac{\mu^2}{4}}}{\sqrt{(n+1) \dots (n+2m+1)}} J_{2m+1}(kr_n), \quad (10a)$$

$$V_{n, n+2m}^{(2)} = -\frac{V_0}{2} \frac{(-1)^m n^m e^{-\frac{\mu^2}{4}}}{\sqrt{(n+1) \dots (n+2m)}} J_{2m}(kr_n). \quad (10b)$$

Все члены в сумме в (9) имеют один и тот же порядок по амплитуде возмущения V_0 , но различны по частоте осцилляций. Удерживая в (9) только не зависящие от времени резонансные члены, мы получим

$$i\hbar \dot{C}_n = V_{n, n+l}^{(j)} C_{n, n+l} + V_{n, n-l}^{(j)} C_{n, n-l}, \quad (11)$$

где $j = 1(2)$ for нечётного (чётного) номера резонанса l . Так как возмущение периодически по времени, то для определения эволюции системы мы можем использовать теорию Флоке. Обозначим через $\Psi_q(x, t)$ квазиэнергетическую (КЭ) функцию и представим решение уравнения (7) в виде

$$\Psi_q(x, t) = \exp\left(-\frac{iE_q t}{\hbar}\right) U_q(x, t), \quad (12)$$

где $U_q(t) = U_q(t + T)$, а E_q — квазиэнергия. Периодическая часть КЭ функции может быть разложена в ряд Фурье:

$$U_q(x, t) = \sum_n A_n^q \psi_n(x) \exp(-in\omega t), \quad (13)$$

где коэффициенты A_n^q — КЭ функции в представлении гармонического осциллятора. Подставляя (12) и (13) в уравнение Шредингера (7), мы получим следующую систему алгебраических уравнений

$$E_q A_n^q = V_{n, n+\ell}^{(1)} A_{n, n+\ell}^q + V_{n, n-\ell}^{(1)} A_{n, n-\ell}^q \quad (14)$$

Здесь мы положили без потери общности ℓ нечётным. Для определения КЭ функций A_n^q и КЭ собственных значений E_q эта система была диагонализирована численно для случая $\ell = 1$. На рис. 1 представлены результаты расчёта. Значения матричных элементов $V_{n, n+\ell}^{(1)}$, пропорциональных функции Бесселя (см. (10а)), в зависимости от номера n изображены в верхней части рисунка. Аргумент функции Бесселя меняется дискретным образом $k r_n = \sqrt{2n\hbar}$, где параметр $\hbar = k^2 a^2 = k^2 \hbar / eH$ — эффективная постоянная Планка для нашей задачи. Из рисунка видно, что матричные элементы определяют “квантовые резонансные ячейки” в гильбертовом пространстве, которые отделены друг от друга нулями функции Бесселя. Это значит, что если начальное состояние выбрано в одной из ячеек, то вся дальнейшая эволюция, в основном, будет происходить внутри этой ячейки.

На рис. 1 изображены три таких ячейки и четыре спектра квазиэнергий. Каждый спектр а), б) и в) соответствует решению уравнения (14) в случае, если приняты во внимание только уровни с номером n внутри одной соответствующей ячейки. Спектр д) рассчитан с условием, что во внимание приняты уровни всех трёх ячеек. Из рисунка видно, что границы спектра каждой отдельной ячейки приблизительно пропорциональны максимальному матричному элементу этой ячейки, $\pm |V_{n, n+\ell}^{\max}|$. Отметим, что эти энергетические интервалы соответствуют в классическом случае интервалам, где гамильтониан (2) меняется в пределах от $-V_0 J_\ell(kr)$ до $+V_0 J_\ell(kr)$ по мере того, как $\cos \theta$ меняется от -1 до $+1$. Каждый отмеченный выше классический интервал включает две резонансные ячейки, таким образом, одна ячейка в гильбертовом пространстве соответствует двум ячейкам в фазовом пространстве действие-угол. Добавим также, что спектр симметричен и число квазиэнергетических состояний в каждой ячейке равно числу уровней Ландау в этой ячейке. Эти особенности данной системы следуют из структуры детерминанта системы (14). Как видно из рис. 1 спектр каждой отдельной ячейки вблизи максимального и минимального значений E_q приблизительно эквидистантный.

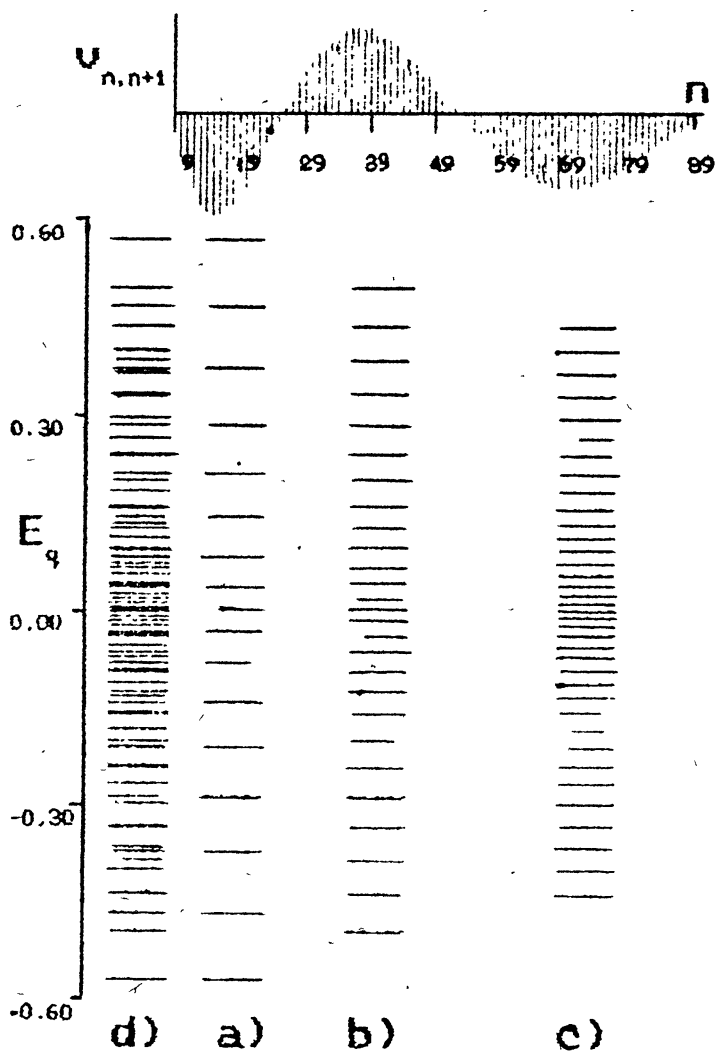


Рис. 1. Матричные элементы $V_{n,n+1}$ и КЭ спектр E_q . Энергетическая шкала задана в единицах $\hbar\omega_c$, $V_0 = 2.0$, эффективная постоянная Планка $\hbar = 1$.

Аналитически мы можем продемонстрировать это, раскладывая матричные элементы вблизи максимума (минимума) функции Бесселя $n = n_0$ и выражая A_n^q (как в [7] стр. 259) в виде

$$A_n^q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi a(\phi) \exp(i(n - n_0)\phi). \quad (15)$$

В результате для функции $a(\phi)$ получим уравнение Шредингера с гамильтонианом гармонического осциллятора частота которого есть

$$\hbar\omega = V_0 \left(\left| J_\ell(\sqrt{2n_0\hbar}) \frac{d^2 J_\ell(\sqrt{2n_0\hbar})}{d^2 n} \right| \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Она равна расстоянию между КЭ уровнями вблизи краёв КЭ спектра. Эта частота, найденная на основе квантовомеханического описания, при замене $\hbar n_0$ на I_0 совпадает с частотой малых колебаний вблизи резонанса в классическом случае (см. [8]).

Следует заметить, что спектр каждой ячейки на рис. 1 сгущается вблизи $E_q = 0$. Значение $E_q = 0$ соответствует в классике сепаратрисе, на которой частота осцилляций обращается в ноль. Таким образом, основные особенности, присущие классической системе с гамильтонианом (2), могут быть получены при исследовании КЭ спектра отдельной ячейки. Если теперь обратиться к рис. 1 d), то можно заметить, что спектр, рассчитанный одновременно для трёх ячеек, в основном, является суперпозицией спектров каждой отдельной ячейки, за исключением окрестности точки сгущения уровней. Границы объединённого спектра задаются границами спектра первой ячейки, где функция Бесселя, определяющая матричные элементы $V_{n, n+\ell}$, принимает максимальное по модулю значение. Спектр каждой последующей ячейки изменяет объединённый спектр только в пределах от $-|V_{n, n+\ell}^{\max}|$ до $|V_{n, n+\ell}^{\max}|$, где $|V_{n, n+\ell}^{\max}|$ — максимальный (минимальный) матричный элемент для данной ячейки. Так как границы каждой последующей ячейки уменьшаются монотонным образом (как $\sqrt{1/k\tau}$) и число уровней Ландау в каждой ячейке конечно, то спектр будет дискретным даже для бесконечного числа ячеек.

Более детальное представление о КЭ состояниях можно получить, если обратиться к КЭ функциям A_n^q . На рис. 2 изображены A_n^q как функция номера уровня Ландау n . В верхней части рисунка также изображены матричные элементы $V_{n, n+1}$. Из рисунка видно, что есть две группы состояний: одни локализованы в одной из ячеек, а другие распространяются на несколько ячеек (частично делокализованные состояния). Последние не являются полностью делокализованными и не распространяются на бесконечное число ячеек, так как спектр, как было отмечено выше,

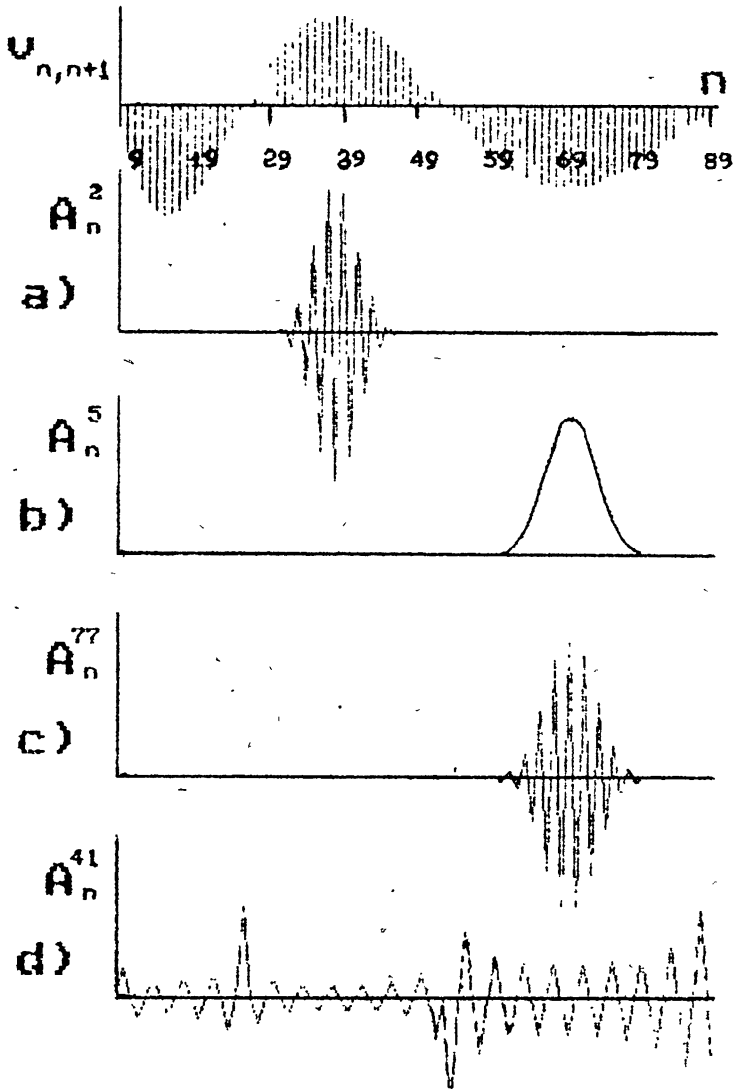


Рис. 2. КЭ функции A_n^q как функция номера уровня Ландау n . а) $q = 2$, б) $q = 5$, в) $q = 77$, д) $q = 41$. q отмечает q -е КЭ состояние, считая от нижней границы спектра. Значения V_0 и h те же, что и на рис. 1.

дискретный. Исходя из численных экспериментов, можно заключить, что в общем случае локализованные состояния соответствуют КЭ уровням, расположенным на краях спектров соответствующих ячеек (см. рис. 2а, 2б и 2с), в то время, как делокализованные состояния соответствуют уровням вблизи "квантовой сепаратрисы" $E_q = 0$. Последнее обстоятельство говорит о сильном взаимодействии КЭ уровней с номерами q для которых $E_q \approx 0$.

Найденные в данной работе КЭ функции и спектр могут быть использованы для исследования эволюции квантовых состояний во времени. В частности, представляет интерес исследование эволюции волновых пакетов внутри ячеек и туннелирование между ячейками. Это будет сделано в последующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berman G. P., Kolovsky A. R. // *Physica*. 1983. V.D8. P.117;
Berman G. P. and Kolovsky A. R. // *Phys. Lett.* 1983. V.A95. P.15;
Berman G. P. and Zaslavskii G. M. // *Phys. Lett.* 1977. V.A61. P.295.
2. Reichl L. E. and Lin W. A. // *Phys. Rev.* 1986. V.A33. P.3598.
3. Toda M. and Ikeda K. // *J. Phys.* 1987. V.A20. P.3833.
4. Geisel T., Radons G., and Rubner J. // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V.57. P.2883.
5. Dyrting S., Milburn G. J., Holmes C. A. // *Phys. Rev.* 1993. V.E2. P.969.
6. Chernikov A. A., Sagdeev R. Z., Usikov D. A. and Zaslavskii G. M. // *Computers Math. Applic.* 1989. V.17. P.17;
Chernikov A. A., Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Zakharov M. Yu. and Zaslavsky G. M. // *Nature*. 1987. V.326. P.559;
Заславский Г. М., Усиков Д. А. и Черников А. А. Слабый хаос и квази-регулярные структуры. — М.: Наука, 1990.
7. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. — М.: Наука, 1984.
8. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Наука, 1984.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
3 февраля 1995 г.

QUANTUM CYCLOTRON RESONANCE IN A DEGENERATE SYSTEM.
QUASI-ENERGETIC STATES

V. Ya. Demikhovskij, D. I. Kamenev, G. A. Luna-Acosta

We investigate the quantum dynamics of a charged particle rotating in a constant magnetic field and the field of a monochromatic wave propagating perpendicular to the magnetic field under condition of the cyclotron resonance. Quasi-energies and quasi-energetic are calculated in a resonance approximation. Transition to a limit from the quantum model to the classic one is discussed.

УДК 621.373.1

О ФОРМИРОВАНИИ СТРУКТУР В РЕШЕТКЕ СВЯЗАННЫХ БИСТАБИЛЬНЫХ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. С. Кузнецов, В. Д. Шалфеев

Рассматривается возможность целенаправленного формирования пространственных структур в решетке, образованной взаимосвязанными бистабильными элементами.

Сегодня для разных областей науки характерен чрезвычайный интерес к пространственно-временным задачам. Подобные задачи актуальны для радиофизики (джозефсоновские контакты), гидрофизики (турбулентность), биофизики (биологические возбудимые среды), энергетике (энергосети) и т. д. Наиболее перспективный путь решения таких задач, опирающийся на возможности компьютерного моделирования неравновесных активных сред, несомненно связан с изучением решеточных моделей таких сред [1, 2, 3]. Значительные успехи в этой области индуцировали постановку новых перспективных задач (мультистабильность, ассоциативная память, автоструктуры и т. д.), для однородных пространственных сетей из связанных между собой активных элементов. К таким задачам относятся, в первую очередь, задачи моделирования пространственно-временной динамики нейроподобных сред и нейронных сетей [4]. Не останавливаясь на анализе моделей таких сетей и подходов к их изучению, отметим лишь, что в большинстве моделей в качестве парциальных элементов сети используются бистабильные элементы как с достаточно простой индивидуальной динамикой (бистабильность связана с наличием двух устойчивых состояний равновесия), так и с весьма сложной (бистабильность связана с наличием не только состояний равновесия, но и предельных циклов, торов, хаотических аттракторов). Примером последних моделей может служить модель нейронной сети из связанных между собой осцилляторов Чуа [5, 6, 7, 8].

В настоящей работе на основе результатов компьютерного моделирования рассмотрен пример целенаправленного образования пространственных структур в двумерной решеточной модели нейронной сети, состоящей из связанных осцилляторов Чуа. Математическую модель такой сети запишем в виде [6, 8]

$$\begin{aligned} \frac{dx_{j,k}}{dt} &= \alpha(y_{j,k} - h(x_{j,k})) + \gamma_{j,k} + d_1 x_{j-1,k} + \\ &+ d_2 x_{j+1,k} + d_3 x_{j,k-1} + d_4 x_{j,k+1}, \\ \frac{dy_{j,k}}{dt} &= x_{j,k} - y_{j,k} + z_{j,k}, \\ \frac{dz_{j,k}}{dt} &= -\beta y_{j,k}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$j = \overline{1, N}; \quad k = \overline{1, K}.$$

Граничные условия примем нулевые:

$$x_{0,k}(t) = x_{j,0}(t) = x_{N+1,k}(t) = x_{j,K+1}(t) = 0. \quad (2)$$

Нелинейность $h(x)$ для любого элемента сети аппроксимируем гладкой функцией:

$$h(x) = c_1 x - \frac{2c_0 x}{1 + c_0^2 x^2}. \quad (3)$$

Для упрощения в модели (1) ограничимся только случаем линейной связи между элементами сети (только по одной координате x). Кроме того, считаем, что все элементы сети одинаковы, равно как и связи между ними, т.е. рассмотрим пространственно-однородную решетку осцилляторов Чуа. Параметр $\gamma_{j,k}$ моделирует внешнее воздействие на произвольную ячейку.

В отсутствие связей $d_1, d_2, d_3, d_4 = 0$ и внешних воздействий $\gamma_{j,k} = 0$ парциальная динамика одного элемента решетки может быть весьма сложной [6, 8]. Остановимся далее на случае наиболее простой динамики индивидуального осциллятора Чуа — т.е. выберем такие параметры α, β, c_0, c_1 , при которых реализуется случай существования только двух устойчивых состояний равновесия

$$O^-(x = -a, y = 0, z = +a), \quad O^+(x = +a, y = 0, z = -a),$$

где

$$a = \sqrt{\frac{2c_0 - c_1}{c_0^2 c_1}}. \quad (4)$$

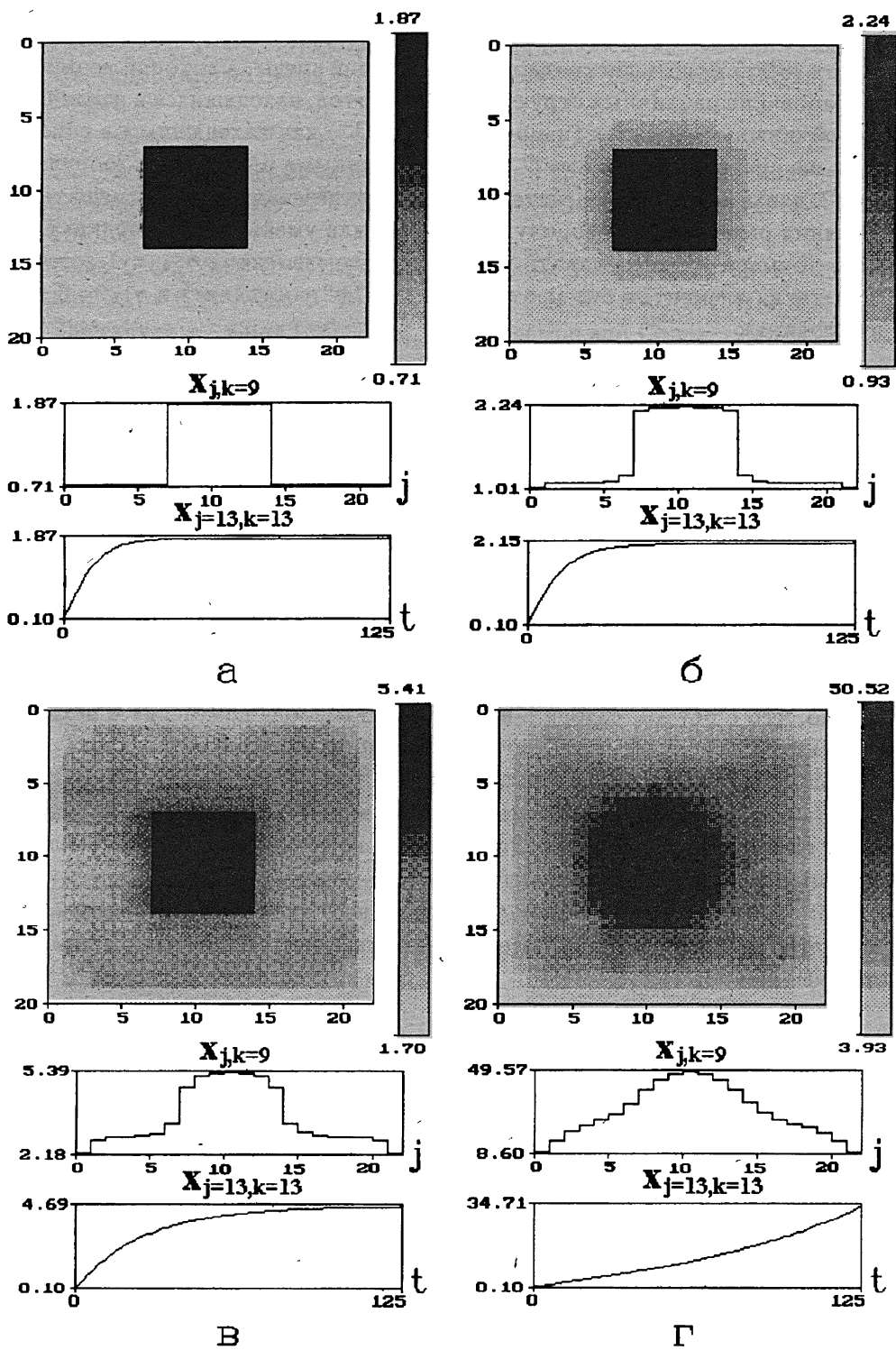


Рис. 1.

В этом случае при введении связи решеточная модель (1) представляет собой модель дискретной бистабильной среды, в которой возможно образование различных структур из элементов, находящихся в различных устойчивых состояниях (например, O^+ и O^-) или находящихся в одном и том же состоянии (O^+ или O^-) но с различными значениями координат.

Задавая внешнее воздействие $\gamma_{j,k}$, можно целенаправленно смещать состояния равновесия в сторону увеличения или уменьшения координаты z . Для примера будем задавать для некоторых элементов $\gamma_{j,k} = 1$ (состояния таких элементов будем отмечать как "+" состояния) и $\gamma_{j,k} = 0$ ("0" состояния).

Для изучения возможности образования структур из "+" и "0" состояний и управления процессом структурообразования с помощью параметров γ и d проведен вычислительный эксперимент в решетке с параметрами $N = 20$, $K = 22$, $\alpha = 1$, $\beta = 20$, $c_0 = 0.7$, $c_1 = 1.05$. На рис.1 представлены полученные в ходе эксперимента стационарные распределения координаты z для "+" и "-" состояний (черный и белый цвет соответствует "+" и "-" состояниям). На рис. 1а дано стационарное распределение "+" и "-" состояний для нулевых связей, т.е. с помощью задания величины внешних воздействий сформирована исходная структура. Рис. 1б, в иллюстрируют эволюцию этой исходной структуры при введении ненулевых связей $d_1, d_2, d_3, d_4 = 0.05$ и $d_1, d_2, d_3, d_4 = 0.2$. Очевидно, что с ростом связей в некотором диапазоне изменения d исходная структура сохраняется с некоторой точностью, однако при достаточно больших связях наступает её разрушение (рис. 1 г $d_1, d_2, d_3, d_4 = 0.5$).

Выводы: а) В двумерной решетке связанных бистабильных динамических элементов с помощью задания внешнего поля можно целенаправленно формировать заданные структуры.

б) При рассматриваемом типе линейных связей между элементами сформированные структуры оказываются существенно зависящими от коэффициентов связи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424) и Международной ассоциации INTAS-94-2899..

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. //В кн.: Физика XX века: развитие и перспективы. — М.: Наука, 1984. С. 219–280.
2. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Рогальский А. В., Сагдеев Р. З. Решеточные модели в нелинейной динамике неравновесных сред //Препринт ИИФ АН СССР, N 167. 1987 — 24 с.

3. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992. — 544 с.
4. Мастеров А. В., Рабинович М. И., Толков В. Н., Яхно В. Г. // В кн.: Коллективная динамика возбуждений и структурообразование в биологических тканях. — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1988. С. 89-104.
5. Chua L. O., Yang L. // IEEE Trans. Circuits Syst. 1988. V. 35. P. 1257.
6. Shil'nikov L. P. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. V. 4. N 3. P. 489.
7. Zheleznyak A., Chua L. O. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. V. 4. N 3. P. 639.
8. Chua's Circuit: a Paradigm for Chaos /Ed. by R. N. Madan. World Scientific Series on Nonlinear Science, series B. — Singapore: World Scientific, 1993. V. 1.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
1 февраля 1995 г.

**ABOUT STRUCTURES FORMATION IN THE ARRAY OF THE
COUPLED BISTABLE ACTIVE ELEMENTS**

A. S. Kuznetsov, V. D. Shalfeev

In this paper we consider an intentional forming ability of the space structures in the array of the coupled bistable elements.

ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ МОД ВОЛНОВЫМИ ПУЧКАМИ

А. В. Кочетов, А. Г. Литвак, В. А. Миронов, Э. М. Шер

Рассмотрено взаимодействие двумерных и трехмерных пучков с границей раздела линейной и нелинейной сред. Аналитически определена область параметров гауссовых пучков, возбуждающих нелинейные поверхностные волны (НПВ) с высокой эффективностью. Численно изучены различные режимы возбуждения НПВ. Аналитические результаты хорошо согласуются с данными численных расчётов.

В В Е Д Е Н И Е

1. В нелинейном случае заметно расширяются условия существования локализованных, вблизи границы раздела сред, поверхностных волн (нелинейных поверхностных поляритонов) [1]. Они появляются в таких спектральных областях, где линейные моды отсутствуют. Детальное исследование таких структур представляет конкретный интерес для физики поверхности. Очевидно, что поверхностные поляритоны в качестве промежуточных состояний принимают участие во многих физических процессах, протекающих вблизи границы. С нелинейными поверхностными поляритонами связывают дополнительные возможности в такой быстро развивающейся области, как спектроскопия поверхности [2]. В электродинамике поверхностные волны традиционно рассматриваются с целью создания систем для направленной передачи электромагнитного излучения. В двумерной задаче возбуждение нелинейных поверхностных волн (НПВ) волновыми пучками гауссовой формы рассматривалось в работах [3], [4]. Основным препятствием к реализации таких структур является неустойчивость в среде с кубической нелинейностью [5], приводящая к разбиению их на трёхмерные пучки. Полученные в [6] результаты позволяют надеяться на устойчивость трёхмерных, локализованных вблизи границы раздела двух сред, волновых полей. Целью данной работы является исследование стационарного режима трансформации трёхмерного гауссова

пучка, распространяющегося вдоль плоской границы раздела сред, в нелинейную поверхностную волну.

2. Решение волнового уравнения в среде с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1, & x < 0; \\ \epsilon_2 + \delta\epsilon, & x > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\epsilon_1 > \epsilon_2$ и $\delta\epsilon$ — вызываемое волной возмущение диэлектрической проницаемости Керровского типа, будем искать в виде

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E(x, y, z) \exp(-i(\omega t - hz)).$$

Тогда, амплитуда $E(x, y, z)$, изменяющаяся плавно в масштабе $L_x = 2\pi/h$, описывается в безразмерных переменных:

$$y, x = y, z(h^2 - k_0^2\epsilon_1)^{1/2}, \quad z = z(h^2 - k_0^2\epsilon_1)/2h,$$

$$E = k_0 E/E_p (h^2 - k_0^2\epsilon_1)^{1/2}, \quad \alpha^2 = (h^2 - k_0^2\epsilon_2)/(h^2 - k_0^2\epsilon_1),$$

E_p — характерное нелинейное поле, $k_0 = \omega/c$ и p — параметр насыщения нелинейности; следующими уравнениями

$$iE_x + E_{xx} + E_{yy} - E = 0, \quad x < 0, \quad (2)$$

$$iE_x + E_{xx} + E_{yy} - \alpha^2 E + |E|^2 E(1 + p|E|^2)^{-1} = 0, \quad x > 0. \quad (3)$$

Граничные условия сводятся к условию непрерывности E и $\frac{\partial E}{\partial x}$ при $x = 0$ и отсутствию источников поля при $x \rightarrow \pm\infty$. Пусть при $z = 0$ распределение поля имеет форму гауссова пучка:

$$E(x, y) = E_0 \exp\left(-0.5\left(\left(\frac{(x - x_c)}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right)\right). \quad (4)$$

Требуется отыскать $E(x, y, z)$ при $z > 0$, в частности, условия возбуждения пучком (4) однородных $\left(\frac{\partial E}{\partial z} = 0\right)$ при $z \rightarrow \infty$ решений, т. е. НПВ.

3. Анализ двумерной задачи $\left(\frac{\partial}{\partial y} = 0\right)$ был выполнен в [4]. Основные его результаты состоят в следующем. НПВ $E = \mathcal{E}(x) \exp(i\gamma z)$ описыва-

ется выражением:

$$E(x) = \begin{cases} 2(\alpha^2 - 1)^{1/2} \exp((1 + \gamma)^{1/2} x), & x \leq 0; \\ 2(\alpha^2 + \gamma)^{1/2} \operatorname{ch}^{-1}((\alpha^2 + \gamma)^{1/2} (x - x_0)), & x \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $x_0 = \operatorname{arcth}(\sqrt{1 + \gamma}/\sqrt{\alpha^2 + \gamma})/\sqrt{\alpha^2 + \gamma}$. Легко показать, что свойства НПВ зависят от одного параметра

$$\alpha_N = \sqrt{(\alpha^2 + \gamma)/(1 + \gamma)}, \quad (6)$$

в частности волны с $\alpha_n > 2\left(\frac{\partial I}{\partial \gamma} < 0\right)$ являются неустойчивыми, а $\alpha_n < 2\left(\frac{\partial I}{\partial \gamma} > 0\right)$ устойчивы, что соответствует результату [3], где

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 dx = (\alpha^2 - 1)/(1 + \gamma)^{1/2} + 2(\sqrt{1 + \gamma} + \sqrt{\alpha^2 + \gamma}). \quad (7)$$

В среде с кубической нелинейностью ($p = 0$) существует два способа возбуждения НПВ — прямым возбуждением НПВ за счет оптимизации параметров пучка и возбуждением неустойчивой НПВ с последующей трансформацией её в устойчивую НПВ. Такая трансформация идет с сохранением (с точностью до нескольких процентов) погонной мощности (7), что позволяет найти постоянную распространения НПВ устойчивой ветви $\gamma = (\alpha + 1)^2 \left(\alpha + 3 + \sqrt{(\alpha + 3)^2 - 16/64} \right) - 1$.

Параметры оптимальных гауссовых пучков могут быть получены на основании метода моментов для распределений поля [7]:

$$\begin{aligned} [2(\alpha^2 - 1)]^{1/2} < E_0 < 2^{3/4}(\alpha^2 - 1)^{1/2} \\ 2^{3/4}(\alpha^2 - 1)^{-1/2} < \sigma < 2^{3/2}\pi(\alpha - 1)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Численные расчёты эффективности возбуждения НПВ показывают, что для оптимальных пучков она близка к 100%.

4. Для оценки параметров трёхмерных, локализованных вблизи границы раздела сред, волновых пучков воспользуемся, как и в [4], методом моментов. Например, уравнение для первого момента распределения поля (положение центра масс) следует из (2)–(3) и может быть записано для

Керровской нелинейности в форме

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dz^2} = \int_{-\infty}^{\infty} E_b^2 \left(E_b^2 - 2(\alpha^2 - 1) \right) dy, \quad (9)$$

где $E_b = |E(x=0, y)|$. Отсюда для однородных аксиально-симметричных ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma$) волновых пучков гауссовой формы (4) распространяющихся вдоль границы раздела на расстоянии z_c нетрудно получить условие равновесия, по которому амплитуда поля на границе $E_b = E_0 \exp\left(-\frac{z_c^2}{2\sigma^2}\right)$ превосходит поле плоской нелинейной поверхностной волны при $x=0$ в $2^{1/4} \approx 1.19$ раз [1], [4]. Более того, как и в двумерной задаче [4], можно показать, что устойчивыми (относительно изменения положения центра масс) являются пучки с максимумом поля в нелинейной среде и амплитудой поля на границе

$$\left(2\sqrt{2}(\alpha^2 - 1)\right)^{1/2} \leq E_0 \leq 2(\alpha^2 - 1)^{1/2}. \quad (10)$$

Заметим, что аналогичное соотношение в двумерном случае является точным [1], [4], а здесь справедливо лишь для пучков гауссовой формы (4)

— С точки зрения возможности возбуждения локализованной вблизи границы структуры, падающими на границу пучками, наибольший интерес представляют пучки, значительная доля мощности которых первоначально сосредоточена в линейной среде. В этом случае из (10) видно, что если поле на границе превышает значение, определяемое левой частью (11), то такие пучки “притягиваются” нелинейной средой.

Анализ уравнения для второго момента распределения поля (квадрата эффективной ширины) [7] дает возможность записать условие локализации волнового пучка вблизи границы. Для пучка формы (4) находим, что пучки с мощностью

$$P_0 = \pi \sigma^2 E_0^2 = 8\pi \left(1 + 2/\sqrt{\pi} \int_{\sqrt{2}z/\sigma}^{\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta\right) \quad (11)$$

являются однородными. В таком волновом пучке дифракция скомпенсирована нелинейной рефракцией, поэтому при наличии границы P_0 возрастает по сравнению с однородной средой [7].

При мощности, превышающей мощность однородного пучка (критическую) $P > P_0$, волновые пучки схлопываются. В результате этого амплитуда поля на границе может оказаться меньше значения граничного поля в нелинейной поверхностной волне (10) и волновой пучок начинает притягиваться границей. В процессе схлопывания P_0 уменьшается, поэтому для стабилизации процесса схлопывания мы ввели насыщение нелинейности ($p \neq 0$).

Исключая из соотношений (10), (12) E_0 , нетрудно получить уравнение для определения ширины однородного волнового пучка σ

$$(\alpha^2 - 1)\sigma^2 \exp(x_c^2/\sigma^2) = 2\sqrt{2} \left(1 + 2/\sqrt{\pi} \int_{\sqrt{2}x/\sigma}^{\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta \right). \quad (12)$$

В наиболее интересном случае $|x_c| \ll \sigma$ из (10), (13) следуют простые соотношения для параметров, локализованных вблизи границы раздела сред гауссовых пучков.

$$8\pi \leq P_0 \leq 16\pi; \quad 2(\alpha^2 - 1)^{-1/2} < \sigma^2 < 4\sqrt{2}/(\alpha^2 - 1)^{-1/2}. \quad (13)$$

Этот вывод подтверждается численными расчётами, результаты которых приведены ниже.

5. Алгоритм, использованный в работе для численного решения (5), (6), основан на спектральном методе и использует дискретное преобразование Фурье. Он сохраняет преимущества как явных, так и неявных схем. Поскольку спектральный метод вводит искусственные граничные условия периодичности, пределы интервала вычислений $L(-L \leq x, y \leq L)$ были выбраны так, что поля на границах были малы. Отраженные волны подавлялись введением искусственного затухания, нарастающего к краям расчётного интервала. Разрыв диэлектрической проницаемости сглаживался с помощью переходной функции $(\tanh(\delta x), \delta \gg 1)$, чтобы обеспечить более плавное спадание спектра.

Отличительной особенностью поверхностной волны является существование "граничного" поля (10). Однако в рассматриваемом нами трёхмерном случае оно представляет собой интеграл и воспользоваться этим выражением для анализа, локализованной вблизи границы структуры поля, затруднительно. Поэтому для демонстрации эффекта захвата волнового пучка границей, численные расчёты проводились для слабо искривленной поверхности раздела двух сред.

Предварительный анализ уравнений в безаберрационном приближении (уравнений для параметров волнового пучка с параболическим фазовым фронтом и гауссовым распределением амплитуды) показал, что однородные волновые пучки являются аксиально-симметричными. Численное исследование пространственной эволюции первоначально аксиально-симметричных волновых пучков ($\sigma_x = \sigma_y$), с мощностью порядка оптимальной, показали, что осевая симметрия хорошо сохраняется. Это дает основания для детального исследования захвата границей раздела двух сред аксиально-симметричных пучков.

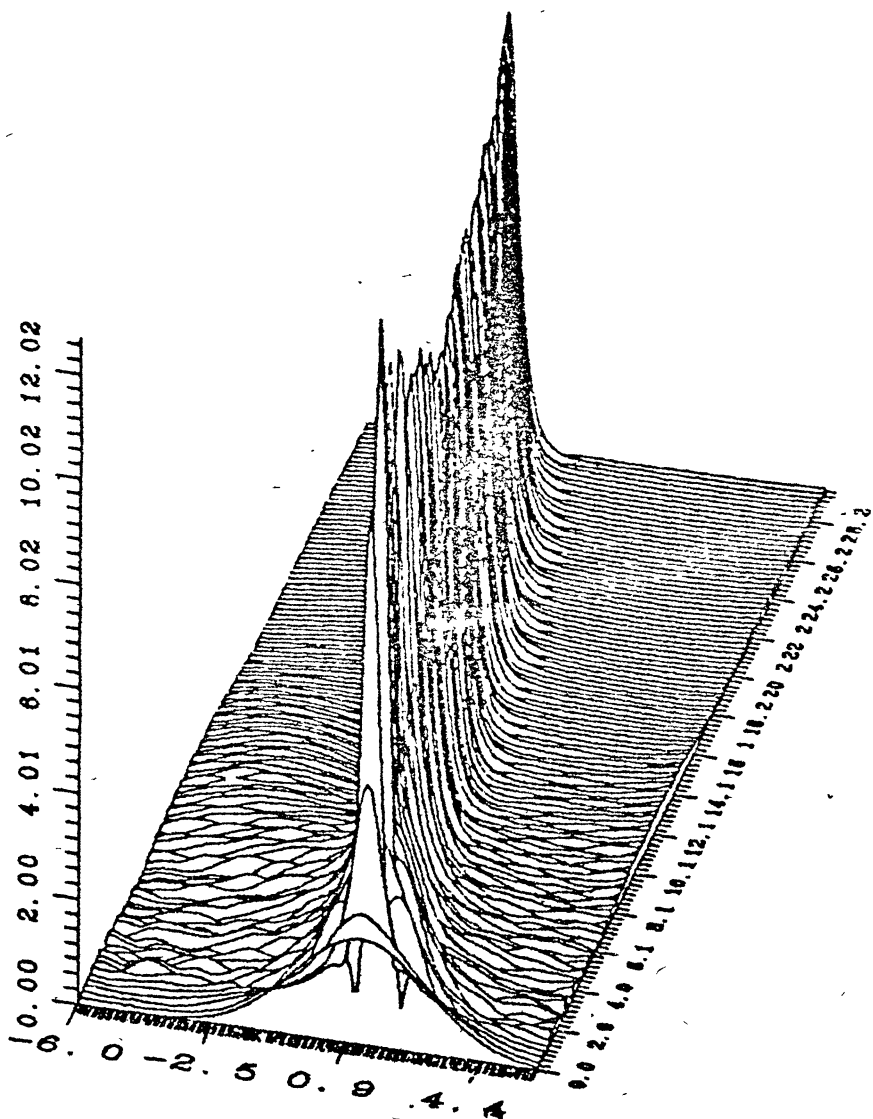


Рис. 1. Изменение волнового пучка $|E(x, y = 0, z)|$, $\alpha = \sqrt{2}$, $E_0 = 2$, $\sigma = 1.7$, с максимумом поля в нелинейной среде $z_c = -1.3$.

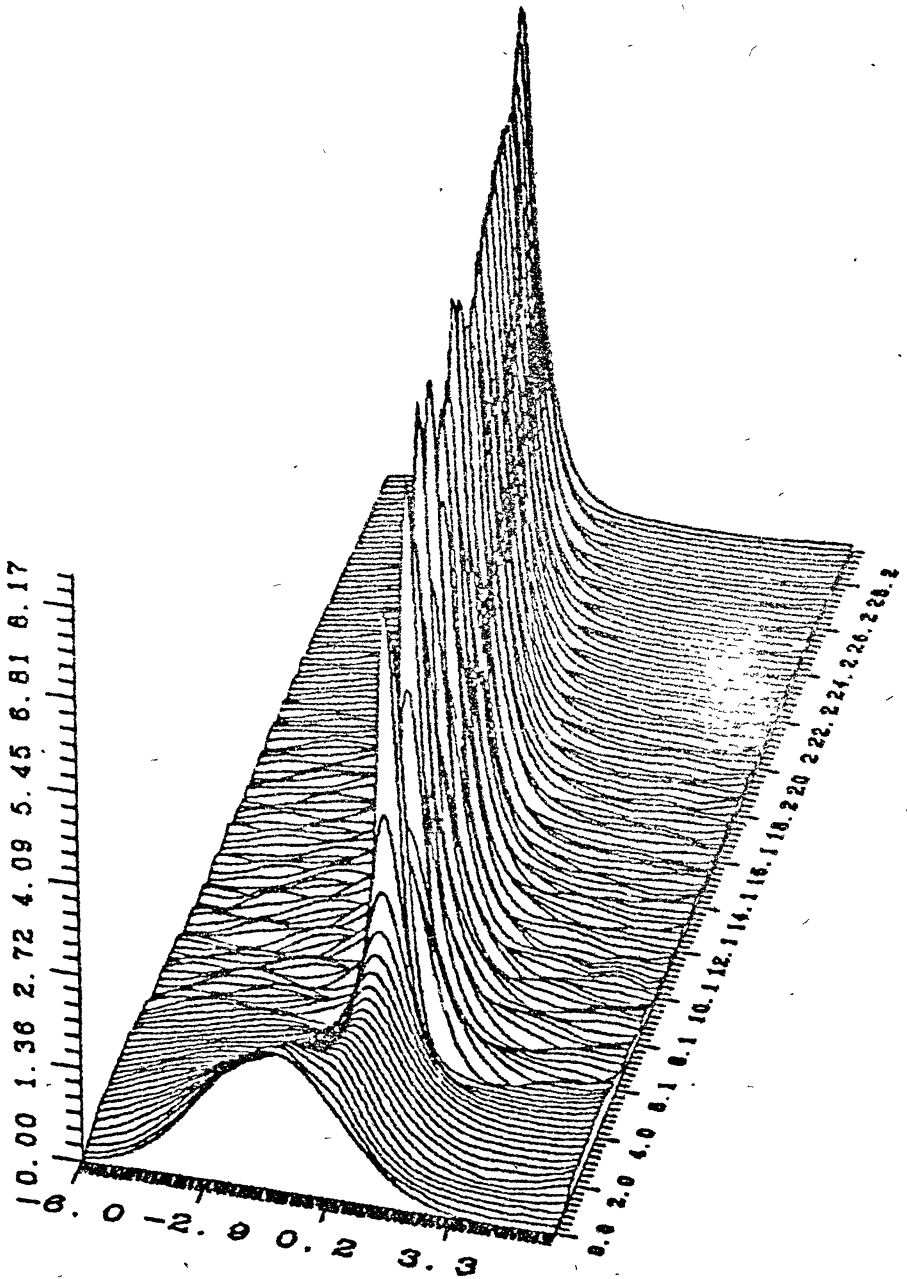


Рис. 2. Изменение волнового пучка $|E(x, y = 0, z)|$, $\alpha = \sqrt{2}$, $E_0 = 2$, $\sigma = 1.7$, с максимумом поля в линейной среде $z_c = 1.3$.

На рис. 1 и 2 показано изменение волнового пучка в процессе его распространения вдоль границы в зависимости от его начального положения. Для пучков, расположенных в нелинейной среде (рис. 1), в ходе локализации волнового пучка границей сначала имеют место абберационные искажения формы, затем происходит установление однородного волноводного распределения поля вблизи границы раздела. В наиболее интересном случае волновых пучков, расположенных первоначально в линейной среде, изменение поля оказывается довольно плавным (рис. 2), что позволяет надеяться на возможность более простого описания процесса взаимодействия с границей, например, в безабберационном приближении. В обоих случаях происходит трансформация волнового пучка в поверхностную волну.

Для определения области захвата волнового пучка границей было проведено исследование траекторий центра масс волнового пучка рис. 3.

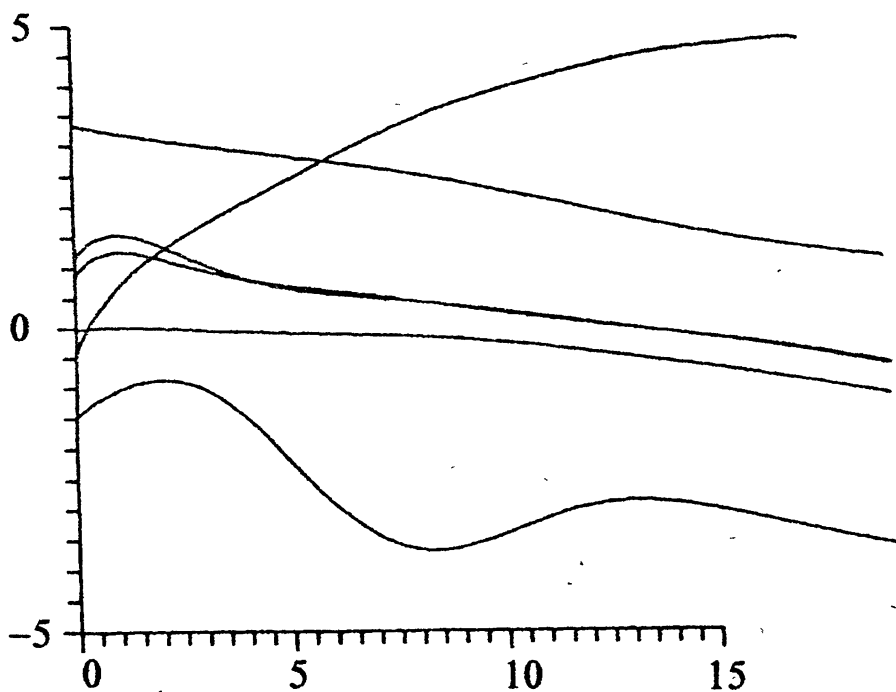


Рис. 3. Траектории центра масс пучка $\sigma = 1.7$, $E_0 = 2$, $\alpha = \sqrt{2}$ в зависимости от его начальной координаты.

Видно, что волновые пучки, первоначально находящиеся в нелинейной среде, плавно захватываются границей. В случае волновых пучков, первоначально находящихся в линейной среде, траектории заметно более изрезанные. Волновые пучки либо сильно притягиваются нелинейной средой и глубоко проникают в неё, либо отражаются. И в том, и в другом слу-

чае они выходят на границу расчётного интервала. Плавные траектории существуют в узком интервале изменения параметров. Ширина области захвата того же порядка, что и характерный размер волнового пучка. Это соответствует выводу, который следует из (10), если зафиксировать форму волнового пучка. Отсюда же видно различие в поведении траекторий. Поскольку максимум поля поверхностной волны, а следовательно и центр масс захваченного границей волнового пучка, расположены в нелинейной среде, то волновые пучки в линейной среде в процессе их притяжения границей "дольше" находятся в поле действия силы, чем волновые пучки в нелинейной среде. Кроме того, попадая в нелинейную среду они обужаются в процессе самофокусировки и, тем самым, изолируются от границы. При этом возникает реальная возможность проникновения и распространения пучков в нелинейной среде. Последнее обстоятельство заметно отличает трёхмерную задачу от двумерной [3, 4] и может быть использовано для объяснения сильного сдвига отраженного пучка от линии геометрооптического отражения (нелинейного эффекта Гусса-Хенкина).

Таким образом, в случае реальных локализованных волновых пучков, процесс взаимодействия с границей существенным образом меняется по сравнению с двумерными пучками. Особенно это касается волновых пучков, падающих на границу раздела под углом, большим угла полного внутреннего отражения. В связи с этим остается актуальным поведение пучков с разными пространственными масштабами по двум поперечным, по отношению к направлению распространения, координатам, в частности, эллиптической ($\sigma_x \neq \sigma_y$) формы.

Важным вопросом, выходящим за рамки использованных моделей, является вопрос об установлении найденных режимов. В двумерном случае [4] определены условия, когда выход в стационарный режим соответствует возбуждению НПВ в средах с медленной нелинейностью релаксационного типа. В трёхмерном случае, как показывает исследование подобных процессов в однородной среде [8], переходный режим может быть весьма сложным.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант R8K300) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 93-02-00837, 95-02-05620).

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвак А. Г., Миронов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т.11. С.1911;
Tomlinson W. J. // Opt. Lett. 1980. V.5. P.323;
Агранович В. М., Бабиченко В. С., Черняк В. Я. // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т.32. С.532.

2. Поверхностные поляритоны. / Под ред. В. М. Аграновича, Д. Л. Миллса. Пер. с англ. — М.: Наука, 1985. 525 с.
3. Ахмедиев Н. Н., Корнеев В. И., Кузьменко Ю. В. // ЖЭТФ. 1985. Т.88. С.107.
4. Богомолов Я. Л., Кочетов А. В., Литвак А. Г., Миронов В. А. // ЖЭТФ. 1990. Т.98. С.1191.
5. Высотина Н. В., Розанов Н. Н., Смирнов В. А. // ЖЭТФ. 1987. Т.57. С.173.
6. Akhmediev N. N., Nabiev R. F., Popov Yu. M. // Opt. Com. 1989. V.69. P.247.
7. Власов С. Н., Петрищев В. И., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т.14. С.1353.
8. Litvak A. G., Mironov V. A., Sergeev A. M. // Phys. Scr. 1990. V.30. P.57.

Институт прикладной физики
РАН, Н. Новгород

Поступила в редакцию
25 января 1995 г.

EXCITATION OF NONLINEAR SURFACE WAVES BY WAVE BEAMS

A. V. Kochetov, A. G. Litvak, V. A. Mironov, E. M. Sher

We consider the interaction of two- and three-dimensional wave beams with the interface of linear and nonlinear media. We define analytically the domain of parameters of Gaussian beams exciting nonlinear surface waves (NSW) with a high efficiency. Different conditions of the NSW excitation are studied numerically. The analytical results are in a good agreement with the calculations.

ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ШУМОМ, ОПИСЫВАЕМОЙ ПРОИЗВОЛЬНЫМ СИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ

А. Н. Малазов, А. Л. Панкратов

Показано, что известная формула Понтрягина для среднего времени первого достижения броуновской частицей поглощающей границы, может быть использована также для получения точного значения среднего времени релаксации неравновесного состояния нелинейной динамической системы с шумом, обладающей произвольным симметричным потенциальным профилем.

1. Проблема определения времен установления неравновесного состояния нелинейной динамической системы с шумом к равновесному актуальна для широкого класса физических, химических и биологических задач, таких, например, как скорости переключения бистабильных систем; в том числе джозефсоновских логических элементов, стохастический резонанс, кинетика химических реакций и т. д. (см., например, [1-4]).

Но существу, эта проблема сводится к отысканию скорости эволюции плотности вероятности $W(x, t)$ броуновской частицы при ее движении в поле сил с потенциалом $\Phi(x)$ в режиме большого трения, которая описывается уравнением Фоккера-Планка (УФП) (см., например, [1-4]):

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{B} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} W(x, t) \right] + \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \right\} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$W(x, 0) = \delta(x - x_0) \quad \text{и} \quad W(\pm\infty, t) = 0.$$

Здесь $B = \frac{h}{kT}$, $G(x, t)$ — поток вероятности, h — вязкость, k — постоянная Больцмана; T — температура и $\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{kT}$ — заданный безразмерный потенциальный профиль, такой, что $\varphi(\pm\infty) = \infty$.

Для отыскания скорости эволюции $W(x, t)$ необходимо знание нестационарного решения УФП, что представляет основную математическую трудность обсуждаемой проблемы. В литературе, при решении УФП, в основном используется метод разложения оператора Фоккера-Планка по

собственным функциям и поиск минимального ненулевого собственного числа, которое и принимается за скорость эволюции [4, 5].

В то же время существует известная формула Понтрягина [6] для среднего времени первого достижения (СВПД) броуновской частицей поглощающей границы, расположенной в точке $x = L > x_0$

$$T(x_0, L) = B \int_{x_0}^L e^{\varphi(x)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(v)} dv dz, \quad (2)$$

выражающая СВПД непосредственно через заданную функцию потенциального профиля $\varphi(x)$.

2. Покажем, что формула (2) наряду с СВПД дает также и значение среднего времени релаксации динамической системы с шумом, обладающей произвольным симметричным относительно точки L потенциальным профилем. Из УФП (1) для Лапласовского образа плотности вероятности

$Y(x, s) = \int_0^{\infty} W(x, t) e^{-st} dt$ нетрудно получить следующее уравнение:

$$\frac{d^2 Y(x, s)}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Y(x, s) \right] - s B Y(x, s) = -B \delta(x - x_0). \quad (3)$$

Совместим точку симметрии безразмерного потенциального профиля с началом координат, так, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и положим $x_0 < 0$. Заметим, что поток вероятности в изображении Лапласа равен

$$\hat{G}(x, s) = \int_0^{\infty} G(x, t) e^{-st} dt = -\frac{1}{B} \left[\frac{d\varphi(x)}{dx} Y(x, s) + \frac{dY(x, s)}{dx} \right]. \quad (4)$$

Предположим, что нам известны два линейно-независимых решения $U(x) = U(x, s)$ и $V(x) = V(x, s)$ соответствующего (3) однородного уравнения (т. е. при $B = 0$), такие, что $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, а $V(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. В силу симметричности функции $\varphi(x)$ эти независимые решения также можно выбрать симметричными, такими, что $U(-x) = V(x)$, $U(0) = V(0)$, $\left[\frac{dU(x)}{dx} \right]_{x=0} = - \left[\frac{dV(x)}{dx} \right]_{x=0} < 0$.

В этом случае общее решение уравнения (3) представимо в виде

$$Y(x, s) = \begin{cases} Y_1(x) + y^-(x), & x \leq x_0 \\ Y_1(x) + y^+(x), & x_0 \leq x \leq 0, \\ Y_2(x), & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

где

$$Y_1(x) = C_1 V(x), \quad Y_2(x) = C_2 U(x),$$

$$y^-(x) = \frac{B}{W[x_0]} U(x_0) V(x), \quad y^+(x) = \frac{B}{W[x_0]} V(x_0) U(x).$$

Здесь $W[x] = U(x) \frac{dV(x)}{dx} - V(x) \frac{dU(x)}{dx}$ — Вронскиан, C_1 и C_2 — произвольные постоянные, которые могут быть найдены из условия непрерывности плотности вероятности и потока вероятности в начале координат:

$$Y_1(0) + y^+(0) = Y_2(0), \quad \hat{G}(x = -0, s) = \hat{G}(x = +0, s). \quad (6)$$

Вычисляя отсюда значения произвольных постоянных и подставляя их в (5), можно получить следующее значение для потока вероятности в изображении Лапласа $\hat{G}(x, s)$ (4) в точке симметрии $x = 0$:

$$\hat{G}(0, s) = \frac{V(x_0)}{W[x_0]} \left[\frac{dV(x)}{dx} \right]_{x=0}. \quad (7)$$

Согласно [7, 8], характерное время эволюции плотности вероятности $W(x, t)$ в произвольном потенциальном профиле равно

$$\Theta = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \hat{P}(s) - P(\infty)}{s [P(0) - P(\infty)]} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[P(0) - P(\infty)] - \hat{G}(L, s)}{s [P(0) - P(\infty)]}, \quad (8)$$

где

$$P(t) = \int_{-\infty}^L W(x, t) dx, \quad \hat{P}(s) = \int_0^{\infty} P(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^L Y(x, s) dx.$$

Заметим, что время Θ здесь определено как время эволюции вероятности $P(t)$ от $P(0)$ до $P(\infty)$, равное среднему времени выхода броуновских частиц из точки $x = x_0$ за произвольную граничную точку $x = L > x_0$.

В нашем случае $P(0) = 1$, а $P(\infty) = 1/2$, поскольку установившаяся плотность вероятности $W(x, \infty)$ распределится симметрично по обе стороны от точки симметрии потенциального профиля $L = 0$. При этом время Θ будет иметь смысл времени релаксации $\vartheta(x_0, 0)$.

Тем самым, объединяя (7) и (8), получим следующее точное значение времени релаксации:

$$\vartheta(x_0, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{2V(x_0)}{W[x_0]} \left[\frac{dV(x)}{dx} \right]_{x=0}}{s}. \quad (9)$$

Покажем теперь, что время релаксации (9) начального дельта-об-разного вероятностного распределения в симметричном потенциальном профиле совпадает с СВПД $T(x_0, 0)$ броуновской частицей, стартующей из точки $x = x_0$, поглощающей границы, расположенной в точке симметрии потенциального профиля $x = 0$. Поскольку в этом случае производная $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ в уравнении (3) осталась той же самой для всех точек x кроме $x = 0$, то мы опять же можем воспользоваться линейно-независимыми решениями $U(x)$ и $V(x)$, а скачок потенциала в точке $x = 0$, равный $-\infty$, учесть новыми условиями сшивки в $x = 0$. Поток вероятности в этой точке непрерывен по-прежнему, но плотность вероятности теперь будет равна нулю, так что второе условие (6) не изменится, а вместо первого мы должны записать $Y_1(0) + y^+(0) = 0$, что приведет к новым значениям произвольных постоянных C_1 и C_2 и к новому значению потока вероятности в точке $x = 0$. Теперь его изображение Лапласа будет равно

$$\hat{G}(0, s) = \frac{2V(x_0)}{W[x_0]} \left[\frac{dV(x)}{dx} \right]_{x=0}$$

Чтобы получить значение $T(x_0, 0)$ с помощью формулы (8), следует учесть, что значение $P(\infty)$ изменилось и равно теперь $P(\infty) = 0$, т.к. все изображающие точки в итоге будут захвачены поглощающей границей, в то время как, разумеется, по-прежнему $P(0) = 1$.

Подстановка новых значений $\hat{G}(0, s)$ и $P(\infty)$ в формулу (8) дает для $T(x_0, 0)$ ту же самую формулу (9). Таким образом, время релаксации в симметричном потенциальном профиле полностью совпадает с СВПД $T(x_0, 0)$ поглощающей границы, расположенной в точке симметрии $x = 0$, при одинаковых начальных распределениях $W(x_0, 0) = \delta(x - x_0)$ (это совпадение можно назвать принципом симметрии) и равно

$$\vartheta(x_0, 0) = B \int_{x_0}^0 e^{\varphi(x)} \int_{-\infty}^x e^{-\varphi(v)} dv dx. \quad (10)$$

3. В заключение, приведем пример использования принципа симметрии для определения времени релаксации неравновесного состояния в би-стабильной системе, описываемой потенциальным профилем четвертого

порядка, т. н. *quartic potential*, имеющей широкое применение в целом ряде задач и особенно в задачах стохастического резонанса (см., например, [3])

$$\varphi(x) = a \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - 1 \right]^2 = \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right] + a, \quad \varphi(\pm\ell) = 0,$$

где $a = \varphi(0)$ — безразмерная высота потенциального барьера, ℓ — расстояние от потенциальных минимумов до вершины барьера. Согласно (10):

$$\vartheta(x_0, 0) = B \int_{x_0}^0 \exp \left(a \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - 1 \right]^2 \right) \int_{-\infty}^x \exp \left(-a \left[\left(\frac{v}{\ell} \right)^2 - 1 \right]^2 \right) dv dz. \quad (11)$$

Полагая $x_0 = -\ell$, можно обнаружить, что при достаточно высоком потенциальном барьере ($a \gg 1$), время релаксации равно

$$\vartheta(-\ell, 0) = B \ell^2 \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{e^a}{a},$$

что полностью совпадает с результатом, полученным в [5] для высокого барьера, причем гораздо более сложным путем — методом разложения по собственным функциям и нахождением минимального собственного числа. Полученное нами точное значение времени релаксации (11) справедливо для любой высоты потенциального барьера.

Таким образом, принцип симметрии позволяет получать времена релаксации неравновесных состояний в нелинейных динамических системах с шумом, описываемых симметричными потенциальными профилями, исходя непосредственно из заданного потенциального профиля и для любых значений высот потенциальных барьеров.

Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 94-02-04698-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kramers H. // *Physica*. 1940. V.7. P.284.
2. Ambegaokar V., Halperin B.I. // *Phys. Rev. Lett.* 1969. V.22. P.1364.
3. McNamara B., Wiesenfeld K. // *Phys. Rev.* 1989. V. A39. P.4854.
4. Hänggi P., Talkner P., Borcovec M. // *Rev. Mod. Phys.* 1990. V.62. P.251.
5. Larson R. S., Kostin M. D. // *Journ. Chēm. Phys.* 1978. V.69. № 11. P.4821.

6. Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А. // ЖЭТФ. 1933. Т.3. № 3. С.165.
7. Агудов Н. В., Малахов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т.36. № 2. С.148.
8. Малахов А. Н., Панкратов А. Л. // Изв. вузов. Прикладная Нелинейная Динамика. 1995 (в печати).

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
6 февраля 1995 г.

**THE RELAXATION TIME EXACT VALUE OF A DYNAMICAL SYSTEM
WITH NOISE, DESCRIBED BY AN ARBITRARY SYMMETRICAL
POTENTIAL PROFILE.**

A. N. Malakhov, A. L. Pankratov

It has been demonstrated, that the well-known Pontryagin's formula for the mean first passage time of an absorbing boundary by a Brownian particle, can be also used to obtain the nonequilibrium state relaxation time exact value of a nonlinear dynamical system with noise, described by an arbitrary symmetrical potential profile.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД БЭКЛУНДА В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

И. Л. Максимов, И. Ю. Шалаев

1. В В Е Д Е Н И Е

Изучение динамических процессов в негамильтоновых (диссипативных) системах, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, достаточно затруднено. Это связано в первую очередь с тем, что вопрос об обобщении аппарата точных методов решения, разработанного для гамильтоновых систем, для подобных сред в настоящее время остается мало изученным. Эта проблема касается и такого широко известного метода, как метод Бэклунда. С точки зрения пространства решений возможность применения данного метода в гамильтоновых, вполне интегрируемых, системах определена наличием в данном пространстве связи между решениями, задаваемой генерационными соотношениями Бэклунда, и тесно связана с существованием бесконечной последовательности полиномиальных законов сохранения [1]. Однако для нелинейных систем с диссипацией и дисперсией подобная корреляция еще не установлена [2]. Действительно, в настоящее время известно счетное число нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих отыскание решений методом Бэклунда. Возможность применимости данного метода в диссипативных системах практически не исследовалась.

В настоящей работе продемонстрирована возможность использования преобразования Бэклунда в существенно диссипативной системе. В качестве примера рассмотрена динамика термомагнитных возмущений в сверхпроводниках второго рода, характеризующихся нетривиальным взаимодействием между электромагнитной и тепловой подсистемами. Используя генерационные выражения, определенные при помощи впервые сформулированного модифицированного метода Бэклунда (ММБ), показано, что в системе возможно распространение стационарной структуры типа ударной волны.

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

В настоящее время считается общепринятым, что солитоноподобные решения связаны с существованием структуры Бэклунда. Данное утверждение продемонстрировано на примере уравнения Кортевега-де Вриза [3], уравнения синус-Гордона [4] и пр. В настоящей работе сделана попытка использования данного метода для отыскания точных решений системы дифференциальных уравнений, описывающей нелинейную динамику критического состояния в сверхпроводниках второго рода. Выяснено, что непосредственное применение метода Бэклунда на счётном множестве накладываемых функциональных связей оказывается безрезультатным. В связи с этим предлагается модифицированный метод Бэклунда, основы которого излагаются ниже.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (НДУ) вида

$$F(y, y_x, y_t, y_{xt}, y_{xx}, y_{tt}, \dots) = 0, \quad (1)$$

которое необходимо решить относительно функции двух переменных $y(x, t)$. Основная идея преобразования Бэклунда заключается в том, что оно преобразует одни решения нелинейного уравнения в другие, не меняя формы исходных уравнений. Это преобразование осуществляется с помощью дифференциальных уравнений, решение которых, как ожидается, получить легче, чем непосредственно проинтегрировать исходное уравнение (1). Пусть известно некоторое затравочное решение (1) $y'(x, t)$. Попытаемся отыскать другое решение $y(x, t)$, связанное с $y'(x, t)$ системой дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} p = y_x = Z_1(y, y', y'_x, y'_t, \dots) \\ q = y_t = Z_2(y, y', y'_x, y'_t, \dots), \end{cases} \quad (2)$$

где неизвестные пока функции Z_1 и Z_2 подлежат определению. Здесь отметим, что для однозначности определения производной на систему уравнений (2) необходимо наложить добавочное условие, а именно:

$$p_t = q_x. \quad (3)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к уравнению для Z_1 и Z_2

$$F(y, Z_1, Z_2, Z_{1y}Z_1 + Z_{1y'}p' + Z_{1y''}p'_x + Z_{1y'''}q'_x + \dots) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (3) дает следующую связь между функциями Z_1 и Z_2 :

$$Z_{1y}Z_2 + Z_{1y'}q' + Z_{1y''}p'_t + Z_{1y'''}q'_t + \dots = Z_{2y}Z_1 + Z_{2y'}p' + Z_{2y''}p'_x + Z_{2y'''}q'_x + \dots \quad (5)$$

Следующая процедура сведется к тому, чтобы собрать все коэффициенты со считающимися линейно независимыми переменными функций Z_1 и Z_2 и их производными; и занулить их в уравнениях (4)–(5). В результате мы получим систему из большого числа уравнений. Эта система, однако, может оказаться несовместной из-за недостаточного выбора аргументов функций Z_1 и Z_2 , что означало бы отсутствие преобразования Бэклунда, по крайней мере, в форме (2). Эту проблему можно избежать, предположив, что ранее линейно независимые аргументы — производные от затравочного решения $y'(x)$ — являются функциями от него, а именно:

$$p' = f(y'), \quad q' = \phi(y').$$

Подставив данные функциональные зависимости в уравнения (4)–(5), мы получим

$$F(y, Z_1, Z_2, Z_{1y}Z_1 + Z_{1y}f + Z_{1p'}f_y'f + Z_{1q'}\phi_y'\phi + \dots) = 0;$$

$$Z_{1y}Z_2 + Z_{1y'}\phi + Z_{1p'}f_y'\phi + Z_{1q'}\phi_y'\phi + \dots =$$

$$= Z_{2y}Z_1 + Z_{2y'}f + Z_{2p'}f_y'f + Z_{2q'}\phi_y'\phi + \dots$$

и, проводя аналогичную процедуру разрешения данной системы, в итоге мы получим всего лишь два уравнения на функции Z_1 и Z_2 . Собственно говоря, подобная процедура существует и в “классическом” методе Бэклунда [4], а именно, все производные от известного решения порядка старше, чем наивысший порядок дифференциального уравнения, определяются как функции от производных низших порядков, где данная функциональная связь задается при помощи самого уравнения.

Сформулированная методика позволяет получить генерационные функции, связывающие в отличие от “классического” метода новое решение лишь с одним конкретным затравочным решением. Однако в случае, когда не удастся определить генерационные функции по “классической” методике, вышеизложенный метод может оказаться наиболее систематическим способом отыскания максимально полного числа частных решений исследуемого уравнения. Один из таких случаев мы и продемонстрируем на примере сверхпроводника, находящегося в критическом состоянии, с фоновым магнитным полем.

3. ТЕРМОМАГНИТНАЯ ВОЛНА ПЕРЕПАДА

Пространственно-временная эволюция одномерных термомагнитных возмущений, развивающихся в критическом состоянии сверхпроводника

(см., например, [6]) может быть описана следующим уравнением, определенным для векторного потенциала $\varepsilon = -E/c$:

$$\varepsilon_{zzt}\varepsilon_t - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{tt} + \alpha\varepsilon_{zz}\varepsilon_t = 0, \quad (6)$$

где E — напряжённость магнитного поля в сверхпроводящем образце, $\alpha = c^2 d/E_0\nu$, $d = j^c(T_0)$, j^c — критический ток, T_0 — равновесная температура сверхпроводника, ν — теплоемкость, E_0 — поле выхода на вязкий режим течения магнитного потока [6]. Предположив $\varepsilon = \text{const}$, можно найти одно из решений уравнения (6)

$$\varepsilon(x, t) = k_1 x/2 + k_2 x + k_3 - a(\alpha - 2t/a)^{1/2} \quad (7)$$

которое описывает стационарное распределение магнитного и пространственно-однородное распределение электрического полей.

Проведем анализ уравнения (6) при помощи сформулированного выше метода. В качестве стартового решения используем выражение (7), полагая $k_1 = k_2 = 0$. Отметим, что (7) обладает следующими свойствами:

$$\varepsilon' = k_3 - a(\alpha - 2t/a)^{1/2}, \varepsilon'_t = q' = -a/\varepsilon', p' = 0, q'_t = -q'^3/a.$$

Определим связь между затравочным и новым решением следующим образом:

$$\begin{cases} p = \varepsilon_x = f(\varepsilon', q', \varepsilon) \\ q = \varepsilon_t = \phi(\varepsilon', q', \varepsilon). \end{cases}$$

Соответствующая система уравнений (4)–(5), с учётом свойств стартового решения, примет следующий вид

$$f_{\varepsilon\varepsilon}\phi^3 + q'f_{\varepsilon\varepsilon'}\phi + f_{\varepsilon q'}\phi\alpha q'^3 - \alpha f_{\varepsilon}\phi q'q'^3 - f_{\varepsilon}\phi_{\varepsilon'}q' + \alpha f_{\varepsilon}\phi^3 = 0. \quad (8)$$

Вторым выражением, дающим связь между функциями f и ϕ , будет уравнение, вытекающее из требования однозначности производной:

$$f'_q\alpha q'^3 + q'f_{\varepsilon'} + f\phi = \phi f. \quad (9)$$

Приведем данную систему в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, для этого будем искать f и ϕ как функции, зависящие от $z = z(q', \varepsilon, \varepsilon')$, линейно зависящей от ε и ε' :

$$z = a_1\varepsilon + A\varepsilon' + \psi(q'), \quad \psi = (a_2 - Aq')/\alpha q'^3,$$

где a_1, A, a_2 — постоянные, подлежащие определению из соответствующих граничных условий. Уравнение (9) дает следующую связь между f и ϕ :

$$\phi = Vf + a_2/a_1.$$

Подставляя данное выражение в уравнение (8) и интегрируя его, мы получаем следующие генерационные выражения

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = a_2 V \frac{1 + 2 \exp \frac{a_2 \alpha z}{2a_1^2}}{1 + \exp \frac{a_2 \alpha z}{2a_1^2}} \\ \varepsilon_t = -\frac{a_2}{a_1} \frac{\exp \frac{a_2 \alpha z}{2a_1^2}}{1 + \exp \frac{a_2 \alpha z}{2a_1^2}} \end{array} \right. \quad (10)$$

В качестве граничных условий примем следующие:

$$H(-\infty) = H_e, \quad H(\infty) = 0,$$

где H_e — внешнее магнитное поле. Система уравнений (10) имеет решения, удовлетворяющие поставленным граничным условиям, следующего вида

$$\left\{ \begin{array}{l} H = H_0 + H_e \frac{\exp \frac{\alpha E_e H_e (z + E_e t / H_e)}{2}}{\sqrt{1 + \exp^2 \frac{\alpha E_e H_e (z + E_e t / H_e)}{2}}} \\ E = E_e \frac{\exp \frac{\alpha E_e H_e (z + E_e t / H_e)}{2}}{\sqrt{1 + \exp^2 \frac{\alpha E_e H_e (z + E_e t / H_e)}{2}}} \end{array} \right.$$

Полученные решения позволяют описать проникновение магнитного потока вглубь сверхпроводящего образца с постоянной скоростью $V = \frac{E_e}{H_e}$ на фоне постоянного магнитного поля H_0 . На начальном этапе развития терромагнитных возмущений наблюдается экспоненциальный рост возмущений E и H вблизи некоторой заданной точки образца с координатой $z = z_0 = \text{const}$. Далее магнитный поток начинает проникать в виде нелинейной стационарной структуры типа ударной волны.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом работы является обнаружение усечённой связи между затравочным и новым решением НДУ в диссипативной системе при отсутствии полной генерационной структуры Бэклунда. Более детальный анализ возможных преобразований, определенных при

помощи модифицированного метода Бэклунда, и их связь с симметрией НДУ в данной негамильтоновой системе будет изложен в отдельном сообщении.

Авторы благодарны Ю. А. Степанянцу за обсуждение результатов настоящей работы. Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проект № 93-02-16876) и Международным Научным Фондом (проект № R8J000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wadati M. et al. // *Progr. Theor. Phys.* 1975. V.53. P.419.
2. Виноградов А. М. Нелинейные волны-структуры и бифуркации. — М.: Наука. С.279.
3. Lamb G. L. // *J. Math. Phys.* 1974. V.15. P.2157.
4. Seeger A. et al. // *Z. Phys.* 1953. V.134. P.173.
5. Максимов И. Л., Шалаев И. Ю. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1993. Т.36. № 7. С.708.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
20 января 1995 г.

THE MODIFIED BACKLUND'S METHOD IN THE THEORY OF NONLINEAR WAVES IN SUPERCONDUCTORS

I. L. Maksimov, I. Yu. Shalaev

УДК 621.385.2

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С ВИРТУАЛЬНЫМ КАТОДОМ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДРЕЙФА

В. Г. Анфиногентов

При помощи численного моделирования методом частиц в ячейке изучены нелинейные колебания электронного потока с виртуальным катодом в цилиндрическом пространстве дрейфа конечной длины. Исследовано изменение сложной динамики потока при уменьшении степени неоднородности системы. При помощи анализа размерности аттрактора показана динамическая природа хаотических колебаний виртуального катода. Исследованы физические процессы в потоке и обнаружено, что один из механизмов возникновения хаотической динамики электронного потока связан с нелинейным взаимодействием образующихся в потоке автоструктур при любой степени неоднородности системы.

В настоящей работе исследуется моноэнергетический нерелятивистский электронный поток, полностью заполняющий трубу дрейфа радиуса R и ограниченный в продольном направлении двумя плоскими сетками, находящимися на расстоянии L . Потенциал сеток равен потенциалу стенок трубы дрейфа. Плотность заряда в потоке ρ_0 и скорость v_0 на входе в систему поддерживаются постоянными. Невозмущенный пространственный заряд потока полностью скомпенсирован фоном неподвижных ионов, заполняющих трубу дрейфа. Движение потока предполагается одномерным. Исследование подобной модели представляет большой интерес, так как она является одной из простейших распределенных систем электронной природы.

Безразмерный потенциал поля пространственного заряда в потоке удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{1}{R'^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\alpha^2 (\rho - 1), \quad (1)$$

$$\varphi|_{r=R'} = \varphi|_{z=0} = \varphi|_{z=1} = 0, \quad (2)$$

с нормировкой

$$\varphi = \bar{\varphi}/\varphi_0 = e\bar{\varphi}/mv_0^2, \quad z = \bar{z}/L, \quad r = \bar{r}/L, \quad \rho = \bar{\rho}/\rho_0. \quad (3)$$

Здесь величины с чертой — размерные. Управляющими параметрами системы являются параметр Пирса

$$\alpha = \omega_p L/v_0, \quad (4)$$

где $\omega_p = \sqrt{e\rho_0/\epsilon m}$ — плазменная частота, и параметр неоднородности системы

$$R' = R/L. \quad (5)$$

При больших R' система сводится к “классическому” диоду Пирса [1], нелинейная динамика которого активно исследуется в последнее время в связи с обнаружением возможности сложных режимов, включая динамический хаос [2], [3], [4].

Как показано в [5], при

$$(\alpha/\pi)^2 > 1 + (\mu_{01}/R')^2, \quad (6)$$

где μ_{01} — первый корень функции Бесселя нулевого порядка, равномерное движение потока становится неустойчивым. При этом одна или несколько собственных мод линейной задачи становятся нарастающими во времени. Развитие неустойчивости приводит к формированию в потоке области с потенциалом поля пространственного заряда, близким к потенциалу катода — так называемого виртуального катода (ВК). ВК осциллирует во времени и пространстве, отражая часть потока ко входу в систему.

Режимы с ВК представляют большой интерес, так как в этом случае модель ограниченного электронного потока описывает один из механизмов генерации интенсивного излучения в виркаторах [6].

В данной работе исследуются режимы динамического хаоса в ограниченном электронном потоке и анализируется влияние неоднородности системы на сложную динамику и физические процессы, сопровождающие переход к хаотическим колебаниям.

Для моделирования процессов в потоке использовалось представление потока в виде совокупности заряженных дисков. Расчет полевых величин осуществляется РИС-методом [7].

Предварительный анализ динамики системы был проведен при помощи рассмотрения реализаций поля пространственного заряда на выходной сетке, спектров мощности и восстановленных по методу Такенса [8] проекций фазовых портретов. Как известно [4], в “классическом” диоде Пирса при $2\pi > \alpha > \pi$ существуют три области хаотического поведения — А ($1.26\pi > \alpha > \pi$), С ($1.72\pi > \alpha > 1.6\pi$) и F ($2\pi > \alpha > 1.84\pi$), разделенные режимами регулярных колебаний ВК. Для области А характерно наличие в спектре мощности значительного шумового пьедестала и двух выделенных частот. В аттракторе видна структура, соответствующая двухоборотному циклу (рис. 1а). В области С в спектре мощности отдельные спектральные составляющие расплываются в шумовом фоне, аттрактор характеризуется высокой однородностью, реализация представляет собой почти регулярные колебания, прерываемые хаотическими всплесками (рис. 1б). В области F отдельные спектральные составляющие тонут в шумовом фоне, аттрактор является сильнонеоднородным (рис. 1в).

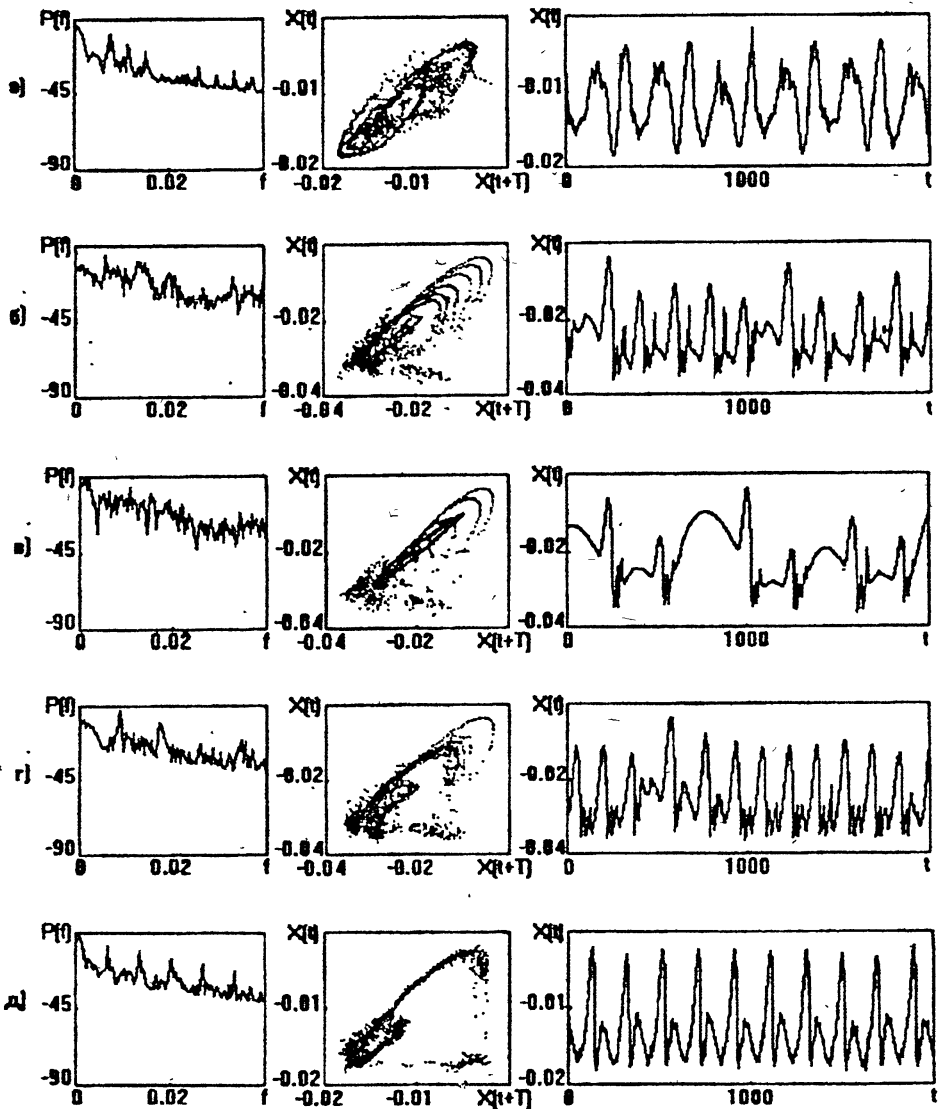


Рис. 1.

При уменьшении величины R' режимы регулярных колебаний ВК начинают исчезать. При этом структура аттракторов, соответствующих хаотической динамике ВК, изменяется незначительно. При значениях $R' \approx 2$ в системе перестает существовать режим А и возникает режим G, переходный между динамикой, характерной для "классического" диода Пирса, и для сильнонеоднородной системы с $R \sim L$. В этом режиме (рис. 1г) в спектре мощности на фоне значительного шумового пьедестала можно выделить широкие спектральные пики, соответствующие основной частоте (ν_0/L) и ее гармоникам. Реализация состоит из слабонерегуляр-

ных колебаний, прерываемых мощными хаотическими всплесками.

При дальнейшем уменьшении R' динамика, характерная для "классического" диода Пирса, исчезает, а колебания становятся более регулярными, что связано с уменьшением неустойчивости потока при малых R' .

При значениях $R' < 1$ ВК демонстрирует слабонерегулярное поведение, его колебания являются двухтактными — режим Н (рис. 1д). Экспоненциально спадающая автокорреляционная функция указывает на сложную динамику ВК и в этом режиме. Аттрактор представляет собой слегка уширенный предельный цикл. При $R' \sim 0.5$ поведение системы в меньшей степени зависит от значения α и переход от одного режима колебаний к другому происходит при изменении R' .

Средняя длительность регулярных колебаний $\langle \tau \rangle$ зависит от бифуркационного параметра α вблизи границы возникновения режима С при $R' = 4$ по закону

$$\langle \tau \rangle \sim (\alpha_{\text{кр}} - \alpha)^{-1}, \quad (7)$$

где $\alpha_{\text{кр}} = 1.76\pi$, характерному для перемежаемости [9]. Отметим, что в данной системе перемежаемость является основным механизмом перехода от регулярных режимов к хаотическим. Через перемежаемость осуществляется и переход от одного типа хаотических колебаний к другому при исчезновении регулярной динамики ВК. Наличие динамического сценария свидетельствует о детерминированной природе сложной динамики ВК. Вместе с тем хаотическое поведение ВК возникает в результате взаимодействия небольшого числа собственных степеней свободы системы.

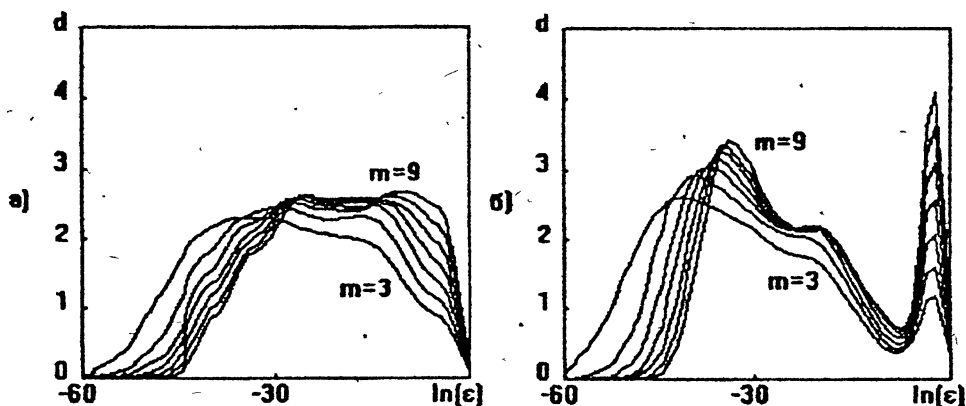


Рис. 2.

Анализ размерности аттракторов, соответствующих колебаниям ВК в трубе дрейфа, также свидетельствует о детерминированной природе сложных колебаний ВК. На рис. 2 представлена зависимость локального наклона d корреляционного интеграла [10] от масштаба наблюдения ϵ при

различных значениях размерности пространства вложения m для режимов С и G. Хорошо видно, что в режимах сложных колебаний размерность аттракторов испытывает насыщение с ростом размерности пространства вложения, что свидетельствует о динамической природе сложного поведения ВК. В режиме, близком к "классическому" диоду Пирса, в аттракторе можно выделить область скейлинга (рис. 2а), в которой размерность аттрактора около 2,5. Небольшое значение размерности показывает, что в колебания вовлечено малое число степеней свободы. При сильной неоднородности системы (рис. 2б) область скейлинга отсутствует, однако насыщение размерности с ростом размерности вложения сохраняется. Максимальная размерность аттрактора равна 4, что свидетельствует о возникновении сложных колебаний в результате взаимодействия небольшого числа мод.

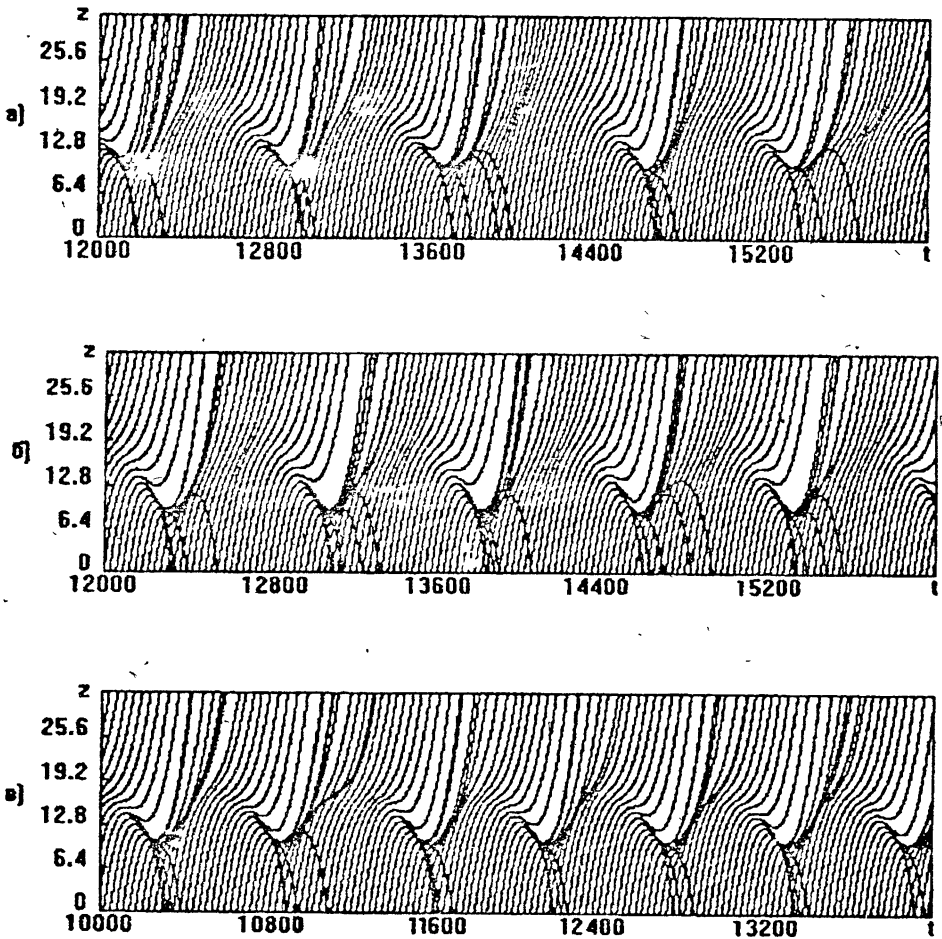


Рис. 3.

Анализ зависимости максимального значения плотности заряда в междусеточном пространстве от времени показывает, что в потоке на каждом периоде колебаний формируются два сгустка. Первый сгусток формируется в области ВК и распадается при отражении части потока от ВК. Второй сгусток возникает в процессе группирования входящего потока в уменьшающемся по модулю тормозящем поле ВК и обязан своим формированием развитию кинематической неустойчивости. Сгустки возникают в потоке вне зависимости от начальных условий, и, следовательно, удовлетворяют определению автоструктур в смысле работы [11]. Необходимая для возникновения структур диссипация связана в данной системе с выходом части потока из области взаимодействия.

На рис. 3 показаны пространственно-временные диаграммы колебаний ВК для режимов С, G и H. В режимах с хаотической динамикой ВК максимальная плотность заряда во втором сгустке составляет около 0,7 от плотности заряда в ВК. В этом случае в потоке происходит отражение частиц не только от ВК, но и от второго сгустка (рис. 3а). Отраженная часть потока при этом задает начальные условия для формирования ВК, что обеспечивает сильную связь по потоку между структурами, приводящую к хаотизации колебаний. В режиме С такое отражение происходит в начале каждого хаотического всплеска.

В случае сильно неоднородной системы отражение происходит при меньших значениях плотности заряда во втором сгустке, при этом отражающийся поток не оказывает влияние на формирование ВК (рис. 3б) в силу меньшей неустойчивости движения потока. Динамика ВК при этом является почти регулярной.

Усиление связи по потоку, приводящее к нарушению регулярности в случае малых R' , связано с формированием метастабильного сгустка [12] в области ВК (рис. 3в). Легко видеть, что метастабильный сгусток существует в течение большей части периода колебаний ВК и задает начальное возмущение для формирования ВК на следующем периоде колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pierce J. // J. Appl. Phys. 1944. Vts 15. N 10. P. 721.
2. Godfrey B. B. // Phys. Fluids. 1987. V. 30. N 5. P. 1553.
3. Lawson W. S. // Phys. Fluids. B. 1989. V. 1. N 7. P. 1493.
4. Anfinogentov V. G. // In: Proceedings of International symposium "Physics and Engineering of Millimeter and Submillimeter Waves". — Kharkov, 1994. V. II. P. 289.
5. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука, 1990. С. 307.
6. Thode L. E. // In: High Power Microwave Sources /Ed. by Granatstein V. L. and Alexeff I. — Boston: Artech House, 1987. P. 441.

7. Birdsall C. K., Langdon A. B. Plasma physics via Computer simulation. — NY: McGraw-Hill, 1985. P. 28.
8. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence //In: Lecture Notes in mathematics, N 898. — Springer-Verlag, 1981.
9. Pomeau Y., Manneville P. //Comm. Math. Phys. 1980. V. 74. N 1. P. 189.
10. Grassberger P., Procaccia J. //Phys. Rev. Let. 1983. V. 50. N 5. P. 346.
11. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. Сб. — М.: Наука, 1987. С. 7-44.
12. Ватрунин В. Е., Дубинов А. Е., Селемир В. Д. //Препринт ВНИИЭФ N 131. — Арзамас-16, 1993.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
6 февраля 1995 г.

**NONLINEAR DYNAMICS OF THE ELECTRON BEAM WITH A
VIRTUAL CATHODE IN THE FINITE DRIFT SPACE**

V. G. Anfinogentov

Nonlinear oscillations of the electron beam with a virtual cathode in the finite-length drift tube region are studied by the numerical simulation (PIC method). The change of the beam complex dynamics with the decrease of the drift tube radius is investigated. The dynamical nature of chaotic oscillations of the virtual cathode is showed with the help of the analysis of attractor dimensions. Physical processes in the beam are investigated and it was showed that one mechanism of beam chaotic behaviour appearance was connected with the nonlinear interaction between the structures which are organized in the beam.

УДК 519.673: 621.396.66

О ВЛИЯНИИ СВЯЗЕЙ НА НЕЛИНЕЙНУЮ ДИНАМИКУ ДВУХ КАСКАДНО-СВЯЗАННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

В. В. Матросов, М. В. Шалфеева

Исследуются режимы синхронизации, причины нарушения синхронизации в системе двух каскадно-связанных генераторов с фазовым управлением. Основное внимание уделяется анализу влияния связей на коллективную динамику.

Данная работа является продолжением начатых в работах [1, 2] исследований по изучению нелинейной динамики системы двух каскадно-соединенных автогенераторов, имеющие локальные фазовые цепи управления. Такая система, с одной стороны, представляет самостоятельный интерес [3], с другой стороны, является простейшим примером одномерных дискретных активных сред, изучению которых в настоящее время уделяется большое внимание [4].

Будем рассматривать каскадное соединение двух фазовых систем, то есть соединение двух последовательно (каскадно) соединенных генераторов, каждый из которых имеет фазовую цепь управления. При таком соединении выход первой фазовой системы служит входом второй. На вход первой системы подается опорный сигнал. Кроме этого учтем дополнительные связи между первой и второй фазовыми системами через сигналы рассогласований в прямом и обратном направлениях.

Математической моделью рассматриваемой каскадной системы является следующая система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin \psi_1 - \kappa \sin \psi_2, \\ \frac{d\psi_2}{d\tau} &= (\gamma_2 - \gamma_1) + (1 - \delta) \sin \psi_1 - (b - \kappa) \sin \psi, \end{aligned} \quad (1)$$

где ψ_1 — текущее фазовое рассогласование между сигналом первого генератора и опорным сигналом, ψ_2 — текущее фазовое рассогласование между сигналами первого и второго генераторов; γ_1 и γ_2 — начальные расстройки частот первого и второго генераторов относительно опорного сигнала; δ и κ — параметры дополнительных связей между генераторами

через сигналы рассогласований в прямом и обратном направлении соответственно; $b = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$, Ω_1 и Ω_2 — полосы удержания парциальных фазовых систем. Система (1) в силу периодичности ее правых частей по переменным ψ_1 и ψ_2 является нелинейной динамической системой на тороидальной фазовой поверхности U_0 . В силу инвариантности преобразования $\bar{\gamma}_1 = -\gamma_1$, $\bar{\gamma}_2 = -\gamma_2$, $\bar{\psi}_1 = -\psi_1$, $\bar{\psi}_2 = -\psi_2$ анализ движений системы (1) достаточно провести в области положительных значений γ ($\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$). Далее остановимся на случае, когда объединяются идентичные парциальные системы, т. е. когда парциальные системы имеют одинаковые полосы удержания $\Omega_1 = \Omega_2 \equiv \Omega$ ($b = 1$) и одинаковые начальные частотные расстройки $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$.

В силу существенной нелинейности модели (1) при исследовании динамических процессов целесообразно сочетание качественных методов с численным моделированием на ЭВМ. В работе [1, 2] основное внимание уделено изучению случая одной дополнительной связи $\kappa \neq 0$, $\delta = 0$. В настоящей работе рассмотрен общий случай $\kappa \neq 0$, $\delta \neq 0$. Основными вопросами исследования системы (1) явились: изучение режима синхронизации, выяснение причин, нарушающих устойчивую синхронизацию, выделение в пространстве параметров областей гарантированной (т. е. при любых начальных условиях) синхронизации (областей захвата), изучение влияния дополнительных связей на коллективную динамику системы.

Поскольку возможность синхронизации в каскадной системе определяется наличием устойчивого состояния равновесия на фазовой поверхности U_0 , то проблема анализа стационарных синхронных режимов каскадной системы связана с определением координат состояний равновесия модели (1), изучением их устойчивости, а также с определением области существования устойчивых состояний равновесия в пространстве параметров.

Система (1) при значениях параметров $(\gamma_1, \kappa, \delta) \in C_0^+$, где

$$C_0^+ = \left\{ 0 < \gamma < \min \left(\frac{\delta\kappa - 1}{1 - \kappa}, \frac{1 - \delta\kappa}{1 - \kappa}, \frac{\delta\kappa - 1}{1 - \delta}, \frac{1 - \delta\kappa}{1 - \delta} \right) \right\}, \quad (2)$$

имеет четыре состояния равновесия $O_1(\psi_1^*, \psi_2^*)$, $O_2(\psi_1^*, \pi - \psi_2^*)$, $O_3(\pi - \psi_1^*, \pi - \psi_2^*)$, $O_4(\pi - \psi_1^*, \psi_2^*)$, где величины ψ_1^* и ψ_2^* определяются равенствами $\psi_1^* = \arcsin \frac{(1 - \kappa)\gamma_1}{1 - \delta\kappa}$, $\psi_2^* = \arcsin \frac{(1 - \delta)\gamma_1}{1 - \delta\kappa}$. Исследуя характер состояний равновесия по корням соответствующих характеристических уравнений, устанавливаем что при $\kappa < \left| \frac{1}{\delta} \right|$, также как и при $\delta = 0$ [2], состояния равновесия O_2 и O_4 являются седлами, а состояния равновесия O_1 и O_3 узлами или фокусами, устойчивость которых определяется знаком величины $\sigma = \cos \psi_1^* + (1 - \kappa) \cos \psi_2^*$. Если $\sigma < 0$ ($\sigma > 0$), то O_3 устойчивый (неустойчивый) фокус или узел, а O_1 , соответственно, неустойчивый

(устойчивый) фокус или узел. При $\kappa > \left| \frac{1}{\delta} \right|$ состояния равновесия O_1 и O_3 являются седлами, а состояния равновесия O_2 и O_4 соответственно устойчивым и неустойчивым узлами или фокусами.

Устойчивые состояния равновесия O_1, O_2, O_3 определяют синхронные режимы работы каскадной системы с ошибками слежения ψ_1^* и ψ_2^* , ψ_1^* и $\pi - \psi_2^*$, $\pi - \psi_1^*$ и $\pi - \psi_2^*$ соответственно. Область C_0^+ является областью существования синхронных режимов.

На рис. 1 представлены границы области существования синхронных режимов C_0^+ на плоскости параметров γ и κ , построенные при значениях $\delta = -1.0; -0.3; 0.0; 0.3; 2.0$. Эти результаты дают представление об изменении области C_0^+ в зависимости от параметров γ, κ, δ . Из рис. 1 видно, что введение дополнительной связи "вперед" ($\delta \neq 0$) приводит к появлению критического значения параметра $\kappa = 1/\delta$, при кото-

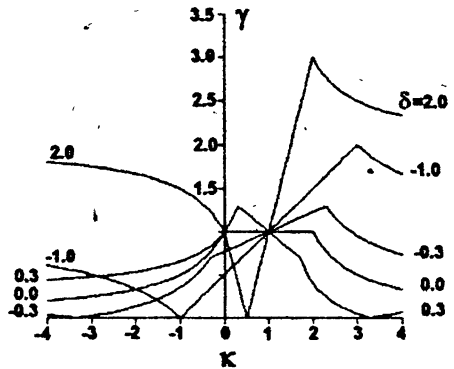


Рис. 1.

ром в каскадной системе диапазон начальных расстроек γ , при которых существует синхронный режим, равен нулю. Отход по параметру κ от критического значения приводит к увеличению диапазона γ , который, при $\kappa = \delta$ в случае $\delta > 0$, и $\kappa = 2 - \delta$ в случае $\delta < 0$, достигает своего максимума $\gamma_{\max} = 1 + \delta \text{sign} \delta$. Отметим, что величина максимальной начальной расстройки, где существует синхронный режим, в случае $\delta \neq 0$ может быть больше единицы. При $\kappa \rightarrow \pm\infty$, линии ограничивающие область C_0^+ , асимптотически приближаются к прямой $\gamma = \delta \text{sign} \delta$.

Автоколебательные режимы, ведущие к нарушению гарантированной точной синхронизации в каскадной системе, определяются устойчивыми предельными циклами модели (1) на фазовой поверхности U_0 . В силу того, что фазовая поверхность U_0 является тороидальной, на ней возможны разнообразные периодические движения, которые в свою очередь порождают различные динамические автоколебательные режимы [1, 2]. Во-первых, это циклы, не охватывающие тор U_0 , соответствующие квазисинхронному режиму работы каскадной системы, когда синхронизация осуществляется с некоторой, колеблющейся во времени около нулевого среднего значения частотной ошибкой. Во-вторых, это циклы охватывающие тор U_0 в направлении ψ_1 или ψ_2 . Циклы, охватывающие тор в направлении ψ_1 , определяют автоколебательный режим, когда нет синхронизации генераторов по отношению к опорному сигналу, однако, между

генераторами имеет место взаимная квазисинхронизация. Циклы, охватывающие тор U_0 в направлении ψ_2 , соответствуют динамическому режиму, когда первый генератор находится в режиме квазисинхронизма по отношению к опорному сигналу, а второй генератор работает в асинхронном режиме. И, наконец, циклы, охватывающие тор U_0 в направлении ψ_1 и ψ_2 и определяющие асинхронный режим работы генераторов.

Механизмы возникновения автоколебательных режимов связаны с многочисленными бифуркациями совпадения сепаратрис седловых состояний равновесия модели (1), как охватывающих, так и не охватывающих фазовый тор U_0 ; бифуркациями двойных предельных циклов, а также со сменой устойчивости состояний равновесия O_3 и O_1 . Бифуркационные поверхности, отвечающие возникновению автоколебательных режимов, выделяют в пространстве параметров $\{\gamma, \kappa, \delta\}$ области, соответствующие различному динамическому поведению каскадной системы.

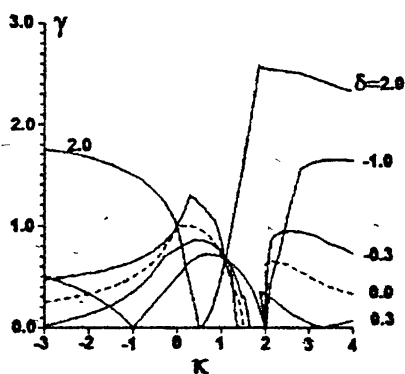


Рис. 2.

На рис. 2 представлены в параметрах κ, γ границы области захвата D_0^+ , определенные в результате численного исследования системы (1) для значений $\delta = -1.0; -0.3; 0.0; 0.3; 2.0$ (области под кривыми). Анализируя поведение изображенных на рис. 2 кривых устанавливаем, что при $\delta = 0$ (пунктирная линия) в каскадной системе существует диапазон параметров $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$, когда гарантированный захват в синхронный режим невозможен. При $\delta = 0$ максимальная начальная частотная расстройка γ при которой возможен гарантированный захват в режим синхронизации не превосходит единицы. Путем введения дополнительной связи "вперед" ($\delta \neq 0$) можно, во-первых, уменьшить диапазон $[\kappa_1, \kappa_2]$, где захват в синхронный режим невозможен, во-вторых, существенно увеличить максимальную начальную расстройку γ , где захват в синхронный режим гарантирован.

Таким образом, представленные результаты исследования динамических процессов каскадной системы позволяют сделать следующие выводы:

- введение дополнительных связей через сигналы рассогласований приводит к существенному усложнению динамического поведения каскадной системы за счет появления большого разнообразия автоколебательных режимов;
- путем соответствующего выбора величины и знака параметров связей κ и δ можно существенно увеличить диапазон начальных рас-

строек γ , в котором в каскадной системе существует синхронный режим, а также где он наступает гарантированно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424).

ЛИТЕРАТУРА

1. Корзимова М. В., Матросов В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т.36. № 8. С.815.
2. Матросов В. В., Корзимова М. В. // Изв. вузов. ПНД. 1994. № 2. С.10.
3. Капранов М. В. // Динамика систем. 1976. № 11. С.76.
4. Афраимович В. С., Некоркин В. И., Осипов Г. В., Шалфеев В. Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. / Под ред. Галонова-Грехова А. В., Рабиновича М. И. — Горький: ИПФ АН СССР, 1989. 256 с.

Научно-исследовательский
институт прикладной
математики и кибернетики,
Н.Новгород

Поступила в редакцию
15 февраля 1995 г.

THE INFLUENCE OF THE PARAMETERS OF COUPLES ON NONLINEAR DYNAMICS OF TWO CASCADE-COUPLED PHASE LOCKED LOOPS

V. V. Matrosov, M. V. Shalfeeva

The regime of synchronization, the reasons of disturbance of synchronization in the system of two consequently coupled generators with local phase control feedback loops are studied. A significant attention is paid to the analysis of the influence of couples on collective dynamics.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ НЕКОГЕРЕНТНОЙ НАКАЧКИ ИЛИ В СЛУЧАЙНОМ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ И ЭФФЕКТИВНОЕ УСИЛЕНИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Я. Л. Богомолов, Н. С. Гинзбург, Е. Р. Голубятникова

Для увеличения эффективности лазера на свободных электронах, запитываемого сильноточным релятивистским электронным пучком с большой дисперсией параметров предлагается использовать некогерентную накачку или стохастический ондулятор.

В В Е Д Е Н И Е

Известно, что КПД ЛСЭ, основанных на вынужденном рассеянии волн и вынужденном ондуляторном излучении релятивистских электронных пучков при постоянной фазовой скорости волны накачки (или периоде ондулятора), не высок и обратно пропорционален числу осцилляций, совершаемых электроном на длине пространства взаимодействия. Наиболее разработанный метод повышения КПД, состоящий в адиабатически плавном изменении скорости комбинационной волны эффективен только для пучков, обладающих малой, в масштабе амплитуды этой волны, дисперсией параметров. В данной работе показано, что для пучков с большой дисперсией параметров, формируемых, например, сильноточными инжекторами, перспективно использование некогерентной накачки или стохастического ондулятора. При такой накачке имеет место расширение спектра синхронных с электронным потоком комбинационных волн и, как следствие, реализация механизма диффузионного стохастического торможения частиц пучка. В результате, эффективность трансформации энергии пучка в энергию коротковолнового рассеянного излучения оказывается пропорциональна ширине спектра накачки и может существенно превышать значения, реализующиеся в случае монохроматической накачки [1-4]. При этом принципиально важно, что эффективность трансформации практически не зависит от ширины функции распределения электронов по поступательным скоростям.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть монохроматическая сигнальная волна, распространяющаяся попутно электронному потоку, задана вектор-потенциалом

$$\vec{A}_s = \text{Re} \left[\vec{x}_0 A_s(z) \exp(i(\omega_s t - k_s z)) \right].$$

В исследуемой усилительной схеме частота этой волны задается внешним источником. Поле накачки представляет собой набор дискретных линий с некоррелированными между собой фазами

$$\vec{A}_i = \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \vec{x}_0 A_{in}(z) \exp(i(\omega_{in} t + k_{in} z)) \right].$$

В рамках квазилинейного приближения, усиление сигнальной волны в поле некогерентной накачки или стохастическом поле ондулятора описывается следующими уравнениями

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = \frac{\pi \omega_p^2}{2 \omega_s^2} \int_1^{\infty} \tilde{D} \frac{\partial F}{\partial \gamma} d\gamma, \quad P_s|_{z=0} = P_s^0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\tilde{D} \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right), \quad F|_{z=0} = F_0(\gamma), \quad (2)$$

где $\omega_p = (4\pi e^2 N_0/m)^{1/2}$ — плазменная частота, N_0 — плотность электронного потока, $\tilde{D} = 4P_s P_i k_s^2 \gamma^2 / \pi$, $F(\gamma, z) = \bar{f} \cdot mc$ — медленно меняющаяся функция распределения электронов по энергиям, $P_s = I_s \lambda_s^2 / P_*$, $I_s = |A_s|^2 \omega_s^2 / 8\pi c$ — интенсивность сигнальной волны, $P_* = m^2 c^5 / e^2 = 8.7$ ГВт, $P_i = I_i \lambda_i^2 / P_*$, $I_i = |A_i|^2 \omega_i^2 / 8\pi c \delta k$ — спектральная интенсивность накачки.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Начальная функция распределения электронов по энергиям задавалась следующим выражением:

$$\tilde{F}^0 = \frac{2}{\delta} \cos^2 \left[(u-1) \frac{\pi}{\delta} \right],$$

в интервале $[-\delta/2, \delta/2]$ в окрестности энергии центральной фракции $\bar{\gamma}$, где $\delta = \Delta\gamma/\bar{\gamma}$ — ширина разброса электронов по энергиям, $u = \gamma/\bar{\gamma}$ — нормированная энергетическая переменная.

Спектральное распределение поля накачки аппроксимировалось гауссовой формой линии: $I_i = I_i^{tot} \cdot g(k_i)$, где I_i^{tot} — полная (интегральная) интенсивность накачки, которая в используемых безразмерных переменных записывается в виде

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp \left[- \left(\frac{u_i^2}{u^2} - 1 \right)^2 / \sigma^2 \right],$$

где $\sigma = \Delta k_i / \bar{k}_i$ — ширина спектра накачки, а величина $u_i = \gamma_i / \bar{\gamma}$, ($\gamma_i = \sqrt{k_i / 4\bar{k}_i}$) характеризует центр спектральной полосы поля накачки в пространстве энергии.

Для проведения численного моделирования с учётом закона сохранения энергии уравнения (1)–(2) удобно привести к одному уравнению диффузии,

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial u} \left((\eta + p_s^0) g(u) u^2 \frac{\partial \hat{F}}{\partial u} \right),$$

где

$$\zeta = \frac{\omega_p^2 \lambda_i \bar{\gamma}}{4\pi c^2} \cdot \frac{\lambda_s^2 I_i^{tot}}{P_s} z, \quad p_s^0 = \frac{2P_s^0 \omega_s^2}{\pi \omega_p^2 \bar{\gamma}}.$$

$$\eta = 1 - \int_0^\infty u \hat{F} du$$

— электронный КПД.

Результаты численного моделирования показывают, что при увеличении характерной ширины спектра накачки, σ , эффективность трансформации энергии возрастет. Вместе с тем увеличение ширины спектра накачки приводит к падению инкрементов и, соответственно, длина пространства взаимодействия, на которой реализуется максимальный КПД, увеличивается. Результаты численного моделирования подтверждают, что исследуемый метод повышения КПД не критичен к качеству электронного пучка (см. рис. 1). Максимальный КПД практически не зависит от параметра δ , характеризующего дисперсию параметров электронного потока. Насыщение усиления обусловлено образованием плато на функции распределения электронов (см. рис. 2), ширина которого, а следовательно, и максимальный КПД, определяется шириной спектра накачки, а также расстоянием (в пространстве энергий) между центром линии поля накачки и центром функции распределения частиц. Интенсивность накачки и плотность потока оказывают влияние, в основном, на инкремент и длину области рассеяния.

В качестве примера рассмотрим случай усиления излучения с длиной волны $\lambda_s = 0.3$ мм сильноточным РЭП с плотностью тока $j = 10^4$ А/см² и

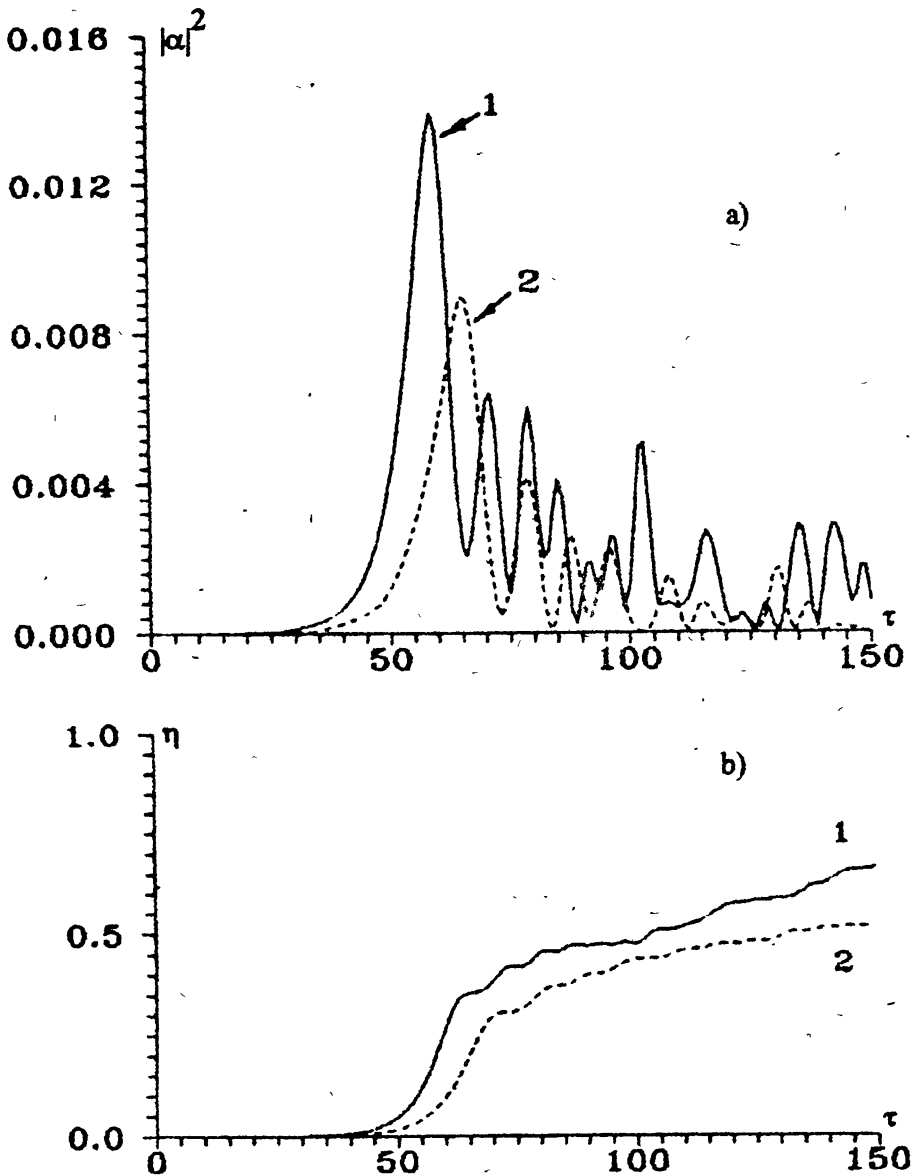


Рис. 1. Зависимость электронного КПД от нормированной продольной координаты ζ для относительной ширины начального разброса электронов по энергиям 15% и 30%.

энергией частиц 4.5 МэВ ($\bar{\gamma} = 10$), проходящего через стохастический ондулятор с характерным периодом $\bar{d} = 3$ см, напряжённостью магнитного поля 3 кЭ. Площадь поперечного сечения области взаимодействия выберем 0.5 см^2 . В случае разброса электронов по энергиям 30% и ширины спектра продольных волновых чисел поля ондулятора 30%, зависимость КПД от продольной координаты показана сплошной кривой на рис. 3. Максимальный КПД $\sim 10\%$ реализуется при длине области взаимодействия 3 м. Выходная мощность коротковолнового излучения составит 1.2 ГВт, что при входной мощности 100 кВт соответствует коэффициенту усиления 40 дБ.

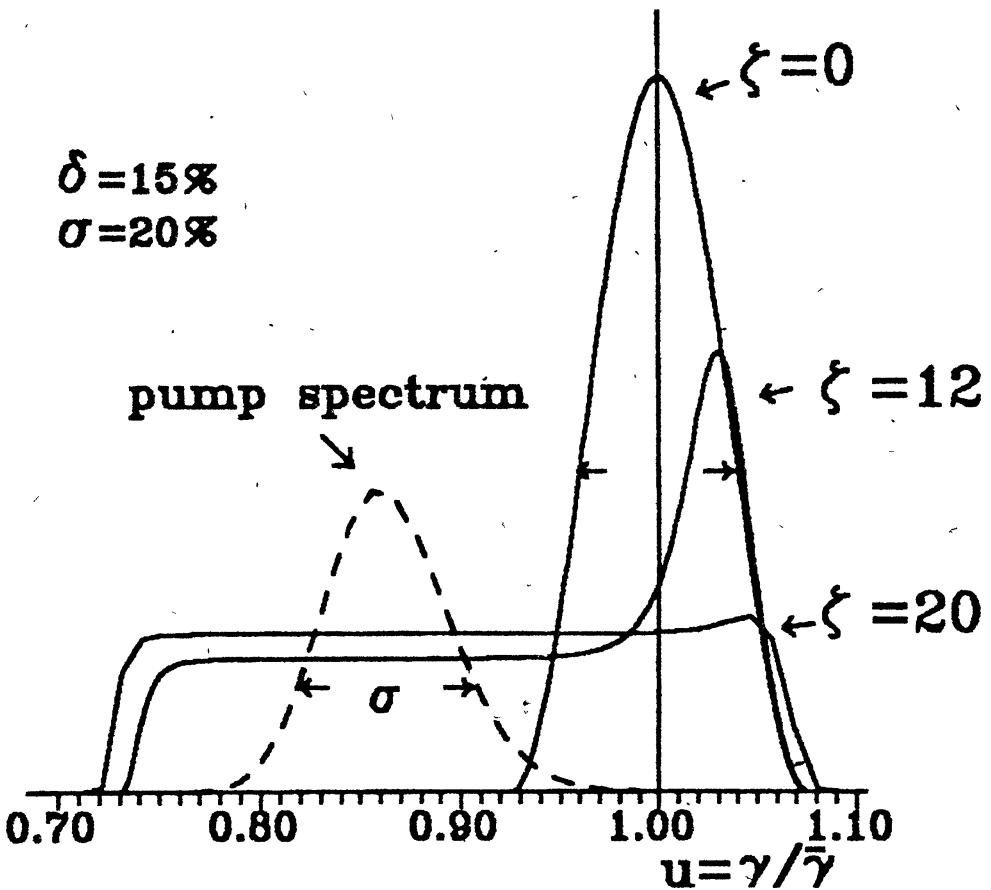


Рис. 2. Эволюция функции распределения электронов при относительной ширине начального разброса электронов по энергиям $\delta = 15\%$ и относительной ширине спектра накачки $\sigma = 20\%$.

Для сравнения, на этом же рисунке, пунктирной кривой приведены результаты усиления монохроматической волны пучком с той же дисперсией параметров, проходящий через периодический ондулятор с периодом 3 см

и напряженностью поля 3 кЭ. Очевидно, что использование стохастического ондулятора позволяет на порядок повысить эффективность энергообмена.

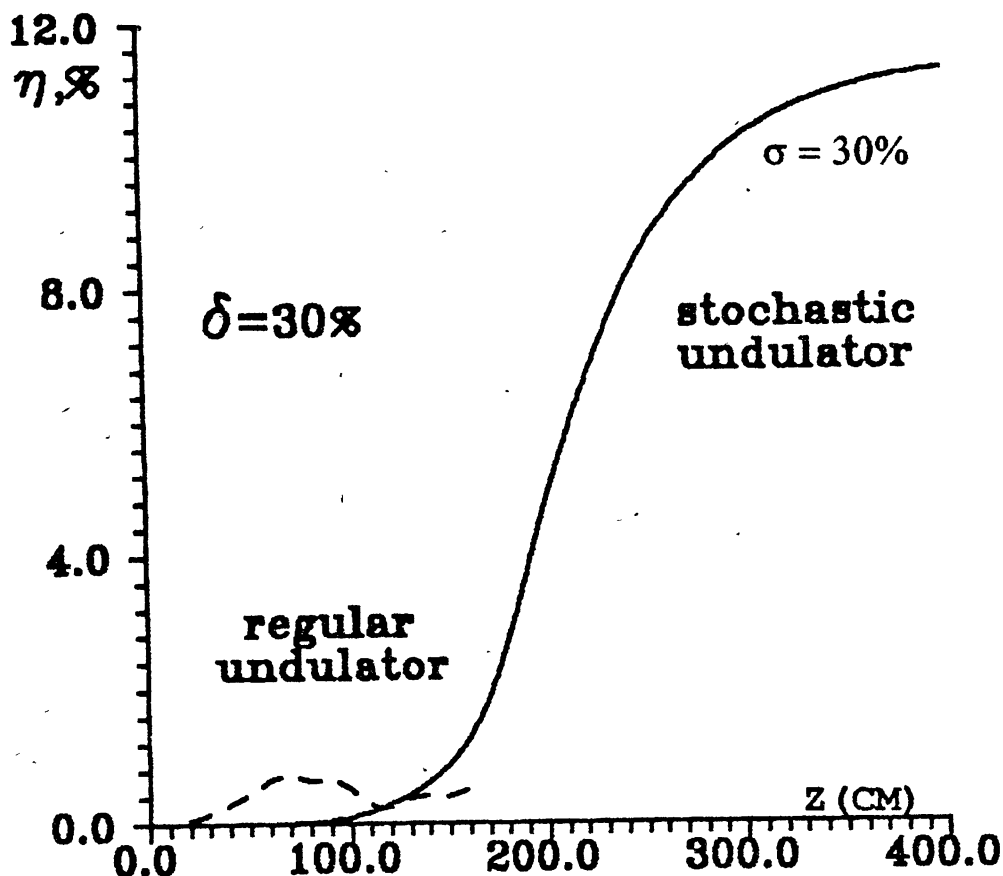


Рис. 3. Сравнение эффективности энергоотдачи электронного потока с дисперсией частиц по энергиям 30% в случае некогерентной (сплошная кривая) и когерентной накачки (пунктирная).

Сравнение этих кривых с результатами предыдущего анализа позволяют сделать вывод, что для электронного пучка с большой дисперсией параметров до 30% использование некогерентной накачки при относительно небольшом уменьшении инкрементов позволяет, по крайней мере на порядок, повысить эффективность энергоотдачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. // ЖЭТФ 1979. Т.76. С.930.

2. Sprangle P., Tang C. M., Manheimer W. M. // Phys. Rev. A. 1980. V.21. P.302.
3. Lin A. T., Dawson J. M. // Phys. Rev. Lett. 1979. V.42. P.1670.
4. Kroll N. M., Morton Ph. L., Rosenbluth M. N. Free Electron Generators of Coherent Radiation. Physics of Quantum Electronics. / S. F. Jacobs, M. O. Scully (Editors). — Addison-Wesley, 1980. V.7. P.113.
5. Лучинин А. Г., Нусинович Г. С. // Гиротроны. — Горький: ИПФ АН СССР, 1989. С.55.

Институт прикладной физики
РАН, Н. Новгород

Поступила в редакцию
9 февраля 1995 г.

**STOCHASTIC DAMPING OF PARTICLES IN AN INCOHERENT PUMP
FIELD OR IN A RANDOM MAGNETOSTATIC FIELD AND THE
EFFECTIVE AMPLIFICATION OF MONOCHROMATIC
ELECTROMAGNETIC RADIATION**

Ya. L. Bogomolov, N. S. Ginzburg, E. R. Golubyatnikova

We suggest to use the incoherent pumping or the stochastic undulator to improve the effectiveness of a free electron laser pumped by a heavy-current relativistic electron beam with a large dispersion of parameters.

СТИМУЛИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДЖОЗЕФСОНОВСКИМИ ВИХРЯМИ

В. В. Курин, А. В. Юлин

Предлагается новый тип генератора микроволнового излучения в котором джозефсоновский контакт используется в качестве активной среды.

Обнаружена модуляционная неустойчивость в цепочке солитонов, движущейся в джозефсоновском контакте, связанном с замедляющей системой. Развитие этой неустойчивости приводит к усилению волн в линии передачи. Этот эффект аналогичен эффекту группировки, имеющему место в ЛОВ и ЛБВ и приводит к эффективной трансформации энергии солитонов в энергию микроволнового излучения.

1. В В Е Д Е Н И Е

В статье предлагается новый тип джозефсоновского генератора, принцип действия которого аналогичен принципу действия электронных приборов типа лампы бегущей волны. Генератор состоит из распределенного джозефсоновского контакта, связанного с линией передач, играющей роль замедляющей системы. Джозефсоновские вихри-солитоны, движущиеся в контакте, из-за эффекта Черенкова возбуждают волны в замедляющей системе и, взаимодействуя с полем излучения, группируются в тормозящей фазе волны, обеспечивая когерентность вклада большого количества вихрей в излучение. Этот эффект можно назвать индуцированным излучением электромагнитных волн джозефсоновскими солитонами. Спонтанное черенковское излучение солитонов было предсказано ранее [1].

В квазичастичном приближении получены уравнения описывающие динамику взаимодействующих друг с другом и с волнами в замедляющей системе вихрей. Проанализирована бесконечная система и показано, что если скорость вихревой цепочки близка к фазовой скорости какой-либо волны в замедляющей системе, то в цепочке вихрей возможно развитие модуляционной неустойчивости. Была исследована линейная стадия этого процесса и найдены область параметров существования данной неустойчивости и её инкремент. Группировка джозефсоновских солитонов в тормозящей фазе волны приводит к эффективной генерации волны в

замедляющей системе. Приводится простая оценка уровня нелинейного ограничения генерируемой мощности.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Используя наиболее простую резистивную модель для джозефсоновского контакта и считая, что связь между полосковой линией и джозефсоновским переходом обеспечивается наличием взаимоиндукции, имеем следующую систему безразмерных уравнений для полей в контакте и в линии соответственно

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = -\gamma \varphi_t - j - \sigma \psi_{xx} \quad (1)$$

$$\dot{L}\psi = -\Gamma\psi_t - \sigma\varphi_{xx} \quad (2)$$

Первая производная φ по времени пропорциональна напряжению на контакте, а производная по координате — магнитному полю в контакте, ψ — аналогичная переменная для полосковой линии. Оператор \dot{L} описывает полосковую линию без затухания, затухание в линии учтено членом $\Gamma\psi_t$. Величина σ определяет силу связи линии и контакта. Время нормировано на плазменную частоту $\omega_p^2 = \frac{2ej_c}{\hbar C}$, где j_c — плотность критического тока контакта, а C — его погонная емкость. Координата нормирована на джозефсоновскую глубину проникновения $\lambda_j^2 = \frac{\hbar}{2ej_c L}$, здесь L — погонная индуктивность контакта. Переменная j в правой части первого уравнения — плотность тока накачки, нормированная на критическую плотность тока контакта.

При $\gamma = 0$, $\sigma = 0$ и $j = 0$ уравнение (1) интегрируемо и имеет хорошо известные солитонные решения. Если γ , σ и j малы и расстояние между солитонами много больше 1, то можно применить метод возмущений [2] и искать φ в виде

$$\varphi = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan \exp\left(\frac{x - Z_n - vt}{\sqrt{1 - \dot{Z}_n^2}}\right) + F,$$

где Z_n — координата n -ного солитона а F — линейные возмущения в линии. Тогда получим следующие уравнения для центров масс солитонов и линейных полей в линии и контакте

$$\ddot{Z}_n + \gamma \dot{Z}_n + \frac{\pi}{4} \left(e^{Z_n - Z_{n+1}} - e^{Z_{n-1} - Z_n} \right) = -\frac{\pi}{4} F(Z_n, t) \quad (3)$$

$$\dot{L}\psi + \Gamma\psi_t = -4\sigma \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan \exp(x - Z_n) \quad (4)$$

$$F_{tt}(x, t) + \gamma F_t(x, t) - F_{xx}(x, t) + F(x, t) = -\sigma\psi_{xx} - j. \quad (5)$$

Уравнения (3)–(5) написаны для нерелятивистского движения солитонов (т. е. когда $\dot{Z}_n \ll 1$) и верны пока $F \ll 1$.

3. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

В случае когда j не зависит от координаты существует однородное решение $Z_n = d_0 n - vt$ и соответствующие решения для ψ и F , где d_0 — расстояние между соседними солитонами. В нерезонансном случае ψ и F малы и цепочка движется со скоростью

$$v = \frac{\pi j}{4\gamma}.$$

Однако при определенных условиях это решение неустойчиво. Введем новую переменную $\xi_n = Z_n - nd_0 - vt$, характеризующую сдвиг солитона относительно его положения в невозмущенной цепочке и считая ξ малым $\xi \ll 1$, из (3)–(5) имеем

$$\ddot{\xi}_n + \gamma \dot{\xi}_n + \frac{C_s^2}{d_0^2} (2\xi_n - \xi_{n-1} - \xi_{n+1}) = -\frac{\pi}{4} F(nd_0 + vt + \xi_n) \quad (6)$$

$$F_{tt} + \gamma F_t - F_{xx} + F = -\sigma \psi_{xx} \quad (7)$$

$$\hat{L}\psi + \Gamma\psi_t = -4\sigma \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan \exp(\xi_n + nd_0 + vt + x), \quad (8)$$

где $C_s = \frac{\pi}{4} e^{-d_0} d_0^2$.

Когда $\sigma \neq 0$, но достаточно мало мы можем учитывать взаимодействие между модами только вблизи точек пересечения их дисперсионных характеристик. Около этих точек из уравнений (6)–(8) можно получить дисперсионное уравнение, описывающее систему со слабой связью между джозефсоновским контактом и полосковой линией

$$\left(\frac{4C_s^2}{d_0^2} \sin^2 \left(\frac{kd_0}{2} \right) - (\omega - kv)^2 + i\gamma\omega \right) (1 + k^2 - \omega^2 + i\gamma\omega) \times \\ \times (L(\omega, k) + i\Gamma\omega) = \frac{2\pi^2 \sigma^2 k^4}{d_0}. \quad (9)$$

При $\sigma = 0$ уравнение (9) расщепляется на множители, соответствующие невзаимодействующим волнам, которые могут существовать в данной системе: быстрая и медленная акустические моды, линейная мода контакта и моды полосковой линии. Здесь $L(\omega, k)$ — оператор \hat{L} в $\omega - k$ представлении.

Рассмотрим дисперсионное соотношение (9) в точке пересечения дисперсионных характеристик медленной акустической моды и моды полосковой линии. Отыскивая решение (9) в виде $\omega = \Omega + \delta$, где $|\delta| \ll \Omega$, и учитывая диссипацию как возмущение, получим для δ простое выражение

$$\delta = \frac{i}{4} \left((\Gamma + \gamma) \pm \left((\gamma - \Gamma)^2 - 4\beta \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (10)$$

где

$$\beta = \frac{2\pi^2 \sigma^2 K^4}{d_0(1 + K^2 - \Omega^2)(\Omega - Kv)\Omega} < 0.$$

Отсюда видно, что при $\Gamma\gamma < -\beta$ имеет место неустойчивость (напомним, что рассматривается $e^{i\omega t}$ -процесс). Инкремент неустойчивости равен мнимой части δ когда для нее в формуле (10) выбран знак минус. В случае, если мода полосковой линии имеет нормальную дисперсию, то неустойчивость конвективная, в случае же аномальной дисперсии неустойчивость абсолютная.

Используя для дисперсионных характеристик вблизи точки их пересечения линейную аппроксимацию, нетрудно оценить при каких k в системе существует неустойчивость. Опуская вычисления, приведем только результат — неустойчивые волны с волновыми векторами, лежащими в диапазоне $k = K \pm k_i$ где

$$k_i = \left(\frac{(\Gamma + \gamma)^2 (-\Gamma\gamma - \beta)}{\alpha^2 K^2 \Gamma\gamma} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где α — разница групповых скоростей медленных волн в цепочке и волн в полосковой линии в точке пересечения $k = K$.

Нелинейный характер взаимодействия солитонов с волной замедляющей системы приводит к ограничению её амплитуды. Можно легко оценить уровень насыщения амплитуды волны в полосковой линии в стационарном режиме. Считая, что все солитоны находятся в максимальном тормозящем поле волны, получим выражение для амплитуды A волны в линии

$$A = \frac{4\pi\sigma\rho}{c_{ph} \left(\Gamma + \frac{\sigma^2 k^4 \gamma}{(1 + (1 - c_{ph}^2)k^2)^2 + \gamma^2 c_{ph}^2 k^2} \right)},$$

здесь c_{ph} — фазовая скорость волны в линии а ρ среднее количество солитонов на длине волны. Чтобы гарантировать при этом сохранение солитонного состояния в линии необходимо, чтобы

$$\sigma k^2 A < 1.$$

С практической точки зрения важно, что A может быть велика при реальных параметрах контактов и, согласно нашим оценкам, мощность генерации может достигать сотен микроватт.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Взаимодействие солитонов, движущихся в джозефсоновском контакте, связанном с линией передачи через поле излучения может приводить к неустойчивости такой цепочки. Для существования подобного эффекта необходим контакт, связанный с замедляющей системой.

В данной статье проанализирована линейная стадия модуляционной неустойчивости в цепочке солитонов движущихся в джозефсоновском контакте, связанном с линией передачи. Было получено квазичастичное описание для солитонов в контакте, которое и позволило рассмотреть процесс их группировки. Условие возникновения неустойчивости это достаточно сильная связь и слабая диссипация.

Существование неустойчивости позволяет обеспечить когерентную работу всех солитонов над волной и за счет этого получить волну большой мощности, так же как эффект группировки электронов в вакуумных приборах типа ЛБВ позволяет получать большую мощность излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kivshar Y. S., Malomed B. A. // Phys. Rev. B. 1988. V.37. P.9325.
2. Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A. // Physica D. 1981. V.3D. P.428.

Институт прикладной физики
РАН, Н.Новгород

Поступила в редакцию
31 января 1995 г.

STIMULATED EMISSION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY JOSEPHSON VORTICES

V. V. Kurin, A. V. Yulin

We propose a new type of the microwave generator in which the Josephson's junction is used as an active medium. We find the modulation instability in a soliton chain moving in the Josephson's junction coupled with a retarding system. The development of this instability leads to the wave amplification in a transmission line. This effect is similar to that of grouping in BWT and TWT and leads to an effective transformation of the soliton energy into the microwave radiation energy.

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ В АНСАМБЛЯХ, КЛАССИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ-ОСЦИЛЛЯТОРОВ В УСЛОВИЯХ ГРУППОВОГО СИНХРОНИЗМА

Н. С. Гинзбург, И. В. Зотова, А. С. Сергеев

Рассмотрено циклотронное сверхизлучение движущегося электронного сгустка в условиях группового синхронизма, реализующегося при поступательной скорости сгустка равной групповой скорости электромагнитной волны. Показано, что описанный режим позволяет увеличить инкремент сверхизлучательной неустойчивости и повысить пиковую мощность излучения.

1. В настоящее время большое внимание привлекает исследование индуцированного излучения в пространственно-локализованных возбужденных электронных ансамблях с бесконечным (в масштабе времени излучения) временем жизни электронов. Показано [1-4], что в таких условиях существенны эффекты "самоорганизации" излучения, в результате чего происходит фазировка электронов и последующее когерентное высвечивание запасенной энергии в виде коротких квазимонохроматических импульсов. Этот процесс (по аналогии с квантовой электроникой) получил название сверхизлучения (СИ).

В настоящей работе анализируются особенности циклотронного СИ в условиях группового синхронизма, когда поступательная скорость электронного сгустка совпадает с групповой скоростью электромагнитной волны

$$V_{\parallel} = V_{gr}. \quad (1)$$

Подобная ситуация реализуется, например, при волноводном распространении излучения (или в плазме), когда имеет место касание дисперсионных кривых волны $\hbar = c^{-1} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$ и электронного потока $\omega - \hbar V_{\parallel} = \omega_H$ (см. рис. 1 а). При этом выполняются следующие соотношения

$$\omega_H = \omega_c \gamma_{\parallel}^{-1}, \quad \omega = \gamma_{\parallel}^2 \omega_H, \quad (2)$$

где ω_c — частота отсечки, $\omega_H = eH_0/mc\gamma$ — релятивистская гирочастота,

$$\gamma_{\parallel} = (1 - V_{\parallel}^2/c^2)^{-1/2}, \quad \gamma = (1 - V_{\parallel}^2/c^2 - V_{\perp}^2/c^2)^{-1/2}, \quad V_{\perp} = \beta_{\perp} c$$

— вращательная скорость электронов. Следовательно для ультрарелятивистских электронов частота излучения ω может существенно превышать частоту их осцилляций. Кроме того, как будет показано ниже, режим группового синхронизма (1) благоприятен с точки зрения повышения пиковой мощности и инкрементов сверхизлучательной неустойчивости.

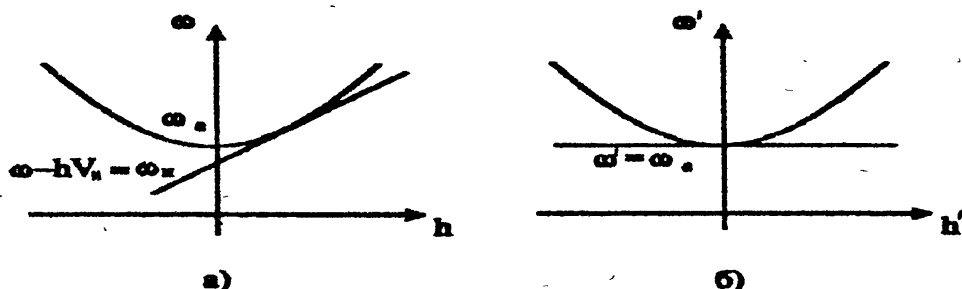


Рис. 1. Дисперсионная диаграмма режима группового синхронизма: а) в лабораторной, б) в сопровождающей системе отсчёта.

2. Дальнейший анализ проведём в сопровождающей системе отсчёта K' , движущейся с поступательной скоростью электронного пучка. В этой системе продольное волновое число h' и поперечная компонента магнитного поля H'_\perp стремятся к нулю и ситуация сводится к излучению неподвижного ансамбля циклотронных осцилляторов на квазикритической частоте (см. рис. 16). Выбрав ω_c в качестве несущей частоты и предполагая, что поперечная структура излучения совпадает со структурой волноводной моды $\vec{E}'_\perp(\vec{r}'_\perp)$, представим действующее на электроны поле в виде

$$\vec{E}' = \text{Re}[\vec{E}'_\perp(\vec{r}'_\perp)A'(z', t') \exp(i\omega_c t')]. \quad (3)$$

Тогда в случае произвольного релятивизма процесс сверхизлучения описывается следующей системой уравнений

$$i \frac{\partial^2 a}{\partial Z^2} + \frac{\partial a}{\partial \tau} = 2if(Z)GJ, \quad J = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{p}_+}{\sqrt{1 - |\hat{p}_+|^2}} d\Theta_0. \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{p}_+}{\partial \tau} + i\hat{p}_+ \left(1 - \Delta - \frac{1}{\sqrt{1 + |\hat{p}_+|^2}}\right) = ia. \quad (5)$$

$$\hat{p}_+|_{\tau=0} = \gamma'_{10}\beta'_{10} \exp(i\Theta_0), \quad \Theta_0 \in [0, 2\pi], \quad a|_{\tau=0} = a_0(Z).$$

Здесь использованы следующие безразмерные обозначения:

$$\hat{p}_+ = (p'_x + ip'_y)/mc$$

— нормированный поперечный импульс электронов,

$$a = \frac{eA'}{mc\omega_c} \cdot J_{m-1}(R_0\omega_c/c), \quad Z = z'\sqrt{2}\omega_c/c, \quad \tau = t'\omega_c,$$

$\Delta = (\omega'_H - \omega_c)/\omega_c$ — отстройка невозмущённой циклотронной частоты от частоты отсечки,

$$G = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{eI_0}{mc^3} \cdot \frac{1}{\beta_{\perp 0}^4 \beta_{\parallel 0} \gamma_{\parallel}^3} \cdot \frac{\lambda^2}{\pi R^2} \cdot \frac{J_{m-1}^2(R_0\omega_c/c)}{J_m^2(\nu_n)(1 - m^2/\nu_n^2)}$$

— форм-фактор, записанный в предположении, что электронный сгусток имеет трубчатую конфигурацию с радиусом инжекции R_0 , I_0 — полный ток в лабораторной системе отсчёта, $\lambda = 2\pi c/\omega_c = 2\pi R/\nu_n$, R — радиус волновода, m — азимутальный индекс волноводной моды, ν_n — n -й корень уравнения $J_m(\nu) = 0$. Функция $f(Z)$ описывает распределение плотности электронов вдоль продольной координаты.

В случае тонкого слоя $b^2/c\lambda T' \ll 1$, где T' — характерное время взаимодействия (обратный инкремент), можно положить: $f(Z) = \sqrt{2}(\omega_c/c)b'\delta(Z)$. В приближении слабого сигнала, представляя излучаемое поле в виде $a(Z, \tau) = a(0) \exp(-i\hat{h}|Z| + i\Delta\tau + i\Omega\tau)$ и линеаризуя систему уравнений (4), приходим к характеристическому уравнению ($\hat{G} = GB\gamma_0^{-2}$)

$$i\Omega^2\sqrt{\Omega + \Delta} + 2\hat{G}\Omega = 2\hat{G}, \quad (6)$$

определяющему комплексные собственные частоты колебаний слоя. При достаточно малой плотности частиц $\hat{G} \ll 1$ в режиме касания $\Delta = 0$ инкремент равен $\text{Im}\Omega = (2\hat{G})^{2/5} \sin \frac{\pi}{5}$. Соответственно, в размерных переменных инкремент сверхизлучательной неустойчивости определяется соотношением

$$|\text{Im}\omega'| = 2^{-3/5}\omega_c \left(\sin \frac{\pi}{5}\right) \left(\frac{eI_0}{mc^3} \frac{\beta_{\perp 0}^2}{\beta_{\parallel 0}} \frac{\lambda b}{\pi R^2} \frac{J_{m-1}^2(R_0\omega_c/c)}{J_m^2(\nu_n)(1 - m^2/\nu_n^2)}\right)^{2/5}. \quad (7)$$

Обратим внимание на беспороговый характер сверхизлучательной неустойчивости, обусловленный бесконечным временем жизни электронов-осцилляторов в области взаимодействия с электромагнитным полем. При этом имеют место потоки электромагнитной энергии в обе стороны от электронного слоя $\text{Re}\hat{h} > 0$, поскольку благодаря электронному сдвигу $\text{Re}\Omega > 0$ частота излучения превышает критическую и, следовательно, групповая скорость становится отличной от нуля.

Результаты численного моделирования с помощью уравнений (4), (5) нелинейной стадии СИ представлены на рис. 2, на котором изображена зависимость от времени квадрата амплитуды $|a|^2$ и электронного КПД

$$\eta'_1 = \frac{1}{1 - \gamma_0^{-1}} \left(1 - \frac{1}{2\pi\gamma_0'} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - |p_+|^2} d\theta_0\right).$$

Видно, что основная часть поперечной осцилляторной энергии электронов трансформируется в энергию излучения за время порядка нескольких обратных инкрементов. При этом максимальная амплитуда поля достигается в случае точного группового синхронизма. В дальнейшем происходит усложнение (стохастизация) движения электронов и структуры возбуждающихся полей.

3. Рассмотрим теперь основные характеристики СИ в лабораторной системе отсчёта. В этой системе излучение представляет собой два электромагнитных импульса, один из которых опережает, а другой отстаёт от электронного сгустка. Групповые скорости, а также частоты заполнения определяются электронной перестройкой частоты, в результате которой в сопровождающей системе отсчёта $Reh' \neq 0$. Пиковая мощность СИ определяется соотношением

$$P = |a|^{-2} \left[\frac{m^2 c^5}{e^2} \right] \beta_{\parallel 0} \beta_{\perp 0}^6 \gamma_{\parallel}^6 \cdot \frac{\pi R^2}{\lambda^2} \cdot \frac{J_m^2(\nu_n)(1 - m^2/\nu_n^2)}{J_{m-1}^2(R_0 \omega_c/c)}. \quad (8)$$

Мощность, принимаемая неподвижным, в данной системе отсчёта, приёмником, из-за дисперсии существенно зависит от его начального расположения.

Среднее (по фазам) изменение энергии электронов, в лабораторной системе отсчёта, может быть найдено по КПД в сопровождающей системе отсчёта с помощью соотношения

$$\langle 1 - \gamma^2/\gamma_0^2 \rangle_{\Theta_0} = \gamma_{\parallel 0}^2 \beta_{\perp 0}^2 \eta'_{\perp}. \quad (9)$$

Таким образом, высокая эффективность энергообмена может быть достигнута, в лабораторной системе отсчёта, при относительно малых поперечных скоростях $\beta_{\perp} \sim \gamma_{\parallel 0}^{-1}$, поскольку в этой системе в энергию электромагнитных колебаний трансформируется энергия как поперечного, так и продольного движения электронов.

В заключение оценим длительность импульса и мощность циклотронного СИ в режиме группового синхронизма.

Пусть в лабораторной системе отсчёта напряжённость ведущего магнитного поля $H_0 = 10.7$ кЭ, длина волны $\lambda = 1$ мм, полный ток $I_0 = 100$ А, энергия электронов 1 МэВ, длина сгустка $b = 3$ см. При радиусе волновода $R = 4$ мм и рабочей моде TE_{13} , форм-фактор $\hat{G} = 0,1$. Тогда из рис. 2 имеем $|a|_{\max}^2 = 1.2 \cdot 10^{-2}$, что соответствует пиковой мощности излучения порядка 40 МВт. Длительность импульса на уровне e^{-1} от максимальной амплитуды порядка десяти ВЧ колебаний.

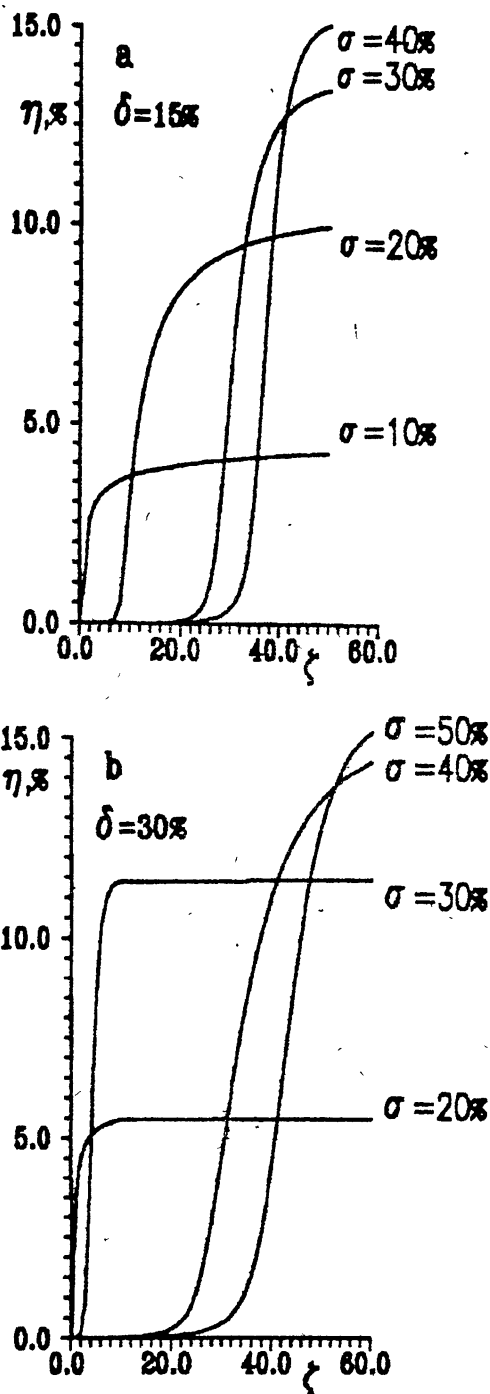


Рис. 2. Зависимость от времени: а) квадрата модуля амплитуды, б) электронного КПД: 1) в режиме группового синхронизма ($\Delta = 0$), 2) при отстройке от режима группового синхронизма ($\Delta = 0.5$). $\hat{G} = 0.1$;

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский В. Вл. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т.29. С.1095.
2. Ильинский Ю. А., Маслова Н. С. // ЖЭТФ. 1988. Т.94. С.171.
3. Bonifacio R., Maroli C., Piovella N. // Opt. Comm. 1988. V.68. P.369.
4. Гинзбург Н. С., Сергеев А. С. // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т.54. С.445.

Институт прикладной физики
РАН, Н. Новгород

Поступила в редакцию
9 февраля 1995 г.

**SUPERRADIATION IN ENSEMBLES OF CLASSIC
ELECTRON-OSCILLATORS UNDER CONDITIONS OF GROUP
SYNCHRONISM**

N. S. Ginzburg, I. V. Zotova, A. S. Sergeev

We consider the cyclotron superradiation of a moving electron bunch under conditions of the group synchronism when the forward bunch speed is equal to the group velocity of the electromagnetic wave. It has been shown that the regime described makes possible to increase the increment of the superradiant instability and to raise the peak radiation power.

О НЕЗЕРКАЛЬНОМ "ПОЛНОМ ВНУТРЕННЕМ ОТРАЖЕНИИ" МОЩНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В. Г. Лапин

Показано, что при наклонном падении мощной электромагнитной волны на слой закритической плазмы, сохраняется неустойчивый характер нелинейного взаимодействия системы волн, аналогичной системе, возникающей при двойном вынужденном рассеянии Мандельштама-Бриллюэна. В этом случае появится нелинейное отражение в обратном направлении от слоя закритической плазмы. Пороговая интенсивность волны накачки больше, чем в случае докритической плазмы для волн ТЕ поляризации, но может существенно уменьшаться для волн, поляризованных в плоскости падения. Неустойчивость возможна только в случае слоя конечной толщины.

1. Известно, что если диэлектрическая проницаемость ϵ однородного изотропного полупространства ($z > 0$) достаточно мала, то будет иметь место эффект полного внутреннего отражения, в результате которого падающая под углом Θ электромагнитная волна

$$\vec{\mathcal{E}}_{inc} = \vec{e}_y \cdot \mathcal{E}_{inc} = \vec{e}_y \cdot A_0 \exp\{-i\omega t + i\omega/c(\cos \Theta z + \sin \Theta x)\} + \text{к.с.} \quad (1)$$

преобразуется в зеркально отраженную волну ($|R_0| = 1$):

$$\vec{\mathcal{E}}_{ref} = \vec{e}_y \mathcal{E}_{ref} = \vec{e}_y \cdot R_0 A_0 \exp\{-i\omega t + i\omega/c(-\cos \Theta z + \sin \Theta x)\} + \text{к.с.}, \quad (2)$$

где A_0 и R_0 — комплексная амплитуда и коэффициент отражения.

Закон зеркального отражения справедлив для плоскостной среды, вследствие сохранения структуры волнового поля в направлении, параллельном границе (здесь $\exp(i\omega/c \cdot \sin \Theta x)$). Понятно, что в случае неплоскостной среды (когда $\partial \epsilon_0 / \partial x \neq 0$, или $\partial \epsilon_0 / \partial y \neq 0$) в ходе процесса отражения будет возникать рассеянное поле с измененной, в направлении границы, структурой. В результате чисто зеркального отражения не будет. Однако и в плоскостной (но нелинейной) среде чисто зеркальное отражение может не иметь место [1, 2]. Это обстоятельство связано с генерацией звуковых волн (неоднородностей) в процессе нелинейного взаимодействия электромагнитных и звуковых волн. Ниже будет показано, что взаимодействие, формально аналогичное рассмотренному в работе

[1], может иметь место и в условиях, когда мощная волна испытывает полное, внутреннее отражение.

2. Рассмотрим ограниченный слой $0 < z < L$ однородной изотропной среды (плазмы) на который падает волна (1), причем невозмущенную диэлектрическую проницаемость считаем достаточно малой: $\epsilon_0 < \sin^2 \Theta$, так что возникает внутреннее отражение.

Возмущения δN концентрации плазмы N_0 , обусловленные ионно-звуковыми волнами, возникающими под действием стрикционных сил, описываются уравнением [3]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial}{\partial t} - v_s^2 \Delta \right] \frac{\delta N}{N_0} = \eta \Delta |\vec{E}_{tot}|^2, \quad (3)$$

где v_s — скорость, а γ — декремент затухания ионно-звуковой волны, $\eta \equiv v_s^2 / |E_p|^2 = e^2 / (4mM\omega^2)$, E_p — “плазменное поле”.

С другой стороны, нетрудно показать, что в изотропной плазме с малыми квазистационарными неоднородностями, медленно меняющаяся комплексная амплитуда \vec{E}_ω квазимонохроматического электрического поля $\vec{E} = \vec{E}_\omega \cdot \exp(-i\omega t) + \text{к.с.}$ удовлетворяет уравнению:

$$\Delta \vec{E}_\omega - \nabla(\nabla \vec{E}_\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E}_\omega + i \frac{2k}{V_\Gamma} \frac{\partial \vec{E}_\omega}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

где $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon(t, \vec{r})$, $|\Delta\epsilon/\epsilon_0| \ll 1$, $|\partial\Delta\epsilon/\partial\omega t| \ll 1$, $k^2 \equiv \omega^2/c^2 \cdot \epsilon_0$, $V_\Gamma \equiv d\omega/dk$.

Возмущение диэлектрической проницаемости вызвано ионно-звуковой волной и поэтому

$$\delta\epsilon = -(\omega_p/\omega)^2 \cdot \delta N/N_0.$$

В случае, когда падающая волна (1) поляризована перпендикулярно плоскости распространения, уравнение (3) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 + \frac{2ik}{V_\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{\omega y} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\delta N}{N_0} E_{\omega y}. \quad (4a)$$

Согласно (4a) волна (1) порождает в плазме две волновые моды, распространяющиеся в направлении оси Ox :

$$E_{\omega 0} = \left\{ E_{0+} e^{-\Gamma z} + E_{0-} e^{+\Gamma z} \right\} \cdot \exp\left(i \frac{\omega}{c} \sin \Theta z \right); \quad (5)$$

$$\Gamma \equiv \frac{\omega}{c} \sqrt{\sin^2 \Theta - \epsilon_0}.$$

В присутствии квазиплоской звуковой волны вида

$$\frac{\delta N}{N_0} = \nu \cdot \exp \left[-i\Omega t + i2\frac{\omega}{c} \sin \Theta z \right] + \text{к.с.}; \quad \Omega = 2\nu_s \frac{\omega}{c} \sin \Theta, \quad (6)$$

электромагнитные моды (5), рассеиваясь на звуковой волне (6), будут согласно (4а), давать начало электромагнитным модам противоположного направления:

$$E_{\omega s} = \left\{ E_{s+} e^{-\Gamma z} + E_{s-} e^{+\Gamma z} \right\} \cdot \exp \left(-i\frac{\omega}{c} \sin \Theta z + i\Delta\omega t \right). \quad (7)$$

При этом биения мод (5) и (7) могут генерировать звуковую волну (6), а рассеиваясь на ней, приобретают структуру (5). Таким образом система волн (5)–(7) является самосогласованной. Заметим, что моды (7), при высвечивании из плазмы, приведут к возникновению волны обратно, а не зеркально направленной по отношению к падающей. Это означает, что при развитии неустойчивости, чисто зеркального отражения волны (1) от слоя закритичной плазмы уже не будет.

Подставляя в уравнения (3), (4а) поля $E_{\omega y} = E_{\omega 0} + E_{\omega s}$ и выражение (6), можно получить систему уравнений для медленно меняющейся комплексной амплитуды звуковой волны:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \gamma \nu = -i\frac{\omega \eta}{c\nu_s} \sin \Theta \left\{ E_{0+} E_{s-}^* + E_{0-} E_{s+}^* \right\} \quad (8)$$

и электромагнитных мод:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{s+}}{\partial z} &= -\alpha \nu^* E_{0+}; & \frac{\partial E_{s-}}{\partial z} &= \alpha \nu^* E_{0-}; \\ \frac{\partial E_{0+}}{\partial z} &= -\alpha \nu E_{s+}; & \frac{\partial E_{0-}}{\partial z} &= \alpha \nu E_{s-}; & \alpha &= \frac{\omega_p^2}{2\Gamma c^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

При получении (8) поглощение звука предполагалось достаточно большим — $\gamma \gg \omega(\nu_s/c)^3$, что позволило пренебречь производными по z , кроме того в правой части (8) оставлены лишь члены, производящие однородную по z звуковую волну, что оправдано в случае $\Gamma L \gg 1$. Именно генерация квазиоднородной по z звуковой волны обуславливает неустойчивость рассматриваемой системы волн с наименьшим порогом по интенсивности падающей волны. Это же обстоятельство определило выбор звуковой волны вида (6), и соответственно появление обратно отраженной слоем электромагнитной волны. Нетрудно убедиться, что учет слабой неоднородности звуковой волны вдоль z (или рассеяние на звуковой волне со структурой $\exp[i(2\omega/c \cdot \sin \Theta + \Delta k)z]$) приведет к увеличению порога неустойчивости.

Заметим так же, что случай $\Delta k = 0$ в докритическом случае $\varepsilon_0 > \sin^2 \Theta$ соответствует условию пространственного синхронизма взаимодействующих волн, а система, аналогичная (8)–(9) описывает двойное вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна [1, 2].

В уравнениях для электромагнитных мод (9) пренебрежено временем распространения электромагнитных волн в слое, по сравнению с периодом звуковых волн, что позволяет так же не учитывать отличие величины Γ для мод $E_{0\pm}$ и E_s , имеющее место вследствие сдвига частоты $\Delta\omega$ при рассеянии.

Таким образом, в результате нелинейного взаимодействия, кроме зеркально отраженной волны, может возникнуть электромагнитная волна, отраженная слоем в обратном направлении:

$$\vec{E}_{ref,n} = \vec{e}_y \cdot \left\{ R_n A_0 \exp \left[-i(\omega - \Delta\omega)t - i\frac{\omega}{c}(\cos \Theta z + \sin \Theta x) \right] + \text{к.с.} \right\}, \quad (10)$$

где R_n — коэффициент нелинейного отражения. Учитывая наличие туннелировавших через слой электромагнитных волн со структурой $\exp(\pm i\omega/c \cdot \sin \Theta x)$, можно получить граничные условия задачи (8), (9):

$$(1 + iq^{-1})E_{0,+}(z=0) + (1 - iq^{-1})E_{0,-}(z=0) = 2A_{0,s};$$

$$(1 - iq^{-1})E_{0,+}(z=L)e^{-\Gamma L} + (1 + iq^{-1})E_{0,-}(z=L)e^{+\Gamma L} = 0; \quad (11)$$

$$q \equiv \cos \Theta / \sqrt{\sin^2 \Theta - \varepsilon_0},$$

где $A_s = 0$, что означает отсутствие падающей на слой волны со структурой $\exp(-i\omega/c \cdot \sin \Theta x)$. Кроме того приведем выражение для определения коэффициентов отражения R_0 и R_n :

$$R_{0,n} = \frac{1}{2} \left[(1 - iq^{-1})e^{-\Gamma L} E_{0,+}(0) + (1 + iq^{-1})e^{+\Gamma L} E_{0,-}(0) \right]. \quad (12)$$

Заметим, что система уравнений (8), (9), (11) имеет ряд интегралов, что позволяет получить ее решение без дальнейших упрощающих предположений. Однако в настоящем сообщении мы ограничимся исследованием начальной стадии неустойчивости и будем считать, что комплексные амплитуды мощных волн постоянны:

$$E_{0\pm} = \text{const}. \quad (13)$$

3. Решая линеаризованную систему (8)–(11), получим условие существования ненулевых решений, из которого можно определить инкре-

мент неустойчивости S и сдвиг частоты $\Delta\Omega$:

$$16 \frac{v_p \omega_p^2 L}{c^2} e^{-2\Gamma L} \left| \frac{A_0}{E_p} \right|^2 \frac{S + \gamma + i\Delta\Omega}{(S + \gamma)^2 + \Delta\Omega^2} \operatorname{tg} \Theta \frac{q^4}{(1 + q^2)^2} = U + iV;$$

$$U \equiv \ln \left| \frac{1 + q^2}{1 - q^2} \right| = \ln \left| \frac{1 - \varepsilon_0}{\cos 2\Theta + \varepsilon_0} \right| \quad (14)$$

$$V \equiv 2\operatorname{arctg}(q) + \pi 1(q^2 - 1) + 2\pi n =$$

$$= 2\operatorname{arctg}(\cos \Theta / \sqrt{\sin^2 \Theta - \varepsilon_0}) + \pi 1(\cos 2\Theta + \varepsilon_0) + 2\pi n,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad 1(x) \equiv \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 1; & x > 0, \end{cases}$$

где n — номер неустойчивой моды. В соответствие с (14), пороговая интенсивность волны накачки определится выражением:

$$|A_0|_{thr}^2 = |E_p|^2 \frac{\gamma c^2 \omega_p^2}{8v_p \omega^4 L} e^{2\Gamma L} \frac{1}{\sin 2\Theta \cos^3 \Theta} \left[U + \frac{V^2}{U} \right]. \quad (15)$$

Отметим, что неустойчивость невозможна для полупространства ($|A_0|_{thr}^2 \rightarrow \infty$ при $L \rightarrow \infty$), поскольку в этом случае нет потока электромагнитной энергии через слой плазмы. Оптимальная для неустойчивости толщина слоя $L_* = (2\Gamma)^{-1}$, что сравнимо с длиной волны в вакууме. Поэтому порог рассмотренной неустойчивости, как правило больше, чем в случае однородных волн [1]. Особый случай может быть связан с аналогичной неустойчивостью на электромагнитных волнах, поляризованных в плоскости падения (ТМ волны). Особенности двойного вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна ТМ волн в однородном слое рассмотрены в работе [4]. Используя специфику укороченных уравнений для ТМ волн [4], нетрудно понять, что в выражении, аналогичном (15), должен появиться справа дополнительный множитель $(1 - 2 \sin^2 \Theta / \varepsilon_0)^{-2}$, характеризующий увеличение величины электромагнитного поля при приближении к плазменному резонансу (при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$). В этом случае имеется тенденция уменьшения порога неустойчивости. Это обстоятельство может быть существенным в случае отражения мощной ТМ поляризованной волны от слоя плавнонеоднородной плазмы. Вполне вероятно, что при определенных условиях закритическая область плазмы будет определять развитие неустойчивости и нелинейное отражение волны.

Исследования, описанные в данной публикации, стали возможными благодаря гранту № R88000 Международного научного фонда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зозуля А. А., Силин В. П., Тихончук В. Т. // ЖЭТФ. 1984. Т.86. Вып. 4. С.1296.
2. Андреев Н. Е., Силин В. П., Тихончук В. Т. // Физика плазмы. 1988. Т.14. Вып. 7. С.851.
3. Литвак А. Г. // Вопросы теории плазмы. 1980. Вып. 10. С.164.
4. Лапин В. Г. // The book of Abstracts of International Symposium of Electromagnetic Environments and Consequences (EUROEM 94), Bourdeaux France, 1994.

Нижегородский
научно-исследовательский
радиофизический институт
(НИРФИ)

Поступила в редакцию
27 января 1995 г.

ON NONSPECULAR "TOTAL INTERNAL REFLECTION"
OF POWERFUL ELECTROMAGNETIC WAVES

V. G. Lapin

It has been shown, that at the oblique incidence of a powerful electromagnetic wave on a layer of a supercritical plasma the nonstable character of nonlinear wave interaction is retained similar to that of the stimulated Brillouin scattering. We have in this case a nonlinear reflection in the back direction from the supercritical plasma layer. The threshold intensity of the pump wave is greater than in the case of TE polarization waves of a subcritical plasma but can be decreased essentially for the waves polarized in the incidence plane. The nonstability is possible only for the layer of a finite thickness.

ОРИЕНТАЦИОННОЕ САМООБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА СВЕТОВОГО ПУЧКА В СЛОЕ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА С НЕВЗАИМНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

О. Л. Антипов, С. И. Беляев, А. С. Кужелев

Исследован эффект самообращения волнового фронта излучения Nd:YAG лазера в слое нематического жидкого кристалла при попутном вынужденном ориентационном рассеянии светового пучка в слое нематического жидкого кристалла с невзаимной обратной связью. Минимальный порог генерации обращенного пучка высокого качества с поляризацией входного пучка достигается в том случае, когда разность фазовых набегов волн накачки и генерации в петле обратной связи составляет $\pi/2$.

Самообращение волнового фронта (само-ОВФ) при попутном вынужденном рассеянии (ВР) двух лазерных пучков (одного — исходного и второго, прошедшего через петлю обратной связи (ОС) или отраженного от зеркальной стенки ячейки), пересекающихся в слое нематического жидкого кристалла (НЖК), интенсивно исследуется в последние годы для тепловой [1, 2, 3] и ориентационной [4, 5] нелинейностей. Одним из достоинств этого метода ОВФ является его универсальность для различных длин световых волн. В частности, само-ОВФ в НЖК-слое было реализовано для лазерного излучения ближнего ИК-диапазона [1, 3, 5]. Другим достоинством НЖК-зеркал является возможность получения высокого коэффициента отражения для накачки с высокой средней мощностью [6]. Большой коэффициент отражения ОВФ-волны может быть достигнут в малопоглощающих НЖК-смесях, в частности, при ориентационном рассеянии. Однако, порог параметрической генерации, обусловленной ориентационной нелинейностью в НЖК слое с обычной (взаимной) петлей ОС, как показывают оценки, достаточно высок. В то же время, проведенные ранее исследования указывают на возможность снижения порога само-ОВФ в средах с локальной инерционной нелинейностью за счет создания фазовой невзаимности в петле ОС [7, 8]. Настоящая работа посвящена исследованию параметрической неустойчивости и само-ОВФ пучка квазинепрерывного Nd:YAG лазера при ориентационном ВР в НЖК-слое с невзаимной петлей обратной связи (НПОС), в которой волны накачки и рассеяния при распространении в противоположных направлениях приобретают различные фазовые добавки.

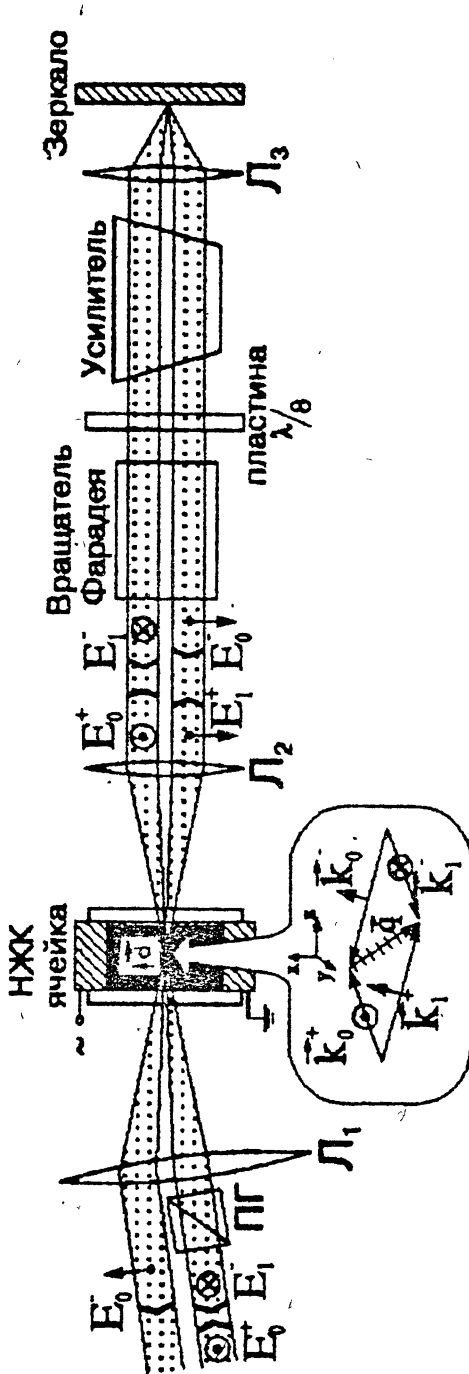


Рис. 1. Экспериментальная схема и диаграмма волновых векторов: ПГ — призма Глана; k_0^+ и k_0^- — волновые вектора волн накачки E_0^+ и E_0^- , k_1^+ и k_1^- — волновые вектора волн рассеяния E_1^+ и E_1^- , d — директор.

Исследуем порог само-ОВФ в схеме с НПОС на примере плоских волн накачки. Как известно, ориентационное рассеяние в НЖК связано с изменением поляризации волны: обыкновенная волна рассеивается в необыкновенную и наоборот [9, 10]. Поэтому, четырехволновый синхронизм, необходимый для совместного рассеяния двух пучков на одной решетке показателя преломления, может достигаться только для ортогонально поляризованных накачек — падающей E_0^+ (обыкновенной в НЖК-ячейке) и прошедшей через петлю ОС с поворотом поляризации E_0^- (необыкновенная в НЖК-ячейке), — и для волн рассеяния E_1^+ и E_1^- , ортогонально поляризованных относительно накачек E_0^+ и E_0^- , соответственно (рис. 1).

Нарастание этих волн рассеяния может быть описано уравнениями Максвелла и уравнением для угла ориентации директора НЖК, которое может быть получено варьированием плотности свободной энергии [9, 10, 11]. В приближении постоянной интенсивности волны накачки и ее малых теплового и ориентационного самовоздействий система уравнений для волн рассеяния может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1^+}{\partial z} = -i\pi \frac{\epsilon_a}{\lambda n_e n_o} E_0^+ \theta \exp(iqz - i\Omega t), \\ \frac{\partial E_1^-}{\partial z} = i\pi \frac{\epsilon_a}{\lambda n_e n_o} E_0^- \theta \exp(iqz - i\Omega t), \\ \left(Y \frac{\partial}{\partial t} - K_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - K_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta = \frac{\epsilon_a}{16\pi} (E_1^+ E_0^{+*} + E_1^- E_0^{-*}) \exp(-iqz + i\Omega t), \end{cases} \quad (1)$$

где $\epsilon_a = \epsilon_{||} - \epsilon_{\perp}$ — анизотропия диэлектрической проницаемости, n_o и n_e — главные показатели преломления, Y — вязкость, K_{22} и K_{33} — константы Франка, $\mathbf{q} = q_x \mathbf{x} + q_z \mathbf{z}$ — вектор решетки, Ω — частотная расстройка волн накачки и рассеяния.

Разница фазовых набегов для накачки (φ_0) и волны рассеяния (φ_1) в НПОС учитывается в граничных условиях на границах НЖК-слоя:

$$\begin{aligned} E_0^-(z=L) &= \sqrt{R} E_0^+(z=L) \exp(i\varphi_0), \\ E_1^-(z=L) &= \sqrt{R} E_1^+(z=L) \exp(i\varphi_1). \end{aligned} \quad (2)$$

где R — коэффициент прохождения НПОС по мощности. Предполагаем, что волна рассеяния на входной границе ячейки мала $E_1^+(z=0) = \epsilon \ll 1$, а ориентационные возмущения в начальный момент времени отсутствуют $\theta(t=0) = 0$. Инкремент волны рассеяния на выходе ОВФ-зеркала $E_1^-(z=0)$ может быть записан в следующем виде:

$$M(z=0, t) = \frac{\epsilon_a^2 L}{16Y \lambda n_o n_e G_{th}} \cdot |E_0^+|^2 t - \frac{t}{\tau_r}, \quad (3)$$

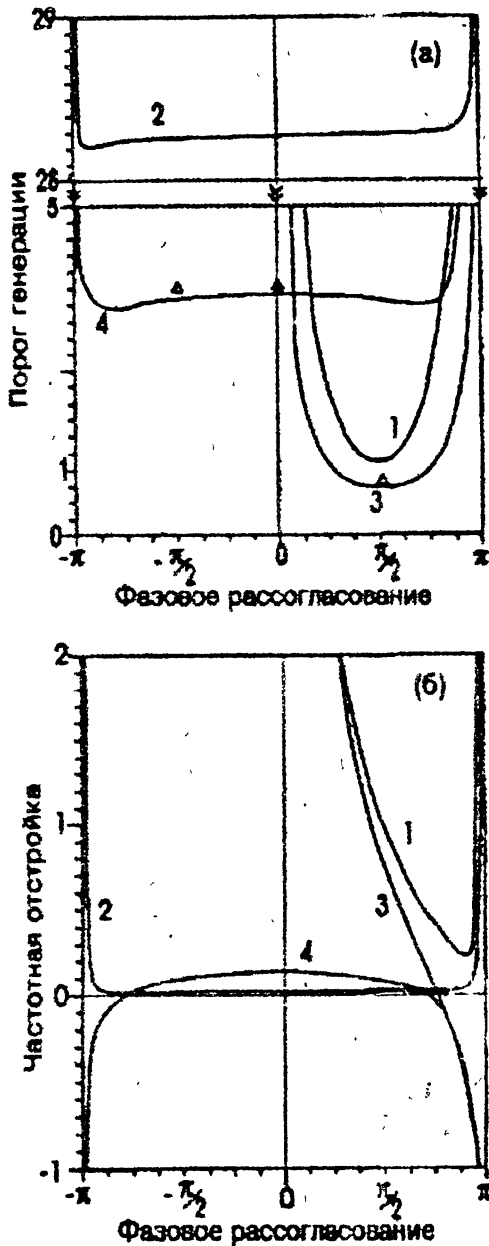


Рис. 2. Зависимости порога генерации G_{th} (а) и частотной расстройки генерируемой волны $\bar{\Omega}$ (нормированная на ширину линии ориентационного рассеяния $1/\tau_r$) (б) от разности фазовых набегов волн рассеяния и накачки ($\Delta\varphi$) при коэффициенте прохождения в петле ОС по мощности $R = 0,95$ (кривые 1, 2) и $R = 1,4$ (кривые 3, 4) и для номеров $N = 0$ (кривые 1, 3) и $N = 1$ (кривые 2, 4), треугольниками отмечены экспериментальные результаты для различных петлевых схем с $R \approx 1,4$.

где $\tau_r = Y/(K_{22} \cdot q_x^2 + K_{33} \cdot q_z^2)$ — время релаксации ориентационных возмущений, G_{th} — константа, характеризующая порог генерации волны с частотой $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$. Решение системы (1) с граничными условиями (2) (в стационарном приближении $\frac{\partial \theta}{\partial t} = i\Omega\theta$) дает константу G_{th} , которая определяется как условие неограниченной на выходе волны рассеяния с частотной расстройкой $\tilde{\Omega} = \Omega\tau_r$:

$$G_{th} = \frac{(\ln A)^2 + (\arctan B + 2\pi N)^2}{(\arctan B + 2\pi N)(1 - R)}, \quad (4)$$

$$\tilde{\Omega} = \frac{\ln A}{\arctan B + 2\pi N}, \quad (5)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{1 + 2R \cos(\Delta\varphi) + R^2}{2R(1 + \cos(\Delta\varphi))}}, \quad B = \frac{(1 - R) \sin(\Delta\varphi)}{(1 + R)(1 + \cos(\Delta\varphi))},$$

N — целое число, аналог номера продольной моды для нелинейного слоя с жесткими граничными условиями, $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Волны рассеяния с различными N имеют разные частоты и пороги генерации (рис. 2а и рис. 2б).

Зависимости порогов генерации от фазового рассогласования показывает, что минимальный порог реализуется для разности фаз $\Delta\varphi = \pi/2$. Действительно, для перекачки энергии из одной световой волны в другую при их отражении от решетки показателя преломления необходимо фазовое рассогласование поля интерференции этих волн относительно решетки показателя преломления. В случае различия фазовых набегов волн накачки и генерации в петле ОС, равного $\pi/2$, поля интерференции световых волн $E_0^- E_1^-$ и $E_0^+ E_1^+$ на границе нелинейного слоя отличаются по фазе на $\pi/2$. Поэтому, волна накачки E_0^- , отражаясь от “чужой” решетки показателя преломления $\Delta n^+ = E_0^+ E_1^+$, усиливает попутную волну “собственного” рассеяния E_1^- (на решетке $\Delta n^- = E_0^- E_1^-$). В результате роста волны E_1^- нарастает и решетка Δn^- , на которой волна E_0^+ также эффективно отражается в волну “собственного” рассеяния E_1^+ .

Отметим, что условия параметрической генерации в схеме с НПОС выполняются даже для волн накачки равной интенсивности ($R = 1$). В этом случае частота волн совместного рассеяния двух накачек близка к собственной частоте ориентационного рассеяния одной накачки (кривая 2 рис. 2б).

Таким образом, теоретические оценки показывают, что порог генерации ОВФ-волны при ориентационном рассеянии в схеме с НПОС может быть существенно ниже, чем в схеме со взаимной ОС.

В экспериментах мы использовали НЖК-слой толщиной 0,5 см (смесь цианобифенилов) без красителя (с собственным поглощением $\alpha L \simeq 0,1$) с электроиндуцированной планарной ориентацией. Длительность импульса

задающего лазера была 0,5 мс, мощность накачки варьировалась в пределах $0,1 \div 3,5$ Вт. Фокусные расстояния линз L_1 и L_2 составляли 17 см. Мы использовали усилитель в петле ОС для компенсации потерь (коэффициент прохождения по петле ОС составлял 1,4). Невзаимность $\Delta\varphi = \pi/2$ в петле ОС достигалась использованием вращателя Фарадея (ВФ), поворачивающего поляризацию световой волны на угол 45° за один проход, и пластиной $\lambda/8$. Волна накачки, прошедшая ВФ, распространялась в пластине $\lambda/8$ как необыкновенная. Ортогонально поляризованная волна рассеяния распространялась в пластине $\lambda/8$ как обыкновенная. В результате фазовое рассогласование волн рассеяния и накачки после двух проходов через пластину $\lambda/8$ и ВФ составляло $\pi/2$, поляризации волн накачки и рассеяния E_0^+ и E_1^- , E_0^- и E_1^+ совпадали.

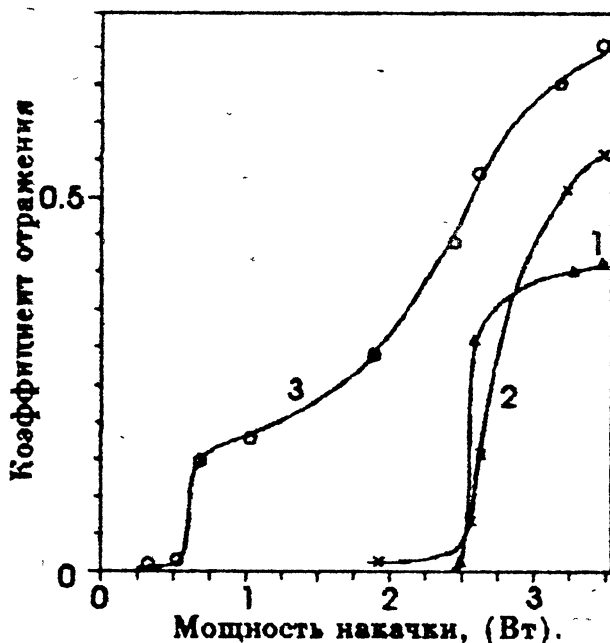


Рис. 3. Экспериментальные зависимости коэффициента отражения по мощности ОВФ волны от мощности входной накачки для схем с невзаимностями: $\Delta\varphi = \pi/2$ (кривая 3), $\Delta\varphi = -\pi/2$ (кривая 2) и $\Delta\varphi = 0$ (кривая 1).

Другие фазовые невзаимности в петле ОС ($\Delta\varphi = -\pi/2$, π , 0) были также реализованы в наших экспериментах. После поворота пластины $\lambda/8$ на угол 90° фазовое рассогласование в петле ОС составляло $-\pi/2$. Фазовое рассогласование в петле без пластины $\lambda/8$ составляло π . Взаимная петля ОС реализовалась при использовании в петле только пластины $\lambda/4$ (поворачивающей поляризацию световой волны на 90° за два прохода).

Мы регистрировали мощность генерируемого пучка (с поляризацией, совпадающей с входной накачкой) в направлении навстречу к исходному (в телесный угол, равный 1,5 дифракционного). Наименьший порог ге-

нерируемого назад пучка (по мощности накачки $\approx 0,5$ Вт) наблюдался для схемы с невзаимностью $\pi/2$ (рис. 3). Максимальная мощность отраженного пучка в этом эксперименте достигала 0,6 от мощности входной накачки. Пороговые мощности накачки в экспериментах с фазовыми невзаимностями петли ОС $\Delta\varphi = -\pi/2, 0$ составляли $\approx 2,5$ Вт. В экспериментах с фазовой невзаимностью $\Delta\varphi = \pi$ параметрическая генерация ОВФ-пучка не наблюдалась при мощностях накачки до 4 Вт.

Поперечная структура генерируемого излучения контролировалась с помощью электронно-оптического преобразователя и исследовалась с помощью диафрагм и фотоприемника. Доля ОВФ-пучка (в телесном угле 1,2 ... 1,5 дифракционного) составляла по пиковой мощности более 0,9 от мощности всего генерируемого излучения с поляризацией входной накачки. Расходимость фона более чем в 30 раз превышала расходимость ОВФ-пучка. Генерация ОВФ-пучка высокого качества (0,8 ... 0,9 от общей отраженной мощности) в нелинейном режиме наблюдалась также в экспериментах с фазовыми невзаимностями $\Delta\varphi = -\pi/2, 0$. Высокое качество ОВФ в этих экспериментах может объясняться хорошей селективностью решеток показателя преломления в области взаимодействия в НЖК с толщиной, соизмеримой с длиной фокальной перетяжки накачки [3]. Ортогональность поляризаций ОВФ-волны E_1^- и нерассеянной части волны накачки E_0^- позволяет осуществить их поляризационную развязку на выходе.

В эксперименте с $\pi/2$ -НПОС плотность энергии входного пучка, соответствующая пороговой мощности 0,5 Вт для длительности импульса 0,5 мс и площади фокальной перетяжки $(F \cdot \Theta_d)^2 \approx 10^{-5}$ см² составляла 10 Дж/см². Подставляя эти величины в выражение (3) и предполагая, что инкремент, необходимый для наблюдения попутной волны рассеяния, должен достигать $M = 3$ [9, 11], получаем значение порогового инкремента для нашего НЖК ($\varepsilon_a = 0,3, Y = 1$ П) при $t_p \ll \tau_r$: $G_{th} \approx 0,75$. Эта величина хорошо согласуется с теоретическими оценками (рис. 2). Значения пороговых констант для экспериментов с $\Delta\varphi = 0$ и $-\pi/2$ дают одинаковую величину: $G_{th} \approx 3,75$.

Порог параметрической генерации зависел от температуры НЖК. При увеличении температуры НЖК до точки фазового перехода нематик—изотропная жидкость генерация ОВФ-пучка не наблюдалась. Этот факт может объясняться формированием тепловой линзы в НЖК-слое, усиливающейся вблизи фазового перехода. Тепловая линза в нелинейном слое изменяла фазы взаимодействующих волн и ухудшала их прохождение по петле ОС.

Таким образом, наши исследования показали возможность реализации низкорогового высококачественного само-ОВФ пучка излучения квазинепрерывного Nd:YAG-лазера в слое НЖК с ориентационной нелинейностью.

Авторы благодарят Международный Научный Фонд за присужденный грант NOK000, средства которого частично использовались при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипов О. Л., Дворянинов Н. А., Шешкаускас В. // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 53. С. 610.
2. Khoo I. C., Li Hong, and Liang Yu. // Opt. Lett. 1993. V. 18. P. 1490.
3. Antipov O. L. // Opt. Comm. 1993. V. 103. P. 499.
4. Сухов А. В., Галстян Т. В. // ЖТФ. 1990. Т. 60. С. 1240.
5. Liang Y., Li H., and Khoo I. C. // In: Digest of Conference on Laser and Electro-Optics. — Washington, D. C.: Optical Society of America, D. C., 1994. P. CMJ5.
6. Антипов О. Л., Кужелев А. С., Турыгин В. В. // Квантовая электроника. 1994. Т. 21. С. 446.
7. Антипов О. Л., Беспалов В. И., Пасманик Г. А. // ЖЭТФ. Т. 63. С. 926.
8. Антипов О. Л., Кужелев А. С. // Квантовая электроника. 1995. Т. 22. N 1.
9. De Gennes P. G. The Physics of Liquid Crystals. — Oxford: Clarendon Press, 1974. Chap. 3. P. 120.
10. De Jeu W. H. Physical Properties of Liquid Crystalline Materials. — New York: Gordon and Breach, 1980. Chap. 4.
11. Zel'dovich B. Ya., Tabiryay N. V. // Molec. Cryst. Liq. Cryst. 1980. V. 62. P. 237.

Институт прикладной физики
РАН, Н. Новгород

Поступила в редакцию
10 февраля 1995 г.

ORIENTATION SELF-REVERSAL OF THE LIGHT-BEAM WAVE FRONT
IN A LAYER OF THE NEMATIC LIQUID CRYSTAL WITH A
NONRECIPROCAL FEEDBACK

O. L. Antipov, S. I. Belyaev, A. S. Kuzhelev

Self-pumped phase conjugation of a Nd:YAG laser beam by near-forward stimulated orientational scattering in a nematic liquid crystal layer with a nonreciprocal loop of feedback was studied. The threshold of phase-conjugated wave generation was found out to be the lowest one if a phase shift difference of the pumping and scattering waves in the loop of feedback reaches $\pi/2$.

ВОЗБУЖДЕНИЕ ИОНОСФЕРНОГО АЛЬФВЕНОВСКОГО РЕЗОНАТОРА ПЛАЗМЕННО-ВОЛНОВЫМ РАЗРЯДОМ

Н. Г. Лезтинен, Г. А. Марков, С. М. Файнштейн

В данной работе проведена теоретическая интерпретация возбуждения ионосферного альфвеновского резонатора (ИАР) пучком электронов, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля. Найден инкремент генерации альфвеновских волн, и проведена оценка возбуждения ИАР. Полученные теоретические выводы качественно согласуются с экспериментом.

Исследования активных [1, 2] методов возбуждения КНЧ электромагнитных полей в ионосферной плазме представляют интерес как в связи с необходимостью решения прикладных задач низкочастотной радиосвязи [3], так и для правильного понимания ряда физических процессов, протекающих в околоземном пространстве при активных воздействиях на ионосферу как наземными, так и космическими источниками [2, 4]. В настоящей работе приведены экспериментальные данные по возбуждению КНЧ колебаний в ионосфере плазменно-волновым разрядом с борта метеоракеты, и приведена упрощенная теоретическая модель, позволяющая качественно объяснить наблюдаемый эффект.

1. 06.02.1991 г. в 20 ч. 30 м. Московского времени с полигона Капустин Яр была запущена метеоракета МР-12 вертикально с отклонением $\sim 5^\circ$ к Востоку. На высоте ~ 60 км была развернута дипольная антенна в виде двух полуцилиндров из металлической сетки диаметром 2 м и высотой образующей 1,2 м. К полуцилиндрам подводилось ВЧ напряжение амплитудой $\sim 1,5$ кВ на частоте 480 кГц. ВЧ сигнал был промодулирован по специальной циклограмме телеграфным сигналом на частотах $f_1 = 240$ Гц и $f_2 = 120$ Гц. Параметры возбуждаемого антенной разряда определялись с помощью ленгмюровского зонда и на высотах $h \geq 140$ км составляли величины $N_e \sim 10^6$ см $^{-3}$ и $T_e \sim 20$ эВ. Наземный приемник зафиксировал шумовой сигнал на частотах модуляции разряда f_1 и f_2 . Спектральная обработка этих сигналов показала наличие сдвинутого из-за доплер-эффекта узкополосного излучения мигающего разряда $f_{1,2}(1 + 3 \cdot 10^{-3})$ и несколько модуляционных КНЧ пиков (см. рис. 1, где

$S(f)$ — спектральная плотность сигнала), соответствующих диапазону частот ионосферного альфвеновского резонатора (ИАР) [5]. Механизмы излучения активной плазменной антенны (АПА), формируемой разрядом с борта ракеты, подробно обсуждались в работе [6], где показано, что излучаемая АПА мощность зависит от величины геомагнитного поля в области антенны. Вследствие этого любые модуляционные компоненты в геомагнитном поле, возникающие, например, при возбуждении ИАР, проявляются в появлении соответствующих пиков в КНЧ спектрах излучения АПА.

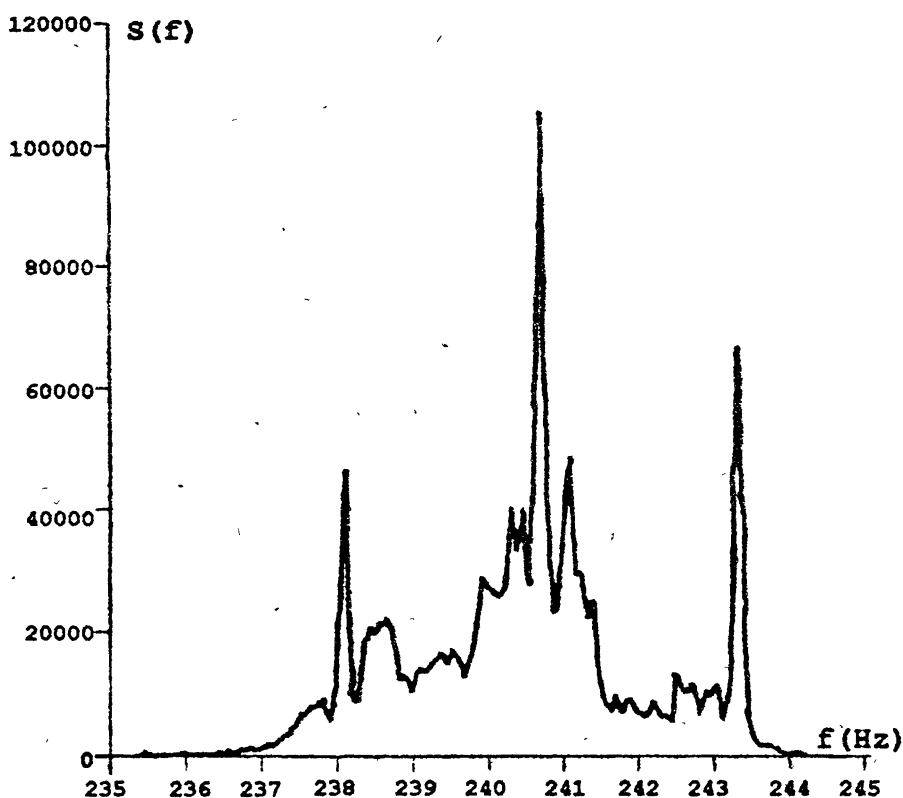


Рис. 1.

Плазменно-волновой разряд в ионосфере Земли [7] представляет собой узкую и очень длинную плазменную неоднородность. Продольный масштаб неоднородности определяется разлётом горячей плазмы от активной области разряда вдоль геомагнитного поля и может достигать величины $L_{\parallel} \geq 10^5$ м [8]. Поперечный масштаб неоднородности зависит от скорости ракеты и в условиях эксперимента достигал значений $L_{\perp} \sim 10^2$ м. В ночной зимней ионосфере средних широт формирование такой неоднородности идет, по-видимому, за счет разлёта горячих электронов из области разряда вдоль магнитного поля и попереч-

ной диффузии ионов [9]. Продольная скорость инжектируемых электронов $v_{\parallel} \sim v_e \geq 2 \cdot 10^6$ м/с больше альфвеновской скорости C_A в слое F_2 , где концентрация электронов $N_0 > 10^4$ см $^{-3}$. В указанных условиях возможно возбуждение альфвеновских волн (АВ) потоком быстрых ($v_{\parallel} > C_A$) электронов за счет черенковского механизма излучения (см., например, [10-12]).

2. Рассмотрим цилиндрический, радиусом a , аксиально-симметричный пучок электронов с концентрацией βN_0 и заданной скоростью v_{\parallel} , пронизывающий вдоль внешнего магнитного поля H_0 фоновую плазму с концентрацией N_0 . Соударениями частиц и зависимостью от продольной координаты z ($H_0 \parallel z_0 \parallel v_{\parallel}$) для простоты пренебрегаем. В альфвеновском диапазоне частот ($\omega \ll \Omega_i$, Ω_i — гирочастота ионов фона) тензор диэлектрической проницаемости системы поток-плазма в цилиндрической системе координат имеет вид [10]

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & -i\epsilon_2 & i\frac{\epsilon_5}{k_0} \frac{\partial}{\partial r} \\ i\epsilon_2 & \epsilon_1 & -\frac{\epsilon_4}{k_0} \frac{\partial}{\partial r} \\ i\frac{\epsilon_5}{k_0} \hat{L} & \frac{\epsilon_4}{k_0} \hat{L} & -\epsilon_3 - \frac{\epsilon_3'}{k_0^2} \hat{L} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь

$$\hat{L} = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \dots \right), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad \epsilon_1 = \left(\frac{C}{C_A} \right)^2, \quad C_A^2 = \frac{H_0^2}{4\pi M N_0},$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 \left(\frac{\omega}{\Omega_i} - \beta \frac{\Omega \omega'}{\omega^2} \right), \quad \epsilon_3 = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + \beta \left(\frac{\omega_0}{\omega'} \right)^2, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi N_0 e^2}{m},$$

$\frac{e}{m}$, $\frac{e}{M}$ — удельный заряд электрона (иона), $\omega' = \omega - kv_{\parallel}$, k — продольное волновое число, $\epsilon_3' = \beta \frac{m}{M} \epsilon_1 \left(\frac{v_{\parallel}}{c} \right)^2 \ll 1$, $\epsilon_4 = -\beta \epsilon_1 \frac{v_{\parallel} \Omega_i}{c \omega}$, $\epsilon_5 = \beta \frac{m}{M} \epsilon_1 \frac{v_{\parallel} \omega'}{c \omega} \ll 1$. В фоновой плазме вне пучка в (1) необходимо положить $\beta = 0$.

Из уравнений Максвелла, используя (1), можно записать систему дифференциальных уравнений для азимутальных составляющих электрического (E_{φ}) и магнитного (H_{φ}) полей, через которые выражаются остальные компоненты волновых полей:

$$\left\{ \epsilon_3 \alpha_2 - (\alpha_2 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_4) k_0^{-2} \hat{L}_0 \right\} E_{\varphi} + \left\{ \epsilon_3 \alpha_3 - (\alpha_5 \alpha_3 + \alpha_1^2) k_0^2 \hat{L}_0 \right\} i H_{\varphi} = 0, \quad (2)$$

$$\left\{ \alpha_2 \alpha_4 - \epsilon_1 \alpha_1 (\alpha_3 - \epsilon_2^2 \epsilon_1^{-2}) - \alpha_1 k_0^{-2} \hat{L}_0 \right\} E_{\varphi} + \left\{ \alpha_4 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2 \right\} i H_{\varphi} = 0.$$

Здесь $\alpha_1 = 1 + p\epsilon_5\epsilon_1^{-1}$, $\alpha_2 = p\epsilon_2\epsilon_1$, $\alpha_3 = 1 - p^2\epsilon_1^{-1}$, $p = kk_0^{-1}$, $\alpha_4 = \epsilon_4 - \epsilon_2\epsilon_5\epsilon_1^{-1}$, $\alpha_5 = \epsilon_5^2\epsilon_1^{-1} - \epsilon_3'$. Собственными функциями оператора \hat{L}_0 являются решения уравнения Бесселя:

$$\hat{L}_0 F(k_0qr) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF(k_0qr)) \right] = -k_0^2 q^2 F(k_0qr). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), можно получить связь безразмерных продольных (p) и поперечных (q) волновых чисел:

$$q_1^2 \approx \epsilon_1 - p^2 - \epsilon_2^2(\epsilon_1 - p^2)^{-1}, \quad q_2^2 \approx -\epsilon_3\alpha_3(\alpha_5\alpha_3 + \alpha_1^2)^{-1}, \quad (4)$$

где учтено, что $|\epsilon_3|$ превышает по величине все остальные компоненты тензора (1).

Для получения дисперсионного уравнения необходимо, чтобы полученные собственные функции (3) удовлетворяли граничным условиям при $r = a$:

$$E_\varphi = \tilde{E}_\varphi, \quad E_z = \tilde{E}_z, \quad (5)$$

$$H_z = \tilde{H}_z, \quad H_\varphi + \epsilon_5 E_r - i\epsilon_4 E_\varphi + i\epsilon_3' k_0^{-1} \frac{\partial E_z}{\partial r} = \tilde{H}_\varphi,$$

(здесь \mathbf{E} и \mathbf{H} — поле при $r < a$, $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ — поле при $r > a$). Кроме того, потребуем, чтобы поля были конечны при $r = 0$ и удовлетворяли условиям излучения на бесконечности. При выводе дисперсионных соотношений из (5) с учётом (3) и (4) и полагая $|\epsilon_3| \gg 1$ и $|\tilde{\epsilon}_3| |\tilde{\epsilon}_3|^{-1} \sim 1$, получим:

$$q_1 J_0(k_0q_1a) [J_1(k_0q_1a)]^{-1} = q_1 H_0^{(2)}(k_0q_1a) [H_1^{(2)}(k_0q_1a)]^{-1}, \quad (6)$$

$$\epsilon_3^{-1} q_2 J_0(k_0q_2a) [J_1(k_0q_2a)]^{-1} = \epsilon_3^{-1} q_2 H_0^{(2)}(k_0q_2a) [H_1^{(2)}(k_0q_2a)]^{-1}, \quad (7)$$

где $J_{0,1}$ и $H_{0,1}^{(2)}$ — функции Бесселя и Ханкеля. Уравнение (6) соответствует быстрым магнитоэвуковым и альфвеновским волнам, а (7) — квазипоперечным волнам, связанным с "плазменным резонансом". Полагая для фоновой плазмы ($r > a$) $p \approx CC_A^{-1}$, $\epsilon_1 \approx p^2$, $\epsilon_3 \sim \omega_0^2 \omega^{-2}$ и $qr^{-1} \sim |(\epsilon_3 \epsilon_1^{-1})|^{1/2}$ из (6) можно получить:

$$p \approx Cv_{\parallel}^{-1} (1 \pm i\sqrt{\beta}). \quad (8)$$

Соотношение (8) выполнено при условии $x_{1n} a_0 a^{-1} \ll 1$, где x_{1n} — n -корень функции Бесселя первого порядка, а коэффициент $a_0 \approx C\omega_0^{-1} \sim 15$ м.

3. Для слоисто-неоднородной плазмы ионосферы с геомагнитным полем $\mathbf{H}_0 \parallel \nabla N_0$ и показателем преломления для АВ, описываемым следую-

шей модельной функцией [5]:

$$n^2(z) = C^2 C_A^{-2}(z) = \begin{cases} n_0^2, & h_1 < z < h_2, \\ n_0^2 (\varepsilon^2 + \exp[-2(z - h_2)L^{-1}]), & \end{cases} \quad (9)$$

где $n_0^2 = 4\pi c^2 M N_{\max} H_0^{-1}$, $\varepsilon^2 \sim 10^{-3} - 10^{-4}$, $L \approx 400$ км, $h = h_2 - h_1 \approx 150$ км имеется решение уравнений Максвелла, позволяющее найти собственные частоты (f_n) и добротность (Q_n) собственных мод ИАР [5]:

$$f_n = C_A [n + 1/4 + \varphi_i(2\pi)^{-1}] [2(h + L)]^{-1}, \quad (10)$$

$$Q_n \approx \frac{h + L}{\pi \varepsilon L} \sim 10. \quad (11)$$

Здесь φ_i — сдвиг фазы при отражении волны от нижнего края резонатора ($z = h_1$), а потери энергии обусловлены частичным просачиванием волны сквозь верхнюю стенку резонатора, где нарушено условие геометрической оптики. Указанные потери могут быть скомпенсированы резонансным усилением АВ пучком быстрых электронов. Из условия волнового энергетического баланса для ИАР в этом случае можно получить ограничения на концентрацию электронов в потоке

$$\frac{c}{v_{\parallel}} k_0 (L_{\parallel} \sqrt{\beta} - \pi \varepsilon L) = 0. \quad (12)$$

Для характерной величины толщины F_2 слоя $L_{\parallel} \approx 150$ км из (12) имеем:

$$\beta_{кр} = (\pi \varepsilon L L_{\parallel}^{-1})^2 \approx 10^{-2} - 10^{-3}.$$

Таким образом, если длина пучка $L_{\beta} \sim L_{\parallel}$, а характерный поперечный масштаб $a > a_0 = 15$ м, тогда при концентрациях потока, превышающих 1% концентрации фоновой плазмы, возможна раскачка ИАР. На высотах $h \geq 200$ км длина свободного пробега электрона $l_e > 10$ км, а концентрация быстрых ($T_e \geq 20$ эВ) электронов в разряде $> 10^6$ см $^{-3}$ [8], поэтому выполнение неравенства $\beta > \beta_{кр}$, в условиях описанного выше эксперимента, вполне реально.

Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда (грант № R86000, № 88000) и программой "Университеты России".

ЛИТЕРАТУРА

1. Тепловые нелинейные явления в плазме. // Сб. Тр. ИПФ АН СССР; Под редакцией В. Ю. Трахтенгерца. — Горький: ИПФ АН СССР, 1979.

2. Proceeding III Suzdal URSI Symp. on Modific. of the Ionosphere by Power Radio Waves. — М.: Наука, 1991.
3. Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. Антенны в плазме. — Н. Новгород: ИПФ АН СССР, 1991.
4. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. — М.: Наука, 1984.
5. Поляков С. В., Рапопорт В. О. // Геомагнетизм и аэрономия. 1981. Т. 21. № 5. С. 816.
6. Кудрин А. В., Марков Г. А., Трахтенгерц В. Ю., Чугунов Ю. В. // Геомагнетизм и аэрономия. 1991. Т. 31. № 2. С. 334.
7. Агафонов Ю. Н., Бажанов В. С., Исякаев В. Я. и др. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 17. С. 1.
8. Марков Г. А., Чугунов Ю. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 39. № 6.
9. Рожанский В. А., Цендин Л. Д. Столкновительный перенос в частично ионизованной плазме. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
10. Ахиезер А. И. и др. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
11. Степанов К. Н., Киценко А. Б. // ЖТФ. 1961. Т. 31. С. 167.
12. Кондратенко А. Н., Куклин В. Н. Основы плазменной электроники. — М.: Энергоатомиздат, 1988.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
23 января 1995 г.

EXCITATION OF THE IONOSPHERIC ALFVEN RESONATOR BY A PLASMA-WAVE DISCHARGE

N. G. Lekhtinen, G. A. Markov, S. M. Fainstein

In the present paper, we perform the theoretical interpretation of excitation of the ionospheric Alfvén resonator (IAR) by an electron beam propagating along the external magnetic field. We have found the increment of generation of Alfvén waves and perform the estimate of IAR excitation. Theoretical results obtained match qualitatively with experimental data.

УДК 621.373 : 535.375

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВСТРЕЧНЫХ ПРОИЗВОЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН В РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ ИЗ ХАОТИЧЕСКИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ МОЛЕКУЛ

Н. Д. Миловский, О. Э. Федяев, В. Ю. Шешин

Исследовано изменение поляризации встречных плоских монохроматических волн в результате их нелинейного взаимодействия в активной резонансной среде, которая состоит из изотропно ориентированных и хаотически движущихся молекул, имеющих рабочий переход с сохраняющимся полным угловым моментом.

При взаимодействии лазерного излучения с резонансной средой, состоящей из хаотически ориентированных молекул, возможны нелинейные преобразования поляризаций распространяющихся волн [1-9]. Эти эффекты зависят от интенсивности и поляризации поля, от типа рабочего перехода, а также от движения [9-10] резонансных молекул. В настоящей работе рассматриваются некоторые закономерности трансформации поляризаций встречных волн в изотропной среде, образованной перемещающимися и вращающимися двухуровневыми частицами.

Опираясь на изложенные в [9] результаты, взаимодействие монохроматического поля $\mathbf{E} = \text{Re} \bar{\mathbf{E}} \cdot \exp(i\omega t)$ с резонансной средой из хаотически движущихся молекул будем описывать системой уравнений

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} + k^2 \bar{\mathbf{E}} = -2ik \frac{3\kappa}{2} (1 - i\delta) \langle \bar{\mathbf{d}}_0 (\bar{\mathbf{d}}_0^* \bar{\mathbf{E}}) (n/n_0) \rangle, \quad (1)$$

$$\left(-DT_1 \Delta - \frac{1}{\xi} \Delta_{\Omega} + 1 + 3|(\bar{\mathbf{d}}_0^* \bar{\mathbf{E}})|^2 \right) (n/n_0) = 1, \quad (2)$$

в которой $n = N(\rho_{22} - \rho_{11})$ — парциальная разность населённости, n_0 — ее значение в отсутствие поля, ρ_{jj} — элементы матрицы плотности двухуровневого объекта, имеющего фиксированное направление в пространстве вектора $\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}}_{21}$ матричного элемента оператора дипольного момента, N — концентрация резонансных частиц. В уравнении (2) члены $D\Delta n$ и $(1/\xi)\Delta_{\Omega} n$, где за Δ_{Ω} обозначена угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат, описывают изменение n , обусловленное соответственно хаотическими перемещениями и вращениями частиц. Параметр $\delta = [(\omega - \omega_{21})T_2]$ обозначает безразмерную расстройку частоты поля

от частоты ω_{21} перехода, k — волновое число, $\kappa = 4\pi k n_0 |\bar{d}|^2 T_2 / [3h\epsilon(1+\delta^2)]$ — показатель линейного усиления поля, D и $\tau^{-1} = \xi^{-1} T_1$ — коэффициенты пространственной и ориентационной диффузии соответственно, $T_{1,2}$ — продольное и поперечное времена релаксации соответственно, ϵ — диэлектрическую проницаемость, h — постоянную Планка. В (1)–(2) поле \bar{E} нормировано на поле насыщения $E_H = (h/|\bar{d}|)[3(1+\delta^2)/T_1 T_2]^{1/2}$. Скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по возможным ориентациям векторов $\bar{d} \equiv \bar{d}_0 |\bar{d}|$, а также по другим статистическим параметрам. Функцию распределения молекул по ориентациям \bar{d} , как показано в [9], практически можно считать изотропной $W(\theta, \psi) = (1/4\pi)$.

Рассмотрим распространение в активной среде двух встречных плоских эллиптически поляризованных волн

$$\bar{E} = \bar{e}_+(z)e^{-ikz} + \bar{e}_-(z)e^{ikz}, \quad (3)$$

у которых векторные комплексные амплитуды

$$\bar{e}_+(z) = \bar{A}(z)(\mathbf{x}_0 - i\mathbf{y}_0)/\sqrt{2} + \bar{B}(z)(\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0)/\sqrt{2}, \quad (4)$$

$$\bar{e}_-(z) = \bar{a}(z)(\mathbf{x}_0 - i\mathbf{y}_0)/\sqrt{2} + \bar{b}(z)(\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0)/\sqrt{2},$$

медленно меняются на длине волны λ . Состояние поляризации каждой бегущей волны определим отношением осей эллипса поляризации

$$s_+ = (A - B)/(A + B); \quad s_- = (a - b)/(a + b) \quad (5)$$

углом между его большой осью и осью Oz :

$$\varphi_+ = (\varphi_A - \varphi_B)/2; \quad \varphi_- = (\varphi_a - \varphi_b)/2. \quad (6)$$

Уравнение (2) для (n/n_0) является действительным и содержит осциллирующий на пространственном периоде $\lambda/2$ переменный коэффициент $[(\bar{d}_0^* \bar{E})]^2$, составляющие которого зависят от углов θ, ψ , определяющих взаимное расположение векторов \bar{e}_\pm и \bar{d}_0 в сферической системе координат. Вектор \bar{d}_0 может быть поляризован либо линейно (если при переходе частицы с одного энергетического уровня на другой сохраняется полный угловой момент молекулы J), либо циркулярно (если J изменяется на единицу) [4, 11]. Решение уравнения (2) согласно [9] представляется в виде ряда по пространственным и сферическим гармоникам

$$(n/n_0) = Q_0(\theta, \psi, z) + \left[\sum_{f=1}^{\infty} \bar{Q}_f(\theta, \psi, z) e^{if2kz} + \text{к.с.} \right], \quad (7)$$

$$\bar{Q}_f = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^s \left(\bar{C}_{s,f}^m e^{im\psi} + \bar{D}_{s,f}^m e^{-im\psi} \right) \bar{P}_s^m \cos \theta,$$

в котором коэффициенты \bar{Q}_f слабо зависят от z . Представление (7) позволяет получить систему связанных линейных уравнений ленточного типа относительно коэффициентов \bar{C}_{sf}^m и \bar{D}_{sf}^m . В каждом уравнении имеются два малых параметра ξ и $\beta = 1/(4k^2DT_1)$, величина которых определяется ориентационной и пространственной диффузией частиц. Наличие в каждом уравнении двух малых параметров позволяет найти все необходимые неизвестные коэффициенты $\bar{C}_{sf}^m(\xi, \beta)$ и $\bar{D}_{sf}^m(\xi, \beta)$ в виде степенных рядов по ξ и β с наперёд заданной точностью [9]. Функции $\bar{Q}_f(\theta, \psi, z)$ являются решениями уравнения (2) и различны для резонансных сред двух разных типов.

Подставив (7) в (1), с помощью метода Ван-дер-Поля, получим укороченные уравнения

$$\pm \frac{\partial \bar{e}_{\pm}}{\partial z} + \Gamma \bar{e}_{\pm} = \frac{3\kappa(1 - i\delta)}{2} \left[\langle \bar{d}_0(\bar{d}_0^* \bar{e}_{\pm}) Q_0 \rangle + \langle \bar{d}_0(\bar{d}_0^* \bar{e}_{\pm}) \bar{Q}_{\pm 1} \rangle \right] \quad (8)$$

для комплексных амплитуд встречных волн, в которых $\bar{Q}_{-1} = \bar{Q}_1^*$. Первый член в правой части каждого уравнения (8) представляет собой вклад в усиление волны от средней (насыщенной) разности населённостей, а второй — от перерасеяния встречной волны на решётке нелинейной диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим для определенности активную среду, молекулы которой имеют рабочий переход с сохраняющимся угловым моментом (Q — ветвь излучения). В такой среде орт \bar{d}_0 момента произвольно ориентированной в пространстве частицы будет иметь вид

$$\bar{d}_0 = \mathbf{x}_0 \cos \theta + \sin \theta (\mathbf{x}_0 \cos \psi + \mathbf{y}_0 \sin \psi). \quad (9)$$

Используя описанный в [9] метод расчёта распределения инверсии (7), вначале найдем с точностью до членов первого порядка малости по ξ и β , уравнения для комплексных амплитуд \bar{A} , \bar{B} , \bar{a} , \bar{b} встречных циркулярно поляризованных противоположно вращающихся волн, а затем получим систему из двух пар симметричных уравнений

$$\pm \frac{d\varphi_{\pm}}{dz} = \frac{\kappa}{4(1+I)} \left\{ -\delta \left[-\eta - F_{\mp} + \eta(1+I_{\pm}) + e^{\pm\gamma} \cos \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Phi(\eta + F_{\pm} + \eta I_{\pm}) \right] \pm e^{\pm\gamma} \sin \Phi(\eta + I_{\pm} + \eta F_{\pm}) \right\}, \quad (10)$$

$$\pm \frac{ds_{\pm}}{dz} = \frac{\kappa / \cosh^2 \theta_{\pm}}{4(1+I)} \left\{ \left[-\eta - F_{\mp} + \eta(1+I_{\pm}) + e^{\pm\gamma} \cos \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Phi(\eta + F_{\pm} + \eta I_{\pm}) \right] + \delta e^{\pm\gamma} \sin \Phi(\eta + I_{\pm} + \eta F_{\pm}) \right\}, \quad (11)$$

в которых введены обозначения

$$\eta_{\pm} = \beta + (\xi/30) \left\{ [(\Lambda/G) + 4 - 3I]/(1+I) \right\} \pm \xi/10,$$

$$\eta = 0.2\xi [(I_R - I_L)/(1+I)], \quad \Phi = 2(\varphi_+ - \varphi_-),$$

$$\Lambda = -I(1+I) + 14 |\bar{\rho}_R + \bar{\rho}_L|^2 + 12(1+I) \times$$

$$\times \left\{ R_2 - |\bar{\rho}_R + \bar{\rho}_L|^2 + (A^2 b^2 + B^2 a^2) \right\} + 12(I_R - I_L)(\rho_R^2 - \rho_L^2),$$

$$G = (1+I)^2 - 2|\bar{\rho}_R + \bar{\rho}_L|^2, \quad \bar{\rho}_R = \bar{A}^* \bar{a},$$

$$\bar{\rho}_L = \bar{B}^* \bar{b}, \quad \bar{R} = \bar{A}^* \bar{B} + \bar{a}^* \bar{b},$$

$$I = I_R + I_L, \quad I_R = |\bar{A}|^2 + |\bar{a}|^2, \quad I_L = |\bar{B}|^2 + |\bar{b}|^2,$$

$$I_+ = A^2 + B^2, \quad I_- = a^2 + b^2,$$

$$\gamma = \ln(ab/AB), \quad \theta_+ = 0.50 \ln(A/B), \quad \theta_- = 0.50 \ln(a/b),$$

$$F_+ = s_+(A+B)^2 \equiv A^2 - B^2, \quad F_- = s_-(a+b)^2 \equiv a^2 - b^2.$$

Уравнения (10)–(11) позволяют установить основные закономерности трансформации поляризации взаимодействующих встречных волн в рассматриваемой резонансной среде. Вращение и изменение отношений осей эллипса поляризации поля каждой из волн обусловлены наводимой действующим полем неоднородной анизотропной нелинейной диэлектрической проницаемостью $\bar{\epsilon}^{NL}$, которая имеет не только мнимую ϵ'' , но и реальную часть $\epsilon' \sim \delta$. Каждая из них может рассматриваться как независимый физический механизм преобразования поляризации. Из-за $\bar{\epsilon}^{NL}$ локальные постоянные распространения $\bar{h}_{\pm} = h'_{\pm} + ih''_{\pm}$, противоположно вращающихся циркулярно поляризованных компонент каждой встречной волны, оказываются отличными друг от друга. Несовпадение реальных частей h'_{\pm} приводит к вращению поляризации волн, а из-за различия мнимых частей h''_{\pm} изменяются их эллиптичности.

1. Неоднородный характер $\bar{\epsilon}^{NL}$ определяется пространственным распределением инверсии (n/n_0). На решетке инверсии (n/n_0) волны перерассеиваются друг в друга и поэтому изменяют свои поляризации. Этот

физический механизм, в основном, связан с наличием ϵ'' и "работает" независимо от величины δ . Впервые на него было указано в работе [12], а позднее в [13] было экспериментально измерено изменение угла $(\varphi_+ - \varphi_-)$ между встречными линейно поляризованными волнами в среде газового лазера. Из (10) в случае $\delta = 0$ хорошо видны основные закономерности изменения φ_{\pm} из-за перераспределения волн на анизотропной решетке ϵ'' . Так при практически реализующемся (например, в плотных газах) условии $\beta \gg \xi$ из уравнений (10) следует, что $d\varphi_{\pm}/d(kz) \sim \sin \Phi$ и, что в зависимости от величины $\Phi = \Phi_0$ в сечении $z = z_0$ в области $z > z_0$ могут существовать два возможных направления вращения поляризаций \vec{e}_{\pm} . Если величина Φ_0 находится внутри интервала $(0 < \Phi_0 < \pi)$, то оси \vec{e}_{\pm} поворачиваются по часовой стрелке, а угол $(\varphi_+ - \varphi_-)$ с ростом z монотонно увеличивается, асимптотически приближаясь к значению $\pi/2$. Если главные оси эллипсов ортогональны друг другу или одинаково ориентированы, то φ_{\pm} не изменяются. Вклады в изменение φ_{\pm} вносят также члены, пропорциональные ξ , s_{\pm} и $(J_R - J_L)$. Они максимальны в отсутствие угловой диффузии, при $\Phi = \pi/2$ и $|s_{\pm}| \rightarrow 1$.

Из-за взаимодействия на решетке ϵ'' трансформируются эллиптичности встречных волн. Первые члены в правых частях уравнений (11) при одинаковых знаках s_{\pm} (т. е. при вращении векторов \vec{e}_{\pm} в одну сторону) уменьшают $|s_{\pm}|$. Вторые слагаемые в правых частях (11) пропорциональны разности $(J_R - J_L) = (F_+ - F_-)$ интенсивностей вращающихся вправо J_R и влево J_L компонент общего поля обеих волн. Если знаки величин $F_{\pm} \sim s_{\pm}$ одинаковы, то эти члены увеличивают $|s_{\pm}|$ каждой волны в направлении ее распространения, т. е. долю превалирующей вращающейся компоненты поля. При отсутствии второй волны ($J_- = 0, s_- = 0$) этот член в уравнении для s_+ (в отличие от всех прочих) не обращается в нуль и обеспечивает увеличение $|s_+|$ так, что асимптотически на большой трассе эллиптически поляризованная волна трансформируется в циркулярно поляризованную.

2. При наличии $\epsilon' \sim \delta$ появляется второй физический механизм трансформации поляризаций полей \vec{e}_{\pm} , который обусловлен дополнительной дисперсией, вносимой в среду резонансными молекулами. Он действует даже в отсутствие одной из встречных волн — ось эллипса поля \vec{e}_+ бегущей волны при прохождении участка активной среды поворачивается по часовой стрелке, если $\delta > 0$ и если вектор \vec{e}_+ вращается вправо ($A > B$ и $s_+ > 0$) [5, 7, 8].

3. При предельно сильной диффузии ($\beta \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0$) в среде исчезают анизотропия и пространственная неоднородность инверсии. В этих условиях поляризации волн \vec{e}_{\pm} в соответствии с (10)–(11) сохраняются постоянными во всех сечениях слоя среды, а изменения их интенсивностей

описываются уравнениями переноса лучистой энергии.

4. При замене $\kappa \rightarrow -\kappa$ система уравнений (10)–(11) описывает взаимодействие волн в поглощающей двухуровневой среде.

5. Изменение поляризации встречных волн в резонансных средах второго типа, имеющих молекулы с циркулярно поляризованным матричным элементом рабочего перехода \bar{d} , описывается уравнениями [13], которые совпадают по форме с (10)–(11), но имеют другие коэффициенты η_{\pm} и η . Поэтому изложенные выше результаты не могут быть использованы для интерпретации нелинейных поляризационных эффектов в таких средах без необходимой дополнительной коррекции.

6. Результаты настоящей работы можно применить для оценок предельных возможностей адаптивных устройств типа двухпроходowego усилителя с обращающим волновой фронт (ОВФ) зеркалом и мощных импульсных лазеров с нелинейным затвором, для разработок ОВФ зеркал на основе четырехволнового смешения в резонансной среде, а также для исследования свойств веществ методами нелинейной поляризационной спектроскопии.

Авторы выражают благодарность Суровой С. Б. за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубович Е. И. // ЖЭТФ. 1969. Т.56. С.676.
2. Пантел Р., Путхов Г. Основы квантовой электроники. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1972. С.47, 367.
3. Бутылкин В. С., Каплан А. Е., Хронопуло Ю. Г., Якубович Е. И. Резонансное взаимодействие света с веществом. — М.: Наука, 1977. С.143.
4. Апанасевич П. А. Основы взаимодействия света с веществом. — Минск: Наука и техника, 1977. Часть II. С.231, 298.
5. Насыров К. А., Шалагин А. М. // ЖЭТФ. 1981. Т.81. С.1649.
6. Насыров К. А., Шалагин А. М. // Квантовая электроника. 1982. Т.9. С.1997.
7. Кулагин С. В., Миловский Н. Д., Пылин А. В. // Оптика и спектр. 1987. Т.63. С.416.
8. Кулагин С. В., Миловский Н. Д., Пылин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. С.279.
9. Миловский Н. Д. // Оптика и спектр. 1989. Т.67. С.1105.
10. Milovsky N. D., Tkachov A. M. // Opt. comm. 1993. V.95. № 1-3. P.127.
11. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Атомная и ядерная физика. — М.: Наука, 1986. Ч.I. С.247.

12. Берштейн И. Л., Рогачев В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т.13. С.33.
13. Миловский Н. Д., Шешин В. Ю. // ЖЭТФ. 1995 (в печати).

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
10 февраля 1995 г.

**INTERACTION OF COUNTER-PROPAGATING ARBITRARILY
POLARIZED WAVES IN THE MEDIUM OF RANDOMLY ORIENTED
MOLECULES**

N. D. Milovsky, O. A. Fedyaev, V. Yu. Sheshin

In this work we investigate the polarization transformations of the counter-propagating single-frequency plane arbitrary polarized waves in nonlinear active resonant medium which consists of the randomly moving and isotropically oriented two-level molecules possessing the fixed full angular-momentum at the signal transition.

УДК 537.86/87: 532.59

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ МЕДЛЕННЫХ И НЕПОДВИЖНЫХ СОЛИТОНОВ

А. В. Ведерко, В. Ф. Марченко, А. П. Сузороков

Теория медленных и неподвижных солитонов подробно рассмотрена в работах, посвященных конкретным физическим системам — периодически-слоистым оптическим средам [1, 2], волноводам для капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкости [3, 4], одномерным атомным цепочкам [5]. Принципиальным моментом для существования этого класса солитонов является наличие частоты отсечки, обусловленной геометрией структуры и зависящей от интенсивности возбуждающего поля. Частота осцилляций, таких локализованных в пространстве возмущений, лежит в полосе непрозрачности системы и близка к частоте отсечки, а возникающий, при определенных условиях, солитонный профиль можно рассматривать как результат своеобразного нелинейного туннелирования.

При экспериментальном наблюдении медленных и неподвижных солитонов необходимо преодолеть ряд трудностей, из которых, как наиболее общие, можно выделить две.

- Во-первых, необходимо обеспечить достаточно высокую “добротность” системы в области отсечки, т. е. свести к минимуму влияние диссипативных потерь, поскольку реальный сдвиг частоты отсечки за счёт кубической нелинейности невелик и, как правило не превышает 10%.
- Во-вторых, поскольку для существования неподвижных солитонов необходима непрерывная подкачка энергии, требуется выбрать такой способ возбуждения, при котором можно избежать, характерных для рассматриваемых систем, стохастических явлений, обусловленных бистабильностью.

Впервые неподвижные солитоны наблюдались в кювете прямоугольной формы, заполненной водой, продольные стенки которой образовывали волновод для поверхностных волн [3]. Кювета закреплялась на подставке, совершающей вертикальные механические колебания с частотой $f = 10 \cdot 20$ Гц. Возникающие за счёт квадратичной нелинейности параметрические колебания поверхности представляли собой суперпозицию двух бегущих навстречу друг другу волн, имеющих частоту $f_1 = f/2$. Если

частота f_1 была несколько меньше частоты отсечки волновода, то пространственное распределение стоячей волны субгармоники имело вид одной или нескольких осциллирующих пучностей, приобретающих, за счёт влияния кубической нелинейности, солитонную форму. Фотография неподвижного, осциллирующего с частотой 8.6 Гц солитона, полученная в ходе эксперимента, проведенного в нашей лаборатории [4], показана на рис. 1.

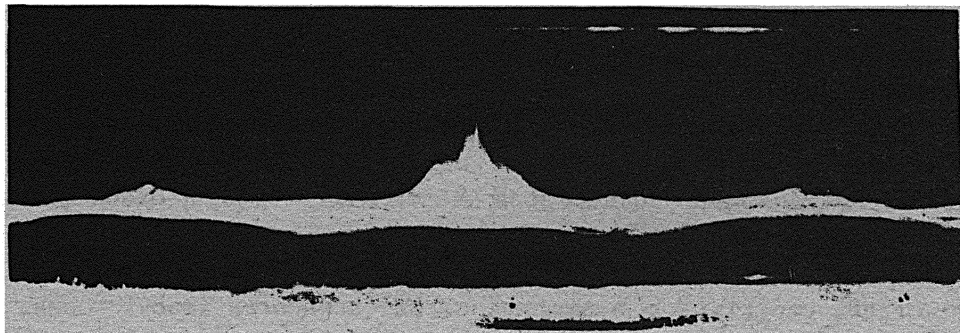


Рис. 1. Фотография неподвижного солитона на поверхности воды. Частота накачки — 15.2 Гц.

Другой экспериментальной моделью является цепочка маятников, каждый из которых представляет собой шарик, прикрепленный к общей балке V-образным подвесом. Линейные и нелинейные свойства цепочки определяются упругой связью между подвесами соседних маятников [6]. При значительных углах колебаний маятников коэффициент кубической нелинейности имеет различный знак вблизи верхней (f_i) и нижней (f_b) частот отсечки системы. Используя вертикальные колебания балки на частоте $f = 3 - 4$ Гц, такой, что $f/2 < f_b$, либо $f/2 > f_i$, удалось наблюдать локализованные на нескольких центральных ячейках системы возмущения, имеющие солитонную форму. Параметрический способ возбуждения в указанных экспериментах оказывается наиболее удобным для внесения энергии в систему. Следует однако иметь в виду, что форма осциллирующего солитона определяется не только параметрами системы, но и амплитудой накачки.

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию возбуждения медленных и неподвижных солитонов в радиофизической модели — цепочке связанных нелинейных резонансных контуров.

Система состояла из $N = 30$ одинаковых резонансных контуров, катушки которых были размещены вплотную друг к другу вдоль общей направляющей, что обеспечило коэффициент связи $\kappa = M/L = 0.08$ ($L = 47.5$ мкГн — индуктивность катушки контура, M — взаимная индукция). Для устранения отражений от концов системы применялась частотно-зависимая согласованная нагрузка. Измеренное значение КСВ не превышало 1.5 в полосе пропускания и 2 вблизи граничных частот.

Нелинейным элементом контура служила пара включенных встречно и смещенных в обратном направлении полупроводниковых стабилитронов. Ёмкость такого элемента зависит от напряжения как $C = C_0(1 + \sigma U^2)$, при выбранном постоянном напряжении смещения ± 1.5 В значение коэффициента нелинейности составило $\sigma = (4.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-2} \text{ В}^{-2}$.

Таким образом, система представляла собой полосовой фильтр, с центральной частотой, равной резонансной частоте отдельного контура — $f_0 = 1131 \pm 1$ кГц и верхней и нижней частотами отсечки $f_i = f_0/\sqrt{1 - 2\kappa} = 1223$ кГц и $f_b = f_0/\sqrt{1 + 2\kappa} = 1040$ кГц. Нелинейная дисперсия характеризуется следующими данными. При увеличении амплитуды входного сигнала с 20 мВ до 1.0 В происходит уменьшение нижней частоты отсечки системы от 1040 кГц до 1027 кГц. Именно в этом диапазоне возможно наблюдение неподвижного солитона.

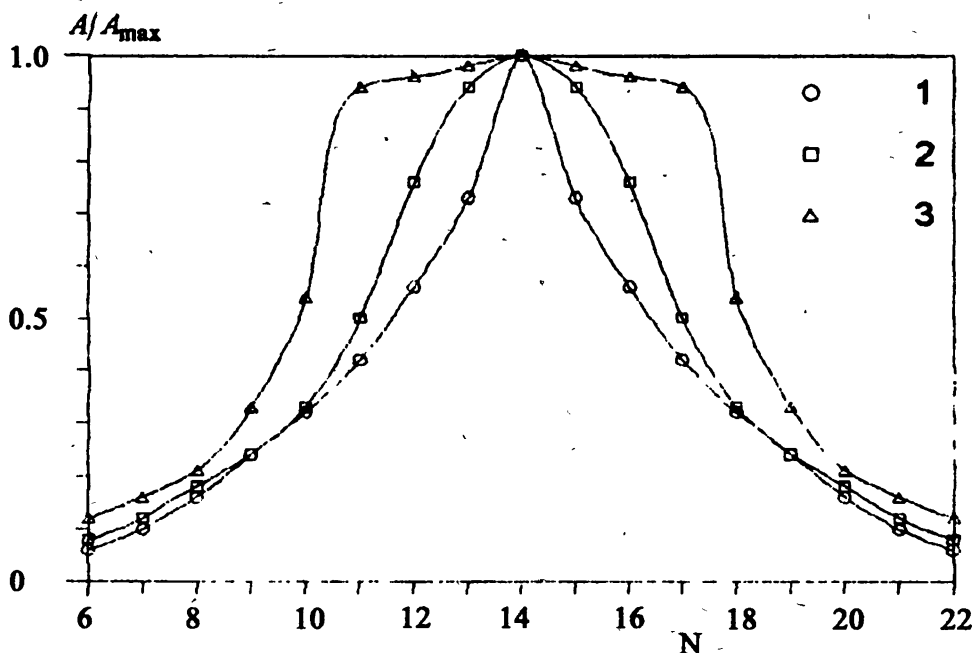


Рис. 2. Распределение амплитуды сигнала вдоль линии. Кривые 1, 2, 3 сняты при $A_{\max} = 0.50$; 1.10 и 1.15 В соответственно. Частота возбуждения — 1128 кГц.

Для уменьшения влияния активных потерь в каждый контур была введена система регенерации, позволяющая электрическим путём плавно изменять добротность ячейки в пределах 50–250 при неизменном значении f_0 . Это позволило наблюдать не только образование неподвижных, но и распространение медленных солитонных импульсов.

Неподвижные солитоны наблюдались при возбуждении центрального контура непрерывным гармоническим сигналом с частотой $f < f_b$. Так,

при частоте возбуждения $f = 1027$ кГц и амплитуде $U < 1.1$ В, наблюдается экспоненциальное затухание сигнала вдоль линии (кривая 1 на рис. 2), при $U = 1.1$ В распределение амплитуды сигнала имеет характерный солитонный профиль $A/A_{\max} = \operatorname{sech}(n/n_s)$ (кривая 2 на рис. 2, значение параметра $n_s = 4.2$). Увеличение амплитуды возбуждения приводит к нелинейному просветлению среды — на рис. 2, кривая 3 заметен протяженный участок, где амплитуда сигнала изменяется слабо.

Как следует из результатов численного эксперимента, выполненного аналогичной цепочки связанных резонаторов [7], при превышении амплитудой внешнего воздействия некоторой величины a_{cr} в системе возможно возбуждение узкого пика, ширина которого составляет 2–3 ячейки, а амплитуда превышает начальную в 2.5–3 раза, что вызвано уменьшением связи между соседними ячейками вследствие сильной нелинейной отстройки резонансной частоты. Оценки показывают, что для возникновения таких пиков необходима амплитуда возбуждения $U > 1.5$ В, поэтому экспериментальное наблюдение таких пиков оказалось невозможным. С другой стороны, уже при $U > 1.15$ В на выходе линии наблюдаются стохастические колебания, спектр которых носит узкополосный характер с максимумом вблизи f_b (рис. 3). Возбуждение стохастических колебаний обусловлено явлением бистабильности и возможно только при высокой добротности системы $Q > 100$.

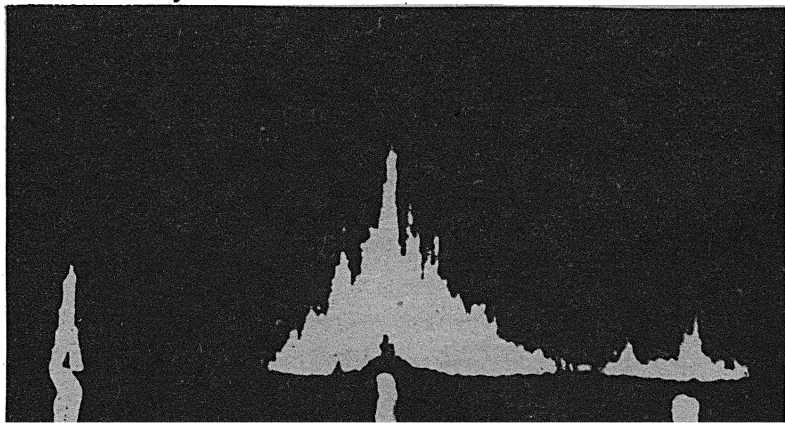


Рис. 3. Характерный спектр шумовых колебаний на выходе линии при амплитуде накачки 1.2 В. На спектрограмме выделены (слева направо): метка 1000 кГц, накачка 1032 кГц, метка 1080 кГц.

При исследовании распространения импульсного сигнала с несущей частотой $f \lesssim f_b$ были получены следующие результаты. Если на вход линии подавался радиоимпульс длительностью $\tau_i = 50 - 100$ мкс и амплитудой $0.5 \text{ В} < U < 1.0 \text{ В}$, то на выходе, наряду с цугами быстрых волн малой амплитуды, наблюдалось стационарное возмущение (рис. 4), форма которого хорошо аппроксимируется функцией $A/A_{\max} = \operatorname{sech}(t/T_s)$, $T_s = 21.4$ мкс, а скорость приблизительно в 10 раз меньше скорости импульса, несущей

щая частота которого соответствует середине полосы пропускания линии. При увеличении длительности возбуждающего импульса до 200 мкс и более выходной сигнал приобретает выраженный стохастический характер, аналогичный представленному на рис. 3.

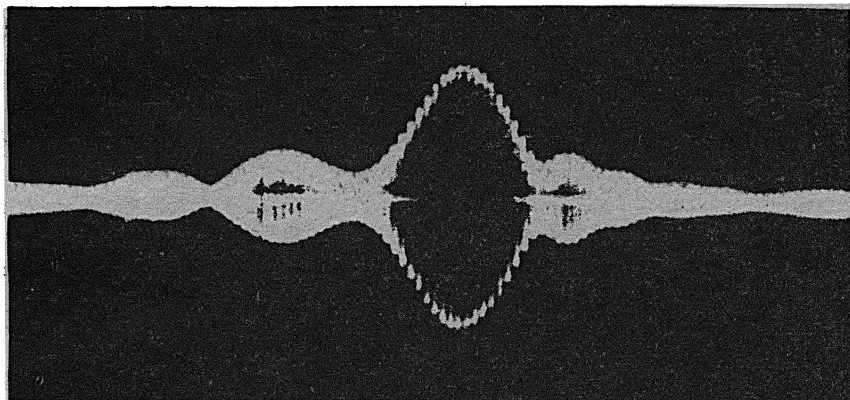


Рис. 4. Фотография медленного солитона на 23 ячейке линии. Длительность входного импульса — 100 мкс, частота — 1033 кГц, амплитуда — 1.1В. Длительность развертки — 50 мкс/деление.

Как правило, при исследовании медленных и неподвижных солитонов используется модель на основе нелинейного уравнения Шредингера (см., например, [1, 7])

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} + \Delta_b A - \chi_b |A|^2 A = 0, \quad (1)$$

которое справедливо для цепочки контуров при следующих значениях параметров: $\tau = \omega t$ — медленное время, $\zeta = gn$ (n — текущий номер ячейки) $g = ((1 + 2\kappa)/\kappa)^{1/2}$, $\Delta_b = \frac{\omega^2 - \omega_b^2}{2\omega^2}$, $\chi_b = \frac{3}{4} \sigma \frac{\omega_b^2}{\omega^2}$, ω — частота возбуждения, A — медленно меняющаяся амплитуда волнового пакета. Решение (1) может иметь вид неподвижного солитона

$$A = \sqrt{2} a_0 \operatorname{sech} \left(\sqrt{2\chi_b a_0^2} (\zeta - \zeta_0) \right), \quad \Delta_b - \chi_b a_0^2 = 0, \quad (2)$$

либо медленно перемещающегося

$$A = \sqrt{2} a_0 \operatorname{sech} \left(\sqrt{2\chi_b a_0^2} (\zeta - \omega\tau) \right) \exp(i k \zeta), \quad (3)$$

$$\Delta_b - \chi_b a_0^2 + \omega^2/2 = 0, \quad k = \omega.$$

Выражения (2), (3) использовались для оценки параметров наблюдаемых в эксперименте солитонов (рис. 3, 4). Как следует из вида возмущения на рис. 4, наличие искажений импульса и дополнительных дугов волн, по обе стороны от него (рис. 4), свидетельствуют о том, что такая модель не вполне точна, поскольку второго приближения теории дисперсии недостаточно для описания нестационарного процесса вблизи частоты отсечки системы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-16059)

ЛИТЕРАТУРА

1. Christodoulides D. N., Joseph R. I. // *Phys. Rev. Lett.* 1989. V.62. № 15. P.1746.
2. M. C. de Sterke, Sipe J. E. // *Phys. Rev. A.* 1991. V.45. № 5. P.2467.
3. Wu J., Keolian R., Rudnick I. // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V.52. № 16. P.1421.
4. Ведерко А. В., Марченко В. Ф., Сухоруков А. П. // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика. Астрономия.* 1991. Т.32. № 3. С.67.
5. Бурлаков В. М., Киселев С. А. // *ЖЭТФ.* 1991. Т.99. Вып.5. С.1526.
6. Wei-Zhong Chen // *Phys. Rev. B.* 1991. V.49. № 21. P.15063.
7. Ведерко А. В., Дубровская О. Б., Марченко В. Ф., Сухоруков А. П. // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика. Астрономия.* 1992. Т.33. № 3. С.4.

Физический факультет МГУ
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
30 января 1995 г.

EXPERIMENTAL OBSERVATION OF SLOW AND IMMOVABLE SOLITONS

A. V. Vederko, V. F. Marchenko, A. P. Sukhorukov

УДК 621.373.826

БИСТАБИЛЬНОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ, ФОРМИРУЮЩИХСЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ВОЛН С КРАТНЫМИ ЧАСТОТАМИ

М. В. Комиссарова, А. П. Сухоруков

Интерференция различных одновременных процессов нелинейного взаимодействия может привести к мультистабильности (многозначности) формирующихся оптических солитонов. В большинстве, имеющих на сегодняшний день, работ, посвященных мультистабильным солитонам, такая интерференция обусловлена типом нелинейности среды [1-7].

Впервые бистабильные солитоны были рассмотрены в статье [1]. Там было продемонстрировано, что нелинейное уравнение Шредингера, записанное для сред с определенным типом нелинейности, допускает существование счётного набора состояний одиночного солитона (т. е. одиночных солитонов с одинаковой длительностью или энергией, но с различными амплитудами). В качестве примера рассматривались среды со ступеньчатой или знакопеременной зависимостью нелинейной восприимчивости от интенсивности света. Для таких же сред была решена задача об устойчивости бистабильных солитонов по отношению к малым и большим возмущениям [2]. Позднее были подробно исследованы бистабильные солитоны в средах с насыщающей нелинейностью [3, 4], в волокнах с легирующими примесями, где изменение показателя преломления линейно и квадратично зависит от интенсивности [5], в средах с некерровским изменением показателя преломления [6], в нелинейных периодических структурах [7].

Очевидно, что интерференция различных одновременных нелинейных процессов может быть обусловлена не только типом нелинейности среды, но и другими физическими причинами. Так, например, при трёхчастотном параметрическом взаимодействии волн с кратными частотами в среде с квадратичной нелинейностью возникает дополнительный канал энергообмена. Ранее было показано, что наличие такой дополнительной связи может привести к существенному перераспределению энергии между взаимодействующими гармониками по сравнению с классическим случаем параметрического взаимодействия волн с произвольными частотами [8].

В настоящей работе впервые аналитически показана возможность существования оптических бистабильных солитонов огибающей, формирующихся на кратных частотах в среде с квадратичной нелинейностью.

Итак, рассмотрим взаимодействие трех оптических импульсов с кратными частотами ω , 2ω и 3ω . С учётом дисперсии второго порядка амплитуды импульсов подчиняются системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + iD_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \eta^2} &= -1\beta_3 A_3 A_2^* \exp(-i\Delta k_3 z) - i\beta_2 A_2 A_1^* \exp(-i\Delta k_2 z); \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + iD_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial \eta^2} &= -2i\beta_3 A_3 A_2^* \exp(-i\Delta k_3 z) - i\beta_2 A_1^2 \exp(i\Delta k_2 z); \quad (1) \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} + iD_3 \frac{\partial^2 A_3}{\partial \eta^2} &= -3i\beta_3 A_1 A_2 \exp(i\Delta k_3 z), \end{aligned}$$

где $\eta = t - z/u$; $u = \left(\frac{\partial k_j}{\partial \omega_j}\right)^{-1}$ — групповая скорость, одинаковая для всех волн; $D_j = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_j}{\partial \omega_j^2}$ — коэффициенты дисперсионного расплывания пакетов; $\Delta \vec{k}_3 = \vec{k}_3 - \vec{k}_2 - \vec{k}_1$ и $\Delta \vec{k}_2 = \vec{k}_2^{(1,2)} - \vec{k}_1^{(1)} - \vec{k}_1^{(2)}$ — малые расстройку волновых векторов; $\beta_2 = \frac{2\pi\omega \vec{e}_1 \chi^{(2)} \vec{e}_2 \vec{e}_1}{cn}$ и $\beta_3 = \frac{2\pi\omega \vec{e}_1 \chi^{(2)} \vec{e}_3 \vec{e}_2}{cn}$ — коэффициенты квадратичной нелинейности.

Система (1) обладает следующими интегралами движения:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^3 |A_j|^2 \right) d\eta = \text{const}, \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-3D_1 |A_{1\eta}|^2 - 1.5D_2 |A_{2\eta}|^2 - D_3 |A_{3\eta}|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 6\beta_3 \text{Re}(A_1 A_2 A_3^*) + 3\beta_2 \text{Re}(A_1^2 A_2^*) \right) d\eta = \text{const}. \quad (2) \end{aligned}$$

Как известно, расплывание волновых пакетов, вызванное дисперсией второго порядка, может быть уравновешено нелинейными эффектами. Ранее было показано [9, 10], что при параметрическом взаимодействии волн с произвольными некротными частотами в среде с квадратичной нелинейностью формируются связанные трёхчастотные солитоны. В настоящей статье предлагается исследовать, каким образом появление дополнительного канала энергообмена между основной волной и волной второй гармоники влияет на характер формирующихся солитонов.

Постулировав существование для системы уравнений (1) стационарного решения, не имеющего фазовой модуляции во времени, представим его в виде

$$A_j(z, \eta) = E_{jc}(\eta) \exp(-i\Gamma_j z), \quad (3)$$

где E_{jc} — действительные амплитуды, Γ_j — нелинейные добавки к волновым числам ($\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_3 + \Delta k_3$, $\Gamma_2 = 2\Gamma_1 - \Delta k_2$).

Подставляя (3) в (1), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для огибающих стационарных волновых пакетов:

$$\begin{aligned} D_1 \frac{d^2 E_{1c}}{\partial \eta^2} &= D_1 p_1 E_{1c} - \beta_3 E_{3c} E_{2c}^* - \beta_2 E_{2c} E_{1c}, \\ D_2 \frac{d^2 E_{2c}}{\partial \eta^2} &= D_2 p_2 E_{2c} - 2\beta_3 E_{3c} E_{1c}^* - \beta_2 E_{1c}^2, \\ D_3 \frac{d^2 E_{3c}}{\partial \eta^2} &= D_3 p_3 E_{3c} - 3\beta_3 E_{1c} E_{2c}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $p_j = \Gamma_j/D_j$.

Решение системы (4), отвечающее уединенным волнам, ищем в следующем виде

$$E_{jc}(\eta) = a_j \operatorname{sech}^2[\eta/\tau_c]. \quad (5)$$

Учтём, что суммарная энергия импульсов $W_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^3 E_{jc}(\eta)^2 \right) d\eta$ является постоянной величиной. Выберем W_0 в качестве единственного свободного параметра, характеризующего солитоны, и будем искать выражения для длительности солитонов τ_c и их амплитуд a_j через W_0 . Подставляя выражение (5) в систему (4), после несложных вычислений получаем:

$$\tau_{ck} = \left(\frac{48D_1^2 [(D_1 + D_2) + C_k^2 (D_2 + D_3/3)]^{1/3}}{W_0 (\beta_3 C_k + \beta_2)^2 (D_1 + C_k^2 D_3/3)} \right)^{1/3}, \quad (6)$$

$$a_{1k} = \pm \left(\frac{3W_0^2 D_2^{3/2} (D_1 + C_k^2 D_3/3)^{1/2} (\beta_3 C_k + \beta_2)}{32D_1 [(D_1 + D_2) + C_k^2 (D_2 + D_3/3)]^2} \right)^{1/3}, \quad (7)$$

$$a_{2k} = \left(\frac{3W_0^2 (D_1 + C_k^2 D_3/3)^2 (\beta_3 C_k + \beta_2)}{32D_1 [(D_1 + D_2) + C_k^2 (D_2 + D_3/3)]^2} \right)^{1/3}, \quad (8)$$

$$a_{3k} = \pm C_j \left(\frac{3W_0^2 D_2^{3/2} (D_1 + C_k^2 D_3/3)^{1/2} (\beta_3 C_k + \beta_2)}{32D_1 [(D_1 + D_2) + C_k^2 (D_2 + D_3/3)]^2} \right)^{1/3}, \quad (9)$$

где $k = 1, 2$, а

$$C_1 = \left(\frac{\beta_2^2}{4\beta_3^2} + 3 \frac{D_1}{D_3} \right)^{1/2} - \frac{\beta_2}{2\beta_3} \quad \text{и} \quad C_2 = \left(\frac{\beta_2^2}{4\beta_3^2} + 3 \frac{D_1}{D_3} \right)^{1/2} - \frac{\beta_2}{2\beta_3}. \quad (10)$$

Проанализируем решения (6)–(10). Очевидно, что существуют два типа параметрически связанных светлых солитонов: первому типу соответствует $k = 1$, второму — $k = 2$. Для каждого типа характерно наличие как синфазных (знак “+” в выражениях (7) и (9)), так и противofазных (знак “-”) связанных состояний.

Отметим, что решения первого и второго типа описывают тройки связанных солитонов с одинаковой суммарной энергией, но с различными длительностями и пиковыми интенсивностями. Определение мультистабильных солитонов, использованное в работах [1–5], позволяет сделать вывод о том, что в среде с квадратичной нелинейностью при взаимодействии трёх волн с кратными частотами ω , 2ω и 3ω возможно формирование бистабильных состояний параметрически связанных трёх светлых солитонов.

Если дополнительный канал энергообмена между первой и второй гармониками исчезает ($\beta_2 = 0$) (например, при взаимодействии трёх волн с произвольными некратными частотами), то коэффициенты C_1 и C_2 , а, следовательно, и амплитуды a_{jk} отличаются только знаком, который обусловлен исключительно выбором разности фаз. Поскольку в этом случае связанные солитоны распространяются и с одинаковой суммарной энергией, и с одинаковыми длительностями и пиковыми интенсивностями, то можно говорить о переходе от бистабильных к моностабильным солитонам.

Существенным отличием рассмотренных бистабильных солитонов от бистабильных солитонов, обсуждавшихся в упомянутой литературе, является то, что многозначность найденных решений обусловлена не типом нелинейности среды, а наличием кратного соотношения между частотами, на которых формируются солитоны. Таким образом, исследованная ранее [8] интерференция двух каналов энергообмена приводит ещё к одному интересному физическому явлению — к бистабильности параметрически связанных солитонов.

Влияние дополнительной связи между ω и 2ω на характеристики формирующихся на кратных частотах параметрически связанных светлых солитонов обсудим на примере среды с дисперсией $D_3 = D_1 + D_2$. Ранее для среды с квадратичной нелинейностью и с такой дисперсией было показано, что при отсутствии дополнительной связи огибающие солитонов имеют на всех трёх частотах одинаковые профили [10].

Наличие дополнительной связи приводит к тому, что амплитуды огибающих на всех трёх частотах будут разными. Используя формулы (7)–(9), легко показать, что отношения между амплитудами будут следующими:

$$\frac{a_{2k}}{a_{1k}} = \pm \left(\frac{(1 + C_k^2)}{2} \right)^{1/2}, \quad \frac{a_{3k}}{a_{1k}} = C_k.$$

При отсутствии канала энергообмена между основной волной и волной второй гармоники $\beta_2 = 0$ и $C_k^2 = 1$, и мы получаем известный результат [10], когда амплитуды на всех трёх частотах одинаковы.

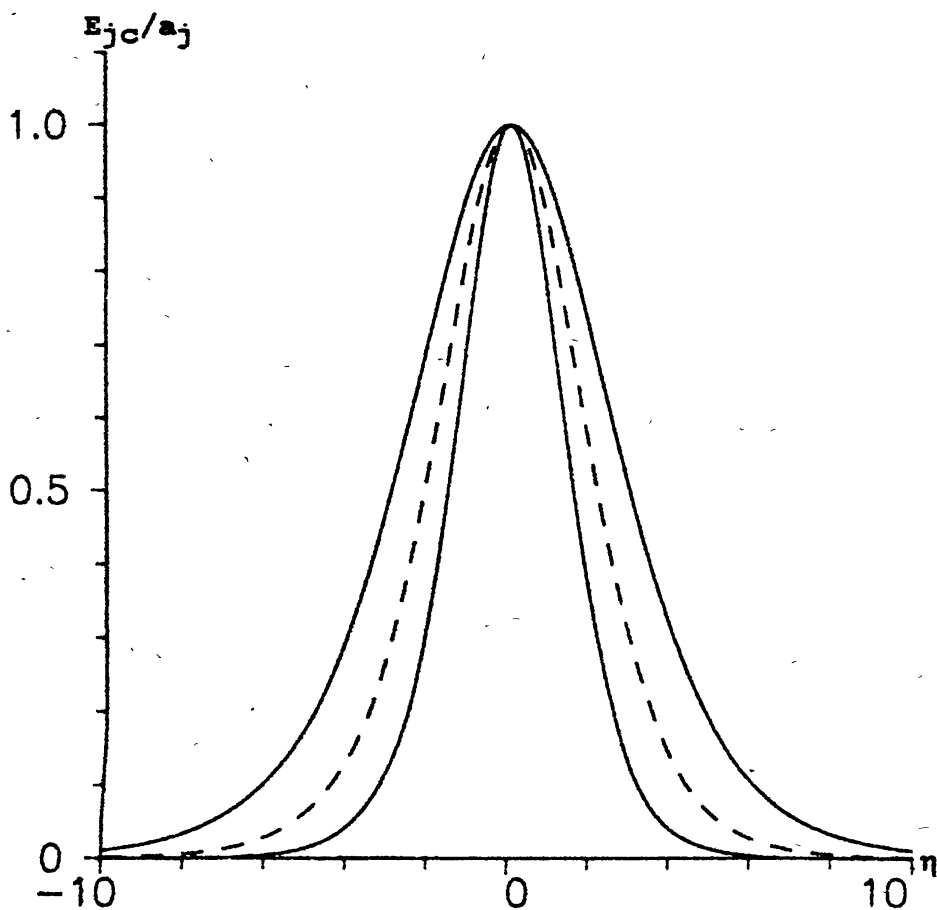


Рис. 1. Зависимость нормированной на пиковое значение амплитуды солитонов, формирующихся на кратных частотах в среде с квадратичной нелинейностью и дисперсией $D_3 = D_1 + D_2$, от координаты η . Сплошная линия — бистабильные солитоны, формирующиеся при наличии дополнительного канала энергообмена между первой и второй гармониками; штриховая линия — солитон, формирующийся при отсутствии такого дополнительного канала.

Приведем численные оценки отношений амплитуд. Для солитонов первого типа $|a_{2k}/a_{1k}| \simeq 0.83$, $|a_{3k}/a_{1k}| \simeq 0.62$, для солитонов второго типа $|a_{2k}/a_{1k}| \simeq 1.35$, $|a_{3k}/a_{1k}| \simeq 1.62$.

Рис. 1 иллюстрирует вышеприведённый пример солитонов, формирующихся на кратных частотах в среде с квадратичной нелинейностью и дисперсией $D_3 = D_1 + D_2$. На этом рисунке изображены зависимости

амплитуд солитонов, нормированных на пиковые значения, от координаты η . Очевидно, что при такой нормировке огибающие солитонов одного типа имеют на всех трёх частотах одинаковые профили, а разница между первым и вторым типами солитонов проявляется лишь в отличии длительностей. Бистабильные солитоны, формирующиеся при наличии когерентного канала энергообмена между первой и второй гармониками, изображены сплошной линией. Штриховой линией изображен профиль солитона, формирующегося при отсутствии такого когерентного канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaplan A. E. // *Physical Review Letters*. 1985. V.55. № 12. P.1291.
2. Enns R. H., Rangnekar S. S., Kaplan A. E. // *Physical Review A*. 1987. V.35. № 1. P.466.
3. Gatz S., Herrmann J. // *J. Opt. Soc. Am. B*. 1991. V.8. № 11. P.2296.
4. Krolikowski W., Luther-Davies B. // *Optics Letters*. 1992. V.17. № 20. P.1414.
5. Herrmann J. // *Optics Communications*. 1992. V.87. № 4. P.161.
6. Gatz S., Herrmann J. // *Optics Letters*. 1992. V.17. № 7. P.484.
7. Martijn de Sterke C. // *Physical Review A*. 1992. V.45. № 11. P.8252.
8. Комиссарова М. В., Сухоруков А. П. // *Квантовая электроника*. 1993. Т.20. № 10. С.1025.
9. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филипчук Т. С. // *Вестник Московского университета. Сер. Физика, астрономия*. 1978. Т.19. № 4. С.91.
10. Сухоруков А. П. *Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике*. — М.: Наука, 1988. 231 с.

Физический факультет МГУ
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
30 января 1995 г.

BISTABILITY OF OPTICAL SOLITONS FORMED AT NONLINEAR INTERACTION OF WAVES WITH MULTIPLE FREQUENCIES

M. V. Komissarova, A. P. Sukhorukov

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ КАВИТАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Л. М. Кустов, В. В. Лебедев, А. И. Мартынов

В работе изложена методика бесконтактного измерения пространственного распределения интенсивности кавитационных процессов при обтекании жестких поверхностей с высоким пространственным разрешением. Приведены результаты экспериментов, полученных при исследовании кавитации, возникающей при обтекании цилиндра и тонких проволок.

Исследование кавитационных процессов, возникающих при обтекании твердых поверхностей высокоскоростным потоком жидкости, имеет несомненное практическое значение при решении проблем снижения уровня кавитационной эрозии и интенсивности кавитационного шума. Теоретический расчёт интенсивности кавитационных процессов при обтекании тел различной формы достаточно сложен и здесь на первый план выступают экспериментальные исследования. Как известно, гидродинамическая кавитация сопровождается излучением шума, существенно превышающем по уровню гидродинамические шумы [1]. Кавитационный шум представляет собой совокупность акустических импульсов, обусловленных захлопыванием каверн при паровой форме кавитации, либо совокупностью коротких дугов ультразвука, излучаемых воздушными пузырьками при газовой форме кавитации. Измерение пространственного распределения источников кавитационного шума позволяет судить о пространственном распределении интенсивности кавитационных процессов. Традиционно применяемые для исследования кавитационных шумов гидрофоны не могут обеспечить высокого пространственного разрешения, поскольку даже в зоне геометрической акустики оно определяется апертурой гидрофона. Получение более высокого пространственного разрешения возможно при использовании систем, создающих изображение источника звука в акустических волнах. В настоящей работе в качестве фокусирующей системы использовалось жесткое сферическое зеркало с апертурой 15 см и фокусным расстоянием $F = 14$ см. Эксперимент проводился в гидроакустическом бассейне. Исследовалось пространственное распределение интенсивности источников кавитационного шума, возникающего при обтекании цилиндра и тонких проволок. Скорость набега-

ющего на цилиндр или проволочки потока 20 м/с. На рис. 1 представлена схема эксперимента.

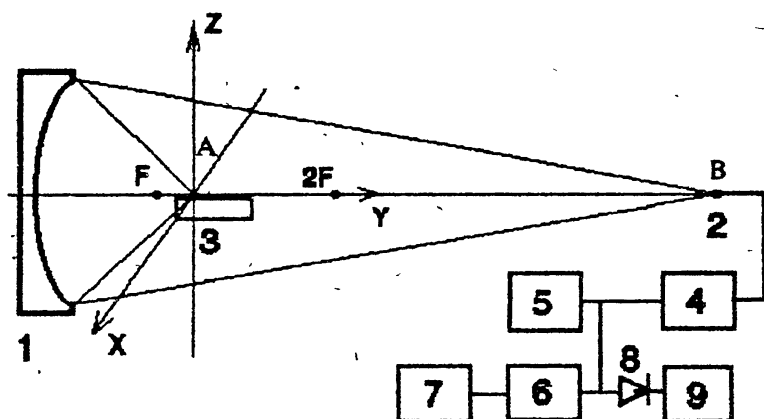


Рис. 1.

Зеркало 1 и приемный гидрофон 2, расположенный на главной оптической оси зеркала, жестко закреплены на одной штанге, которая может перемещаться в трех взаимноперпендикулярных направлениях X, Y, Z . Кавитационный шум, генерируемый в окрестности точки A , фокусируется зеркалом в точку B , где расположен приёмный гидрофон. Далее сигнал поступает на резонансный усилитель 4, затем на контрольный осциллограф 5, интегратор 6 и измеритель 7 либо, после усиления, через детектор 8 на счетчик импульсов 9. Информацию о пространственном распределении интенсивности кавитационных процессов получаем сканируя системой зеркало-гидрофон в плоскости XU . При такой схеме измерений пространственное разрешение в плоскости XZ на частоте 1.2 МГц равняется 3 мм, пространственное разрешение вдоль оси Y 20 мм.

На рис. 2 представлены результаты измерения пространственного распределения интенсивности источников кавитационного шума при обтекании цилиндра диаметром 16 мм. Цилиндр расположен горизонтально вдоль оси Y , набегающий на цилиндр поток так же горизонтален и направлен по оси X . Измерительная система сканирует вдоль оси Z , главная оптическая ось зеркала смещена на 3 мм по потоку вдоль оси X относительно оси цилиндра. На рис. 3 представлены результаты аналогичных измерений, полученных при обтекании двух проволочек диаметром 0.8 мм закрепленных параллельно оси X на расстоянии 5 мм между осями. Эффективно шумящий след за проволочками имеет длину 2 мм. На рис. 3 сплошной линией представлены результаты измерений пространственного распределения интенсивности источников кавитационного шума по

оси Z в случае совмещения главной оптической оси зеркала с координатой Y проволочек, пунктирной линией — распределение интенсивности источников на расстоянии 1 мм по оси Y .

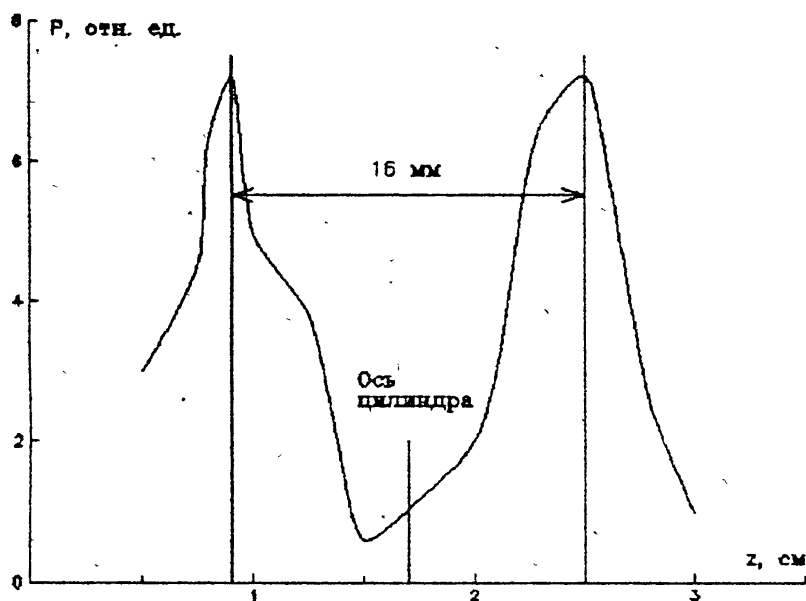


Рис. 2.

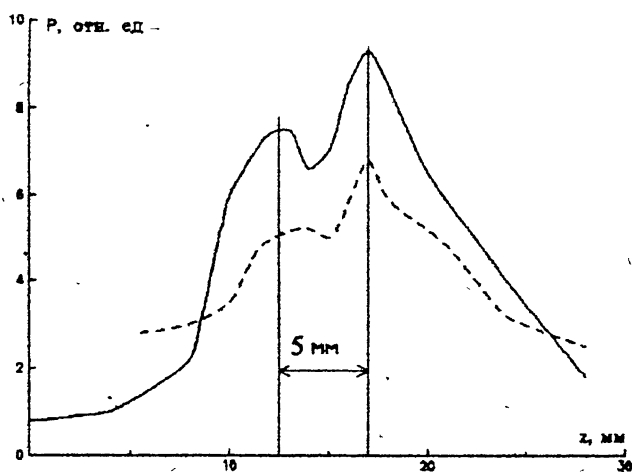


Рис. 3.

Представленные результаты иллюстрируют пространственное разрешение системы.

На рис. 4 представлены результаты измерения интенсивности кавитационных процессов на одной проволочке. Здесь представлены результаты измерения частоты появления кавитационных импульсов (сплошная линия) и интенсивности источников кавитационного шума (пунктир).

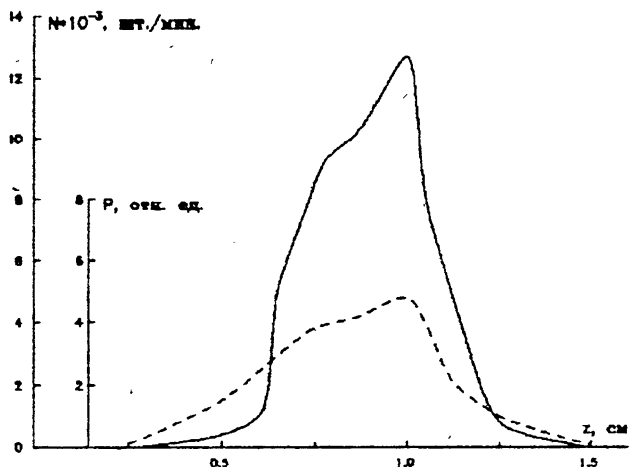


Рис. 4.

На контрольном осциллографе в процессе измерения можно наблюдать отдельные импульсы, наличие которых свидетельствует о кавитационном происхождении шума. К сожалению подоса пропускания приемного тракта не позволила провести непосредственное исследование тонкой структуры отдельного импульса, но пространственное разрешение акустической системы позволяет наблюдать отдельные кавитационные микровзрывы.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ N 94-05-16755.

ЛИТЕРАТУРА

1. Есипов И. Б., Наугольных К. А. // Акуст. журн. 1975. Т.21. № 4. С.654.

Нижегородский государственный
университет
им.Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
1 февраля 1995 г.

**EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE SPATIAL DISTRIBUTION
OF THE INTENSITY OF CAVITATIONAL PROCESSES**

L. M. Kustov, V. V. Lebedev, A. I. Martyanov

The method of the distant measurement of spatial distribution of cavitation process intensity is described. The experimental results presented are obtained from investigation of cavitation on a rigid cylinder and thin wires. The possibility to attain a higher spatial resolution is shown.

УДК 533.951

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ВЗАИМОЛОКАЛИЗАЦИИ ПОЛЯ И ПЛАЗМЫ НА АНТЕННЕ, РАБОТАЮЩЕЙ В РЕЖИМЕ КОРОНООБРАЗОВАНИЯ

Г. А. Марков, А. Л. Умнов

Проведено экспериментальное исследование пространственных распределений плазмы и ближних полей антенны, работающей в разреженном газе в режиме коронообразования. Описан и проанализирован эффект взаимолокализации ВЧ короны и создающего ее электрического поля.

1. В В Е Д Е Н И Е

Известно, что вокруг электрических вибраторных антенн, работающих в разреженном газе, при достаточно высоком уровне возбуждающего сигнала может зажигаться ВЧ корона. В течение последних десятилетий наблюдается неизменный интерес к исследованию свойств системы "антенна-корона". Этот интерес не случаен, поскольку режим коронообразования может реально возникать при работе излучателя в верхних слоях атмосферы или даже намеренно выбираться для создания лабораторной плазмы с помощью вибраторных антенн. В известной литературе [1-3], в основном, содержатся экспериментальные данные о влиянии ВЧ разряда на входной импеданс антенны и излучаемую мощность. Вместе с тем, возможные структуры разряда, распределения антенных токов и зарядов практически не рассматривались. Такое положение обусловлено, в частности, трудностью проведения невозмущающих систему измерений в непосредственной близости к антенне.

2. СХЕМА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Настоящая работа посвящена экспериментальному изучению характера самосогласованного распределения плазмы и порождающего её радиального электрического поля в пространстве вблизи вибратора конечных размеров. Работа является продолжением исследований начатых в [4, 5, 7]. Для изучения антенны, работающей в режиме коронообразования, была собрана экспериментальная установка аналогичная использованной в

работе [5]. Несимметричный электрический вибратор радиуса $a = 1$ мм и длины $l = 40$ см, создающий разряд, размещался над металлической плоскостью. При этом большая часть вибратора (33 см) помещалась в стеклянный баллон. Давление в баллоне устанавливалось в режиме непрерывной откачки воздуха и могло изменяться в интервале $10^{-1} - 1$ Торр. Возбуждение излучателя осуществлялось с помощью ВЧ генератора, соединенного с антенным входом коаксиальной линией; на выходе коаксиальной линии включался колебательный контур с переменными параметрами, что позволяло изменять входной импеданс антенны в широких пределах. В эксперименте антенна, фактически, являлась продолжением внутреннего проводника коаксиальной линии. ВЧ генератор позволял работать в частотном диапазоне 180-300 МГц при максимальном выходном напряжении 100 В. Измерение напряжения на антенном входе производилось с помощью градуированного ёмкостного делителя. Распределение антенного тока снималось специально разработанным для этой цели датчиком с оптической передачей информации. Датчик был изготовлен на основе колебательного контура, образованного конденсатором и индуктивностью его электродов, изогнутых в виде рамки электрически малых размеров. В цепь контура включалась микроминиатюрная лампа накаливания. Контур возбуждался азимутальным магнитным полем, порождаемым антенным током. Световой сигнал, являющийся функцией среднеквадратичного значения антенного тока, передавался на блок фотоприемника по световоду и регистрировался вольтметром или осциллографом. Как показали тестовые эксперименты, подобный датчик может надёжно регистрировать антенный ток, как на участках антенны свободных от плазмы, так и на участках, окруженных плазменной оболочкой, возмущения, вносимые им в систему "антенна-корона" значительно меньше, чем в случае использования датчиков, имеющих электрическую связь с регистрирующими приборами. Параметры плазмы измерялись двойным ленгмюровским зондом, который мог временно вводиться в область разряда. Однако зонд вносил довольно сильные искажения в структуру разряда и поэтому удавалось регистрировать только усреднённые параметры плазмы. Для изучения формы границ плазменной оболочки производилась фоторегистрация разряда.

При работе антенны при атмосферном давлении, без ВЧ короны, зависимость амплитуды тока от продольной координаты $I_0(z)$ на исследуемом участке была близка к линейной функции, а распределение радиального электрического поля, с той же степенью точности, было равномерно по z (рис. 1). При снижении давления до критического значения вокруг антенны происходил пробой и формировалась стационарная плазменная оболочка — ВЧ корона. Вид короны зависел от давления газа, частоты и уровня возбуждающего антенну сигнала. Однако для всех режимов работы антенны, в указанном диапазоне параметров, характерной особен-

ностью являлась тенденция к пространственной самолокализации плазмы короны (рис. 2).

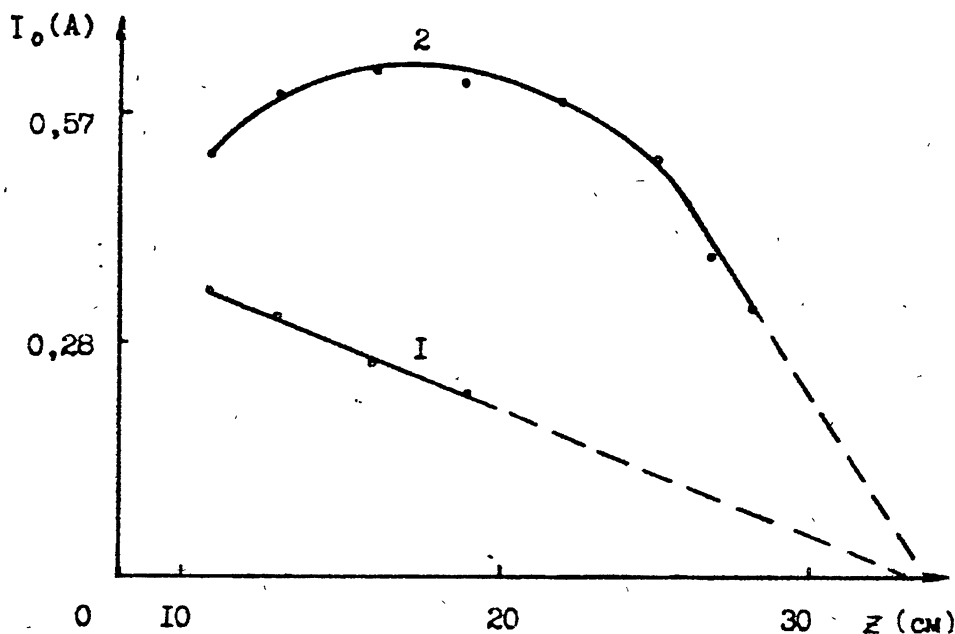


Рис. 1.

Наблюдалось несколько форм короны. При постепенном увеличении напряжения на входе антенны, находящейся при пониженном давлении, сначала зажигался разряд на её конце, который затем переходил в развитую корону, представлявшую собой почти сферическое плазменное образование; центр плазменной сферы отстоял от конца антенны приблизительно на расстояние $2/3$ её радиуса (рис. 2а). При дальнейшем увеличении входного напряжения корона сначала равномерно увеличивалась в размерах, а затем происходило её разделение на два плазменных образования: одно локализованное вблизи конца, а второе вблизи ввода антенны в баллон (рис. 2б). Уменьшение давления и увеличение выходного напряжения ВЧ генератора могли приводить к сливанию этих плазменных образований в одно. При давлениях воздуха больше 0.5 Торр граница светящейся области, интерпретируемая как свободная граница разряда, имела резкий, недиффузный характер. Уже по данным визуального наблюдения и фоторегистрации формы короны можно было заключить, что порождающее плазму электрическое поле распределено неравномерно вдоль антенны: сильное поле сосредотачивается на участках антенны, занятых плазмой.

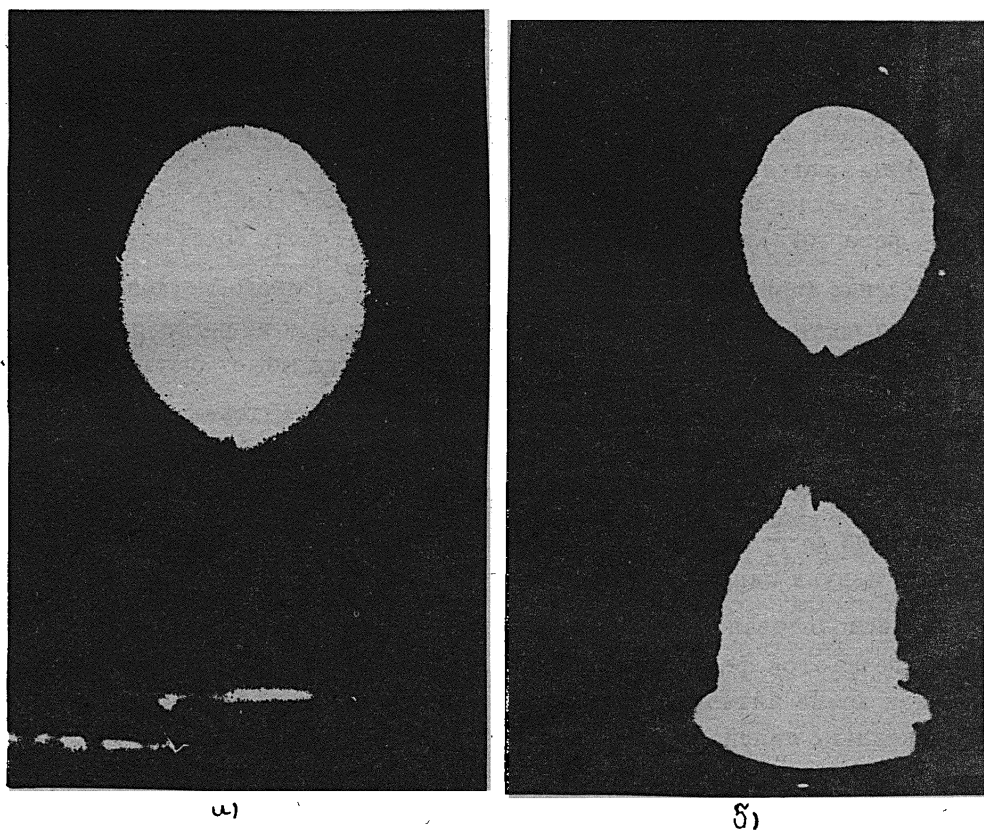


Рис. 2.

Прямые измерения антенного тока и восстановление по этим данным значения радиального электрического поля подтверждают предположение о совместной локализации плазмы и порождающего ее электрического поля. На рис. 1 представлены, измеренные экспериментально, распределения тока вдоль антенны, работающей на частоте 280 МГц и возбуждаемой напряжением с амплитудой 80 В, кривая 1 соответствует работе антенны в линейном режиме (при атмосферном давлении), кривая 2 — в режиме коронобразования при давлении окружающего газа 0.5 Торр. Вид короны, соответствующий условиям эксперимента, представлен на рис. 2 а. Измерения плотности плазмы показали, что в центральной области разряда $\omega_p > \omega_0$, где ω_p — плазменная частота, ω_0 — частота сигнала. При этом $\omega_0 \leq \nu_m$, где ν_m — частота столкновений электронов с нейтралами. Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что образование вблизи конца антенны разряда приводит к изменению тока на всем излучателе. На участке антенны, не занятом плазмой, распределение тока выпрямляется, по сравнению с линейным режимом, а внутри короны происходит резкий спад амплитуды тока; форма тока на большей части этого участка, по-видимому, близка к линейной. Максимальное значение тока

при переходе антенны в режим коронообразования могло как увеличиваться, так и уменьшаться в зависимости от первоначальной настройки антенны колебательным контуром, включенным на её входе. На рис. 1 представлен случай резонансной подстройки первоначально расстроенной антенны (максимальное значение тока возросло).

По известному распределению тока $I(z) = I_0 e^{i\varphi}$ (где I_0 — амплитуда, а φ — фаза тока) вдоль линейной антенны может быть восстановлено распределение заряда: $q(z) = -\frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{dI_0}{dz} + I_0 \frac{d\varphi}{dz} \right\} e^{i\varphi}$. Однако, поскольку в ходе эксперимента производилось только измерение I_0 и не регистрировалось значение фазы, то восстановление модуля заряда может быть проведено только с точностью до члена $I_0 \frac{d\varphi}{dz}$. На участке антенны, окружённом плазмой, распределение I_0 близко к линейному и следует ожидать, что $\text{Re}I$ и $\text{Im}I$, на этом участке, также линейные функции координаты z . При этом член $I_0 \frac{d\varphi}{dz}$ мал по сравнению с $\frac{dI_0}{dz}$, следовательно для оценки значения модуля заряда на участке антенны, окруженном плазмой, может быть использовано приближенное равенство: $|q| \approx \frac{1}{\omega} \left| \frac{dI_0}{dz} \right|$. Произведенные по этой формуле вычисления показывают, что плотность заряда вблизи конца антенны в режиме короны возросла более чем в 3.5 по сравнению с линейным случаем.

Следует отметить тот факт, что ближнее азимутальное магнитное поле также увеличивалось и локализовалось, сосредотачиваясь вокруг участков антенны, несущих максимальный ток.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Поскольку тангенциальное, к поверхности антенны, электрическое поле значительно меньше радиального, структура разряда вблизи поверхности излучателя, в основном, определяется значением модуля радиального электрического поля, который может быть выражен через локальное значение заряда на антенне. Условия эксперимента таковы, что основным механизмом потерь электронов из области разряда является их прилипание к электроотрицательным молекулам воздуха. Поэтому, в качестве модели разряда может быть выбрана модель, предложенная в [6]. В рамках этой модели электрическое поле, во всём объёме разряда, фиксируется на пробойном уровне, а на внешних границах плазменного образования поле меньше пробойного. Расстояние от оси антенны до границы разряда, вычисленное для среднего участка плазменного образования (на котором модуль тока является линейной функцией координаты z) на основе экспериментальных данных, представленных на рис. 1, составляет 3 см, что неплохо совпадает со значением, полученным с помощью фоторегистрации светящейся области разряда: 3.5 см. Это совпадение свидетельствует

о возможности использования результатов работы [6] при интерпретации экспериментальных результатов.

Механизм формирования локализованной короны может быть понят на основе сопоставления антенны, имеющей на конце плазменное образование с длинной линией, нагруженной комплексным импедансом. Подключение к отрезку линии комплексной нагрузки приводит к изменению ее входного импеданса и сдвигу синусоиды тока вдоль линии. Аналогично этому при зажигании ВЧ короны происходит изменение входного импеданса антенны и сдвиг функции антенного тока. При этом на участке антенны, не занятом плазмой, уменьшается значение $\frac{dI}{dz}$, что означает уменьшение поверхностного заряда, а следовательно и радиального поля, создающего разряд. Изменения параметров плазменной нагрузки и сдвиг функции антенного тока происходят до тех пор, пока на границах плазменного образования поле не станет меньше пробойного (рис. 2а). При определённых условиях импеданс нагрузки может становиться таким, что в результате сдвига функции тока у основания антенны появляется участок с большим значением $\frac{dI}{dz}$, и в этой области так же возможен разряд (рис. 2б). Характер переходного процесса в системе "антенна-корона", при котором образующаяся плазма изменяет ближнее поле антенны, которое, в свою очередь, модифицирует параметры короны, позволяет говорить об эффекте взаимолокализации поля и плазмы.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда Сороса, грант № R86000 и гранта РФФИ 95-02-05816а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Messiaen A. M., Vandenplas P. E. // Electron Letters. 1967. V.3. № 1. P.26.
2. Messiaen A. M., Vandenplas P. E. // Electron Letters. 1967. V.4. № 2. P.29.
3. Пермяков В. А., Тихомиров П. Ю., Шаумаров Ш., Шаумарова М. Л. // Тезисы докладов. Всес. науч.-тех. конф. "Современные проблемы радиоэлектроники", 1988. С.234.
4. Марков Г. А., Умнов А. Л., Лиходеев М. В. // Письма в ЖТФ. 1993. Т.19. № 3. С.46.
5. Марков Г. А., Курина Л. Е., Умнов А. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т.37. № 6.
6. Гильденбург В. Б., Гольцман В. Л., Семенов В. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т.17. № 11. С.1718.

7. Курина Л. Е., Марков Г. А., Умнов А. Л. // Труды XXII Научно-технической конференции "Теория и техника антенн", 1994. С.315.

Нижегородский государственный
университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
3 февраля 1995 г.

**EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE PLASMA-FIELD
CO-LOCALIZATION AT THE ANTENNA OPERATING IN THE CORONA
FORMATION REGIME**

G. A. Markov, A. L. Umnov

We have investigated the spatial distributions of plasma and near antenna fields operating in the corona formation regime. We have registered and analysed the effect of co-localization of the plasma and the near antenna field producing the corona.

УДК 534.7:532.5

НЕОДНОРОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭРИТРОЦИТОВ В СЛОЕ СУСПЕНЗИИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВИБРАЦИИ

В. А. Антонец, Б. Н. Клочков, Р. Т. Тухватулин, В. Н. Шуваева

Описываются результаты исследования группирования эритроцитов в слое суспензии под действием вибрации. В случае малых концентраций и слабой исходной агрегируемости образуются квазипериодические структуры с характерным масштабом. При достаточно больших концентрациях и агрегируемости возникают многомасштабные структуры с самоподобием. Приводятся данные спектрального анализа пространственных характеристик исследуемых структур.

ВВЕДЕНИЕ

Гетерогенная структура крови как суспензии, основу которой составляют эритроциты, обуславливает ее сложное реологическое поведение. Пульсирующий характер движения крови по сосудам, а также использование в практике вибрационных вискозиметров определяют интерес исследований вибрационных воздействий на кровь. Впервые о феномене образования вибрационных структур (ВС) эритроцитов было доложено В. А. Левтовым с соавторами на всесоюзном семинаре "Биомеханика-90". Феномен заключается в том, что под действием вибрации происходит группирование эритроцитов, причем ВС образуются после включения вибрации и распадаются после ее выключения.

В настоящей работе выделено два основных типа ВС: с пространственной периодичностью и многомасштабностью. При этом пространственные характеристики структуры образующихся скоплений эритроцитов зависят от величины их объемной концентрации, а также от интенсивности межэритроцитарных взаимодействий, то есть от типа крови — агрегирующей (эритроциты слипаются) или неагрегирующей (нет слипания).

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Регистрация изменений структуры суспензии производилась микрофотографическим способом [1]-[2]. Для этого суспензия помещалась в специальную кювету, расположенную горизонтально. Микрокювета представляла собой плоскопараллельную, герметизируемую камеру. Рабочий

объем кюветы равен 0,005 мл. Одна из стенок кюветы способна совершать механические колебания и жестко соединена с пьезопреобразователем, возбуждаемым генератором на резонансной частоте 13 кГц (с амплитудой колебаний 0,2 мкм). Вибровоздействие в ряде случаев осуществлялось помещением кюветы на вибростенд.

Для изучения зависимости вида ВС от размеров эритроцитов и возможности образования аналогичных ВС в других дисперсных системах исследовались суспензии эритроцитов крови различных видов животных, имеющих размеры эритроцитов от 5 до 20 мкм, а также молоко, жировые шарики которого существенно различаются по размерам (от 2 до 100 мкм). Для изучения взаимосвязи процессов образования ВС и обратимой агрегации эритроцитов (ОАЭ) исследовали суспензии эритроцитов, имеющих различную интенсивность агрегации, а также, когда ОАЭ специально подавлялась. Для изучения зависимости вида ВС от концентрации (Н) исследовались суспензии эритроцитов с объемным содержанием клеток 0,1; 1; 10; 20 и 40% (см. рис. 1, 2). Специально исследовано развитие во времени виброструктур в агрегирующейся крови и в неагрегирующейся суспензии (рис. 3).

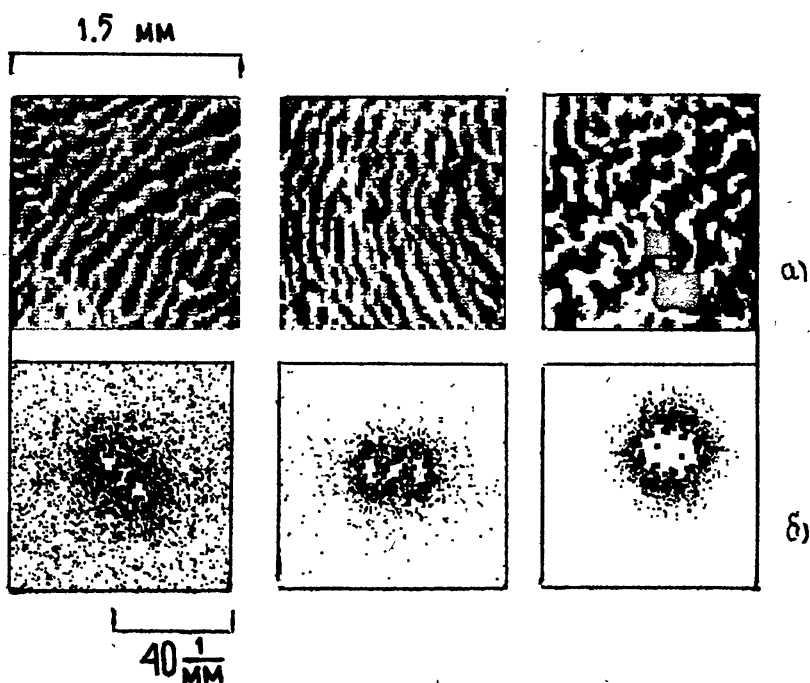


Рис. 1. а) Изображения виброструктур эритроцитов крови кролика при Н: 1%, 10%, 20%; б) изолинии двумерных спектров Фурье.

Для обработки первичных данных изображения структур с негативных фотопленок вводились в покадровом режиме в специализированную

ЭВМ через телевизионный канал ввода данных. Изображения фрагментов подвергались двумерному Фурье преобразованию с достаточной разрешающей способностью, а также цифровому контрастированию. Количественные данные Фурье спектров сопоставлялись с количественными и качественными характеристиками суспензий.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для изучения зависимости от частоты вибрации использовались как гармонические колебания в полосе частот от 300 Гц до 10000 Гц с амплитудами ускорения от 10 до 100 м/с², так и широкополосные (шумовые) колебания с теми же амплитудами ускорений в диапазонах частот 0-6,4 кГц, 0-12,8 кГц и 0-25,6 кГц. При этом оказалось, что при достаточно высокой амплитуде колебаний, вообще говоря, зависящей от концентрации, ВС возникают обязательно. Их возникновение и существование мало зависит от того, какой спектр имеет вибрация. Существует пороговое значение амплитуды вибрации, ниже которой ВС не возникают. Так, при амплитуде колебаний 0,1 мкм и ниже ВС не возникают в диапазоне частот 1-9 кГц. При увеличении амплитуды колебаний до 0,75 мкм ВС возникают при частоте вибраций 2,1-2,3 кГц. Аналогичная картина имела место при наложении белого шума с частотой 0-400 Гц.

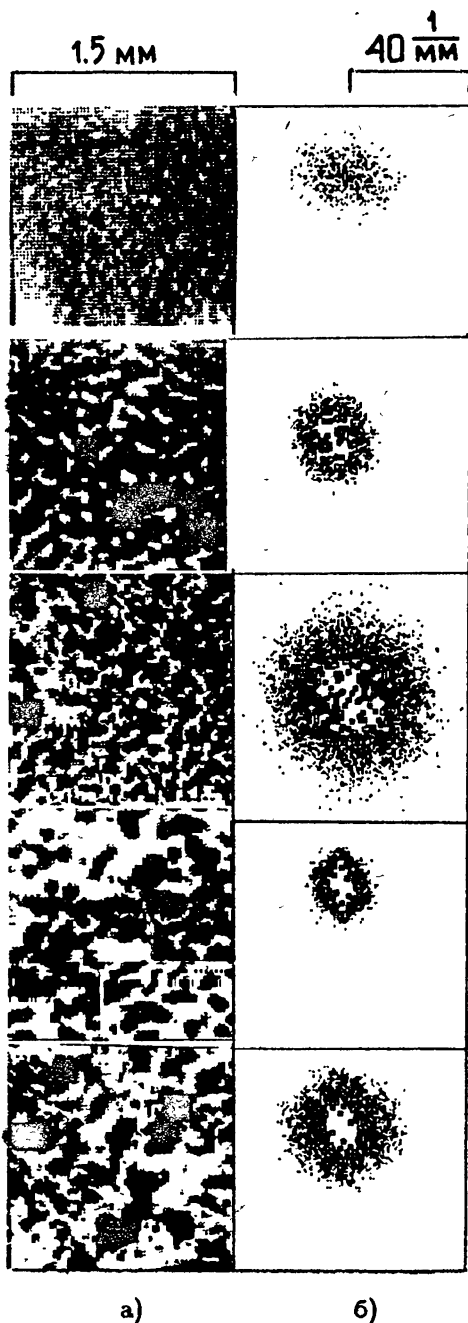


Рис. 2. а) Изображения структур эритроцитов типа "пятна" в крови кошки при Н: 0,1%; 1%; 10%; 20%; 40%; б) соответствующие изолинии двумерных спектров Фурье.

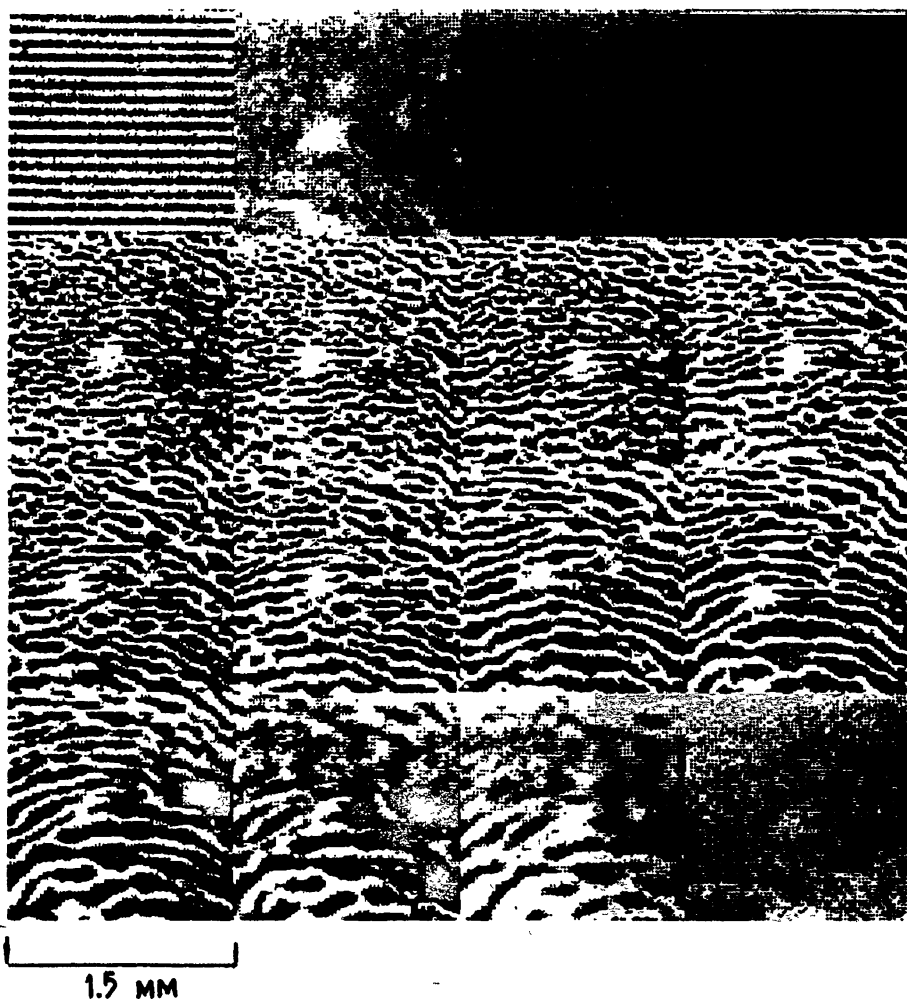


Рис. 3а. Изображения виброструктур эритроцитов в неагрегирующей крови кролика ($H=5\%$) с течением времени (кадры расположены: слева направо сверху вниз, 1 — калибровка, 2 — покой, далее вибрации: 3-6 — через 15 с, 7-10 — через 30 с, 11-12 — через 2 мин., 13-15 — покой 30 с, 4 мин., 5 мин.).

При наложении на микроквету вибраций с частотой 13 кГц при химическом выключении агрегации или при использовании крови со слабой агрегацией обнаружены ВС двух видов, различающиеся характерными размерами (рис. 1, 3): группировки шириной 0,1-0,5 мм ("барханы") и стабильные зоны ("дюны") шириной около 3 мм, включающие в себя "барханы". Появлению "барханов" обычно предшествует формирование коротких цепочек, лежащих рядом эритроцитов. Скорость формирования ВС зависит от амплитуды вибрации: чем больше амплитуда вибрации, тем выше скорость формирования ВС. По мере продолжения вибровоз-

действия группировки эритроцитов укрупняются. Это отражается на спектрах Фурье — их пространственная частота уменьшается (рис. 3).

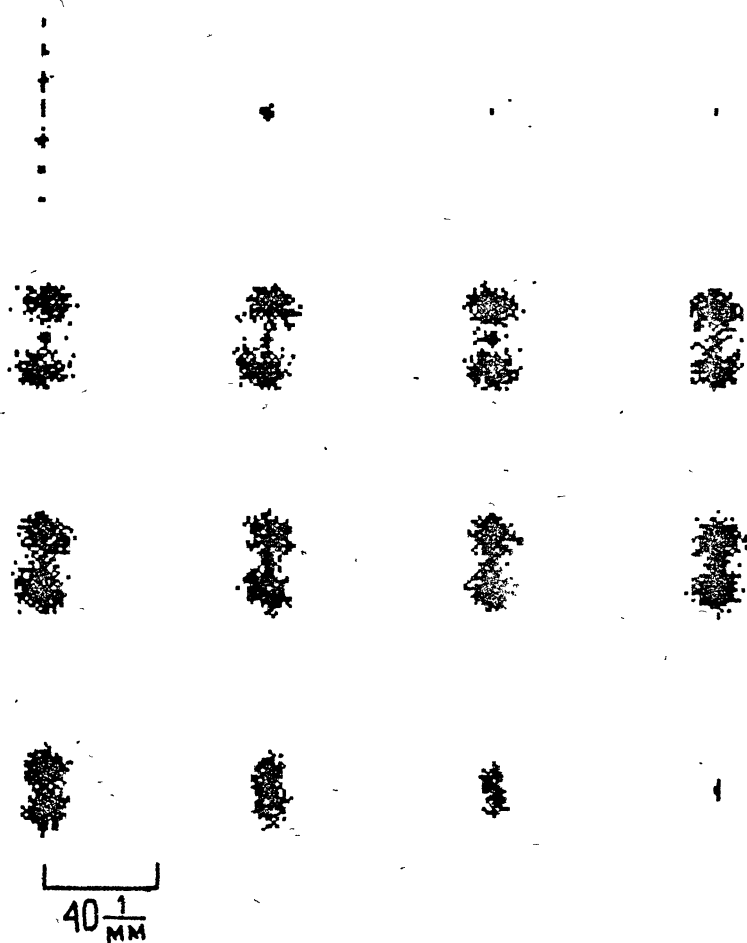


Рис. 36. Двумерные спектры Фурье.

При выключении вибрации ВС исчезают, а при повторном включении вновь возникают и имеют тот же качественный вид, близкие характеристики, но пространственное местоположение конкретных сгущений и разрежений изменяется. Характерное время распада ВС типа “барханы” — десятки секунд, типа “дюны” — десятки минут. Можно утверждать, что “барханы” не имеют отношения к известным фигурам Хладни, характеризующим распределение вибрационного поля в кювете и отражающим пространственную неоднородность возбуждения, так как они имеют совершенно несопоставимые пространственные масштабы.

Сравнение фотографий ВС со спектрами Фурье позволяет утверждать, что при близких значениях диаметров эритроцитов при прочих

равных условиях параметры ВС мало отличаются. Если вместо крови в микрокювету поместить молоко, то наблюдаются ВС типа “барханов”. Из этого следует, что для образования подобных структур важно только наличие частиц.

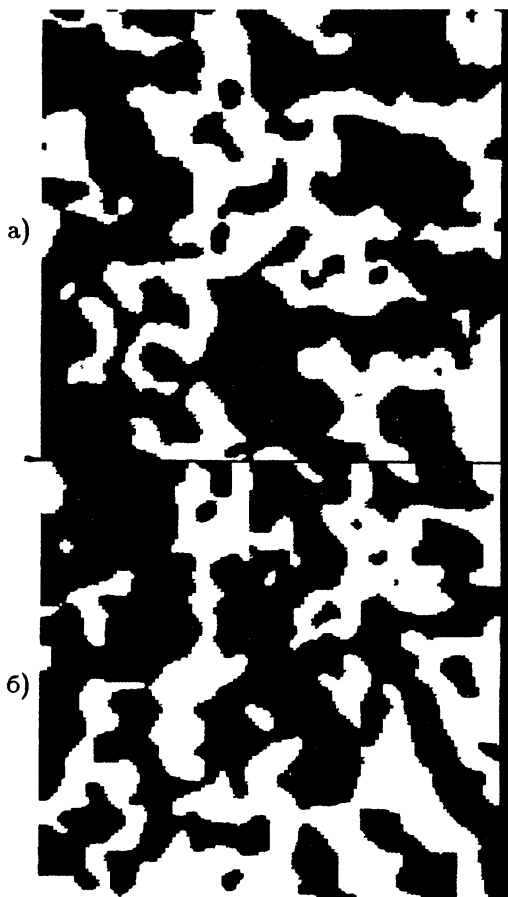


Рис. 4. Преобразование подобия.

обеим осям и пространственной фильтрации, выравнивающей относительную ширину полосы спектров исходного и преобразованного фрагментов при их отображении на бумагу (рис. 4б). При этом обнаруживается большое общее сходство исходного и перемасштабированного изображений, что говорит о самоподобии структур, которые были названы нами “пятнами”.

Пространственные характеристики структур, образующихся в вибрационном поле группировок эритроцитов, существенно зависят от интенсивности межклеточных взаимодействий. При усилении агрегируемости образуются не “барханы”, а многомасштабные структуры фрактального

При фиксированном уровне вибровозбуждения исследовались препараты крови при различных концентрациях H . При малых H пространственная неоднородность в суспензии выражена очень слабо. При увеличении H структуры имеют ярко выраженные периодические фрагменты. Однако эти структуры не являются совершенными, а содержат “дефекты”, нарушающие упорядоченность (рис. 1, 3). При дальнейшем увеличении H их количество нарастает и образуются многомасштабные структуры фрактального типа — “пятна” (рис. 2). Такой характер изменения ВС в зависимости от H подтверждается данными спектрального анализа.

Изображение многомасштабных структур кроме спектральной обработки подвергалось дополнительно еще и масштабным преобразованиям. Так на рис. 4а приведено исходное изображение. Затем на нем выделен фрагмент, который с помощью цифровой обработки подвергнут растяжению по

типа с выраженным самоподобием ("пятна") (рис. 2). Процессы образования ВС и ОАЭ имеют близкие временные масштабы — от десятков секунд до десятков минут. Однако они направлены противоположно. При вибрационном воздействии, с одной стороны, происходит разрушение агрегационных структур, а с другой стороны, идет образование ВС. После выключения вибрации начинается процесс спонтанного агрегатообразования, с одной стороны, и распад ВС, с другой. Микроскопирование показывает, что агрегационные структуры и ВС существенно различны по своей природе. В ВС отдельные эритроциты расположены достаточно далеко (2–10 мкм) друг от друга и не слипаются. В агрегатах эритроцитов расстояние между клетками не превышает 100–500 ангстрем.

На основании этого можно утверждать, что возникновение группировок эритроцитов типа "бархан" при наложении на кровь вибраций с определенными параметрами свидетельствует об ослаблении агрегационных свойств крови (снижении концентрации эритроцитов, уменьшении прочности агрегатов).

Теоретический подход к данной задаче связан с моделью дисперсной среды, учитывающей различные силы, возникающие при движении эритроцитов, а также с диффузией эритроцитов в сдвиговом потоке и их взаимодействием друг с другом, причем диффузия отсутствует в областях с максимально возможной концентрацией и нулевой.

ВЫВОДЫ

Изменение характера вибрационного группирования эритроцитов в зависимости от их объемного содержания в крови и в ответ на различные воздействия приводит к заключению, что такой метод вибрационного исследования мог быть полезен для оценки состояния клеток крови, изучения ОАЭ и, возможно, для диагностики, а также для исследования параметров дисперсных систем.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код N 94-02-06075).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тухватулин Р. Т., Шуваева В. Н., Шадрин Н. Х., Левтов В. А. // Физкол. журн. СССР. 1986. Т. 72. N 6. С. 775.
2. Тухватулин Р. Т. Фотометрическое исследование обратимой агрегации эритроцитов в микрообъемах крови. — Автореф. на соиск. уч. степ. к.б.н. — Красноярск, 1987. — 22 с.

Институт прикладной физики
РАН, Н.Новгород

Поступила в редакцию
25 февраля 1995 г.

INHOMOGENEOUS DISTRIBUTION OF ERYTHROCYTES
IN A LAYER OF SUSPENSION UNDER VIBRATION

V. A. Antonets, B. N. Klochkov, R. T. Tukhvatulin; V. N. Shuvaeva

We describe the results of investigation of erythrocytes grouping in a layer of suspension under vibration. Quasi-periodic structures with a typical scale are formed in the case of small concentrations and a weak initial aggregativity. At a sufficiently large concentration and aggregativity there appear multiscale structures with self-similarity. Spectral analysis data are given of the spatial characteristics of the structures studied.

УДК 534.7;534:612.014.45

ВИБРО-АКУСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И СТРУКТУРНЫЕ ПЕРЕСТРОЙКИ В МЫШЕЧНОЙ ТКАНИ

В. А. Антонец, Б. Н. Клочков, Э. П. Ковалева

Рассматриваются экспериментальные и теоретические результаты исследований вибро-акустической активности сокращающихся мышц. Исследуются два вида процессов. 1) Звуковые колебания, возникающие при макромолекулярных перестройках мышечных белков, собственно, и обеспечивающих сокращение. Исследование звуковых колебаний позволяет изучать ход структурных перестроек (изменений конформаций) в макромолекулах при механохимических реакциях. В связи с тем, что конформационные перестройки всегда сопровождают химические реакции макромолекул, указанный механизм генерации может реализовываться не только в мышце при сокращении, но и в других макромолекулярных средах. 2) Инфразвуковые колебания, возникающие вследствие конечной точности и быстрого действия рецепторно-эффекторной системы управления мышечным сокращением. Исследование инфразвуковых колебаний позволяет изучать качество и погрешность управления при различных способах нагружения мышцы. В связи с тем, что в живом организме управление осуществляется на основе ощущений, возникает возможность их количественной оценки по параметрам инфразвуковых колебаний.

ВВЕДЕНИЕ

Мышечное напряжение всегда сопровождается генерацией механических колебаний в широком диапазоне частот. Их виды и механизм недостаточно изучены, хотя это делается весьма давно и активно [1-10]. По-видимому, их сложность и разнообразие обусловлены многоуровневостью морфо-функциональной организации мышцы и, соответственно, многоуровневостью управления ее сокращением. Остановимся только на двух возможных механизмах. Так, на субклеточном уровне, т.е. масштабах $\sim 10^{-5}$ м, мышца может рассматриваться как белковый квазикристалл, структура которого меняется при мышечном сокращении, что, естественно, подтверждено рентгено-структурным анализом [10]. На этом уровне сокращение представляет собой химическую реакцию белков, что сопровождается обязательной конформационной перестройкой белковых макромолекул, дающей вклад в развитие механического напряжения. При этом весь процесс сокращения является совокупностью дискретных актов. Следовательно, кроме развития постоянной составляющей

напряжения мышцы неизбежно возникновение и флуктуационной составляющей, т.е. механических колебаний. Этот механизм, по-видимому, пригоден для объяснения генерации мышцей звуковых колебаний.

Перейдем к целостной мышце. Она может рассматриваться как совокупность двигательных единиц. Под двигательной единицей понимается группа пространственно рассредоточенных мышечных волокон, которые, однако, за счет специальной организации нервно-мышечных связей возбуждаются синхронно и развивают напряжение в течение десятых долей секунды. Само же длительное сокращение может рассматриваться как последовательность дискретного включения и выключения различных двигательных единиц, каждая из которых развивает при каждом своем включении одинаковое усилие. В силу дискретности процесса флуктуационная компонента напряжения мышцы неизбежно проявит себя и на этом уровне. Такой механизм, по-видимому, пригоден для объяснения некоторых компонент инфразвуковых колебаний, называемых тремором. Но более важной является возможность использования этого механизма для количественной оценки восприятия усилия мышечным анализатором.

"ЗВУКОВЫЕ" КОЛЕБАНИЯ НАПРЯЖЕННОЙ МЫШЦЫ

Акустические методы исследования биологических тканей важны с точки зрения диагностики их структуры и функции. Акустическая эмиссия биотканей может являться основой для пассивной локализации и нести в себе информацию о самой биоткани. Для медицинской диагностики важно понимание, как изменяются акустические эмиссионные спектры под влиянием различных биохимических и физических процессов. Источниками акустической эмиссии могут служить целые органы, клетки, интербиополимерные комплексы, надмолекулярные структуры, в которых отдельные макромолекулы существенно взаимодействуют друг с другом, отдельные макромолекулы (см. таблицу). Существует ряд работ, где исследованы "звуки мышц". В [1] изучены звуки от отдельных моторных единиц в сокращающейся мышце. Звуки слышны человеческим ухом в течение сокращения мышцы и могут состоять из набора ритмических щелчков. Каждый набор соответствует сокращению индивидуальной моторной единицы. Запись осуществлялась микрофоном. Звуки, произведенные отдельными моторными единицами, слышны через стетоскоп, положенный прямо на кожу над мышцей, и могут регистрироваться также и пьезодатчиком. Одновременно записывался и электрический потенциал действия от той же моторной единицы. Частота разрядов зависит от силы сокращения и достигает частоты примерно 45 Гц. В [2, 3] исследовались низкочастотные звуки, генерируемые при сокращении скелетной мышцы человека. Автокорреляционный анализ показывает, что они достаточно узкополосны и периодичны с частотой $f = (25 \pm 2.5)$ Гц. Ка-

чество звуков одинаково для всех мышц и не меняется при изменении напряжения, температуры и кровотока. Амплитуда звуков увеличивается линейно с напряжением, а их частота практически не зависит от нагрузки на мышцу. Параметры звуковых сигналов не связаны ни с частотой, ни с фазой электромиограммы, регистрируемой одновременно. Представлены аргументы, показывающие, что звуки могут отражать функционально-структурные свойства сокращающейся мышцы.

ЧАСТОТА [Гц]	ИСТОЧНИК КОЛЕБАНИЙ
0.005-1	Локомоции
2-19	Мышечный тремор
20-50	Звуки Остера-Гримальди (О-Г)
60-300	Высокочастотная часть звуков О-Г
$(1 - 3) \cdot 10^3$	Акустический шум трения мышечных структур и конформационных процессов
$10^6 - 10^{10}$	Резонансные акустические колебания мышечных белков

В статье [4] исследована генерация дискретных звуковых импульсов при сокращении мышечных препаратов. Пьезоэлектрический датчик был помещен сбоку от мышцы. Укорочение сопровождалось генерированием серий дискретных звуковых импульсов. Было найдено, что эти импульсы повторяются от сокращения к сокращению с вероятностью 44%. Длительность каждого звукового импульса составляла 400 мкс. Интервал между последовательными импульсами зависит от температуры и составляет (20-40) мс. Средняя акустическая мощность звуков составляла (0.05-0.4) мВ/г или около 1% теплоты, генерируемой в течение сокращения. Дискретность импульсов звука позволяет предположить, что само сокращение состоит из ряда дискретных актов. В статье [6] изучался возможный механизм генерации низкочастотных звуков, произведенных в мышечном препарате. Мышца стимулировалась при постоянной длине. Звук возникал перед началом подъема напряжения и генерировался все

время до падения напряжения. Амплитуда и частота звука как функции длины мышцы и отклик на механическое воздействие как пассивной, так и активной мышцы соответствовали тому, что звуки мышцы вызываются, в основном, поперечными резонансными вибрациями. При сокращении мышцы из-за отсутствия цилиндрической симметрии возникает боковое движение и изгибные вибрации, определяемые как звук. Характерные частоты звуков составляют (60–130) Гц. Данная работа [6] экспериментально частично соответствовала работам [2, 3], хотя выводы авторов различны. В статье [7] рассматриваются акустические сигналы от препаратов скелетной мышцы. Акустические сигналы, механическое напряжение и потенциал действия (возбуждение) были записаны одновременно в течение максимума сокращения при постоянной длине. Звуковая генерация возникает после начала деполяризации мышцы, но до начала развития силы. Акустические сигналы имеют форму радиопульса. Амплитуда акустического сигнала увеличивается с увеличением температуры в диапазоне (7–25) °C аналогично [4]. Амплитуда звука увеличивается с увеличением длины мышцы до 90% оптимальной длины развития силы. Если длина увеличивается дальше, амплитуда уменьшается. Микрофоны располагались на противоположных сторонах мышцы, причем акустические сигналы оказались сдвинуты на 180° по фазе. Эти результаты показывают, что производство звуков дается боковыми осцилляциями мышцы, что соответствует данным [6]. В [8] обсуждаются мышечные звуки на резонансных частотах скелетной мышцы. В течение стационарного сокращения частота звуков вначале увеличивается, затем становится постоянной на плато силы. Механические резонансные частоты, определяемые с помощью вынужденного синусоидального изменения длины на плато силы и при ее последующей релаксации, оказались в том же диапазоне частот, что и звуки (20–140) Гц. В статье [5] исследовались звуки, произведенные здоровой и больной мускулатурой человека (бицепс). Они имели довольно низкие средние частоты: (14–15) Гц у здоровых и 11 Гц у больных с нервномышечными нарушениями. Теоретические подходы к изучению природы звуков мышцы связаны с колебательной моделью мышцы как вязкоупругой активной сплошной среды (макроподход) и с колебательной моделью коллектива миозиновых мостиков (микроподход) [9, 10].

КОЛЕБАНИЯ СОКРАЩАЮЩИХСЯ МЫШЦ ЧЕЛОВЕКА

На низкочастотную часть спектра “звуков мышцы”, по-видимому, влияет фильтрация исходно широкополосных колебаний мышцы резонансной системой, состоящей из датчика (масса) и ткани (упругость), причем резонансные частоты колебаний близки к частотам, полученным в работах [2, 3] для любого датчика с разумными размерами и массой. Исследована зависимость частоты максимума спектральной интенсивности

регистрируемых колебаний мышц от массы регистрирующего датчика. Измерение колебательного давления в мягкой биологической ткани может быть осуществлено с помощью акселерометра. Для регистрации колебаний напряженной мышцы использовались пьезоакселерометры ПАМТ, имеющие равномерную частотную характеристику чувствительности до 1000 Гц с коэффициентом преобразования $30 \text{ мВ}/(\text{м}/\text{с}^2)$, к которым присоединялись дополнительные грузики различной массы. С увеличением массы грузика резонансная частота системы регистрации уменьшалась, и спектры колебаний мышц смещались влево. Экспериментально показано, что спектр колебаний достигает частот порядка 200 Гц. В качестве примера на рис. 1 показан спектр мышечных звуков.

Применена более совершенная методика регистрации, в основу которой положена корреляционная обработка сигналов двух пьезоакселерометров, жестко скрепленных друг с другом и установленных на напряженной мышце. В результате за счет корреляционного подавления шумов удалось зарегистрировать колебания мышц в существенно более широком диапазоне частот. На рис. 2 показана функция когерентности g сигналов двух датчиков, полученная с помощью двухканального анализатора. Эта функция g отображает степень взаимной линейной связи между двумя сигналами. Как видно из графика, спектральные компоненты регистрируются вплоть до частот 1000 Гц. На графике также зафиксированы сигналы на резонансной частоте использованных датчиков в области (2700–3000) Гц. Такой широкий спектр колебаний мышцы трудно связать с развитием мышечного сокращения, т. к. характерные длительности импульсов напряжения и их фронтов составляют время (10–50) мс. Проведено измерение функции частотной когерентности сигналов акселерометра и миограммы. Когерентность близка к единице только до частот порядка 200 Гц. Некоррелированными оказываются и огибающие высокочастотных компонент. Происхождение высокочастотных составляющих

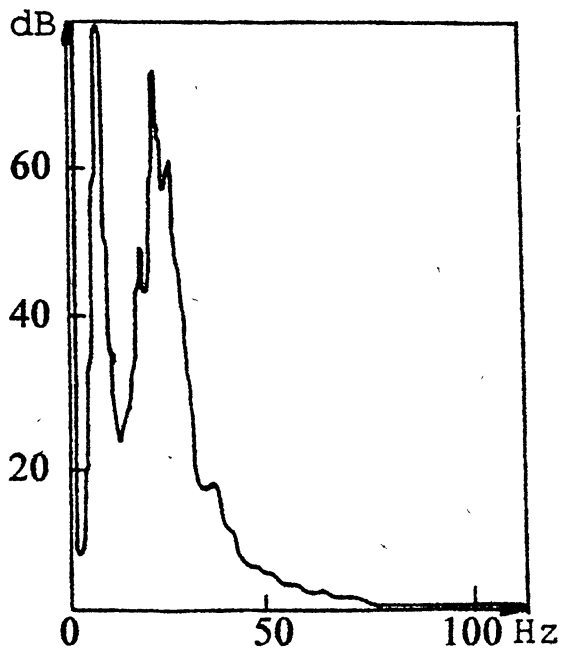


Рис. 1. Пример регистрации звуков от мышцы человека.

Как видно из графика, спектральные компоненты регистрируются вплоть до частот 1000 Гц. На графике также зафиксированы сигналы на резонансной частоте использованных датчиков в области (2700–3000) Гц. Такой широкий спектр колебаний мышцы трудно связать с развитием мышечного сокращения, т. к. характерные длительности импульсов напряжения и их фронтов составляют время (10–50) мс. Проведено измерение функции частотной когерентности сигналов акселерометра и миограммы. Когерентность близка к единице только до частот порядка 200 Гц. Некоррелированными оказываются и огибающие высокочастотных компонент. Происхождение высокочастотных составляющих

спектра может быть связано с конформационными процессами в мышечных белках, но здесь скорее всего — с трением мышечных структур друг о друга. Последнее косвенно подтверждается тем, что колебания укорачивающейся мышцы даже при меньшем ее напряжении нередко имеют более высокий уровень.

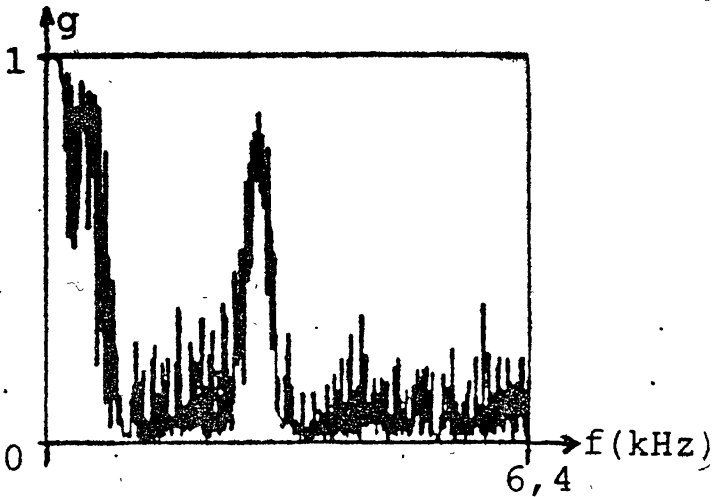


Рис. 2. Широкополосная функция когерентности сигналов колебаний мышцы человека.

КОЛЕБАНИЯ СТИМУЛИРОВАННЫХ МЫШЕЧНЫХ ПРЕПАРАТОВ

Важным является одновременная регистрация структурных изменений в мышце при ее сокращении и генерируемых при этом акустических колебаний ("звуков"). При стимуляции препарата скелетной мышцы электрическими прямоугольными импульсами, следовавшими с частотой (14–170) Гц, с помощью пьезоприемника ПАМТ зарегистрированы колебания в диапазоне частот до 320 Гц (пример, см. рис. 3). При этом в диапазоне частот до 60 Гц сигналы регистрировались и тензометрическим датчиком силы [9]. При стимуляции электрическими импульсами утомленной мышцы уровень звуков падал до уровня шумов аппаратуры. Специально мышцу стимулировали случайным электрическим шумом (равномерным в полосе 0–1.6 кГц). Наблюдали подъем низкочастотных звуков мышцы на фоне шумов аппаратуры (см. рис. 4).

Препарированную мышцу облучали высокочастотным звуком (2.25–3.5) кГц из акустической колонки интенсивностью до 108 дБ в течение нескольких десятков минут. Эффект изменения механического напряжения мышцы наблюдался слабее, чем у Насонова [9]. Облучение акустическим шумом с полосой 20 Гц – 12.8 кГц с максимальным уровнем дало

отклик типа Насонова (сокращение мышцы) на двух препаратах из шести. При этом эффект был воспроизводимым и проверялся по 3-4 раза на каждом препарате (см. рис. 5). Мышцу "озвучивали" при помощи пьезоакселерометра ПАМТ, прикрепленного к концу мышцы (частоты: 100 Гц; 500 Гц; 2.5 кГц; 3 кГц). При помощи дифракции лазерного луча на мышце контролировали изменение структуры (сокращение-расслабление) под действием вибрации. Эффект изменения механического напряжения мышцы был сильнее выражен, чем в предыдущих опытах.

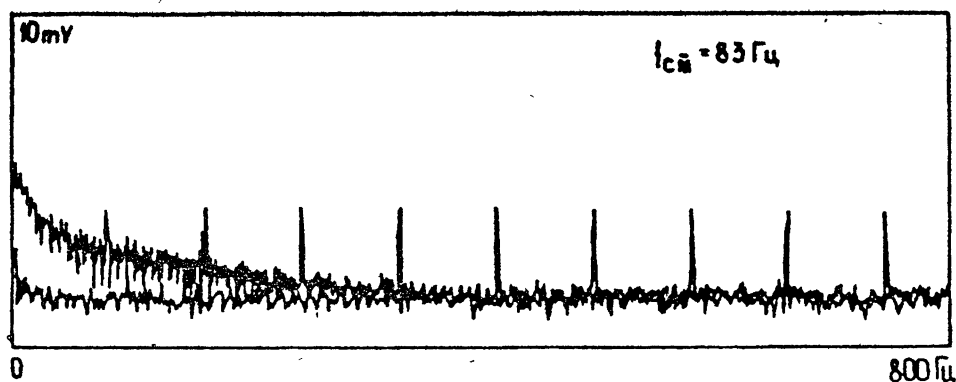


Рис. 3. Звуки мышцы лягушки (верхняя кривая) и шумы аппаратуры. На спектр наложены спектральные компоненты периодической последовательности импульсов электрического возбуждения мышцы.

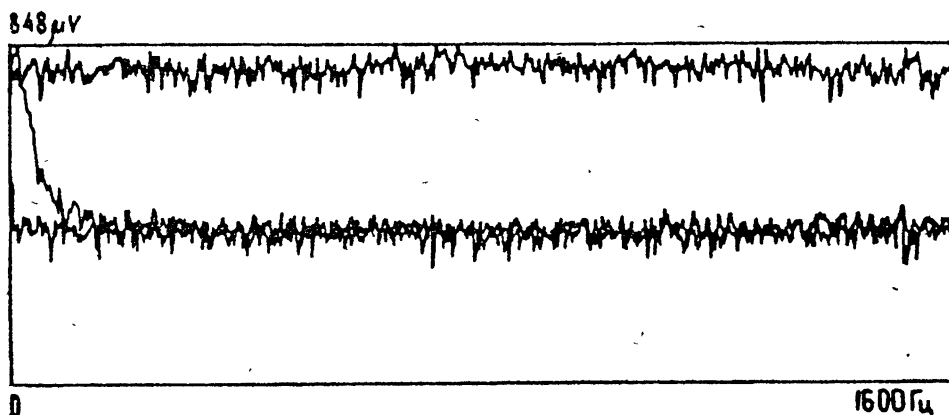


Рис. 4. Тоже, что и предыд. рис.; стимуляция электрическим шумом (самая верхняя кривая).

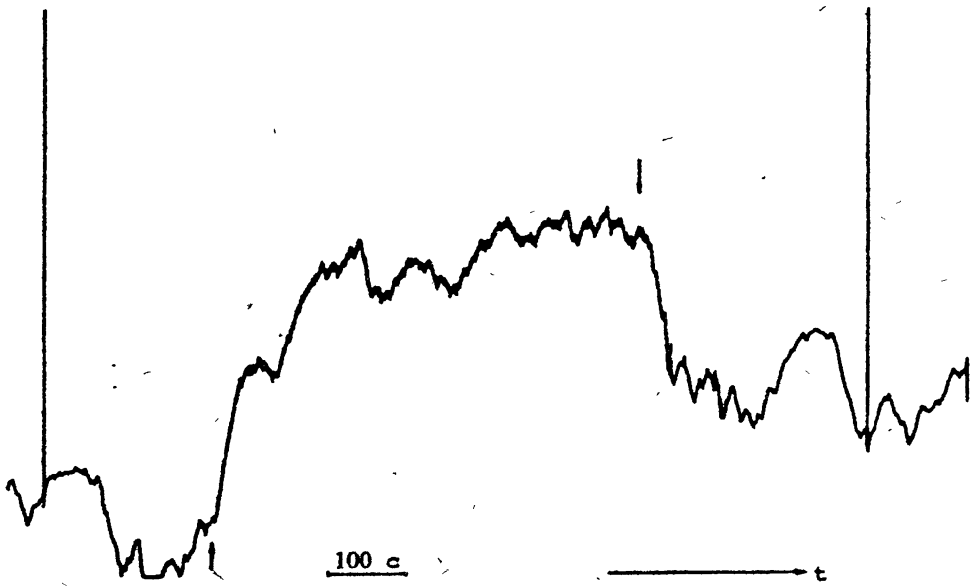


Рис. 5. Пример акустической контрактуры препарата мышцы лягушки. Вертикальные линии — одиночные сокращения.

ОСЦИЛЛЯТОРНАЯ МОДЕЛЬ СОКРАЩЕНИЯ МЫШЦЫ

Вопрос о сопоставлении мышечного сокращения и генерации звуков впервые был поставлен в работе [10], где с помощью рентгеновской и синхротронной дифрактометрии изучались структурные перестройки белковых (актомиозиновых) комплексов в ходе сокращения. В [9] единство происхождения развиваемого мышцей постоянного напряжения и генерируемых ею звуков описывается в модели, использующей представление об основном элементе сократительного аппарата мышцы — миозиновом мостике — как об осцилляторе, для которого учитывается наличие диссипации. Мостик прикреплен одним концом к толстой миозиновой нити, а его другой конец испытывает воздействие силы трения (и, вообще, упругости) со стороны тонкой актиновой нити. Предполагается, что энергия, обеспечивающая мышечное сокращение, выделяется квантовано за счет гидролиза аденозинтрифосфорной кислоты (АТФ). На каждый мостик приходится энергия ϵ одной молекулы АТФ ($\epsilon \approx 3 \cdot 10^{-20}$ Дж). При взаимодействии мостика с активным центром, расположенным на актиновой нити, возбуждаются колебания мостика. Природа этого взаимодействия к настоящему времени окончательно не выяснена. На основании ряда экспериментальных результатов высказано предположение, что оно неконтактно [10]. Собственная частота мостика и его элементов по литературным данным находится в довольно широком диапазоне значений: от (5–70) Гц до 10^6 – 10^{10} Гц [9]. Полярность актина (его анизотропия)

заложена в начальных условиях. Найден импульс силы мостика k , возникающий за счет трения при единичном акте актомиозинового взаимодействия, причем в k войдут дополнительные слагаемые при учете упругого взаимодействия мостика с актином, а также при учете нелинейности (ангармоничности) осциллятора. Средняя частота ω взаимодействия мостика с активным центром составляет (10–10³) Гц. Так как взаимодействие мостиков в мышце с активными центрами происходит несинхронно и их осцилляции успевают затухнуть к моменту последующего взаимодействия, то сила, развиваемая мышцей, содержит как постоянную составляющую, так и пульсации, которые, по существу, и являются “звуками мышц”. Можно показать, что если моменты времени возбуждения распределены строго периодически или же распределение моментов возбуждения подчиняется пуассоновскому закону, то связь средней силы мышцы со средним квадратом пульсаций близка к линейной. В предложенной модели в силу зависимости развиваемой мышцей силы от скорости ее сокращения может иметь место коллективная неустойчивость данной системы и, как следствие этого, невозможность сокращения мышцы с постоянной скоростью. Такой механизм аналогичен “мазерному”, описанному в [11] для коллектива газовых пузырьков в жидкости, с той однако разницей, что в данном случае положительная обратная связь осуществляется по постоянной составляющей, влияющей на скорость укорочения мышцы и, следовательно, на частоту взаимодействия миозиновых мостиков с активными центрами, а не по переменной как в акустике и электронике.

Учет континуальности распределения мостиковых осцилляторов позволил построить модель мышечной ткани как активной сплошной среды. При этом модель дает возможность получить характерный длинноволновый инкремент неустойчивости.

ИНФРАЗВУКОВЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В БИЦЕПСЕ И УПРАВЛЕНИЕ МЫШЕЧНЫМИ ДВИГАТЕЛЬНЫМИ ЕДИНИЦАМИ

Исследовался тремор предплечья в равновесном горизонтальном состоянии при изменяемом статическом нагружении. Для этого к запястью подвешивались грузы массой от 1 до 6 кг. Нагружение конечности производилось через подвесы разной жесткости. Спектр тремора имеет максимум на частоте (2–4) Гц. Для каждого из испытуемых относительное приращение амплитуды флуктуации силы, развиваемой мышцей, пропорционально относительному приращению массы нагрузки на конечность. Это соответствует известному психофизиологическому закону Вебера-Фехнера, количественно связывающему относительные приращения стимула и ощущения. Полученная закономерность позволяет аппроксимировать зависимость амплитуды флуктуации силы, развиваемой мышцей, от массы нагрузки на предплечье степенной функцией, отождествлять эту

зависимость с законом Вебера-Фехнера и использовать ее для оценки управления статическим положением конечности. Основой такого управления является сохранение относительной погрешности реакции конечности на нагружение во всем диапазоне рабочих нагрузок [12].

При использовании нерастяжимого подвеса частота максимума спектра тремора практически не меняется. При использовании растяжимого — увеличивается на (1-4) Гц.

Анализ фазового портрета и функции распределения тремора при целенаправленном поддержании конечности указывает на то, что данный процесс, скорее всего, является шумоподобным.

Предлагается модель произвольных микроколебаний конечности, связанных со случайным включением двигательных единиц, способных развивать чуть большую или чуть меньшую силу. Основой такого подхода являются известные морфологические данные о мышце как совокупности двигательных единиц, данные о зависимости максимальной силы, развиваемой двигательными единицами этих мышц от их номера в порядке рекрутирования, и собственные экспериментальные данные о зависимости интенсивности тремора предплечья от величины и характера нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов N 94-02-06075, 93-02-15946).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gordon G. and Holbourn A. H. S. //J. Physiol. 1948. V. 107. P. 456.
2. Oster G. and Jaffe J.S. //Biophys. J. 1980. V. 30. P. 119.
3. Остер Д. //В мире науки. 1984. N 5. С. 62.
4. Brozovich F. V. and Pollack G. H. //Biophys. J. 1983. V. 41. P. 35.
5. Rhatigan B. A., Mylrea K. C., Lonsdale E., and Stern L. Z. //IEEE Trans. Biomed. Eng. 1986. V. BME-33. N 10. P. 967.
6. Frangioni J. V., Kwan-Gett T. S.; Dobrunz L. E., McMahon T. A. //Biophys. J. 1987. V. 51. P. 775.
7. Barry D. T. //Biophys. J. 1987. V. 51. P. 769.
8. Barry D. T., Cole N. M. //IEEE Trans. Biomed. Eng. 1990. V. 37. N 5. P. 525.
9. Вазина А. А., Сергиенко П.-М., Антонец В. А., Ключков Б. Н. //Сб.: Биоритмические и самоорганизационные процессы в сердечно-сосудистой системе. — Н. Новгород: ИПФ РАН, 1992. С. 58.
10. Vazina A. A., Sergienko P. M. //In: Proceedings of the second International CISM-IFTOMM Symposium "Man under vibration". Moscow, April 8-12, 1985. P. 123.
11. Кобелев Ю. А., Островский Л. А., Соустова И. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 9. С. 1129.

12. Антонец В. А., Ковалева Э. П. //Препринт N 345. — Н. Новгород: ИПФ РАН, 1994.

Институт прикладной физики
РАН, Н. Новгород

Поступила в редакцию
4 апреля 1995 г.

**VIBRO-ACOUSTIC PROCESSES AND
STRUCTURAL VARIATIONS IN MUSCULAR TISSUE**

V. A. Antonets, B. N. Klochkov, E. P. Kovaleva

The article reviews the problems and results obtained in the course of experimental and theoretical studies concerning the vibro-acoustic activity of contracting muscles. Two types of such processes are studied. 1) Acoustic vibrations due to macromolecular recombinations of muscle proteins which are responsible for the contractions. 2) Acoustic vibrations associated with a final accuracy and speed of the receptor-effector system controlling the muscle contraction. The investigation of acoustic vibrations allows to study structural recombinations (conformation variations) in macromolecules during mechano-chemical reactions. As conformational recombinations always accompany chemical reactions of macromolecules, the generation mechanism mentioned can be realized not only in the muscle during its contraction, but also in other macromolecular media. The studies of infrasound vibrations make it possible to consider the quality and errors of the control at different types of muscle loads. As a living body is controlled via perceptions, they can be qualitatively estimated by the parameters of infrasound vibrations.