

УДК 519.21:57

СИНХРОНИЗАЦИЯ В НЕЙРОННОЙ СЕТИ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В СВЯЗЯХ

Т. Б. Лузянина

Рассматривается модель нейронной сети, состоящая из центрального осциллятора и периферических осцилляторов, взаимодействующих с запаздыванием τ по схеме фазовой автоподстройки частоты. Запаздывание в связях между осцилляторами соответствует конечной скорости распространения сигналов вдоль нервных волокон. Исследуется влияние величины τ на синхронизацию всех осцилляторов сети. Показано, что при выполнении определенных условий при конечной величине запаздывания существует набор частот синхронизации в отличие от ситуации без запаздывания, когда существует только одна частота. Получены критерии существования и устойчивости набора решений динамической системы, описывающей динамику такой сети осцилляторов. Исследовано асимптотическое поведение сети при возрастании силы связи между осцилляторами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Результаты последних нейрофизиологических экспериментов свидетельствуют о важной роли колебательных процессов в работе нервной системы. Одна из центральных гипотез состоит в том, что процесс обработки информации в мозге может основываться на синхронизации активности различных нейронных ансамблей [1, 2]. Поэтому в последнее время возрастает интерес к осцилляторным моделям нейронных сетей, применяемым для описания нейрофизиологических процессов [3]. Построение и исследование таких моделей также стимулируется тем обстоятельством, что система взаимодействующих осцилляторов обладает богатым набором сложных динамических режимов.

Рассматриваемая в статье нейронная сеть фазовых осцилляторов была предложена В. И. Крюковым для моделирования внимания [4]. Сеть имеет следующую архитектуру: центральный осциллятор (ЦО) связан с N периферическими осцилляторами (ПО) прямыми и обратными связями. Связи между ПО отсутствуют. Поведение каждого осциллятора описывается одной переменной, фазой. Взаимодействие между ЦО и ПО осуществляется по схеме фазовой автоподстройки частоты. Предполагается, что роль ЦО может играть септо-гиппокампальная область, а ПО —

колонки неокортекса. Внимание интерпретируется как результат синхронизации колебаний в септо-гиппокампальной области (ЦО) и части неокортекса (ПО).

Конечная скорость распространения сигналов вдоль нервных волокон обуславливает передачу информации между нейронами с конечным запаздыванием τ , поэтому естественно учесть это время запаздывания при моделировании биологических нейронных сетей.

В данной работе будет рассмотрено влияние запаздывания в сети фазовых осцилляторов с центральным элементом на синхронизацию осцилляторов сети. Нас будет интересовать режим полной синхронизации сети осцилляторов, когда все осцилляторы имеют общую текущую частоту Ω , а разность фаз ϕ_i между i -ым периферическим и центральным осцилляторами постоянна ($i = 1, 2, \dots, N$).

Динамика сети описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \omega_0 + K \sum_{i=1}^N \sin(\theta_i(t - \tau) - \theta_0(t)), \quad (1)$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + K \sin(\theta_0(t - \tau) - \theta_i(t)), \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где θ_0, ω_0 — фаза и собственная частота ЦО, θ_i, ω_i — фазы и собственные частоты ПО ($i = 1, 2, \dots, N$), K — сила связи между осцилляторами, τ — величина запаздывания.

Режиму полной синхронизации отвечают решения системы (1) вида:

$$\theta_0(t) = \Omega t, \quad \theta_i(t) = \Omega t + \phi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

где $\phi_i = \theta_i(t) - \theta_0(t)$ — константы.

Основные результаты исследования системы (1) для случая $\tau = 0$ приведены в [5]. Было получено, что при выполнении условий $|\omega_i - \Omega| \leq K$ ($i = 1, 2, \dots, N$) система (1) имеет единственное устойчивое решение вида (2), где $\Omega = \left(\sum_{i=1}^N \omega_i + \omega_0 \right) / (N + 1)$, $\phi_i = \arcsin((\omega_i - \Omega)/K)$. Решение системы, соответствующее данному Ω и $\phi_i = \pi - \arcsin((\omega_i - \Omega)/K)$ является неустойчивым. Следовательно, в случае $\tau = 0$ сеть осцилляторов может иметь только одну частоту синхронизации Ω .

Введение в систему (1) запаздывания τ существенно изменяет поведение системы: при фиксированных значениях $K, \tau, \omega_0, \omega_i$ система может иметь несколько устойчивых решений вида (2). В работе [6] авторы рассмотрели частный случай системы (1): систему двух осцилляторов, взаимодействующих с запаздыванием. Эта работа содержит результаты численных экспериментов, демонстрирующие, что число решений системы

возрастает с ростом значений K и τ . Исследуя модель нейронной сети из N осцилляторов как модель внимания, мы получили следующие новые результаты, касающиеся коллективной синхронизации больших ансамблей нейронных осцилляторов, взаимодействующих с запаздыванием:

1. Для любых значений N и τ получены необходимые и достаточные условия полной синхронизации сети осцилляторов;

2. Получен простой критерий устойчивости решений динамической системы, соответствующих режиму полной синхронизации;

3. Исследовано асимптотическое поведение сети при $K \rightarrow \infty$. Полученные аналитические результаты позволяют оценить некоторые характеристики сети как функции параметров K , τ , ω_0 , ω_i при конечных значениях K : число частот синхронизации; значения частот и разностей фаз синхронизовавшихся осцилляторов.

Работа состоит из 5 разделов.

В разделе 2 приводятся условия существования решений (2) системы (1) и определяется область существования таких решений на плоскости (K, τ) . Приводится уравнение для вычисления всех частот синхронизации осцилляторов при фиксированных значениях K , τ , ω_0 , ω_i . Дана асимптотическая (при $K \rightarrow \infty$) оценка количества частот синхронизации.

В разделе 3 исследуется устойчивость найденных решений, сформулирован простой критерий определения устойчивости известного решения. Показано, что при небольших значениях силы связи K между осцилляторами существуют интервалы значений τ , для которых синхронизация осцилляторов невозможна, в то время как для τ , лежащих вне этих интервалов, наблюдается синхронизация осцилляторов на одной или более частотах.

В разделе 4 исследуется асимптотическое поведение разностей фаз синхронизовавшихся осцилляторов. Показано, что рассматриваемая сеть осцилляторов имеет два типа синхронных режимов: либо все периферические осцилляторы синхронизуются с центральным в фазе, либо — в противофазе.

В разделе 5 суммируются полученные результаты.

Доказательства утверждений приведены в приложении.

2. СИНХРОНИЗАЦИЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ НА ОБЩЕЙ ПОСТОЯННОЙ ЧАСТОТЕ

Пусть система уравнений (1) имеет решение вида (2). Подставляя это решение в (1), получим уравнения относительно неизвестных Ω , $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$:

$$\Omega = \omega_0 + K \sum_{i=1}^N \sin(-\Omega\tau + \phi_i),$$

$$\Omega = \omega_i + K \sin(-\Omega\tau + \phi_i), \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Из N последних уравнений найдем

$$\phi_i = \arcsin((\omega_i - \Omega)/K) - \Omega\tau \quad (3)$$

и, подставляя ϕ_i в первое уравнение, получим:

$$f(\Omega) = \Omega - \omega_0 - K \sum_{i=1}^N \sin(\arcsin((\omega_i - \Omega)/K) - 2\Omega\tau) = 0. \quad (4a)$$

Таким образом, нули функции $f(\Omega)$ являются искомыми значениями частоты синхронизации Ω . Зная значения Ω , по формулам (3) можно определить значения ϕ_i и, следовательно, интересующие нас решения системы (1). Мы не будем рассматривать решения системы, соответствующие данному Ω и $\phi_i = \pi - \arcsin((\omega_i - \Omega)/K) - \Omega\tau$, т. к. они являются неустойчивыми (доказательство дано в разделе 3).

Для дальнейших исследований запишем уравнение (4a) в другом виде:

$$f(\Omega) = \Omega - \omega_0 - K r(\Omega) \sin(\phi(\Omega) - 2\Omega\tau), \quad (4b)$$

где $r(\Omega) = (A^2 + B^2)^{1/2}$, $A(\Omega) = \sum_{i=1}^N \sin \gamma_i(\Omega)$, $B(\Omega) = \sum_{i=1}^N \cos \gamma_i(\Omega)$, $\sin \phi(\Omega) = A(\Omega)/r(\Omega)$, $\cos \phi(\Omega) = B(\Omega)/r(\Omega)$, $\gamma_i(\Omega) = \arcsin((\omega_i - \Omega)/K)$.

Определим необходимые и достаточные условия существования решений уравнения (4) и, следовательно, системы (1).

Очевидно, уравнение (4) может иметь решение, если

$$|\omega_i - \Omega| \leq K, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad |\omega_0 - \Omega| \leq KN. \quad (5)$$

Эти неравенства — необходимые условия существования нулей функции $f(\Omega)$. Первые N неравенств показывают, что областью существования решений уравнения (4) является отрезок значений Ω :

$$L = [\omega_{\max} - K, \omega_{\min} + K], \quad (6)$$

где $\omega_{\max} = \max_{i \geq 1} \omega_i$, $\omega_{\min} = \min_{i \geq 1} \omega_i$. Длина этого отрезка $|L| = 2K - \Delta\omega$ ($\Delta\omega = \omega_{\max} - \omega_{\min}$) положительна при

$$K \geq K_c = \Delta\omega/2. \quad (7)$$

Нас интересует поведение системы (1) при больших значениях N и значениях ω_0 , ω_i ($i = 1, \dots, N$) одного порядка. В этом случае последнее неравенство условий (5) будет выполняться для каждого Ω из отрезка (6).

Таким образом, при достаточно большом N условие (7) — необходимое условие существования решений уравнения (4).

Следующее утверждение является достаточным условием существования решений уравнения (4).

Утверждение 1. Для фиксированных значений ω_0 , $\omega_{\min}$, $\omega_{\max}$ существует такое значение K^* ($K^* > K_c$), что уравнение (4) имеет решение для любых значений τ только при $K \geq K^*$. Для каждого фиксированного значения K , $K_c \leq K < K^*$, существует конечное число p_k таких интервалов $I_s = (\tau_1^s, \tau_2^{s+1})$ ($0 \leq s \leq p_k - 1$) значений τ , что для всех $\tau \in I_s$ уравнение (4) не имеет решений.

Значение K^* определяется из уравнения

$$(\pi - 2C_0(K^*) + C_1(K^*))\bar{\omega} - (2K^* - \Delta\omega)(\pi - C_2(K^*)) = 0, \quad (8)$$

где

$$C_0(K) = \arcsin(N(2K - \Delta\omega)/2K\tau),$$

$$C_{1,2}(K) = \arcsin(c_1(K)) \pm \arcsin(c_2(K)),$$

$$c_1(K) = (-K + \omega_{\max} - \omega_0)/K\tau, \quad c_2(K) = (K + \omega_{\min} - \omega_0)/K\tau,$$

$$\bar{\omega} = \omega_{\min} + \omega_{\max}.$$

Выражение для длины интервалов I_s дано в приложении.

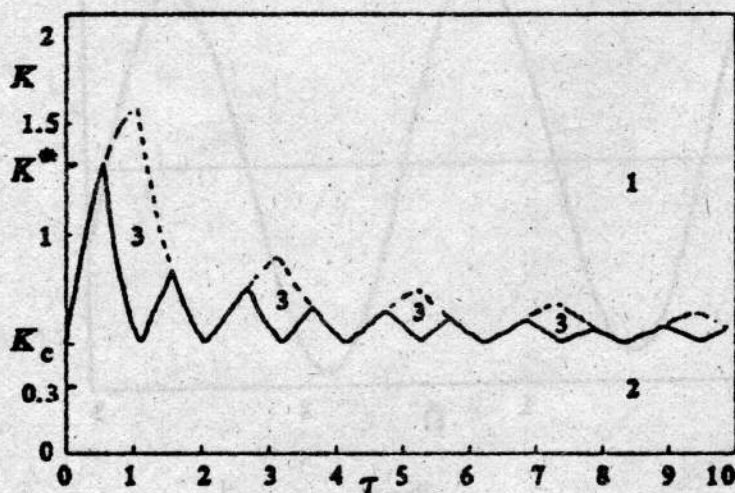


Рис. 1.

На рис. 1 на плоскости (K, τ) сплошная линия отделяет область существования решений (область 1) от области значений K, τ , для которых не

существует решений системы (область 2). В этом примере, как и во всех следующих, $N = 9$, $\omega_0 = 1$, ω_i распределены равномерно на отрезке $[1, 2]$. Иллюстрируя утверждение 1, этот рисунок показывает, что для каждого значения K , $K_c \leq K < K^*$ существуют интервалы значений τ , для которых полная синхронизация невозможна.

Определим влияние значений K , τ и ω_i на число нулей функции $f(\Omega)$.

Утверждение 2. Пусть Ω_n — решение уравнения (4) с номером n (Ω_n упорядочены по возрастанию) и $D_n = \Omega_{n+1} - \Omega_n$. Тогда $\lim_{K \rightarrow \infty} D_n = \pi/2\tau$ для любого n .

Таким образом, все решения уравнения (4) асимптотически (при $K \rightarrow \infty$) отстоят друг от друга на равную величину $D = \pi/2\tau$. Следовательно, число решений q этого уравнения на всей области существования функции $f(\Omega)$ (отрезке длины $|L| = 2K - \Delta\omega$) при $K \rightarrow \infty$ можно определить из следующей асимптотической оценки:

$$q \sim [L/D] = [2(2K - \Delta\omega)\tau/\pi], \quad (9)$$

здесь $[\cdot]$ — целая часть числа. Очевидно, что при $K \rightarrow \infty$ число решений $q \rightarrow \infty$. Численные расчеты показали, что формула (9) достаточно точно определяет число решений уравнения (4) при не слишком малых значениях K и τ .

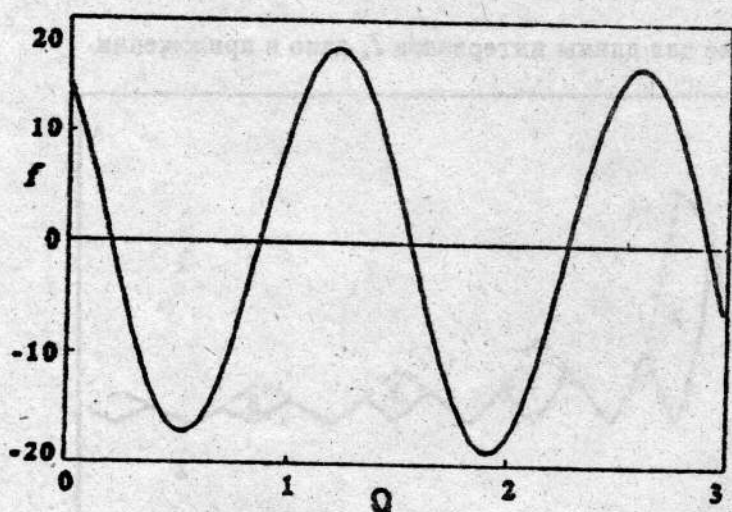


Рис. 2.

Следовательно, с ростом K и τ число решений уравнения (4) возрастает. Уменьшение разброса собственных частот осцилляторов ($\Delta\omega$) также увеличивает число решений q . Таким образом, важной особенностью системы уравнений (1) при $\tau \neq 0$ и фиксированных значениях K ,

τ, ω_0, ω_i является существование набора решений системы, а значит и набора значений частот синхронизации $\Omega(K, \tau, \omega_0, \omega_i)$ всей системы осцилляторов.

На рис. 2 приведен график функции $f(\Omega)$ для $K = 2, \tau = 2$. При данных значениях K, τ областью определения $f(\Omega)$ является отрезок $[0, 3]$, уравнение (4) имеет 5 решений, а сеть осцилляторов — 5 возможных частот синхронизации.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ

Специфика системы (1) позволяет сформулировать следующий простой критерий устойчивости известного решения.

Критерий устойчивости. Решение системы (1) вида (2) устойчиво, если $\sum_{i=1}^N \cos(\phi_i - \Omega\tau) > 0$, где $\phi_i = \arcsin((\omega_i - \Omega)/K) - \Omega\tau$ ($i = 1, \dots, N$).

Этот критерий получен путем применения амплитудно-фазового метода [7] к квазиполиному $\Psi(\lambda)$ линейной системы, полученной линеаризацией системы (1) вблизи известного решения. Квазиполином $\Psi(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\Psi(\lambda) = P_{N+1}(\lambda) + S_{N-1}(\lambda) \exp(-2\tau\lambda),$$

здесь λ — собственные значения линейной части системы (1), P_{N+1}, S_{N-1} — полиномы степени $N+1, N-1$ соответственно. Решение устойчиво, если для всех λ выполняется: $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Если существует хотя бы одно λ такое, что $\operatorname{Re} \lambda > 0$ — решение неустойчиво.

Амплитудно-фазовый метод позволяет определить положение нулей функции на комплексной плоскости. Этот метод основан на теореме о логарифмическом вычете, геометрическое толкование которой приводит к принципу аргумента: пусть комплексно-значная функция $F(\lambda)$ внутри замкнутого контура C комплексной плоскости отлична от нуля и имеет конечное число особых точек типа полюса. Тогда число полных оборотов (Q), которые совершает в плоскости z вектор, идущий из точки $z = 0$ в точку $z = F(\lambda)$, когда точка λ описывает в положительном направлении замкнутый контур C , равно разности между суммой кратностей нулей функции $F(\lambda)$, расположенных внутри контура $C(N_c)$ и суммой кратностей там же расположенных полюсов (P_c): $Q = N_c - P_c$.

Применение общего метода к нашему квазиполиному $\Psi(\lambda)$ существенно облегчает исследование. Вместо квазиполинома $\Psi(\lambda)$ рассмотрим функцию

$$\tilde{\Psi}(\lambda) = \frac{\Psi(\lambda)}{P_{N+1}(\lambda)} = 1 - z(\lambda), \quad \text{где} \quad z(\lambda) = -\frac{S_{N-1}(\lambda)}{P_{N+1}(\lambda)} \exp(-2\tau\lambda).$$

Можно показать, что полиномы $P_{N+1}(\lambda)$ и $S_{N-1}(\lambda)$ не имеют общих нулей. Следовательно, нули функции $\tilde{\Psi}(\lambda)$ и квазиполинома $\Psi(\lambda)$ совпадают. Полюсами функции $\tilde{\Psi}(\lambda)$ являются нули полинома

$$P_{N+1}(\lambda) = \left(-\sum_{i=1}^N a_i - \lambda \right) (-b_1 - \lambda)(-b_2 - \lambda) \dots (-b_N - \lambda),$$

где $a_i = K \cos(\phi_i - \omega\tau)$, $b_i = K \cos(\phi_i + \omega\tau)$.

Нас интересует наличие нулей функции $\tilde{\Psi}(\lambda)$ с положительными действительными частями. Поэтому принцип аргумента нужно применять к следующему контуру C_R : отрезок мнимой оси $[-iR, iR]$ и полуокружность радиуса R с центром в начале координат, расположенная в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Отображение $z(\lambda)$ стягивает образ полуокружности контура C_R при $R \rightarrow \infty$ в точку. Следовательно, необходимо строить лишь образ мнимой оси, проходимой в отрицательном направлении — амплитудно-фазовую характеристику.

Нулям функции $\tilde{\Psi}(\lambda)$ соответствуют точки, в которых $z(\lambda) = 1$. Поэтому, применяя принцип аргумента к функции $z(\lambda)$, надо подсчитать число обходов (Q) амплитудно-фазовой характеристикой не точки $z = 0$, а точки $z = 1$. Система (1) такова, что полиномы $P_{N+1}(\lambda)$, $S_{N-1}(\lambda)$ имеют равные, но противоположные по знаку свободные члены, поэтому $z(\lambda) = 1$ для $\lambda = 0$. Кроме того, несложно проверить, что для системы (1) при всех остальных λ , принадлежащих мнимой оси, $|z(\lambda)| < 1$. Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика ни при каких значениях λ не будет охватывать точку $z(\lambda) = 1$ и для нашей системы всегда выполняется: $N_c = P_c$.

Таким образом, функция $\tilde{\Psi}(\lambda)$ и, следовательно, квазиполином $\Psi(\lambda)$ не имеют корней с положительными действительными частями ($N_c = 0$), если все корни полинома $P_{N+1}(\lambda)$ отрицательны ($P_c = 0$), т.е. $\sum_{i=1}^N a_i > 0$, $b_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Теперь становится понятным, почему мы рассматриваем решения системы (1), соответствующие только $\phi_i = \arcsin((\omega_i - \Omega)/K) - \Omega\tau$: в этом случае $b_i > 0$. Решения системы, соответствующие $\phi_i = \pi - \arcsin((\omega_i - \Omega)/K) - \Omega\tau$ являются неустойчивыми, т.к. в этом случае $b_i = K \cos(\pi - \arcsin((\omega_i - \Omega)/K)) < 0$ и, следовательно, $N_c \neq 0$.

На рис. 3, 4 показано поведение всех решений уравнения (4) с ростом τ для $K = 1$ и $K = 2$ соответственно. Сплошные линии на рисунках соответствуют устойчивым решениям системы (1), точки — неустойчивым. Рис. 3 иллюстрирует также рассмотренный выше факт о существовании областей τ , для которых уравнение (4) не имеет решений. Кроме этого, рис. 3 показывает, что для некоторых областей τ уравнение (4) имеет

решение, но это решение является неустойчивым решением системы (1). Области типа 3 на рис. 1 как раз и соответствуют тем значениям K, τ , для которых система (1) имеет только неустойчивые решения.

Таким образом, при небольших значениях силы связи между осцилляторами синхронизация всех осцилляторов на общей частоте возможна не при любых значениях запаздывания τ . Кроме этого, как видно из рис. 3, 4, значения частоты синхронизации Ω с ростом τ уменьшаются и стремятся к нулю, если нулевое значение частоты входит в интервал возможных частот синхронизации ($\omega_{\max} - K \leq 0$) или достигают предельного значения для данного K : $\Omega = \omega_{\max} - K$. Если нас интересуют все решения системы уравнений (1) при фиксированных значениях $K, \tau, \omega_0, \omega_i$, то достаточно исследовать на устойчивость только первое решение (решения упорядочиваются по возрастанию Ω), т. к. устойчивые и неустойчивые решения чередуются (см. рис. 3, 4).

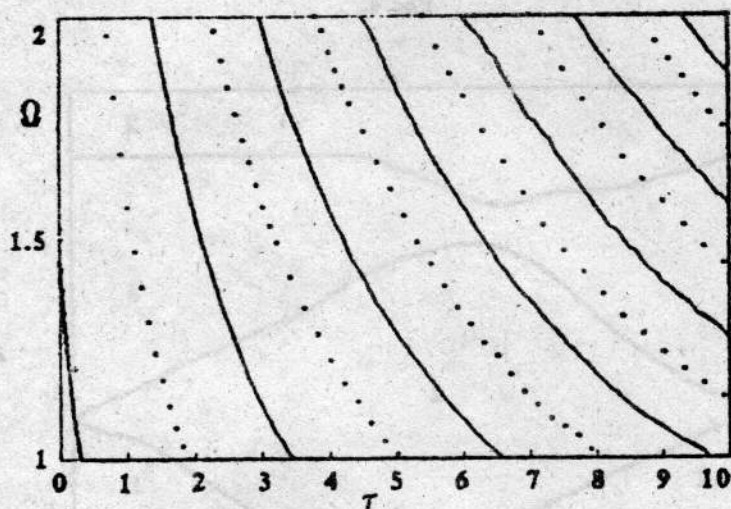


Рис. 3.

Каждое устойчивое решение системы имеет свою область притяжения в пространстве начальных данных. Рассмотрим пример таких областей для случая $K = 2, \tau = 2$. Как было отмечено выше (рис. 2), для данных значений K, τ существует 5 решений. Два из них являются неустойчивыми, а три — устойчивыми, с частотами $\Omega_1 = 0.20, \Omega_2 = 1.56, \Omega_3 = 2.92$. На рис. 5 показаны области притяжения устойчивых решений: область с номером i соответствует решению с частотой Ω_i . В этом примере начальные данные — функции $\theta_0(t), \theta_1(t)$ для $t \in [0, \tau]$ задавались следующим образом: $\theta_0(t) = \Omega_0 t, \theta_i(t) = \Omega_0 t + \Phi_0, (i = 1, 2, \dots, N)$, где Ω_0, Φ_0 — точки плоскости $(\Omega_0 \Phi_0)$ на рис. 5.

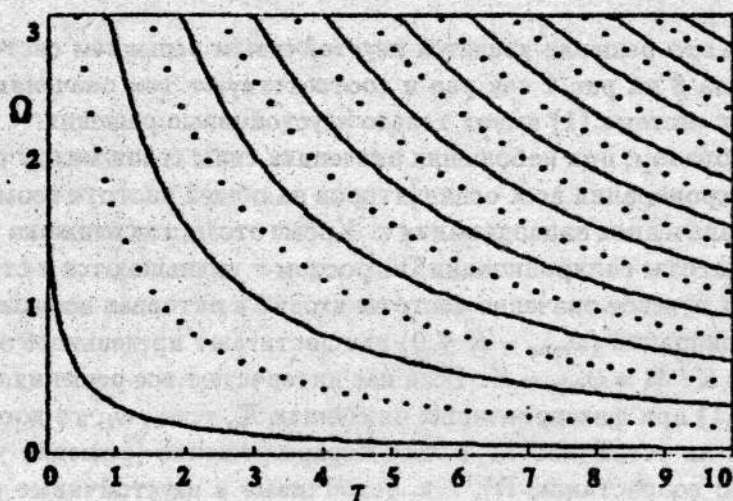


Рис. 4.

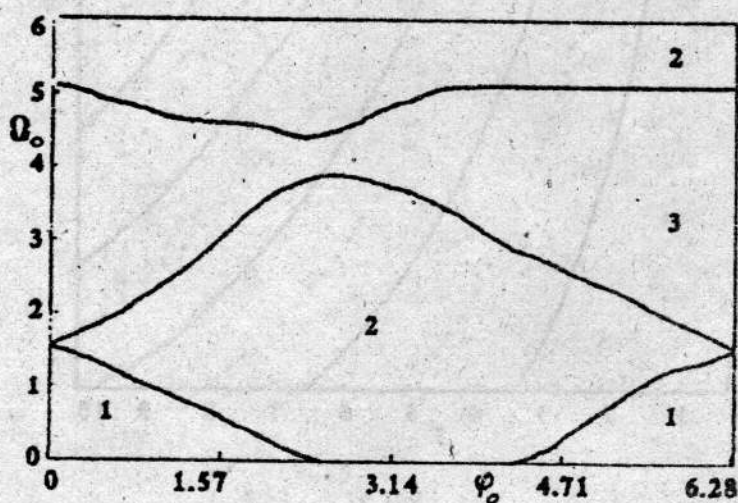


Рис. 5.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РАЗНОСТЕЙ ФАЗ

Рассмотрим поведение разностей фаз ϕ_i , соответствующих решениям системы (1).

На рис. 6 для $K = 2$ показано изменение средней разности фаз $\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i$ с ростом τ для всех решений системы (1). Рис. 7 показывает поведение средней разности фаз для этих же решений при $K = 10$.

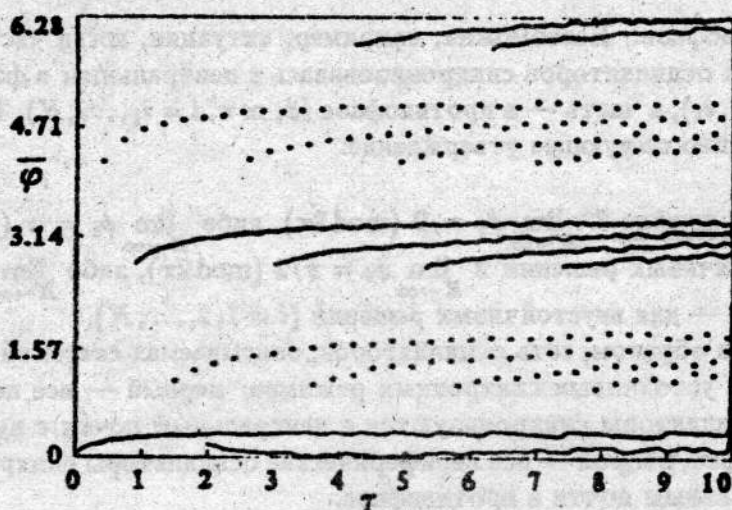


Рис. 6.

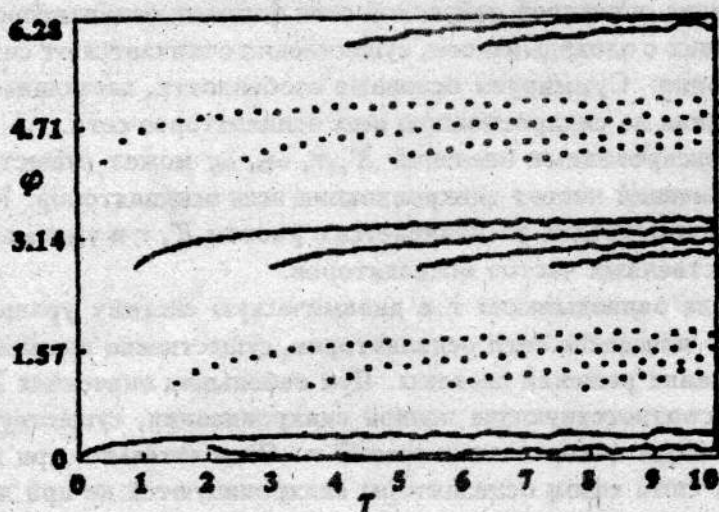


Рис. 7.

Сплошные линии на рисунках соответствуют устойчивым решениям системы, точки — неустойчивым. Поведение разностей фаз φ_i аналогично, разброс между значениями φ_i определяется разбросом собственных частот осцилляторов ω_i . Иллюстрация изменений $\bar{\varphi}$ лишь упрощает рисунок. Как следует из численных экспериментов, для всех устойчивых решений системы выполняется: $\varphi_i \simeq 0 \pmod{2\pi}$, либо $\varphi_i \simeq \pi \pmod{2\pi}$, а для неустойчивых решений: $\varphi_i \simeq \pi/2 \pmod{2\pi}$, либо $\varphi_i \simeq 3\pi/2 \pmod{2\pi}$ ($i = 1, \dots, N$). Это значит, что все периферические осцилляторы синхронизируются с центральным либо почти с нулевой разностью фаз, либо

в противофазе. Невозможна, например, ситуация, когда часть периферических осцилляторов синхронизовалась с центральным в фазе ($\phi_i \simeq 0$, $i = 1, \dots, i_1$), а часть — в противофазе ($\phi_i \simeq \pi$, $i = i_1, \dots, N$). Более того, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 3. $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi_i = 0 \pmod{2\pi}$, либо $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi_i = \pi \pmod{2\pi}$ — для устойчивых решений и $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi_i = \pi/2 \pmod{2\pi}$, либо $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi_i = 3\pi/2 \pmod{2\pi}$ — для неустойчивых решений ($i = 1, 2, \dots, N$).

Таким образом, сеть осцилляторов, описываемая системой (1), имеет два типа устойчивых синхронных режимов: первый — все периферические осцилляторы синхронизируются с центральным почти с нулевой разностью фаз, второй — все периферические осцилляторы синхронизируются с центральным почти в противофазе.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поведение описанной нейронной сети фазовых осцилляторов, взаимодействующих с запаздыванием, существенно отличается от ситуации без запаздывания. Суммируем основные особенности, касающиеся влияния запаздывания на синхронизацию всех осцилляторов сети.

Для фиксированных значений K , τ , ω_0 , ω_i может существовать несколько значений частот синхронизации всех осцилляторов. Количество частот синхронизации увеличивается с ростом K , τ и уменьшением разброса собственных частот осцилляторов.

Введение запаздывания τ в динамическую систему уравнений, описывающую поведение сети осцилляторов, существенно изменяет условия существования решений системы. При небольших значениях K решения системы, соответствующие полной синхронизации, существуют только в определенных интервалах значений τ . Следовательно, при небольших значениях силы связи осцилляторы синхронизируются не при любых значениях запаздывания. Существуют интервалы значений τ , при которых синхронизация невозможна, в то время как для τ , лежащих вне этих интервалов, осцилляторы синхронизируются на одной или более частотах.

С увеличением запаздывания значения частоты синхронизации уменьшаются и стремятся к нулю, если нулевое значение частоты входит в интервал возможных частот синхронизации, иначе — достигают минимальной из возможных частот ($\Omega = \omega_{\max} - K$). В первом случае ($\omega_{\max} - K \leq 0$) количество частот синхронизации монотонно растет с ростом τ (рис. 4). Во втором случае ($\omega_{\max} - K > 0$) такой монотонности нет (рис. 3). Заметим также, что при фиксированном значении силы связи осцилляторы могут синхронизоваться на одной и той же частоте при различных значениях запаздывания τ . Более того, если эти значения τ упорядочить по

возрастанию, то значению τ_{2n} ($n = 0, 1, \dots$) будет соответствовать синхронизация по фазе, а значению τ_{2n+1} — в противофазе, либо наоборот.

Интересным фактом является и описанное выше поведение разностей фаз синхронизовавшихся осцилляторов. Рассматриваемая сеть имеет два типа устойчивых синхронных режимов: первый — все периферические осцилляторы синхронизируются с центральным почти с нулевой разностью фаз, второй — все периферические осцилляторы синхронизируются с центральным почти в противофазе.

В данной работе был рассмотрен режим полной синхронизации сети фазовых осцилляторов. Для моделирования внимания представляет также интерес режим частичной синхронизации, когда часть периферических осцилляторов имеет текущие частоты, близкие к текущей частоте центрального осциллятора, в то время как текущие частоты других осцилляторов далеки от частоты центрального осциллятора. Режиму частичной синхронизации соответствуют квазипериодические и хаотические изменения частоты осцилляторов сети. Аттракторами динамической системы в этом случае будут n -мерные торы и хаотические аттракторы. Как показали численные эксперименты, введение запаздывания в данную систему приводит к сосуществованию некоторого числа аттракторов различных типов: предельных циклов, n -мерных торов и хаотических аттракторов. Организация переходов между сосуществующими аттракторами может быть использована при моделировании процесса переключения внимания с одного объекта на другой. Эта тема является предметом дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Прежде чем перейти к доказательству утверждений, сделаем следующее замечание.

Несложно показать, что для любого Ω из области существования решений уравнения (4) выполняется: $\lim_{K \rightarrow \infty} r(\Omega) = N$, $\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} r(\Omega) = N$. Более того, численные эксперименты показали, что для любых значений K при небольшом разбросе собственных частот ω_i можно считать, что $r(\Omega)$ не зависит от Ω и близко к N . Поэтому при доказательстве утверждений будем предполагать, что $r(\Omega) = \text{const}$. Это предположение упрощает математических анализ и не нарушает сформулированных утверждений.

Доказательство утверждения 1. Пусть Ω^* — решение уравнения (4) при фиксированных значениях K , ω_0 , ω_i . Из уравнения (46) определим значения τ , при которых это решение существует:

$$\tau^s(\Omega^*) = \left(\phi(\Omega^*) - (-1)^s \arcsin \left(\frac{\Omega^* - \omega_0}{K r(\Omega^*)} \right) + \pi s \right) / 2\Omega^*, \quad (s = 0, 1, \dots).$$

Пусть $\tau_1^s = \tau(\Omega_1)$, $\tau_2^s = \tau(\Omega_2)$ — значения τ , при которых уравнение (4) имеет решения $\Omega_1 = \omega_{\max} - K$ и $\Omega_2 = \omega_{\min} + K$ (Ω_1, Ω_2 — границы сегмента L). Очевидно, что $\tau_1^s > \tau_2^s$ и уравнение (4) имеет решения только для $\tau \in \bar{I}_s = [\tau_2^s, \tau_1^s]$. Следовательно, если интервалы $\bar{I}_s$ не пересекаются, то существуют такие интервалы $I_s = (\tau_1^s, \tau_2^{s+1})$, что уравнение (4) не имеет решений для $\tau \in I_s$.

Покажем, что такие интервалы I_s могут существовать при $K \geq K_c$. Пусть, для простоты вычислений, $\omega_{i+1} - \omega_i = \Delta\omega/(N-1)$ ($i = 1, \dots, N-1$), $\bar{\omega} = \omega_{\min} + \omega_{\max}$, $\varepsilon = K - K_c$ ($\varepsilon \geq 0$). Тогда длина интервала I_s определяется следующим образом:

$$\Delta I_s(\varepsilon) = \frac{(\pi - 2C_0(\varepsilon) + (-1)^s C_1(\varepsilon)) \bar{\omega} - 2\pi(2s+1)\varepsilon + 2(-1)^s \varepsilon C_2(\varepsilon)}{(\bar{\omega} - 2\varepsilon)(\bar{\omega} + 2\varepsilon)}, \quad (\text{П.1})$$

где $C_0(\varepsilon) = \arcsin(2N\varepsilon/(\Delta\omega + 2\varepsilon)\tau)$, $C_{1,2}(\varepsilon) = \arcsin(c_1(\varepsilon)) \pm \arcsin(c_2(\varepsilon))$, $c_{1,2}(\varepsilon) = (\bar{\omega} - 2\omega_0 \mp 2\varepsilon)/(\Delta\omega + 2\varepsilon)\tau$.

Очевидно, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta I_s = (\pi + (-1)^s C_1(0))/\bar{\omega}$. Для интересующего нас случая (достаточно большие N и ω_i, ω_0 одного порядка) выполняется: $-\pi < C_1 < \pi$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta I_s > 0$ для любого s . Таким образом, при небольших значениях ε существуют значения s , для которых $\Delta I_s > 0$.

Из (П.1) следует: $\Delta I_s(\varepsilon_1) < \Delta I_s(\varepsilon_2)$, если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и $\Delta I_{s+1}(\varepsilon) < \Delta I_s(\varepsilon)$ для любого ε . Поэтому, существует такое ε^* , что $\Delta I_s(\varepsilon^*) = 0$ для любого s , т.е. при $K \geq K^* = K_c + \varepsilon^*$ уравнение (4) будет иметь решение для любых значений τ . Значение K^* является решением уравнения $\Delta I_0(K^*) = 0$ (т.е. уравнения (8)).

Доказательство утверждения 2. Из (46) следует:

$$\Omega_n = \left[\pi n + \phi(\Omega_n) - (-1)^n \arcsin\left(\frac{\Omega_n - \omega_0}{K\tau}\right) \right] / 2\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда $D_n = \Omega_{n+1} - \Omega_n = (\pi + C_1 - C_2)/2\tau$, где

$$C_1 = \arcsin\left[\left(\sum_{i=1}^N \omega_i - N\Omega_{n+1}\right)/K\tau\right] - \arcsin\left[\left(\sum_{i=1}^N \omega_i - N\Omega_n\right)/K\tau\right],$$

$$C_2 = (-1)^{n+1} \arcsin((\Omega_{n+1} - \omega_0)/K\tau) - (-1)^n \arcsin((\Omega_n - \omega_0)/K\tau).$$

Очевидно, что $\lim_{K \rightarrow \infty} C_1 = 0$ и $\lim_{K \rightarrow \infty} C_2 = 0$. Следовательно, $\lim_{K \rightarrow \infty} D_n = \pi/2\tau$.

Доказательство утверждения 3. Пусть Ω^* — решение уравнения (4) при $\tau = \tau_0^* = 0$. Очевидно, что это уравнение имеет решение Ω^* для ряда

значений τ_n^* (значения τ упорядочены по возрастанию, $n = 0, 1, 2, \dots$). Разности фаз, соответствующие значению Ω^* , определяются согласно (3):

$$\phi_{in}^* = \arcsin((\omega_i - \Omega^*)/K) - \Omega^* \tau_n^*, \quad (i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 0, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что $\lim_{K \rightarrow \infty} ((\omega_i - \Omega^*)/K) = 0$. Из (46) следует: $\lim_{K \rightarrow \infty} \Omega^* \tau_n^* = \pi n/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Рассмотрим уравнение $d\tau/dt = f(\tau)$, где f — функция уравнения (4) при $\Omega = \Omega^*$. Стационарные решения этого уравнения — значения τ_n^* ($n = 0, 1, 2, \dots$). В связи с тем, что устойчивые и неустойчивые решения уравнения чередуются и τ_0^* является устойчивым решением, имеем: $\lim_{K \rightarrow \infty} \Omega^* \tau_n^* = 0 \pmod{\pi}$ ($n = 0, 2, 4, \dots$) — для устойчивых решений и $\lim_{K \rightarrow \infty} \Omega^* \tau_n^* = \pi/2 \pmod{\pi}$ ($n = 1, 3, \dots$) — для неустойчивых решений. Таким образом, для устойчивых решений системы выполняется: $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi_i = 0 \pmod{2\pi}$, либо $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi_i = \pi \pmod{2\pi}$, а для неустойчивых — $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi_i = \pi/2 \pmod{2\pi}$, либо $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi_i = 3\pi/2 \pmod{2\pi}$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Atiya A., Baldi P. // International Journal of Neural Systems, 1989. V. 1. N 2. P. 103.
2. Gray C.M., Konig P., Engel A.K., Singer W. // Nature, 1989. V. 338. P. 334.
3. Борисюк Г. Н., Борисюк Р. М., Казанович Я. Б., Лузянина Т. Б., Турсова Т. С., Цимбалюк Г. С. // Математическое моделирование, 1992. N 1. С. 1.
4. Kryukov V.I. Short-term memory as a metastable state. 5. "Neurolocator", a model of attention. In Cybernetics and Systems (Trappl B., ed.), 1989. P. 999.
5. Kazanovich Ya. B., Kryukov V.I., Luzyanina T.B. Synchronization via phase locking in oscillatory models of neural networks. In Neurocomputers and Attention 1: Neurobiology, Synchronization and chaos (A. V. Holden, V.I. Kryukov, eds) // Manchester and New York: Manchester University Press, 1991. P. 269.
6. Shuster H. G., Wagner P. // Progress of Theoretical Physics, 1989. V. 81. N 5. P. 939.

7. Эльсгольц Л. Е., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.

Институт математических
проблем биологии РАН

Поступила в редакцию
17 ноября 1993 г.

SYNCHRONIZATION IN A NEURAL NETWORK OF PHASE OSCILLATORS WITH TIME DELAYED COUPLING

T. B. Luzyanina

We investigate a neural network model designed as a system of the central oscillator and peripheral oscillators interacting with a time delay τ under phase-locking loop. The delay corresponds to the finite velocity of signal propagation along nervous fibers. We study the synchronization under various values of τ . It is shown that under some conditions for a finite delay time there exist a multitude of synchronization frequencies in contrast to the case without delay where one has at most one solution. The criteria for multiple solutions existence and their stability are found. The asymptotic behaviour under increasing connection strengths is analyzed.