

УДК 537.876.23

СРЕДНЕЕ ЧИСЛО И ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАУСТИК В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ И ЗА СЛУЧАЙНЫМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

Е.З.Грибова, А.И.Саичев

Получены выражения для средней плотности каустик в поперечном сечении и для плотности вероятностей расстояний до каустик за случайным фазовым экраном. Выясняются причины, по которым среднее число каустик на больших расстояниях за экраном постоянно, в то время как плотность вероятностей их появления стремится к нулю.

Известно, что при распространении оптических волн в случайно-неоднородной среде происходит хаотическая фокусировка лучей. Одним из следствий формирования каустических особенностей в поле волны является возникновение новых лучей (многолучевости) [1]. При этом существенную информацию о характере многолучевого распространения волны несет плотность вероятностного распределения каустик. Так, в [2] найдена плотность вероятности расстояния до первой каустики в случайно-неоднородной среде. Замкнутая форма решения, полученная в [2], сконструирована из асимптотик для малых и больших расстояний τ вдоль луча, из которых следует, что вероятность первой фокусировки на малых расстояниях исчезающе мала ($\sim e^{-1/\tau^3}$), затем резко возрастает, а на больших расстояниях спадает несколько быстрее, чем экспонента ($\sim \tau^{-5/2}e^{-\tau}$). Кроме того, в [2] получены средние расстояния до первой каустики и между каустиками в случайной статистически однородной среде.

Целью данной работы является анализ еще одной важной характеристики многолучевого распространения — среднего числа каустик в единице поперечного сечения.

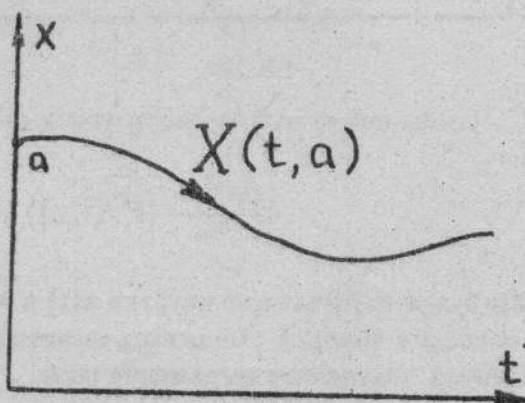


Рис.1а.

Для простоты ограничимся рассмотрением плоской задачи, когда пространство происходит вдоль оси t , а x — единственная поперечная координата. Систему координат (t, x) будем считать фиксированной (эйлеровой), а для удобства введем еще движущуюся вместе с лучом (лагранжеву) координату a , в качестве которой возьмем ту точку оси x , в которую попал луч при $t = 0$ (рис.1а). При этом $X(t, a)$ — уравнение траектории геометрикооптического луча, выходящего из точки с эйлеровой координатой $(t = 0, x = a)$.

Якобиан преобразования эйлеровых координат в лагранжевы

$$J(t, a) = \frac{\partial X(t, a)}{\partial a}$$

имеет физический смысл расходимости лучей, поскольку равен отношению сечения лучевой трубки в плоскости t к сечению при $t = 0$ [1]. В точках каустик лучевая трубка схлопывается, т.е.

$$J(t, a) = 0. \quad (1)$$

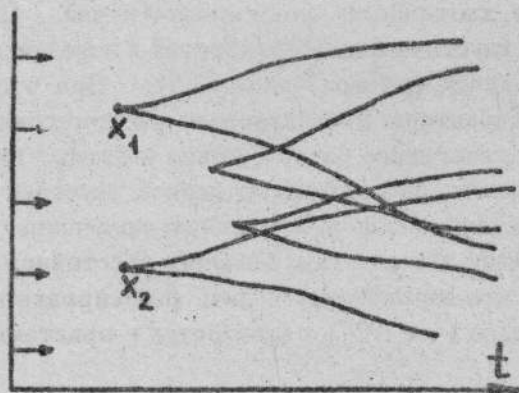


Рис.16.

Пусть $n(t)$ — интересное нас среднее число каустик, которые образуются во всех лучевых трубках на единичном отрезке оси x (на рис.16, заимствованном из [3], каустики проходят, например, через точки с координатами x_1, x_2). Очевидно, что в лагранжевом представлении эти точки соответствуют n корням уравнения (1) a_1, \dots, a_n при фиксированном значении t .

Чтобы найти $n(t)$, воспользуемся свойством дельта-функции

$$\left| \frac{\partial J(t, a)}{\partial a} \right| \delta(J(t, a)) = \sum_{k=1}^{n(t)} \delta(a - a_k). \quad (2)$$

Мы будем искать число каустик $n(t)$ в эйлеровой системе координат, для перехода к которой умножим равенство (2) на $\delta(x - X(t, a))$ и проинтегрируем полученное выражение по a

$$\sum_{k=1}^{n(t)} \delta(x - x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} da \left| \frac{\partial J}{\partial a} \right| \delta(J(t, a)) \delta(x - X(t, a)).$$

Пользуясь определением плотности вероятностей как среднего от дельта-функции [4] и считая среду статистически однородной, при усреднении получим

$$n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} da \langle |P| \delta(J(t, a)) \delta(x - X(t, a)) \rangle, \quad (3)$$

где

$$P = \frac{\partial J(t, a)}{\partial a}.$$

Из выражения (3) следует, что в общем случае для нахождения $n(t)$ нам надо знать совместную плотность вероятностей $W_0(x, j, p; t)$.

Для того, чтобы получить уравнение для W_0 , запишем лучевые уравнения [1]

$$\frac{dX}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = \alpha(t, x), \quad (4)$$

где случайная функция $\alpha(t, x)$ связана с флуктуациями диэлектрической проницаемости $\epsilon(t, x)$ равенством

$$\alpha(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon(t, x)}{\partial x}.$$

Продифференцируем уравнения (4) по a , тогда с учетом обозначений

$$\frac{dV}{da} = U, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \beta(t, x)$$

получим

$$\frac{dJ}{dt} = U, \quad \frac{dU}{dt} = \beta(t, x)J, \quad (5)$$

а из (5) аналогично

$$\frac{dP}{dt} = Q, \quad \frac{dQ}{dt} = \beta(t, x)P + \gamma(t, x)J^2, \quad (6)$$

где

$$\frac{dU}{da} = Q, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \gamma(t, x).$$

Будем считать $\alpha(t, x)$ гауссовым случайным полем с нулевым средним и дельта-коррелированными вдоль оси t флуктуациями. Эти предположения позволяют от уравнений (4)–(6) перейти к уравнению Фоккера-Планда (УФП) для функции $W(x, v, u, j, p, q; t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & -v \frac{\partial W}{\partial x} - u \frac{\partial W}{\partial j} - q \frac{\partial W}{\partial p} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \frac{B}{2} j^2 \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \\ & + \left(\frac{B}{2} p^2 + \frac{C}{2} j^4 \right) \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} - B j^3 \frac{\partial^2 W}{\partial v \partial q} + B p j \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial q}. \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) приняты обозначения

$$D = D_{\alpha\alpha}(0), \quad B = -D''_{\alpha\alpha}(0), \quad C = D^{IV}_{\alpha\alpha}(0),$$

где

$$D_{\alpha\alpha}(x) = 2 \int_{-\infty}^0 \langle \alpha(t, x) \alpha(t + \tau, x) \rangle d\tau.$$

В статистически однородной среде плотность вероятностей не зависит от координаты x . Кроме того, чтобы найти W_0 , нам надо проинтегрировать W по v . Поэтому можно сразу усреднить (7) по x и по v и для функции

$$w(j, u, p, q; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dv W(x, v, j, u, p, q; t)$$

получить УФП

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial j} + q \frac{\partial w}{\partial p} = \frac{B}{2} j^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{B}{2} p^2 + \frac{C}{2} j^4 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} + B p j \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial q}. \quad (8)$$

Нужная нам плотность вероятностей W_0 находится из решения уравнения (8)

$$W_0(j, p; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} du dq w(j, u, p, q; t).$$

Однако решить (8) в общем случае не удастся. Поэтому здесь мы ограничимся более простой задачей: определим среднее число каустик $n(t)$ на случайном фазовом экране.

Пусть сферическая волна излучается из точки с координатами $(t = -R, x = 0)$ и падает на фазовый экран в плоскости $t = 0$. Соответствующие лагранжевы уравнения для траектории X , угла прихода луча V , расходимости J и величины $L = -JU$ аналогичны полученным для общего случая двух поперечных координат в [4]

$$\frac{dX}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = 0, \quad \frac{dJ}{dt} + L = 0, \quad \frac{dL}{dt} = 0, \quad (9)$$

а начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} X(0, a) &= a, & V(0, a) &= v_0(a) + \frac{a}{R}, \\ J(0, a) &= 1, & L(0, a) &= -v'_0(a) - \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9), (10) легко получить выражения для нужных нам величин $X(t, a)$, $J(t, a)$, $|P(t, a)|$:

$$X(t, a) = a \left(1 + \frac{t}{R} \right) + v_0(a)t, \quad (11)$$

$$J(t, a) = 1 + \frac{t}{R} + v'_0(a)t, \quad (12)$$

$$|P(t, a)| = t|v''_0(a)|. \quad (13)$$

Подставим (11)–(13) в (3):

$$\begin{aligned} n(t) &= t \int_{-\infty}^{+\infty} da \left\langle |v''_0(a)| \delta \left(1 + \frac{t}{R} + v'_0(a)t \right) \delta \left(x - a \left(1 + \frac{t}{R} \right) - v_0(a)t \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} da dv_0 dv'_0 dv''_0 |v''_0| \delta \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{R} + v'_0 \right) \delta \left(\frac{x}{t} - \frac{a}{t} \left(1 + \frac{t}{R} \right) - v_0 \right) \cdot \\ &\quad \cdot W(v_0, v'_0, v''_0). \end{aligned}$$

Для статистически однородного экрана отсюда получим

$$n(t) = \frac{1}{1 + t/R} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta |\eta| W \left(- \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{R} \right), \eta \right), \quad (14)$$

где $W(\mu, \eta)$ — совместная плотность вероятностей для v'_0 и v''_0 . Будем считать v_0 гауссовым полем, ковариационная функция которого имеет вид

$$B_{v_0}(x) = \sigma_0^2 \exp(-x^2/l^2),$$

l — характерный масштаб неоднородностей экрана. В этом случае v'_0 и v''_0 также гауссовы с дисперсиями $\sigma_{v'_0}^2 = 2\sigma_0^2/l^2$ и $\sigma_{v''_0}^2 = 12\sigma_0^2/l^2$. Поэтому, подставляя в (14) вероятностное распределение

$$W(v'_0, v''_0) = \frac{1}{2\pi\sigma_{v'_0}\sigma_{v''_0}} \exp \left[- \frac{(v'_0)^2}{2\sigma_{v'_0}^2} - \frac{(v''_0)^2}{2\sigma_{v''_0}^2} \right],$$

найдем окончательно

$$n(z) = \frac{\sqrt{8}}{\pi l} \cdot \frac{1}{1 + \lambda} \cdot \exp \left[- \frac{(1 + \lambda)^2}{4z^2} \right], \quad (15)$$

где введены безразмерные параметры

$$z = \frac{\sigma_0 t}{l}, \quad r = \frac{\sigma_0 R}{l}, \quad \lambda = \frac{z}{R}.$$

Переход в (15) к $\lambda = 0$ соответствует падению на экран плоской волны. Очевидно, что при этом среднее число каустик будет больше, т.к. регулярная расходимость сферической волны препятствует фокусировке лучей.

Получим теперь выражение для плотности вероятностного распределения расстояния до каустик $f(t)$ вдоль фиксированного луча. Из уравнения (1) с учетом (12) найдем точку оси t , где появляется каустика:

$$t^* = -\frac{1}{u + 1/R}, \quad u = v'_0(a).$$

Подставляя в определение плотности вероятностей

$$f(t) = \langle \delta(t - t^*) \rangle$$

значение t^* и усредняя по u с помощью вероятностного распределения

$$W(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right),$$

получим

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi z^2}} \exp\left[-\frac{(1+\lambda)^2}{4z^2}\right]. \quad (16)$$

Таким образом, вероятность появления каустики сразу за экраном экспоненциально мала, затем увеличивается и достигает максимума при $z_0 = (1+\lambda)/2$ (тем ближе к экрану, чем больше радиус кривизны волнового фронта), а при $z \rightarrow \infty$ спадает как z^{-2} .

Полученные выше выражения для средней плотности каустик в поперечной плоскости $t = \text{const}$ (15) и для плотности вероятностей расстояний до каустик (16), казалось бы, противоречат друг другу. Действительно, в то время как среднее число каустик $n(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к постоянному насыщенному значению

$$n(\infty) = \frac{\sqrt{6}}{\pi l(1+\lambda)},$$

плотность вероятностей появления каустик при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Выясним, с чем это связано.

Для этого рассмотрим вначале более простую динамическую модель синусоидального экрана с равномерно распределенной в интервале $[-\pi, \pi]$ начальной фазой φ_0 . Пусть непосредственно за экраном угол наклона луча изменяется по закону

$$v(t=0, x) = A \sin(\alpha x + \varphi_0).$$

В этом случае

$$W(v', v'') = \begin{cases} 0, & |v''| > Aa^2, \\ \frac{x}{\pi^2 \sqrt{A^2 a^4 - (v'')^2 |v''|}}, & |v''| \leq Aa^2, \end{cases}$$

поэтому из (14) при падении плоской волны получим

$$n(t) = \begin{cases} 0, & t < t^* = 1/Aa, \\ x/\pi, & t \geq t^*. \end{cases}$$

Этот результат можно понять с помощью графика реализаций $v(t, x)$ на разных расстояниях (рис.2), из которого видно, что число точек, соответствующих каустикам (т.А на рис., соответствующем t_1), всегда одинаково. Это происходит потому, что несмотря на общее увеличение числа лучей (1 луч при $t = 0$ и 3 луча при t_1) увеличивается и "размер" каждой лучевой трубки, в которой образуется каустика, — участок ОА растягивается. В результате в единичном отрезке число каустик остается постоянным.

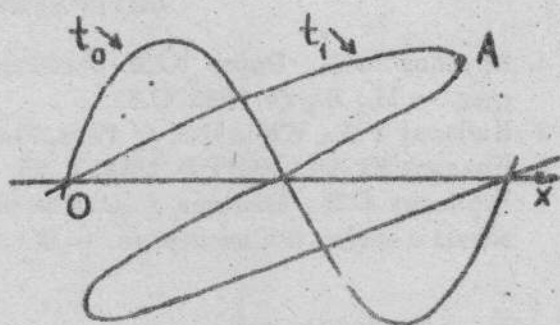


Рис.2.

Заметим, что и в динамической модели сохранение числа каустик происходит при спадающей на больших расстояниях плотности вероятностей их появления:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t^*, \\ 1/(\pi t \sqrt{A^2 a^2 t^2 - 1}), & t \geq t^*. \end{cases}$$

Действительно, из-за прямолинейности распространения волны за экраном независимо от принятой модели в каждой фиксированной лучевой трубке каустика возникает только один раз и на конечном расстоянии от экрана, поэтому $f(\infty) = 0$.

Вернемся снова к распространению за случайным экраном. Здесь, как и в динамической модели, постоянное среднее число каустик определяется конкуренцией двух механизмов: ростом числа лучей с одной стороны и ростом "размера", занимаемого каждой лучевой трубкой, с другой. В [4]

отмечено, что на больших расстояниях от экрана среднее число лучей N растет линейно

$$N \sim \frac{\sigma_0}{l} t.$$

В то же время каждая лучевая трубка расплывается и занимает масштаб

$$L \sim \sigma_0 t.$$

В результате число пересекающихся лучей $\sim 1/l$ и не зависит от продольной координаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. С.33.
2. Kulkarny V.A., White B.S. // Phys. Fluids. 1982. V.25, № 10. P.1770.
3. Кравцов Ю.А. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55, № 3. С.798.
4. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. — М.: Наука, 1990. С.42.

Нижегородская
архитектурно-строительная
академия

Поступила в редакцию
29 сентября 1992 г.

AVERAGE NUMBER AND CAUSTIC PROBABILITY DISTRIBUTION IN A RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM AND BEHIND A RANDOM PHASE SCREEN

E.Z.Gribova, A.I.Saichev

Expressions are obtained for the cross-sectional caustic average density and for the probability density of distances to caustics behind a random phase screen. The reasons have been found out due to which the average number of caustics at a long way off behind a screen is constant while the probability density of their appearance tends to zero.