

УДК 533.951

РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В РЕФРАКЦИОННОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

В.М.Накаряков, В.В.Тамойкин, С.М.Файнштейн

Проведен анализ резонансного параметрического взаимодействия магнитозвуковых мод в плоском плазменном волноводе с неоднородным профилем электронной плотности по поперечной координате. В МГД приближении с помощью решения нелинейной краевой задачи получены укороченные уравнения для комплексных амплитуд триплета МГД волн при произвольном профиле параметров плазмы. Для частного случая параболической зависимости плотности плазмы приведено выражение для инкремента, распадной неустойчивости.

1. К настоящему времени достаточно подробно изучено взаимодействие и самовоздействие различных типов волн в магнитогидродинамических (МГД) волноводах, заполненных однородной средой (см., например, [1-3]). В то же время в ряде природных волноводных плазменных структур, таких как магнитосферные дукты [3], корональные стримеры [5], ионосферный магнитозвуковой волновод [6] и др. поперечная локализация поля волн достигается не наличием резкой границы контакта двух плазм с различными свойствами, а отражением от поперечного плавного градиента параметров плазмы, т.е. приведенные структуры являются рефракционными волноводами. Задача интерпретации наблюдаемых в таких системах явлений требует исследования протекающих в них нелинейных волновых процессов. Основными особенностями волноводного распространения волн являются многомодовость и наличие существенной дисперсии в области длинных волн. При выполнении условий синхронизма возможно трехволновое взаимодействие различных волноводных мод, приводящее к таким явлениям, как распадная неустойчивость мод с высшей частотой, генерация мод с более высоким номером, появление низкочастотных осцилляций взаимодействующих мод.

В данной работе на примере плоского МГД волновода с неоднородным поперечным профилем концентрации плазмы проанализировано взаимодействие магнитозвуковых мод. Для произвольного профиля решена нелинейная краевая задача и выведены укороченные уравнения для комплексных амплитуд волн. Для параболического профиля плотности проанализированы условия синхронного взаимодействия мод, найден инкремент распадной неустойчивости магнитозвуковой моды высшей частоты.

Полученные результаты представляют интерес как для лабораторной, так и космической плазмы.

2. Рассмотрим распространение магнитозвуковых волн в плоском слое замагниченной плазмы. Плотность плазмы $\rho_0(z)$ является функцией поперечной координаты z , оси x и y лежат в плоскости слоя. Направление стационарного магнитного поля \vec{H}_0 совпадает с осью z . Исходная система уравнений идеальной магнитной гидродинамики плазмы низкого давления имеет вид

$$\begin{aligned} \text{rot}[\vec{v} \vec{H}] &= \partial \vec{H} / \partial t, \quad \partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \\ \partial \vec{v} / \partial t + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= [\text{rot} \vec{H}, \vec{H}] / 4\pi \rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{H} — вектор напряженности магнитного поля, \vec{v} — скорость частиц плазмы, ρ — массовая плотность.

Решение системы (1) ищем для малых (пропорциональных μ , $0 < \mu \ll 1$) отклонений переменных задачи от стационарных значений:

$$H_{x,z} = H_0 + \mu h_{x,z}, \quad v_z = \mu U, \quad \rho = \rho_0(z) + \mu \bar{\rho},$$

где индексы x, z обозначают проекции векторов на соответствующие оси; полагаем, что $\partial/\partial y = 0$. Отметим, что при выполнении условия $C_A \gg C_s$ (C_s — звуковая скорость, C_A — скорость волны Альвена) величина напряженности магнитного поля H_0 не зависит от z . Допустимость принятого асимптотического разложения требует, чтобы в области $\rho_0 \rightarrow 0$ отклонение $\bar{\rho}$ от стационарного значения спадало быстрее, чем ρ_0 .

Система (1) допускает приведение к одному уравнению относительно поперечной компоненты скорости плазмы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - C_A^2(z) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] &= \mu \left\{ -C_A^2(z) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{\partial U}{\partial z} dt \left(\int \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dt + \right. \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. \int \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dt \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(U \int \frac{\partial U}{\partial z} dt \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(U \int \frac{\partial U}{\partial z} dt \right) \right] + \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial U}{\partial t} \int \frac{\partial U}{\partial z} dt + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial t} \int U dt - U \frac{\partial U}{\partial z} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где C_A — альвеиновская скорость, соответствующая

$$C_A(z) = (H_0^2 / 4\pi \rho_0 z)^{1/2}.$$

Решение уравнения (2), дополненного граничными

$$U \Big|_{z=z_1, z_2} = 0 \quad (3)$$

(z_1, z_2 — координаты границ) и начальными условиями для функции $U(x, z, t)$, ищем с помощью асимптотической процедуры, описанной в [1]. Представим U в виде ряда

$$U = \sum_{s=1}^r \Psi_s(z) A_s(\mu x, \mu t) \exp i(\omega t - \varkappa_s x) + \mu Q(x, t, \mu x, \mu t, z, \dots) + k.c., \quad (4)$$

где s — номер моды, $\Psi_s(z)$ — функция, определяющая поперечную структуру поля s -ой моды, A_s — комплексная амплитуда, Q — малая нелинейная поправка к решению линейной задачи, ω_s и \varkappa_s — частота и продольное волновое число распространяющейся вдоль волновода s -ой моды.

Подставляя (4) в (2) выделяем члены при различных степенях μ . В нулевом порядке получаем линейную однородную краевую задачу для переменной Ψ_s :

$$\frac{d^2 \Psi_s}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{C_A^2(z)} - \varkappa_s^2 \right] \Psi_s = 0. \quad (5)$$

Решение (5) сводится к отысканию набора собственных функций Ψ_s (они определяют поперечную структуру поля волны) и собственных чисел n_s (определяют дисперсионные соотношения между ω и \varkappa_s). Описанная задача математически аналогична квантовомеханической задаче о поведении частицы в потенциальной яме. Наборы Ψ_s и \varkappa_s для некоторых $C_A(z)$ приведены в [4]. Основным линейным эффектом, возникающим при поперечной стратификации, является многомодовость дисперсионного соотношения (фиксированному \varkappa соответствуют различные ω_s).

Рассмотрим трехволновое нелинейное взаимодействие различных мод при выполнении условий синхронизма:

$$\omega_a + \omega_b = \omega_c, \quad \varkappa_a(\omega_a) + \varkappa_b(\omega_b) = \varkappa_c(\omega_c). \quad (6)$$

Группируя члены, пропорциональные μ , и используя (6), получаем:

$$Q_s'' + \left[\omega_\alpha^2 / C_A^2(z) - \varkappa_\alpha^2(\omega_\alpha) \right] Q_s = F_s(\varkappa_s, \omega_\alpha, z, \mu x, \mu t), \quad \alpha = a, b, c, \quad (7)$$

где F_s — результат подстановки решения линейной задачи в (2), штрихом обозначена производная по z . Условием ограниченности Q является ортогональность правой части (7) к собственным функциям линейной задачи:

$$\int_{z_1}^{z_2} \Psi_s F_s dz = 0. \quad (8)$$

Таким образом, для комплексных амплитуд взаимодействующих мод получаем следующие уравнения:

$$\partial A_{ab} / \partial t + v_r^{(a,b)} \partial A_{a,b} / \partial x = \sigma_{a,b} A_c A_{b,a}^*, \quad (9)$$

$$\partial A_c / \partial t + v_r^{(c)} \partial A_c / \partial x = \sigma_c A_a A_b,$$

где $v_r^{(\alpha)}$ — групповая скорость, σ_α — матричные элементы взаимодействия. Выражения для $v_r^{(\alpha)}$ и σ_α через ω , α_s , $C_A(z)$, Ψ_s весьма громоздки и вынесены в Приложение.

Таким образом, для определения матричных элементов взаимодействия достаточно подставить результаты решения линейной задачи в (П1)–(П2) и провести интегрирование.

3. В ряде конкретных ситуаций зависимость плотности плазмы от поперечной координаты z можно аппроксимировать параболой. При этом сохраняются все основные свойства распространения воли — локализация и многомодовость — и существенно упрощается аналитическое описание.

Рассмотрим распространение магнитозвуковых воли вдоль магнитного поля H_0 , локализованных на вершине параболического профиля плотности плазмы

$$\rho_0(z) = \rho_{00}[1 - 2(z/d)^2],$$

при этом поперечный профиль альвеновской скорости описывается функцией

$$C_A(z) = C_{A0}[1 - 2(z/d)^2]^{-1/2},$$

здесь ρ_{00} и C_{A0} — значения плотности плазмы и альвеновской скорости в центре волновода, d — характерный пространственный масштаб неоднородности.

В этом случае, согласно [4], решение задачи (5), дополненной условиями локализации поля волны в области вершины параболы $z_1 \rightarrow -\infty$, $z_2 \rightarrow +\infty$, выражается через полиномы Эрмита $H_n(z)$:

$$\Psi_s = \sum_s H_s(z\sqrt{2}/w) \exp(-z^2/w^2), \quad (10)$$

где $w^2 = \sqrt{2}dC_{A0}/\omega$ — характерная ширина области локализации s -ой моды. Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = \frac{C_{A0}}{2} \left[\frac{\sqrt{2}(2s+1)}{d} + \left(\frac{2(2s+1)}{d^2} + 4\alpha_s \right)^{1/2} \right]. \quad (11)$$

Графики зависимостей $\omega(\alpha_s)$ изображены на рис.1. Очевидно, что спектр мод исследуемого рефракционного волновода является распадным: Условие допустимости аппроксимации реального профиля плотности плазмы параболой сводится к требованию $d \gtrsim w$, что выполняется уже для моды с $s = 0$. Отметим также, что в модах с нечетными s поперечная скорость U является нечетной функцией от z . Данные моды описывают сосисочные (симметричные относительно центра волновода) волны. Моды с четными s являются изгибными (антисимметричными относительно центра волновода).

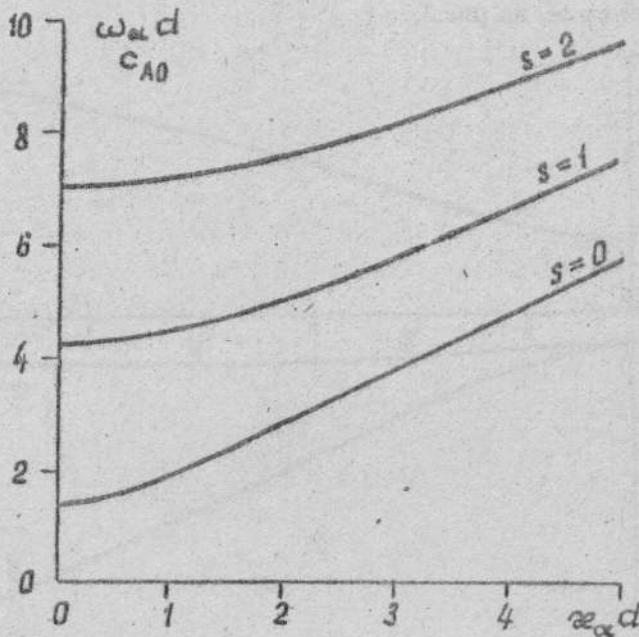


Рис.1.

Рассмотрим процесс взаимодействия первой моды ($s = 1$) с двумя нулевыми ($s = 0$). Из анализа (6) и (11) следует что распад первой моды ($\alpha = c$) возможен только на прямую ($\alpha = b$) и обратную ($\alpha = a$) нулевые. Графики зависимостей α_a и α_b от α_c в данном резонансном триплете приведены на рис.2.

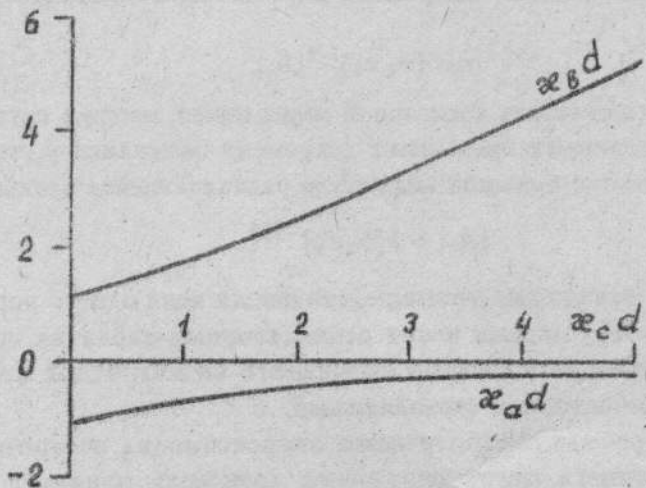


Рис.2.

Выражения для матричных элементов взаимодействия σ_α , получаемые из (П1), (П2) подстановкой требуемых значений из (10) и (11), являются

весьма громоздкими, и поэтому мы ограничимся приведением графиков их зависимостей от α_c на рис.3.

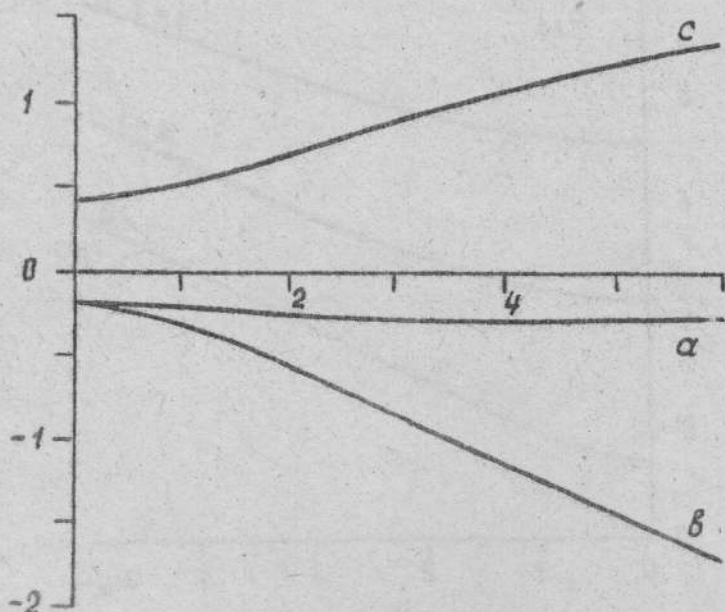


Рис.3.

Решения системы (9) подробно исследованы. В частности, возможна распадная неустойчивость возбуждаемой симметричным источником сосисочной моды на попутную и обратную изгибные, приводящая к формированию в спектре выходящего из волновода излучения низкочастотной составляющей. Инкремент неустойчивости определяется выражением:

$$\gamma = (\sigma_a \sigma_b)^{1/2} |A_c|.$$

Распадная неустойчивость сосисочной моды имеет место в случае, когда приведенный инкремент превышает декремент затухания δ , что выполнимо при достаточно большой амплитуде распадающейся волны:

$$|A_c| > \delta (\sigma_a \sigma_b)^{-1/2}.$$

В случае, когда амплитуды взаимодействующих волн одного порядка, обмен энергией между модами носит осцилляторный характер, что также приводит к появлению в спектре выходящего из магнитной плазменной структуры низкочастотной составляющей.

Принятая в работе параболическая аппроксимация поперечного профиля рефракционного магнитозвукового волновода приводит к незначительным искажениям реальных значений σ_α , т.к. основная энергия рассматриваемых волн сосредоточена в центре волновода, где профиль практически не отличается от параболы.

Исследованная в работе распадная неустойчивость сосисочной магнитозвуковой моды рефракционного волновода вероятно имеет место в любых вытянутых вдоль магнитного поля плазменных неоднородностях.

В заключение приведем некоторые численные оценки для магнитосферных дактов. Согласно [8], характерные поперечные размеры каналов имеют величину $d \sim 300$ км. Учитывая, что для оболочки $L = 3 C_{A0} \approx 2 \cdot 10^3$ км/с, $\Omega_H \approx 1,6 \cdot 10^2$ с⁻¹, а также необходимость соблюдения равенств

$$\sqrt{2} C_{A0} d^{-1} < \omega < \Omega_H$$

(Ω_H — гирочастота ионов), получаем

$$10 \text{ с}^{-1} < \omega < 160 \text{ с}^{-1},$$

т.е. в таких каналах при достаточно большой амплитуде волны наивысшей частоты A_c возможно экспериментальное наблюдение распадной неустойчивости магнитозвуковых волн.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем аналитические выражения для матричных элементов взаимодействия и групповых скоростей магнитозвуковых волн, локализованных в слое неоднородной плазмы с низким газокINETическим давлением:

$$v_r^{(c)} = \alpha_c \int \Psi_c^2 dz \left(\omega_c \int \Psi_c^2 C_A^{-2}(z) dz \right)^{-1},$$

$$\sigma_c = \left\{ \frac{\omega_c}{\omega_a \omega_b} (-\alpha_b^2 I_{c1} - \alpha_a^2 I_{c2} + I_{c3}) + \left[-\alpha_c^2 \left(\frac{I_{c1}}{\omega_a} + \frac{I_{c2}}{\omega_b} \right) + \frac{I_{c4}}{\omega_b} + \frac{I_{c5}}{\omega_a} \right] + \omega_c \left(\frac{\omega_a}{\omega_b} I_{c6} + \frac{\omega_b}{\omega_a} I_{c7} - I_{c8} \right) \right\} (\omega_c I_{c0})^{-1}, \quad (II.1)$$

где

$$I_{c1} = \int \Psi_c \Psi'_a \Psi_b dz, \quad I_{c2} = \int \Psi_a \Psi_c \Psi'_b dz,$$

$$I_{c3} = \int \Psi_c (\Psi'_a \Psi''_b + \Psi''_a \Psi'_b) dz, \quad I_{c4} = \int \Psi_c (\Psi_a \Psi'_b)'' dz,$$

$$I_{c5} = \int \Psi_c (\Psi'_a \Psi_b)'' dz, \quad I_{c6} = \int \Psi_a \Psi_c (\rho_0 \Psi_b)' (\rho_0 C_A^2)^{-1} dz,$$

$$I_{c7} = \int \Psi_c \Psi_b (\rho_0 \Psi_a)' (\rho_0 C_A^2)^{-1} dz, \quad I_{c8} = \int (\Psi_a \Psi'_b + \Psi'_a \Psi_b) \Psi_c C_A^{-2} dz,$$

$$I_{c0} = \int \Psi_c^2 C_A^{-2} dz,$$

$$v_r^{(a)} = \alpha_a \int \Psi_a^2 \left[\omega_a \int \Psi_a^2 C_A^{-2}(z) dz \right]^{-1} dz,$$

$$\sigma_a = \left[\omega_a (\omega_b \omega_c)^{-1} (-\alpha_b^2 I_{a1} + \alpha_c^2 I_{a2} - I_{a3}) + \alpha_a^2 (\omega_b^{-1} I_{a2} - \omega_c^{-1} I_{a1}) + \right. \quad (II.2)$$

$$\left. + \omega_c^{-1} I_{a4} - \omega_b^{-1} I_{a5} - \omega_a (\omega_c \omega_b^{-1} I_{a6} + \omega_b \omega_c^{-1} I_{a7} + I_{a8}) \right] (\omega_a I_{a0})^{-1},$$

где

$$I_{a1} = \int \Psi_a \Psi_c' \Psi_b dz, \quad I_{a2} = \int \Psi_a \Psi_c \Psi_b' dz,$$

$$I_{a3} = \int \Psi_a (\Psi_c' \Psi_b'' + \Psi_b' \Psi_c'') dz, \quad I_{a4} = \int \Psi_a (\Psi_b \Psi_c') dz,$$

$$I_{a5} = \int \Psi_a (\Psi_c \Psi_b')'' dz, \quad I_{a6} = \int \Psi_a \Psi_c (\rho_0 \Psi_b)' (\rho_0 C_A^2)^{-1} dz,$$

$$I_{a7} = \int \Psi_a \Psi_b (\rho_0 \Psi_c)' (\rho_0 C_A^2)^{-1} dz, \quad I_{a8} = \int \Psi_a (\Psi_c \Psi_b' + \Psi_c' \Psi_b) C_A^{-2} dz,$$

$$I_{a0} = \int \Psi_a^2 C_A^{-2} dz,$$

выражения для $v_r^{(b)}$ и σ_b получаются из соответствующих выражений для $v_r^{(c)}$ и σ_c взаимной заменой индексов a и c .

ЛИТЕРАТУРА

1. Дворяковский В.П., Петрухин С.М., Файнштейн С. М. // Изв. АН СССР. ФАО. 1976. Т.14. Вып.1. С.21; Физика плазмы. 1979. Т.5. Вып.1. С.79.
2. Дворяковский В.П., Файнштейн С. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т.24, № 5. С. 533.
3. Гульельми А. В. МГД волны в околоземной плазме. — М.: Наука, 1979.
4. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984.
5. Прист Э.Р. Солнечная магнитогидродинамика. — М.: Мир, 1985.
6. Terley L.T., Lanshof R.K. // J. Geophys. Res. 1966. Т.71. P.1499.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
20 января 1993 г.

**RESONANCE INTERACTION OF MAGNETOACOUSTIC WAVES
IN REFRACTION PLASMA WAVEGUIDE***V.M. Nakoryakov, V.V. Tamoikin, S.M. Feinstein*

An analysis has been made for the resonance parametric interaction of magnetoacoustic modes in a plane plasma waveguide with inhomogeneous profile of the electron density over the transverse coordinate. Short equations have been derived in MHD approximation by the solution of nonlinear boundary problem for the complex amplitudes of MHD wave triplet with arbitrary profile of the plasma parameters. For a particular case of parabolic dependence of the plasma density, an expression is given for the increment of the decay instability.