УДК 538.566.2

СКАЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ: УЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

А.Г.Фокин

В приближении парных взаимодействий (приближение Буррэ) дано решение уравнения Гельмгольца для среднего поля в неограниченной одномерной случайно-неоднородной среде, описываемой нормированной бинарной корреляционной функцией $\varphi(z_1, z_2) = \exp(-|z|/a)$, где a — масштаб корреляций, $z \equiv z_1 - z_2$. Учет макроскопической (обусловленной неоднородностью среды) пространственной дисперсии позволил расширить область применимости приближения Буррэ, включив в нее диапазон ультракоротких волн. Рассчитаны показатели рассеяния $\gamma_\pm$, фазовые $v_\pm$ и групповые $c_\pm$ скорости распространения монохроматических волн, соответствующих двум корням x безразмерных волновых чисел $x_\pm$ дисперсионного уравнения. Показано, что в отличие от трехмерного случая [1] показатель рассеяния имеет одинаковую асимптотическую зависимость от частоты в диапазонах длинных и коротких волн: $\gamma_+ \sim \omega^2 a$. Для каждого из корней исследованы зависящие от длины волны условия применимости приближения парных взаимодействий (M-критерий) и пренебрежимости макроскоскопической пространственной дисперсией (N-критерий). Поле точечного источника представлено в форме суперпозиции расходящихся волн, определяемых корнями x_+ и x_-. Модули амплитуд этих волн достигают максимальных значений на границе диапазонов коротких и ультракоротких волн. В этой же области обнаружены аномальные свойства $\gamma_\pm$, $v_\pm$ и $c_\pm$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное исследование проблем, связанных с распространением волн в одномерных средах, обусловлено, с одной стороны, максимальным упрощением процедуры нахождения решения, а с другой — возможностью аппроксимации некоторых реальных задач одномерными [2, 3].

Решение задачи о распространении скалярных волн в трехмерной случайно-неоднородной среде, представленное в предыдущей работе [1], обозначаемой далее посредством [1], продемонстрировало важность учета макроскопической пространственной дисперсии. Было показано, что M-критерий накладывает на параметры среды ограничения, при удовлетворении которых динамические параметры среды v, c, γ и др. рассчитываются во всем диапазоне длин волн. В переходной (между коротковолновым и ультракоротковолновым диапазонами) области длин волн были обнаружены аномальные свойства всех упомянутых выше динамических параметров.

Ниже, с учетом макроскопической пространственной дисперсии, решается задача распространения скалярных волн в неограниченной непоглощающей случайно-неоднородной одномерной (вдоль оси z) среде. Основное внимание уделяется расчету параметров среднего поля в случаях: 1) монохроматической волны; 2) точечного источника. Как и в случае трехмерной среды оказалось возможным представить весь спектр длин волн в виде нескольких диапазонов, описываемых характерными асимптотическими выражениями для параметров среднего поля. Для каждого из диапазонов проведено исследование M– и N–критериев.

2. УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Рассматривается скалярное монохроматическое поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца

$$LE = 0, \qquad L \equiv \left(\frac{d}{dz}\right)^2 + k_c^2\bar{\varepsilon}, \tag{2.1}$$

$$E = E(z), \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(z), \quad \bar{\varepsilon} \equiv \varepsilon/\varepsilon_c, \quad k_c^2 \equiv \varepsilon_c\omega^2/c_0^2. \tag{2.2}$$

Описывающее материальные свойства среды случайное скалярное поле ε ниже, для определенности, будем называть диэлектрической проницаемостью. Тогда E имеет смысл напряженности электрического поля, связанной с индукцией D равенством $D = \varepsilon E$; k_c — волновое число в однородной среде (среде сравнения), диэлектрическая проницаемость которой равна ε_c, c_0 — скорость света в вакууме.

Осуществляя обозначаемое угловыми скоростями статистическое (по ансамблю реализаций) усреднение (2.1) и вводя равенством

$$\langle D\rangle = \langle\varepsilon E\rangle \equiv \hat{\varepsilon}_*\langle E\rangle \tag{2.3}$$

интегральный оператор эффективной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}_*$, приходим к уравнению Гельмгольца

$$\hat{L}_*\langle E\rangle = 0, \quad \hat{L}_* \equiv \hat{1}\left(\frac{d}{dz}\right)^2 + k_c^2\hat{\bar{\varepsilon}}_*, \quad \hat{1}F \equiv F \tag{2.4}$$

для среднего поля $\langle E\rangle$. Здесь $\hat{1}$ — единичный оператор.

Ниже рассматривается приближение малых флуктуаций, которое для $\hat{\bar{\varepsilon}}_*$ дает [1]

$$\hat{\bar{\varepsilon}}_* = \hat{1}\langle\bar{\varepsilon}\rangle + \langle\bar{\varepsilon}''\hat{Q}_c\bar{\varepsilon}''\rangle, \quad \bar{\varepsilon}'' \equiv \bar{\varepsilon} - \langle\bar{\varepsilon}\rangle, \tag{2.5}$$

где $\widehat{Q}_c$ — интегральный оператор, определяемый при помощи функции Грина уравнения (2.1) при $\bar{\varepsilon} = 1$ [1].

Подстановка (2.5) в (2.4) позволяет рассчитать требуемые параметры среднего поля. Видно, что для нахождения $\hat{\bar{\varepsilon}}_*$ необходимо располагать информацией только о парных (двухчастичных) взаимодействиях между неоднородностями, описываемыми случайным полем $\varepsilon(z)$. Часто приближение (2.5), записанное на языке операторов $\widehat{L}_*$ или $\widehat{H}_* \equiv \widehat{L}_*^{-1}$, называют приближением Буррэ [2]. Исследованию этого приближения посвящены работы Келлера, Татарского и др. (см.обзоры [4, 5]).

3. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Последующее рассмотрение базируется на исследовании корней $x_\pm$ дисперсионного уравнения

$$x^2 - q^2\bar{\varepsilon}_*(x, q) = 0; \quad x \equiv ak_*, \quad q \equiv ak_c, \tag{3.1}$$

определяющих параметры среднего поля

$$\langle E(z)\rangle = E_0 \exp(\mathrm{i}\, k_* z), \qquad k_* \equiv k^{(1)} + \mathrm{i}\, k^{(2)}, \tag{3.2}$$

где $\bar{\varepsilon}_*(x, q)$ — записанный в безразмерных переменных фурье–образ ядра $\bar{\varepsilon}_*(z, \omega)$ оператора $\hat{\bar{\varepsilon}}_*$, а фигурирующий в (3.1) параметр a — масштаб корреляций, определяемый координатной зависимостью бинарной корреляционной функции

$$\langle \bar{\varepsilon}''(z + z_1)\bar{\varepsilon}''(z_1)\rangle \equiv D_{\bar{\varepsilon}}\varphi(|z|/a), \quad D_{\bar{\varepsilon}} \equiv \langle(\bar{\varepsilon}'')^2\rangle \tag{3.3}$$

случайного поля $\bar{\varepsilon}(z)$, предполагаемого статистически изотропным [2].

В приближении (2.5) для функции $\bar{\varepsilon}_*(x, q)$ найдем

$$\bar{\varepsilon}_*(x, q) = \langle\bar{\varepsilon}\rangle + D_{\bar{\varepsilon}}F(x, q), \tag{3.4}$$

$$F(x, q) = \frac{q(q + \mathrm{i})}{x^2 - (q + \mathrm{i})^2}. \tag{3.5}$$

Используя обозначения [1]

$$\langle\bar{\varepsilon}\rangle = 1 \Rightarrow \varepsilon_c = \langle\varepsilon\rangle, \quad D_{\bar{\varepsilon}} = D_\varepsilon \langle\varepsilon\rangle^{-2} \equiv D, \tag{3.6}$$

$$m \equiv qM, \quad M = M(x, q) \equiv DF(x, q), \quad \bar{q}^2 \equiv Dq^2 \tag{3.7}$$

для безразмерного волнового числа x будем иметь

$$x^2 = q^2 + qm, \quad x \equiv x^{(1)} + \mathrm{i}\, x^{(2)}. \tag{3.8}$$

В данной работе в качестве критерия применимости приближения (2.5) (M-критерия) используется неравенство [6]

$$|M(x, q)| \ll 1. \tag{3.9}$$

Следуя [1], в качестве условия пренебрежимости пространственной дисперсией (N-критерия) рассматривается неравенство [1]

$$|N_{\pm}(\bar{q})| \ll 1, \tag{3.10}$$

$$N_{\pm}(\bar{q}) \equiv N(x_{\pm}, q), \quad N(x, q) \equiv q^2 \frac{\partial M(x, q)}{\partial x^2}, \tag{3.11}$$

где $x_{\pm}$ — корни (3.1) для $F(x, q)$ из (3.5). Нарушение (3.10) интерпретируется как необходимость учета пространственной дисперсии при решении уравнения (3.1).

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИАПАЗОНОВ ДЛИН ВОЛН

В общем случае координатная зависимость функции (3.3) достаточно сложна, чтобы получить аналитическое решение дисперсионного уравнения (3.1). Поэтому оказывается целесообразным исследование аппроксимаций этих решений для некоторых характерных диапазонов длин волн. На примере функции [7]

$$\varphi(\rho) = \exp(-\rho), \quad a\rho \equiv |z|,$$

приводящей к (3.5), ниже рассматриваются следующие диапазоны:

1. l–диапазон (длинные волны):

$$q < 1; \tag{4.1}$$

2. ls–переходная область:

$$q \approx q_{ls} \equiv q_{-}; \tag{4.2}$$

3. s–диапазон (короткие волны):

$$1 < q < D^{1/2}; \tag{4.3}$$

4. su–переходная область:

$$\bar{q} \approx \bar{q}_{su} \equiv \bar{q}_{+}; \tag{4.4}$$

5. u–диапазон (ультракороткие волны):

$$1 < D^{-1/2} < q, \tag{4.5}$$

где $q_{\pm}$ определяются равенством (4.12).

4.1. Диапазоны длинных и коротких волн

Общим для трех (l, ls, s) рассматриваемых областей является ограничение $\bar{q} < 1$, накладываемое на безразмерное волновое число $\bar{q}$. Неравенство (4.3) накладывает ограничение

$$4\bar{q}_0^4 \equiv D \ll 1 \tag{4.6}$$

на параметр D, являющейся мерой флуктуаций случайного поля $\tilde{\varepsilon}$. В силу (4.6) для ядра M–массового оператора [2] находим

$$\begin{gathered} M_+(\bar{q}) = \bar{q}_0^2\bar{q}\left[\mathrm{i}\,(\bar{q}^2 + 2\bar{q}_0^4) - \bar{q}_0^2\bar{q}\right](\bar{q}^2 + \bar{q}_0^4)^{-1}, \\ M_-(\bar{q}) = \frac{4\bar{q}_0^2}{\bar{q}}\left(\mathrm{i} - \frac{\bar{q}_0^2}{\bar{q}}\right) - M_+(\bar{q}); \quad M_\pm(\bar{q}) \equiv M(\varkappa_\pm,\, q). \end{gathered} \tag{4.7}$$

Можно показать, что M_+ и M_- удовлетворяют неравенствам

$$|M_+(\bar{q})| = \lambda\bar{q}_0^2\bar{q} \ll 1, \quad \lambda \sim 1, \quad \bar{q} < 1, \tag{4.8}$$

$$|M_-(\mathrm{l})| = \frac{4\bar{q}_0^4}{\bar{q}^2} \gg 1, \quad |M_-(\mathrm{ls})| = 4\sqrt{5}, \quad |M_-(\mathrm{s})| = \frac{2}{q} < 1. \tag{4.9}$$

Здесь буквы l, ls, s вместо аргумента $\bar{q}$ обозначают принадлежность его соответствующей области длин волн. Из (4.9) следует, что корень $\varkappa_-$ уравнения (3.1) удовлетворяет M–критерию (3.9) лишь в s–диапазоне. Определяемые равенством (3.11) функции $N_\pm(\bar{q})$ имеют вид

$$N_\pm = \left(\frac{M_+}{M_-}\right)^{\pm 1} \tag{4.10}$$

Подставляя (4.8), (4.9) в (4.10), получим

$$\begin{gathered} |N_+(\mathrm{l})| = \frac{\bar{q}^3}{2\bar{q}_0^2} \ll 1, \quad |N_+(\mathrm{ls})| = \frac{\sqrt{5}}{20}\bar{q}_0^4 \ll 1, \\ |N_+(\mathrm{s})| = \frac{1}{4}\bar{q}^2 \ll 1, \quad |N_-(\mathrm{s})| = 4\bar{q}^{-2} \gg 1. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Из (4.11) следует выполнение N–критерия (3.10) для корня $\varkappa_+$ и невыполнение его для корня $\varkappa_-$. Последний в силу (4.9) может корректно рассматриваться лишь в диапазоне коротких волн. Однако если мы хотим учесть в s–диапазоне вклад корня $\varkappa_-$, то решение задачи должно проводиться с учетом пространственной дисперсии.

4.2. su–переходная область

В диапазоне длин волн (4.4) представляет интерес аномальное поведение динамических характеристик среды вблизи точки $\bar{q}_{su} \equiv \bar{q}_{+}$, где $\bar{q}_{+}$ — корень уравнения

$$\bar{q}_0^4 - \bar{q}^2 + \bar{q}^4 = 0, \quad 2\bar{q}_{\pm}^2 = 1 \pm (1 - D)^{1/2}, \quad D \leq 1. \tag{4.12}$$

Вместо (4.7)–(4.9) теперь будем иметь

$$M_{\pm}(\bar{q}_{+}) = -2\bar{q}_{-}^2(1 \mp \bar{q}_{-}^{1/2}) + \mathrm{i}\, 2\,\bar{q}_{-}(1 \mp \bar{q}_{-}^{3/2}), \tag{4.13}$$

$$|M_{\pm}(\bar{q}_{+})| = 2\bar{q}_{-}\left(1 \mp \bar{q}_{-}^{3/2} + \frac{1}{2}\bar{q}_{-}^2\right) \approx D^{1/2} \ll 1. \tag{4.14}$$

В силу определения (4.4) su–переходной области неравенства (4.14) удовлетворяют M–критерию (3.9) для обоих корней уравнения (3.1). В то же время для $N_{\pm}$, согласно (4.10) и (4.14), будем иметь

$$|N_{\pm}(\bar{q}_{+})| \approx 1 \mp 2\bar{q}_{-}^{3/2} \approx 1. \tag{4.15}$$

Соотношение (4.15) означает, что в этом диапазоне длин волн оба корня дисперсионного уравнения (3.1) должны рассчитываться с учетом пространственной дисперсии.

4.3. Диапазон ультракоротких волн

В определяемом неравенствами (4.5) u–диапазоне для $m = qM$ получим

$$m_{\pm}(\mathrm{u}) = \left[-\frac{\bar{q}_0^2}{\bar{q}} \pm \bar{q}\left(1 - \frac{1 - \bar{q}_0^4}{2\bar{q}^2}\right) + \mathrm{i}\left[1 \pm \bar{q}_0^2\left(1 - \frac{1 + \bar{q}_0^4}{2\bar{q}^2}\right)\right]\right]. \tag{4.16}$$

Отсюда для $|M|$ будем иметь

$$|M_{\pm}(\mathrm{u})| = \frac{2\bar{q}_0^2}{\bar{q}}|m_{\pm}(\mathrm{u})| \approx 2\bar{q}_0^2 = D^{1/2} < 1. \tag{4.17}$$

Неравенства (4.17) представляют смягченный вариант M–критерия (3.9). Это обстоятельство приводит к необходимости учета большего числа членов ряда

$$x = q(1 + M)^{1/2} \approx q + \frac{1}{2}m - \frac{1}{8q}m^2; \quad M \equiv M^{(1)} + \mathrm{i}\,M^{(2)}. \tag{4.18}$$

Для параметров $N_{\pm}$ из (4.10) и (4.17) находим

$$|N_{\pm}(u)| \approx 1, \quad \lim_{\bar{q}\to\infty} |N_{\pm}(\bar{q})| \equiv |N_{\pm}(\infty)| = 1. \tag{4.19}$$

Соотношение (4.19), подобно (4.15), имеет то же следствие: необходимость учета пространственной дисперсии при расчете обоих корней дисперсионного уравнения (3.1). Корень $æ_+$, для которого при условии $D \ll 1$ M–критерий выполняется во всех диапазонах длин волн, называется реальным, а $æ_-$ — виртуальным [1]. Для виртуального корня M–критерий удовлетворяется лишь в коротковолновых (s, su, u) диапазонах.

5. ПОКАЗАТЕЛЬ РАССЕЯНИЯ, ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ ОДНОМЕРНОЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Далее исследуются некоторые характеристики поля (3.2), рассчитываемые на базе безразмерного волнового числа $æ$ (3.8), удовлетворяющего дисперсионному уравнению (3.1) для эффективной среды.

В качестве количественной меры рассеяния волн вводится безразмерный показатель рассеяния

$$a\gamma \equiv \bar{\gamma} \equiv 2\,\mathrm{Im}\,æ \equiv æ^{(2)}, \tag{5.1}$$

где γ — коэффициент ослабления среднего поля по интенсивности [2, 4, 8–12]. Безразмерные фазовая $\bar{v}$ и групповая $\bar{c}$ скорости определяются равенствами

$$\bar{v} \equiv \frac{q}{æ^{(1)}} = \frac{v_*}{v_c}, \quad \frac{1}{\bar{c}} \equiv \frac{dæ^{(1)}}{dq} = \frac{v_c}{c_*}, \quad v_c \equiv c_0/\varepsilon_c^{1/2}, \tag{5.2}$$

где v_* и c_* — соответственно фазовая и групповая скорости распространения волны (3.2). Использование в (5.1) и (5.2) корней $æ_+$ и $æ_-$ дает параметры $\bar{\gamma}_\pm$, $\bar{v}_\pm$, $\bar{c}_\pm$ для реальной и виртуальной волн. С учетом (3.7), (4.18) перепишем (5.1) и (5.2) в форме

$$\bar{\gamma} = \bar{v}m^{(2)}, \quad \bar{v} = n^{-1}, \quad \bar{c} = \frac{\bar{v}}{1+\xi^{(1)}}, \tag{5.3}$$

где показатель преломления n эффективной среды равен

$$n \equiv \frac{æ^{(1)}}{q} = 1 + \frac{1}{2}M^{(1)} - \frac{1}{8}\left\{[M^{(1)}]^2 - [M^{(2)}]^2\right\} + \frac{1}{16}\left\{[M^{(1)}]^3 - \right.$$

$$\left. - 3[M^{(1)}][M^{(2)}]^2\right\} - \frac{5}{128}\left\{[M^{(1)}]^4 - 6[M^{(1)}]^2[M^{(2)}]^2 + [M^{(2)}]^4\right\}. \tag{5.4}$$

Отметим, что члены третьего и четвертого порядков оказываются необходимыми в случае медленной сходимости ряда (4.18), что имеет место в su– и u–диапазонах, определяемых неравенствами (4.4) и (4.5). При условии этих неравенств указанные члены могут быть отброшены. Введем функции

$$\xi^{(a)} \equiv \frac{d\lg \bar{x}^{(a)}}{d\lg q}, \quad q\bar{x}^{(a)} \equiv x^{(a)}, \quad a = 1, 2, \tag{5.5}$$

первая из которых используется в (5.3), а вторая связана равенством

$$1 + \xi^{(2)} \equiv \nu \equiv \frac{d\lg \bar{\gamma}}{d\lg q} \tag{5.6}$$

с параметром ν, удобным для выявления характерных асимптотических зависимостей для функции $\bar{\gamma}$. Ниже, как и ранее, волновое число q (или $\bar{q}$), являющееся аргументом функций $\bar{\gamma}$, $\bar{v}$, $\bar{c}$, $\xi^{(a)}$ и ν, заменяется буквами, индексирующими соответствующие диапазоны длин волн.

Используя результаты раздела 4.1, получим

$$\begin{gathered} \bar{v}_+(l) = 1 + \frac{1}{2}\bar{q}^2, \quad \bar{\gamma}_+(l) = \bar{q}^2, \quad \xi_+^{(1)}(l) = -\bar{q}^2, \\ \bar{c}_+(l) = 1 + \frac{3}{2}\bar{q}^2, \quad \xi_+^{(2)}(l) = 1 - 4q^2, \quad \nu_+(l) = 2 - 4q^2 \end{gathered} \tag{5.7}$$

в диапазоне длинных волн (4.1);

$$\begin{gathered} \bar{v}_+(ls) \approx 1, \quad \bar{\gamma}_+(ls) = \frac{3}{4}\bar{q}_-^2 = \frac{3}{4}\bar{q}_0^4, \quad \xi_+^{(1)}(ls) = -\frac{1}{4}\bar{q}_0^4, \\ \bar{c}_+(ls) = 1 + \frac{1}{4}\bar{q}_0^4, \quad \xi_+^{(2)}(ls) \approx \frac{2}{3}, \quad \nu_+(ls) \approx \frac{5}{3} \end{gathered} \tag{5.8}$$

в ls–переходной области (4.2);

$$\begin{gathered} \bar{v}_+(s) = 1 + \frac{1}{2}\bar{q}_0^4, \quad \bar{\gamma}_+(s) = \frac{1}{2}\bar{q}^2, \quad \xi_+^{(1)}(s) = \frac{1}{8}\bar{q}_0^4\bar{q}^2, \\ \bar{c}_+(s) = 1 + \frac{1}{2}\bar{q}_0^4\left(1 - \frac{1}{4}\bar{q}_0^2\right), \quad \xi_+^{(2)}(s) = 1 - \frac{2\bar{q}_0^4}{\bar{q}^2}, \quad \nu_+(s) = 2\left(1 - \frac{\bar{q}_0^4}{\bar{q}^2}\right) \end{gathered} \tag{5.9}$$

в s–диапазоне (4.3). Корень $x_-(\bar{q})$ в диапазоне коротких волн удовлетворяет M–критерию (4.9). Однако он не представляет интереса, так как показатель рассеяния $\bar{\gamma}_-$, соответствующий этому корню, намного больше $\bar{\gamma}_+$. Кроме того, вклад этого корня в среднее поле точечного источника (см.раздел 6) ввиду (4.11) и (6.4) очень мал.

Аналогичный расчет, использующий результаты раздела 4.2 для su–переходной области дает:

$$\bar{v}_\pm(su) = 1 + \frac{1}{2}\bar{q}_0^4 \mp \bar{q}_0^5; \quad \bar{\gamma}_\pm(su) = 1 + \frac{1}{2}\bar{q}_0^4 \mp \bar{q}_0^3(1 + \bar{q}_0^3),$$

$$\pm 2\bar{q}_0 \xi_\pm^{(1)}(\mathrm{su}) = 1 - \bar{q}_0^2 - \frac{1}{4}\bar{q}_0^4 \mp \frac{3}{2}\bar{q}_0^5; \quad \nu_\pm(\mathrm{su}) = 1 + \xi_\pm^{(2)}(\mathrm{su}),$$

$$\pm 2\bar{q}_0^3 \xi_\pm^{(2)}(\mathrm{su}) = 1 + \bar{q}_0^2 - \frac{7}{4}\bar{q}_0^4 \mp \bar{q}_0^3(1 - 2\bar{q}_0^2), \tag{5.10}$$

$$\bar{c}_\pm(\mathrm{su}) = \frac{2\bar{q}_0 \bar{v}_\pm(\mathrm{su})}{2\bar{q}_0 \pm [1 - \bar{q}_0^2 - (1/4)\bar{q}_0^4]}.$$

И, наконец, для ультракоротких волн (4.5), согласно разделу 4.3, запишем

$$\bar{v}_\pm(\mathrm{u}) = 1 \mp \bar{q}_0^2 + \frac{3}{2}\bar{q}_0^4 \pm \frac{\bar{q}_0^2}{2\bar{q}^{\,2}}; \quad \bar{\gamma}_+(\mathrm{u}) = 1 + \frac{1}{2}\bar{q}_0^4 \mp \frac{27}{4}\frac{\bar{q}_0^6}{\bar{q}^{\,2}},$$

$$\pm \bar{q}^{\,2} \xi_\pm^{(1)}(\mathrm{u}) = \bar{q}_0^2(1 \mp \bar{q}_0^2 + \bar{q}_0^4); \quad \nu_\pm(\mathrm{u}) = 1 + \xi_\pm^{(2)}(\mathrm{u}),$$

$$\xi_\pm^{(2)}(\mathrm{u}) = -1 \pm \frac{2\bar{q}_0^2}{\bar{q}^{\,2}}(1 \mp \bar{q}_0^2 - \frac{1}{2}\bar{q}_0^4), \tag{5.11}$$

$$\bar{c}_\pm(\mathrm{u}) = 1 \mp \bar{q}_0^2 + \frac{3}{2}\bar{q}_0^4 \mp \frac{\bar{q}_0^2}{2\bar{q}^{\,2}}(1 \mp 2\bar{q}_0^2 + 7\bar{q}_0^4).$$

6. СРЕДНЕЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Ниже для эффективной среды, материальные свойства которой описываются оператором (2.5), рассчитывается поле, создаваемое точечным источником* — функция Грина H_*. В операторной форме уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\hat{L}_* \hat{H}_* = -\hat{I}. \tag{6.1}$$

Фурье-образ ядра $H_*(z, q)$ оператора $\hat{H}_*$ находится из уравнения

$$\left[y^2 - q^2 \bar{\varepsilon}_*(y, q)\right] H_*(y, q) = 1, \tag{6.2}$$

записанного в обозначениях (3.1). В приближении парных взаимодействий (3.4) для нормированной бинарной корреляционной функции $\varphi(\rho) = \exp(-\rho)$, приводящей к (3.5), фурье-образ $H_*(y, q)$ функции Грина H_* представим в форме

$$H_*(y, q) = \frac{H_+(\bar{q})}{y^2 - x_+^2} + \frac{H_-(\bar{q})}{y^2 - x_-^2}, \tag{6.3}$$

*Подобные задачи решались в работах [2] (см.параграф 48), [12] (см.уравнение (1)).

где $\varkappa_{\pm}$ — корни дисперсионного уравнения (3.1), явный вид которых получается с учетом (3.6), (4.18).

Амплитуды $H_{\pm}(\bar{q})$ реальной и виртуальной компонент функции Грина равны

$$H_{\pm} = \mp M_{\mp}(M_{+} - M_{-})^{-1} \tag{6.4}$$

и удовлетворяют равенству

$$H_{+}(\bar{q}) + H_{-}(\bar{q}) = 1. \tag{6.5}$$

Из (6.4) и (4.10) получим

$$\left(\frac{H_{-}}{H_{+}}\right)^{\pm 1} = -N_{\pm}, \quad H_{\pm} = (1 - N_{\pm})^{-1}. \tag{6.6}$$

В пределе $\bar{q} \to \infty$ из (6.6) и (4.16), (4.17), (4.19) имеем:

$$N_{\pm}(\infty) = -1, \quad H_{\pm}(\infty) = 1/2. \tag{6.7}$$

Исследование показывает, что в su-переходной области функции $H_{\pm}(\bar{q})$ проявляют аномальные свойства. При $\bar{q} = \bar{q}_{+}$ они принимают значения

$$H_{\pm}(\bar{q}_{+}) = \frac{1}{2} \pm \frac{(1 + \bar{q}_{-}) - \mathrm{i}\,(1 - \bar{q}_{-})}{4\bar{q}_{-}^{\,3/2}}, \tag{6.8}$$

близкие к экстремальным. Из (6.8) для $|H_{\pm} - 1/2|$ получим

$$|H_{\pm}(\bar{q}_{+}) - 1/2| = (1 + \bar{q}_{-}^{2})^{1/2}(2\bar{q}_{-})^{-3/2}, \tag{6.9}$$

что вместе с (4.6) дает

$$\left|H_{\pm}(\bar{q}_{+}) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1 - (1/4)\,\bar{q}_0^{4}}{(2\bar{q}_0^{2})^{3/2}} \approx (2\bar{q}_0^{2})^{-3/2} \gg 1. \tag{6.10}$$

Переходя от фурье-образа (6.3) к оригиналу, запишем

$$H_{*}(z, q) = \frac{\mathrm{i}\,a}{2q}\left[\frac{H_{+}}{\bar{\varkappa}_{+}} e^{\mathrm{i}\rho\varkappa_{+}} + \frac{H_{-}}{\bar{\varkappa}_{-}} e^{\mathrm{i}\rho\varkappa_{-}}\right], \quad q\bar{\varkappa}_{\pm} \equiv \varkappa_{\pm}, \tag{6.11}$$

то есть в общем случае функция Грина представима суперпозицией двух монохроматических волн, параметры которых определяются комплексными волновыми числами $\varkappa_{+}$ и $\varkappa_{-}$. В диапазоне длинных волн ($q \to 0$) из (6.11) и раздела 5 находим

$$H_{*}(z, q) = \mathrm{i}\,\frac{aH_{+}(\mathrm{l})}{\varkappa_{+}(\mathrm{l})} \exp[\mathrm{i}\,\rho\varkappa_{+}(\mathrm{l})], \quad \varkappa_{+}(\mathrm{l}) \approx q + \mathrm{i}\,\frac{\bar{q}^{2}}{2}. \tag{6.12}$$

В другом предельном случае — ультракоротких волн ($\bar{q} \to \infty$) вместо (6.12) будем иметь

$$H_*(z, q) = \frac{\mathrm{i}}{2k_c} \exp\left[\left(\mathrm{i}\, q - \frac{1}{2}\right)\rho\right] \cos\frac{\pi|z|}{\Lambda}, \quad \Lambda \equiv \frac{2\pi a}{q} D^{-1/2}. \tag{6.13}$$

В отличие от (6.12) в (6.13) появляется модулирующий множитель, период которого $2\Lambda \gg 2\lambda_c$, где $\lambda_c \equiv 2\pi a/q = 2\pi/k_c$ — длина волны в среде сравнения. В рассматриваемом случае материальные свойства этой среды в силу (3.6) описываются параметром $\varepsilon_c = \langle\varepsilon\rangle$, полученным статистическим усреднением случайного поля.

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Проведенное исследование продемонстрировало важность учета пространственной дисперсии при решении динамических задач. В приближении парных взаимодействий получено решение дисперсионного уравнения (3.1), справедливое для произвольных длин волн. При помощи параметров a (пространственный масштаб корреляций (3.1), (3.3)) и D (безразмерная дисперсия поля ε (3.3), (3.6), (3.7)) удалось представить весь спектр длин волн в виде суперпозиции пяти диапазонов (4.1)–(4.5). Для каждого из введенных диапазонов исследованы критерии: 1) применимости приближения парных взаимодействий (M–критерий (3.9)); 2) пренебрежимости пространственной дисперсией (N–критерий (3.10)). Показано, что при условии $D^{1/2} \ll 1$ M–критерий выполняется для реального корня x_+ во всем спектре волн, а для виртуального x_- — лишь в его коротковолновой части, включающей s–диапазон. Здесь же наблюдается нарушение N–критерия для корня x_+, свидетельствующее о необходимости учета пространственной дисперсии. В разделе 6 была установлена связь (6.5), (6.6) между амплитудами $H_\pm$ и параметрами $N_\pm$. Перепишем ее в виде

$$H_- = 1 - H_+ = -\frac{N_+}{1 - N_+} = -N_+ H_+. \tag{7.1}$$

Отсюда видно, что выполнение N–критерия (3.10) приводит к малости H_- :

$$|N_+| \ll 1 \Rightarrow |H_-| \approx |N_+| \ll 1. \tag{7.2}$$

Таким образом, до тех пор, пока можно пренебрегать пространственной дисперсией, вклад виртуального корня в среднюю функцию Грина H_* (6.3) пренебрежимо мал. И обратно: как только исследуемые волны попадают в коротковолновый (согласно шкале (4.1)–(4.5)) диапазон, где для реального корня необходим учет пространственной дисперсии, так вкладом виртуального корня в H_* пренебрегать нельзя. Следовательно, соотношение

$$|N_+| \sim 1 \tag{7.3}$$

является критерием необходимости учета как пространственной дисперсии, так и виртуальной составляющей средней функции Грина.

Расчет динамических характеристик для одномерной среды обнаруживает много сходства с решением подобной задачи в случае трехмерной среды [1]. Это и классификация диапазонов (4.1)–(4.5) и асимптотические свойства почти всех параметров:

$$\bar{v}_\pm,\ \bar{c}_\pm,\ \bar{\gamma}_\pm,\ \xi_\pm^{(1)},\ \nu_\pm,\ N_\pm,\ H_\pm,\ H_*.$$

Аномальное поведение динамических параметров $\bar{v}$, $\bar{c}$, $\bar{\gamma}$, $\xi^{(a)}$, $H_\pm$ в su–переходной зоне в отличие от [1] проявляется сильнее, однако обнаруживается при этом же значении волнового числа: $\bar{q} \approx \bar{q}_+$. Как видно из (5.2)–(5.5), параметр $\xi^{(1)}$ играет существенную роль в определении групповой скорости. Из (5.10) следует, что для корня x_+ имеет место нормальная ($\xi_+^{(1)} = d\lg n_+/(d\lg q) > 0$) дисперсия, а для корня x_- — аномальная ($\xi_-^{(1)} < 0$), когда групповая скорость $\bar{c}_-$ может принимать значения: $\bar{c}_- \gg \bar{v}_-$ или $\bar{c}_- < 0$. В обоих случаях быстрое изменение волнового числа в зависимости от частоты делает неприменимым первое приближение теории дисперсии. При этом само определение групповой скорости требует более внимательного рассмотрения [13, 14].

Это замечание справедливо также и в отношении скорости $\bar{c}_+$ в su–переходной области, когда, согласно (5.10), имеем

$$\bar{c}_+(\bar{q}_+) \approx 2\bar{q}_0\bar{v}_+(\bar{q}_+) \approx 2\,\bar{q}_0 < 1. \tag{7.4}$$

Значение (7.4) близко к минимуму $\bar{c}_+(\bar{q})$. Эффект замедления групповой скорости обусловлен обратным когерентным рассеянием. В сравнение с трехмерным случаем его проявление в одномерной случайно–неоднородной среде оказывается более сильным. Согласно (5.3) параметр $\xi^{(1)}$, обозначенный в [1] посредством ν_1, служит количественной мерой провала

$$\frac{\bar{v}}{\bar{c}} - 1 = \xi^{(1)} = \xi^{(1)}(\bar{q}) \tag{7.5}$$

на кривой $\bar{c} = \bar{c}(\bar{q})$. Из (5.10) и (5.10) [1] имеем

$$\xi_+^{(1)}[1] \approx (2\bar{q}_0)^{-1} = (4D)^{-1/4}, \tag{7.6а}$$

$$\xi_+^{(1)}[3] \approx \frac{1}{2}\bar{q}_0 = \left(\frac{D}{64}\right)^{1/4}, \tag{7.6б}$$

соответственно для одномерной и трехмерной сред. Из (7.6а), (7.6б) находим

$$\xi_+^{(1)}[3] = \bar{q}_0^2\xi_+^{(1)}[1] \ll \xi_+^{(1)}[1]. \tag{7.7}$$

Ввиду качественной близости кривых $\bar{c}_+(\bar{q})$ в обоих случаях характер зависимости $\bar{c}_+(\bar{q})$ для одномерной среды может быть представлен посредством рис.1 [1].

Влияние размерности среды на частотную зависимость показателя рассеяния $\bar{\gamma}$ наиболее существенно в случае длинных волн (4.1). Используя, как и в (7.6), в качестве аргумента размерность среды, согласно (5.7) и (5.5) [1] запишем

$$\bar{\gamma}_+[1] = q^2 D, \quad \bar{\gamma}_+[3] = 2q^4 D; \quad q < 1. \tag{7.8}$$

В s–диапазоне из (5.9) и (5.7) [1] имеем

$$\bar{\gamma}_+[1] = \frac{1}{2}\bar{q}^2, \quad \bar{\gamma}_+[3] = \left(1 - \frac{1}{2}\bar{q}_0^4\right)\bar{\gamma}_+[1]; \quad \bar{q} < 1 < q. \tag{7.9}$$

Наконец, в диапазоне ультракоротких волн (5.11) и (5.9) [1] имеют вид

$$\bar{\gamma}_\pm[1] = 1 + \frac{1}{2}\bar{q}_0^4, \quad \bar{\gamma}_\pm[3] = 1 \mp \bar{q}_0^2; \quad 1 < \bar{q} < q. \tag{7.10}$$

Отметим, что характер частотной зависимости $\bar{\gamma}_+[1]$ в l– и s–диапазонах согласуется с результатами, полученными Рытовым [15] при исследовании электромагнитных свойств сред с периодической слоистой структурой.

Расчет показателя рассеяния $\bar{\gamma}$ посредством уравнения (2.4) или эквивалентного ему (6.1) приводит к завышению $\bar{\gamma}$ за счет вклада, обусловленного флуктуациями фазы волны [9, 16]. Частотная зависимость этого вклада $\Delta\bar{\gamma}_+$ в области длин волн, охватывающей l– и s–диапазоны, была рассчитана В.Л.Бреховских [12] для простейших типов одномерных случайно-неоднородных сред. Из формулы (29) [12] следует

$$\Delta\bar{\gamma}_+[1] = \alpha\,\bar{q}^2, \quad \bar{q} < 1, \tag{7.11}$$

где α — константа, определяемая статистическими свойствами среды. Поправка (7.11) согласуется с (7.8) и (7.9), поскольку не меняет качественного характера функции $\bar{\gamma}_+(\bar{q})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фокин А.Г. // ЖЭТФ. 1992. Т.101. С.67.
2. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. — М.: Наука, 1978.
3. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
4. Рыжов Ю.А., Тамойкин В.В. // Изв.вузов. Радиофизика. 1970. Т.13, № 3. С.356.

5. Барабаненков Ю.Н., Кравцов Ю.А., Рытов С.М., Татарский В.И. // УФН. 1970. Т.102. С.3.
6. Финкельберг В.М. // ЖЭТФ. 1967. Т.53. С.401.
7. Pekeris C.L. // Phys.Rev. 1947. V.71. P.268.
8. Рыжов Ю.А., Тамойкин В.В., Татарский В.И. // ЖЭТФ. 1965. Т.48. С.656.
9. Канер Э.А. // Изв.вузов. Радиофизика. 1959. Т.2, № 5. С.827.
10. Bourret R.C. // Nuovo Cimento. 1962. V.26, № 1. P.1.
11. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. // Изв.вузов. Радиофизика. 1989. Т.32, № 2. С.176.
12. Бреховских В.Л. // Изв.вузов. Радиофизика. 1990. Т.33, № 6. С.680.
13 Ярив А., Юэ П. Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987.
14. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. — М.: Наука, 1990.
15. Рытов С.М. // ЖЭТФ. 1955. Т.29. С.605.
16. Чернов Л.А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. — М.: Изд.АН СССР, 1958.

Поступила в редакцию
23 июля 1992 г.

SCALAR WAVES IN AN ONE-DIMENSIONAL NONHOMOGENEOUS MEDIUM: THE INVOLMENT OF THE SPATIAL DISPERSION IN THE PAIR INTERACTION APPROXIMATION

A.G.Fokin

In the pair — interaction approximation, also called the Bourret approximation the solution is given of the Helmholtz equation for the mean field (averaged over an ensemble of realizations) in an unbounded one — dimensional (along z–axis) randomly inhomogeneous medium, described by the normalized binary correlation function $\varphi(z_1, z_2) = \exp(-|z|/a)$, where a is the spatial scale of correlations and $z \equiv z_1 - z_2$. Taking into account the macroscopic spatial dispersion (caused by the nonhomogeneity of the medium) enables us to extend the region of the applicability of the Bourret approximation, including in it the VHF waves range. The scattering indices $\gamma_\pm$ the phase $v_\pm$ and group $c_\pm$ velocities for the propagation of monochromatic waves corresponding to two roots $x_\pm$ of the dispersion equation (where x — is the dimensionless wave number) are calculated. It is showh, that unlike three — dimensinal case [1], the scattering index has just the same asymptotic dipendence in long waves and short waves ranges: $\gamma_+ \sim \omega^2 a$. For each of the roots we studied

the frequency dependent conditions: a) applicability of the pair–interaction approximation (M–criterion), and b) possibility of neglecting the macroscopic spatial dispersion (N–criterion). The point — source field is represented as a superposition of diverging waves with parameters, which are determened by roots x_+ and x_-. The amplitude modules of these waves reach the maximum values at the boundary of the short and VHF ranges. In this region the anomalous properties of $\gamma_\pm$, $v_\pm$ and $c_\pm$ are observed.