

УДК 621.372.853

ПЛОСКО-ПОПЕРЕЧНЫЕ СТЫКИ КРУГЛЫХ И СЕКТОРНЫХ ВОЛНОВОДОВ

В.Н.Почеряев, Л.В.Скрыпник

Рассматривается аналитическое решение задачи о плоско-поперечных стыках круглых и секторных волноводов. С этой целью получено выражение для интеграла с конечными пределами интегрирования от произведения функций Бесселя первого рода разного порядка и разного сложного аргумента. Результат выражен через гипергеометрический ряд Гаусса. Приведены численные примеры стыка круглого и 90-градусного секторного волноводов одного радиуса, стыков круглых волноводов и стыков секторных волноводов.

Главную трудность при расчете внешних параметров волноводных устройств на круглых и секторных волноводах составляет вычисление реактивных проводимостей местных полей, возникающих на стыках указанных волноводов. Их расчет возможен с использованием эффективных численных алгоритмов, например, проекционных методов, разработанных В.В.Никольским. Применение же аналитических методов для получения решения в замкнутом виде сдерживается сложностью вычисления коэффициентов трансформации указанных проводимостей, представляющих определенный интеграл по площади отверстия связи от произведения собственных векторных функций, выраженных в общем виде через функции Бесселя первого рода разного порядка и различного аргумента. Целью работы является применение разложения произведений функций Бесселя первого рода в гипергеометрический ряд Гаусса для вычисления таких интегралов с конечными пределами интегрирования при решении внутренних задач электродинамики.

Рассмотрим торцовое соединение 90° секторного волновода с круглым волноводом того же радиуса. Такая задача возникает, в частности, при анализе четырехканального делителя мощности на секторных волноводах [1]. Собственные векторные функции H - и E -волн круглого и секторного волноводов выражаются через скалярные и имеют вид:

для круглого волновода

$$\Psi_h = \sqrt{2/\pi(1 + \delta_{0m})} \left[\mu_{mn} \mathfrak{S}_m(\alpha_n r) / R \sqrt{\mu_{mn}^2 - m^2} \mathfrak{S}_m(\mu_{mn}) \right] \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases},$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$\Psi_e = \sqrt{2/\pi(1 + \delta_{0m})} \left[\mathfrak{S}_m(\alpha_e r) / R \mathfrak{S}'_m(\epsilon_{mn}) \right] \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

для секторного волновода

$$\Psi_h = \sqrt{2(2 - \delta_{0\nu})/\Theta} \left[\mu_{\nu n} \mathfrak{S}_\nu(\tilde{\alpha}_h r) / R \sqrt{\mu_{\nu n}^2 - \nu^2} \mathfrak{S}_\nu(\mu_{\nu n}) \right] \cos \nu\varphi,$$

$$\Psi_e = \sqrt{2(2 - \delta_{0\nu})/\Theta} \left[\mathfrak{S}_\nu(\tilde{\alpha}_e r) / R \mathfrak{S}'_\nu(\epsilon_{\nu n}) \right] \sin \nu\varphi, \quad \nu = m\pi/\Theta,$$

где $\alpha_h, \alpha_e, \tilde{\alpha}_h, \tilde{\alpha}_e$ — поперечные волновые числа H - и E -волн круглого и секторного волноводов; $\epsilon_{mn}, \epsilon_{\nu n}$ — корни функций Бесселя первого рода $\mathfrak{S}_m, \mathfrak{S}_\nu$; $\mu_{mn}, \mu_{\nu n}$ — корни производных функций Бесселя первого рода $\mathfrak{S}'_m, \mathfrak{S}'_\nu$; $\delta_{0m}, \delta_{0\nu}$ — символы Кронекера; Θ — угол сектора поперечного сечения секторного волновода.

Вычисление рассматриваемых интегралов от произведений функций Бесселя первого рода разного порядка и различного аргумента можно осуществить путем представления функции Бесселя первого рода в виде известного бесконечного ряда или в виде произведения степенной, показательной и вырожденной гипергеометрической функции. Однако это сопряжено с большой вычислительной работой, точность результата которой зависит от величины аргумента. Предлагается избежать громоздкости вычислений следующим образом. Представим произведение функций $\mathfrak{S}_m(\alpha_h r) \mathfrak{S}_\nu(\tilde{\alpha}_h r)$ через гипергеометрический ряд Гаусса [2]. Тогда имеем

$$\int_0^R \mathfrak{S}_m(\alpha_h r) \mathfrak{S}_\nu(\tilde{\alpha}_h r) dr = \int_0^R \frac{(\alpha_h r/2)^m}{\Gamma(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \cdot {}_2F_1(-k, -\nu-k; m+1; \alpha_h^2/\tilde{\alpha}_h^2) (\tilde{\alpha}_h r/2)^{\nu+2k} dr, \quad (1)$$

где $\Gamma(m+1), \Gamma(\nu+k+1)$ — гамма-функции; ${}_2F_1(-k, -\nu-k; m+1; \alpha_h^2/\tilde{\alpha}_h^2)$ — гипергеометрический ряд Гаусса. Используя известное свойство интегралов с бесконечными рядами из (1) имеем:

$$\int_0^R \mathfrak{S}_m(\alpha_h r) \mathfrak{S}_\nu(\tilde{\alpha}_h r) dr = \frac{(\alpha_h/2)^m}{\Gamma(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \cdot {}_2F_1(-k, -\nu-k; m+1; \alpha_h^2/\tilde{\alpha}_h^2) (\tilde{\alpha}_h/2)^{\nu+2k} \frac{R^{m+\nu+2k+1}}{(m+\nu+2k+1)}. \quad (2)$$

Это выражение легко проверяется на частные случаи для известных интегралов от произведений функций Бесселя первого рода одного порядка или одного аргумента [3, 4].

Аналогично имеем:

$$\int_0^R \mathfrak{F}_m(\alpha_h r) \mathfrak{F}_\nu(\tilde{\alpha}_h r) r dr = \frac{(\alpha_h/2)^m}{\Gamma(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (3)$$

$$\cdot {}_2F_1(-k, -\nu-k; m+1; \alpha_h^2/\tilde{\alpha}_h^2) (\tilde{\alpha}_h/2)^{\nu+2k} \frac{R^{m+\nu+2k+2}}{(m+\nu+2k+2)},$$

$$\int_0^R \mathfrak{F}_m(\alpha_h r) \mathfrak{F}_\nu(\tilde{\alpha}_h r) (1/r) dr = \frac{(\alpha_h/2)^m}{\Gamma(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (4)$$

$$\cdot {}_2F_1(-k, -\nu-k; \nu+1; \alpha_h^2/\tilde{\alpha}_h^2) (\tilde{\alpha}_h/2)^{\nu+2k} \frac{R^{m+\nu+2k}}{(m+\nu+2k)},$$

если $m = \nu = l, l \neq 0$.

Достоинством полученных выражений (2)-(4) является то, что гипергеометрический ряд Гаусса не только абсолютно сходится ($\nu + 2l + m > 0$), но и является быстроходящимся при используемых отношениях $\alpha_h^2/\tilde{\alpha}_h^2 < 1$. Это не требует учета большого числа членов ряда для вычисления таких интегралов.

Результаты расчетов иллюстрируются графиками (рис.1), которые получены при удержании в гипергеометрическом ряде Гаусса первых пяти членов. На рис.1 показана частотная зависимость модуля коэффициента отражения $|S_{11}|$ для плоско-поперечного стыка одномодового 90° секторного волновода с основной волной H_{21} и многомодового круглого волновода того же радиуса с распространяющимися волнами H_{11}, E_{01}, H_{21} .

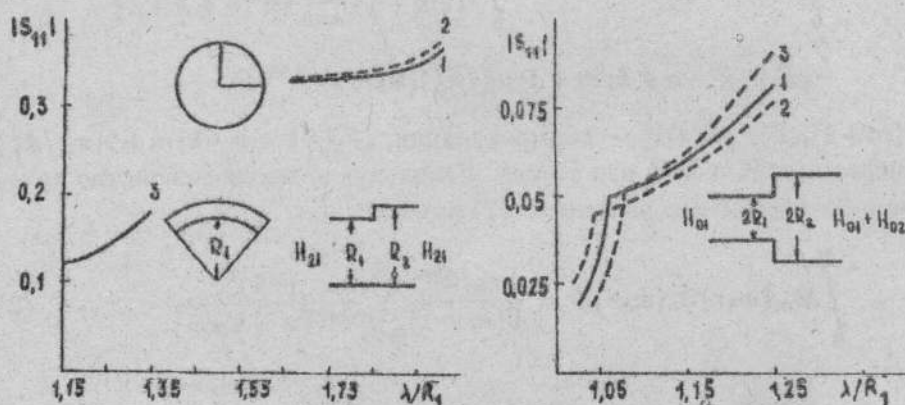


Рис.1, 2:

Кривая 1 вычислена с использованием изложенного подхода, кривая 2 — численным алгоритмом на ЭВМ. Расхождение полученных значений

не превышает 3%. Кривая 3 представляет результат расчета величины $|S_{11}|$ для стыка двух одномодовых секторных волноводов с отношением радиусов $R_1/R_2 = 0,85$.

Исхоженный подход применен также при расчете величины $|S_{11}|$ плоско-поперечного стыка круглого волновода с распространяющейся волной H_{01} и круглого волновода с распространяющимися волнами H_{01} и H_{02} . Задача о таком стыке возникает, в частности, при анализе щелевого моста на круглых волноводах. На рис.2 кривая 1 вычислена для стыка стандартных волноводов с отношением радиусов $R_2/R_1 = 1,18$. Кривые 2 и 3 построены по известному результату [5] для стыка круглых волноводов с отношением радиусов $R_2/R_1 = 1,16$ и $R_2/R_1 = 1,2$. Кривая 1, как и ожидалось, располагается между кривыми 2 и 3.

В заключение приведем полученные результаты расчета величины $|S_{11}|$ осесимметричного плоско-поперечного стыка двух круглых волноводов, в одном из которых распространяется основная волна H_{11} , а другой может быть двухмодовым. На рис.3 кривая 1 соответствует отношению радиусов стандартных волноводов $R_1/R_2 = 0,53$ и охватывает частотный диапазон одномодовой (волна H_{11}) и двухмодовой (волны H_{11} и E_{11}) работы волновода. В данном случае волна E_{11} начинает распространяться при $\lambda/R = 3,09$. Периодическое каскадное соединение меньшего одномодового и большего двухмодового волноводов образует волновод с малыми потерями, испытываемый в диапазоне миллиметровых волн. Кривая 2 вычислена для стыка стандартных волноводов с отношением радиусов $R_1/R_2 = 0,85$, когда оба волновода одномодовые.

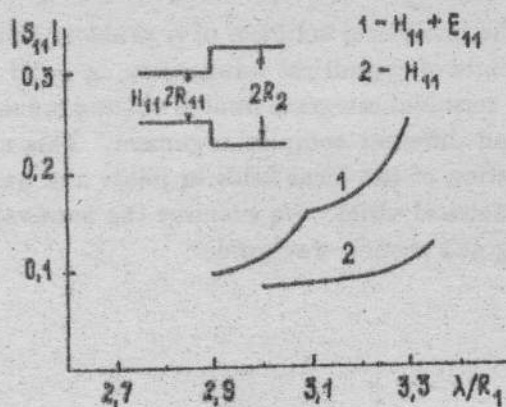


Рис.3:

Полученные выражения (2)–(4) могут быть применены при решении и других задач о стыках круглых и секторных волноводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скрышник Л.В., Пасечник С.Г., Татаркин В.Т. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1992. N 3. С.72.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973. Т.1. — 294 с; 1974. Т.2. — 295 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 1100 с.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983. — 750 с.
5. Вайслейб Ю.В., Зеленский Г.Н., Куликов Л.Н. // Радиотехника и электроника. 1975. N 1. С.74.

Поступила в редакцию
25 ноября 1992 г.

THE PLANE-DIAMETRICAL JOINTS
OF CYLINDRICAL WAVEGUIDES

V.N.Pochernyaev, L.V.Skrypnik

In this article the analytical solution of a problem is considered on the plane-diametrical joints of cylindrical waveguides. In order to receive expression of integral with terminal integrate limited of the product Bessel functions of different order and different complex argument. This expression is completely allow calculation of the local fields in joints and be expressed by the Gaussian hypergeometrical series. We examine the numeral example of joint of round and 90-degree's section waveguides.