УДК 621.391

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МЕТОДОВ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ

В.С.Илькив

Рассмотрены методы сверхразрешения типа Кейпона, максимальной энтропии, проекционного и Кумаресана–Тафтса, использующие степени корреляционной матрицы входных сигналов антенной решетки. Доказаны соответствующие алгебраические соотношения между методами Кейпона и максимальной энтропии, проекционным и Кумаресана–Тафтса, а также асимптотические соотношения при бесконечном увеличении отношения сигнал/шум между методами Кейпона и проекционным, максимальной энтропии и Кумаресана–Тафтса.

1. В теории и технике антенных решеток развиваются нелинейные методы определения источников излучения, позволяющие существенно повысить угловое разрешение их по сравнению с обычным сканированием пучом антенной решетки и оценки выходной мощности [1, 2]. Среди таких методов сверхразрешения — методы Кейпона и максимальной энтропии, построены по обратной (выборочной) корреляционной матрице, методы проекционный и Кумаресана–Тафтса, построены по проектору, соответствующему собственным векторам корреляционной матрицы, лежащим в сигнальном пространстве [3]. Обобщение метода Кейпона с помощью степени обратной корреляционной матрицы предложено в работах [1, 2, 4].

Соотношения между методами Кейпона, максимальной энтропии, проекционным и Кумаресана–Тафтса исследовались рядом авторов (см. [4, 5]) и суммированы в работе [6].

В настоящей работе предложены методы типа Кейпона, максимальной энтропии и Кумаресана–Тафтса, построенные по степени обратной корреляционной матрицы и некоторому фиксированному вектору единичной длины, и установлены алгебраические и асимптотические соотношения между ними, а также проекционным методом. Полученные результаты содержат, как частный случай, результаты работы [6].

Содержание остальных пунктов работы следующее: в п.2 дано определение исследуемых методов, в п.3 выведены алгебраические соотношения методов Кейпона, максимальной энтропии и проекционного, Кумаресана–Тафтса, в п.4 приведены используемые свойства корреляционной матрицы, в п.5 выведены асимптотические соотношения методов Кейпона, проекционного и максимальной энтропии, Кумаресана Тафтса и в п.6 — заключительные замечания.

2. Суть методов оценивания положения источников Кейпона (C), максимальной энтропии (ME), проекционного (MUSIC), Кумаресана–Тафтса (KT) сводится к определению оценки пространственного спектра в виде [2, 5, 6, 7]

$$S_{\text{C}} = 1/\vec{a}^{*}\mathbf{R}^{-1}\vec{a}, \qquad (1a)$$

$$S_{\text{MГ}} = \vec{e}_1^{*}\mathbf{R}^{-1}\vec{e}_1/|\vec{e}_1^{*}\mathbf{R}^{-1}\vec{a}|^2, \qquad (1b)$$

$$S_{\text{MUSIC}} = 1/\vec{a}^{*}\mathbf{P}\,\vec{a}, \qquad (1c)$$

$$S_{\text{KT}} = 1/|\vec{d}^{*}\vec{a}|^2, \qquad (1d)$$

где $\mathbf{R}$ — (выборочная) корреляционная матрица входных колебаний в элементах антенной решетки [6], $\vec{a} = \vec{a}(q)$ — вектор, управляющий положением луча антенной решетки, q — угол между направлением луча и нормалью к антенной решетке, $\mathbf{P}$ — матрица проектирования на шумовое пространство [3], $\vec{d}$ — весовой вектор, лежащий в шумовом подпространстве и удовлетворяющий условиям $\vec{e}_1^{*}\vec{d} = 1$, $||\vec{d}||^2 =$ минимум [6, 7], $\vec{e}_1^{*} = (1, 0, \ldots, 0)$. Здесь $*$ обозначает операцию комплексно сопряженного транспонирования (матрицы), $||\vec{d}||$ — евклидову норму вектора $\vec{d}$.

Считаем, что антенная решетка содержит N элементов, а значит векторы $\vec{e}_1$, $\vec{d}$ и квадратные матрицы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}$ имеют размер N.

В работе [6] показано, что S_{KT} можно записать в виде, аналогичном S_{MB}, а именно

$$S_{\text{KT}} = (\vec{e}_1^{*}\mathbf{P}\vec{e}_1)^2/|\vec{e}_1^{*}\mathbf{P}\vec{a}|^2, \qquad (1e)$$

кроме того показано, что в случае известной матрицы $\mathbf{R}$ спектры S_{MUSIC} и S_{KT} являются граничными значениями спектров S_{C} и S_{MB} при неограниченном возрастании отношения сигнал/шум, а также отмечено, что

$$S_{\text{C}}^{-1} = \sum_{k=1}^{N} S_{\text{MB}}^{-1}[k], \qquad (2a)$$

$$S_{\text{MUSIC}}^{-1} = \sum_{k=1}^{N-M} w_k/S_{\text{KT}}[k], \qquad (2b)$$

где M — размерность сигнального подпространства, $S_{\text{MB}}[k](S_{\text{KT}}[k])$ — метод максимальной энтропии (Кумаресана–Тафтса), определяемый подматрицей, стоящей в $N-k+1$ последних столбцах и строках матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{P})$. Такая подматрица матрицы $\mathbf{R}$ является корреляционной матрицей для антенной решетки, состоящей из последних $N-k+1$ элементов исходной антенной решетки. В формуле (2b) w_k обозначают некоторые весовые коэффициенты, построенные по матрице $\mathbf{P}$. Последние алгебраические соотношения (2a), (2b) показывают, что спектр S_C (S_{MUSIC}) является средним (взвешенным средним) гармоническим спектров $S_{МВ}$ ($S_{КТ}$) для антенных решеток убывающих размерностей.

Ниже будут выведены другие формулы, связывающие (взвешенно гармонически) методы типа C, ME и MUSIC, KT и использующие, в отличие от [2], исходную антенную решетку.

Пусть m — некоторое натуральное число, $\vec{y}$ — единичной длины вектор размерности N с комплексными элементами.

Методы типа C, ME и KT определяются выражениями соответственно

$$S_{C,m} = 1/\vec{a}^*\mathbf{R}^{-m}\vec{a}, \tag{3a}$$

$$S_{МВ,m,\vec{y}} = \vec{y}^*\mathbf{R}^{-m}\vec{y}/|\vec{y}^*\mathbf{R}^{-m}\vec{a}|^2, \tag{3b}$$

$$S_{КТ,\vec{y}} = (\vec{y}^*\mathbf{P}\vec{y})^2/|\vec{y}^*\mathbf{P}\vec{a}|^2. \tag{3e}$$

Последние два метода можно записать в форме (1d)

$$S_{МВ,m,\vec{y}} = w_{МВ,m,\vec{y}}/|\vec{d}^*_{МВ,m,\vec{y}}\vec{a}|^2, \tag{3f}$$

$$S_{КТ,\vec{y}} = 1/|\vec{d}^*_{КТ,\vec{y}}\vec{a}|^2, \tag{3d}$$

где

$$d_{МВ,m,\vec{y}} = w_{МВ,m,\vec{y}}\mathbf{R}^{-m}\vec{y}, \tag{4a}$$

$$w_{МВ,m,\vec{y}} = 1/\vec{y}^*\mathbf{R}^{-m}\vec{y}, \tag{4b}$$

$$d_{КТ,\vec{y}} = w_{КТ,\vec{y}}\mathbf{P}\vec{y}, \tag{4c}$$

$$w_{КТ,\vec{y}} = 1/\vec{y}^*\mathbf{P}\vec{y}. \tag{4d}$$

Формула (3a) определяет целое семейство методов типа C, параметризованное параметром m, формула (3b) — семейство методов типа ME, параметризованное параметрами m и $\vec{y}$, формула (3e) — семейство методов типа KT, параметризованное параметром $\vec{y}$. При $m = 1$ и $\vec{y} = \vec{e}_1$ получим из (3) методы, определяемые формулами (1).

3. Предположим, что число m источников известно, и обозначим через $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N$ собственные векторы (выборочной) корреляционной матрицы, отвечающие упорядоченным по убыванию собственным значениям. Пусть $\mathbf{E}_s = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_M)$, $\mathbf{E}_n = (\vec{v}_{M+1}, \ldots, \vec{v}_N)$, тогда матрица $\mathbf{E}_s\mathbf{E}_s^*$

является оператором проектирования на сигнальное подпространство и

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{E}_s\mathbf{E}_s^* = \mathbf{E}_n\mathbf{E}_n^*. \tag{5}$$

Пусть $q_1, \ldots, q_M$ обозначают углы направления на источники, тогда корреляционная матрица имеет вид [6]:

$$\mathbf{R} = x\mathbf{I} + \mathbf{ABA}^*, \tag{6}$$

где x — мощность некоррелированного по каналам внутреннего шума на элементе, $\mathbf{A} = (\vec{a}(q_1), \ldots, \vec{a}(q_M))$ — матрица векторов направлений на источники размера N на M, матрица $\mathbf{B}$ — невырождена, что означает отсутствие полностью коррелированных сигналов. Кроме того предполагаем, что матрица $\mathbf{A}$ имеет полный столбцовый ранг. Это стандартная модель корреляционной матрицы [6].

При точно известной корреляционной матрице $\mathbf{R}$ имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*. \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что $\vec{d}_{\text{мв},m,\vec{y}}$ и $w_{\text{мв},m,\vec{y}}$ удовлетворяют уравнению $\mathbf{R}^m\vec{d}_{\text{мв},m,\vec{y}} = w_{\text{мв},m,\vec{y}}\vec{y}$ и условию $\vec{y}^*\vec{d}_{\text{мв},m,\vec{y}} = 1$ или

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}^m & \vec{y} \\ \vec{y}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{d}_{\text{мв},m,\vec{y}} \\ -w_{\text{мв},m,\vec{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\vec{d}_{\text{кт},\vec{y}}$ удовлетворяет уравнению $\mathbf{E}_s^*\vec{d}_{\text{кт},\vec{y}} = 0$ и условиям $\vec{y}^*\vec{d}_{\text{кт},\vec{y}} = 1$ и $\|\vec{d}_{\text{кт},\vec{y}}\| =$ минимум или $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_s^* \\ \vec{y}^* \end{pmatrix}\vec{d}_{\text{кт},\vec{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|\vec{d}_{\text{кт},\vec{y}}\| =$ минимум. Кроме того, $\vec{d}_{\text{кт},\vec{y}} = \vec{g}_{\text{кт},\vec{y}} + w_{\text{кт},\vec{y}}\vec{y}$, где $\vec{g}_{\text{кт},\vec{y}}$ и $w_{\text{кт},\vec{y}}$ удовлетворяют уравнению $\mathbf{E}_s^*\vec{g}_{\text{кт},\vec{y}} = -w_{\text{кт},\vec{y}}\mathbf{E}_s^*\vec{y}$ и условиям $\|\vec{g}_{\text{кт},\vec{y}}\| =$ минимум и $\vec{y}^*\vec{g}_{\text{кт},\vec{y}} = 1 - w_{\text{кт},\vec{y}}$.

Пусть векторы $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_N$ обозначают столбцы некоторой унитарной матрицы $\mathbf{Y}$, т.е.

$$\mathbf{YY}^* = \sum_{j=1}^{N} \vec{y}_j\vec{y}_j^* = \mathbf{I}. \tag{8}$$

Для таких векторов в обозначениях (4), вместо нижнего индекса $\vec{y}_j$ ($j = 1, \ldots, N$), используем индекс в скобках, например, $S_{\text{мв},m,\vec{y}} = S_{\text{мв},m,}(j)$, $\vec{d}_{\text{кт},\vec{y}} = \vec{d}_{\text{кт}}(j)$ и т.п. при $\vec{y} = \vec{y}_j$.

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} &1/S_{\text{мв},m}(j) = \cos^2(\vec{a}, \vec{y}_j, \mathbf{R}^{-m})/S_{\text{c},m}, \\ &1/[w_{\text{мв},m}(j)S_{\text{мв},m}(j)] = |\vec{a}^*\vec{d}_{\text{мв},m}(j)|^2/w^2_{\text{мв},m}(j) = |\vec{a}\mathbf{R}^{-m}\vec{y}_j|^2, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\cos^2(\vec{a}, \vec{y}, \mathbf{C}) = ||\vec{a}^*\mathbf{C}\vec{y}||^2/\vec{y}^*\mathbf{C}\vec{y}\vec{a}^*\mathbf{C}\vec{a}$ — квадрат косинуса угла между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{y}$ в пространстве со скалярным произведением, определяемым матрицей $\mathbf{C}$ [8].

Суммируя (9), получим

$$S_{\mathrm{C},2m}^{-1} = \sum_{j=1}^{N} 1/[w_{\mathrm{MB},m}(j) S_{\mathrm{MB},m}(j)]. \tag{10}$$

Действительно, из (8) и (9) следует

$$\sum_{j=1}^{N} 1/[w_{\mathrm{MB},m}(j) S_{\mathrm{MB},m}(j)] = \sum_{j=1}^{N} \vec{a}^*\mathbf{R}^{-m}\vec{y}_j\vec{y}_j^*\mathbf{R}^{-m}\vec{a} = \vec{a}^*\mathbf{R}^{-2m}\vec{a} = S_{\mathrm{C},2m}^{-1}.$$

Равенство (10) показывает, что метод типа C является взвешенным гармоническим средним методов типа ME с натуральным параметром, уменьшенным в два раза, и взаимноортогональными значениями векторного параметра.

Аналогично, суммируя равенства

$$1/[w_{\mathrm{KT}}^2(j) S_{\mathrm{KT}}(j)] = S_{\mathrm{MUSIC}} \cos^2(\vec{a}, \vec{y}_j, \mathbf{P})/w_{\mathrm{KT}}(j) = |\vec{a}^*\mathbf{P}\vec{y}_j|^2,$$

получим

$$S_{\mathrm{MUSIC}}^{-1} = \sum_{j=1}^{N} 1/[w_{\mathrm{KT}}^2(j) S_{\mathrm{KT}}(j)]. \tag{11}$$

Действительно из (8) и равенства $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{N} 1/[w_{\mathrm{KT}}^2(j) S_{\mathrm{KT}}(j)] = \sum_{j=1}^{N} \vec{a}^*\mathbf{P}\vec{y}_j\vec{y}_j^*\mathbf{P}\vec{a} = \vec{a}^*\mathbf{P}^2\vec{a} = S_{\mathrm{MUSIC}}^{-1}.$$

Равенство (11) показывает, что метод MUSIC является взвешенным гармоническим средним методов типа KT с взаимноортогональными значениями векторного параметра.

4. Рассмотрим некоторые свойства корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ (6), с помощью которых установим в п.5 асимптотические соотношения между методами типа C и MUSIC, ME и KT.

Используя лемму об обращении матрицы, имеем

$$\mathbf{R}^{-1} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}(z\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*]/z. \tag{12}$$

Поскольку мы будем устремлять отношение сигнал/шум к бесконечности, т.е. $z\mathbf{B}^{-1} \to 0$, что возможно сделать тремя способами: a) $z = 1$, $\mathbf{B}^{-1} \to 0$; b) $z \to 0$, $\mathbf{B}^{-1} = \mathrm{const}$; c) $z \to o$, $\mathbf{B}^{-1} \to 0$ то вместо матрицы

$\mathbf{B}^{-1}$ в случаях а) и с) будем рассматривать матрицу $h(x)\mathbf{B}^{-1}$, где $h(x)$ — достаточно гладкая функция, обозначающая стремление $\mathbf{P}^{-1}$ к нулю. Мы предполагаем, что для функции $h(x)$ и ее производных выполняются условия $h(0) = h'(0) = \ldots = h^{(l-1)}(0) = 0$, $h^{(l)}(0) < \infty$, $h^{(l+1)}(0) < \infty$, где $l > 0$ — некоторое целое число. Тогда формула (12) для указанных выше случаев примет вид:

$$\text{a)}\ \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{G}\,, \tag{13a}$$

$$\text{b), c)}\ \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{G}/x\,, \tag{13b}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}^*,\ \mathbf{S} = f(x)\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\,, \tag{13c}$$

$$f(x) = h(x),\ f(x) = x,\ f(x) = xh(x)\,, \tag{14}$$

причем равенства (14) соответствуют случаям а), b), с) стремления отношения сигнал/шум к бесконечности.

Для матрицы $\mathbf{S}$ справедливы следующие соотношения, вытекающие из (13), (14) $(\vec{d}/\vec{dx})^k\mathbf{S} = f^{(k)}(x)\mathbf{B}^{-1} + \delta_{0k}\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $k = 0, 1, \ldots$, т.е.

$$\text{a)}\ (\vec{d}/\vec{dx})^k\mathbf{S} = \begin{cases} \mathbf{A}^*\mathbf{A}, & k = 0 \\ 0, & k = 1, \ldots, l-1 \\ h^{(l)}(0)\mathbf{B}^{-1}, & k = 1 \end{cases}, \tag{15a}$$

$$\text{b)}\ (\vec{d}/\vec{dx})^k\mathbf{S} = \begin{cases} \mathbf{A}^*\mathbf{A}, & k = 0 \\ \mathbf{B}^{-1}, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}, \tag{15b}$$

$$\text{c)}\ (\vec{d}/\vec{dx})^k\mathbf{S} = \begin{cases} \mathbf{A}^*\mathbf{A}, & k = 0 \\ 0, & k = 1, \ldots, l \\ f^{(l+1)}(0)\mathbf{B}^{-1} = (l+1)h^{(l)}(0)\mathbf{B}^{-1}, & k = l+1 \end{cases}. \tag{15c}$$

Из формулы для производной

$$(\vec{d}/\vec{dx})^r\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}\sum_{k=1}^{r}\mathbf{T}_k\mathbf{Q}_k(x)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}^*,\ r > 0,$$

где

$$\mathbf{T}_k = [\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}]^{k-1}\mathbf{B}^{-1}, \tag{16a}$$

$$\mathbf{Q}_k(x) = \sum_{\alpha}\mathbf{C}(\alpha)\prod_{p=1}^{k} f^{(\alpha_p)}(x), \tag{16b}$$

причем коэффициенты $\mathbf{C}(\alpha)$ — натуральные числа; суммирование ведется по натуральным $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, таким, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = r$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, коэффициенты $\mathbf{C}(\alpha_1)$ при $\alpha_1 = r$ и $\mathbf{C}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 1$ равняются единице, и равенств (15) получим

$$\text{a)}\ \lim(\vec{d}/\vec{dx})^r \mathbf{G} = \begin{cases} 0, & r = 1, \ldots, l-1 \\ h^{(l)}(0)\mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*, & r = l \end{cases}, \tag{17a}$$

$$\text{b)}\ \lim(\vec{d}/\vec{dx})^r \mathbf{G} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}_r(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*, \tag{17b}$$

$$\text{c)}\ \lim(\vec{d}/\vec{dx})^r \mathbf{G} = \begin{cases} 0, & r = 1, \ldots, l \\ (l+1)h^{(l)}(0)\mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*, & r = l+1 \end{cases}. \tag{17c}$$

Здесь и ниже lim обозначает предел, когда переменная x стремится к нулю. Кроме того, из (7) вытекает

$$\lim \mathbf{G} = \mathbf{P}. \tag{18}$$

5. Пусть корреляционная матрица $\mathbf{R}$ точно известна и задана формулой (6). Докажем три леммы об асимптотике методов типа Кейпона и максимальной энтропии.

Лемма 1. а) Если $x = 1$ и $\mathbf{B}^{-1} \to 0$, то

$$S_{\mathrm{C},m} \to S_{\mathrm{MUSIC}}; \tag{19}$$

b) Если $x \to 0$ и $\mathbf{B}^{-1} = \mathrm{const}$, то

$$S_{\mathrm{C},m} \to \begin{cases} 0, & q \neq q_i \\ 1/\vec{e}_i^{\,*}\mathbf{T}_m\vec{e}_i, & q = q_i,\ i = 1, \ldots, M \end{cases}; \tag{20}$$

c) Если $x \to 0$ и $\mathbf{B}^{-1} \to 0$, то

$$S_{\mathrm{C},m} \to \begin{cases} 0, & q \neq q_i \\ \infty, & q = q_i,\ i = 1, \ldots, M \end{cases}; \tag{21}$$

где $\vec{e}_i$ — столбец единичной матрицы размера M.

Эта лемма обобщает лемму 1 из [6].

Доказательство. Из (13), (14), (18) имеем

$$\text{a)}\ \lim S_{\text{c},m} = 1/\vec{a}^*(\lim \mathbf{G})^m\vec{a} = S_{\text{МГ},\text{ЦС}};$$

b) в случае $q \neq q_i$, т.е. $\mathbf{P}\vec{a}_i = 0$, имеем $\lim S_{\text{c},m} = \lim x^m/\vec{a}^*(\lim \mathbf{G})^m\vec{a} = \lim x^m/\vec{a}^*\mathbf{P}\vec{a} = 0$, при $q = q_i$, т.е. $\mathbf{P}\vec{a}_i = 0$, имеем (раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя) $\lim S_{\text{c},m} = 1/\vec{a}_i^*[\lim(\mathbf{G}/x)^m]\vec{a}_i = \{\vec{a}_i^*[\lim(\vec{d}/\vec{dx})\mathbf{G}]^m\vec{a}_i\}^{-1} = \{\vec{1}_i^*[\mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*]^m\vec{a}_i\}^{-1} = 1/\vec{e}_i^*\mathbf{T}_m\vec{e}_i$. Выше использовались равенства (17b) и равенство

$$[\mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*]^m = \mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}_m(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*,$$

вытекающее из определения (16);

c) при $q \neq q_i$ доказательство аналогично доказательству случая b), при $q = q_i$ — следует из (17c)

$$\lim S_{\text{c},m} = 1/\vec{a}_i^*[\lim(\vec{d}/\vec{dx})\mathbf{G}]^m\vec{a}_i = 1/\vec{a}_i^* 0\vec{a}_i = \infty.$$

Лемма 1 доказана.

Следующая лемма доказывается в предположении, что векторный параметр удовлетворяет условию $\mathbf{P}\vec{y} = 0$.

Лемма 2. a) Если $x = 1$ и $\mathbf{B}^{-1} \to 0$, то

$$S_{\text{МВ},m,\vec{y}} \to S_{\text{КТ},\vec{y}}/\vec{y}^*\mathbf{P}\vec{y};$$

b) Если $x \to 0$ и $\mathbf{B}^{-1} = \text{const}$ или $\mathbf{B}^{-1} \to 0$, то

$$S_{\text{МВ},m,\vec{y}} \to \begin{cases} 0, & q \neq q_i,\ \ \vec{a}^*\mathbf{P}\vec{y} \neq 0 \\ \infty, & q \neq q_i,\ \ \vec{a}^*\mathbf{P}\vec{y} = 0 \\ \infty, & q = q_i,\ \ i = 1, \ldots, M \end{cases}.$$

Доказательство.

a) Из (13), (18) имеем

$$\lim S_{\text{МВ},m,\vec{y}} = \vec{y}^*(\lim \mathbf{G})^m\vec{y}/|\vec{y}^*(\lim \mathbf{G})^m\vec{a}|^2 = S_{\text{КТ},\vec{y}}/\vec{y}^*\mathbf{P}\vec{y}.$$

b) Если $q \neq q_i$, то $\mathbf{P}\vec{a} \neq 0$ и из (13), (18) имеем

$$\lim S_{\text{МВ},m,\vec{y}} = \lim x^m \lim(\vec{y}^*\mathbf{G}^m\vec{y})/\lim|\vec{y}^*\mathbf{G}^m\vec{a}|^2 = \lim x^m\vec{y}^*\mathbf{P}\vec{y}/|\vec{y}^*\mathbf{P}\vec{a}|^2 = 0$$

при $\vec{y}^*\mathbf{P}\vec{a} \neq 0$. Если последнее условие не выполняется, то

$$\lim S_{\text{МВ},m,\vec{y}} = \lim \vec{y}^*\mathbf{G}^m\vec{y}/\vec{a}^*(\lim \mathbf{G}/x)^m\vec{y}\vec{y}^*(\lim \mathbf{G})^m\vec{a}.$$

Поскольку $\lim \mathbf{G}/x = \lim(\vec{d}/\vec{dx})\mathbf{G} = \Lambda(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$ при $f(x) = x$ и $\lim \mathbf{G}/x = \lim(\vec{d}/\vec{dx})\mathbf{G} = 0$ при $f(x) = xh(x)$, что следует из (17), то $\lim S_{\text{мв},m,\vec{y}} = \infty$. Если $q = q_i$, т.е. $\vec{a}_i = \mathbf{A}\vec{e}_i$, $\vec{a}_i^*\mathbf{P} = 0$, где $\vec{e}_i$ — столбец единичной матрицы размера M, то

$$\begin{aligned}\lim S_{\text{мв},m,\vec{y}} &= \lim \vec{y}^*|bfG^m\vec{y}/\vec{y}^*(\lim \mathbf{G}/x)^m\vec{a}_i\vec{a}_i^*(\lim \mathbf{G})^m\vec{y} = \\ &= \vec{y}^*\mathbf{P}\vec{y}/\vec{y}^*(\lim \vec{d}\mathbf{G}/\vec{dx})^m\vec{a}_i\vec{a}_i^*\mathbf{P}\vec{y} = \infty.\end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Последняя лемма касается случая выполнения равенства $\mathbf{P}\vec{y} = 0$, т.е. $\vec{y} = \mathbf{A}\vec{z}$.

Лемма 3. a) Если $x = 1$ или $x \to 0$ и $\mathbf{B}^{-1} \to 0$, то

$$S_{\text{мв},m,\vec{y}} \to \infty;$$

b) Если $x \to 0$ и $\mathbf{B}^{-1} = \text{const}$, то

$$S_{\text{мв},m,\vec{y}} \to \vec{z}^*\mathbf{T}_m\vec{z}/|\vec{z}^*bfT_m(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*\vec{a}|^2.$$

Доказательство. Пусть $x = 1$, тогда из (17) следует

$$\lim S_{\text{мв},m,\vec{y}} = \vec{y}^*[\lim(\vec{d}/\vec{dx})^l\mathbf{G}]^m\vec{y}/\vec{y}^*[\lim(\vec{d}/\vec{dx})^l\mathbf{G}]^m\vec{a}\vec{a}^*(\lim \mathbf{G})^m\vec{y} =$$

$$= \vec{y}^*\mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}_m(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*\vec{y}/\vec{y}^*\mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}_m(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-2}\mathbf{A}^*\vec{a}\vec{a}^*\mathbf{P}\vec{y} =$$

$$= \vec{z}^*\mathbf{T}_m\vec{z}/\vec{z}^*\mathbf{T}_m(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*\vec{a}\vec{a}^*\mathbf{P}\vec{y} = \infty$$

Пусть $x \to 0$, тогда из (17) следует

$$\lim S_{\text{мв},m,\vec{y}} = \vec{y}^*[\lim(\vec{d}/\vec{dx})^{l+1}\mathbf{G}]^m\vec{y}/\vec{y}^*[\lim(\vec{d}/\vec{dx})^{l+1}\mathbf{G}]^m\vec{a}\vec{a}^*(\lim \mathbf{G}/x)^m\vec{y} =$$

$$= \vec{z}^*\mathbf{T}_m\vec{z}/\vec{z}^*\mathbf{T}_m(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*\vec{a}\vec{a}^*0\vec{y} = \infty.$$

b) Если $x \to 0$ и $\mathbf{B}^{-1} = \text{const}$, то $f(x) = x$ и из (17) получим

$$\begin{aligned}\lim S_{\text{мв},m,\vec{y}} &= \lim \vec{y}^*(\mathbf{G}/x)^m\vec{y}/\lim|\vec{y}^*(\mathbf{G}/x)^m\vec{a}|^2 = \\ &= \vec{z}^*\mathbf{T}_m\vec{z}/|\vec{z}^*\mathbf{T}_m(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*\vec{a}|^2.\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

6. Из лемм 1–3 следует, что методы $S_{c,m}$ и $S_{\text{мв},m,\vec{y}}$, использующие степени обратной корреляционной матрицы, вырождаются при стремлении отношения сигнал/шум к бесконечности в методы S_{MUSIC} и $S_{\text{КТ},\vec{y}}$, использующие собственные векторы корреляционной матрицы. Этот результат совпадает при $m = 1$ и $\vec{y} = \vec{e}_1$ с результатом работы [6].

Кроме того, методы, использующие обратную корреляционную матрицу, связаны между собой соотношением (10), а методы, использующие собственные векторы этой матрицы, — соотношением (11), т.е. соотношениями взвешенного гармонического среднего.

Заметим, что при $m = 1$ эти соотношения не следуют из соотношений, выведенных в работе [6], и являются новыми и для этого случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершман А.Б., Ермолаев В.Т., Флаксман А.Г. // Изв.вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. N 8. С.941.
2. Nickel U. // IEE Proc. F. 1987. V.134. N 1. P.53.
3. Schmidt R.O. // IEEE Trans. 19867 V.AP-34. Mar. P.276.
4. Мюнье Ж., Делиль Ж.Ю. // ТИИЭР. 1987. Т.75. N 11. С.21.
5. Кей С.М., Марпл-мл С.Л. // ТИИЭР. 1981. Т.69. N 11. С.5.
6. Nickel U. // IEE Proc. F. 1988. V.135. N 1. P.7.
7. Kumaresan R., Tufts D.W. // IEEE Trans. 1983. V.AES-19. N 1. P.134.
8. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. — М.: Радио и связь, 1986. — 448 с.

Львовский научно-исследовательский радиотехнический институт

Поступила в редакцию 21 апреля 1992 г.

ALGEBRAIC AND ASYMPTOTIC RELATIONS FOR SUPERRESOLUTION MEHTODS

V.S.Il'kiv

This paper presents a news Capon method, maximum-entropy method and Kumaresan-Tufts method with the use a vector of parameters and powers of covariance matrix of the complex array output data vectors. Algebraic relations between Capon and maximum-entropy methods, between projection and Kumaresan-Tufts methods, and asymptotic relation between Capon and projection methods, between maximum-entropy and Kumaresan-Tufts methods if the signal/noise ratio goes to infinity are proofed.