

УДК 621.391.2

ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. Ю. Волков, В. В. Костяев

Предложена постановка и решение задачи рекуррентной фильтрации коррелированных флуктуаций интенсивности нестационарного оптического излучения при одноэлектронной регистрации в дискретные моменты времени. С использованием байесовской теории найден квазиоптимальный алгоритм фильтрации марковской последовательности с гамма-распределением в классе \mathcal{Y}_2 -минимаксных правил, основанных на негауссовых приближениях для апостериорных распределений.

ВВЕДЕНИЕ

Задача фильтрации интенсивности принимаемого оптического излучения возникает в системах атмосферного и подводного лазерного зондирования, оптической локации и связи. Характер случайных изменений интенсивности оптического поля экспериментально изучен, что позволяет указать параметрические модели флуктуаций и использовать их для построения рекуррентных алгоритмов [1–4].

Требуется оценивать (фильтровать) эти изменения, которые могут содержать регулярные и случайные составляющие, а также обнаруживать моменты скачкообразных изменений (разладок) [3–12].

Обычно полагается, что интенсивность $\lambda_t(\theta_t)$ есть известная (нелинейная) функция марковского параметра θ_t . Для построения оптимального алгоритма нелинейной фильтрации λ_t по наблюдениям N_t , представляющим случайный точечный процесс, надо решить дифференциальное уравнение эволюции апостериорной плотности $p_t(\lambda_t/N_t)$.

Как правило, точное решение уравнения получить нельзя. Ввиду практической нереализуемости оптимальных процедур осуществляется переход к подоптимальным квазилинейным алгоритмам путем линеаризации дифференциальных уравнений для математического ожидания и дисперсии апостериорной плотности вероятности (АПВ). Такие решения предложены в работах [8, 9], где рассмотрены случаи логарифмически нормальных и экспоненциальных флуктуаций интенсивности оптического поля.

Целью данной работы является решение задачи рекуррентной фильтрации коррелированных флуктуаций интенсивности, имеющих априорное гамма-распределение, при одноэлектронной регистрации оптического

поля. Предлагается постановка и решение задачи в дискретном времени. Построение квазиоптимальных алгоритмов основано на использовании негауссовского приближения для АПВ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть выходные сигналы фотоприемника в режиме счета фотоэлектронов $y_k = N_{t_k} - N_{t_k-T}$ поступают дискретно через равные интервалы времени $\Delta \geq T$, где T — время регистрации. Величины y_k принимают целочисленные значения и имеют условно пуассоновские распределения

$$p(y_k/x_k) = x_k^{y_k} \exp(-x_k)/y_k!, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Параметры x_k связаны с интенсивностью оптического излучения

$$x_k = \alpha \int_{t_k-T}^{t_k} \lambda_t dt,$$

где α — известный коэффициент пропорциональности [4].

Будем считать, что время регистрации меньше интервала корреляции флуктуаций интенсивности, так что последовательность $\{x_k\}$ неотрицательных случайных величин хорошо описывает флуктуации интенсивности λ_t . Требуется рекуррентно оценивать $\{x_k\}$ по наблюдениям $\{y_k\}$, используя стандартные критерии качества, такие как минимум среднеквадратической ошибки (МСКО) или максимум апостериорной вероятности (МАВ).

Положим, что нестационарная последовательность $\{x_k\}$ является марковской с одномерным гамма-распределением, начальная и переходные плотности которой имеют вид

$$\pi(x_1) = d_1^{\nu+1} x_1 \exp(-d_1 x_1)/\Gamma(\nu+1), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \pi(x_k/x_{k-1}) &= \frac{d_k}{1-r} \left(\frac{d_k x_k}{r d_{k-1} x_{k-1}} \right)^{\nu/2} \exp \left(-\frac{d_k x_k + r d_{k-1} x_{k-1}}{1-r} \right) \times \\ &\times I_\nu \left(2 \sqrt{d_{k-1} d_k r x_{k-1} x_k} / (1-r) \right), \quad k > 1, \end{aligned}$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, $d_k > 0$, $\nu > -1$ есть параметры масштаба и формы гамма-распределения, а r — коэффициент корреляции между соседними значениями x_k и x_{k-1} , $0 \leq r < 1$.

В этом случае все одномерные плотности

$$\pi(x_k) = \int_0^\infty \pi(x_k/x_{k-1}) \pi(x_{k-1}) dx_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

являются гамма-распределениями с параметрами ν и d_k . Безусловные распределения для фотоотсчетов $\{y_k\}$ оказываются отрицательно биномиальными, что справедливо для многомодового излучения [4].

Трудностью использования байесовского подхода является отсутствие в большинстве случаев информации о параметрах ν , r и $\{d_k\}$ априорных плотностей, поэтому важное значение имеет исследование влияния на качество фильтрации отклонений параметров от их истинных значений.

Наибольшее влияние оказывают скачкообразные изменения параметров, поэтому представляет интерес учет таких изменений при синтезе алгоритмов фильтрации.

РЕКУРРЕНТАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В СОПРЯЖЕННОМ КЛАССЕ ПЛОТНОСТЕЙ

Основные соотношения для апостериорных плотностей вероятности (АПВ) $w(x_k/y^k)$, где $y^k = (y_1 y_2 \dots y_k)$, при рекуррентной фильтрации марковской последовательности записываются в виде [13]

$$w(x_k/y^k) = [p(y_k/x_k, y^{k-1})]^{-1} p(y_k/x_k, y^{k-1}) \tilde{w}(x_k/y^{k-1}), \quad (3)$$

$$\tilde{w}(x_k/y^{k-1}) = \int_x \pi(x_k/x_{k-1}) w(x_{k-1}/y^{k-1}) dx_{k-1},$$

где $\tilde{w}(x_k/y^{k-1})$ является экстраполированной на шаг вперед плотностью, а условная плотность $p(y_k/x_k, y^{k-1})$ равна

$$p(y_k/x_k, y^{k-1}) = \int_x p(y_k/x_k, y^{k-1}) \tilde{w}(x_k/y^{k-1}) dx_k.$$

Предлагаемый способ конструирования апостериорных распределений относится к ситуации, когда одношаговая функция правдоподобия $p(y_k/x_k, y^{k-1})$ обладает конечномерной достаточной статистикой $U_k(y^k)$ для параметра x_k , т. е.

$$p(y_k/x_k, y^{k-1}) = g(x_k, U_k(y^k)) \Sigma(y^k) \quad (4)$$

факторизуется с выделением ядра правдоподобия $g(\cdot, \cdot)$ и некоторой функции от наблюдений $\Sigma(y^k)$, независящей от x_k . Это условие выполняется в рассматриваемом случае, что следует из (1), а также справедливо для широкого класса распределений, используемых для описания выходных сигналов приемных устройств (гауссовского, гамма, биномиального, отрицательно биномиального, Вейбулла и др.).

При выполнении условия (4) возможно построение естественно сопряженного семейства распределений $P_0 : \{p_0(x, \gamma_0)\}$ для описания фильтруемого параметра $x \in \chi$, где $\gamma_0 \in \Gamma_0$ есть конечномерный параметр, причем распределения из P_0 имеют вид

$$p_0(x_0, \gamma_0) = g(x, \gamma_0)_x / g(x, \gamma_0) dx.$$

На базе естественно сопряженного семейства удается получить класс самовоспроизводящихся апостериорных плотностей в ряде задач рекуррентного оценивания постоянных параметров [14, 16].

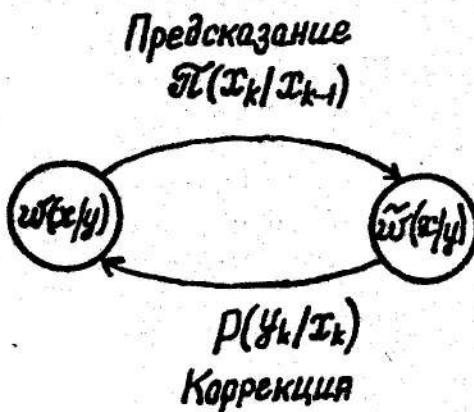


Рис. 1

Точное решение задачи рекуррентного оценивания можно получить, если удается найти самовоспроизводящийся класс плотностей $\{p(x, \gamma), \gamma \in \Gamma\}$, куда вместе с априорной попадают апостериорные плотности на каждом шаге. Схема рекуррентных вычислений в этом случае оказывается замкнутой и изображена на рис. 1. Алгоритм рекуррентной фильтрации включает рекуррентное вычисление конечномерных параметров $\tilde{\gamma}$ и γ экстраполированной и апостериорной плотностей вероятности

$$\tilde{\gamma}_k = \varphi_k(\gamma_{k-1}), \quad \gamma_k = f_k(\tilde{\gamma}_k, U_k), \quad k > 1,$$

где $\varphi_k(\cdot)$ и $f_k(\cdot)$ — некоторые функции, зависящие от параметров переходной плотности и функции правдоподобия.

Как правило, точное решение требует последовательного расширения семейства $\{p(x, \gamma)\}$ на каждом шаге, что влечет увеличение числа вычисляемых компонент параметра γ . Схема рекуррентных вычислений таким образом перестает быть замкнутой [24].

Для практической реализации целесообразно ограничить число параметров и замкнуть схему вычислений. Это может быть достигнуто введением параметрического класса "желаемых" плотностей \mathcal{U} для аппроксимации экстраполированных и апостериорных распределений и переходом

к квазиоптимальным решениям. Степень приближения для АПВ при этом связана с "широтой" выбранного семейства.

Схема приближенных рекуррентных вычислений изображена на рис. 2. В задачах рекуррентной фильтрации случайных последовательностей с зависимыми значениями экстраполированные плотности обычно не попадают в самовоспроизводящийся класс, даже если априорные распределения выбираются из этого класса. Использование расширенных сопряженных семейств для аппроксимации экстраполированных апостериорных плотностей представляется обоснованным при сильной степени неопределенности относительно статистической динамики фильтруемого параметра, поскольку сопряженные семейства наилучшим образом "согласованы" с функцией правдоподобия.

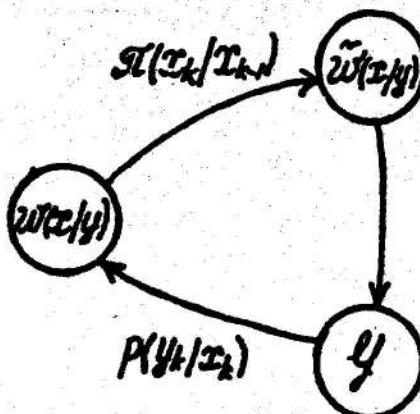


Рис. 2

Проблема выбора класса "желаемых" плотностей \mathcal{Y} тесно связана с проблемой выбора априорных распределений в задачах байесовского оценивания [16, 17]. Среди множества методов заслуживает внимания \mathcal{Y} -минимаксный подход, введенный Роббинсом и реализующий принцип стабильного или робастного оценивания [17].

Если класс \mathcal{Y} содержит всевозможные априорные распределения, то \mathcal{Y} -минимаксный подход приводит к традиционному минимаксному решению. С другой стороны, единственное априорное распределение в классе \mathcal{Y} соответствует байесовскому подходу.

В простейшем случае минимаксное решение ищется в классе \mathcal{Y}_2 распределений с одинаковыми первыми двумя моментами [19].

После вычисления параметров $\{\gamma_k\}$ АПВ алгоритм байесовской фильтрации для последовательности $\{x_k\}$ строится исходя из используемого критерия оптимальности оценок. В данном случае необходимо на каждом шаге вычислять математическое ожидание (или моду) АПВ. Если используется приближенное вычисление апостериорных плотностей, то получаемые алгоритмы фильтрации будут квазиоптимальными. Однако

используемые приближения могут быть существенно негауссовскими, что позволяет учесть имеющиеся априорные сведения о флуктуациях интенсивности оптического излучения.

ФИЛЬТРАЦИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ С ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПО РЕГИСТРИРУЕМОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФОТООТСЧЕТОВ

Рассмотрим рекуррентную фильтрацию марковской гамма-последовательности с известными параметрами распределений (2).

На первом шаге фильтрации в силу естественной сопряженности (1) и (2) плотность $w(x_1/y_1)$ является гамма-распределением с параметрами $b_1 = \nu + 1$, $c_1 = d_1 + 1$.

Предположим, что АПВ на $(k - 1)$ -м шаге аппроксимируется гамма-плотностью с параметрами b_{k-1} и c_{k-1}

$$w(x_{k-1}/y^{k-1}) = c_{k-1}^{b_{k-1}+1} x_{k-1}^{b_{k-1}} \exp(-c_{k-1}x_{k-1}) / \Gamma(b_{k-1} + 1).$$

Тогда экстраполированная плотность вероятности (ЭПВ) $\tilde{w}(x_k/y^{k-1})$ уже не будет гамма-распределением, а оказывается конфлюэнтной гипергеометрической плотностью

$$\tilde{w}(x_k/y^{k-1}) \propto x_k^\nu \exp\left(-\frac{dk}{1-r} x_k\right) {}_1F_1(b_{k-1} + 1, \nu + 1; G_k x_k), \quad (5)$$

где $G_k = r d_{k-1} d_k / [d_{k-1} r + c_{k-1} (1-r)] (1-r)$, ${}_1F_1(\cdot, \cdot; \cdot)$ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция. Знак \propto обозначает пропорциональность.

Ясно, что в общем случае АПВ не попадает в естественно сопряженный класс. Однако, можно попытаться обойтись без его расширения, используя \mathcal{Y}_2 -минимаксный подход.

Покажем, что гамма-приближение для ЭПВ $\tilde{w}(x_k/y^{k-1})$ приводит к \mathcal{Y}_2 -минимаксной оценке \hat{x}_k при квадратичной функции потерь. Неструдно видеть, что оценка в гамма-приближении линейна по новому поступившему наблюдению y_k , т. е.

$$\hat{x}_k = (1 - K_k) \mu_k + K_k y_k,$$

где оптимальное значение $K_k = D_k / (D_k + \mu_k)$ зависит от математического ожидания μ_k и дисперсии D_k экстраполированной плотности.

Средний риск этой оценки не зависит от формы ЭПВ, а только от ее первых двух моментов $\bar{R}(\hat{x}_k) = (1 - K_k)^2 D_k + \mu_k K_k^2$.

Поскольку \hat{x}_k есть байесовская оценка для гамма-плотности \tilde{w} , и ее риск постоянен для всех $\tilde{w} \in \mathcal{Y}_2$, то \hat{x}_k есть \mathcal{Y}_2 -минимаксная оценка, а гамма-распределение есть наименее благоприятное распределение (ИБР) в классе \mathcal{Y}_2 . Таким образом, \mathcal{Y}_2 -минимаксный подход соответствует гамма-приближению для ЭПВ с параметрами \tilde{b}_k и \tilde{c}_k . Это служит обоснованием

использования гамма-приближения для АПВ в данном случае, т. е. рекуррентной фильтрации в естественно сопряженном классе плотностей.

Для вычисления μ_k и D_k воспользуемся выражением для характеристической функции конфлюэнтной гипергеометрической плотности [15]

$$\Theta(j\omega) = (1 - j\omega q_k)^{b_{k-1}-\nu} / (1 - j\omega p_k)^{b_{k-1}+1}, \quad b_{k-1} > \nu,$$

где

$$p_k = [rd_{k-1} + c_{k-1}(1-r)] / d_k c_{k-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_k &= b_{k-1}(p_k - q_k) + p_k + \nu q_k, \\ D_k &= b_{k-1}(p_k^2 - q_k^2) + p_k^2 + \nu q_k^2, \quad k > 1 \end{aligned} \quad (6)$$

и параметры \tilde{b}_k и \tilde{c}_k можно определить по формулам

$$\tilde{b}_k = \mu_k^2 / D_k - 1, \quad \tilde{c}_k = \mu_k / D_k.$$

Теперь АПВ на k -м шаге также будет гамма-распределением с параметрами

$$b_k = \tilde{b}_k + y_k, \quad c_k = \tilde{c}_k + 1, \quad k > 1. \quad (7)$$

Алгоритм рекуррентной байесовской фильтрации по МСКО в гамма-приближении определяется формулой

$$\hat{x}_k = (b_k + 1) / c_k, \quad k > 1. \quad (8)$$

Апостериорная дисперсия этой оценки равна $P_k = (b_k + 1) / c_k^2$.

Оптимальная МАВ-оценка есть мода апостериорной плотности

$$\hat{x}_k^{\text{МАВ}} = b_k / c_k, \quad k > 1.$$

Заметим, что величина μ_k есть оптимальный по МСКО прогноз на шаг вперед. Его можно переписать в виде линейной функции предыдущей оценки

$$\mu_k = m_k + r(d_{k-1}/d_k)(\hat{x}_{k-1} - m_k), \quad k > 1,$$

где $m_k = (\nu + 1)/d_k$ — априорное математическое ожидание.

Алгоритм фильтрации (8) можно представить в виде, отражающем принцип "предсказание-корреляция"

$$\hat{x}_k = \mu_k + K_k(y_k - \mu_k), \quad k > 1. \quad (9)$$

Коэффициент усиления фильтра

$$K_k = 1/c_k = (\mu_k/D_k + 1)^{-1}, \quad k > 1$$

нелинейно зависит от предыдущих оценок наблюдений, входящих в μ_k и D_k , что существенно отличает этот алгоритм от обычного фильтра Калмана [13].

Для рекуррентного вычисления K_k получаем

$$K_k = 1/[\mu_k g_k(\hat{x}_{k-1}) + 1], \quad k > 1, \quad (10)$$

$$g_k(\hat{x}_{k-1}) = \left\{ \hat{x}_{k-1} (rd_{k-1}/d_k) [(rd_{k-1}/d_k) K_{k-1} + 2q_k] + q_k^2 (\nu + 1) \right\}. \quad (11)$$

Структура фильтра изображена на рис. 3, где \square обозначает элемент задержки на один шаг, а $K_1 = 1/(d_1 + 1)$ и $\mu_1 = m_1$ есть начальные значения.

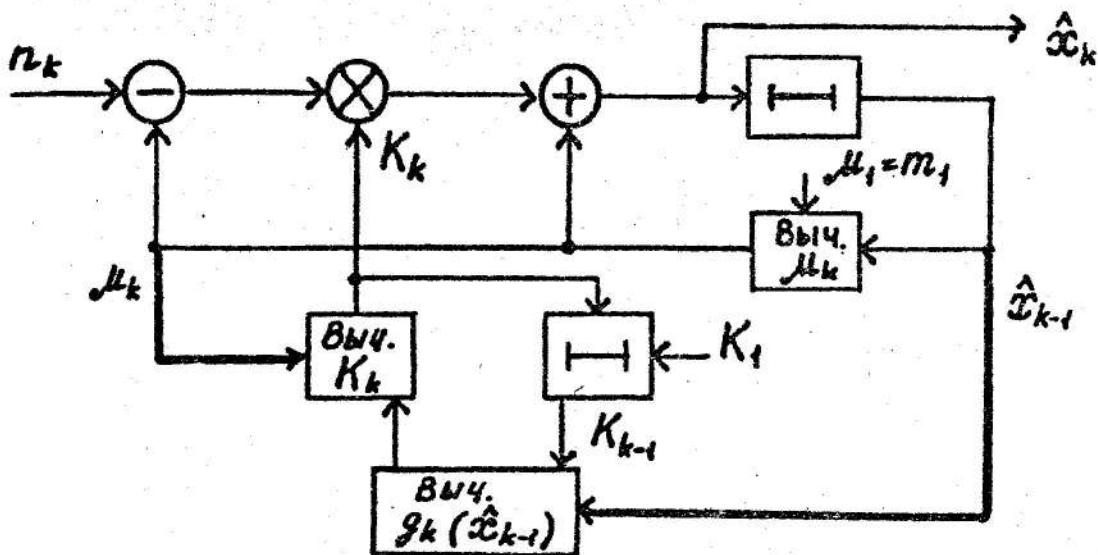


Рис. 3

Известно, что рекуррентный алгоритм фильтрации в гауссовском приближении для АПВ имеет вид (9), однако вычисление коэффициентов усиления производится иначе [13].

Для обычного фильтра Калмана K_k не зависит от предыдущих оценок и может вычисляться заранее по формулам

$$K_k = 1/(m_k g_k + 1), \quad (12)$$

$$g_k = 1/\left[\sigma_k^2(1 - r^2) + (r\sigma_k/\sigma_{k-1})^2 K_{k-1} m_{k-1}\right], \quad k > 1,$$

где σ_k^2 — априорная дисперсия. Здесь учтено, что дисперсия пуссоновских наблюдений совпадает с математическим ожиданием.

Для квазилинейного фильтра (расширенного фильтра Калмана) [13] справедлива формула (10), но вместо функции $g_k(\hat{x}_{k-1})$, зависящей от предыдущей оценки, вычисляется g_k по формуле (12). Таким образом, в этом случае коэффициенты усиления зависят от предыдущих оценок только через прогнозы μ_k .

Анализ этих выражений позволяет выявить особенности алгоритма фильтрации, основанного на гамма-приближении для АПВ. В его структуре имеются две связи, выделенные на рисунке жирными линиями.

Переход к квазилинейному алгоритму осуществляется путем исключения связи с предыдущей оценкой \hat{x}_{k-1} и использования формулы (12) вместо (11). Следующий за этим обрыв другой связи с заменой прогноза μ_k на математическое ожидание m_k приводит к структуре фильтра Калмана.

Следует отметить, что фильтр, основанный на гамма-приближении для АПВ, и квазилинейный фильтр в гауссовском приближении реализуют алгоритмы нелинейной фильтрации, тогда как фильтр Калмана является строго линейным.

КАЧЕСТВО ФИЛЬТРАЦИИ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К ИЗМЕНЕНИЯМ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Качество фильтрации случайных изменений интенсивности с использованием рассмотренных алгоритмов нелинейной и линейной фильтрации исследовалось с помощью статистического моделирования в случае марковской гамма-последовательности. Для этого на каждом шаге вычислялся выборочный средний квадрат ошибки

$$\hat{D}(k) = (1/m) \sum_{i=1}^m (x_k^{(i)} - \hat{x}_k^{(i)})^2,$$

с усреднением по m реализациям. Результаты моделирования представлены на рис. 4 для гамма-фильтра (кривые 1), квазилинейного фильтра в гауссовском приближении (кривые 2) и фильтра Калмана (кривые 3) при скачке m_x от значения 2 до $m_x = 20$ и $\nu = 49$, $r = 0,5$, $M = 70$. Фильтры были рассчитаны на значение $m_x = 2$.

Влияние неизвестного параметра масштаба на точность оценивания для гамма-фильтра исследовалось в стационарном случае $d_k = d$. Графики на рис. 5 и рис. 6 показывают изменения выборочного среднего квадрата ошибки гамма-фильтра для случаев известных и неизвестных значений параметра d . При фиксированном значении параметра формы ν изменения эквивалентны изменениям математического ожидания гамма-последовательности $m_x = (\nu + 1)/d$ и всех других моментов. Нижние кривые соответствуют известному d , а две другие построены в случаях настройки фильтра на $m_x = 2$ и $m_x = 20$.

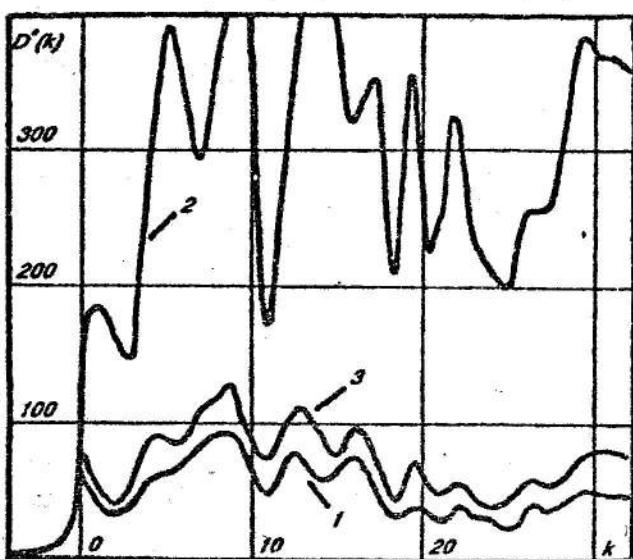


Рис. 4

Приведенные зависимости позволяют сделать заключение о том, что в случае значительных изменений параметров масштаба его неизнание вносит довольно существенные потери, которые возрастают с увеличением параметра формы ν . Это указывает на целесообразность адаптации алгоритма при нестационарных параметрах априорного гамма-распределения.

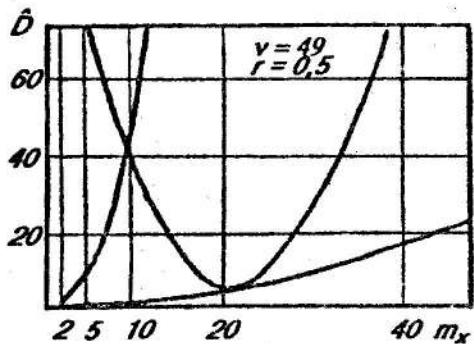


Рис. 5

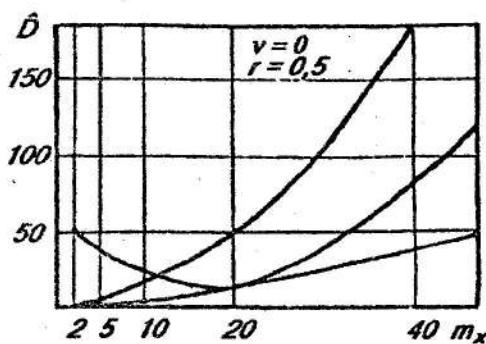


Рис. 6

Однако, чувствительность гамма-фильтра к изменениям параметра масштаба оказалась значительно меньшей, чем у двух других фильтров, что иллюстрируют графики на рис. 7-9. На них показаны изменения сглаженных значений $\hat{D}(k) = \sum_{i=1}^k \hat{D}(k)/(k-1)$ при скачке параметра масштаба, который произошел на 50-м шаге при постоянных r и $\nu = 0$. До скачка

$m_x = 2$, а после него $m_x = 20$. Штриховые линии на рис. 8 представляют результат сглаживания по времени кривых на рис. 4. С ростом коэффициента корреляции r выигрыш гамма-фильтра по сравнению с фильтром Калмана увеличивается, достигая при $r = 0,99$ 6–8 дБ [20].

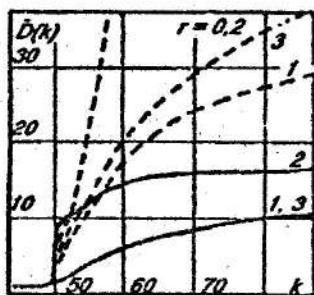


Рис. 7

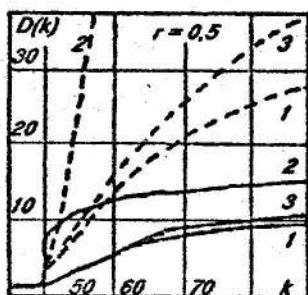


Рис. 8

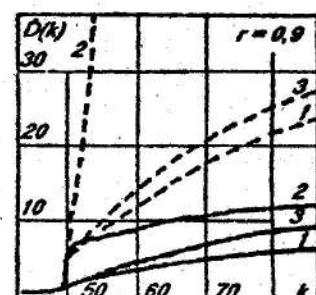


Рис. 9

Сплошные линии на рисунках соответствуют введению информации о скачке в фильтры, штриховые — случаю, когда информация о скачке не вводилась. Квазилинейный фильтр в гауссовском приближении оказался весьма чувствительным к подобной расстройке и расходился (штриховые кривые 2). Гамма-фильтр был более устойчивым по сравнению с фильтром Калмана и обеспечивал в 1,5–2 раза меньшие ошибки. В этом проявилась рабочесть гамма-фильтра, вытекающая из Y_2 -минимаксного подхода при синтезе.

Можно отметить, что характеристики фильтров оказываются более чувствительны к изменениям параметров распределения в случае много-модового оптического излучения, чем в случае одномодового. Коррелированность флуктуаций интенсивности излучения способствует уменьшению ошибок.

АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРАХ ГАММА-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Выделим случаи медленных и скачкообразных изменений параметров. При медленных изменениях параметры можно считать неизвестными величинами, постоянными за время наблюдения. Применяя адаптивный байесовский подход [18], вместо неизвестных параметров в основном алгоритме фильтрации интенсивности можно использовать состоятельные оценки, полученные по выборке $\{y_1, \dots, y_N\}$ до начала или в процессе фильтрации.

Из выражений (1) и (2) следует, что безусловные распределения выборок y_k являются отрицательно биномиальными

$$p(y_k) = \frac{d^{\nu+1}}{(d+1)^{\nu+y_k+1} y_k!} \frac{\Gamma(\nu + y_k + 1)}{\Gamma(\nu + 1)}, \quad k = 1.$$

Его первые моменты $M(y) = (\nu + 1)/d$, $M(y^2) = (\nu + 1)(\nu + 2 + d)/d^2$, а дисперсия равна $D(y) = (\nu + 1)(d + 1)/d^2$. Среднее значение $\sum_1^N y_k/N$ является постоянной оценкой математического ожидания $m_1 = (\nu + 1)/d$ априорного распределения. При известном параметре формы ν оценка величины $\xi = 1/d$ равна $\hat{m}_1(\nu + 1)$, а ее дисперсия — $(d + 1)/(\nu + 1)/(dN)^2$.

При неизвестном параметре ν необходимо формировать оценку \hat{m}_2 второго момента m_2 априорного гамма-распределения. Поскольку $M(y^2) = m_1 + m_2$, то $\hat{m}_2 = \sum_{k=1}^N (y_k^2 - y_k)/N$.

Отсюда оценка величины $\eta = (\nu + 1)^{-1}$ определяется как $\hat{m}_2/\hat{m}_1^2 - 1$.

Для получения оценки коэффициента корреляции r запишем безусловную двумерную характеристическую функцию для величин y_k и y_{k-1}

$$\Theta_2(\omega_1, \omega_2) = d^{2(\nu+1)}(1-r)^{\nu+1} \times \\ \times \left\{ [d + 1 - r - (1-r)e^{j\omega_1}] [d + 1 - r - (1-r)e^{j\omega_2}] - d^2r \right\}^{-(\nu+1)}.$$

Отсюда получаем смешанный кумулянт

$$\hat{\alpha}_{11} = (j)^2 \frac{\partial \ln \Theta_2}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \Big|_{\omega_1=\omega_2=0} = r(\nu + 1)/d^2$$

и маргинальный коэффициент корреляции

$$R = \hat{\alpha}_{11}/D(y) = r/(d + 1).$$

Теперь оценка корреляции r выражается через выборочный коэффициент корреляции

$$\hat{R} = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} y_k y_{k-1} - \hat{m}_1^2 \right) / \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 - \hat{m}_1^2 \right)$$

в виде

$$\hat{r} = \hat{R}\hat{\xi}(1 + \hat{\xi}).$$

С увеличением объема выборки N оценки неизвестных параметров стремятся к истинным значениям, что обеспечивает асимптотическую \mathcal{Y}_2 -минимаксность аддитивного алгоритма. Моделирование показало, что достаточное с практической точки зрения качество обеспечивается уже при $N = 100$.

Значительно более сложной задачей является адаптация фильтра при быстрых изменениях параметров распределений. Рассмотрим случай однократного скачкообразного изменения в случайный момент времени.

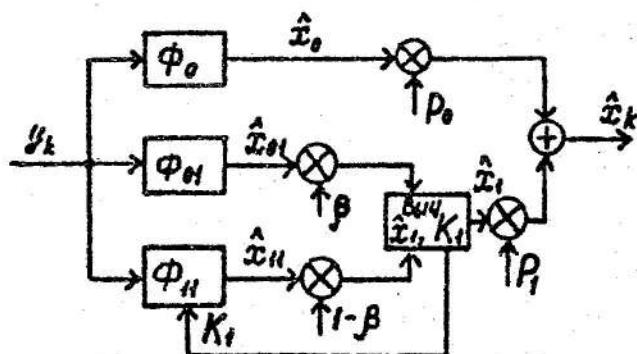


Рис. 10

Применяя байесовскую теорию рекуррентного оценивания, развитую в работе [22], можно построить оптимальный фильтр, который оказывается многоканальным. Для скачкообразного изменения параметра масштаба d алгоритм фильтрации в гамма-приближении для апостериорной плотности предложен в [21]. Он реализуется трехканальной структурой, изображенной на рис. 10. Весовые коэффициенты β , p_0 и p_1 вычисляются с использованием наблюдений y_k , что и определяет адаптивный характер фильтра. Достигаемый им выигрыш в точности оценивания по сравнению с одноканальной структурой зависит от величины скачка параметра. Величину выигрыша после окончания переходного процесса можно оценить по графикам на рис. 5 и 6. Вычисляемые при фильтрации апостериорные вероятности наличия $p_1(k)$ и отсутствия $p_0(k)$ скачка на $k+m$ шаге дают возможность осуществить обнаружение скачкообразного изменения с использованием порогового критерия $p_1(k) > p_{\text{пор}}$ (при $p_{\text{пор}} = 1/2$ получается оптимальный медианный обнаружитель [22]).

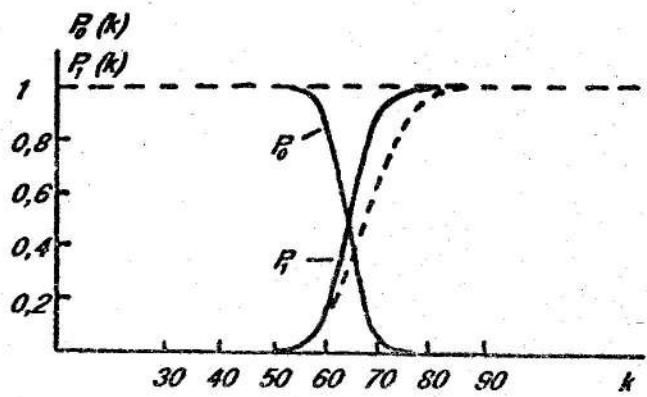


Рис. 11

Полученные моделированием зависимости $p_1(k)$ и $p_0(k) = 1 - p_1(k)$ от k изображены на рис. 11 для $\nu = 0$, $\tau = 0,5$. Скачок производился на

50-м шаге, так что математическое ожидание изменяется от $m_x^{(0)} = 2$ до $m_x^{(1)} = 6$. При этом фильтр был настроен на значение $m_x^{(1)} = 8$. Для сравнения пунктиром показано изменение решающей статистики, полученной по схеме кумулятивных сумм [23].

Следует отметить, что скачкообразные изменения интенсивности излучения соответствуют наиболее неблагоприятному случаю с точки зрения ошибок фильтрации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставлена и решена задача рекуррентного оценивания случайной интенсивности оптического излучения по регистрируемой последовательности фотоотсчетов. При построении квазиоптимального фильтра использована байесовская теория нелинейной фильтрации нестационарной марковской последовательности с гамма-распределением. Апостериорное распределение аппроксимировалось гамма-плотностью, которая в данном случае является наименее благоприятным распределением в классе плотностей вероятности с одинаковыми первыми двумя моментами.

Полученная структура фильтра отличается от известных структур и обеспечивает меньшие ошибки фильтрации, а также большую устойчивость характеристик фильтра при изменениях параметров распределений.

Значительные изменения параметров априорного распределения вносят потери, которые можно снизить путем адаптации фильтра на стадии обучения.

Оптимальная структура в случае однократного скачкообразного изменения параметра является трехканальной и позволяет также обнаруживать момент появления скачка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зуев В. Е., Банах В. А., Покасов В. В. Оптика турбулентной атмосферы. — Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 270 с.
2. Орлов В. М., Самохвалов И. В., Креков Г. М. и др. Сигналы и помехи в лазерной локации / Под ред. Зуева В. Е. — М.: Радио и связь, 1985. 264 с.
3. Snyder D. L. Random Point Processes. — N. Y.: Wiley, 1975. 485 p.
4. Гальярди Р. М., Карп Ш. Оптическая связь. — М.: Связь, 1978. 424 с.
5. Segall A., Davis M. M., Kailath T. // IEEE Trans., 1975. V. IT-21. N 2. P. 143.
6. Misra P. N., Sorenson H. W. // IEEE Trans., 1975. V. IT-21. N 1. P. 87.
7. Галун С. А., Трифонов А. П. // Автоматика и телемеханика, 1982. N 6. C. 95.

8. Davidson F. M., Pomanski J. // IEEE Trans., 1976. V. IT-22. N 3. P. 366.
9. Davidson F. M., Carlson R. T. // IEEE Trans., 1979. V. IT-25. N 5. P. 620.
10. Boel R. K., Benes V. E. // IEEE Trans., 1980. V. IT-26. N 5. P. 561.
11. Davidson F. M., Park Y. Ch. // IEEE Trans., 1983. V. IT-29. N 2. P. 306.
12. Wan C. B., Davis M. H. A. // IEEE Trans., 1977. V. IT-23. N 4. P. 538.
13. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Сов. радио, 1975. 704 с.
14. Birdsall T. G., Gobien J. O. // IEEE Trans., 1973. V. IT-19. N 6. P. 760.
15. Волков В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика, 1990. Т. 33. N 2. С. 247.
16. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974. 491 с.
17. Berger J. O. Statistical Decision Theory. Foundations, Concepts and Methods. — N. Y.: Springer-Verlag, 1980. 360 p.
18. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. — М.: Сов. радио, 1977. 432 с.
19. Jackson D. A., O'Donovan T. M., Zimmer W. J., Deely J. J. // Biometrika, 1970. V. 57. N 2. P. 439.
20. Волков В. Ю., Костяев В. В. Фильтрация случайных изменений интенсивности оптического излучения / Вероятностные модели и обработка случайных сигналов и полей. — Киев: УМК ВО, 1991. С. 56.
21. Волков В. Ю., Костяев В. В. Обнаружение скачкообразных изменений интенсивности оптического излучения / Методы распознавания случайных процессов. — Вильнюс: Ин-т автоматики и телемеханики, 1990. С. 36.
22. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Автоматика и телемеханика, 1985. N 1. С. 48.
23. Бассвиль М., Вилски А., Банвенист А. и др. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем. — М.: Мир, 1989. 278 с.
24. Волков В. Ю. // Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1990. N 4. С. 75.

Санкт-Петербургский
государственный университет
телекоммуникаций

Поступила в редакцию
25 июня 1993 г.

FILTERING OF A STOCHASTIC OPTICAL RADIATION INTENSITY

V. Ju. Volkov, V. V. Kostyaev

The formulation and solution of the recurrent filtering problem is proposed for correlated nonstationary optical radiation intensity fluctuations with

discrete-time counting registration. By use of Bayes theory the suboptimal filtering algorithm was fined among Y_2 -minimax decision rules based on non-Gaussian approximations for posteriori distributions. Adaptive filtering version was considered for slow and jump-like variations of a posteriori distribution parameters.