

## ВОЗДЕЙСТВИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ПОГРАНИЧНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ НА НИЗКОЧАСТОТНОЕ ПОЛЕ В ВОЛНОВОДЕ

*Т. И. Бичуккая, Г. И. Макаров*

С помощью метода вертикальных мод и горизонтальных лучей, используя уравнение для фактора фокусировки, исследовано воздействие пограничной неоднородности на низкочастотное поле в волноводе. Оценено смещение траекторий нормальных волн в комплексную область и поле вдоль них и определены условия применимости продольного приближения расчета амплитуды и фазы поля в двумерно нерегулярном волноводе. Выявлен масштаб поперечного размера неоднородности, на котором происходит смена качественной зависимости поля от расстояния.

Наличие объемной неоднородности в одной из конечно проводящих пограничных сред волновода приводит к тому, что волновод становится двумерно нерегулярным, поскольку его высота и отражательные свойства соответствующей стенки становятся функциями продольной и поперечной горизонтальных координат в области расположения неоднородности. В таких условиях требуется принципиально новый подход к решению двумерно нерегулярной волноводной задачи по сравнению с задачей для одномерно нерегулярного волновода, свойства которого меняются только вдоль трассы распространения.

Одним из таких подходов является метод интегрального уравнения, использованный в [1] для оценки воздействия ограниченной нерегулярности, вызванной терминатором, на ОНЧ поле, описываемое лишь одной модой. В результате были описаны такие явления, как фокусировка, дифракция и отражение поля от диффузной границы для волны частотой 45 Гц. Другой метод, лучеволновой, был использован в [2] для оценки воздействия на ОНЧ поле возмущения полярной ионосферы, вызванного солнечной вспышкой. При этом амплитуда поля не была определена в [2], а потеря энергии оценивалась качественно по рассчитанным лучевым траекториям нормальных волн. В лучеволновом методе, разработанном нами, для расходимости лучей было использовано дифференциальное уравнение второго порядка, выведенное в [3], которое интегрировалось нами вместе с уравнениями, описывающими лучевые траектории нормальных волн. В результате была достигнута определенная корректность при вычислении амплитуды поля нормальных волн в двумерно нерегулярном волноводе,

что особенно важно для низкочастотного диапазона волн, для которого необходимо учитывать несколько членов в сумме нормальных волн. Опишем этот метод несколько подробнее.

Отметим, что лучеволновой метод, как и эквивалентный ему метод двухмасштабных разложений, опирается на два разных масштаба изменения свойств среды — вертикальный  $h$  и горизонтальный  $L = \left| \frac{\lambda_n}{\nabla \lambda_n} \right|$  (где  $\lambda_n$  — горизонтальное волновое число нормальной волны в волноводе), связанные неравенством  $h \ll L$ . Кроме того, для применимости используемого в дальнейшем нулевого приближения геометрической оптики горизонтальный масштаб неоднородности должен быть велик по сравнению с длиной волны  $kL \gg 1$ .

В декартовой системе координат с осью  $z$ , направленной перпендикулярно стенкам волноводного канала, решение неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta \mathcal{H}_y + k^2 \mathcal{H}_y = k \frac{\partial j_{cz}}{\partial x} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}},$$

к которому сводятся уравнения Максвелла для одной из компонент электромагнитного поля  $\mathcal{H}_y$  в пренебрежении малой деполяризацией поля вертикального электрического диполя, ищется в виде разложения по нормальнym волнам или модам

$$\mathcal{H}_y = \sum_n \psi_n(x, y) U_n(x, y, z),$$

а коэффициенты разложения  $\psi_n(x, y)$  определяются в дальнейшем с помощью лучевого метода.

Таким образом, задача разбивается на две: поперечную, определяющую распределение поля  $U_n(x, y, z)$  по вертикальной координате  $z$ , и продольную, определяющую зависимость поля  $\psi_n(x, y)$  от горизонтальных координат.

Поперечная задача формулируется в каждом сечении нерегулярного волновода, характеризующемся локальной высотой нерегулярного волновода и локальным импедансом верхней стенки волновода. В случае волновода Земля–ионосфера локальные характеристики стенок волновода определяются в результате интегрирования по вертикальной координате дифференциальных уравнений для компонент электромагнитного поля, распространяющегося в ионосфере. Начальные значения задачи интегрирования в ионосфере находятся на верхней границе существенной области с помощью метода ВКБ, а ионосферный импеданс, отнесенный к нижней границе существенной области, пересчитывается на эффективную высоту отражения в ионосфере. Эффективная высота отражения характеризуется слабой зависимостью импеданса от угла падения волны на слой [4, 5]. В результате решения задачи интегрирования в ионосфере определяются

эффективная высота отражения и импеданс ионосферы — параметры, необходимые для решения поперечной задачи в волноводе.

Решение поперечной задачи в каждом сечении нерегулярного волновода не имеет отличий от аналогичного решения в регулярном волноводе [6].

Результатом решения поперечной задачи, при импедансных граничных условиях на обеих стенках волноводного канала

$$\frac{d^2 U_n}{dz^2} = -\mu_n k^2 U_n,$$

$$\left. \frac{dU_n}{dz} \right|_{z=0} = -ik\delta_3 U_n, \quad \left. \frac{dU_n}{dz} \right|_{z=h(x,y)} = ik\delta(x,y)U_n,$$

являются собственные числа  $\mu_n(x, y)$ , удовлетворяющие характеристическому уравнению

$$(\eta_n^2 - tg)tg\eta_n = (t + g)\eta_n,$$

$$\eta_n = kh\sqrt{\mu_n(x, y)}, \quad t = -ikh(x, y)\delta(x, y), \quad g = -ikh(x, y)\delta_3,$$

и собственные функции

$$U_n(x, y, z) = \cos \sqrt{\mu_n(x, y)} kz - \frac{ik\delta_3}{\sqrt{\mu_n(x, y)}} \sin \sqrt{\mu_n(x, y)} kz,$$

обладающие свойством ортонормированности

$$\int_0^{h(x,y)} U_n U_m dz = N_n(x, y)\delta_{nm},$$

$$N_n(x, y) = \frac{h(x, y)}{2} \left[ 1 + \frac{\sin 2\eta_n}{2\eta_n} - \frac{g}{\eta_n^2} (\cos 2\eta_n - 1) + \frac{g^2}{\eta_n^2} \left( 1 - \frac{\sin 2\eta_n}{2\eta_n} \right) \right].$$

По построенному ортонормированному поперечному базису проводится разложение решения исходной задачи.

Коэффициенты разложения  $\psi_n(x, y)$  являются решениями продольной задачи, которая, если пренебречь взаимодействием мод, распадается на систему независимых дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, которые всюду вне источника имеют вид

$$\nabla^2 \psi_n(x, y) + k^2 \lambda_n^2(x, y) \psi_n(x, y) = 0,$$

где  $\lambda_n(x, y)$  — горизонтальное волновое число. Решение полученных дифференциальных уравнений может быть построено с помощью метода геометрической оптики

$$\psi_n(x, y) = e^{\frac{i\Phi_n(x_1, y_1)}{\varepsilon}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{i}\right)^k B_k(x_1, y_1),$$

где  $\varepsilon = (kL)^{-1}$  — малый параметр задачи и новые переменные связаны со старыми с помощью соотношения  $(x_1, y_1) = (\varepsilon kx, \varepsilon ky)$ . В нулевом приближении метода можно определить фазу и амплитуду продольного распределения поля по уравнениям эйконала и переноса, в которых показателем преломления среды является горизонтальное волновое число. При этом в силу комплексности волнового числа  $\lambda_n(x, y)$ , если его мнимая часть намного меньше реальной части, можно записать уравнения эйконала и переноса в виде

$$(\nabla \Phi)^2 = \operatorname{Re} \lambda_n^2, \quad (1)$$

$$2\nabla B_0 \nabla \Phi + B_0 \Delta \Phi + \operatorname{Im} \lambda_n^2 B_0 = 0, \quad (2)$$

тогда лучи будут определять вещественные траектории нормальных волн, а мнимая часть квадрата горизонтального волнового числа войдет в определение амплитуды. Если указанное соотношение мнимой и реальной частей волнового числа не выполняется, то комплексный показатель преломления будет входить только в уравнение эйконала. Тогда лучевые траектории нормальных волн будут определены в комплексной области переменных  $(x, x')$  и  $(y, y')$  и фаза  $\Phi(x, y)$  и амплитуда  $B(x, y)$  будут также комплексными. Дальнейшее изложение мы продолжим, считая выполненным соотношение  $\operatorname{Re}(\lambda_n^2) \gg \operatorname{Im}(\lambda_n^2)$ , при котором амплитуда и фаза поля нормальной волны вдоль луча будут вещественными, и в дальнейшем проведем сравнение поля, рассчитанного по вещественным и комплексным траекториям нормальных волн.

Поскольку Гамильтониан имеет вид

$$H = \left( \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \operatorname{Re} \lambda_n^2(\vec{r}) \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \vec{p}^2 - \operatorname{Re} \lambda_n^2(\vec{r}) \right), \quad \vec{p} = \nabla \Phi, \quad (3)$$

то при условии номировки произвольного параметра  $\tau$

$$\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 = \operatorname{Re} \lambda_n^2(\vec{r}) \quad (4)$$

уравнение (1), характеризующее распределение фазы поля нормальной волны в горизонтальной плоскости в нулевом приближении геометриче-

ской оптики сводится к характеристической системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p}, \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \nabla \operatorname{Re} \lambda_n^2(\vec{r}), \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \vec{p} \cdot \vec{p}. \quad (5)$$

Расписывая систему (5) покомпонентно

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= p, & \frac{dp}{d\tau} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_n^2}{\partial x}, & \Phi &= \Phi_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Re} \lambda_n^2 d\tau, \\ \frac{dy}{d\tau} &= q, & \frac{dq}{d\tau} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_n^2}{\partial y}, & p^2 + q^2 &= \operatorname{Re} \lambda_n^2, \end{aligned} \quad (6)$$

получаем в результате интегрирования траекторию луча в горизонтальной плоскости  $(x, y)$  и фазу поля вдоль нее. Как следует из (6), изменение фазы нормальной волны в нерегулярном волноводе аддитивно накапливается по мере прохождения нерегулярного участка. В результате интегрирования уравнения переноса (2) получим для амплитуды поля вдоль луча выражение

$$B_{0n}(\tau) = \frac{B_{0n}(\tau_0)}{\sqrt{J}} e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{Im} \lambda_n^2 d\tau}, \quad (7)$$

где  $J = D(\tau)/D(\tau_0)$  — фактор расходности луча,  $D(\tau)$  — Якобиан перехода от декартовых к лучевым координатам. Фактор расходности  $J(\tau)$ , как показано в [3], при выборе в качестве независимой переменной фазы  $\Phi(\tau)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$J'' \Phi \Phi + \mu J = 0, \quad \mu = -\frac{1}{2} \frac{\Delta \log \operatorname{Re} \lambda_n^2}{\operatorname{Re} \lambda_n^2}, \quad (8)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа по горизонтальным координатам и  $\mu$  содержит первые и вторые производные от горизонтального волнового числа. При выводе уравнения (8) помимо характеристических уравнений (6) использовалось свойство ортогональности волнового вектора к касательному вектору вдоль луча  $(x'_\sigma, y'_\sigma)$ , где  $\sigma$  — параметр вдоль луча. Переописывая уравнение (8) в виде двух уравнений первого порядка в лучевых переменных  $\tau$

$$\frac{dJ}{d\tau} = M, \quad \frac{dM}{d\tau} = -\mu J \quad (9)$$

и присоединяя их к уравнениям (6), получим замкнутую систему уравнений для определения траектории нормальной волны и поля вдоль нее. Для

решения поставленной задачи Коши начальные условия для  $J$ ,  $J_\Phi$  определяются из промежуточных к (8) выражений

$$J = py'_\sigma - qx'_\sigma, \quad J'_\Phi = \frac{1}{2q\text{Re}\lambda_n^2} \left( \frac{\partial \text{Re}\lambda_n^2}{\partial y} \right) J - \frac{p'_\sigma}{q}.$$

Начальные значения фазы и амплитуды поля нормальной волны в точке выхода луча определяются из сшивания лучевого поля с полем отдельной моды на границе нерегулярного участка волновода.

Объединяя выражения для амплитуды и фазы поля вдоль луча с попечным распределением поля и суммируя эти выражения для различных нормальных волн, получим для  $\mathcal{H}_y$ -компоненты ТМ поля в нерегулярном волноводе выражение

$$\mathcal{H}_y = \sum_n U_n(z) \frac{B_{n0}}{\sqrt{J_n}} e^{i\left(\Phi_{n0} + \int_0^z \text{Re}\lambda_n^2 d\tau\right) - \frac{1}{2} \int_0^z \text{Im}\lambda_n^2 d\tau}.$$

Полученная формула отражает локальный характер передачи (вдоль луча) волнового возмущения, описываемый нулевым приближением геометрической оптики. Поле в волноводе представлено в виде суммы полей невзаимодействующих мод, модифицирующихся по мере прохождения нерегулярного участка волновода.

В случае комплексного показателя преломления нормировка (4) приводит к комплексному параметру  $\tau$ , что исключительно для численного интегрирования уравнений лучей. Выбор нормировки  $\tau$  в виде

$$\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 = 1,$$

для которой Гамильтониан получает представление

$$H = |\vec{p}| - \lambda_n(\vec{r}),$$

приводит к следующим уравнениям для лучей

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{p}{\lambda_n}, \quad \frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial x}, \quad \Phi_n = \Phi_{n0} + \int_{\tau_0}^\tau \lambda_n d\tau,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{q}{\lambda_n}, \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial y}, \quad p^2 + q^2 = \lambda_n^2,$$

где  $\tau$  — вещественный параметр, имеющий смысл длины дуги луча, а параметр  $\mu$  из уравнения (8) имеет вид

$$\mu = -\lambda_n^{-2} \Delta \log \lambda_n^2.$$

Тогда  $\mathcal{H}_y$ -компоненты поля определяется выражением

$$\mathcal{H}_y = \sum_n U_n(z) \frac{B_{n0}}{\sqrt{J_n}} e^{i\left(\Phi_{0n} + \int_0^z \lambda_n d\tau\right)},$$

в котором зависимость амплитуды поля от горизонтальных координат характеризуется расходностью и экспоненциальной зависимостью от минимальной части горизонтального волнового числа.

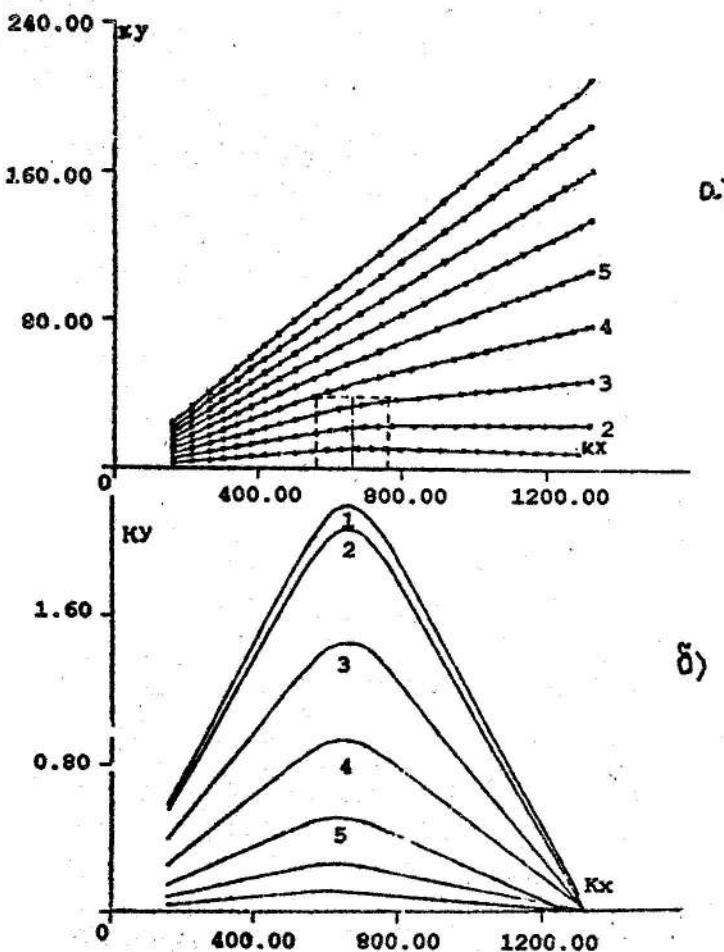


Рис. 1 а, б.

Результат воздействия конкретной неоднородности на поле частоты 10 кГц в иерогулярном волноводе был рассчитан интегрированием уравнений (6), (9) для объемного центрального симметричного возмущения верхней проводящей пограничной среды волновода. Расчет проводился как при вещественных, так и при комплексных траекториях нормальных

воли. В результате воздействия возмущения пограничной среды высота волновода  $h(x, y)$  и горизонтальное волновое число  $\lambda_n(x, y)$  описывались с помощью гауссовых функций, зависящих от двух горизонтальных координат. Масштаб изменения горизонтального волнового числа варьировался в интервале 1–7 первых зон Френеля. Для невозмущенного состояния ионосферы [7] волновод описывался высотой 66 км и импедансом, для которого горизонтальное волновое число первой моды имело значение  $\lambda_1 = (0.9943, 0.0025)$ .

На рис. 1а изображены вещественные траектории первой нормальной волны на плоскости  $(x, y)$  для 9 направлений трассы распространения с интервалом в 1 градус, смещенных с направления, проходящего под центром неоднородности. Центр симметричной неоднородности, имеющей размеры  $0.5 \text{ Мм} \times 0.2 \text{ Мм}$ , которые в масштабе радиуса первой зоны Френеля имеют значения  $DX \times DY = 2.2 \times 1$ , помещен в середину трассы. Указанная неоднородность условно обозначена пунктиром на рис. 1а, проходящим по контуру, на котором горизонтальное волновое число по отношению к максимально возмущенному уменьшается в  $e$  раз.

На рис. 1б изображены проекции комплексных траекторий первой нормальной волны на комплексную плоскость  $(x, y')$ , приходящие в вещественную точку приема. Количество итераций, корректирующих комплексный угол выхода лучей, не превышало трех, если считать точку приема вещественной с погрешностью не выше 0.01%. При этом изменение вещественной части комплексного угла выхода луча не превосходило 2–5%. Так что проекции комплексных траекторий первой нормальной волны на вещественную плоскость  $(x, y)$  незначительно отличались от изображенных на рис. 1а.

Как следует из приведенных результатов, луч, проходящий по линии симметрии неоднородности, имеет нулевое смещение. С ростом смещения луча от линии симметрии неоднородности наблюдается немонотонная зависимость сдвига угла прихода луча по отношению к углу выхода (рис. 1а), которая для комплексного показателя преломления сопровождается неравномерно убывающим смещением луча в комплексную область (рис. 1б).

Коэффициент возмущения поля нормальных волн, определенный как отношение поля в нерегулярном волноводе к полю в регулярном волноводе в той же точке, изображен на рис. 2, где его аргумент представлен в долях периода, для удобства изображения смещенных на 1. На рис. 2а изображен коэффициент возмущения вдоль трассы, проходящей через линию симметрии неоднородности, имеющей в масштабе радиуса первой зоны Френеля размеры  $DX \times DY = 2.5 \times 1.5$  (кривая 1);  $DX \times DY = 2.5 \times 7$  (кривая 2). Как следует из представленных результатов, максимальное возмущение амплитуды поля имеет место под центром неоднородности, которое с ростом удаления приемника стремится к некоторому предельному

значению, если поперечный размер неоднородности намного превосходит первую зону Френеля, или восстанавливается к невозмущенному значению, если поперечный размер неоднородности сравним с первой зоной Френеля. В последнем случае возмущение поля имеет локальный характер. Этот вывод подтверждает результат [2], полученный с помощью метода интегрального уравнения. Накопление фазы происходит аддитивно по мере прохождения неоднородности, так что максимальное возмущение фазы поля имеет место не под центром неоднородности, а в точке выхода в регулярную область. От поперечного размера неоднородности фаза поля не зависит. Возмущение фазы поля отслеживает масштаб и величину возмущения горизонтального волнового числа вдоль трассы распространения. Таким образом, продольное приближение расчета амплитуды и фазы поля справедливо, если поперечный размер неоднородности превосходит первую зону Френеля.

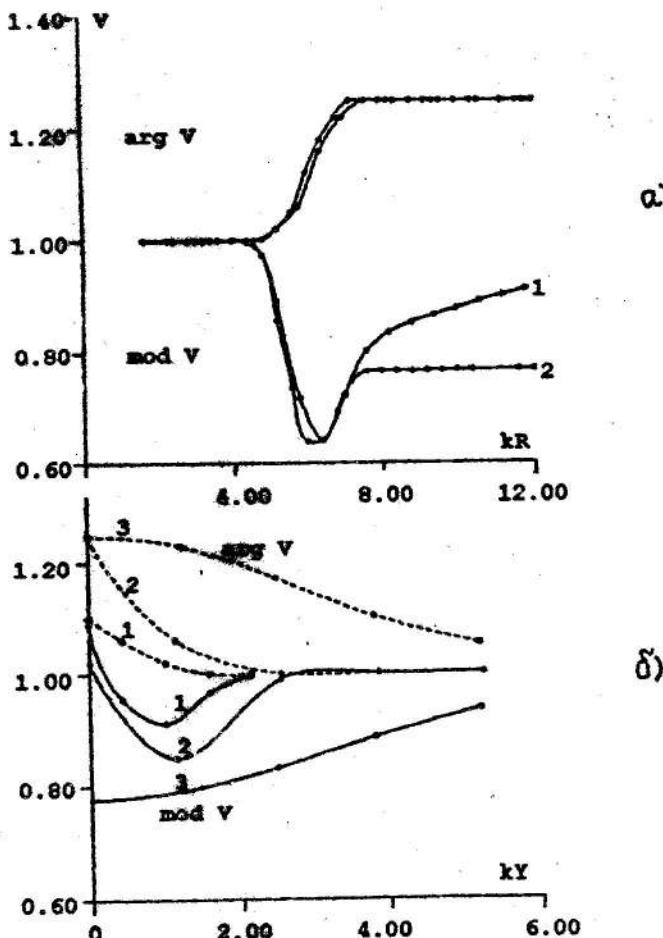


Рис. 2 а, б.

На рис. 2б изображена зависимость коэффициента возмущения от по-перечной горизонтальной координаты к трассе распространения для максимального удаленной точки наблюдения при следующих размерах неоднородности, записанных в масштабе радиуса первой зоны Френеля:

1.  $DX \times DY = 1 \times 1;$
2.  $DX \times DY = 2.5 \times 1.2;$
3.  $DX \times DY = 2.5 \times 4.$

Как следует из полученных результатов, при поперечных размерах неоднородности, сравнимых с первой зоной Френеля (кривые 1, 2) имеет место фокусирующее воздействие неоднородности на трассе, проходящей через линию симметрии неоднородности ( $Y = 0$ ). Околотрассовая зона дефокусировки определяется зоной геометрической тени неоднородности. Свойство фокусирующего воздействия неоднородности прослеживается также и на лучевых траекториях нормальных волн (рис. 1) по немонотонности сдвига угла прихода луча по отношению к углу выхода.

Для принятой модели возмущения горизонтального волнового числа значения амплитуды поля, рассчитанные по комплексным лучевым траекториям, отличаются от значений, рассчитанных по вещественным траекториям, не более чем на 10%, а значения фазы — не более чем на 5 градусов, что является существенным для характерного соотношения мнимой и вещественной частей горизонтального волнового числа  $\text{Im}\lambda_n = 0.004\text{Re}\lambda_n$ .

Таким образом, на основе метода вертикальных мод и горизонтальных лучей получены следующие результаты. Выявлены условия применимости продольного приближения расчета амплитуды и фазы поля (рис. 2а) в двумерно нерегулярном волноводе. Подтвержден вывод, полученный аналитически в [8] для задачи рассеяния на цилиндре в волноводе, состоящий в том, что поперечный масштаб неоднородности, равный размеру первой зоны Френеля, является масштабом смены качественной зависимости поля. Описано фокусирующее воздействие неоднородности на поле на трассе, проходящей через линию симметрии неоднородности, как и в [1], но лучеволновым методом. Оценено смещение траекторий нормальных волн в комплексную область.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-02-17048).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Field E. C., Joiner R. G. // R. Sci. 1982. V.17. P.693.
2. Field E. C., Warner C. R., Joiner R. G. // R. Sci. 1986. V.21. P.511.
3. Cay I. // J. Acoust. Soc. Amer. 1961. V.33. P.1085.
4. Кириллов В. В. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: ЛГУ, 1979. Вып.17. С.57.

5. Лутченко Л. Н., Булах А. Б. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: ЛГУ, 1986. Вып.20. С.89.
6. Макаров Г. И., Новиков В. В. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: ЛГУ, 1968. Вып.7. С.19.
7. Азарин Г. В., Колсанов В. А., Орлов А. Б. // Проблемы дифракции и распространения волн. — Л.: ЛГУ, 1987. Вып.21. С.112.
8. Бичуцкая Т. И., Макаров Г. И. // В кн.: 18 Межведомственный семинар по распространению километровых и более длинных радиоволн. Тезисы докладов. — Улан-Удэ, 1992. С.12.

Научно-исследовательский  
институт при  
Санкт-Петербургском  
университете

Поступила в редакцию  
20 января 1994 г.

**THE INFLUENCE OF A LARGE SCALE BORDER IRREGULARITY ON  
THE VLF FIELD IN THE WAVEGUIDE**

*T. I. Bichutskaya, G. I. Makarov*

The focusing effect of a border large scale irregularity on the VLF field in the waveguide is investigated by fullwave-ray method using the differential equation for a beam divergence. The displacement of paths of normal waves on the complex plane is estimated. The condition of implementation of the longitudinal approximation for the calculation of amplitude and phase of field in two-dimensional irregular waveguide are defined.