УДК 621.396.6

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК ПРИ ОБРАБОТКЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ОТСЧЕТАМИ

С. В. Игнатенко, А. А. Мальцев

Определены важнейшие статистические характеристики адаптивных антенных решеток (ААР): среднее значение и матрица ковариации вектора весовых коэффициентов, мощности флуктуаций весовых коэффициентов и выходного сигнала ААР. Обнаружено, что в стационарном режиме работы флуктуации вектора весовых коэффициентов приводят к смещению его среднего значения для ААР без ограничений, но не смещают среднее значение весового вектора ААР с ограничениями и ААР, работающих по критерию минимума среднеквадратической ошибки. Показано, что характер влияния флуктуаций весового вектора на выходной сигнал ААР может быть различным и определяется величиной коэффициента корреляции между отсчетами входного сигнала.

I. ВВЕДЕНИЕ

Задача статистического анализа адаптивных антенных решеток (ААР) с учетом флуктуаций настраиваемых весовых коэффициентов для случая непрерывного времени была подробно рассмотрена в [1, 2]. В частности, в [1] было показано, что корректный анализ адаптивных систем связан с учетом негауссовской статистической зависимости вектора весовых коэффициентов и вектора входных сигналов. На основании этих выводов в [2] было обнаружено, например, что флуктуации весовых коэффициентов приводят к уменьшению суммарной мощности на выходе ААР с непрерывными градиентными алгоритмами настройки. В случае дискретного времени, рассмотренном в работе [3] для независимых отсчетов принимаемого сигнала, суммарная выходная мощности из-за флуктуаций весового вектора, напротив, увеличивается. Условие независимости отсчетов на практике при цифровой обработке сигналов строго выполняется достаточно редко. Очевидно, что случай коррелированных отсчетов является "промежуточным" по отношению к изученным в работах [1, 2] и [3] и наиболее интересным для практического приложения. Однако, вопрос о влиянии флуктуаций весовых коэффициентов на характеристики ААР при наличии корреляции между отсчетами принимаемого сигнала в известных авторам работах не исследовался.

В настоящей статье определяются основные одномоментные статистические характеристики узкополосной ААР при обработке сигналов с коррелированными отсчетами. Используемый в статье метод позволяет проанализировать статистические характеристики различных ААР (с ограничениями на диаграмму направленности, а также работающих по критериям минимума среднеквадратичной ошибки (МСКО) и максимума отношения сигнал–шум (МОСШ).

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим работу N-элементной узкополосной ААР с ограничениями, функциональная схема которой приведена на рис. 1. Многократные линейные ограничения на пространственные характеристики ААР в данной схеме вводятся с помощью матричного фильтра в контуре управления [4,5]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^{+}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^{+},$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размерности $N \times N$, $\mathbf{C} \equiv [\vec{C}_1, \vec{C}_2, \ldots, \vec{C}_L]$ — матрица ограничений размерности $N \times L$, столбцами которой являются линейно независимые векторы ограничений $\vec{C}_l$ (L — число вводимых ограничений). Как показано в [4,5], матричный оператор $\mathbf{P}$ осуществляет проекцию оценки градиента выходной мощности ААР в пространстве весовых коэффициентов $\vec{W} \equiv \{W_1, W_2, \ldots, W_N\}^T$ на подпространство (гиперплоскость) ограничений:

$$\mathbf{C}^{+}\vec{W} = \vec{H}, \tag{1}$$

где $\vec{H} \equiv \{H_1, H_2, \ldots, H_L\}^T$ — вектор размерности L, компоненты которого задают фиксированные коэффициенты усиления ААР в направлениях векторов $\vec{C}_l^{*}$.

Стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее поведение весовых коэффициентов ААР с ограничениями в дискретном времени будет иметь вид [5]:

$$\vec{W}(k+1) = \mathbf{P}\left\{\vec{W}(k) - \mu\vec{X}^{*}(k)\,\vec{X}^{T}(k)\,\vec{W}(k)\right\} + \vec{W}_q, \tag{2}$$

где $\vec{X} \equiv \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}^T$ — вектор комплексных огибающих входных сигналов на приемных элементах решетки, $\vec{W}_q = \mathbf{C}(\mathbf{C}^{+}\mathbf{C})^{-1}\vec{H}$ — вектор комплексных весовых коэффициентов, соответствующих "желаемой" диаграмме направленности покоя (при отсутствии внешних помех) [5], μ — коэффициент усиления в цепи обратной связи (коэффициент адаптации, определяющий скорость сходимости).

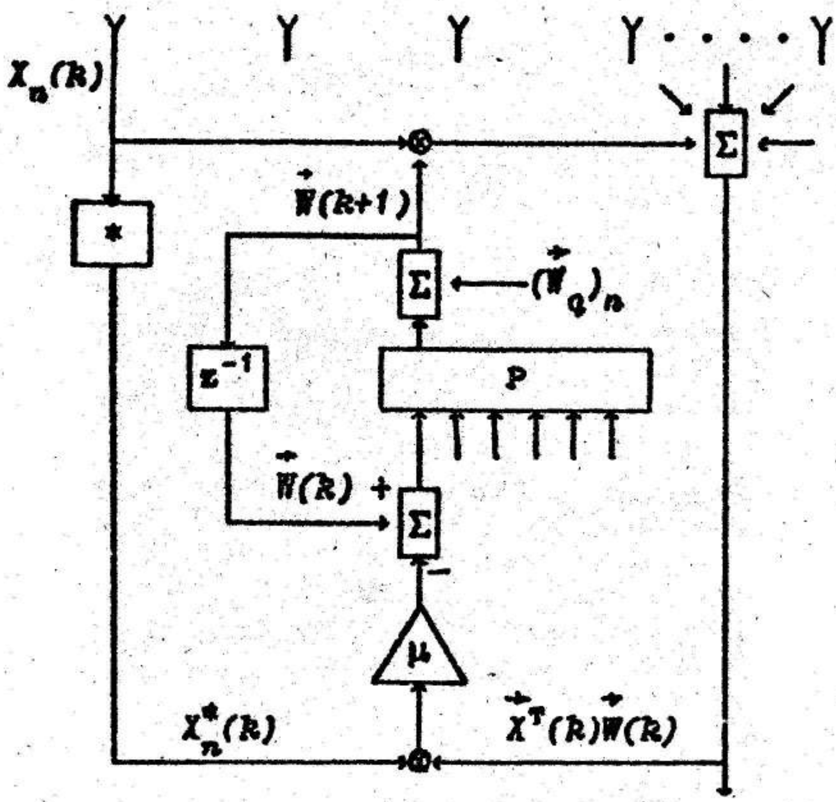

Рис. 1

Заметим, что уравнение (2) для ААР с ограничениями является достаточно общим. Из него как частные случаи могут быть получены уравнения для ААР, работающих по другим критериям оптимальности. Так, полагая

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}, \quad \vec{W}_q = \mu\mu_0\vec{S}^*, \tag{3}$$

из (2) получаем уравнение для весового вектора ААР МОСШ [6, 7]:

$$\vec{W}(k+1) = \vec{W}(k) + \mu\left\{\mu_0\vec{S}^* - \vec{X}^*(k)\,\vec{X}^T(k)\,\vec{W}(k)\right\},$$

где $\vec{S}$ — вектор-фазор полезного сигнала, μ_0 — произвольная константа, имеющая размерность мощности.

Уравнение градиентного алгоритма ААР МСКО [3]

$$\vec{W}(k+1) = \vec{W}(k) + \mu\vec{X}^*(k)\left\{d(k) - \vec{X}^T(k)\,\vec{W}(k)\right\}$$

получим из (2) введением $N+1$-мерных векторов входных сигналов $\vec{X}_{(N+1)}$ и весовых коэффициентов $\vec{W}_{(N+1)}$

$$\vec{X}_{(N+1)} = \begin{bmatrix}\vec{X}\\ d\end{bmatrix}, \quad \vec{W}_{(N+1)} = \begin{bmatrix}\vec{W}\\ -1\end{bmatrix},$$

и полагая:

$$\mathbf{C} = \vec{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{I} - \vec{C}_1^{+}\vec{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = 1, \qquad \vec{H} = -1, \qquad \vec{W}_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где за $N+1$-й элемент принят отвод, по которому на сумматор антенной решетки подается опорный сигнал $d(k)$.

III. НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

Для подробного анализа уравнения (2) введем следующие обозначения:

$$\vec{W}(k) \equiv \langle\vec{W}\rangle + \tilde{\vec{W}}(k), \quad \mathbf{M}_{xx}(k) \equiv \mathbf{R}_{xx} + \tilde{\mathbf{\Phi}}(k), \tag{5}$$

где весовой вектор $\vec{W}$ и стохастическая матрица $\mathbf{M}_{xx} \equiv \vec{X}^{*}(k)\,\vec{X}^{T}(k)$ представлены в виде сумм их средних значений $\langle\vec{W}\rangle$, $\mathbf{R}_{xx}$ и флуктуационных составляющих $\tilde{\vec{W}}(k)$, $\tilde{\mathbf{\Phi}}(k)$.

Весовой вектор $\vec{W}$ при выполнении дальнейших преобразований удобно представлять как сумму двух взаимоортогональных векторов:

$$\vec{W} = \mathbf{P}\vec{W} + \mathbf{D}\vec{W}, \tag{6}$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^{+}\,\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^{+}$ — проекционная матрица, дополнительная к $\mathbf{P}$. Для матриц $\mathbf{C}, \mathbf{P}, \mathbf{D}$ и вектора $\vec{W}_q$ справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered} \mathbf{DP} = \mathbf{PD} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{PC} = \mathbf{C}^{+}\mathbf{P} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{DC} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{C}^{+}\mathbf{D} = \mathbf{C}^{+}, \quad \mathbf{P}\vec{W}_q = \vec{0}, \quad \mathbf{D}\vec{W}_q = \vec{W}_q. \end{gathered} \tag{7}$$

Усредняя (2), получим точное уравнение для $\langle\vec{W}\rangle$:

$$\left\langle\vec{W}(k+1)\right\rangle = \mathbf{P}\left\{\left\langle\vec{W}(k)\right\rangle - \mu\mathbf{R}_{xx}\left\langle\vec{W}(k)\right\rangle - \mu\,\vec{\mathbf{z}}_w\right\} + \vec{W}_q, \tag{8}$$

где

$$\vec{æ}_w \equiv \left\langle \bar{\vec{\Phi}}(k)\,\vec{W}(k)\right\rangle \equiv \left\langle \bar{\vec{\Phi}}(k)\,\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle. \tag{9}$$

Исходя из (2), (7) и (3), можно показать, что в установившемся режиме работы

$$\tilde{\vec{W}}(k) \equiv \mathbf{P}\tilde{\vec{W}}(k), \qquad \mathbf{D}\tilde{\vec{W}}(k) \equiv \vec{0}. \tag{10}$$

Это означает, что флуктуации весового вектора происходят только в подпространстве ограничений (1).

Будем считать входные сигналы ААР стационарными и стационарно связанными случайными процессами. Тогда из (6), (7), (8) следует выполнение следующих равенств для стационарного среднего значения весового вектора $\vec{W}_{\text{ст}} \equiv \left\langle \vec{W}(k)\right\rangle$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}\vec{W}_{\text{ст}} + \mu\mathbf{P}\{\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_{\text{ст}} + \vec{æ}_w\} = \vec{W}_q,\\ &\mathbf{D}\vec{W}_{\text{ст}} = \mathbf{D}\vec{W}_q = \vec{W}_q,\\ &\vec{W}_{\text{ст}} = \mathbf{P}\vec{W}_{\text{ст}} + \mathbf{D}\vec{W}_{\text{ст}} = \mathbf{P}\vec{W}_{\text{ст}} + \vec{W}_q. \end{aligned} \tag{11}$$

Используя обозначения (5), (9), точное выражение для суммарной мощности на выходе ААР в стационарном режиме работы можно записать так:

$$\left\langle |Z|^2\right\rangle_{\text{ст}} = \left\langle |Z|^2\right\rangle_0 + \left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k)\,\mathbf{M}_{xx}\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle + \left[\vec{æ}_w^{+}\,\vec{W}_{\text{ст}} + \vec{W}_{\text{ст}}^{+}\vec{æ}_w\right]. \tag{12}$$

Здесь первое слагаемое $\langle|Z|^2\rangle_0 = \vec{W}_{\text{ст}}^{+}\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_{\text{ст}}$ соответствует выходной мощности ААР без учета флуктуаций весовых коэффициентов. Влияние флуктуаций весового вектора на выходную мощность ААР определяется соотношением второго и третьего слагаемых в выражении (12). Найдем это соотношение, используя независимость от времени корреляционной матрицы весовых коэффициентов $\mathbf{K}_w \equiv \left\langle \tilde{\vec{W}}^{*}(k)\,\tilde{\vec{W}}^{T}(k)\right\rangle$ и ее шпура $\operatorname{Sp}\mathbf{K}_w \equiv \left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k)\,\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle$ в стационарном режиме работы ААР:

$$\begin{aligned} \Delta\operatorname{Sp}\mathbf{K}_w &\equiv \left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k+1)\,\tilde{\vec{W}}(k+1)\right\rangle - \left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k)\,\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle = \\ &= \left\langle \Delta\tilde{\vec{W}}^{+}(k)\,\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle + \left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k+1)\,\Delta\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\Delta\tilde{\vec{W}}(k) = \tilde{\vec{W}}(k+1) - \tilde{\vec{W}}(k)$.

Учитывая уравнение (2), запишем первое слагаемое выражения (13) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta\tilde{\vec{W}}^{+}(k)\,\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle &= \left\langle \left(\tilde{\vec{W}}(k+1) - \tilde{\vec{W}}(k)\right)^{+}\tilde{\vec{W}}\right\rangle = \\ &= -\left\langle \left(\mathbf{D}\tilde{\vec{W}}(k)\right)^{+}\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle - \mu\left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k)\mathbf{M}_{xx}\mathbf{P}\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle + \vec{W}_q^{+}\,\vec{W}_{\text{ст}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя (5)–(7), (10), (11), преобразуем (14) к виду:

$$\left\langle \Delta\vec{W}^{+}(k)\,\vec{W}(k)\right\rangle = -\mu\left\{ \left\langle |Z|^2\right\rangle_{\text{ст}} - \left[\vec{W}^{+}_{\text{ст}}\mathbf{R}_{ss}\vec{W}_{\text{ст}} + \vec{\varkappa}^{+}_{w}\vec{W}_{\text{ст}}\right]\right\}. \tag{15}$$

Проводя аналогичные преобразования для второго слагаемого, получим:

$$\left\langle \vec{W}^{+}(k+1)\,\Delta\vec{W}(k)\right\rangle = -\mu\left\{\mathcal{K}(k,k+1) - \left[\vec{W}^{+}_{\text{ст}}\mathbf{R}_{ss}\vec{W}_{\text{ст}} + \vec{W}^{+}_{\text{ст}}\vec{\varkappa}_{w}\right]\right\}, \tag{16}$$

где

$$\mathcal{K}(k,k+1) \equiv \left\langle Z^{*}(k+1)\,Z(k)\right\rangle = \vec{W}^{+}_{\text{ст}}\mathbf{R}_{ss}\vec{W}_{\text{ст}} +$$
$$+ \left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k+1)\mathbf{M}_{ss}\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle + \left[\left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k+1)\,\tilde{\Phi}(k)\right\rangle \vec{W}_{\text{ст}} + \vec{W}^{+}_{\text{ст}}\vec{\varkappa}_{w}\right]$$

— ковариация k-го и $k+1$-го отсчетов выходного сигнала ААР. Из условия стационарности (13) и полученных выражений (15), (16) вытекает, что

$$\left\langle |Z|^2\right\rangle_{\text{ст}} + \mathcal{K}(k,k+1) = 2\vec{W}^{+}_{\text{ст}}\mathbf{R}_{ss}\vec{W}_{\text{ст}} + \left[\vec{\varkappa}^{+}_{w}\vec{W}_{\text{ст}} + \vec{W}^{+}_{\text{ст}}\vec{\varkappa}_{w}\right]. \tag{17}$$

Подставляя значения $\langle |Z|^2\rangle_{\text{ст}}$ и $\mathcal{K}(k,k+1)$ в (17), найдем точное соотношение, в которое входят интересующие нас моменты:

$$\left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k+1)\mathbf{M}_{ss}\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle + \left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k)\mathbf{M}_{ss}\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle = \tag{18}$$
$$= -\left[\left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k+1)\,\tilde{\Phi}(k)\right\rangle \vec{W}_{\text{ст}} + \vec{W}^{+}_{\text{ст}}\vec{\varkappa}_{w}\right].$$

Очевидно, что в случае, когда коэффициент корреляции r между соседними отсчетами сигнала стремится к единице, соотношение величин $\langle |Z|^2\rangle_{\text{ст}}$ и $\mathcal{K}(k,k+1)$ в (17) имеет вид:

$$\lim_{r\to 1}\mathcal{K}(k,k+1) = \left\langle |Z|^2\right\rangle_{\text{ст}}.$$

Тогда выражение (18) в пределе при $r\to 1$ переходит в следующее:

$$\left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k)\mathbf{M}_{ss}\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle = -\frac{1}{2}\left[\vec{\varkappa}^{+}_{w}\vec{W}_{\text{ст}} + \vec{W}^{+}_{\text{ст}}\vec{\varkappa}_{w}\right]. \tag{19}$$

Соответственно из (17) при $r\to 1$ с учетом (19) получается еще одно выражение для выходной мощности ААР:

$$\left\langle |Z|^2\right\rangle_{\text{ст}} = \left\langle |Z|^2\right\rangle_{0} - \left\langle \tilde{\vec{W}}^{+}(k)\mathbf{M}_{ss}\tilde{\vec{W}}(k)\right\rangle, \tag{20}$$

где стоящие в правой части равенства моменты являются положительными величинами:

$$\left\langle |Z|^2\right\rangle_{0} \geq 0, \tag{21}$$

Заметим, что (22) получается из точного уравнения (8), если положить $\vec{x}_\omega \equiv \left\langle \bar{\Phi}(k)\,\vec{W}(k)\right\rangle = \vec{0}$.

Переходя от (22) к стационарному уравнению:

$$\mathbf{D}\,\vec{W}_0 + \mu\,\mathbf{P}\,\mathbf{R}_{xx}\,\vec{W}_0 = \vec{W}_q, \tag{23}$$

получим известное выражение для стационарного значения вектора весовых коэффициентов [4,5]:

$$\vec{W}_{0\text{ст}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\,\mathbf{C}\,[\mathbf{C}^+\,\mathbf{R}_{xx}^{-1}\,CC]^{-1}\vec{H}. \tag{24}$$

Чтобы получить уравнение для вектора поправки к нулевому приближению $\vec{W}_\text{п}(k) \equiv \vec{W}(k) - \vec{W}_0(k)$, вычтем (22) из (2):

$$\vec{W}_\text{п}(k+1) = \mathbf{P}\left\{\vec{W}_\text{п}(k) - \mu\Big[\mathbf{R}_{xx}\,\vec{W}_\text{п}(k) + \bar{\Phi}(k)\,\vec{W}(k)\Big]\right\}. \tag{25}$$

Из (25) с учетом (6), (7) следует, что в установившемся режиме $\vec{W}_\text{п}(k) \equiv \equiv \mathbf{P}\,\vec{W}_\text{п}(k)$, $\mathbf{D}\,\vec{W}_\text{п}(k) \equiv \vec{0}$. Это означает, что все поправки к нулевому приближению лежат в подпространстве ограничений, поэтому матрицу $\mathbf{P}\,\mathbf{R}_{xx}$ в (25) можно заменить на эквивалентную эрмитовскую $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}$. Используя $\mathbf{Q}$-матричное представление, диагонализирующее эрмитовскую матрицу $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}$, перейдем к переменной $\vec{Y}$:

$$\vec{Y} = \mathbf{Q}^{-1}\vec{W}_\text{п}, \quad \vec{W}_\text{п} = \mathbf{Q}\vec{Y}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^+.$$

Для $\vec{Y}$ получим следующее уравнение:

$$\vec{Y}(k+1) = \vec{Y}(k) - \mu\,\Lambda\,\vec{Y}(k) - \mu\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\bar{\Phi}(k)\,\vec{W}(k), \tag{26}$$

где $\Lambda \equiv \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}\mathbf{Q}$.

Можно показать, что матрица $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}$ имеет L нулевых собственных значений по числу вектор-столбцов $\vec{C}_l$ матрицы ограничений $\mathbf{C}$ и $N-L$ ненулевых собственных чисел λ_n, заключенных между наименьшим λ_min и наибольшим λ_max собственными числами матрицы $\mathbf{R}_{xx}$ [8,9]. Таким образом, диагональная матрица Λ будет иметь вид:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{N-L} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{\min} \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_{N-L} \le \lambda_{\max}.$$

Стационарное решение уравнения (26) можно записать следующим образом:

$$\vec{Y}(k+1) = -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \bar{\Phi}(k-n) \left[\vec{W}_0 - \mathbf{Q} \vec{Y}(k-n) \right], \qquad (27)$$

где $\hat{\lambda}(k)$ — диагональная переходная матрица вида:

$$\hat{\lambda}(k) = \begin{bmatrix} (1-\mu\lambda_1)^k & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & (1-\mu\lambda_{N-L})^k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & \mathbf{0} & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Ряд теории возмущений по малому параметру $\mu \ll 1$ можно построить, итерируя уравнение (27) [10, 11]. Для этого представим вектор $\vec{Y}$ в виде суммы $\vec{Y} = \vec{Y}_1 + \vec{Y}_2 + \vec{Y}_3 + \ldots$, где члены ряда будут равны:

$$\vec{Y}_1(k+1) = -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n)\, \mathbf{Q}^{-1}\, \mathbf{P} \bar{\Phi}(k-n)\, \vec{W}_{0\text{ст}},$$

$$\vec{Y}_2(k+1) = -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n)\, \mathbf{Q}^{-1}\, \mathbf{P} \bar{\Phi}(k-n)\, \mathbf{Q} \vec{Y}_1(k-n) = \qquad (28)$$

$$= \mu^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n)\, \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \bar{\Phi}(k-n)\, \mathbf{Q} \hat{\lambda}(m) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P} \bar{\Phi}(k-n-m-1) \vec{W}_{0\text{ст}},$$

....

$$\vec{Y}_{p+1}(k+1) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}(n) \mathbf{Q}^{-1}\, \mathbf{P} \bar{\Phi}(k-n)\, \bar{\mathbf{Q}} Y_p(k-n).$$

Для вычисления средних значений членов ряда поправок (28) необходимо задать конкретный вид временной зависимости вектора входных сигналов. Корреляционную матрицу входных сигналов узкополосной ААР можно представить следующим произведением:

$$\mathbf{R}_{xx}(k, k+n) \equiv \left\langle \vec{X}^*(k)\, \vec{X}^T(k+n) \right\rangle = \mathbf{R}_{xx} r^{|n|},$$

где r — коэффициент корреляции между соседними отсчетами входных сигналов.

V. ОДНОМОМЕНТНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ААР

Найдем основные статистические характеристики ААР: среднее значение весового вектора $\vec{W}_{\text{ст}}$, корреляционную матрицу флуктуаций весовых коэффициентов $\mathbf{K}_w \equiv \left\langle \vec{W}^*(k)\vec{W}^T(k)\right\rangle$ и суммарную мощность выходного сигнала $\left\langle |Z|^2\right\rangle_{\text{ст}}$.

Из (5) и (28) следует, что в первом (борновском) приближении поправка к среднему значению весового вектора равна нулю $\left\langle \vec{Y}_1\right\rangle = \vec{0}$, $\left\langle \vec{W}_{\text{п}1}\right\rangle = \vec{0}$, поскольку $\left\langle \tilde{\Phi}(k)\right\rangle \equiv 0$. Полагая $\vec{X}(k)$ комплексным гауссовским случайным вектором, найдем поправку к вектору $\vec{W}_{0\text{ст}}$ во втором приближении:

$$\left\langle \vec{W}_{\text{п}2}(k)\right\rangle = \mathbf{Q}\left\langle \vec{Y}_2\right\rangle = \mu\frac{r^2}{1-r^2}\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_{0\text{ст}}, \tag{29}$$

где

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \equiv \mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}) \equiv \left\langle \left(\mathbf{P}\vec{X}(k)\right)^T\left(\mathbf{P}\vec{X}(k)\right)^*\right\rangle = \sum_{n=1}^{N-L}\lambda_n.$$

Используя выражение (24) для $\vec{W}_{0\text{ст}}$ и матричные соотношения (7), получим $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_{0\text{ст}} = \vec{0}$, $\left\langle \vec{W}_{\text{п}2}\right\rangle = \vec{0}$. Учитывая рекуррентные формулы (28), отсюда можно показать, что поправка любого порядка к среднему значению весового вектора $\vec{W}_{0\text{ст}}$ ААР с ограничениями равна нулю, так как ее выражение всегда содержит множитель $\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\vec{W}_{0\text{ст}} = \vec{0}$. Это означает, что флуктуации весовых коэффициентов не приводят к смещению установившегося среднего значения весового вектора ААР с ограничениями. Несложно показать, что в случае отсутствия ограничений для ААР МОСШ, среднее значение $\vec{W}_{\text{ст}}$ смещается относительно $\vec{W}_{0\text{ст}}$ на величину

$$\left\langle \vec{W}_{\text{п}2}(k)\right\rangle = \mu\frac{r^2}{1-r^2}\,\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{xx})\,\vec{W}_{0\text{ст}} \neq \vec{0}.$$

Найдем выражение для вектора $\vec{\text{æ}}_w$, учитывающего статистическую зависимость $\vec{W}(k)$ и $\vec{X}(k)$. В борновском приближении получим:

$$\begin{aligned}\vec{\text{æ}}_w &= \left\langle \tilde{\Phi}(k)\,\vec{W}(k)\right\rangle \simeq \vec{\text{æ}}_{w1} = \left\langle \tilde{\Phi}(k)\mathbf{Q}\vec{Y}_1\right\rangle = \\ &= -\mu\frac{r^2}{1-r^2}\,\mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})\,\mathbf{R}_{xx}\,\vec{W}_{0\text{ст}}.\end{aligned} \tag{30}$$

Подставляя (30) в (11), получим уравнение для стационарного значения вектора весовых коэффициентов с учетом вектора третьих смешанных моментов $\vec{\text{æ}}_w$:

$$\mathbf{D}\vec{W}_{\text{ст}} + \mu'\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\,\vec{W}_{\text{ст}} = \vec{W}_q, \tag{31}$$

которое отличается от уравнения "прямого размыкания" (23) лишь величиной скалярного множителя $\mu' = \mu \left[1 - \mu \frac{r^2}{1-r^2} \mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \right]$. Поскольку решение этого уравнения не зависит от величины μ', то значение $\vec{W}_{\text{ст}}$, посчитанное с учетом $\vec{\text{æ}}_w \neq \vec{0}$, совпадает с выражением (24).

При вычислении средних (29), (30), в которые входят кратные суммы типа (28), использовалось предположение о малости времени корреляции входных сигналов по сравнению со временем релаксации системы. Это условие в несколько видоизмененной форме можно записать так:

$$\mu\lambda_n \frac{r^2}{1-r^2} < \mu \sum_{n=1}^{N-L} \lambda_n \frac{r^2}{1-r^2} = \mu \frac{r^2}{1-r^2} \mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \ll 1. \tag{32}$$

Формула (32) накладывает ограничения на величину параметров μ, r и представляет собой достаточное условие применимости метода (28) и полученных выражений (29), (30).

Для одномоментной матрицы ковариации вектора весовых коэффициентов борновское приближение дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_w(k+1,k+1) &\equiv \left\langle \vec{\tilde{W}}^*(k+1)\vec{\tilde{W}}^T(k+1) \right\rangle \simeq \\ &\simeq \mathbf{Q}^* \left\langle \vec{Y}_1^*(k+1)\, Y_1^T(k+1) \right\rangle > \mathbf{Q}^T. \end{aligned} \tag{33}$$

Используя (28), можно получить вид корреляционной матрицы $\left\langle \vec{Y}_1^* Y_1^T \right\rangle$:

$$\left\langle \vec{Y}_1^* Y_1^T \right\rangle = \frac{1}{2}\mu \frac{1+r^2}{1-r^2} \left\langle |Z|^2 \right\rangle_0 \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{array}{l} \}\ N-L \\ \\ \}\ L \end{array} \end{array} . \tag{34}$$

Подставив (34) в (33), окончательно получим:

$$\mathbf{K}_w = \frac{1}{2}\mu \frac{1+r^2}{1-r^2} \left\langle |Z|^2 \right\rangle_0 \mathbf{P}^*. \tag{35}$$

Суммарная мощность флуктуаций весового вектора находится из (35) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\,\mathbf{K}_w \equiv \langle \vec{W}^+ \vec{W} \rangle &= \frac{1}{2}\mu \frac{1+r^2}{1-r^2} \left\langle |Z|^2 \right\rangle_0 \mathrm{Sp}\,\mathbf{P}^* = \\ &= \frac{1}{2}\mu \frac{1+r^2}{1-r^2} \left\langle |Z|^2 \right\rangle_0 (N-L). \end{aligned} \tag{36}$$

Из выражений (34), (36) видно, что наложение L линейно независимых ограничений на вектор весовых коэффициентов делает их взаимозависимыми и уменьшает суммарную мощность флуктуаций. Наличие корреляции отсчетов входных сигналов, напротив, увеличивает мощность флуктуаций весового вектора. Заметим также, что полагая $r = 0$ и $\mathbf{P} = \mathbf{I}$

(см. (3)), из (35) получим известную формулу ковариационной матрицы шума весовых коэффициентов для ААР МСКО при условии независимости отсчетов сигнала [3]:

$$\mathbf{K}_w = \frac{1}{2}\,\mu \left\langle |\varepsilon|^2 \right\rangle_{\min} \mathbf{I},$$

где $\left\langle |\varepsilon|^2 \right\rangle_{\min}$ — минимальная среднеквадратичная ошибка.

Найдем суммарную мощность сигнала на выходе ААР. Учитывая (5), (12), ее можно записать так:

$$\begin{aligned}\left\langle |Z|^2 \right\rangle_{\text{ст}} = {} & \left\langle |Z|^2 \right\rangle_0 + \left\langle \vec{\tilde{W}}^{+}(k)\,\mathbf{P}_{xx}\,\vec{\tilde{W}}(k) \right\rangle + \left[\vec{æ}_w^{+}\,\vec{W}_{\text{ст}} + \vec{W}_{\text{ст}}^{+}\,\vec{æ}_w \right] + \\ & + \left\langle \vec{\tilde{W}}^{+}(k)\,\tilde{\Phi}(k)\,\vec{\tilde{W}}(k) \right\rangle .\end{aligned} \tag{37}$$

В борновском приближении флуктуационные слагаемые в формуле (37) имеют вид:

$$\left\langle \vec{\tilde{W}}^{+}(k)\,\mathbf{R}_{xx}\,\vec{\tilde{W}}(k) \right\rangle = \mathrm{Sp}\,(\mathbf{K}_w^{*}\,\mathbf{R}_{xx}) = \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{1+r^2}{1-r^2} \left\langle |Z|^2 \right\rangle_0 \mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}),$$

$$\left[\vec{æ}_w^{+}\,\vec{W}_{\text{ст}} + \vec{W}_{\text{ст}}^{+}\,\vec{æ}_w \right] = -2\,\mu\,\frac{r^2}{1-r^2} \left\langle |Z|^2 \right\rangle_0 \mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}), \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{\tilde{W}}^{+}(k)\,\tilde{\Phi}(k)\,\vec{\tilde{W}}(k) \right\rangle = {} & \mu^2\,\frac{r^2(1+r^3)}{(1-r^2)(1-r^3)} \times \\ & \times \left[\left\langle |Z|^2 \right\rangle_0 \mathrm{Sp}^2(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) + \vec{W}_{\text{ст}}^{+}\,\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}\,\vec{W}_{\text{ст}} \right].\end{aligned}$$

Очевидно, что последним слагаемым в (37) можно пренебречь, так как оно имеет следующий порядок малости по сравнению с двумя первыми. В результате получим:

$$\left\langle |Z|^2 \right\rangle_{\text{ст}} = \left\{ 1 + \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{1-3r^2}{1-r^2}\,\mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx}) \right\} \left\langle |Z|^2 \right\rangle_0 . \tag{39}$$

Анализируя формулу (39) для суммарной выходной мощности ААР, можно заключить, что в рассматриваемом приближении степень влияния флуктуаций весовых коэффициентов на величину суммарной мощности на выходе ААР прямо пропорциональна эффективной мощности входных сигналов $\sim \mu\,\mathrm{Sp}(\mathbf{P}\mathbf{R}_{xx})$; характер влияния флуктуаций весового вектора на суммарную выходную мощность зависит от соотношения величин моментов $\left\langle \vec{\vec{W}}^{+}(k)\mathbf{R}_{ææ}\vec{\vec{W}}(k)\right\rangle$ и $\left[\vec{æ}_{w}^{+}\vec{W}_{ст}+\vec{W}_{ст}^{+}\vec{æ}_{w}\right]$, и определяется значением коэффициента корреляции между отсчетами входных сигналов. Так, например, из-за флуктуаций весовых коэффициентов при $r = 0$ (случай независимых отсчетов) выходная мощность ААР превышает мощность $\langle|Z|^2\rangle_0$, получаемую при постоянных весовых коэффициентах, равных своим средним значениям, что согласуется с результатами [3,5]. При достаточно большой корреляции отсчетов r суммарная выходная мощность, наоборот, может уменьшаться из-за возникновения эффекта "перекомпенсации" — дополнительного отслеживания помехи на выходе ААР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А. Н., Мальцев А. А. / Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции "Статистические методы в теории передачи и преобразования информационных сигналов". — Киев, 1988. С. 12–13.
2. Мальцев А. А., Позументов И. Е. // Изв. вузов. Радиофизика, 1981. Т. 24. N 5. С. 577–585.
3. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. — М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
4. Appelbaum S. P., Chapman D. J. Adaptive arrays with main beam constraints // IEEE Trans., 1976. V. AP-24. N 5. P. 650–661.
5. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. Пер. с англ. / Под ред. Лексаченко В. А. — М.: Радио и связь, 1986.
6. Appelbaum S. P. Adaptive arrays // IEEE Trans., 1976. V. AP-24. N 5. P. 585–598.
7. Brennan L. E., Reed I. S. Theory of adaptive radar // IEEE Trans., 1973. V. AES-9. N 2. P. 237–252.
8. Фрост О. Алгоритм линейно-ограниченной обработки сигналов в адаптивной решетке // ТИИЭР, 1973. Т. 61. N 6. С. 75–86.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.
10. Brennan L. E., Pugh E. L., Reed I. S. Control-loop noise in adaptive array antennas // IEEE Trans., 1971. V. AES-7. N 2. P. 254–262.
11. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. — М.: Наука, 1978.

Нижегородский государственный университет

Поступила в редакцию 24 января 1994 г.

ADAPTIVE ANTENNA ARRAYS STATISTICAL CHARACTERISTICS IN PROCESSING OF DISCRETE SIGNALS WITH CORRELATED SAMPLES

S. V. Ignatenko, A. A. Mal'tsev

The most important adaptive antenna arrays (AAA) statistical characteristics such as an average value and covariation matrix of the weight vector, power of weights fluctuations and array output power are defined. It is determined that at a steady state fluctuations of weight vector causes it's average value shift for AAA without constraints but don't displace the weight vector average value of AAA with constraints and least mean square AAA. It is shown that weights fluctuations effect on array output signal may be different and defines by a value of the input signal samples correlation.