

УДК 621.372.412:621.317.084.2

## КОЛЕВАНИЯ СДВИГА ПО ТОЛЩИНЕ В КРУГЛЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

И. И. Постников

Предложен алгоритм численного решения на ЭВМ задачи о собственных колебаниях осесимметричных пьезоэлементов переменной толщины, позволяющий определять полный спектр толщинно-сдвиговых колебаний данного класса пьезоэлементов и распределения смещений в них. Приведены примеры расчета спектра пьезоэлемента с соответствующими топограммами колебаний, а также ТЧХ гармонических и ангармонических колебаний.

### ВВЕДЕНИЕ

Многомодовый режим кварцевых резонаторов (КР), под которым понимается целенаправленное возбуждение в резонаторе нескольких колебаний, привлекает все большее внимание специалистов различных отраслей народного хозяйства, так как позволяет существенно повысить метрологические характеристики пьезорезонансных устройств и более успешно решать задачи широкодиапазонной перестройки частоты стабильных генераторов, узкополосной фильтрации сигналов и т. д. [1–3]. Поэтому задача проектирования резонаторов, имеющих несколько рабочих частот, а также многоэлектродных КР и резонаторов, имеющих сложную геометрию электрода, весьма актуальна. Однако, использование этих возможностей КР, связанных прежде всего с его многомерными свойствами, сдерживается не только отсутствием эффективных технических решений, но и недостаточной изученностью многомодовых характеристик КР.

Разработанная в [4] математическая модель осесимметричных пьезоэлементов (ПЭ) переменной толщины позволяет проводить численные исследования многомодовых характеристик КР, а в ряде случаев получать простые аналитические выражения для расчета спектра [5], распределения смещений в ПЭ [6, 7] и эквивалентных электрических характеристик [8]. Однако, рассмотренные в [4–8] колебания, имеющие пучности распределения смещений в центре ПЭ, составляют лишь часть всех колебаний сдвига по толщине. Остальные колебания при осесимметричной форме возбуждающих электродов (чаще всего круглой), которую имеют большинство резонаторов, ослаблялись максимально, поэтому они мало интересовали как разработчиков КР, так и разработчиков пьезорезонансных

устройств. При многорезонансном возбуждении КР этого, как правило, не происходит из-за сложной формы возбуждающих электродов, благодаря которой и происходит выделение или ослабление требуемых резонансных колебаний. Поэтому, в этом случае необходимо уметь определять полный спектр собственных значений и собственных функций КР. В связи с чем в данной работе продолжены исследования, начатые в [4-9], с целью получения общего решения задачи толщинно-сдвиговых колебаний анизотропных круглых пластин переменной толщины (на рис. 1 приведен один из вариантов такой пластины — двояковыпуклый ПЭ).

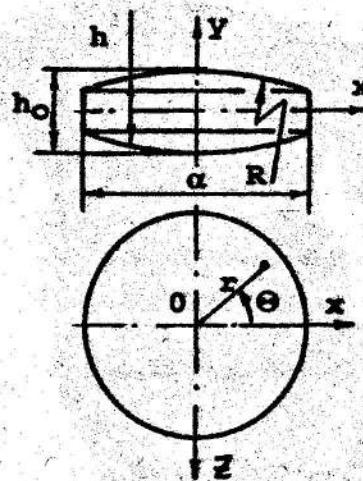


Рис. 1

### I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [4] показано, что трехмерную систему дифференциальных уравнений движения для анизотропных пластин после допущений, сделанных на основе анализа связи колебаний сдвига по толщине с изгибными колебаниями, можно свести к двум двумерным дифференциальным уравнениям в частных производных с переменными коэффициентами, описываемыми соответственно колебаниям сдвига и кручения по толщине ПЭ произвольной формы. Для колебаний сдвига по толщине уравнение движения имеет вид [4]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( D_1 \frac{\partial \psi_a}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_5 \frac{\partial \psi_a}{\partial z} \right) - D_6 \psi_a + \frac{D_6}{\rho h \bar{\omega}^2} \frac{\partial}{\partial z} (D_6 \psi_a) + \rho \frac{h^3}{12} \omega^2 \psi_a = 0, \quad (1)$$

Здесь

$$D_1 = \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{22}} \right) \frac{h^3}{12}; \quad D_5 = c_{55} \frac{h^3}{12}; \quad D_6 = \frac{\pi^2}{12} c_{66} h,$$

где  $c_{ij}$  — элементы тензора упругости,  $\rho$  — плотность материала,  $h$  — текущая толщина ПЭ (см. рис. 1),  $h_0$  — толщина ПЭ в центре,  $\bar{\omega} = \frac{\pi}{h_0} \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}$  — круговая частота толщинно-сдвиговых колебаний для бесконечной пластины толщиной  $h_0$ ,  $\omega$  — круговая резонансная частота,  $\psi_a$  — функция смещения вдоль оси  $z$ , связанная со смещением вдоль этой оси ( $U_a$ ) следующим образом:

$$U_a(z, y, z) = y\psi_a(z, z).$$

Большинство ПЭ, употребляемых в промышленном производстве высокочастотных КР, имеет круговую форму [10], поэтому уравнение движения удобнее рассматривать в цилиндрической системе координат  $r, \theta, y$  (рис. 1), в которой уравнение движения преобразуется к виду:

$$(A_1 + A_2 \cos 2\theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + (A_3 + A_4 \cos 2\theta) \frac{\partial \psi}{\partial r} + (A_5 \sin 2\theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \\ + (A_6 \sin 2\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + (A_7 + A_8 \cos 2\theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + (A_9 + A_{10} \cos 2\theta) \psi = 0, \quad (2)$$

где  $\psi = \psi_a(r, \theta)$ ,  $A_{ij}$  — переменные коэффициенты, зависящие от геометрии ПЭ, упругих констант и плотности материала (см. приложение).

Будем рассматривать ПЭ, у которых за счет переменного профиля обеспечивается локализация колебаний в центральной части ПЭ, а также ПЭ, закрепленные на периферии, поэтому граничными условиями для данной задачи будет являться обращение в нуль планарной функции смещения  $\psi(r, \theta)$  на контуре, ограничивающем ПЭ в плоскости  $xy$ :

$$\psi(r, \theta) \Big|_{r=d/2} = 0. \quad (3)$$

Решение краевой задачи (2), (3) позволит определить собственные значения и собственные функции широкого класса резонаторов с осесимметричными ПЭ переменной толщины в районе первой гармоники ( $\bar{\omega}$ ) колебаний сдвига по толщине.

### 2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Анализ известных экспериментальных топограмм колебаний ПЭ, а также результаты численных исследований колебаний сдвига по толщине ПЭ, имеющих пучности смещения в центре [4], подтверждают, что хорошим приближением решения системы (2) является представление функции смещения в виде тригонометрического ряда:

$$\psi(r, \theta) = P_0(r) + \sum_{m=1}^{M} [P_m(r) \cos m\theta + Q_m(r) \sin m\theta], \quad m \rightarrow \infty. \quad (4)$$

При подстановке (4) в (2) исходная система дифференциальных уравнений (2) распадается на четыре неизависимые системы относительно коэффициентов разложения ( $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$ ) с четными и нечетными индексами, которые описывают всевозможные моды колебаний сдвига по толщине. Все четыре системы дифференциальных уравнений удобно представить в виде обобщенного рекуррентного соотношения (штрихи означают дифференцирование по  $r$ ):

$$\begin{aligned} & 2 \left[ A_1 F_m'' + A_3 F_m' + (A_9 - m^2 A_7) F_m \right] + \\ & + A_2 F_{m+2}'' + [A_4 - (m+2) A_6] F_{m+2}' + \\ & + [A_{10} - (m+2) A_8 - (m+2)^2 A_6] F_{m+2} + \\ & + A_2 F_{m-2}'' + [A_4 + (m-2) A_6] F_{m-2}' + \\ & + [A_{10} + (m-2) A_8 - (m-2)^2 A_6] F_{m-2} + \\ & + \infty \left\{ A_2 F_{2-m}'' + [A_4 + (m-2) A_6] F_{2-m}' + \right. \\ & \left. + [A_{10} + (m-2) A_8 - (m-2)^2 A_6] F_{2-m} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для получения требуемой системы дифференциальных уравнений движения следует подставить в (5) вместо  $F$  необходимые обозначения коэффициентов разложения ( $\vec{P}$  или  $\vec{Q}$ ), соответствующие индексы  $m$  и значение множителя  $\infty$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{1-я система } (P_0, P_2, P_4, \dots) - m = 0, 2, 4, \dots \\ \text{2-я система } (P_1, P_3, P_5, \dots) - m = 1, 3, 5, \dots \\ \text{3-я система } (Q_1, Q_3, Q_5, \dots) - m = 1, 3, 5, \dots \\ \text{4-я система } (Q_2, Q_4, Q_6, \dots) - m = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \infty = 1, & \text{при } m \leq 2, \\ \infty = 0, & \text{при } m > 2, \\ \infty = -1, & \text{при } m = 1, \\ \infty = 0, & \text{при } m > 1. \end{array}$$

Первая система дифференциальных уравнений описывает колебания, имеющие пучности смещений в центре ПЭ, т.е. имеющие нечетные индексы по осям  $x$  и  $z$  (111, 113, 131, 115, 133, 151, ...); вторая — четные индексы по оси  $x$  и нечетные по оси  $z$  (121, 123, 141, 125, 143, ...); третья — четные индексы по оси  $z$  и нечетные по оси  $x$  (112, 114, 132, 116, 134, ...); наконец, четвертая система — четные индексы по обеим осям (122, 124, 142, 126, 144, ...).

Запишем систему (5) в матричном виде

$$\sum_{n=1}^M [a_{mn} F_{2n-k} + b_{mn} F'_{2n-k} + d_{mn} F''_{2n-k}] = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M, \quad (6)$$

$$k = \begin{cases} 2 & \text{для 1-й системы уравнений;} \\ 1 & \text{для 2-й и 4-й систем уравнений;} \\ 0 & \text{для 3-й системы уравнений,} \end{cases}$$

где  $M$  — количество членов ряда (4);  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $d_{ij}$  — элементы трехдиагональных матриц, размерности  $M \times M$ ;  $F_j''$ ,  $F_j'$ ,  $F_j$  — векторы, размерности  $M$ .

Границные условия для рассматриваемых типов колебаний имеют вид:

$$F_{2m-k} \Big|_{r=d/2} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (7)$$

Общее решение системы  $M$  дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (6) запишем в виде суммы частных решений с  $2M$  неопределенными коэффициентами:

$$F_{2m-k} = \sum_{j=1}^{2M} C_j Y_{mj}; \quad m = 1, 2, 3, \dots, M,$$

где  $C$  — вектор постоянных коэффициентов;  $Y$  — матрица  $2M$  частных решений.

Известно, что частные решения  $Y_{mj}$  линейно-независимы, тогда и только тогда, когда определитель Вронского  $\Delta(Y_{11}, Y'_{M,2M})$  отличен от нуля [11]. Так как частные решения системы дифференциальных уравнений (6) полностью определяются заданием начальных значений в  $2M$  точках, то искомое решение системы уравнений (6) можно построить следующим образом. Напишем значения функций и первых производных в точке  $r = 0$ , в соответствии с выбранным типом колебаний ( $\psi'|_{r=0} = 0$ ;  $\psi|_{r=0} = \text{const}$  — для 1-й системы и  $\psi|_{r=0} = 0$ ,  $\psi''|_{r=0} = \text{const}$  — для остальных систем уравнений)

для 1-й системы:

$$P_{2m-k}(0) = \sum_{j=1}^{2M} C_j Y_{mj} = g_m; \quad P'_{2m-k}(0) = \sum_{j=1}^{2M} C_j Y'_{mj} = 0, \quad (8)$$

для 2-й, 3-й, 4-й систем:

$$F_{2m-k}(0) = \sum_{j=1}^{2M} C_j Y_{mj} = 0; \quad F'_{2m-k}(0) = \sum_{j=1}^{2M} C_j Y'_{mj} = g_m; \quad (9)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, M.$$

Начальные значения коэффициентов систем алгебраических уравнений (8), (9) запишем в виде единичной матрицы

$$(Y_{11}, Y'_{M,2M}) = E, \quad (10)$$

тогда определитель Вронского  $\Delta(Y_{11}, Y'_{M,2M}) = 1$ , и частные решения будут линейно независимы [11].

Из (8), (9) и (10) следует

$$C_{M+1} = C_{M+2} = C_{M+M} = 0.$$

Таким образом, общее решение однородной линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка (6) состоит из суммы  $M$  линейно независимых решений с  $M$  неопределенными коэффициентами

$$F_{2m-k} = \sum_{j=1}^M C_j Y_{mj}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (11)$$

Коэффициенты  $C_j$  определяются при удовлетворении граничным условиям (7) из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$F_{2m-k}(d/2) = \sum_{j=1}^M C_j Y_{mj} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (12)$$

Однородная СЛАУ (12) имеет нетривиальное решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \dots & Y_{1M} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \dots & Y_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{M1} & Y_{M2} & Y_{M3} & \dots & Y_{MM} \end{vmatrix} = 0,$$

что является условием определения собственных значений ( $\omega_{1mp}$ ).

### 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения системы дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (6), имеющими сложную зависимость от радиуса (см. (1) и приложение), целесообразно использовать численные методы. Преобразуем (6) и (7) к трехточечной разностной схеме [12], тогда в разностных соотношениях краевая задача записывается следующим образом

$$[\alpha]_i [F]_{i-1} - [\gamma]_i [F]_i + [\beta]_i [F]_{i+1} = 0, \quad (13)$$

$[P]_0 = [P]_1$ ;  $[P]_N = 0$  — для 1-й системы уравнений;

$[F]_0 = -[F]_1$ ;  $[F]_N = 0$  — для 2-й, 3-й и 4-й систем;  $i = 1, 2, 3, \dots, M$ .

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  — матрицы (порядка  $M \times M$ ) коэффициентов в точке  $i$ ;  $F$  — вектор собственных функций в точках  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$ .

Элементы матриц  $\alpha, \beta, \gamma$  в точке  $i$  связаны с элементами матриц  $a, b$ ,  $d$  (6) в тех же точках следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha_{mn}^i &= d_{mn}^i - 0,5 p b_{mn}^i; & \beta_{mn}^i &= d_{mn}^i + 0,5 p b_{mn}^i; \\ \gamma_{mn}^i &= 2d_{mn}^i - p^2 a_{mn}^i, \end{aligned}$$

где  $p = 2/(2N - 1)$  — шаг разбиения интервала интегрирования на  $N$  участков.

Для решения однородной СЛАУ (13) необходимо приравнять ее определитель нулю, что соответствует определенным собственным значениям ( $\omega$ ). Однако вычисление собственных функций  $[F]$ , с требуемой точностью может обеспечить решение больших систем уравнений  $M(N - 1)$ , поэтому гораздо удобнее перейти к методу пристрелки (стрельбы) [13], которые приводят к небольшим СЛАУ, хотя затраты машинного времени на решение задач в этом случае возрастают. Поскольку методом пристрелки можно решать задачу на маломощных ЭВМ, то рассмотрим его применительно к решению данной задачи. Подставим (11) в (13):

$$[Y]_{i+1} = [\beta]_i^{-1} \{ [\gamma]_i [Y]_i - [\alpha]_i [Y]_{i-1} \}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} [Y]_0 = [Y]_1 = E & \text{для 1-й группы колебаний,} \\ [Y]_0 = -[Y]_1; [Y]_0 = E & \text{для остальных групп колебаний,} \end{cases} \quad (15)$$

$$\Delta Y = |Y|_N = 0, \quad 1 \leq i \leq N - 1. \quad (16)$$

Следовательно, краевую задачу (13) можно свести к задаче Коши (14). Задавшись граничными условиями при  $r = 0$  (15), определяем последовательно значения  $[Y]_i$  во всех точках интервала интегрирования по (14) и проверяем выполнение граничного условия при  $r = d/2$  (16). Собственное значение  $\omega$  является при этом параметром, который и определяется методом пристрелки.

Подставив матрицу коэффициентов  $Y_N$  в (12) и, задавшись  $C_1 = 1$ , определяем из (12) остальные  $C_j$ , а затем из (11) — собственные функции  $F_{2m-k}$  в любом узле сетки. Таким образом, в каждом узле сетки по данному алгоритму решается система  $M$  алгебраических уравнений, т. е. порядок решаемых систем СЛАУ в  $N$  раз меньше, чем в конечно-разностном методе.

Следует отметить, что данный алгоритм не применим для расчета ПЭ с сильной локализацией смещений к его центру, так как в этом случае наблюдается резкое затухание амплитуды колебаний к периферии. Поскольку исходные уравнения должны иметь решения экспоненциального вида, а на большом отрезке численного интегрирования экспоненциальная составляющая быстро становится доминирующей [15], то после прохождения некоторого отрезка может оказаться, что процесс интегрирования каждого из  $M$  решений приведет к одному и тому же решению. Кроме того, если экспоненциальная составляющая нарастает слишком быстро (см. [9]), то решение даже может выйти за пределы разрядной сетки ЭВМ. В этом случае, как было показано в [9], рассматриваемые системы уравнений необходимо решать с помощью метода прогонки [13], когда решение

представляется в виде

$$[Y]_{i+1} = [\xi]_{i+1}[Y]_i + [\eta]_{i+1}. \quad (17)$$

Решая совместно (17) и (14), получим

$$\begin{aligned} & \{[\alpha]_i - [\gamma]_i[\xi]_i + [\beta]_i[\xi]_{i+1}[\xi]_i\}[Y]_{i-1} - \\ & - [\gamma]_i[\eta]_i + [\beta]_i[\xi]_{i+1}[\eta]_i + [\beta]_i[\eta]_{i+1} = 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений выполнима для любых  $[Y]_{i-1}$ , если

$$\begin{aligned} & [\alpha]_i + \{[\beta]_i[\xi]_{i+1} - [\gamma]_i\}[\xi]_i = 0, \\ & [\beta]_i[\eta]_{i+1} + \{[\beta]_i[\xi]_{i+1} - [\gamma]_i\}[\eta]_i = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем рекуррентные формулы для определения коэффициентов матриц  $\xi$ ,  $\eta$ :

$$[\xi]_i = \frac{[\alpha]_i}{[\gamma]_i - [\beta]_i[\gamma]_{i+1}}; \quad [\eta]_i = \frac{[\beta]_i[\eta]_{i+1}}{[\gamma]_i - [\beta]_i[\gamma]_{i+1}}. \quad (18)$$

Для расчета матриц коэффициентов  $[\xi]_i$ ,  $[\eta]_i$  необходимо знать значения  $[\xi]_{i+1}$  и  $[\eta]_{i+1}$ , которые удобно задать

$$[\xi]_N = 0, \quad [\eta]_N = 0,$$

тогда

$$[Y]_N \vec{C} = \{[\xi]_N [Y]_{N-1} + [\eta]_N\} \vec{C} = 0,$$

выполнимо при любой матрице  $[Y]_{N-1}$ , а следовательно, и выполнимо первое граничное условие (13):

$$[Y]_N \vec{C} = 0.$$

Можно показать, что условия устойчивого решения метода прогонки будут выполняться тогда, когда  $\Omega H < 1$  [9] (где  $H = h/h_0$ ,  $\Omega = \omega/\bar{\omega}$ ). Поэтому интервал интегрирования в случае устойчивого алгоритма следует разбивать на два: I —  $H; \Omega > 1$  и II —  $H; \Omega < 1$ . В первом случае решение ведется по (14), во втором — по (18).

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

По рассмотренному выше алгоритму были определены спектральные характеристики и распределения смещений в линзовом ПЭ АТ-среза ( $R/h_0 = 200$ ,  $d/h_0 = 20$ ). Результаты вычислений частот основного и

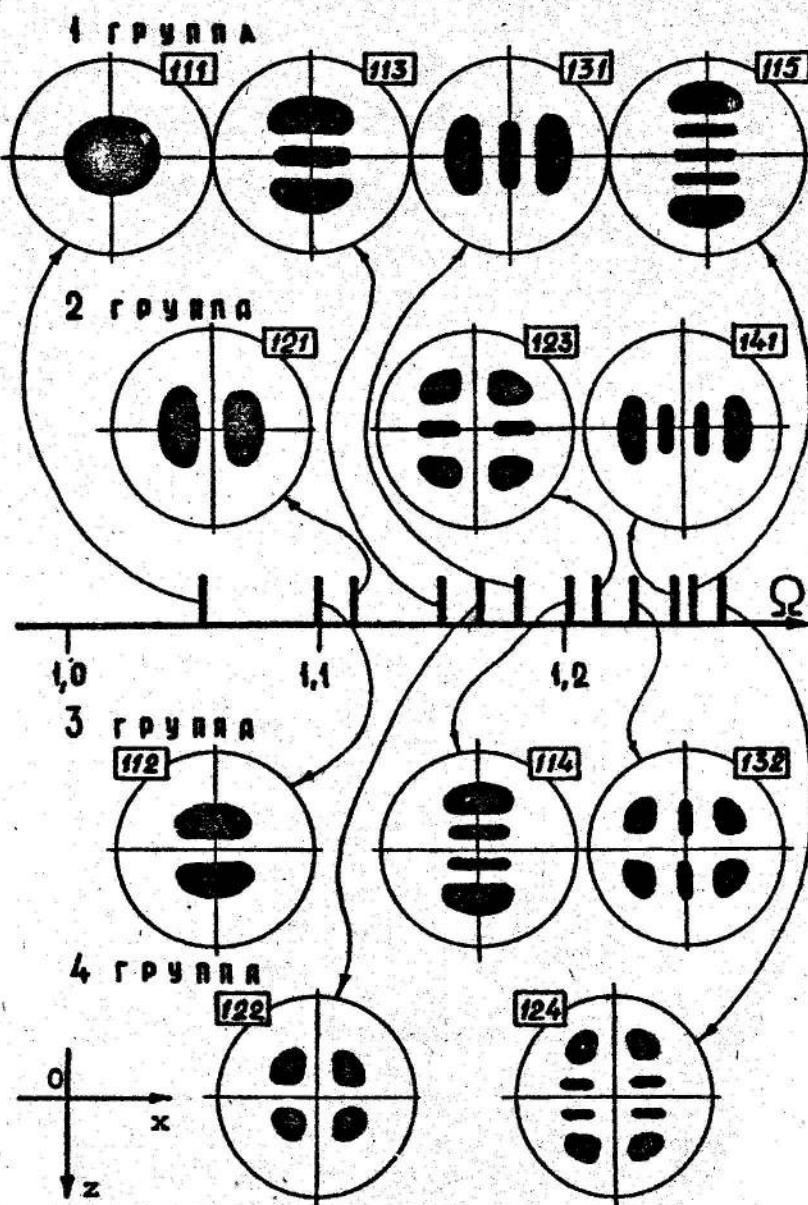


Рис. 2

нескольких ближайших к нему ангармонических колебаний, а также соответствующие им тонограммы приведены на рис. 2. Для линзового ПЭ  $R = 520$  мм,  $h_0 = 0,335$  мм расчетные и измеренные [16] значения некоторых резонансных частот приведены в таблице. Результаты расчета и эксперимента хорошо согласуются.

Таблица

Индекс моды (1mp)	Измеренные значения [16]		$\omega_{1mp}/\omega_{111}$
	$f_{1mp}$ , кГц	$f_{1mp}/f_{111}$	
111	5000	1,0	1,0
112	5084	1,0168	1,0174
121	5110	1,0220	1,0219
113	5171	1,0342	1,0344
131	5227	1,0454	1,0439
114	5261	1,0522	1,0517

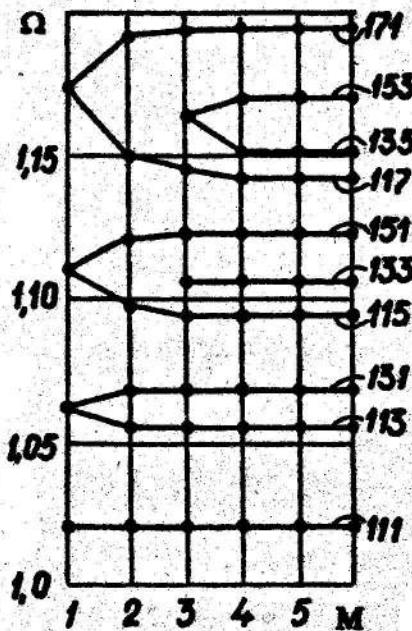


Рис. 3

Приведенные на рис. 3 зависимости частоты резонансных колебаний линзового ПЭ ( $R/h_0 = 1500$ ,  $d/h_0 = 24$ ) от количества членов ряда ( $M$ ) разложения (4) функции смещения подтверждают быструю сходимость полученного алгоритма к точному решению краевой задачи. Так, например, для определения собственных значений для ангармоник 113, 131 до-

статочно взять в (4)  $M = 2$ , для ангармоник 115, 133, 151 —  $M = 3$ . При расчете распределений смещений в ПЭ необходимо  $M$  для соответствующего колебания увеличить на единицу.

Время определения матрицы  $[Y]_N$  и вычисления соответствующего определителя (например, при  $N = 50$ ) на ЭВМ СМ-1420 при  $M = 2$  составляет 3 сек, при  $M = 3$  — 6 сек, при  $M = 4$  — 10 сек. Тогда (после выделения корня трансцендентного уравнения в интервале 0,01) определение  $\Omega$ , например, методом половинного деления, при обеспечении точности вычисления в шестом знаке после запятой, потребует 14 итераций. Следовательно, потребное машинное время в этом случае для вычисления собственных значений и собственных функций, которое, кстати, не зависит от сложности профиля пьезоэлемента, при  $M = 2, 3, 4$  составит соответственно 50, 90, 170 сек и находится в прямой зависимости от  $N$ .

Следует отметить, что разработанный алгоритм позволяет производить исследования по влиянию геометрии ПЭ на температурно-частотные характеристики (ТЧХ) любого резонансного колебания сдвига по толщине. Так на рис. 4, в качестве примера, приведены рассчитанные ТЧХ трех частот (111, 113, 131) дискового ПЭ (сплошная линия),  $d/h_0 = 60$ , и линзового (пунктирная линия),  $R/h_0 = 1500$ . Угол среза пластины составлял  $35,086^\circ$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная математическая модель колебаний осесимметричных пьезоэлементов переменной толщины позволяет проводить анализ полного спектра колебаний сдвига по толщине, его зависимость от температуры и угла среза ПЭ, рассчитывать соответствующие амплитуду и фазу смещений как на поверхности ПЭ, так и в его объеме, проводить анализ таких важных электрических характеристик резонатора как эквивалентные динамические индуктивность и емкость, емкостное отношение, а также определять степень ослабления колебаний в зависимости от формы и размеров электрода. Это позволяет проводить эффективный численный анализ по исследованию многомодовых характеристик КР и вести целенаправленный поиск оптимальных геометрий пьезоэлемента и электрода, а также угла среза кристаллической пластины.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

$$\begin{aligned} g_1 &= D_1 - D_5; & g_5 &= D_1 + D_5; & g_6 &= D_6^2 / \rho h \bar{\omega}^2; \\ A_1 &= g_5 + g_6; & A_2 &= g_1 - g_6; \\ A_3 &= \frac{A_1}{r} + \frac{\partial g_5}{\partial r} + 2g_6 \frac{\partial D_6}{\partial r}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 &= -\frac{A_2}{r} + \frac{\partial g_1}{\partial r} + 2g_6 \frac{\partial D_6}{\partial r}; \quad A_5 = -2A_2/r^2; \\
 A_6 &= -2A_2/r^2 - \left( \frac{\partial g_1}{\partial r} + 2g_6 \frac{\partial D_6}{\partial r} \right) / r; \\
 A_7 &= A_1/r^2; \quad A_8 = -A_2/r^2; \\
 A_9 &= g_6 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial D_6}{\partial r} + \frac{\partial^2 D_6}{\partial r^2} \right) + \frac{h^3}{6} \rho \omega^3 - 2D_6; \\
 A_{10} &= g_6 \left( \frac{\partial^2 D_6}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial D_6}{\partial r} \right).
 \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. с. 900126 (СССР). Двухпараметровый частотный измерительный преобразователь / Ф. Ф. Колпаков, Ю. С. Шмалий, В. А. Шевелев. — Б. И., 1982. N 3.
2. Колпаков Ф. Ф. Использование многопараметровой чувствительности пьезоэлектрических резонаторов в измерительных устройствах // Электронная техника. Сер. 5. Радиодетали и радиокомпоненты, 1985. Вып. 2. С. 62.
3. А. с. 1232964 (СССР). Дифференциальный пьезоэлектрический преобразователь / В. Я. Баржин, Ф. Ф. Колпаков, В. А. Шевелев и др. — Б. И., 1986. N 19.
4. Постников И. И. Исследование на ЭВМ характеристик высокочастотных кварцевых резонаторов // Радиотехника, 1989. N 12. С. 85.
5. Постников И. И. Определение частотного промежутка до побочных колебаний в линзовых пьезоэлементах // Радиотехника и электроника, 1987. Т. XXXII. N 12. С. 2678.
6. Постников И. И. Собственные колебания линзовых пьезоэлементов // Изв. вузов. Радиофизика, 1986. Т. 29. N 6. С. 740.
7. Постников И. И. Собственные функции ангармонических колебаний №15, №33, №51 линзовых пьезоэлементов // Изв. вузов. Радиофизика, 1990. Т. 33. N 10. С. 1176.
8. Постников И. И. Динамическая индуктивность ВЧ кварцевых резонаторов при ангармонических колебаниях // Радиотехника. 1986. N 5. С. 34.
9. Веселов Г. И., Постников И. И., Самойлов В. С. Устойчивый алгоритм численного моделирования на ЭЦВМ собственный колебаний высокочастотных кварцевых резонаторов // Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1983. Т. XXVI. N 6. С. 27.
10. Пьезоэлектрические резонаторы: Справочник / В. Г. Андросова, Е. Г. Бронникова, А. М. Васильев и др.; Под ред. П. Е. Кандыбы и П. Г. Поэднякова. — М.: Радио и связь, 1992. 392с.

11. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. — М.: Наука, 1974. 655 с.
12. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. 656 с.
13. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973. 631 с.
14. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. 512 с.
15. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холл и Дж. Уатт. — М.: Мир, 1979. 312 с.
16. Witson C. J. Vibration modes of AT-cut convex quartz resonators // J. Phys. D: Appl. Phys., 1974. V. 7. N 18. P. 2449.

Мытищинский  
научно-исследовательский  
институт радиоизмерительных  
приборов

Поступила в редакцию  
2 декабря 1992 г.

## THICKNESS SHEAR VIBRATIONS IN ROUND PIEZOELEMENTS WITH VARYING THICKNESS

*I. I. Postnikov*

Algorithm of numerical solution on computer the problem of axisymmetrical piezoelements natural vibrations with varying thickness is proposed. This algorithm permits to determine complete spectrum of thickness shear vibrations and displacement distribution. Calculations of piezoelements spectrum with corresponding vibration topograms and temperature-frequency characteristics of harmonic and anharmonic vibrations are given.