УДК 550.388.2

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НА СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ОТРАЖАТЕЛЕЙ

А. А. Станкевич

Предлагается обобщение метода фазовых измерений на случай нескольких отражателей. Обобщение существенно использует свойства ионосферы. Проведено сравнение с импульсным зондированием ионосферы и с фазовыми измерениями в случае одного отражения.

Достоинства фазовых измерений для определения задержки сигнала общеизвестны. Точность измерений фазы (и амплитуды), в первую очередь, определяется стабильностью опорного генератора и длительностью наблюдения, которые могут быть весьма велики. После этого, фазовая задержка определяется простым делением фазы на частоту. Конечно, для повышения точности желательны еще: стабильность исследуемого объекта — ионосферы — и более высокая зондирующая частота, но эти величины не в нашей власти. К сожалению, при радиозондировании ионосферы задержка сигнала часто не одна: отражение обыкновенной и необыкновенной компонент сигнала, отражение от спорадического слоя и т. п. При распространении сигнала одновременно по нескольким путям, фаза пропорциональна некой средней по всем путям фазовой задержке. Возникает проблема разделения вклада путей, чему и посвящена данная работа.

Пусть излучается сигнал, имеющий M дискретных гармоник с известными частотой ω_m, фазой и амплитудой. Принимаемый сигнал имеет те же частоты и некоторые набеги фазы φ_m и амплитуды a_m, где $1 \le m \le M$. В предположении, что имеется N отражателей, можно написать систему уравнений

$$\sum_{\ell=1}^{N} b_\ell(\omega_m)\, e^{i\omega_m \tau_\ell(\omega_m)} = a + m e^{i\varphi_m}, \quad 1 \le m \le M,$$

где $\tau_\ell(\omega_m)$ — фазовая задержка m-й гармоники, отраженной от ℓ-го слоя, $b_\ell(\omega_m)$ — коэффициент отражения от ℓ-го слоя m-й гармоники.

Преобразуем левую часть системы, разлагая функции частоты по степеням $\Omega_m = \omega_m - \omega_0$, где ω_0 — некоторая средняя частота сигнала, и ограничиваясь линейными членами.

$$\sum_{\ell=1}^{N} b_\ell(\omega_m)\exp\left\{i\omega_m\tau_\ell(\omega_m)\right\} = \sum_{\ell=1}^{N}\exp\left\{\ln b_\ell(\omega_m) + i\omega_m\tau_\ell(\omega_m)\right\} \approx$$
$$\approx \sum_{\ell=1}^{N}\exp\left\{\ln b_\ell(\omega_0) + i\omega_0\tau_\ell(\omega_0)\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{\Omega_m}{b_\ell(\omega_0)}\frac{db_\ell(\omega_0)}{d\omega} + i\Omega\left[\tau_\ell(\omega_0) + \omega_0\frac{d\tau_\ell(\omega_0)}{d\omega}\right]\right\} = \sum_{\ell=1}^{N} B_\ell Z_\ell^{\Omega_m}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_m &= a_m e^{i\varphi_m}, \\ B_\ell &= b_\ell(\omega_0)\, e^{i\omega_0\tau_\ell(\omega_0)}, \\ Z_\ell &= \exp\left\{\frac{1}{b_\ell(\omega_0)}\frac{db_\ell(\omega_0)}{d\omega} + i\left[\tau_\ell(\omega_0) + \omega_0\frac{d\tau_\ell(\omega_0)}{d\omega}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Решение системы уравнений:

$$\sum_{\ell=1}^{N} B_\ell Z_\ell^{\Omega_m} = A_m, \quad 1 \le m \le M \tag{2}$$

относительно B_ℓ и Z_ℓ даст решение поставленной задачи.

Система (2) нелинейна. Решим ее в частном случае, когда модулирующие частоты эквидистантны $\Omega_m = m\Omega$. Поскольку система содержит $2N$ неизвестных, количество уравнений должно быть таким же. Положим $1 - N \le m \le N$. Введя обозначение $Y_\ell = Z_\ell^{\Omega}$, получим систему

$$\sum_{\ell=1}^{N} B_\ell Y_\ell^{m} = A_m, \quad 1 - N \le m \le N. \tag{3}$$

Метод решения системы (3) известен [1] и состоит в следующем. Образуем полином, имеющий корнями неизвестные Y_ℓ:

$$g(y) = \prod_{\ell=1}^{N}(y - Y_\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} G_n y^n + y^N.$$

Очевидно, что $g(Y_\ell) = 0$ или $\sum\limits_{n=0}^{N-1} G_n Y_\ell^n = -Y_\ell^N$. Используя коэффициенты G_n, составим линейные комбинации уравнений системы (3):

$$\sum_{n=0}^{N-1} G_n A_{n+i} = \sum_{\ell=1}^{N} B_\ell \sum_{n=0}^{N-1} G_n Y_\ell^{n+i} = \sum_{\ell=1}^{N} B_\ell Y_\ell^{i}(-Y_\ell^{N}) = -A_{i+N}.$$

Таким образом, решение системы (3) сводится к трем стандартным алгебраическим задачам:

1) решение системы линейных алгебраических уравнений относительно G_n

$$\sum_{n=0}^{N-1} G_n A_{n+i} = -A_{N+i}, \quad 1 - N \le i \le 0;$$

2) нахождение корней полинома Y_ℓ

$$\sum_{n=0}^{N-1} G_n Y_\ell^n + Y_\ell^N = 0, \quad 1 \le \ell \le N;$$

3) решение системы линейных алгебраических уравнений относительно B_ℓ

$$\sum_{\ell=1}^{N} B_\ell Y_\ell^m = A_m, \quad 1 \le m \le N.$$

В качестве последней системы могут быть взяты любые N уравнений системы (3).

Заметим, что метод решения системы (3) навязывает нам, вообще говоря, произвольные комплексные B_ℓ и Z_ℓ. Ионосфера действует как дисперсионная линия задержки, поэтому не возникает проблем с интерпретацией $|Z_\ell| = \exp \dfrac{d}{d\omega} \ln b_\ell$ и разницей между фазовой (τ_ℓ) и групповой задержкой ($\tau_\ell + \omega_0 \dfrac{d\tau_\ell}{d\omega}$) (см. формулы (1)). Отсутствие дисперсии, как это может быть в радиолокации, приводит к соотношениям

$$|Z_\ell| = 1, \quad \arg B_\ell = \omega_0 \arg Z_\ell,$$

которым наше решение, полученное по методу [1], скорее всего удовлетворять не будет.

Сравним фазовые измерения при одном и нескольких отражателях с импульсным зондированием. Фазовые измерения при нескольких отражателях, согласно нашим рассуждениям, приводят к системе уравнений (3) и требуют сигнала с линейчатым спектром, имеющим шаг Ω и ширину $2N\Omega$. Будем проводить сравнение, зафиксировав эти параметры сигнала. Такой сигнал имеет период $\dfrac{2\pi}{\Omega}$, так что высота определяется с точностью до аддитивной добавки $\dfrac{c}{2}\dfrac{2\pi}{\Omega}$, которую будем называть фазовой неоднозначностью.

При импульсном зондировании высотное разрешение — порядка длины импульса или порядка длины фронта импульса. Эта длина при заданной полосе сигнала не может быть меньше $\dfrac{c}{2}\dfrac{2\pi}{2N\Omega}$, где $2N\Omega$ — полоса сигнала — такая же, как в системе (3), c — скорость света. Фазовые измерения при одном отражении дают высотное разрешение $\frac{c}{2}\frac{\Delta\Phi}{2N\Omega}$, где $\Delta\Phi$ — погрешность измерения фазы [2]. Поскольку всегда $\Delta\Phi < 2\pi$ (а часто достижимо $\Delta\Phi \ll 2\pi$, например, в [3] дана оценка $\Delta\Phi < 4°$ при отношении сигнал/шум = 10) фазовые измерения при одном отражении точнее импульсных.

Фазовые измерения при нескольких отражениях не анализируются так просто, но следует ожидать преимуществ перед импульсным зондированием по тем же причинам, что и при одном отражении. Ведь фактически, фазовые измерения проводятся с дополнительной фильтрацией сигнала гребенчатым фильтром, выделяющим в спектральной полосе узкие окрестности гармоник. Этим достигается $\Delta\Phi < 2\pi$, в то время как без такой фильтрации $\Delta\Phi \approx 2\pi$.

Исходные данные				$N = 4$
	амплитуда	набег фазы несущей		групповая задержка
L	$\|B\|$	$\arg B$	$\ln\|Z\|$	$\arg Z$
1	1.000000	0.0000000	0.0000000	−0.1010000
2	1.000000	0.0000000	0.0000000	0.3020000
3	0.1000000	0.0000000	0.0000000	0.2100000
4	0.5000000 E–01	0.0000000	0.0000000	0.2600000

Пример 1.				$N = 3$
	амплитуда	набег фазы несущей		групповая задержка
L	$\|B\|$	$\arg B$	$\ln\|Z\|$	$\arg Z$
1	1.028859	0.3310025E–03	−0.4302689E–01	−0.1008857
2	0.4790945E–01	0.6815151E–02	−0.7338400	−0.4925672
3	1.173285	−0.5684609E–03	−0.3565872E–01	0.2943073
сигнал/шум = 10.00000				разрешение = 0.2000000

Пример 2.				$N = 3$
	амплитуда	набег фазы несущей		групповая задержка
L	$\|B\|$	$\arg B$	$\ln\|Z\|$	$\arg Z$
1	1.019272	0.1239187E–01	–0.1213004	–0.1334680
2	1.244291	–0.1007101E–01	–0.1030811	0.2940060
3	0.8007621E–02	–0.4881226	2.389658	–1.464789
сигнал/шум = 10.00000			разрешение = 0.5000000	

Пример 3.				$N = 3$
	амплитуда	набег фазы несущей		групповая задержка
L	$\|B\|$	$\arg B$	$\ln\|Z\|$	$\arg Z$
1	0.8466873E–01	–0.4020223	–5.840997	0.2972062
2	2.224306	0.3883800E–02	–0.3177402	0.9841333E–01
3	0.9563310E–01	–0.8959752E–02	–1.568167	2.957403
сигнал/шум = 10.00000			разрешение = 1.0000000	

Пример 4.				$N = 3$
	амплитуда	набег фазы несущей		групповая задержка
L	$\|B\|$	$\arg B$	$\ln\|Z\|$	$\arg Z$
1	1.219309	–0.1113555E–01	–0.9477711E–01	0.2888437
2	0.9439649	0.1440387E–01	–0.1184254	–0.1220820
3	0.1917970E–03	–0.4379580	9.869338	2.811042
сигнал/шум = 100.00000			разрешение = 1.0000000	

Фазовые измерения с несколькими отражателями промоделированы численно. Задавались $N = 4$ и B_1, B_2, B_3, B_4, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. Восстановление велось в предположении $N = 3$ при различных Ω и отношениях сигнал/шум (примеры 1–4). "Экспериментальные" данные $A_m = \sum_{\ell=1}^{4} B_\ell Z_\ell^{m\Omega}$, где $-2 \le m \le 3$, зашумлялись округлением до соответствующего числа двоичных разрядов в мантиссе вещественной и мнимой части A_m. Затем решалась система $\sum_{\ell=1}^{3} B_\ell Z_\ell^{m\Omega} = A_m$ относительно B_ℓ, Z_ℓ по описанной выше процедуре. В примерах: в первой колонке приведена $|B_\ell|$ — амплитуда, во второй — $\arg B_\ell$ — фазовая задержка, умноженная на несущую частоту, в третьей — $\ln|Z_\ell|$, в четвертой — $\arg Z_\ell$ — групповая задержка. Ниже приводятся: отношение сигнал/шум, разрешению по Рэлею, равное $\dfrac{2\pi}{2N\Omega}$.

Во-первых, видно, что процедура ошибается разумным образом, когда не может различить отражатели или когда их количество выбрано неверно. Во-вторых, наши ожидания относительно точности измерения групповых задержек оправдываются. Так, два главных отражателя с истинной амплитудой $\doteq 1$ ($L = 1$ и $L = 2$) разрешаются не только в примере 1 ($L = 1$ и $L = 3$), но и в примере 2 ($L = 1$ и $L = 2$), когда по Рэлею они неразрешимы. При этом, их групповые задержки определяются более, чем на порядок, точнее рэлеевского разрешения. Дальнейшее снижение разрешения (сужение полосы сигнала) приводит к слиянию отражателей в один ($L = 2$) — пример 3. Для их разрешения при той же полосе сигнала надо повышать отношение сигнал/шум — пример 4 ($L = 1$ и $L = 2$), что качественно согласуется с теорией сверхразрешения (в [4] показано, что с ростом разрешения сверх рэлеевского очень быстро растет потребное отношение сигнал/шум).

Решать систему (2)–(3) можно было несколько иначе. В системе (3) задать N побольше (порядка сотен или тысяч), задать Y_ℓ. После чего искать B_ℓ, ожидая, что если от слоя-отражателя, соответствующего Y_ℓ, нет отражения, B_ℓ будет близко к нулю. То есть, осуществить преобразование Лапласа (или Фурье при $|Y_\ell| = 1$) с фиксированными узлами. Системы (2) и (3) можно назвать преобразованием Лапласа со свободными узлами. Спектр сигнала линейчатый с шагом Ω и общей шириной $2N\Omega$. Этим требованиям удовлетворяют, например, последовательность импульсов с периодом $\dfrac{2\pi}{\Omega}$ и характерной длительностью $\dfrac{2\pi}{2N\Omega}$. Таким образом, мы либо осуществим обычное импульсное зондирование, где достоинства фазовых измерений потеряны, либо будем вынуждены строить $2N$ приемников, что неприемлемо по экономическим соображениям (ввиду того, что Y_ℓ нами назначены, и неизвестны только B_ℓ, можно обойтись N уравнениями в системе (3) и заменить в предыдущих рассуждениях

$2N$ на N, но это величины одного порядка). В то же время, преобразование Лапласа со свободными узлами позволяет обойтись небольшим N (порядка 10).

Правда, возникает трудность с фазовой неоднозначностью, т. к. при небольших N диапазон высот $\frac{c}{2}\frac{2\pi}{\Omega}$ может оказаться сравнимым с высотным разрешением. Эта трудность преодолевается так же, как в случае одного отражения [2]. Там фазовые измерения проводились на нескольких частотах, нам придется решать систему (3) на нескольких сетках частот с различными Ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хемминг Р. Численные методы. — М., 1972. 400 с.
2. Bibl K., Reinisch B. W. // Radio Science, 1978. V. 13. N 3. P. 519–530.
3. Poole A. M. V. // Radio Science, 1985. V. 20. N 6. P. 1609–1616.
4. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике. / Перевод и научная обработка М. К. Размахнина, В. П. Яковлева. — М., 1971. 256 с.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 26 апреля 1993 г.

GENERALIZATION OF THE PHASE MEASUREMENT METHOD FOR MULTIPLE REFLECTION

A. A. Stankewitch

Generalization of the phase measurement method for multiple reflections is suggested. This generalization essentially use the ionosphere properties. It is compared with the pulse ionosphere sounding and with the phase measurements for single reflection.