

УДК 537.874.6

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЕ

А. В. Тюзтин

Рассмотрена дифракция поперечных и продольных плоских волн на тонкой непроводящей идеально жесткой полуплоскости в горячей плазме. Получено общее решение задачи и асимптотические формулы для дальней зоны. Показано, что они существенно упрощаются для частот, значительно превосходящих плазменную. Проанализировано поведение поля в окрестности ребра.

В последние годы опубликовано немало работ, посвященных дифракции электромагнитных волн на различных объектах, в частности, на полуплоскости, в том случае, когда окружающая среда является анизотропной или движущейся (см., например, [1-4]). Другое важное отличие реальной среды от вакуума — существование пространственной дисперсии — в задачах дифракции затрагивалось реже [5-7]. Между тем, учет пространственной дисперсии приводит к ряду принципиально новых эффектов. В частности, весьма интересен тот факт, что даже непроводящие тонкие экраны становятся существенными препятствиями для электромагнитных волн. Именно такого рода задаче, позволяющей выявить роль пространственной дисперсии "в чистом виде", посвящена настоящая работа. Отметим, что, как следует из статьи [6], случай идеально проводящей полуплоскости в горячей плазме впервые рассматривался в [5] (к сожалению, эта работа оказалась недоступной для автора настоящей статьи).

1. Рассмотрим непроводящую полуплоскость ($z = 0, z > 0$), толщина которой пренебрежимо мала по сравнению с длинами волн, способных распространяться в окружающей среде. Последняя является горячей нерелятивистской слабостолкновительной электронной плазмой, приближенно характеризуемой проницаемостью

$$\epsilon(\omega, \vec{k}) = 1 - \omega_p^2 [\omega(\omega + i\nu) - k^2 v^2]^{-1}, \quad (1)$$

где ω_p — плазменная частота, ν — частота столкновений для электронов, $v = \sqrt{3k_B T/m}$ (T — температура, m — масса электрона, k_B — постоянная Больцмана). Предполагается, что $\omega_p < \omega$, $\nu < \omega_p$, $\nu < c$, где c — скорость света в вакууме. В такой среде могут распространяться

поперечные и продольные волны, обладающие соответственно волновыми числами

$$k_t = \omega \sqrt{\epsilon_0} / c, \quad k_l = \sqrt{\omega(\omega + i\nu) - \omega_p^2} / \nu \quad (\text{Im } k_{t,l} \geq 0), \quad (2)$$

где $\epsilon_0 = 1 - \omega_p^2 [\omega(\omega + i\nu)]^{-1}$. В дальнейшем в конечных результатах мы будем полагать $\nu = 0$ всюду, кроме множителей, дающих экспоненциальное затухание.

Из области $z > 0$ на полуплоскость падает плоская монохроматическая ($\exp(-i\omega t)$) волна:

$$\{\vec{E}^{(i)}, \vec{H}^{(i)}\} = \{\vec{E}_0^{(i)}, \vec{H}_0^{(i)}\} \exp(ik_x^{(i)}x + ik_z^{(i)}z), \quad (3)$$

где $k_x^{(i)} = -\sqrt{k_t^2 - k_z^{(i)2}}$ или $k_x^{(i)} = -\sqrt{k_l^2 - k_z^{(i)2}}$ в зависимости от того, является ли эта волна поперечной или продольной ($\text{Im } k_x^{(i)} \leq 0$, $k_z^{(i)}$ — вещественно). Полное поле состоит из падающего и дифрагированного, компоненты которого обозначаются далее без вспомогательного индекса. Поскольку интерес обычно представляет такая ситуация, когда падающая волна является распространяющейся, то будем считать, что $|k_x^{(i)}| < |k_t|$ при падении поперечной волны и $|k_z^{(i)}| < |k_l|$ при падении продольной волны.

На непроводящей полуплоскости должны выполняться условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей и требование зануления нормальной компоненты скорости движения электронов (т. е. наводимого в среде тока), которое часто ставится на границе плазмы с твердым телом [8]. Запишем эти условия для дифрагированного поля:

$$\{E_y\} = \{H_x\} = 0, \quad (4a)$$

$$\{E_x\} = \{H_y\} = 0, \quad (4б)$$

$$j_x + j_z^{(i)} \Big|_{z=\pm 0, z>0} = 0, \quad (4в)$$

где $\vec{j} + \vec{j}^{(i)}$ — плотность полного индуцируемого в среде тока, а фигурные скобки означают скачок заключенной в них величины при $z = 0$. Равенство (4в) в отсутствие зависимости от y приводится к виду

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{i\omega}{c} E_x \Big|_{z=\pm 0, z>0} = -\frac{i\omega}{c} A e^{ik_x^{(i)}x}, \quad (4в')$$

где $A = E_{0z}^{(i)} + c\omega^{-1}k_z^{(i)}H_{0y}^{(i)}$. Заметим, что из (4б), (4в') следует также непрерывность E_x .

Условия (4) означают, что воздействие на поле осуществляется только благодаря механическому взаимодействию частиц среды с экраном. Заметим, что противоположной является модель хорошо проводящего экрана, пронизываемого для частиц среды (таким является, например, мелкоячеистая металлическая сетка). Подобный безграничный экран в горячей плазме рассматривался ранее в работах [9, 10].

В случае падения поперечной TE -волны решение задачи определяется условиями (4а), то есть такая волна беспрепятственно проникает сквозь непроводящую пластинку. Поэтому далее рассматриваются только случаи падения поперечной TM -волны или продольной волны, так что полное поле может обладать лишь компонентами E_x , E_z , H_y .

2. Дифрагированное поле естественно представить в виде разложения по плоским волнам. Из уравнений Максвелла с учетом условий излучения получаются следующие представления:

$$H_y = \int_{-\infty}^{\infty} H_{\pm}(\varpi) \exp(i\varpi z + ik_{tz}|z|) d\varpi,$$

$$E_x = \frac{c}{\omega \epsilon_0} \operatorname{sgn} z \int_{-\infty}^{\infty} [k_{tz} H_{\pm}(\varpi) e^{ik_{tz}|z|} + \varpi V_{\pm}(\varpi) e^{ik_{tz}|z|}] e^{i\varpi z} d\varpi, \quad (5)$$

$$E_z = -\frac{c}{\omega \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} [\varpi H_{\pm}(\varpi) e^{ik_{tz}|z|} - k_{tz} V_{\pm}(\varpi) e^{ik_{tz}|z|}] e^{i\varpi z} d\varpi,$$

где $k_{tz} = \sqrt{k_t^2 - \varpi^2}$, $k_{Lz} = \sqrt{k_L^2 - \varpi^2}$ ($\operatorname{Im} k_{t,Lz} \geq 0$). Незвестные коэффициенты H_{\pm} , V_{\pm} относятся к области $z > 0$, а H_{-} , V_{-} — к области $z < 0$.

Для определения H_{\pm} , V_{\pm} необходимо дополнить условия (4) соответствующими требованиями на полуплоскости $z = 0$, $z < 0$. На ней должны быть непрерывными компоненты E_x , H_y , j_x и плотность индуцируемого в среде заряда ρ (два последних условия получаются в результате интегрирования уравнений движения и неразрывности для электронов по бесконечно малому отрезку оси z [9]). С помощью уравнений Максвелла эти требования записываются в виде

$$\{E_x\} = \{H_y\} = \{E_z\} = \{\partial E_z / \partial z\} = 0. \quad (6)$$

Как видно из (4), (6), компоненты E_x , E_z , H_y должны быть непрерывны на всей плоскости $z = 0$. Применяя эти требования к подинтегральным выражениям в (5), получаем

$$H_{-} = H_{+}, \quad V_{-} = V_{+} = -k_{tz} H_{+} \varpi^{-1}. \quad (7)$$

Вследствие непрерывности и нечетности по z функции $\partial E_z / \partial z$ последнее из условий (6) означает ее зануление при $z = 0$, $z < 0$. Это требование и

условие (4в') приводят к следующим парным интегральным уравнениям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{tz} K(z) F(z) e^{izx} dz = \epsilon_0 \omega c^{-1} A e^{ik_x^{(i)} x} \quad (x > 0), \quad (8a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z) e^{izx} dz = 0 \quad (x < 0), \quad (8b)$$

где

$$\begin{aligned} F(z) &= k_{tz} z^{-1} H_+(z), \\ K(z) &= 1 + \chi z^2 k_{tz}^{-1} k_{tz}^{-1}, \quad \chi = 1 - \epsilon_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Сходные уравнения возникают в случае полуплоскости, рассеивающей конно-звуковые волны в плазме [7], а также акустические волны в твердом теле [11] и в вязкой жидкости [12].

Решение системы (8) методом Винера-Хопфа [13] приводит к следующему результату:

$$F(z) = \frac{A \omega \epsilon_0}{2\pi i c \sqrt{k_t + k_x^{(i)}} K_+(k_x^{(i)}) \sqrt{k_t - z} (z - k_x^{(i)} - i0) K_-(z)}, \quad (10)$$

где $K_{\pm}(z)$ — функции, факторизующие $K(z)$, то есть $K_+(z)K_-(z) = K(z)$, причем $K_+(z)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im} z \geq 0$, а $K_-(z)$ регулярна и не обращается в нуль при $\text{Im} z \leq 0$.

Стандартные методы [11-13] позволяют найти различные представления для K_{\pm} , в частности, такие:

$$K_{\pm}(z) = \sqrt{\epsilon_0} \frac{k_* \pm z}{k_t \pm z} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{k_t}^{k_*} \arctg \left(\frac{\chi u^2}{\sqrt{u^2 - k_t^2} \sqrt{k_t^2 - u^2}} \right) \frac{du}{u \pm z} \right], \quad (11)$$

где $k_* \approx k_t(1 - \chi^2)^{-1/2}$ — нуль функции $K(z)$. При $|z| \rightarrow \infty$ факторизующие функции стремятся к константе, равной $\sqrt{\epsilon_0}$. Отметим также, что $k_{\pm}(z) \approx 1$, если выполняются условия

$$|\chi| < 1, \quad \left| \sqrt{k_t^2 - z^2} \right| \gg |\chi \beta k_t|, \quad \left| \sqrt{k_t^2 - z^2} \right| \gg |\chi k_t|, \quad (12)$$

где $\beta = v/c$, то есть если частота существенно превышает плазменную, а z не слишком близко к $\pm k_t, \pm k_t$.

Учитывая (7) и (10), из (5) получаем

$$\vec{E} = \vec{E}^t + \vec{E}^l, \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_y \\ E_x^t \\ E_z^t \end{array} \right\} = \frac{A}{2\pi i \sqrt{k_l + k_x^{(i)}} K_+(k_x^{(i)})} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \omega \epsilon_0 c^{-1} k_{tz}^{-1} \\ \operatorname{sgn} z \\ -\alpha k_{tz}^{-1} \end{array} \right\} \times$$

$$\times \frac{\alpha \exp(i\alpha z + ik_{tz}|z|)}{\sqrt{k_l - \alpha} (\alpha - k_x^{(i)} - i0) K_-(\alpha)} d\alpha, \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^l \\ E_z^l \end{array} \right\} = -\frac{A}{2\pi i \sqrt{k_l + k_x^{(i)}} K_+(k_x^{(i)})} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \alpha \operatorname{sgn} z \\ k_{tz} \end{array} \right\} \times$$

$$\times \frac{\exp(i\alpha z + ik_{tz}|z|)}{\sqrt{k_l - \alpha} (\alpha - k_x^{(i)} - i0) K_-(\alpha)} d\alpha. \quad (15)$$

Здесь произведено разбиение дифрагированного электрического поля на вихревую (t) и потенциальную (l) части.

3. Для вычисления интегралов (14) естественно сделать обычную замену спектрального параметра $\alpha = k_t \cos \alpha$, после чего можно перейти к интегрированию по контуру наибыстрейшего спуска с выделением вклада полюса $\cos \alpha = k_x^{(i)}/k_t$. В результате применения метода перевала получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} H_y \\ E_x^t \\ E_z^t \end{array} \right\} = \frac{A \beta \operatorname{ctg} \theta_t}{(1 + \chi \operatorname{ctg} \theta_t \operatorname{ctg} \theta_l) \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \theta_t}} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\epsilon_0} \\ \operatorname{sgn} z \sin \theta_t \\ -\cos \theta_t \end{array} \right\} \times$$

$$\times \exp[ik_t r \cos(\theta_t - |\theta|)] 1(\theta_t - |\theta|) + \frac{A \beta \cos \theta}{\sqrt{1 + \beta \cos \theta_t} \sqrt{1 - \beta \cos \theta}} \times \quad (16)$$

$$\times \frac{\exp(ik_t r + i\pi/4)}{K_+(k_t \cos \theta_t) K_-(k_t \cos \theta) (\cos \theta - \cos \theta_t) \sqrt{2\pi k_t r}} \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{\epsilon_0} \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{array} \right\},$$

где $\theta_t = \arccos(k_x^{(i)}/|k_t|)$; $\theta_l = \arccos(k_x^{(i)}/|k_l|)$; $1(\xi)$ — единичная функция Хевисайда; r, θ — полярные координаты ($x = r \cos \theta$, $|\theta| \leq \pi$). Эта асимптотика справедлива при условиях $\sqrt{|k_t|} r \left| |\theta| - \theta_t \right| \gg 1$, $|k_l z| \gg 1$ ($z > 0$), то есть вдали от геометрикооптических границ $\theta = \pm \theta_t$ и на расстоянии хотя бы нескольких длин продольных волн от экрана (последнее ограничение позволяет пренебречь поверхностными волнами). Заметим, что, согласно (12), $K_-(k_t \cos \theta) \approx 1$, если

$$|\chi| < 1, \quad |\sin \theta| \gg |\chi| \beta, \quad (17)$$

а $K_+(k_t \cos \theta_t) = K_+(k_z^{(i)}) \approx 1$, если условия (12) выполнены для $z = k_z^{(i)}$ (при $|k_z^{(i)}| < |k_t|$) это означает выполнение неравенств (17) для $\theta = \theta_t$.

Первое слагаемое в (16) представляет собой геометрическое решение, а второе — дифракционную поправку, которая является поперечной цилиндрической волной. Если воспользоваться более точными формулами метода перевала [14], то можно найти асимптотику, равномерно справедливую при приближении к геометрическим границам. Как обычно, оказывается, что на каждой из них дифрагированное поле равно половине соответствующего геометрического значения.

Отметим, что возможна такая ситуация, при которой θ_t комплексно. Она возникает в том случае, когда падающая волна является продольной, а $|k_z^{(i)}| > |k_t|$. При этом первое слагаемое в (16) пренебрежимо мало всюду, кроме окрестности полуплоскости $|z| \sqrt{k_z^{(i)2} - k_t^2} \lesssim 1$. Вне нее в (16) значима только дифракционная поправка.

4. Применяя метод перевала к потенциальной части рассеянного поля (15), в области $\sqrt{|k_t| r} |\theta - \theta_t| \gg 1$ на расстоянии не менее нескольких длин продольных волн от полуплоскости получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_z^l \\ E_z^t \end{array} \right\} = & - \frac{A \exp [ik_{lr} \cos(\theta_t - |\theta|)]}{1 + \chi \operatorname{ctg} \theta_t \operatorname{ctg} \theta} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sgn} z \operatorname{ctg} \theta_t \\ 1 \end{array} \right\} 1(\theta_t - |\theta|) + \\ + A \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \\ \sin \theta \end{array} \right\} & \frac{\operatorname{sgn} z \cos(\theta/2) \exp(ik_{lr} + i\pi/4)}{\cos(\theta_t/2) K_+(k_t \cos \theta_t) K_-(k_t \cos \theta) (\cos \theta - \cos \theta_t)} \times \\ \times & \frac{1}{\sqrt{2\pi k_{lr}}}. \end{aligned} \quad (18)$$

В высокочастотном случае можно упростить полученные выражения. А именно, если

$$|\chi| < 1, \quad |\beta - |\cos \theta|| \gg |\chi|^2 \beta^3, \quad |\sin \theta| > |\chi|, \quad (19)$$

то $K_-(k_t \cos \theta) \approx 1$. Если же подобные неравенства выполняются для θ_t , то $K_+(k_t \cos \theta_t) \approx 1$.

Первое слагаемое в (18) является геометрическим (плоские продольные волны, распространяющиеся под углами $\pm \theta_t$ к оси z), а второе — дифракционной поправкой (продольная цилиндрическая волна). Можно показать, что, при $|\theta| = \theta_t$, рассеянное поле равно половине от соответствующего геометрического значения. Заметим, что дальняя зона для продольных волн начинается на гораздо более близких к ребру расстояниях, чем для поперечных, поскольку $|k_t| \gg |k_z|$.

Сравнивая (16) и (18), видим, что при $|k_z^{(i)}| < |k_t|$, и в отсутствие поглощения в среде, геометрическое поперечное поле по порядку величины в β раз меньше продольного. Однако, если $\nu \neq 0$, то на достаточно

больших расстояниях поперечное поле будет преобладать над продольным, вследствие большего затухания последнего. Подчеркнем, что в отличие от поперечной цилиндрической волны, диаграмма направленности для продольной цилиндрической волны резко асимметрична относительно оси z за счет множителя $\cos(\theta/2)$.

Сравним энергетические характеристики цилиндрических волн разных типов. С помощью известных формул для пространственно диспергирующих сред [15] в отсутствии поглощения получаем

$$W^t = (8\pi)^{-1} |\vec{E}^t|^2, \quad S^t = cW^t, \quad (20)$$

$$W^l = (8\pi)^{-1} \omega^2 \omega_p^{-2} |\vec{E}^l|^2, \quad S^l = vW^l,$$

где $W^{t,l}$ — средние за период плотности энергии для поперечных и продольных волн, $S^{t,l}$ — средние плотности потоков энергии. Подставляя в (20) соответствующие значения для цилиндрических волн, имеем оценки

$$W^l/W^t \sim \beta^{-1} \omega^2 \omega_p^{-2}, \quad S^l/S^t \sim \omega^2 \omega_p^{-2}. \quad (21)$$

Таким образом, в отсутствии поглощения в среде плотность энергии продольной волны значительно больше, чем поперечной. Разница в потоках энергии гораздо меньше, что связано с малостью групповой скорости продольных волн, которая равна v . Следует иметь в виду, что при учете столкновений электронов в (21) войдет множитель $\exp(-\nu t/v)$, вследствие чего поперечные волны будут преобладать над продольными на достаточно больших расстояниях от ребра.

5. Остановимся теперь на поведении рассеянного поля в окрестности ребра. Из (14), (15) можно показать, что электрическое и магнитное поля на ребре конечны и равны

$$E_\theta = 0, \quad E_z = -A, \quad H_\varphi \approx \frac{A\beta \ln \beta}{\pi\sqrt{2} \cos(\theta_l/2)} \quad (22)$$

(здесь выражение для H_φ приведено в том случае, когда $|\chi| < 1$, а $k_z^{(i)}$ не слишком близко к $\pm k_z$ и $\pm k_{z1}$; при произвольных параметрах задачи соответствующий интеграл к табличным не сводится). В малой окрестности ребра $|k_z| r < 1$ поля отличаются от значений (22) на величины порядка $\sqrt{|k_z|} r$. Отметим, что по отдельности вихревое и потенциальное электрические поля на ребре обращаются в бесконечность как $r^{-1/2}$, но эти особенности компенсируют друг друга, и суммарное поле \vec{E} конечно. В то же время электрическая индукция \vec{D} определяется только компонентой \vec{E}^t и при $|k_z| r < 1$ оказывается равной

$$\left\{ \begin{array}{c} D_r \\ D_\theta \end{array} \right\} \approx \frac{A e^{i\pi/4} \sqrt{\epsilon_0} \operatorname{sgn} z}{\cos(\theta_l/2) K_+ (k_z^{(i)}) \sqrt{2\pi k_z r}} \left\{ \begin{array}{c} -\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{array} \right\}. \quad (23)$$

Плотность индуцируемого в среде тока при $|k_c| r \ll 1$ равна

$$\vec{j} \approx -\frac{i\omega}{4\pi} \vec{D}. \quad (24)$$

Таким образом, \vec{D} и \vec{j} имеют корневую особенность на ребре. Можно показать, что плотность индуцируемого в среде заряда ведет себя аналогично.

Данные закономерности принципиально отличаются от имеющих место в классических задачах дифракции. Напомним, что при дифракции ТМ-волны на идеально проводящей полуплоскости в вакууме, компонента рассеянного поля H_y на ребре равна нулю, а \vec{E} обращается в бесконечность как $r^{-1/2}$. В нашей же ситуации как электрическое, так и магнитное поля на ребре конечны, в то время как электрическая индукция, а также плотности тока и заряда в среде стремятся к бесконечности как $r^{-1/2}$. Нетрудно показать, что такое поведение согласуется с условиями на ребре в их общей формулировке, то есть с требованием интегрируемости квадратичных характеристик поля, входящих в закон сохранения энергии. Выполнено также и требование зануления потока энергии через окружающую ребро цилиндрическую поверхность бесконечно малого радиуса.

Автор признателен В. Н. Красильникову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hurd R. A., Przedziecki S. // IEEE Trans. AP, 1985. V. 33. N 8. P. 813.
2. Przedziecki S., Hurd R. A. // Can. J. Phys., 1986. V. 64. N 11. P. 1458.
3. Красильников В. Н., Тюттин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1987. Т. 30. N 9. С. 1106.
4. Тюттин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1992. Т. 35. N 8. С. 678.
5. Labianca F. M., Felsen L. B. Diffraction by a half plane in compressible homogeneous plasma. — Polytechnic Institute of Brooklyn, Farmingdale, N.Y., PIBMRI-1304-65. 1966.
6. Christiansen P. L. // Proc. of the IEEE. V. 62. N 11. P. 1462.
7. Карплюк К. С. // Изв. вузов. Радиофизика, 1977. Т. 20. N 3. С. 413.
8. Федорченко А. М. // ЖТФ, 1962. Т. 32. N 5. С. 589.
9. Тюттин А. В. // Физика плазмы, 1989. Т. 15. N 11. С. 1367.
10. Тюттин А. В. // РЭ, 1989. Т. 34. N 9. С. 1929.
11. Maue A. W. // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik, 1953. V. 33. Heft 1/2. S. 1.
12. Aiblas J. B. // Applied scientific research, A., 1957. V. 6. N. 4. P. 237.
13. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. — М., 1962. 280 с.
14. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т.1. — М.: Мир, 1978.

15. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1979.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
5 июля 1993 г.

**DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY A
NONCONDUCTING HALF-PLANE IN A HOT PLASMA**

A. V. Tyukhtin

Diffraction of the transversal and longitudinal plane waves by a thin non-conducting ideally hard half-plane placed in a hot plasma has been considered. The total solution and the asymptotics for a distant zone have been obtained. They are shown to be essentially simplified for frequencies which considerably exceed plasma frequency. The behaviors of the field in the edge vicinity has been analyzed.