

УДК 621.371.24

РАССЕЯНИЕ МИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН КРИСТАЛЛАМИ СУХОГО СНЕГА

A. M. Ошарин

Аппроксимационный метод взаимодействующих диполей Парсепла-Пенинпакера использован для расчета характеристик рассеяния снежного кристалла в диапазоне миллиметровых радиоволн.

Кристаллы падающего снега имеют характерные размеры порядка нескольких миллиметров и весьма разнообразны по форме [1]. Эти обстоятельства являются причиной сильного взаимодействия волн миллиметрового диапазона с падающим снегом и, одновременно, факторами, затрудняющими построение теоретических моделей ослабления, поскольку задача о дифракции плоской электромагнитной волны на диэлектрических объектах аналитически решена лишь для тел простейшей формы [2].

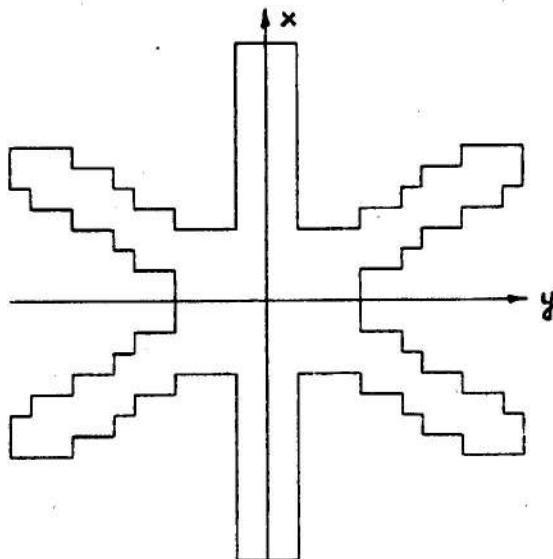


Рис. 1

В настоящей работе факторы эффективности ослабления, рассеяния, поглощения, а также дифференциальное сечение рассеяния звездчатого снежного кристалла, модельный профиль которого изображен на рис. 1, в миллиметровом диапазоне длин волн рассчитывались с использованием

аппроксимационного метода взаимодействующих диполей Парселла–Пеннипакера (П.–П.) [3]. Суть указанного метода состоит в следующем. Диэлектрическое тело произвольной формы моделируется совокупностью элементарных рассеивателей, расположенных в узлах простой кубической решетки. Каждый из элементарных рассеивателей рассматривается в качестве точечного диполя, поляризуемость которого связана с комплексной диэлектрической проницаемостью объекта формулой Клаузиуса–Моссotti [4]:

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N_0} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}, \quad (1)$$

где N_0 — концентрация диполей. Очевидно, $N_0 = d_0^{-3}$, где d_0 — расстояние между соседними диполями. Внешнее поле, падающее на объект, поляризует рассеиватели, заставляя их взаимодействовать как с самим этим полем, так и друг с другом. Дипольный момент i -го точечного диполя при этом оказывается пропорционален эффективному полю \vec{E}_i в месте его расположения

$$\vec{d}_i = \alpha \vec{E}_i, \quad (2)$$

где поле \vec{E}_i равно сумме внешнего поля и поля, рассеянного всеми прочими диполями. Электрическое поле, создаваемое точечным диполем (с учетом эффектов запаздывания), хорошо известно [4]. Полагая, что внешнее поле является плоской гармонической волной, мы можем записать

$$\begin{aligned} \vec{E}_i = & \vec{E}_0 e^{ikr_i} + \\ & + \sum_{j \neq i}^N k^2 [[\vec{n}_{ij} \vec{d}_j] \vec{n}_{ij}] \frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} + (3\vec{n}_{ij}(\vec{n}_{ij} \vec{d}_j) - \vec{d}_j) \left(\frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{ik}{r_{ij}^2} \right) e^{ikr_{ij}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \vec{E}_0 — комплексная амплитуда падающей плоской волны, k — волновое число падающей волны, r_{ij} — междипольное расстояние, а \vec{n}_{ij} — единичный вектор, направленный от j -го к i -му диполю. Подставляя в (3) выражение для \vec{d}_j из (2), получаем систему $3N$ комплексных линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в следующем виде

$$\vec{E}_i = \vec{E}_i^0 + \alpha \sum_{j \neq i}^N D_{ij} \vec{E}_j, \quad (4)$$

где $\vec{E}_i^0 = \vec{E}_0 e^{ikr_i}$ — внешнее поле, а матрица диполь–дипольных взаимодействий дается следующим выражением

$$D_{ij} = \frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}^3} \left[k^2 r_{ij}^2 (\mathbb{I} - \vec{n}_{ij} \otimes \vec{n}_{ij}) + (\mathbb{I} - ik r_{ij})(3\vec{n}_{ij} \otimes \vec{n}_{ij} - \mathbb{I}) \right]. \quad (5)$$

\mathbb{I} является единичным тензором, а значок \otimes означает прямое тензорное произведение. Система уравнений (4) решалась численно методом

разложения поля в окрестности каждого из диполей в борновский ряд по кратности рассеяния [5]:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_i^0 + \alpha \sum_{j \neq i}^N D_{ij} \vec{E}_j^0 + \alpha^2 \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j}^N D_{ij} D_{jk} \vec{E}_k^0 + \dots \quad (6)$$

Определив поле в окрестности каждого из диполей, можно вычислить характеристики рассеяния всего объекта. Для того, чтобы получить дифференциальное сечение рассеяния в направлении единичного вектора \vec{n} , воспользуемся выражением для поля, рассеиваемого телом. В дальней зоне ($kr \gg 1$) имеем

$$\vec{E}_s = \frac{e^{ikr}}{r} \vec{f}_s(\vec{n}). \quad (7)$$

Здесь $\vec{f}_s(\vec{n}) = k^2 (\mathbb{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \sum_{i=1}^N d_i e^{-ik\vec{n}\vec{r}_i}$ — комплексная векторная амплитуда рассеяния тела, r — расстояние от некоторой точки, расположенной внутри объекта, до точки наблюдения, находящейся в дальней зоне; $\vec{n} = \vec{r}/r$. Дифференциальное сечение рассеяния тела равно [6]

$$\frac{dC}{d\Omega}(\vec{n}) = |\vec{f}_s(\vec{n})|^2. \quad (8)$$

Электрическое поле рассеянной волны, как известно, можно разбить на две независимых составляющие: $\vec{E}_{s\parallel}$, расположенную параллельно плоскости рассеяния, и $\vec{E}_{s\perp}$, расположенную перпендикулярно ей:

$$\vec{E}_s = E_{s\parallel} \vec{e}_{\parallel} + E_{s\perp} \vec{e}_{\perp}. \quad (9)$$

Здесь \vec{e}_{\parallel} — единичный вектор в плоскости рассеяния, \vec{e}_{\perp} — единичный вектор, перпендикулярный этой плоскости. В дальнейшем нас будет интересовать поведение функции безразмерной интенсивности для поля, рассеянного в состоянии $\vec{E}_{s\parallel}$ и $\vec{E}_{s\perp}$:

$$i_{\alpha}(\varphi, \theta) = k^2 |\vec{e}_{\alpha} \vec{f}_s(\vec{n})|^2, \quad (10)$$

где

$$\vec{e}_{\alpha} = \begin{cases} \vec{e}_{\parallel} & \text{при } \alpha = 1, \\ \vec{e}_{\perp} & \text{при } \alpha = 2, \end{cases} \quad (11)$$

а φ, θ — углы рассеяния.

Согласно оптической теореме [7], сечение ослабления тела равно

$$C_0 = -\frac{4\pi}{k} \frac{\operatorname{Im}(\vec{f}_s^*(\vec{n}_0) \vec{E}_0)}{|\vec{E}_0|^2}. \quad (12)$$

Здесь \vec{n}_0 — единичный вектор рассеяния для направления вперед, * означает комплексное сопряжение. Подставляя сюда значение $\vec{f}_s^*(\vec{n}_0)$, получим

$$C_0 = -\frac{4\pi k}{|\vec{E}_0|^2} \operatorname{Im} \left(\sum_{i=1}^N \vec{d}_i^* \vec{E}_i^0 \right), \quad (13)$$

где $\vec{E}_i^0 = \vec{E}_0 e^{ik\vec{n}_0 \cdot \vec{r}_i}$ — внешнее поле в точке расположения i -го диполя, \vec{E}_0 — комплексная амплитуда плоской волны.

Средняя энергия, поглощаемая i -м диполем в единицу времени, дается следующим выражением [8]

$$q_i = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\vec{d}_i \frac{d\vec{E}_i^*}{dt} \right). \quad (14)$$

Просуммировав q_i по всем N диполям, а затем поделив полученную сумму на среднюю плотность энергии в падающей волне, находим сечение поглощения всего объекта

$$C_n = 4\pi k \frac{\operatorname{Im}(\alpha)}{|\vec{E}_0|^2} \sum_{i=1}^N |\vec{E}_i|^2. \quad (15)$$

Вычитая (15) из (13), получаем сечение рассеяния тела

$$C_p = C_0 - C_n \quad (16)$$

В качестве испытания изложенного метода рассмотрим сначала характеристики рассеяния ледяного шара. Предположим, что падающая плоская гармоническая волна линейно поляризована в плоскости zz (ось x лежит в плоскости страницы и смотрит вертикально вверх, ось z направлена за страницу):

$$\vec{E}^0 = E_0 \vec{x}_0 e^{ikz}. \quad (17)$$

Ледяной шар радиуса a моделировался наборами из $N = 304$ и $N = 1064$ диполей. Комплексный показатель преломления льда при температуре $t = -1^\circ \text{C}$ на длине волны $\lambda = 3 \text{ мм}$, принятой нами в расчетах, согласно [9] равен $m = 1.7749 + i0.00279$. На рис. 2а изображена кривая изменения фактора эффективности ослабления ($Q_0 = C_0/\pi a^2$) шара, вычисленная на основе теории Ми, и результаты расчета этой же величины с помощью метода Парселя-Пенипакера. Как видно из рисунка, в диапазоне изменения параметра дифракции $0 \leq ka \leq 1,7$ наблюдается неплохое согласие с результатами строгой теории. Кривые поведения относительных ошибок ($100(Q_0(\text{П.-П.})/Q_0(\text{Ми}) - 1)$) расчета Q_0 шара с использованием метода взаимодействующих диполей приведены на рис. 2б. Видно, что для модели шара, состоящей из 304 диполей, отличия не превосходят

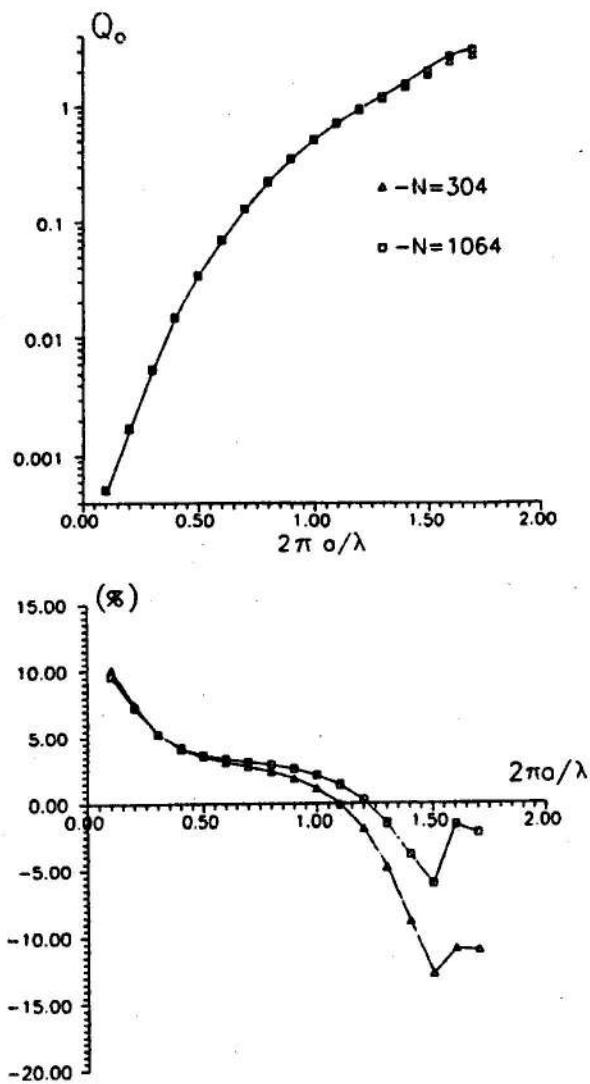


Рис. 2

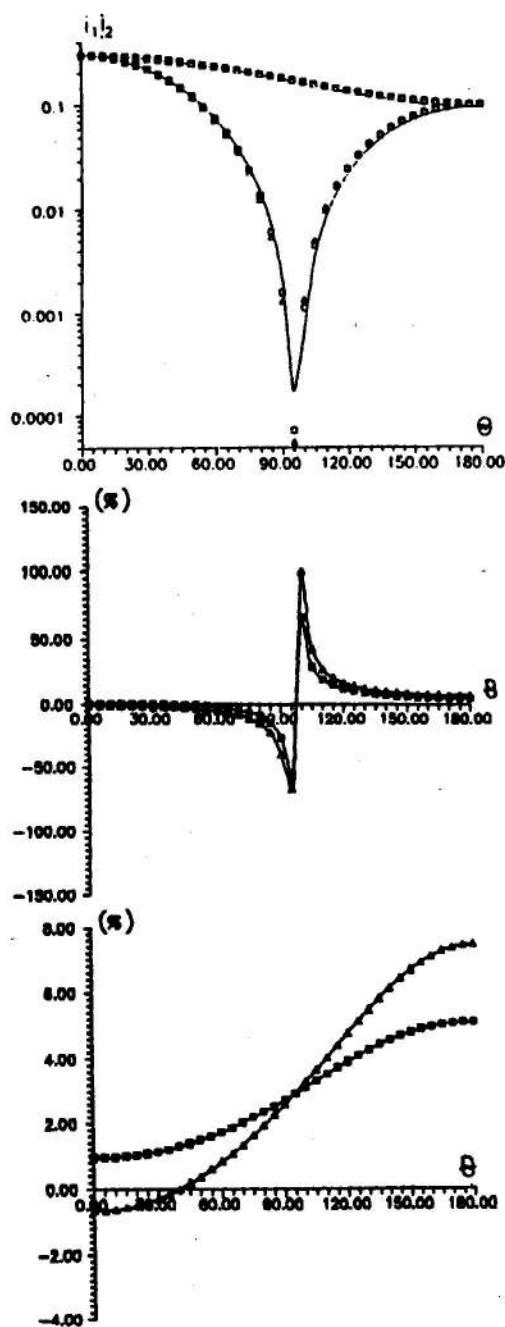


Рис. 3

13% во всей области изменения параметра дифракции, где наблюдается сходимость ряда (6), и не превосходят 10% для модели из 1064 диполей.

На рис. 3а изображено поведение функции безразмерной интенсивности в зависимости от угла расстояния θ . Сплошная линия отвечает азимутальному углу $\varphi = 0$ (плоскость рассеяния zz), штриховая — $\varphi = 90^\circ$ (плоскость рассеяния yz). На рис. 3б и 3в приведены кривые изменения относительных ошибок расчета i_1 и i_2 . Нетрудно видеть, что и здесь наблюдается довольно хорошее согласие с теорией Ми (за исключением окрестности минимума кривой i_1 на рис. 3а, где в большей степени сказывается грубость дискретной модели, используемой нами).

Рассмотрим теперь рассеивающие характеристики модельного кристалла снега, изображенного на рис. 1. Его исходные геометрические параметры имеют следующие значения: гексагональный диаметр — 6,5 мм, ширина вертикальных лучей — 1 мм, толщина кристалла — 0,5 мм (такие значения параметров близки к максимально возможным для кристаллов аналогичного типа [1]). Кристалл моделировался совокупностью из 584 диполей. Длина волны падающего излучения фиксировалась и полагалась равной 3 мм, а показатель преломления снежинки — равным показателю преломления льда на этой длине волны при $t = -1^\circ\text{C}$ (как в примере с шаром). Факторами эффективности ослабления, рассеяния и поглощения кристалла назовем соответствующие сечения C_0 , C_p и C_Π , отнесенные к πa^2 , где a — радиус шара, имеющего равный с кристаллом объем: $a = d_0 \sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi}}$, а его параметром дифракции — произведение ka , где k — волновое число падающей волны.

Нами рассматривались три случая ориентации кристалла в пространстве по отношению к падающей волне (17): первый случай, — когда кристалл расположен в плоскости xy (т. е. в плоскости рис. 1), второй, — когда он находится в плоскости xz , и, наконец, третий случай, — когда кристалл находится в плоскости yz . На рис. 4 изображено поведение факторов эффективности ослабления Q_0 волны $\lambda = 3$ мм кристаллом в зависимости от параметра дифракции ka для указанных трех случаев его ориентации в пространстве (штриховая кривая изображает поведение фактора эффективности ослабления шара, имеющего равный с кристаллом объем, и вычисленного на основе теории Ми). Заметим, что на рис. 4 представлен несколько больший диапазон изменения параметра дифракции, нежели в примере с шаром. Это обстоятельство связано с тем, что диапазон сходимости ряда (6) существенным образом зависит от формы моделируемого объекта и для плоского кристалла (вне зависимости от его ориентации) оказывается гораздо шире диапазона его сходимости для шара.

В силу малости величины мнимой части показателя преломления льда факторы эффективности поглощения волн кристаллом весьма невелики. В табл. 1 в качестве примера приведены значения сечений ослабления, рас-

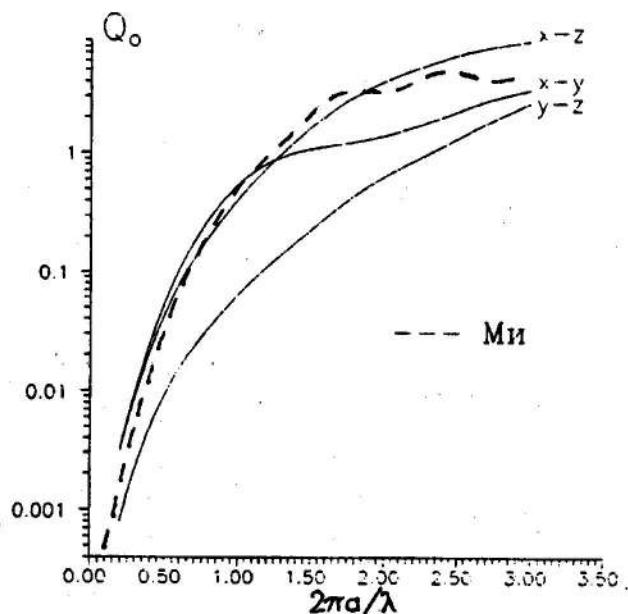


Рис. 4

сияния и поглощения для всех трех рассматриваемых случаев ориентации кристалла (параметр дифракции $ka = 3$).

Таблица 1.

	xy	zz	yz
$C_0(\text{см}^2)$	5.4258E-2	1.3956E-1	4.2040E-2
$C_p(\text{см}^2)$	5.3827E-2	1.3825E-1	4.1732E-2
$C_{II}(\text{см}^2)$	4.3110E-4	1.1306E-3	3.0833E-4

На рис. 5а–в представлены кривые изменения функций безразмерной интенсивности для указанных ранее трех ориентаций кристалла (сплошная кривая — плоскость рассеяния zz , штриховая — yz). Параметр дифракции во всех трех случаях принимался равным единице.

В заключение отметим следующее. Начало исследованию рассеивающих свойств кристаллов снега в миллиметровом диапазоне длин волн было положено в статье [10], где характеристики плоского дэндрита с гексагональным диаметром 4 мм изучались с помощью численного метода функции Грина. Авторы [10] ограничились длиной волны $\lambda = 1$ см, так как использованный ими метод требовал очень большого объема компьютерной

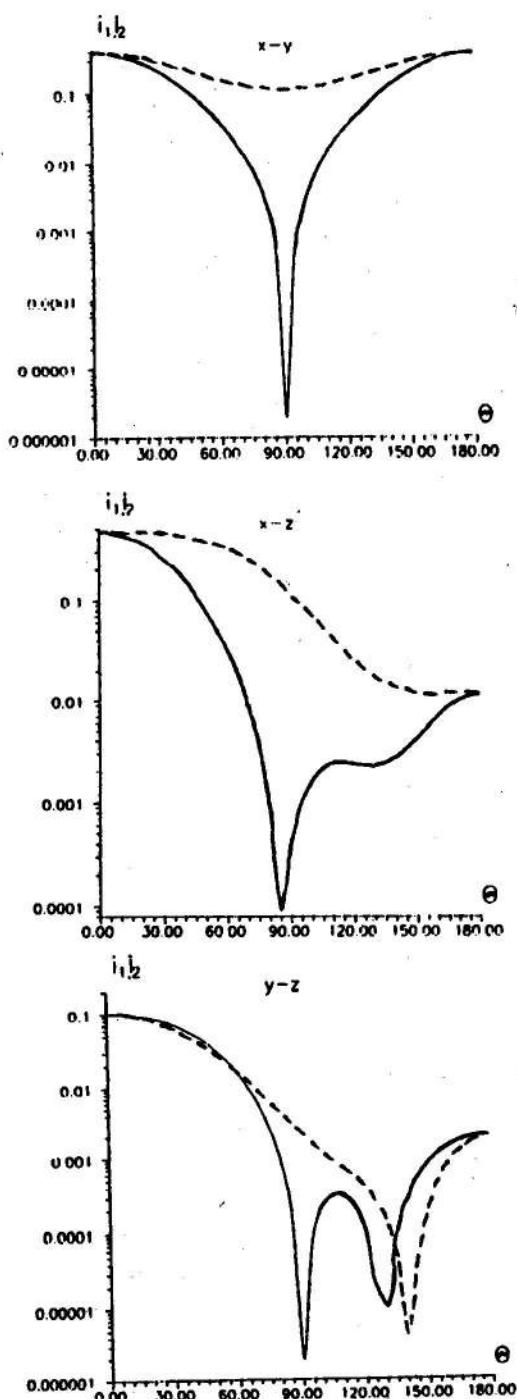


Рис. 5

памяти при расчетах рассеивающих свойств кристалла с большими значениями параметра дифракции. Численный метод, используемый нами, позволяет продвинуться вглубь миллиметрового диапазона вплоть до длины волны $\lambda = 3$ мм (при максимальном гексагональном диаметре снежинки ~ 7 мм). К недостаткам описанного метода относится то обстоятельство, что сходимость ряда (6) существенным образом зависит от диэлектрической проницаемости исследуемого объекта. По этой причине мы были вынуждены ограничиться здесь случаем сухого снега.

Располагая методом расчета характеристик рассеяния одиночных снежинок, можно провести оценки ослабления миллиметровых радиоволн в сухих снегопадах различного типа. К сожалению, в настоящее время плохо изученным является характер распределения частиц снегопадов по размерам, а широко используемое распределение Ганна-Маршалла относится не к отдельным кристаллам снега, а к их агрегатам — снежным хлопьям. В принципе, использованный нами метод позволяет рассмотреть и этот случай, однако, это потребовало бы очень больших затрат машинного времени при расчетах (для построения кривых, изображенных на рис. 4, например, требуется несколько часов при реализации метода на ПЭВМ РС/АТ 486).

ЛИТЕРАТУРА

- Литвинов И. В. Структура атмосферных осадков. — Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 66 с.
- Г. ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. — М.: ИЛ, 1961. 136 с.
- Purcell E. M., Pennypacker C. R. // *Astrophys. J.*, 1973. V. 186. N 2(I). P. 705.
- Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965. 300 с.
- Singham S. B., Bohren C. F. // *Opt. Lett.*, 1987. V. 12. N 1. P. 10.
- Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981. Т. 1. 19 с.
- Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970. 721 с.
- Ландау Л. Д., Либкин Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. 445 с.
- Hufford G. A. // *URSI Nat. Radio Sci. Meet.*, 1989. P. 14.
- O'Brien S. G., Goedecke G. H. // *Appl. Opt.*, 1988. V. 27. N 12. P. 2439.

Научно-исследовательский
радиофизический институт
Нижний Новгород

Поступила в редакцию
10 марта 1993 г.

**SCATTERING OF MILLIMETER RADIOWAVES BY DRY SNOW
CRISTALS****A. M. Osharin**

The coupled dipole Purcell-Pennypacker approximate method is used to calculate scattering characteristics of a snow crystal in the millimeter wavelength band.