

УДК 537.86/87:621.3.09

## СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ В ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

*A. B. Ведерко, B. F. Марченко, A. I. Чеботарев*

Экспериментально исследовано распространение радиоимпульсов и формирование солитонов огибающей в различных участках дисперсионной кривой цепочки связанных нелинейных резонансных контуров, в том числе вблизи нуля дисперсии второго порядка. Проводится сравнение с данными численного эксперимента и результатами аналитического исследования [1, 2].

В работе представлены результаты экспериментального исследования распространения радиоимпульсов в цепочке слабо связанных нелинейных резонансных контуров. Особенностью дисперсионной характеристики  $k = k(\omega)$  такой системы является наличие точки перегиба, в которой вторая производная  $d^2k/d\omega^2$  обращается в нуль. Отсюда следует, что в нелинейном уравнении Шредингера (НУШ), описывающем распространение временного пакета, в некоторой области частот необходимо учитывать дисперсионные члены более высокого порядка, чем второй. В этом случае НУШ не имеет стационарного решения в виде солитона огибающей [1]. Основные особенности динамики таких импульсов для оптического диапазона, полученные в результате численного эксперимента, приведены в работах [1, 2]. Некоторые экспериментальные результаты по формированию квазисолитонов в окрестности нуля дисперсии второго порядка приведены ниже.

В качестве удобной для радиофизического моделирования системы рассмотрим цепочку одинаковых, связанных магнитной связью нелинейных резонансных контуров без потерь. Предположим, что связь слабая, т.е. коэффициент связи  $\kappa = M/L \ll 1$ , ( $L$  — индуктивность контура,  $M$  — коэффициент взаимоиндукции), а напряжение  $U_n$  на емкости нелинейно зависит от ее заряда —  $U_n = \frac{q_n}{C_0}(1 - \gamma q_n^2)$ ,  $\gamma \ll 1$ . Тогда баланс напряжений в  $n$ -м контуре записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial t^2} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial t^2} (q_{n-1} + q_{n+1}) + \omega_0^2 q_n (1 - \gamma q_n^2) = 0, \quad \omega_0 = (LC_0)^{-1/2}. \quad (1)$$

Линейная дисперсия такой системы описывается уравнением

$$\cos(\beta) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\kappa\omega^2}, \quad (2)$$

( $\beta$  — набег фазы на ячейку), откуда следуют выражения для нижней и верхней граничных частот полосы прозрачности —  $\omega_b = \omega_0/\sqrt{1+2\kappa}$ ,  $\omega_t = \omega_0/\sqrt{1-2\kappa}$  соответственно (см. также рис. 1).

Распространение волнового пакета  $q_n = A_n(t) \exp[i(\omega t - \beta n)]$  с медленно меняющейся во времени амплитудой  $A_n(t)$ , в пределе непрерывной среды, т.е. при  $|A_{n\pm 1} - A_n| \ll |A_n|$ , описывается уравнением для непрерывной функции  $A(\eta, \tau)$

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + \frac{i}{6} \varepsilon \frac{\partial^3 A}{\partial \eta^3} - \chi |A|^2 A = 0, \quad (3)$$

$\tau = \omega t$ ,  $\eta = n - V_g t$ ,  $V_g = d\omega/d\beta$  — групповая скорость из (1),  $\chi = 0,375\gamma$ ,  $\alpha = \kappa\omega_0^2 \cos(\beta)/\omega^2$ ,  $\varepsilon = \kappa\omega_0^2 \sin(\beta)/\omega^2$  с точностью до членов порядка  $\kappa^2$ . Меняя частоту входного сигнала, можно изменять соотношение между параметрами  $\alpha$  и  $\varepsilon$ ; в частности, при  $\omega \approx \omega_0$ ,  $\beta \approx \pi/2$  коэффициент  $\alpha$  обращается в нуль. При  $\varepsilon = 0$  уравнение (3) переходит в НУШ стандартного вида, решения которого в виде солитонов огибающей хорошо известны (например, [3]):

$$A = \sqrt{2}a_0 \operatorname{sech} [b(\eta - \eta_0)] \exp(-i\chi a_0^2 \tau), \quad b = \sqrt{2\chi a_0^2/\alpha}. \quad (4)$$

Рассмотрим случай  $\omega_b < \omega < \omega_0$ , когда  $\varepsilon \neq 0$ , но  $\varepsilon \ll \alpha$ . Используя малость коэффициента при третьей производной, решение (3) можно представить в виде стационарного импульса, скорость которого отличается от групповой [4]

$$A = \sqrt{2}a_0 \operatorname{sech}(b\theta) \left\{ 1 + i \frac{\varepsilon b}{2\alpha} [b\theta - \operatorname{th}(b\theta)] \right\} \exp\{-i\chi a_0^2 \tau\}, \quad (5)$$

$$\theta = \eta - U\tau, \quad U = -\frac{1}{3} \frac{\varepsilon b^3}{\alpha},$$

и нестационарной части, которая представляет собой свободно распространяющееся излучение. При  $\varepsilon \geq \alpha$  аналитическое решение получить не удается. Численный эксперимент [2] показывает, что в этом случае заданный при  $\tau = 0$  солитонный импульс с течением времени распадается на цуги излученных волн.

Экспериментальные исследования проводились в линии, содержащей  $N = 30$  одинаковых резонансных контуров. Коэффициент связи  $\kappa = 0,08$ , индуктивность катушки  $L = 47,5$  мГн. Нелинейным элементом служила пара включенных встречно и смешенных в обратном направлении р-п переходов, суммарная емкость которых равна  $C = C_0(1 + \sigma|U|^2)$ ,  $C_0 = 430$  пФ,  $U$  — амплитуда колебаний напряжения,  $\sigma = 4,5 \cdot 10^{-2} B^{-2}$ ,  $\gamma \approx 3\sigma/C_0^2$ .

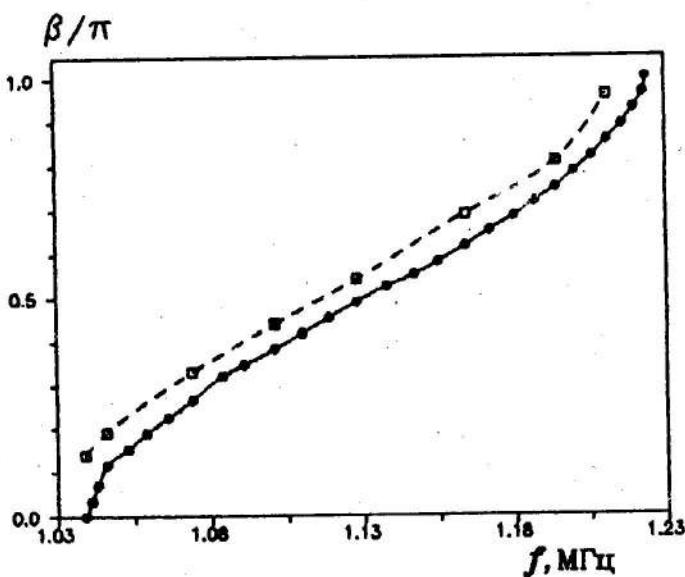


Рис. 1. Дисперсионная характеристика линии в режиме малого ( $A = 50$  мВ — сплошная кривая) и большого сигнала ( $A = 1$  В — штриховая кривая).

Нелинейные свойства системы характеризуются дисперсионными кривыми, снятыми при различных уровнях входного гармонического сигнала. Так, при увеличении амплитуды возбуждения от 50 мВ (рис. 1, сплошная линия, точки — экспериментальные значения) до 1 В (рис. 1, штриховая линия, точки — экспериментальные значения) наблюдался сдвиг частоты нуля дисперсии системы относительно резонансной частоты  $f_0 = 1130$  кГц на 25 кГц. Для компенсации затухания применялась система регенерации, превращающая каждый контур в генератор, работающий в недовозбужденном режиме. Это позволило изменять добротность каждой ячейки  $Q$  от 20 до 250. При  $Q = 200$  амплитуда волн уменьшалась на 10% при прохождении 30 ячеек. КСВ во всей полосе пропускания не превышал 1,2.

На вход системы подавался прямоугольный радиоимпульс длительностью  $10 \div 15$  мкс и амплитудой  $0,8 \div 1,2$  В. В области частот несущей  $1050$  кГц  $< f < 1100$  кГц, где  $\alpha > 0$ ,  $\epsilon \ll \alpha$ , формируется стационарный импульс длительностью  $\tau_i = 8 \div 10$  мкс, фотография которого приведена на рис. 2а. Форма такого возмущения (рис. 3, точки) хорошо аппроксимируется функцией  $\text{sech}$  с параметрами, рассчитанными по формуле (3) (рис. 3, сплошная линия). Скорость распространения импульса в пределах точности эксперимента равна групповой. При  $1100$  кГц  $< f < 1125$  кГц, когда влияние третьей производной в уравнении (3) становится заметным, длительность входного и выходного импульсов приблизительно одинаковы.

Однако форма выходного импульса становится несимметричной, заметно появление цугов излученных волн (рис. 26).

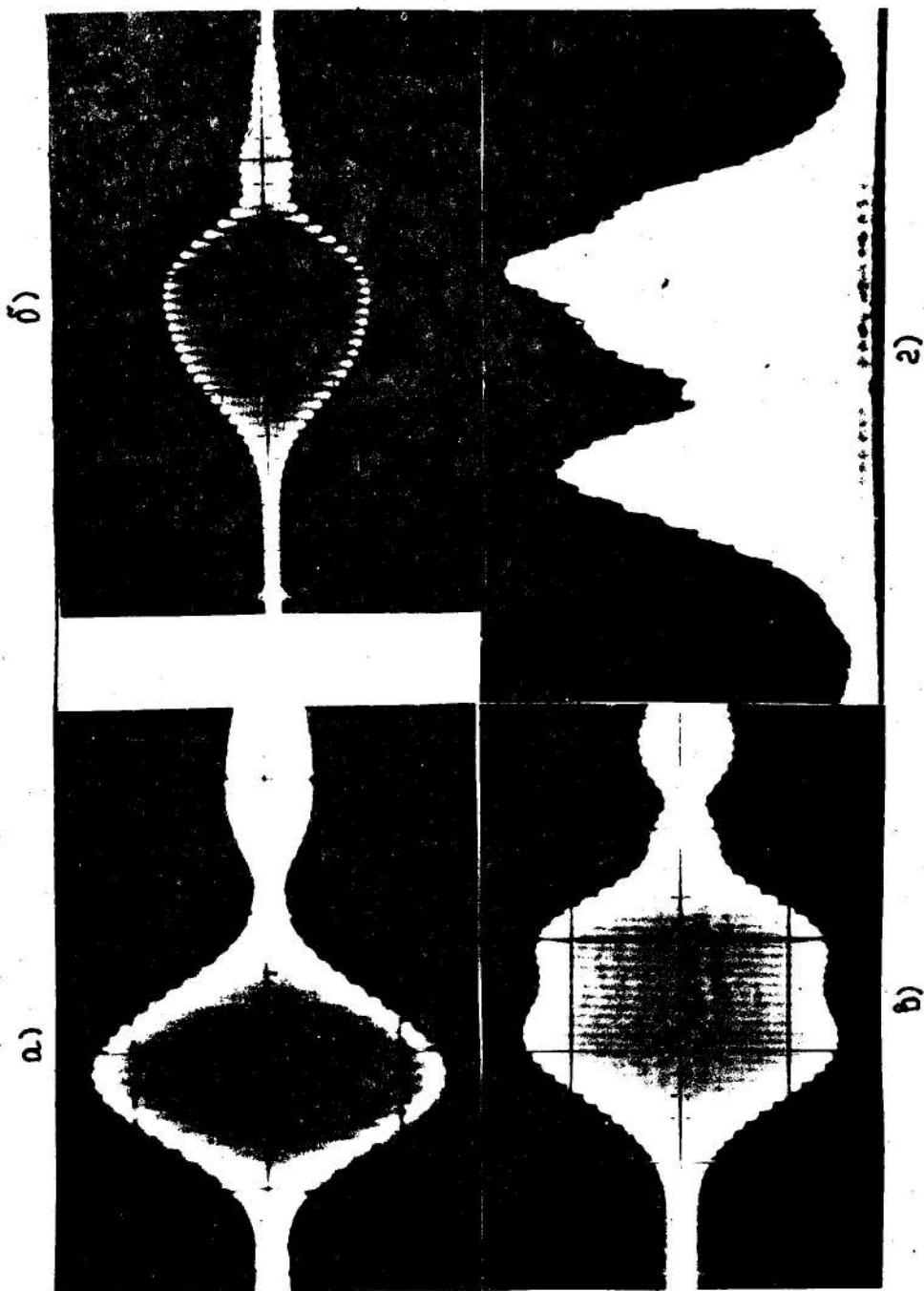


Рис. 2. Форма сигнала на выходе линии. Несущая частота импульса — 1091 кГц  
(а), 1119 кГц (б), 1131 кГц (в), (г) — спектрограмма импульса (в). Развертка — 10 мкс/деление.

При возбуждении линии с частотой  $f = f_0 = 1131$  кГц (точка нуля дисперсии) и амплитудой  $\approx 1$  В на выходе наблюдается уширение входного сигнала, как видно из фотографии рис.2в. При уменьшении длительности подаваемого импульса до  $8 \div 10$  мкс спектrogramма выходного сигнала приобретает вид двугорбой кривой, центральные частоты максимумов соответственно равны  $f_1 = 1120$  кГц и  $f_2 = 1145$  кГц (рис.2г). Такой сигнал можно рассматривать как нелинейную суперпозицию солитона с несущей частотой  $f_1$  и свободного излучения на частоте  $f_2$ . Временное наблюдение этих компонент затруднительно, поскольку они имеют практически одинаковые групповые скорости.

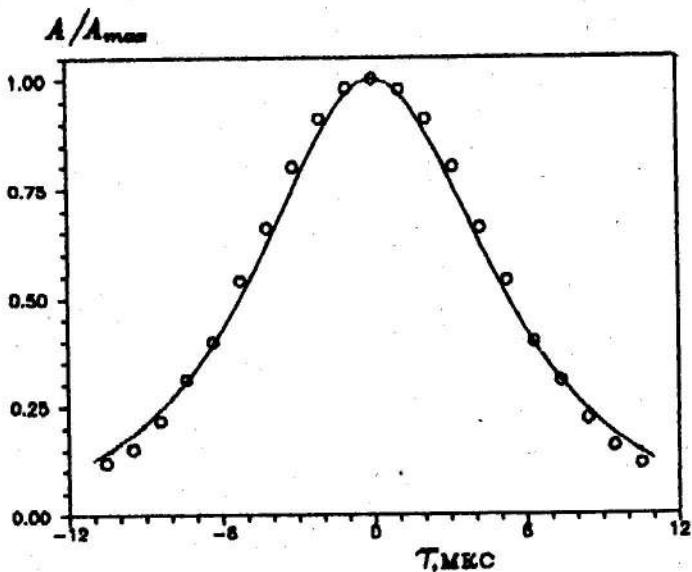


Рис. 3. Рассчитанный профиль солитона огибающей (сплошная кривая). Точки — значения, измеренные по фотографии рис.2а.

Действительно, в пределе  $\omega = \omega_0$ , (т.е. при  $\alpha = 0$ ) можно указать условия, при которых существует решение вида  $A = a(\eta) \exp(iK\eta - i\Omega t)$  ( $K$  и  $\Omega$  — малые добавки к волновому числу  $\beta$  и частоте  $\omega$  соответственно) с асимптотикой  $a(\eta) = a_0 \exp(-\lambda|\eta|)$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . Подставляя это выражение в (3) с учетом  $\alpha = 0$ , из условия  $\lambda^2 > 0$  получаем

$$\Omega - \chi a_0^2 > 0. \quad (6)$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Пусть на входе системы задан импульс с несущей частотой  $\omega_0$ , спектр которого шире, чем нелинейный сдвиг частоты нуля дисперсии системы. Тогда (при заданных знаках  $\epsilon$  и  $\chi$ ) те спектральные составляющие, для которых выполнено условие (6), формируют солитонную компоненту с несущей частотой  $\omega_1 < \omega_0$ , а оставшаяся часть образует волновой пакет с несущей частотой  $\omega_2 > \omega_0$ .

При  $f > f_0$ , т.е. в области отрицательной дисперсии групповых скоростей, вдоль линии распространяется диспергирующий импульс, длительность которого увеличивается с  $\tau_1 = 14$  мкс на входе линии до  $\tau_2 = 25$  мкс на выходе.

Авторы благодарят А.П.Сухорукова за участие в обсуждении.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 93-02-16059).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kuehl H.H., Zhang C.Y. // Phys.of Fluids. 1990. B 2, 5. P.889.
2. Wai P.K.A., Menyuk C.R. et al // IEEE J of Quant.El. 1988. V.24. N 2. P.373.
3. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
4. Ведерко А.В., Дубровская О.Б., Марченко В.Ф., Сухоруков А.П. // Вестн. Моск. унив. Сер.Физ., Астрон., 1992 . Т.33. N 3. С.4.

Физический факультет МГУ  
им.М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию  
21 июня 1994 г.

#### ENVELOPE SOLITONS IN A CHAIN OF NONLINEAR RESONATORS

*A. V. Vederko, V. F. Marchenko, A. I. Chebotarev*

There have been experimentally investigated the radio pulse propagation and the formation of envelope solitons in different parts of dispersion curve of a weakly coupled nonlinear resonant circuits including that of near zero of the second order dispersion. A comparison with the numerical experiment and analytical data is carried out.