Том XXXVII № 10 Изв. ВУЗов РАДИОФИЗИКА 1994

УДК 621.385.6

УСРЕДНЕНИЕ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭВП СВЧ В РАМКАХ СИНТЕЗА

Ю.Л.Бобровский, С.Р.Зарембский, Н.Н.Попова

Сопоставлены возможные способы усреднения скорости электронов в трехмерных высокопервеансных электронных промежутках. Предложен способ усреднения скорости, наиболее удобный для реализации процедуры синтеза электронных промежутков. Получена оценка погрешности усреднения скорости в рамках предложенного способа, связанной с конечной величиной фокусирующего магнитного поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Синтез современных низковольтных ЭВП СВЧ включает в себя синтез многомерных электронных промежутков (ЭП), т.е. определение геометрических размеров ЭП L по заданным угловым размерам θ [1]. Как показано в [1], синтез ЭП может быть реализован наиболее эффективно, если имеет место пропорциональность между угловыми и линейными размерами промежутков, т.е. если

$$a : b : l = \theta_a : \theta_b : \theta_l \tag{1}$$

(a, b, l — поперечные и продольный геометрические размеры ЭП).

В условиях "провисания" потенциала $\varphi(x, y, z)$, что характерно для низких питающих напряжений U_0 и больших плотностей рабочих токов j_0,* скорость электронов $v = \sqrt{2\eta\varphi(x, y, z)}$ также зависит от трех координат. Естественно, что проведение приближенных аналитических оценок заметно упрощается при использовании усредненных скоростей. Однако необходимость сохранения пропорции (1) накладывает на процедуру усреднения определенные ограничения. Действительно, далеко не каждый критерий усреднения обеспечивает необходимое для выполнения (1) равенство средних скоростей $\bar{v}$ электронов вдоль любой из осей ЭП (здесь и ниже черта используется для обозначения усредненной величины).

В настоящей работе предлагается удобный, т.е. отвечающий требованию (1), критерий усреднения, обсуждается его физический смысл и оценивается погрешность предлагаемого усреднения.

*Указанные особенности, как известно [2], характерны для современных ЭВП СВЧ, причем тенденции снижения U_0 и увеличения j_0 наблюдаются не только для маломощных ЭВП [2], но и для приборов средней мощности.

2. ВЫБОР КРИТЕРИЯ УСРЕДНЕНИЯ

В соответствии с идеологией задачи синтеза ЭП [1] в качестве критерия усреднения наиболее естественно использовать сохранение времени пролета τ (угла пролета $\theta = \omega\tau$) электронов, которое безотносительно к размерам ЭП, величинам напряжений и токов, диапазону и так далее является определяющей характеристикой электронных процессов практически любого ЭВП СВЧ. Иначе говоря, в качестве средней скорости следует использовать ту ее величину, при которой реализуется заданное время τ (угол θ).

Покажем, что не всякий способ усреднения обеспечивает это условие. Вначале, для простоты, рассмотрим одномерный ЭП, в котором в силу "провисания" потенциала вдоль оси z скорость v есть функция координаты z $v(z) = \sqrt{2\eta\varphi(z)}$. Прямое усреднение величины $v(z)$ по длине ЭП l

$$\bar{v} = \frac{1}{l}\int\limits_0^l v(z)\,\mathrm{d}z \qquad (2)$$

дает результат, отличный от того, который получается, если определить $\bar{v}$ через $\bar{\tau} = \int\limits_0^l \mathrm{d}z/\sqrt{2\eta\varphi(z)}$:

$$\bar{v} = \frac{l}{\bar{\tau}} = l \Bigg/ \int\limits_0^l \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\eta\varphi(z)}}. \qquad (3)$$

Причина различия результатов (2) и (3) (см. Приложение 1) естественно, не связана с обсуждаемым в настоящей работе вопросом о пространственной инвариантности результатов усреднения, ибо и (2), и (3) — одномерные процедуры. Однако уже из этого примера видно, что даже в одномерных ЭП вопрос об усреднении скорости неоднозначен. При переходе к многомерным ЭП ситуация еще более усложняется. И дело здесь не столько в необходимости еще одного усреднения (по поперечному сечению ЭП), сколько именно в неинвариантности результата к направлению движения электронов, возникающей при прямом усреднении их скоростей.

Для простоты последующих рассуждений будем считать, что поток полностью заполняет сечение S, в пределах которого траектории распределены равномерно, т.е. $j_0 = \rho(x,y,z)\cdot v(x,y,z) = \mathrm{const}$. Будем также предполагать поток замагниченным (в дальнейшем это ограничение будет ослаблено).

С учетом замечания о преимуществе процедуры усреднения (3) по сравнению с процедурой (2) скорость электронов вдоль произвольной траектории в пределах сечения S будем определять по процедуре (3), т.е.

$$\bar{v}_l(x,y) = l \Bigg/ \int\limits_0^l \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\eta\varphi(x,y,z)}} \tag{4}$$

(здесь и в дальнейшем скорость, определяемую вдоль каждого из направлений (осей) a, b, l, будем обозначать соответствующим индексом; в частности (4) — скорость вдоль оси l). Однако, если провести прямое усреднение скорости (4) по всем траекториям в пределах поперечного сечения потока (соответствующую скорость будем снабжать индексом "s")

$$\bar{v}_{sl} = \frac{1}{S}\iint\limits_S \bar{v}_l(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{l}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b \left[\int\limits_0^l \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\eta\varphi(x,y,z)}}\right]^{-1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{5а}$$

то полученный результат будет отличаться от результата усреднения по направлению a (и b):

$$\bar{v}_{sa} = \frac{a}{bl}\int\limits_0^l\int\limits_0^b \left[\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\eta\varphi(x,y,z)}}\right]^{-1} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \neq \bar{v}_{sl} \neq \bar{v}_{sb}\,. \tag{5б}$$

Эта неинвариантность означает нарушение условия (1), т.е. делает процедуру прямого усреднения неудобной для последующего синтеза ЭП. В то же время, если, предварительно усреднив по сечению время τ

$$\bar{\tau}_{sl} = \frac{1}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b\int\limits_0^l \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{2\eta\varphi(x,y,z)}} = \frac{1}{ab}\int\limits_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{2\eta\varphi(x,y,z)}}\,, \tag{6}$$

определять скорость через усредненное время $\bar{\tau}$ (соответствующую скорость будем снабжать индексом "$\bar{\tau}$"), то результат

$$\bar{v}_{\bar{\tau}l} = \frac{l}{\bar{\tau}} = \left[\frac{1}{V}\int\limits_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{2\eta\varphi(x,y,z)}}\right]^{-1} \tag{7}$$

оказывается инвариантным к направлению. Действительно, нетрудно убедиться, что к такому же результату придем, рассматривая движение электронов вдоль двух других осей ЭП. Иначе говоря, величина $\bar{v}_{\bar{\tau}}$ действительно инвариантна к направлению пролета электронов через ЭП, т.е. пропорция (1) при процедуре усреднения (7) будет сохранена.

Как показано в Приложении 2, результат (5) можно свести к (7), проведя усреднение "с весом", что лишний раз доказывает правильность результата (7). Однако процедура (7), позволяющая получить верный результат непосредственно и в наглядных и традиционных для СВЧ электроники терминах времени (угла) пролета, представляется предпочтительной по сравнению с формальной процедурой усреднения "с весом", требующей дополнительного поиска весовой функции.

Разумеется, количественно различие между (5) и (7), если не проводить поиска весовой функции, т.е. не усреднять "с весом", не велико. Однако неучет этого различия может приводить к противоречиям физического характера, затрудняющим интерпретацию полученных результатов .

Действительно, угловые размеры ЭП, вводимые соотношениями $\bar\theta_a = \omega a/\bar v_{\mp}$; $\bar\theta_b = \omega b/\bar v_{\mp}$; $\bar\theta_l = \omega l/\bar v_{\mp}$, не только удовлетворяют пропорции (1), но и сохраняют физический смысл реальных углов пролета в соответствующих направлениях. В случае же использования $\bar v_S$ естественность введения угловых параметров нарушается.

В частности, если поперечные угловые параметры ввести как $\bar\theta_a = \omega a/\bar v_{sa}$ и $\bar\theta_b = \omega b/\bar v_{sb}$, то нарушится пропорция (1), хотя физический смысл $\bar\theta_a$ и $\bar\theta_b$ как реальных углов пролета будет сохранен. При введении же упомянутых параметров через продольную скорость ($\bar\theta_a = \omega a/\bar v_{sl}$; $\bar\theta_b = \omega b/\bar v_{sl}$) пропорция (1) сохраняется. Однако параметры $\bar\theta_a$ и $\bar\theta_b$ теряют при этом физический смысл. Вместе с тем, сохранение физического смысла поперечных угловых размеров оказывается полезным при решении ряда задач СВЧ электроники, в частности, при оценке геометрии генераторов миллиметровых колебаний с использованием виртуального катода [3–4]. Возможность получения простой связи между продольным и поперечным временами пролета электронов и геометрией разрядных промежутков таких генераторов облегчает интерпретацию многочастотности генерируемых ими колебаний и количественное сопоставление получающихся при этом частот.

3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $\bar v_{\mp}$

Для того, чтобы предложенная процедура усреднения (7) могла рассматриваться как "инженерный инструмент", ее необходимо дополнить оценкой погрешности, связанной с конечной величиной фокусирующего магнитного поля* (напомним, что (7) получена в предположении "замагниченного" потока, что в реальных условиях места не имеет). Проведем такую оценку в предположении конечного магнитного поля и плотности тока, ограниченной по модулю некоторым максимальным значением $j_М$.

В соответствии с принятой процедурой усреднения (7) относительная погрешность в определении скорости непосредственно связана с погрешностью в определении угла пролета согласно очевидному соотношению

$$\delta = \frac{\bar v_{\mp} - \bar v_{\mp}^B}{\bar v_{\mp}^B} = \frac{\omega l/\bar\theta_l - \omega l/\bar\theta_l^B}{\omega l/\bar\theta_l^B} = \frac{\bar\theta_l^B - \bar\theta_l}{\bar\theta_l}, \tag{8}$$

*На целесообразность проведения такой оценки указал авторам А. С. Рошаль.

где $\bar{v}_{\tau}^{B}$ и $\bar{\theta}_{l}^{B}$ — средние скорость и угол пролета при конечном магнитном поле $\vec{B}=(0,0,B)$. В стационарном $(\frac{\partial}{\partial t}=0)$ приближении $v_z^2+v_\perp^2=2\eta\varphi$, где v_z и $v_\perp$ — модули продольной и поперечной компонент скорости. Отсюда, аналогично (6), получаем

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}_l^B &= \frac{\omega}{ab}\int\limits_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{2\eta\varphi-v_\perp^2}} \simeq \frac{\omega}{ab}\int\limits_V \frac{[1+v_\perp^2/(4\eta\varphi)]}{\sqrt{2\eta\varphi}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= \bar{\theta}_l + \frac{\omega}{4\eta\sqrt{2\eta}\,ab}\int\limits_V \frac{v_\perp^2}{\varphi^{3/2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Таким образом, для определения погрешности необходимо оценить величину $v_\perp$ при движении в скрещенных полях. Специфика этой задачи состоит, во-первых, в том, что если магнитное поле $\vec{B}=B_z$ является "внешним", то электрическое поле пространственного заряда $\vec{E}$ — "внутреннее". Поэтому, строго говоря, необходимо решить самосогласованную задачу. Однако, в первом приближении, имея в виду лишь оценку погрешности, связанной с неучетом поперечного движения электронов на величину усредненного времени $\bar{\tau}$, это обстоятельство можно в расчет не принимать.

Второе упрощение связано с использованием дрейфового приближения [6] для стационарного $(\partial/\partial t=0)$ уравнения Лоренца

$$
(\vec{v}\nabla)\vec{v}=\eta(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\,, \tag{10}
$$

где $\vec{E}(x,y,z)$ является статическим полем пространственного заряда в потоке, направленном для определенности, вдоль оси z.

Дрейфовые уравнения имеют вид*

$$
\begin{aligned}
\eta\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\,,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -v_y B_z\,,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= v_x B_z\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

С учетом сделанных замечаний и вводя обозначение $\text{æ}=\varphi_{\min}/\varphi_0$ (где $\varphi_{\min}$ — минимальное значение потенциала в ЭП), оценим угол пролета θ_l^B по (9) с учетом укороченных (см. выше) второго и третьего уравнений

*Поскольку v_x и v_y стремятся к нулю только с ростом B_z, члены v_yB_z и v_xB_z в отличие от членов $v_y(\partial\varphi/\partial y)$ и $v_x(\partial\varphi/\partial x)$ не являются малыми второго порядка и удерживаются в (11).

(11) и используя неравенство $\Delta\varphi = |j_0|/\varepsilon_0|v| \leq j_м/\varepsilon_0\sqrt{2\eta\varphi_0æ}$, получаем на основании (8) следующую оценку для относительной погрешности δ

$$\delta \leq \frac{1 - \bar{v}_{\mp}/\sqrt{2\eta\varphi_0}}{\varepsilon_0(2\eta)^{3/2}\sqrt{æ}} \cdot \frac{j_м}{B^2\sqrt{\varphi_0}} \tag{12}$$

(j_0 [А/м^2]; B [Вб/м^2]; φ_0 [В]). Заметим, что величина æ минимальна, когда плотность тока принимает максимальное значение. Расчеты показывают [5], что для реальных конфигураций ЭП $æ \geq 0,2$, что позволяет оценить погрешность δ. В частности, для величины $j_0 = 1$ А/см^2 при $\varphi_0 = 15$ В относительная погрешность δ не превышает 5% при $B = 0,04$ Тс. Таким образом, даже для сверхнизких величин φ_0 и высоких плотностей тока (что характерно для высокопервеансных потоков ЭВП [2]) погрешность процедуры усреднения (7), связанная с конечной величиной магнитного поля, оказывается вполне допустимой для инженерных оценок. При этом отмечавшаяся инвариантность результата (7) к направлению движения потока вдоль любой из осей ЭП, т.е. сохранение пропорции (1) расширяет, как отмечалось во Введении, круг задач, при решении которых процедура (7) может оказаться достаточно удобной.

Сформулируем кратко основные результаты настоящей работы.

1. Сопоставлены возможные способы усреднения скорости электронов в трехмерных высокопервеансных электронных промежутках.

2. Предложен способ усреднения скорости, наиболее удобный для реализации процедуры синтеза электронных промежутков.

3. Получена оценка погрешности усреднения скорости в рамках предложенного способа, связанной с конечной величиной фокусирующего магнитного поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Процедура (2) предполагает усреднение с единичным "весом", т.е. не учитывает того обстоятельства, что при постоянной плотности тока j_0 из-за провисания потенциала $\varphi(z)$ в каждой точке z промежутка находится в конкретный момент времени разное количество электронов $\rho(z) = j_0/v(z)$. Если провести усреднение (2), приняв в качестве весовой функции $\Phi(z) = \rho(z)/Q_\Sigma$, где $Q_\Sigma = \int\limits_0^l \rho(z)\,dz$ — суммарный заряд электронов в ЭП, то

$$\bar{v} = \frac{1}{Q_\Sigma}\int\limits_0^l v(z)\,\rho(z)\,dz = \frac{j_0 l}{Q_\Sigma} = \frac{j_0 l}{\int\limits_0^l \rho(z)\,dz}, \tag{П.1}$$

откуда, учитывая, что $\rho(z) = j_0/v(z)$, имеем

$$\bar{v} = l \Bigg/ \int\limits_0^l [v(z)]^{-1} \mathrm{d}z\,, \tag{П.2}$$

что совпадает с (3).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Аналогично (П.1), используя $\Phi(x,y,z) = \rho(x,y,z)/Q_\Sigma$, имеем

$$\bar{v}_V = \frac{1}{Q_\Sigma} \int\limits_V v(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \tag{П.3}$$

откуда, принимая во внимание, что $v(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z) = j_0 = \mathrm{const}$ и $Q_\Sigma = \int\limits_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = j_0 \int\limits_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{v(x,y,z)}$, имеем для $\bar{v}$ результат, совпадающий с (7). Указанное совпадение раскрывает неочевидную трактовку объемного усреднения скорости $\bar{v}$ "с весом" $\Phi(x,y,z)$ как скорости, определяемой средним по сечению потока временем пролета электронов через ЭП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобровский Ю. Л., Зарембский С. Р., Попова Н. Н. //Радиотехника и электроника. 1988. Т.33. Вып.12. С.2582.
2. Голант М. Б., Бобровский Ю. Л. Генераторы СВЧ малой мощности. Вопросы оптимизации параметров. — М.: Сов.радио, 1977.
3. Жерлицын А. Г., Кузнецов С. И., Мельников Г. В., Фоменко Г. П. // ЖТФ. 1986. Т.56. Вып.7. С.1384.
4. Бобровский Ю. Л., Зарембский С. Р. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. N 8. С.1016.
5. Бобровский Ю. Л., Зарембский С. Р. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т.29. N 2. С.219.
6. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. — М.: Сов.радио, 1973.

Санкт–Петербургский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию 13 марта 1992 г.
После переработки 21 января 1993 г.

AVERAGING ELECTRON SPEED IN THREE-DIMENSIONAL MODELS OF MICROWAVE ELECTRON DEVICES IN THE ELECTRON GAP SYNTHESIS PROBLEM

Yu.L.Bobrovsky, S.R.Zarembsky, N.N.Popova

Different approaches to the determination of average speed of electrons in the vacuum microwave devices are discussed and compared, according to the criterions of the preservation of a proportion between three geometrical dimensions of the electron gap and corresponding angular values. The estimate is given, which shows the influence of the finite value of the beem-focusing electromagnetic field on the value of the average speed.