

УДК 532.517.4

## ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ХАОС КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН, ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ШУМОМ

*А.Б.Езерский, П.А.Матусов*

В экспериментах с параметрическим возбуждением капиллярных волн на поверхности жидкости случайной накачкой обнаружено, что переход к нерегулярному волновому полю наступает уже при малой надкритичности. Замечены пульсации интенсивности ряби при почти полном сохранении структуры волнового поля. Характерная частота пульсаций, рассчитанная по экспериментальным реализациям, оказалась зависящей от надкритичности. Результаты численного моделирования обнаружили хорошее согласие с экспериментом.

Сценарии перехода от регулярных к хаотическим состояниям в системе с параметрически возбуждаемой капиллярной рябью широко описаны в литературе, см., например, [1–6]. Особое внимание уделялось исследованию процесса в безграничной среде в системах, характерный размер которых много больше длины волновой ряби. При этом обнаружено, что в таких системах ни пространственно-временная структура ряби, ни сценарий перехода не зависят от геометрии резонатора [5, 6]. За порогом неустойчивости возбуждаются две пары взаимно ортогональных синхронизированных по фазе стоячих волн. В такой волновой системе формируются волны модуляции, которые распространяются под прямым углом к изначально возбужденным волнам. Во всех упомянутых выше экспериментах авторы стремились использовать чисто гармоническую накачку, чтобы продемонстрировать, как хаотические режимы возникают из собственной динамики системы, и не стремились исследовать влияние внешних шумов (например, в [5] характерная ширина спектра накачки была меньше  $10^{-4}$ ). Тем не менее, одним из наиболее интересных и трудных вопросов является то, каким образом внешние шумы влияют на поведение параметрически возбуждаемых волн и как при этом изменяется сценарий перехода к хаосу.

Возможно, в принципе, два различных варианта поведения системы: первый — шумы качественно не меняют динамику системы и траектории в фазовом пространстве меняются мало, второй — введение шумов приводит к существенным изменениям динамики системы. Такой вариант может реализоваться, например, когда в системе есть траектории, близкие к сепаратрисам.

Воздействие шумов на пространственные структуры исследовались недавно численно на примере уравнения Свифта-Хоенберга [7]. Было обнаружено, что при малых интенсивностях шума или больших надкритичностях структуры отличаются от тех, что возникают в отсутствие шумов лишь наличием небольшого числа дополнительных дефектов. При малых надкритичностях или больших шумах пространственные распределения существенно иные: в численном счете возникают нерегулярные поля.

Насколько нам известно, в эксперименте влияние шумов на пространственные структуры при параметрическом возбуждении никем не изучался. В связи с этим можно упомянуть эксперимент по параметрическому возбуждению спиновых волн в ферромагнетиках [8], где авторы исследовали влияние внешних шумов на порог параметрической неустойчивости, нелинейную магнитную восприимчивость и т. д. Однако, они измеряли только усредненные по пространству временные реализации и не получили никакой информации о  $K$ -спектрах спиновых волн, с которыми оперирует теория параметрического возбуждения, развитая в [9].

Эксперименты с параметрически возбуждаемой рябью дают уникальную возможность исследования пространственных структур и их эволюции с увеличением интенсивности шума и надкритичности. Именно это и было сделано в настоящей работе.

Эксперименты проводились описанным ранее [10] образом. Схема экспериментальной установки изображена на рис. 1. Капиллярные волны возбуждались в слое этилового спирта толщиной 5 мм. Использовался квадратный резонатор размерами  $110 \times 110$  мм<sup>2</sup>. Резонатор закреплялся на вибростенде Bruel & Kjaer, который возбуждался синусоидальным током с частотой модуляций  $\delta$ -коррелированным шумом. Известно [12], что такая частотная модуляция дает Лоренцеву форму линии. В наших экспериментах ширина спектра, измеренная по уровню 0,707, составляла 0,03–0,27. Ускорение вибростенда контролировалось акселерометром и анализатором спектра Bruel & Kjaer 2034 для определения ширины спектра.

В эксперименте исследовалась картина волнового поля. Освещение обеспечивалось источником света с малыми угловыми размерами (см. рис. 1), свет падал перпендикулярно невозмущенной поверхности жидкости. Изображение записывалось на видеоманитофон и обрабатывалось с помощью ЭВМ. На поверхности жидкости возбуждалась рябь с частотой 70 Гц. Связь яркости и интенсивности волн детально исследовалась в [4], и не будет рассматриваться здесь. Можно отметить, что изображения записывались с кадровой частотой ТВ (25 кадров в секунду), таким образом, яркость картинки усреднялась примерно по трем периодам ряби. Инерция человеческого зрения составляет величину около 0,1 сек, и, грубо говоря, видеокамера записывала почти то же, что видно глазом.

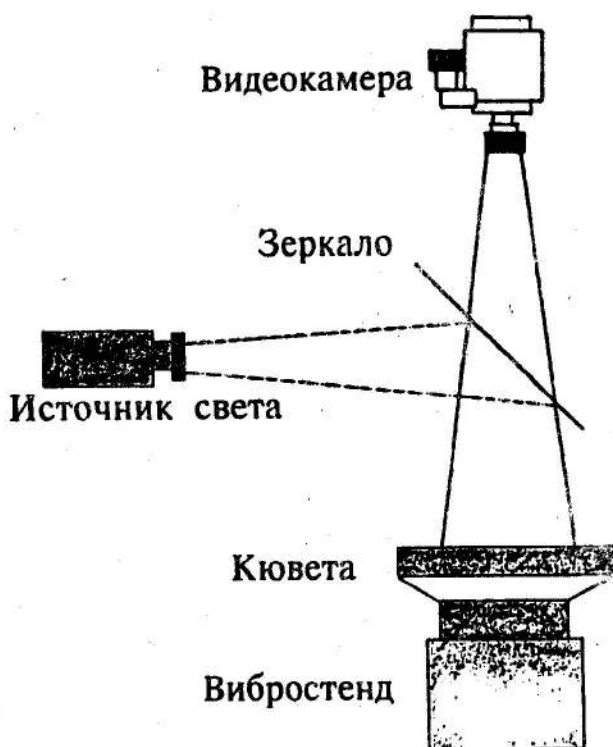


Рис. 1. Схема спектральной установки.

В первую очередь мы измерили зависимость порога параметрической неустойчивости от ширины спектра накачки. Рис. 2 отражает поведение безразмерной величины порога (относённого к порогу при ширине спектра накачки  $10^{-4}$ ). Вблизи порога неустойчивости пары возбуждаемых волн не взаимодействуют между собой, и, следовательно, зависимость порога ( $h$ ) от ширины спектра ( $\Delta\omega$ ) почти совпадает с соответствующей зависимостью для осциллятора [9] или параметрической неустойчивости спиновых волн [8].

При увеличении амплитуды колебаний вибростенда сверх пороговой величины капиллярные волны возбуждаются эпизодически с длинными паузами. Интервал между отдельными "вспышками" интенсивности волны уменьшается с увеличением надкритичности. По записям изображения определялась зависимость яркости пространственно-усредненной картины. Мы записывали реализации длительностью 512 кадров с интервалом 80 мс при малой надкритичности и 40 мс при большой надкритичности (см. рис. 3). Размер области усреднения ( $5 \times 5 \text{ см}^2$ ) много длинны волны модуляции. Необходимо отметить, что область усреднения выбиралась таким образом, чтобы исключить отраженный свет от плоской поверхности жидкости. При увеличении амплитуды волн область усреднения начинает рассеивать свет, благодаря кривизне взволнованной поверхности. При этом рябь можно рассматривать как "волновое зеркало" и число "зеркальных" источников увеличивается с ростом амплитуды волн.

$$\frac{h}{h_0} - 1$$

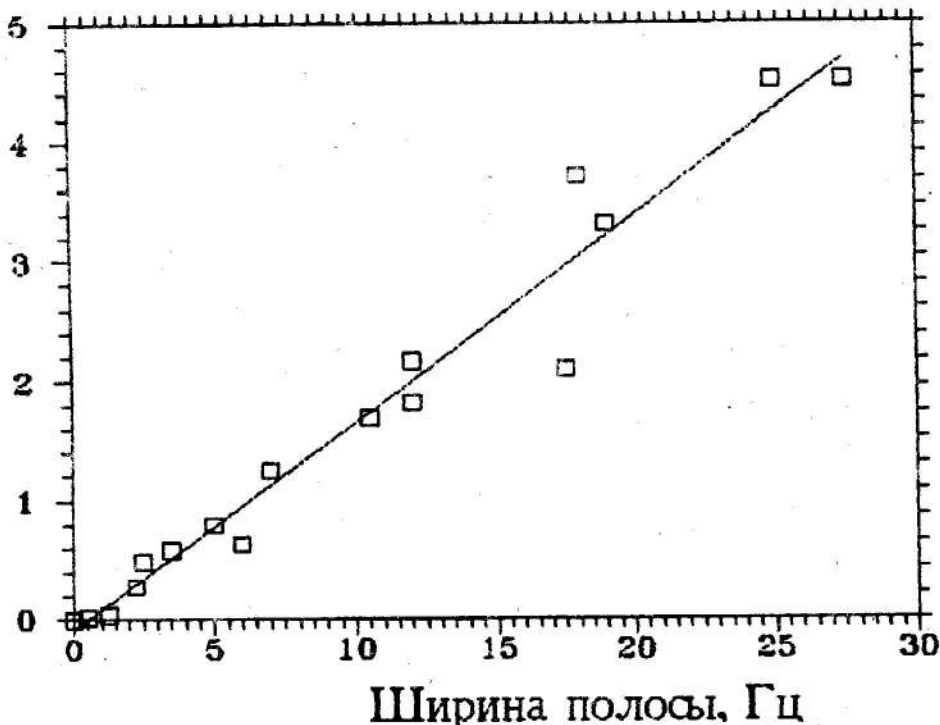


Рис. 2. Порог неустойчивости.

Отметим, что усредненная яркость изображения приблизительно пропорциональна квадрату амплитуды капиллярных волн.

Рис. 3 иллюстрирует режим, наблюдавшийся в эксперименте с шириной полосы накачки 5 Гц. При малой надкритичности интенсивность волн демонстрирует хаотическое, импульсивное поведение. При увеличении надкритичности (надкритичность здесь определяется как  $\epsilon = h/h_0 - 1$ , где  $h$  — амплитуда ускорения и  $h_0$  — усредненная пороговая величина) продолжительные провалы интенсивности исчезают, но пульсации происходят с большей частотой, и при надкритичности, близкой к единице, динамика становится шумоподобной. Мы обработали эти реализации и вычислили величину, имеющую смысл характерной частоты пульсаций:

$$f_c = \frac{\int f G(f) df}{\int G(f) df}. \quad (1)$$

Здесь  $G(f)$  — амплитуда Фурье-гармоники. Величина  $f_c$  растет с увеличением надкритичности (см. рис. 4; здесь экспериментальные точки отмечены квадратиками, и сплошная линия — приближение по методу наименьших квадратов).

## Яркость кадра

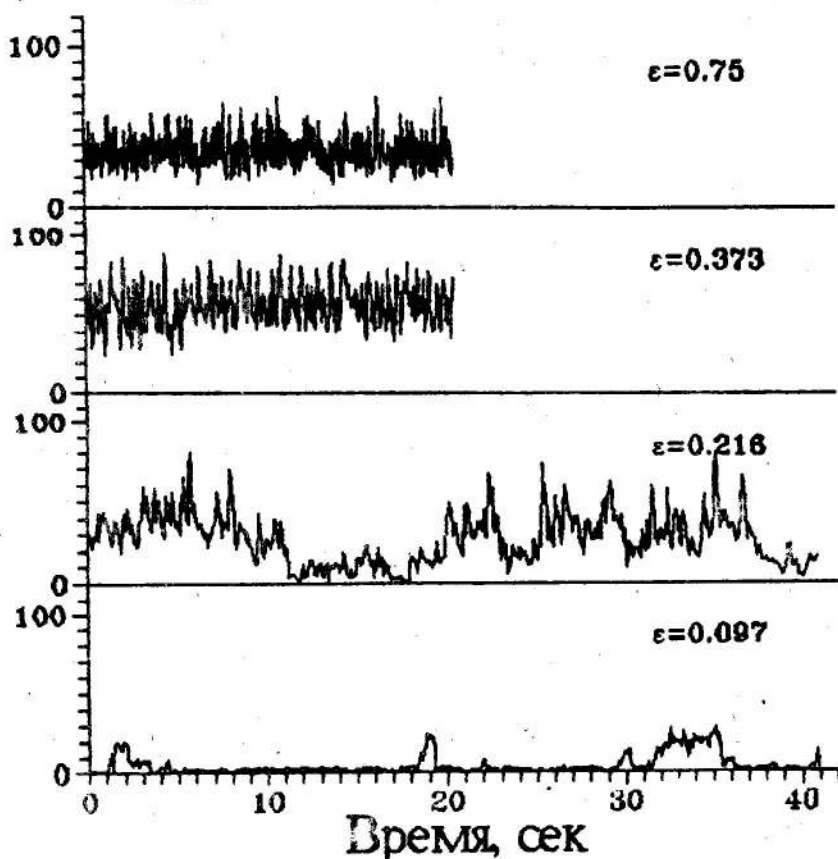


Рис. 3. Временная зависимость пространственно-усредненной яркости картинки.

Чтобы объяснить такую временную динамику процесса, мы промоделировали систему численно, используя следующую простую модель. Опишем амплитуду капиллярной ряби уравнением нелинейного осциллятора с параметрической накачкой:

$$\frac{da}{dt} + \gamma a = iha^* e^{i\Phi} + i\sigma a^* a^2, \quad (2)$$

где  $\Phi$  — случайная фаза накачки и  $a$  — амплитуда капиллярной волны. Мы предполагаем, что поле капиллярных волн однородно в пространстве. Отметим, что это предположение сильно ограничивает применимость результатов численного моделирования. Все коэффициенты в (2) ( $\gamma$  — величина затухания,  $h$  — коэффициент взаимодействия с полем накачки,  $\sigma$  — коэффициент нелинейного сдвига частоты) были рассчитаны с использованием результатов, полученных в [11], как это было сделано ранее в работе [5].

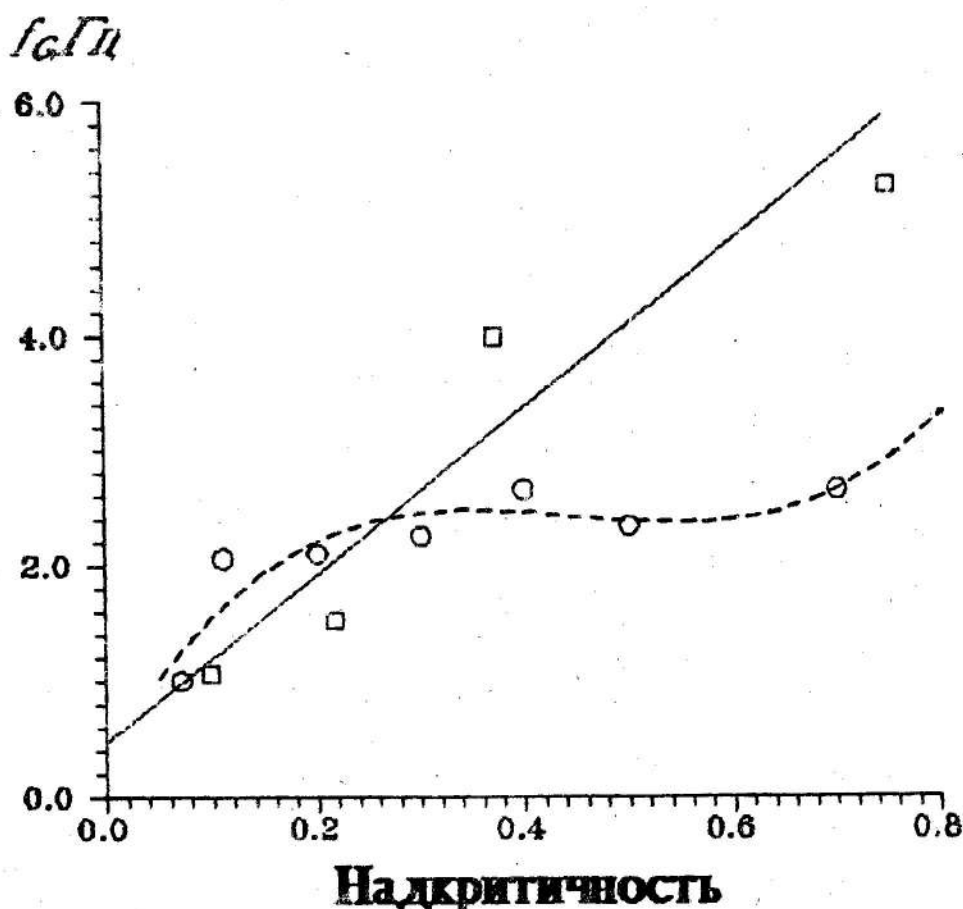


Рис. 4. Характерная частота осцилляций амплитуды. Экспериментальные точки отмечены квадратами, данные численного эксперимента — кружками.

Наиболее существенным вопросом в численной модели был способ введения случайной фазы. Мы считали фазу следующим образом:

$$\Phi = \int \omega(t) dt, \quad (3)$$

где  $\omega$  — дельта-коррелированная случайная величина, однородно распределенная в интервале  $\Delta\omega$ . Форма Фурье-спектра поля накачки (см. рис. 5), введенная таким образом, очень близка к использовавшейся в эксперименте. Изменяя величину  $\delta\omega$ , мы можем выбрать необходимую ширину линии спектра. В численном эксперименте мы наблюдали осциллограммы, похожие на изображенные на рис. 3 (см. рис. 6). На рис. 7 представлен фазовый портрет системы при различных значениях ширины полосы накачки и при одной и той же надкритичности порядка 0,5.

A, отн. ед.

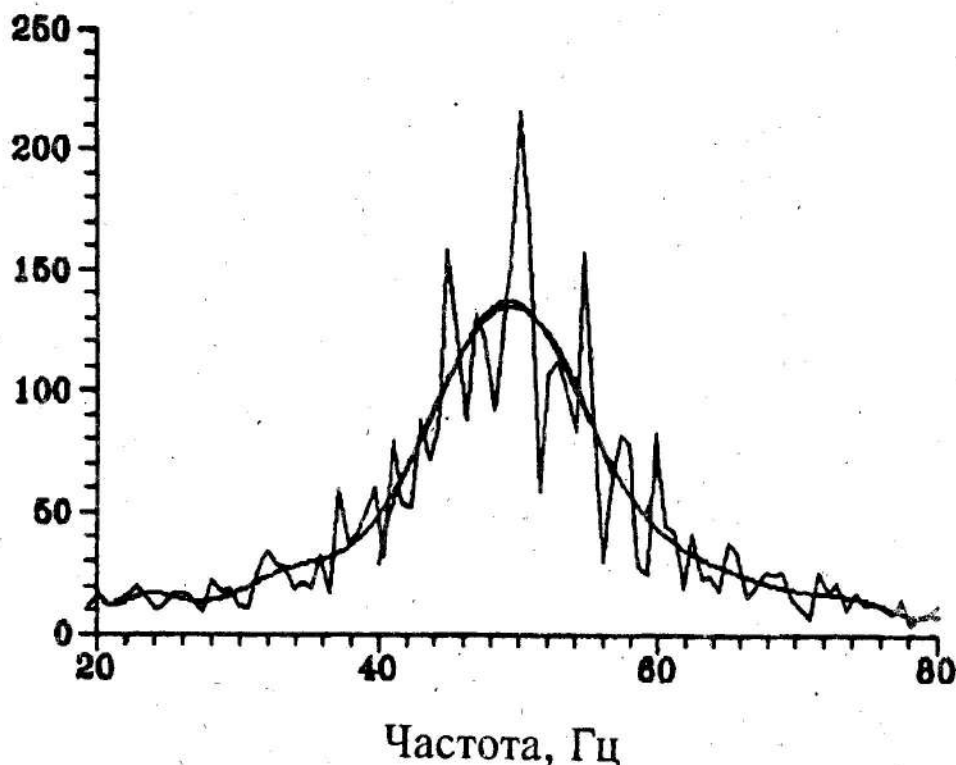


Рис. 5. Спектр накачки в численном эксперименте.

Заметим, что динамика системы теряет регулярность уже при ширине полосы порядка 1 Гц и становится полностью хаотической при ширине полосы накачки около 4 Гц. Решение системы (2) обнаруживает провалы амплитуды поля, отмечавшиеся в физическом эксперименте. Попытаемся объяснить такое поведение следующими свойствами системы (2). При  $\Phi = \text{const}$  существуют два состояния равновесия: неустойчивое  $a^1 = 0$  и устойчивое

$$|a^{2,3}|^2 = \frac{(h^2 - \gamma^2)^{0,5}}{|\sigma|}. \quad (4)$$

Казалось бы, что флуктуация фазы должна приводить лишь к хаотической модуляции амплитуды ряби. Однако, мы наблюдаем провалы в параметрической генерации ряби. Причина этих провалов может быть объяснена следующим образом. Опишем временное поведение фазы  $\Phi$  расстройкой

$$\frac{d\Phi}{dt} = \delta\omega. \quad (5)$$

В этом случае состояния равновесия характеризуются амплитудами

$$|a_0^{(1)}| = 0 \text{ и } |a_0^{(2,3)}|^2 = \frac{-\delta\omega \pm (h^2 - \gamma^2)^{0,5}}{\sigma}. \quad (6)$$



## АМПЛИТУДА ВОЛН

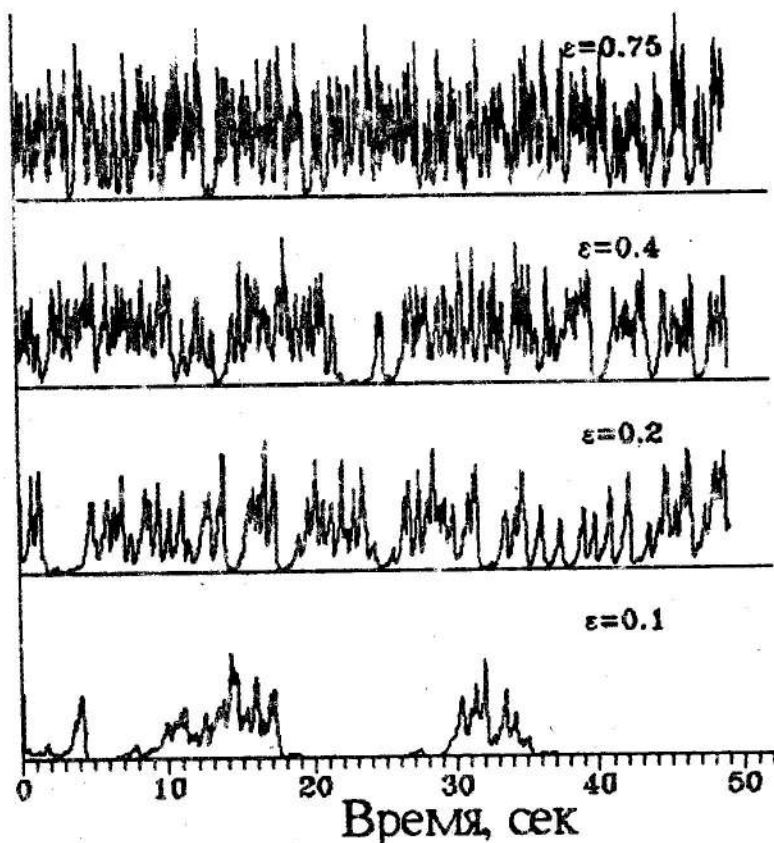


Рис. 6. Временная зависимость амплитуды волн в численном эксперименте.

Если знаки нелинейного сдвига частоты  $\sigma|a^2|$  и расстройки  $\delta\omega$  совпадают, при малой надкритичности ( $h^2 - \gamma^2 < \delta\omega$ ) существует только одно состояние равновесия. Поэтому капиллярные волны затухают и при изменении фазы накачки наблюдается провал в параметрической генерации. Величины характерной частоты пульсаций амплитуды в реализациях, полученных в численном эксперименте, отражены на рис. 4 кружками. Штриховая линия — приближение по методу наименьших квадратов. Расхождение в области больших значений надкритичности происходит из-за неприменимости пространственно-однородного приближения (уравнения (2)) для амплитуды капиллярных волн.

В экспериментах с шумовой накачкой при надкритичности  $\epsilon > 0,3$  мы наблюдали появление взаимно перпендикулярных волн поперечной модуляции, подобные наблюдавшимся в экспериментах с гармоничной накачкой. Видеозаписи были обработаны с помощью алгоритма двумерного БПФ. Спектры мощности вычислялись по массивам из  $256 \times 256$  элементов и усреднялись по четырем временным реализациям. Мы исследовали



К-спектры, уделяя особое внимание изменению ширины пространственного спектра с увеличением надкритичности и ширины спектра накачки.

Скорость

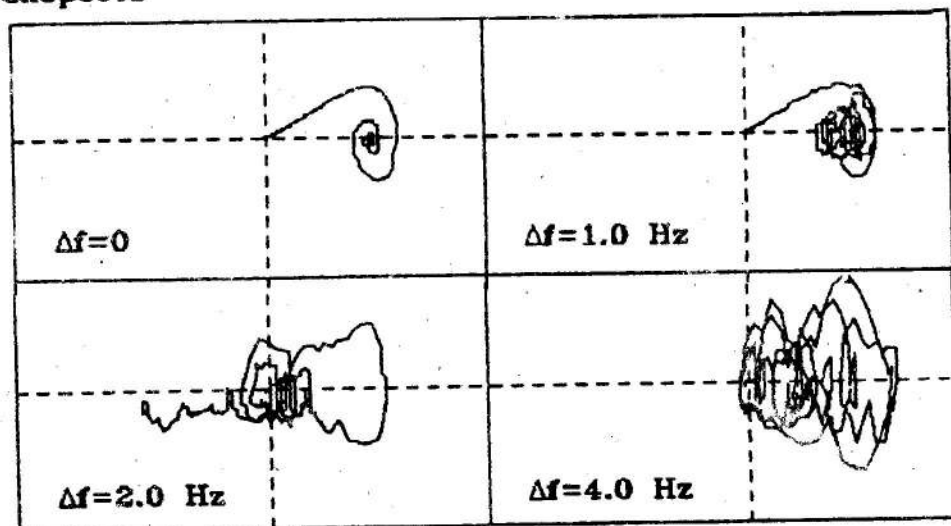


Рис. 7. Фазовый портрет системы (2).

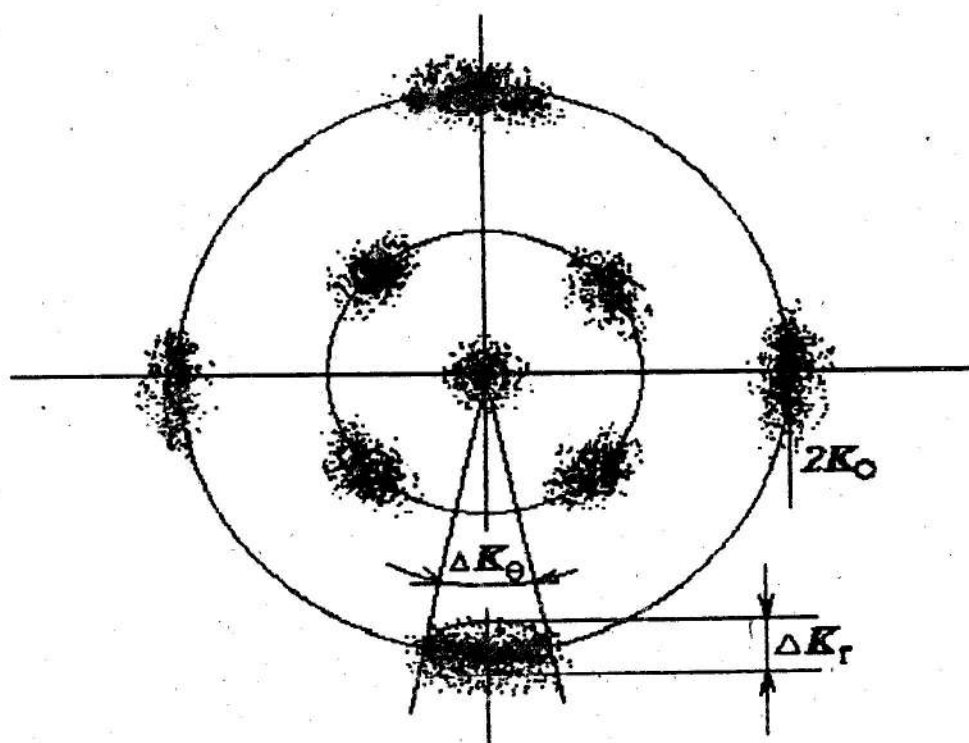


Рис. 8. Пространственный спектр изображения рыбы.

Характерная форма пространственного спектра представлена на рис. 8. Мы обнаружили, что ширина спектра в радиальном направлении  $\Delta k_r$  слабо зависит от надкритичности даже при максимальной интенсивности шумовой модуляции (см. рис. 9).

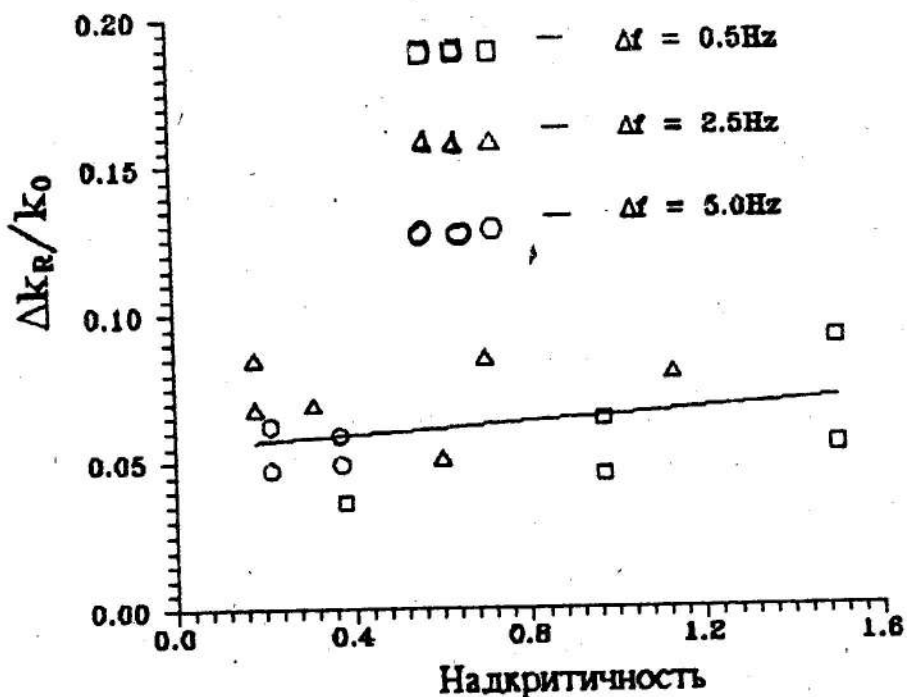


Рис. 9. Ширина спектра ряби в радиальном направлении.

В действительности величина  $\delta k_r$  была такой же, как и в экспериментах с шириной спектра накачки  $10^{-4}$ . В то же время, ширина спектра в азимутальном направлении  $\Delta k_\theta$  обнаружила существенную зависимость от ширины спектра накачки: при увеличении последней волновые вектора капиллярной ряби становились более равномерно распределенными по углу — спектр становился изотропным. Чтобы каким-либо образом характеризовать состояние системы, был введен критерий начала разрушения структуры волновой картины. Он определялся как надкритичность, при которой ширина спектра в азимутальном направлении становилась в пять раз больше, чем ширина спектра в радиальном направлении. На рис. 10 построена зависимость этой величины от ширины полосы накачки. При малой ширине спектра накачки регулярность волновой картины нарушается при значительно больших амплитудах внешнего поля.

Таким образом, настоящая работа представляет собой оригинальное исследование пространственной и временной структуры капиллярной ряби, параметрически возбуждаемой шумовой накачкой. Наиболее интересным, на наш взгляд, являлся процесс эпизодической генерации ряби

при малых надкритичностях. В этом случае амплитуда ряби уменьшалась практически до нуля и восстанавливалась при почти полном сохранении пространственной структуры ряби. Паузы между отдельными "вспышками" ряби сокращались с увеличением надкритичности. Для объяснения этого явления мы построили простую динамическую модель. Численное моделирование этой модели показало качественное соответствие экспериментальным данным.

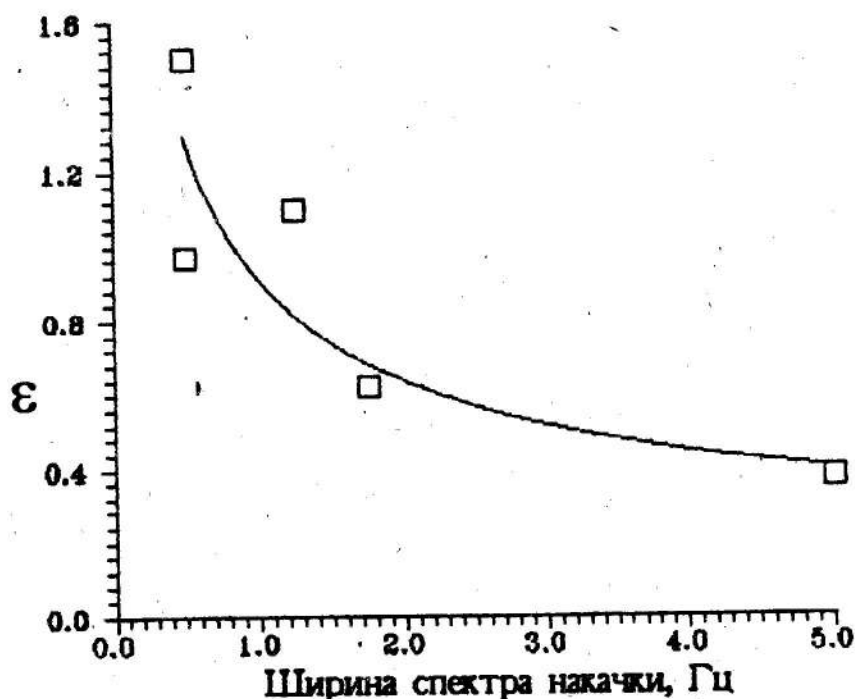


Рис. 10. Кривая постоянного отношения ширины спектра в азимутальном направлении к ширине спектра в радиальном направлении.

В экспериментах с большими значениями надкритичности наблюдалась нерегулярная пространственно-временная модуляция ряби, подобная обнаруженной в опытах с монохроматической накачкой. Следует подчеркнуть, что в этом случае и при шумовой накачке капиллярная рябь состоит из пар стоячих волн, имеющих трансверсальную модуляцию (см. рис. 8), то есть такую же, что и в [5]. Как было установлено в [5], возникновение хаоса связано именно с возникновением такой модуляции. Поэтому можно предположить, что нерегулярное поле капиллярной ряби, возбуждаемой шумом, является хаотическим — это результат нелинейной динамики системы, а не воздействие случайной силы. Это предположение, несомненно, нуждается в дальнейшей проверке и, в первую очередь, в численном расчете, аналогичном тому, что проделан в [5], но со случайной внешней силой.

Подчеркнем, что наиболее существенное влияние шумов наблюдалось при малой амплитуде накачки: возникали провалы генерации ряби, которых не было при монохроматической внешней силе. Это хорошо коррелирует с результатами расчета уравнения Свифта-Хоемберга [7], демонстрирующими существенное воздействие шума на структуры лишь при малой надкритичности.

Авторы искренне благодарны Л. А. Островскому и М. И. Рабиновичу за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ciliberto S., Gollub J.P. //Phys. Rev. Lett. 1984. V.52. P.922.
2. Ciliberto S., Gollub J.P. //J. Fluid Mech. 1985. V.158. P.381.
3. Douady S., Fauve S. //Europhys. Lett. 1988. V.6. P.221.
4. Езерский А.Б., Шехов В.Г. //ЖТФ. 1989. Т.34. С.7.
5. Езерский А.Б., Рабинович М.И., Реутов В.П., Старобинец И.М. //ЖЭТФ. 1988. Т.64. С.1228.
6. Tuffilato N.B., Ramshankar R., Gollub J.P. //Phys. Rev. Lett. 1989. V.62. P.422.
7. Elder K.R., Viñals J., Grant M. //Phys. Rev. Lett. 1992. V.68. P.3024.
8. Зауткин В.В., Орел О.И., Черепанов В.Б. // ЖЭТФ. 1983. Т.58. С.414.
9. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. //УФН. 1974. Т.114. С.609.
10. Ezersky A.B. //Europhys. Lett. 1991. V.16. P.661.
11. Захаров В.Е. //ПМТФ. 1968. Т.2. С.89.
12. Малахов А.Н. Кумулятивный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио. 1978.

Институт прикладной физики  
РАН

Поступила в редакцию  
9 февраля 1993 г.

#### SPATIO-TEMPORAL CHAOS OF CAPILLARY RIPPLES PARAMETRICALLY EXCITED BY NOISE

*A.B.Ezersky, P.A.Matusov*

It was found that the chaotization of parametrically excited capillary waves occurs at small supercriticalities in experiments with a highly randomized pump. It was revealed that the ripple pulsations took place with almost conservation of the wave field structure. The characteristic fluctuation frequency

as computed from the records of the spatial picture of the ripples was found to be a function of the supercriticality. The numerical simulation of this process showed a good agreement with experiments.