УДК 533.922

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДУЦИРОВАННОГО ЗАРЯДА И ТОКА В ПЛАЗМЕ С ГЛУБОКОМОДУЛИРОВАННЫМ РЭП

В. Б. Красовицкий, О. Ю. Нагучев, Г. В. Фомин

Идея метода электростатической фокусировки глубоко промодулированного электронного пучка состоит в изменении знака силы кулоновского взаимодействия электронов в сгустках, создаваемых с помощью внешней модуляции пучка на частоте ω_m, меньшей ленгмюровской частоты плазмы ω_p [1]. Излучение такого пучка в плазме представляет собой суперпозицию собственного (вакуумного) поля движущихся с постоянной скоростью сгустков и возбуждаемой этим полем волны поляризации в плазме. При $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega_m^2 < 0$ эта волна, поле которой в условиях резонанса превосходит кулоновское поле сгустков, находится в противофазе с волной плотности заряда пучка и фокусирует сгустки. Другими словами, индуцируемая пучком волна поляризации вытесняет электроны плазмы из объема пучка, а поле нескомпенсированного ионного фона уравновешивает силу кулоновского расталкивания и градиент кинетического давления в сгустках и обеспечивает равновесие пучка с волной.

Полученное в [2] аналитическое решение самосогласованной системы нелинейных уравнений, описывающей взаимодействие равновесных релятивистских электронных сгустков с излучением в плазме, позволяет найти форму потенциальных ям и пространственное распределение захваченных в них электронов, а также плотность индуцированного заряда и тока в плазме. Однако результаты являются довольно сложными и требуют дополнительной численной обработки, лишь частично проведенной в работе [2].

Представленное в настоящей работе численное решение системы уравнений [2] является наглядным дополнением к общим формулам (эллиптическим функциям и интегралам) и позволяет проанализировать эволюцию формы эквипотенциальных поверхностей и силовых линий тока в плазме при изменении расстройки между частотой модуляции пучка и ленгмюровской частотой плазмы.

Электромагнитное поле в плазме с релятивистским электронным пучком описывается следующей системой уравнений для скалярного φ и векторного $\mathbf{A}$ потенциалов [2]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_p^2\right)\left[\Delta-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_p^2\right)\right]\varphi = -4\pi e\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2},$$
$$\left[\Delta-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_p^2\right)\right]\mathbf{A} = -\frac{4\pi e\mathbf{v}\rho}{c}. \qquad (1)$$

Зависимость плотности электронов пучка

$$\rho(t,\mathbf{r})=\int f(t,\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}$$

от потенциалов определяется функцией распределения $f(t,\mathbf{r},\mathbf{v})$, которая является произвольной функцией интегралов движения электрона и зависит от способа создания пучка [1].

Следуя [2], положим функцию распределения электронов в сгустках в системе отсчета пучка равной

$$f(\mathbf{v},\varphi')=\rho_0'\left(\frac{m}{\pi e\varphi_m'}\right)^2\left(V^2-\mathbf{v}'^2\right)^{1/2}\theta\left(V^2-\mathbf{v}'^2\right), \qquad (2)$$

где ρ_0' — плотность захваченных электронов на дне потенциальной ямы φ_m', $V^2=-2e\varphi'/m$, $e<0$, а разрывная функция $\theta\left(V^2-\mathbf{v}'^2\right)$ учитывает условие захвата электронов в потенциальные ямы волны. Интегрируя (2) по скоростям, находим зависимость плотности захваченных частиц от потенциала

$$\rho'=\rho_0'\left(\varphi'/\varphi_m'\right)^2\theta\left(\varphi'\right). \qquad (3)$$

Выполняя переход в систему отсчета плазмы с помощью преобразований Лоренца

$$\varphi'=\gamma\psi,\quad \varphi_m'=\gamma\psi_m,\quad \rho_0=\gamma\rho_0',$$

находим

$$\rho=\rho_0(\psi/\psi_m)^2\theta(\psi), \qquad (4)$$

где ρ_0 — плотность частиц в минимуме потенциала ψ_m, а разрывная функция есть

$$\theta(\psi)=\begin{cases}1, & \psi>0,\\ 0, & \psi<0.\end{cases}$$

Рассмотрим стационарное решение системы (1)

$$\psi=\psi(r,z'),\quad z'=z-\mathrm{v}t$$

[1] Критерием корректности выбора функции распределения для качественного описания электронов, захваченных волной потенциала, является существование разумных физических решений уравнения для самосогласованного потенциала [3].

в ультрарелятивистском пределе $\gamma^2 \gg 1$. Опуская слагаемые порядка $\gamma^{-2} \ll 1$, получаем следующее нелинейное уравнение в частных производных [2]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+1\right)\left[\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)-1\right]y=-qy^2\theta(y), \tag{5}$$

$$y=\frac{\psi}{\psi_M},\quad \xi=\frac{\omega_p r}{c},\quad \zeta=\frac{\omega_p z'}{c},\quad q=\frac{4\pi ec^2\rho_0}{\omega_p\psi_M},$$

допускающее разделение переменных:

$$y(\xi,\zeta)=q^{-1}R(\xi)Z(\zeta), \tag{6}$$

что позволяет независимым образом интегрировать уравнения в полных производных для поперечного:

$$\xi^{-1}(\xi R')'-R+R^2=0, \tag{7}$$

$$R'(0)=R(\infty)=0$$

и продольного:

$$Z''+Z-Z^2\theta(Z)=0, \tag{8}$$

$$Z'(0)=0,\quad Z_0=Z(0)=q/R(0)$$

равновесия сгустков.

Согласно [2] граничные условия к уравнениям (7) и (8) являются необходимыми для существования (при $Z_0<0$ и $R(0)\cong 2{,}39$) равновесных сгустков.

Сечения эквипотенциальных поверхностей $y(\xi,\zeta)=\text{const}$ плоскостью, проходящей через ось пучка, рассматривается как семейство интегральных кривых уравнения

$$\mathrm{d}\Big(y(\xi,\zeta)\Big)=0, \tag{9}$$

записанного в системе полярных координат (r,η):

$$\zeta=\zeta_0+r\cos\eta,\quad \xi=r\sin\eta,$$

центр которых $\zeta_0=nL/2$ (L — период модуляции пучка [2]) совпадает с центром сгустка ($n=0,\mp2\ldots$ и $y>0$) или с центром промежутка ($n=\mp1,\mp3\ldots$ и $y<0$).

В этих координатах уравнение (9) принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\eta}=r\frac{B\sin\eta-A\cos\eta}{A\sin\eta+B\cos\eta}, \tag{10}$$

где $A=R'Z$, $B=Z'R$, а производные R' и Z' взяты соответственно по ξ и ζ. В качестве начальных условий к уравнению (10) берутся точки на оси

$\xi = 0$, в которых потенциал $y(0, \zeta)$ принимает заранее выбранные значения. Эти эквипотенциальные поверхности при ряде значений параметра q представлены на рис. 1.

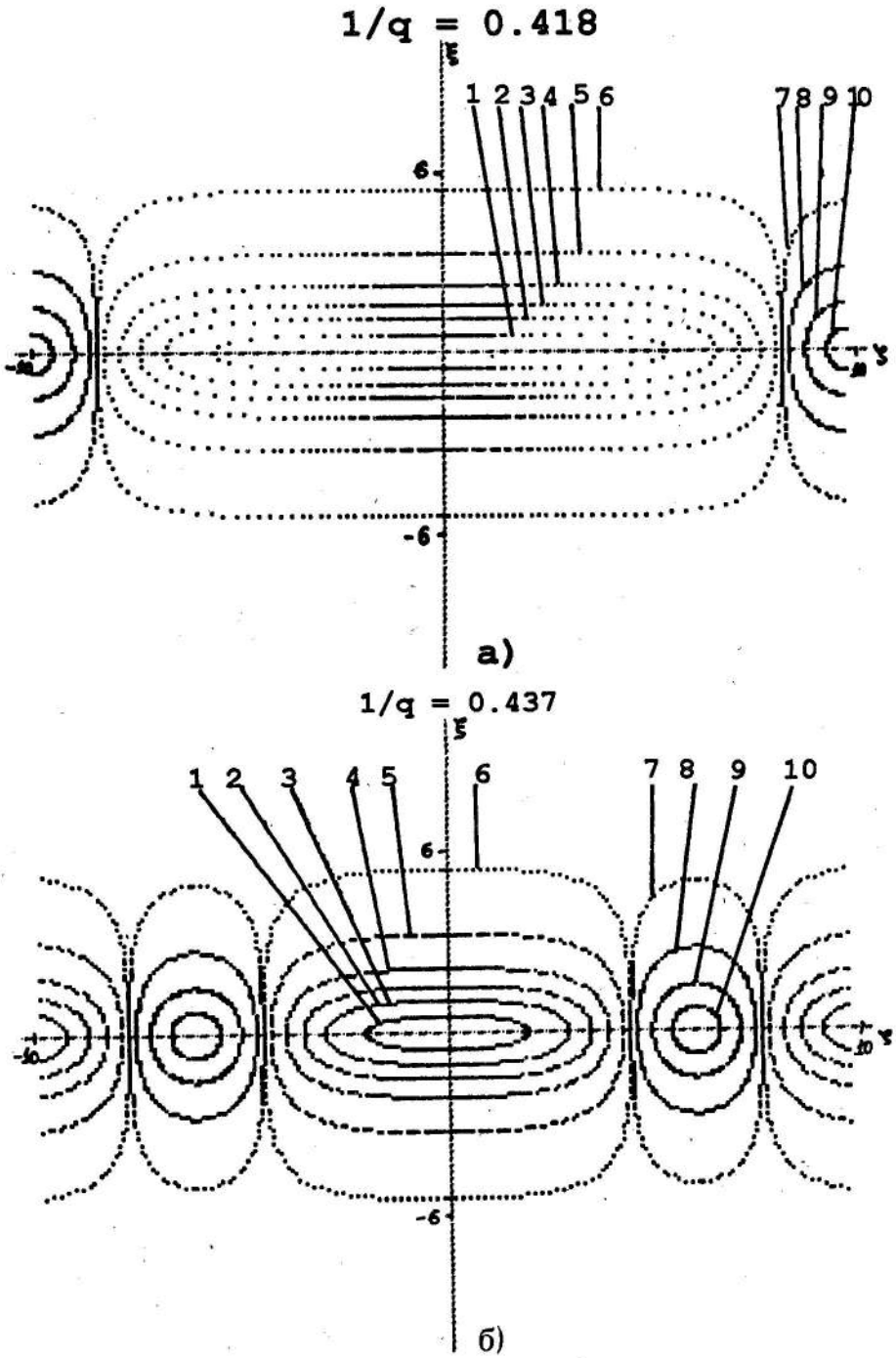

Рис. 1 а, б.

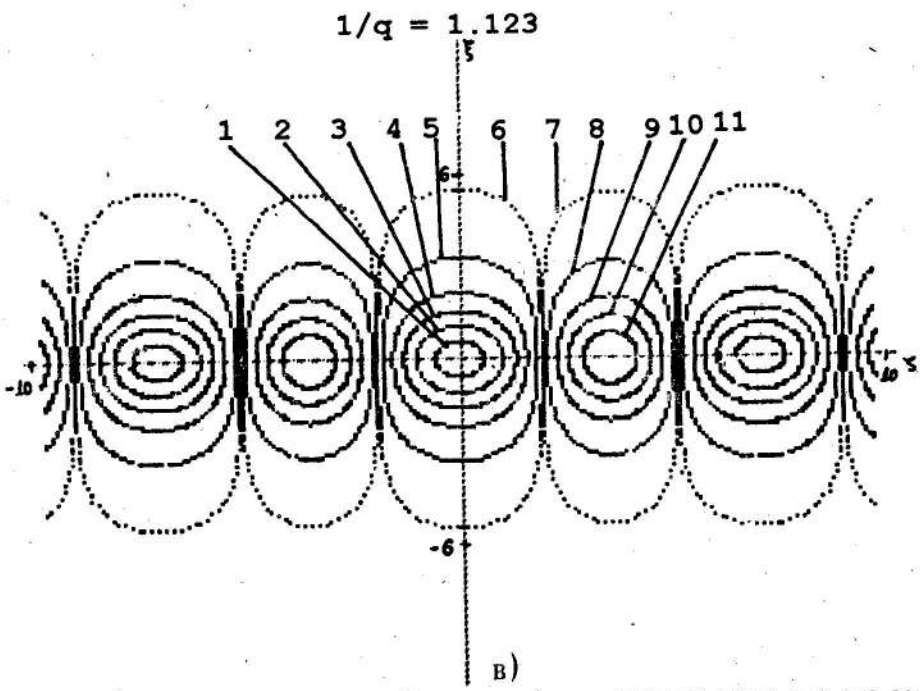

Рис. 1. Сечения эквивалентных поверхностей $y = 0,9; 0,7; 0,5; 0,3; 0,1; 0,01; -0,01; -0,1; -0,3; -0,5; -0,7;$ (кривые *1–11*) осевой плоскостью для различных значений потенциала в центре сгустка (параметра q).

С увеличением q (уменьшением потенциала ψ_M при фиксированных значениях ρ_0 и n_p) электронные сгустки растягиваются в продольном направлении при неизменных поперечных размерах и расстоянии между ними, равном $\lambda/2$ ($\lambda = 2\pi c/\omega_p$ — длина волны), что совпадает с выводами аналитической теории [2].

Зависимость плотности электронных сгустков от потенциала имеет вид [2]:

$$\rho_b = \rho_0 (RZ)^2 \theta(Z) \tag{11}$$

и поверхности равной плотности захваченных частиц совпадают с эквипотенциальными поверхностями в областях $Z > 0$.

Уравнение (10) является общим для численного табулирования и позволяет восстановить пространственное распределение плотности заряда и тока, индуцируемого в плазме последовательностью релятивистских электронных сгустков.

Линии постоянной плотности индуцируемого заряда [12]:

$$\rho_p = -\frac{\rho_0}{q^2} Z R^2 \tag{12}$$

определяются как решения (10) при $A = 2R'Z$, $B = Z'R$ и начальными условиями на оси $\xi = 0$, где плотность имеет заранее выбранное значение (см. рис. 2).

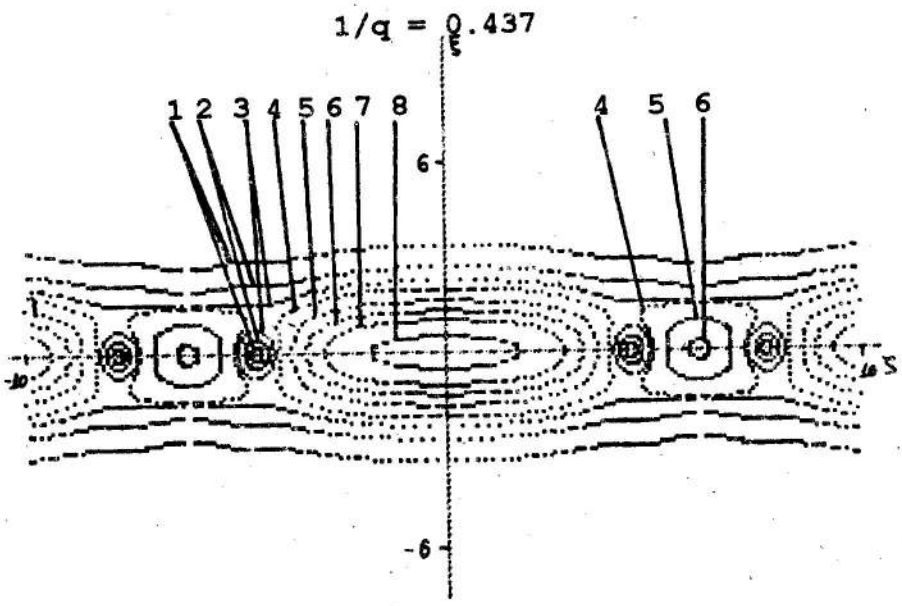

Рис. 2. Линии постоянной плотности индуцированного заряда в плазме $\rho_p/R_0 = -0,01;\ -0,1;\ -0,3;\ -0,5;\ -0,7;\ -0,9;\ 0,01;\ 0,1;\ 0,3;\ 0,5$ (кривые *1–10*).

Линии постоянной плотности тока в плазме определяются формулами [2]:

$$j_p = (j_{pz}^2 + j_{pr}^2)^{1/2}, \quad j_{pz} = \frac{ec\rho_0}{q^2} RZ, \quad j_{pr} = -\frac{\partial^2 j_{pz}}{\partial\xi\partial\zeta}. \tag{13}$$

Соответственно в уравнении (10) нужно положить:

$$A = R'\left(RZ^2 + R''Z'^2\right), \quad B = Z'\left(R^2Z + R'^2Z''\right).$$

Однако в этом случае на пространственном периоде L имеют место три различных интервала значений тока, разделенных критическими точками:

$$j_2 = \left(1 - \frac{2q}{3R_0}\right)^{1/2} > j_1 = \frac{R_0'}{R_0} j_2 \tag{14}$$

(здесь $R_0' = -1,08$ — производная в точке ξ_0, где $R''(\xi_0) = 0$).

На интервале $0 < j < j_1$ кривые постоянной плотности тока (рис. 3) являются несвязными. Они имеют замкнутые компоненты, окружающие нули функции $Z(\zeta)$ (точки $j = 0$), и незамкнутые, отстоящие все дальше от оси $\xi = 0$ с уменьшением $j = j_p q^2/ec\rho_0$.

Для токов $j_1 < j < j_2$ кривые также несвязны, но обе компоненты замкнуты. Одна из них окружает центр сгустка, вторая — центр промежутка.

Наконец, для токов из интервала $j_2 < j < 1$ все кривые односвязаны и замкнуты вокруг центра сгустка. Они сжимаются к этому центру по мере увеличения тока j.

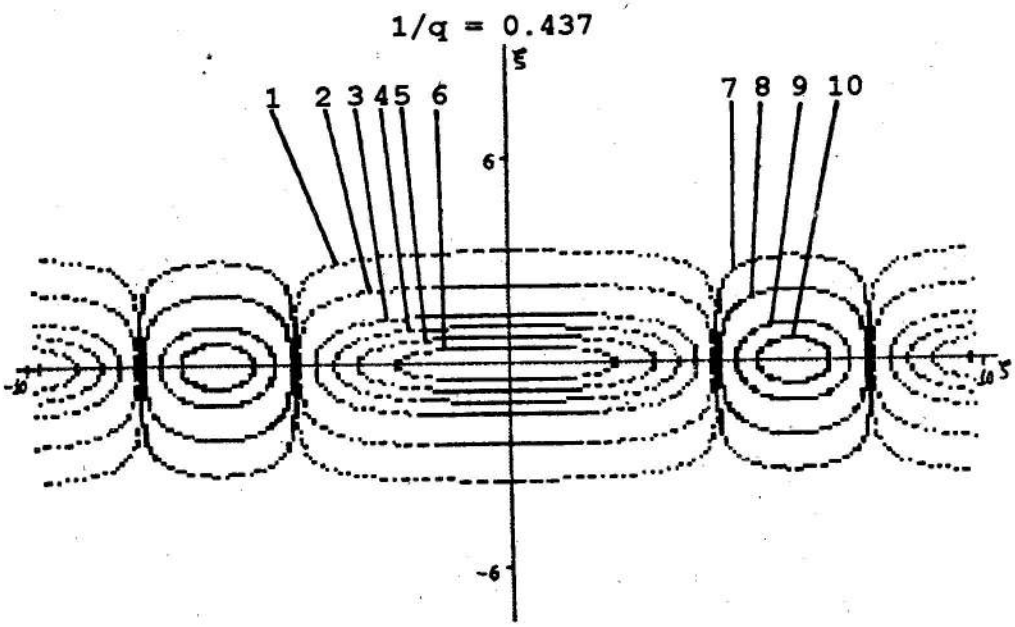

Рис. 3. Линии постоянной плотности тока:
$j = j_1 N$, $N = 0,3$ *(1)*; 0,6 *(2)*; 0,9 *(3)*;
$j = j_1 + (j_2 - j_1)N$, $N = 0,15$ *(4)*; 0,55 *(5)*; 0,95 *(6)*; и
$j = j_2 + (1 - j_2)N$, $N = 0,3$ *(7)*; 0,8 *(8)*.

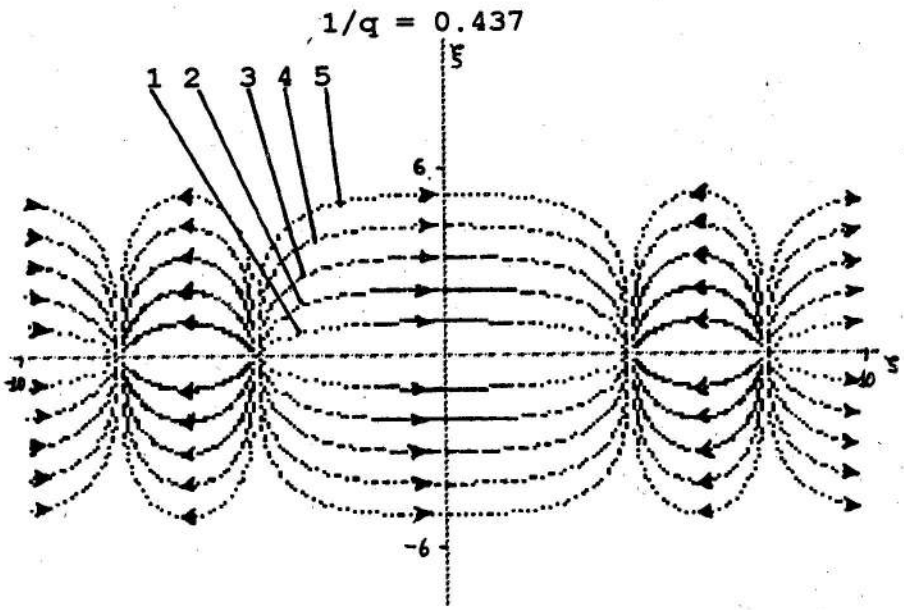

Рис. 4. Линии тока $\tau(\zeta_0) = 1; 2; 3; 4; 5$ (кривые *1–5*).

Линии тока, представленные на рис. 4, описываются уравнением

$$\frac{j_{pr}}{j_{pz}} = \frac{d\xi}{d\zeta} = -\frac{R'Z'}{RZ} \tag{15}$$

и в каждой точке пространства совпадают с направлением тока электронов плазмы. Численное интегрирование проведено на основе уравнения (10), в котором положено $A = RZ$, $B = R'Z'$, а начальные условия выбираются произвольно задаваемыми значениями r на осях $\zeta = \zeta_0$, проходящих через центры сгустков и промежутков.

Представленные на рис. 2–4 кривые получены для $q = 0{,}437$. Проведенные расчеты показывают, что при $q \to 0$ области, соответствующие захваченным частицам, сжимаются до размера $\lambda/2$ (монохроматическая волна). С увеличением параметра q продольные размеры сгустков увеличиваются аналогично рис. 1. При этом расстояние между сгустками остается неизменным и равным $\lambda/2$.

Таким образом, проведенное выше численное исследование позволяет восстановить детальную пространственную картину распределения электронного заряда и тока в плазме с глубоко промодулированным релятивистским электронным пучком и качественно согласуется с полученными ранее результатами аналитических расчетов [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовицкий В. Б. // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. N 12. С. 679.
2. Дорофеенко В. Г., Красовицкий В. Б. // ЖЭТФ. 1991. Т. 99. N 2. С. 498.
3. Bohm D., Gross E. P. // Phys. Rev. 1947. V. 75. P. 1851.

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию 14 апреля 1993 г.

SPATIAL DISTRIBUTION OF AN INDUCED CHARGE AND CURRENT IN PLASMA WITH HIGHLY MODULATED RESONANT ELECTRON FLOW

V. B. Krasovitskij, O. Yu. Naguchev, G. V. Fomin