

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

Ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том 36, № 9

Нижний Новгород

1993

Содержание

Троицкий В. С. Космологические тесты не подтверждают общепринятую модель Вселенной.....	867
Горбачев Л. П. О магнитозвуковых и альфеновских волнах, возбуждаемых разлетающимся плазменным облаком в холодной замагниченной плазме	882
Стратонович Р. П., Рузмайкина А. А. Чичигина О. А. Динамический хаос в осцилляторе с отрицательным трением. Аномальный режим.....	892
Шестопалов В. П., Яцик В. В. Морсовские критические точки свободных колебаний и волны решеток	905
Голынский С. М., Гусев В. Д. Статистические характеристики эффективного показателя преломления плоскослоистой случайно-неоднородной среды	914
Мальковский Д. Г. Мультистатический метод компенсации рефракционных ошибок в радиолокации и спутниковых системах навигации	928
Августинович В. А., Артеменко С. Н. Влияние процесса коммутации на формирование наносекундных радиоимпульсов	933
Лапин А. В., Чубинский Н. П. Закономерности распространения радиоимпульсов в прозрачных диспергирующих средах	943

Краткие сообщения и письма в редакцию

Скворцов В. А. Численный расчет матрицы столкновений в теории уширения и сдвига молекулярных линий давлением газа.....	952
Голубенцев А. Ф., Аникин В. М. Теоретическая оценка низкочастотных шумов полупроводникового автоэмиттера.....	956

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора),
В. В. ЖЕЛЕЗНИКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ,
А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ,
А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН,
В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, С. А. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. МУРАШКИНА

Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 8,40. Усл. кр.-отт. 8,40. Уч. тиэд. л. 10,00
Тираж 350 экз. Заказ . Цена 500 р.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,
ул. Большая Печерская, 25.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71

• Отпечатано с готового набора

Межвузовская типография
при Нижегородском государственном университете

603600, Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37.

© "Известия высших учебных заведений. Радиофизика", 1993

УДК 524.82

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ НЕ ПОДТВЕРЖДАЮТ ОБЩЕПРИНЯТУЮ МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ

В. С. Троицкий

1. Введение

Почти полвека основными тестами определения истинности космологической теории являются сравнения наблюдаемых зависимостей от красного смещения видимой светимости $m(z)$ и углового размера $\theta(z)$ галактик с зависимостями, предсказываемыми космологической теорией. Предполагалось также эти тесты применить для определения кривизны пространства-времени и тем самым сделать выбор между замкнутой и открытой моделями Вселенной.

Однако использование тестов не принесло успеха ни в том, ни в другом вопросах ввиду того, что красное смещение галактик обычно находится в интервале $0 \leq z \leq 0,5$, который недостаточен для уверенного сравнения теории с наблюдениями, в особенности для определения кривизны пространства-времени.

С открытием квазаров, имеющих существенно большее, чем у галактик, красное смещение, возникла надежда на решение указанных проблем. Первоначально квазары были включены в тест $\theta(z)$. Это выполнил Легг (1970) [1], который, используя данные для двойных радиоквазаров и радиогалактик, сделал важное открытие, что галактики и квазары образуют единую зависимость вида $\theta(z) = \theta_0/z$ в интервале смещений $0,05 \leq z \leq 2$. Такая же зависимость получена Сэндиджем в 1972 г. [2] для 70-ти ярчайших эллиптических галактик скоплений при смещениях $5 \cdot 10^{-3} \leq z \leq 0,8$. Сравнение этой зависимости с теоретическими для открытой и закрытой Вселенной показало, что ни одна разумная модель Вселенной не согласуется с наблюдением. Этот

факт сначала робко, а теперь уверенно стал объясняться эволюцией размеров галактик и квазаров, которая в теории никак не учитывалась.

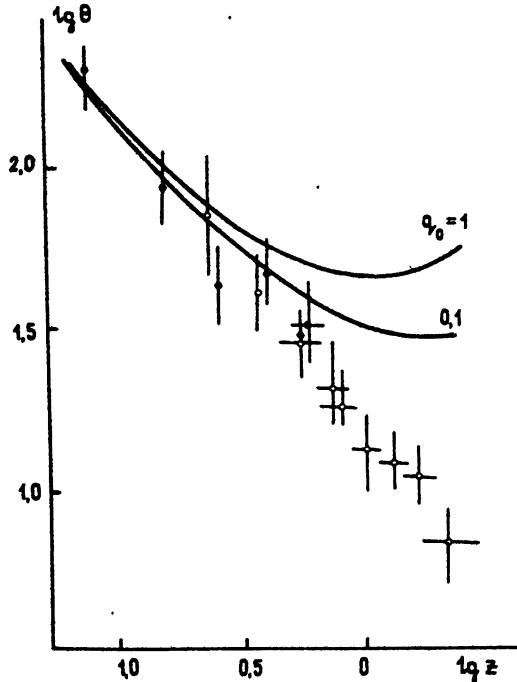


Рис. 1.

Усредненные данные для зависимости видимого углового размера 215 радиогалактик (заполненные кружки), и 296 квазаров (незаполненные кружки). Сплошные кривые - предсказания стандартной космологии при $q_0 = 1$ и $q_0 = 0,1$.

К настоящему времени полученная Леггом и Сэндиджем зависимость подтверждена в работе Капахи (1987) [3] на существенно большем массиве данных для двойных систем в интервале смещений $0 < z \leq 3$. Полученная им зависимость приведена на рис. 1. Она хорошо соответствует функции

$$\theta(z) = \frac{\theta_0}{z}, \quad (1)$$

где $\theta_0 = l_0/R_0$, причем $R_0 = cH_0^{-1}$. Как видно из рис. 1, отклонение от теоретических зависимостей настолько велико, что определение кривизны пространства этим тестом явно невозможно и речь может идти только о верификации самой космологической теории.

Для согласования этих наблюдательных данных с теорией достаточно предположить, что размеры галактик и квазаров уменьшаются с ростом их красного смещения по закону $l(z) = l_0/(z + 1)^n$, где по Капахи $n \approx 1$, а в появившейся недавно работе Сингала (1988 г.) [4] получается даже $n = 1,5 - 3$.

Хуже обстояло дело с использованием $m(z)$ -теста. Применение теста $m(z)$ было выполнено впервые в 1961 г. Сэндиджем [5] для выбранных наиболее ярких галактик в том же малом интервале красных смещений. Эти данные удовлетворительно ложились на теоретические $m(z)$ кривые для всех разумных моделей Вселенной, так как последние начинают отличаться лишь при $z > 0,5$. Таким образом, данные Сэндиджа подтверждали теорию, но не позволяли различать модели с разной кривизной. Включение квазаров в этот тест обещало решить проблему. Однако полученные данные $m(z)$ для квазаров имели большой разброс и сильно отклонялись от прямой $m(z)$ для галактик, образуя на графике целое облако точек. Поэтому до сих пор использование квазаров для построения общей $m(z)$ зависимости считалось невозможным.

Тем не менее нам представлялось, что ввиду большого разброса видимой светимости квазаров, достигающей (4-5) звездных величин, (сто раз) необходимо использование усредненной $m(z)$ кривой по возможно большему количеству данных, чтобы получить среднюю статистическую $m(z)$ зависимость, исключающую влияние не главных причин разброса данных. Кроме того, усреднение исключает влияние неизбежного произвола при использовании отдельных небольших выборок объектов по тем или иным, часто слабо обоснованным критериям.

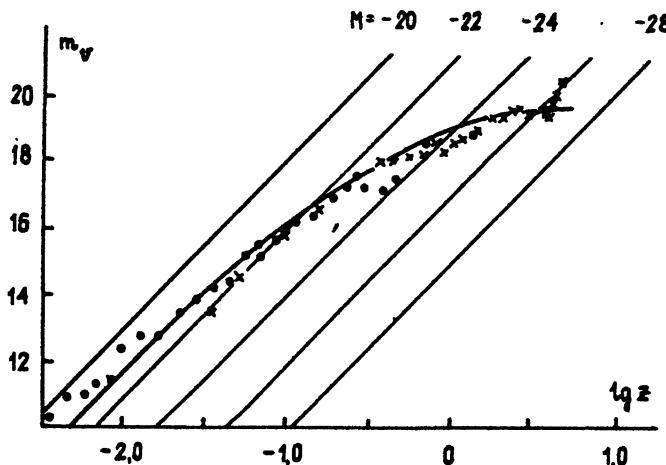


Рис. 2. Статистическая Хаббловская кривая для галактик и квазаров:
 ... - галактики, XXX - квазары. Сетка прямых - теоретические
 $m(z)$ кривые при разных значениях светимости.

В соответствии со сказанным для включения квазаров в $m(z)$ тест в работе Троицкого и Горбачевой (1989) [6] было осуществлено построение статистической $m(z)$ кривой по всем без исключения имеющимся $m(z)$ данным для 3500 квазаров и 160 галактик. В результате оказалось, что $m(z)$ зависимость для квазаров хорошо сопрягается с кривой для галактик, образуя единую статистическую зависимость. Затем в работе Троицкого и др. (1992) [7] использовался массив в 1100 галактик и 7000 данных измерений тех же 3500 квазаров, представленных в двух слегка различающихся каталогах, составленных разными авторами. Таким образом, получена единая статистическая $m(z)$ зависимость галактик и квазаров в широком интервале красных смещений $0 \leq z \leq 4,7$, приведенная на рис. 2. Как и в первой работе, она удовлетворительно описывается функцией

$$m(z) = 5\lg z - 8\lg(z + 1) + 21,5, \quad (2)$$

показанной на рисунке сплошной линией.

При построении статистической $m(z)$ кривой проведен расчет влияния селекции (эффект Малмквиста), связанный с увеличением доли измерений ярких объектов при увеличении z , что влияет на $m(z)$ зависимость так же, как и эволюция светимости. Эффект селекции оказался пренебрежимо мал даже для больших z . Наконец, для учета $K(z)$ -эффекта по имеющимся спектрам определялся спектральный индекс 300 квазаров в функции z .

Как видно из рис. 2, наблюдаемая $m(z)$ зависимость резко не согласуется с теоретической $m(z)$ зависимостью, изображенной на том же рисунке семейством прямых для неизменных значений абсолютной светимости. Это противоречие опыта с теорией вполне естественно объясняется эволюцией светимости, которая в приведенных теоретических кривых не учитывается.

Сопоставляя теоретическую и экспериментальную $m(z)$ кривые, можно найти функцию эволюции светимости, которой должны обладать галактики и квазары, чтобы наблюдаемая и теоретическая зависимости совпали. Естественно эту эволюцию надо считать гипотетической, предполагаемой или предсказываемой стандартной космологией для ее согласования с опытом. Таким образом, в результате наблюдений $m(z)$ и $\Theta(z)$ может быть замешана эволюция светимости и размеров галактик и квазаров, искашая искомое влияние свойств пространства - времени на эти зависимости.

В соответствии со сказанным до последнего времени господствовала идея поиска способов измерений, которые приводили бы к раздельному наблюдению (расцеплению) обеих зависимостей. Однако идей на этот счет до настоящего времени не появилось. Очевидно, что в сложившейся ситуации для подтверждения или опровержения теории, вообще говоря, нужно независимо от теории определить реально существующую эволюцию размеров l , и абсолютной светимости L и сравнить их с предсказаниями теории. Путей для этого не предложено, а, например, в отношении измерений l проблема стоит уже более 20 лет.

В настоящей работе предложены и используются способы, позволяющие, как нам кажется, решить проблему верификации теорий стандартной космологии. Дело в том, что в связи с определением $m(z)$ зависимости, включающей квазары, предоставляются новые возможности решения проблемы путем совместного использования обоих тестов. Применение этих методов приводит к определенным выводам о несоответствии с реальностью предсказаний стандартной космологии о том, что сильное увеличение светимости галактик и квазаров с ростом z сопровождается сильным уменьшением их размеров. Даётся также оценка истинной эволюции светимости и размеров галактик и квазаров.

2. Сравнение наблюдаемых $m(z)$ и $\theta(z)$ зависимостей с теоретическими

В качестве теоретической модели сравнения будем использовать далее пылевую модель при $q_0 = 1$ и $H_0 = 75$ км/с. Мпс. Выбор другой разумной модели не меняет сколько-нибудь существенно полученные ниже выводы.

На рис. 2 вместе с полученной нами статистической кривой нанесена сетка теоретических зависимостей принятой модели сравнения для разных значений абсолютной светимости M . Такое представление наглядно демонстрирует относительную эволюцию светимости. На рис. 1 приведена наблюдаемая статистическая $\theta(z)$ зависимость галактик и квазаров в сравнении с теоретическими для открытой ($q_0 = 0, 1$) и закрытой ($q_0 = 1$) Вселенной.

Как видно из рисунков, согласие с опытом можно получить, предполагая существование определенной эволюции светимости и размеров источников.

Для количественного определения этой гипотетической эволюции используем общие теоретические выражения $m(z)$ и $\theta(z)$ для принятой модели сравнения. Они равны

$$m(z) = 5 \lg z + M(z) + 43; \quad \theta(z) = \frac{1(z)}{cH_0^{-1}} \frac{(z+1)}{z}, \quad (3)$$

где $M(z) = -2,5 \lg(L(z) \cdot 10^{-2})$ - абсолютная звездная величина источника (галактики или квазара), $L(z)$ - спектральная светимость на волне наблюдения λ_0 , $l(z)$ - линейный размер источника, cH_0^{-1} - горизонт Вседенной. Сравнивая эти соотношения соответственно с (2), (1), получим, что для согласования теории стандартной космологии с опытом достаточно предположить существование следующей эволюции светимости и размеров галактик и квазаров в выражении через физические и звездные величины:

$$\begin{aligned} L(z) &= L_0(z+1)^{3,2}, \quad l(z) = l_0/(z+1)^2, \\ M(z) &= -8 \lg(z+1) - 21,5, \quad 10^{-3} \leq z \leq 4,7. \end{aligned} \quad (4)$$

Из этих данных определяется также предполагаемая функция эволюции поверхностной яркости $I(z) = L(z)/l^2(z) = I_0(z+1)^{7,2}$.

Для решения вопроса о верности или ошибочности стандартной космологии достаточно теперь подтвердить или опровергнуть эти предсказания, но для этого должны быть использованы независимые от теории измерения светимости $L(z)$ (или $M(z)$) и размеров объектов в функции от их красного смещения z . Но такие способы в настоящее время не развиты.

Предлагается другой путь сравнения предсказаний теории с опытом, а именно, искать, насколько соответствуют действительности не сами предсказываемые теорией функции $L(z)$ и $l(z)$ в отдельности, а их связь, которая гласит, что в процессе эволюции размер галактик и квазаров изменяется обратно пропорционально светимости. Математически функция связи $l \sim L$, предсказываемая стандартной космологией, определяется из (4), исключая z . В результате получаем статистическую связь, справедливую при любом $0 < z \leq 4,7$:

$$l \propto L^{-0,6}. \quad (5)$$

Для проверки соответствия этого предсказания опыту предлагается

использовать интенсивно изучаемую в настоящее время корреляцию I и L для галактик при заданном смещении z . При этом определение I и L , разумеется, неизбежно производится из измерений θ и m группы галактик при известном расстоянии до них, которое в настоящее время определяется либо из теории через z , либо непосредственно, однако последнее лишь для близких галактик. При этом должен рассматриваться ансамбль из n галактик, имеющих данные $m(z)$ и $\theta(z)$, красное смещение которых заключено в достаточно узком интервале $z = z_1 \pm \Delta z$, $i = 1, 2, \dots$. Для галактик этой выборки рассчитываются первичные параметры, например, по формулам (3), полагая для всех галактик $z = z_1$. Тогда получается ансамбль n первичных данных $\lg L_{ik} = -0,4m_{ik} + A_i$, $\lg I_{ik} = \lg \theta_{ik} + B_i$, где $A_i = 2\lg(R_0 z_i)$, $B_i = \lg[R_0 z_i(z_i + 1)^{-2}]$, $k = 1, \dots, n$ — постоянные для данной i -й выборки. Усредненное соотношение по индексу k и вычитая из неусредненных соотношений, получаем окончательные данные: $\lg L_{ik} - \bar{\lg L}_{ik} = -0,4(m_{ik} - \bar{m}_{ik})$, $\lg I_{ik} - \bar{\lg I}_{ik} = \lg \theta_{ik} - \bar{\lg \theta}_{ik}$. Откуда видно, что оба ансамбля данных не зависят от теории и определяются только прямыми измерениями m_k и θ_k . Далее, обычно графически, определяется коэффициент линейной регрессии обеих величин γ , в результате чего $I_i \propto L_i^{\gamma}$. Проводя такие измерения для разных z_i , можно установить зависимость коэффициента регрессии от z . Результаты такого исследования приводятся ниже.

3. Корреляция светимости и размеров галактик

Рассматриваемые связи параметров касаются в основном эллиптических галактик, причем в большинстве использованных работ приводятся таблицы данных I , L , I , z параметров, откуда нами находились соответствующие корреляции.

1. Полностью независимыми от какой-либо космологической теории являются результаты Соучека (1988) [8]. В этой работе исследовано 17 галактик в радиусе 4 МПС в интервале абсолютной светимости $14 \leq -M \leq 21$. В результате получается следующая связь параметров, выраженная в логарифмических и линейных величинах:

$$\lg I = -0,13(M + 14) + 3,2, \quad I \propto L^{0,33}, \quad I \propto 1.$$

2. В работе Смита и Хекмана (1989) [9] даны оптические

измерения распределения поверхностной яркости для 72 мощных радиогалактик в интервале $0,01 \leq z \leq 0,3$ и их величин θ и m в V диапазоне. По этим данным в работе приводятся рассчитанные по формулам стандартной космологии величины эффективного и изофотного размера l_μ по уровням поверхностной яркости $\mu = 22, 24$ и 25 звездных величин, а также светимости M_μ объекта внутри тех же изофот. Наиболее четко проявляется связь между M_μ и соответствующими изофотными размерами l_μ (КПС). В логарифмических и линейных размерах она равна в интервале $19 \leq -M \leq 24$

$$\lg l_\mu = -0,17(M_\mu + 19,5) + a_\mu, \quad I \propto L^{0,42}, \quad I \propto l^{0,35}.$$

Здесь $a_\mu \approx 1$.

3. Соотношение $I - L$ может быть найдено из известного закона Фабер - Джексона $L \propto \sigma^4$, устанавливающего связь светимости с дисперсией σ скоростей звезд в галактиках эллиптического типа при $z \leq 0,05$. Как известно, используя теоремы вириала и постоянство отношения массы галактик к светимости, а также соотношение $L = 11^2$, получается

$$I \propto L^{0,5}, \quad I = \text{const.}$$

4. Аналогичный результат получается при использовании закона Тулли - Фишера $L \propto U_{\max}^3$ для спиральных галактик, где U_{\max} - максимальная скорость вращения в галактике. Отсюда следует

$$I \propto L^{0,33}, \quad L \propto I.$$

5. В работе Рикаллас - Круц [10] и Серрано (1991) по данным для 378 эллиптических галактик, взятых из шести областей скоплений галактик (Кома, Абель, Персей, Геркулес), приводится общая статистическая зависимость эффективного радиуса и светимости, равная $\lg r_e = -0,2(M + 16) + \text{const}$ в интервале $16 \leq -M \leq 24$. Отсюда

$$r_{\text{эфф}} \propto L^{0,5}, \quad I = \text{const.}$$

6. Наконец, используя данные m, θ, z для шестнадцати эллиптических галактик с красным смещением $0,2 \leq z \leq 1,18$ при среднем $\langle z \rangle = 0,53$, которые приведены в работе Дьерговски и Спинрад (1981) [11] получена зависимость $\lg r_{\text{эфф}} = -0,16(M + 21) + 4,18$, где $r_{\text{эфф}}$ - эффективный радиус галактики. Отсюда

$$r_{\text{эфф}} \propto L^{0.4}, \quad I \propto r_1^{0.5}, \quad 21 \leq -M \leq 23.$$

Таким образом, все приведенные работы, в том числе два признанных эмпирических закона, показывают, что статистическая связь $L - I$ является практически одинаковой во всем диапазоне смещений $10^{-3} \leq z \leq 0,5$, причем рост светимости галактик сопровождается увеличением из размеров.

На основании полученных данных можно сделать вывод, что во всем характерном интервале красных смещений галактик наиболее вероятная статистическая закономерность корреляции первичных параметров галактик описывается функциями

$$l(z) \propto L^{0.43}(z), \quad I(z) \propto l^{0.32}(z), \quad 10^{-4} \leq z \leq 0,5 \quad (6)$$

при неопределенности показателей степени не более $\pm 20\%$. Сравнивая это соотношение с (5), мы должны сделать вывод, что предсказания стандартной космологии не соответствуют действительности; т. е. теория ошибочна.

Сравнение (6) с (5) и выводы отсюда могут показаться не вполне обоснованными в связи с тем, что, на первый взгляд, эти закономерности — реальная и предполагаемая — отражают разные физические процессы, и поэтому (6) не исключает (5), т. е. их сопоставление ничего не доказывает. Основанием для этого является то, что при выводе (6) определяется корреляция $I - L$ галактик, находящихся в сферическом слое толщиной Δz на заданном расстоянии z_1 , или иначе в заданный момент времени в прошлом, в то время как выражение (5) описывает связь параметров в процессе изменения z , т. е. по течению времени. Однако это лишь кажущееся расхождение. Напомним, что (6) описывает корреляцию $I - L$ галактик для ряда сферических слоев, перекрывающих расстояние $0 \leq z \leq 0,5$. При определении $I - L$ связи для галактик с большим $z \approx 0,5$ можно было ожидать некоторого изменения этой функциональной связи за счет более молодого космологического возраста или, иначе, вследствие эволюции, но оказалось, что $I - L$ связь как для малых, так и для больших z практически одинакова. Это говорит о действии закономерности (6), начиная с самого малого возраста галактик.

Таким образом, выражение (6) определяет корреляцию по течению времени, т. е. по z .

Итак, сопоставление (6) и (5) правомочно и приводит к выводу, что функции эволюции $l(z)$ и $L(z)$, требуемые стандартной космологией для согласования с опытом, не имеют места в действительности и, следовательно, оба теста не подтверждают эту теорию. Кроме того, факт независимости корреляции $l - L$ от z позволяет утверждать, что эволюция светимости и размеров галактик мала, если не отсутствует совсем.

4. Оценка реальной эволюции светимости и размеров галактик и квазаров

Полученное соотношение $l \propto L^{0,43}$, а также наблюдаемая зависимость $\theta(z) = \theta_0/z$ позволяют определить насколько реален вывод стандартной космологии, предписывающей сильную эволюцию светимости, равную $L = L_0(z + 1)^\beta$, где $\beta = 3, 2$. Подставляя это выражение в (6), получаем, что при этой эволюции светимости размер галактик и квазаров должен расти по закону $l(z) \propto (z + 1)^{0,43\beta}$. Однако такой рост размера приводит к выражению для видимого углового размера $\theta(z) = \theta_0(z + 1)^{0,43\beta}/z$, что при $\beta = 3, 2$ не согласуется с наблюдаемой $\theta(z)$ зависимостью. Полное соответствие наступает при $\beta = 0$, т.е. при отсутствии эволюции светимости. Однако, оставаясь в пределах ошибок, можно допустить аппроксимацию $\theta(z)$ функцией $\theta(z) = \theta_0 \sqrt{z + 1}/z$ вместо (1). Тогда должно быть $0,43\beta \leq 0,5$, откуда $\beta \leq 1$. При этом максимально допустимый рост светимости, например, при $z \sim 5$ должен быть почти на два порядка (на 4, 5 звездных величины) меньше, чем предсказывается в стандартной космологии.

Из приведенных выше данных можно заметить, что корреляция $l - L$ слегка зависит от абсолютной светимости рассматриваемой группы галактик. Это означает, что регрессия $l - L$ является нелинейной функцией M . Такая зависимость демонстрируется в работе Сэндиджа [12] и Перельматера 1991 примерно для 300 галактик скоплений при $z < 0,1$ в интервале светимости $13 \leq M \leq 25$. Кривая регрессии удовлетворительно представляется функцией $\lg(l/l_0) = a|M + 13| + b|M + 13|^2$, где $a = 0,09$, $b = 0,067$. В выражении через L эта зависимость равна $l/l_0 = (L/L_0)^\gamma$, где $\gamma = 0,23 + 0,042 \lg(L/L_0)$. Если кривую представить ломаной линией из трех линейных участков в

интервалах $M_1 = 15 + 2$, $M_2 = 19 + 2$, $M_3 = 23 + 2$, то в каждом интервале зависимости будут $l_1 \propto L^{0.32}$, $l_2 \propto L^{0.42}$, $l_3 \propto L^{0.55}$.

В связи с этим следует привести результат определения $l - L$ связи, которые получаются из исследования зависимости поверхностной яркости ярчайших галактик скоплений $z < 0,1$ $\mu(l, \sigma)$ от размера галактик и дисперсии σ скоростей звезд в них. В результате имеем $l \propto L^{0.9}$ (Хассель и др. 1987, [13]), $l \propto L^{0.76}$ (Дресслер и др. 1987, [14]), $l \propto L^{0.7}$ (Дьерговский и др. 1987, [15]), $l \propto L^{1.5}$ (Шнайдер и др. 1983, [16]), что подтверждает зависимость корреляции от абсолютной светимости. Условие совместности приведенных выше данных с наблюдением $\theta(z)$ требует $0,9\beta \leq 0,5$, откуда должно быть $\beta \leq 0,5$, т. е. эволюция светимости не может быть более $L = L_0(z + 1)^{0.5}$.

Полученный результат о слабой эволюции светимости галактик и квазаров подкрепляется приводимым ниже определением эволюции светимости другим независимым от космологической теории методом.

5. Спектр излучения квазаров и эволюция их светимости

Этот тест позволяет дать оценку эволюции светимости галактик и квазаров. Он основан на очевидном соображении, что эволюция светимости неизбежно должна отражаться на распределении энергии по спектру, иначе говоря, на форме спектра. Спектры же измеряются непосредственно, независимо от каких-либо космологических гипотез через измерение видимой светимости $E(z, \lambda) = L(z, \lambda)/R^2(z)(z + 1)^2$, где $R(z)$ — метрическое расстояние до источника. Однако сравнения спектров источников с разными z не могут служить для определения соотношения интенсивностей $L(z, \lambda)$ спектров, так как для этого требуется применение теории для определения фотометрического расстояния $R(z)(z + 1)$. Поэтому независимой от теории, непосредственно измеряемой характеристикой спектра является лишь его форма, определяемая, в частности, его спектральным индексом. Оказалось, что спектры квазаров хорошо аппроксимируются функцией $F(\lambda) = F(\lambda_0)(\lambda/\lambda_0)^\alpha$ во всем рабочем диапазоне волн $0,55 \leq \lambda \leq \lambda_0(z + 1)^{-1}$ в интервале смещений $0,03 \leq z \leq 4,7$. Эволюция светимости может осуществляться вследствие зависимости от z величины $F(\lambda_0)$ и α или, иначе говоря, как за счет одинакового общего изменения

спектральной плотности на всех волнах, так и вследствие изменения формы спектра. В работе Троицкого и др. (1992) [7] изучение около 300 спектров квазаров совершенно неожиданно показало, что их спектральный индекс α практически не зависит от z в широком интервале смещений $0,03 \leq z \leq 4,7$. На рис. 3, для примера, приведена зависимость спектрального индекса от z для 200 спектров квазаров из работы Монка (1988) [17] и Фолца (1989) [18]. Спектр галактик изучен на меньшем материале, но также обнаруживает практическую неизменность по крайней мере до $z \approx 0,5$. Аналогичное заключение делается в работе Лилли и Ганна (1985) [19].

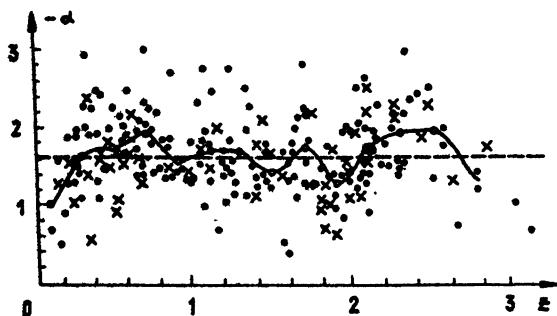


Рис. 3.

Зависимость спектрального индекса оптического спектра квазаров в интервале $0,1 \leq \lambda \leq 0,55$ микрон. Сплошная линия - усреднение в интервале $\Delta z = 0,2$; точки - по работе Фолца (1989), крестики - Монка (1988).

Из сказанного следует однозначное заключение, что рост светимости квазаров с увеличением z , предсказываемый стандартной космологией (5), может осуществляться лишь за счет строго одинакового роста спектральной плотности излучения на всех волнах оптического спектра источников. Этот рост при изменении z от 0,10 до 4,5 равен в среднем 100-кратному увеличению интенсивности. Такой характер эволюции светимости трудно объяснить иначе, как предположением о неизменности физической природы излучения галактик и квазаров в течение всего времени их существования. Эта картина эволюции представляется весьма искусственной и неизбежно вызывает сомнение в существовании сколько-нибудь значительной эволюции светимости галактик и квазаров.

6. Общая дискуссия и итоги

Время от времени появляются работы, доказывающие справедливость

гипотезы расширения Вселенной. В обстоятельной работе Сэндиджа и Перельмуттера (1991) [12] для этого используется сравнение измерений видимой поверхностной яркости галактик с предсказываемой стандартной космологией зависимостью $\mu(z) = -2,5 \lg[L(z)/l^2(z)] + 10 \lg(z + 1)$, где второй член обязан гипотезе расширения. Для определения наблюдаемой $\mu(z)$ используется 19 специально подобранных галактик с известными $m(z)$ и $\theta(z)$ в интервале смещений $0,05 \leq z \leq 0,59$, для которых, по расчетам из соотношений стандартной космологии, величины $l(z)$ и $L(z)$ практически постоянны. При этом должно быть $\mu(z) = \text{const} + 10 \lg(z + 1)$, что и наблюдается для выбранных галактик. Отсюда делается вывод о справедливости гипотезы расширения Вселенной. Однако такой вывод неправомерен, так как отбор галактик с независимыми от z , l и L делается на основании теории, истинность которой является в то же время предметом доказательства.

Из работы видно, что полученные оценки реальной эволюции светимости и размеров галактик и квазаров позволяют "очистить" от влияния эволюции экспериментальные данные $m(z)$ и $\theta(z)$. Однако полученные "чистые" зависимости ввиду малости эволюционных эффектов все равно сильно расходятся с теорией. Естественно возникает вопрос, за счет чего происходит это несогласие. Если не подвергать сомнению твердо установленные физикой законы, то остается одно заключение, что в действительности расширение Вселенной не имеет места, а красное смещение не является доплеровским. Этот вывод наглядно подтверждается тем, что в формулах стандартной космологии для видимого углового размера $\theta(z) = l(z)(z + 1)/R$ введение требуемой сильной эволюции $l \propto (z + 1)^{-2}$, спасающей теорию, состоит лишь в компенсации члена $(z + 1)$ в $\theta(z)$, который появляется в ней только благодаря гипотезе расширения. Вероятной статистической оценкой существующей эволюции основных параметров галактик и квазаров являются функции

$$L = L_0(z + 1)^{0,5}, \quad l = l_0(z + 1)^{0,2}, \quad I = I_0(z + 1)^{0,1}.$$

Заметим, что отказ от гипотезы разбегания галактик означает статичность Вселенной и исключает ее образование вследствие Большого взрыва из сингулярного состояния, но не отвергает существование горячей Вселенной в ее начальной фазе, а следовательно, и возможность существования реликтового фона и горячего синтеза тяжелых элементов.

По-видимому, наступила возможность и назрела необходимость разработки феноменологической космологии, опирающейся на три факта: красное смещение и его зависимость от расстояния, наблюдалася статистическая зависимость от красного смещения видимой светимости и углового размера в форме $E(z) \approx L(z)/R^2(z)$ и $\theta(z) = l(z)/R(z)$. При этом любые гипотезы о природе красного смещения должны согласовываться с этими данными. Скорее всего такие гипотезы могут быть связаны с эволюцией физических констант подобно, например, работе автора (1987) [20] и других авторов.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность Американскому Астрономическому обществу за моральную и финансовую поддержку настоящего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Legg T.H.//Nature. 1970. V.226. P. 65.
2. Sandage A.//Astrophys.J. 1972. V.173. P. 485.
3. Kapahi V.K.//Intern.Astron. Union Simpos. 1987. N 124. P.215.
4. Singal A.K.//Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1988.V.233.P.86.
5. Сандаге А. Наблюдательные основы космологии./Пер. Псковского Ю.П. и Шаломичного Г.Б. - М.: Мир, 1965. С. 46.
6. Троицкий В. С., Горбачева И. В.//Астрономический журнал. 1989. Т. 68. С. 470.
7. Троицкий В. С., Горбачева И. В., Сучкин Г. Л., Бондарь Л. Н.// Астрономический журнал. 1992. Т. 190. С. 9.
8. Sowcek J.//Astroph. Sp. Sc. 1988. V. 141. P. 103.
9. Smith E.P., Heckman T.M.//Astroph. J. Supp. Ser. 1989. V. 69. P. 365.
10. Recillas-Cvuz, Seirrano//Astroph. Sp.Sc. 1991. V.185. P. 1.
11. Dsorgovski S., Spinrad H.//Astroph.J. 1981. V. 251. P. 417.
12. Sandage A. Perelmutter J.//Astroph.J. 1991. V. 370. P. 455.
14. Dresler A., Faber S.M., Burstein D. at.all.//Astroph.J. 1987. V. 313. P. 37.
15. Dsorgovski S. Davis M//Astroph. J. 1987. V. 313. P. 59.
16. Schneider D.R. Gunn J.E. Hoessel J.G.//Astron.J. 1983.V.268. P.476.
17. Monk A.S., Penston M.K., Pettini M. at. all.//Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 1988. V. 234. P. 193.
18. Folz C.B. Chaffee F.M., Hewett P.C.//Astron. J. 1989.

V. 98. P. 1959.

19. Lilly S.J., Gunn J.E.//Mont. Not. Roy. Astron. Soc. 1985.
V. 217. P. 551.
20. Troitsky V.S.//Astroph. Sp. Sc. 1987. V. 139. P. 389.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
27 февраля 1992 года

УДК 538. 4:550. 385

О МАГНИТОЗВУКОВЫХ И АЛЬФЕНОВСКИХ ВОЛНАХ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ
РАЗЛЕТАЮЩИМСЯ ПЛАЗМЕННЫМ ОБЛАКОМ В ХОЛОДНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Л. П. Горбачев

В работе проводятся исследования закономерностей распространения альфеновских и магнитозвуковых волн в холодной замагниченной плазме на большие расстояния от расширяющегося плазменного облака, являющегося источником этих волн. Учитывается анизотропия диэлектрической проницаемости фоновой плазмы, приводящая к взаимодействию альфеновских и магнитозвуковых волн и их канализации вдоль внешнего магнитного поля.

В связи с проведением различных экспериментов как в космическом пространстве, так и в лабораторных условиях представляет интерес задача о возбуждении и распространении магнитозвуковых и альфеновских волн в плазме, находящейся в магнитном поле [1-7].

Рассматривается наиболее простой случай, когда пренебрегается тепловым движением частиц плазмы и их столкновениями. Электродинамические свойства такой среды характеризуются тензором диэлектрической проницаемости, имеющим вид в декартовых координатах [8] с осью Z , направленной вдоль внешнего магнитного поля \vec{B}_0 :

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\epsilon_{\perp} = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2} - \frac{\Omega_1^2}{\omega^2 - \omega_1^2},$$

$$g = \frac{\omega_e \Omega_e^2}{\omega(\omega^2 - \omega_e^2)} - \frac{\omega_i \Omega_i^2}{\omega(\omega^2 - \omega_i^2)},$$

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - (\Omega_e^2 + \Omega_i^2) / \omega^2.$$

Здесь Ω_i и Ω_e - плазменные частоты ионов и электронов, ω - частота волны, ω_i и ω_e - гироизометрические частоты ионов и электронов замагниченной плазмы.

В литературе, например [2, 3], как правило, исследуется предельный случай $\omega/\omega_i \rightarrow 0$, когда конечной остается лишь компонента тензора ϵ_{\perp} , характеризующая свойства плазмы в поперечной по отношению к магнитному полю направлении. В этом случае, если источником электромагнитных возмущений низкой частоты является разлетающийся плазменный сгусток, то возбуждается лишь магнитозвуковая волна. Однако если учесть конечное значение параметра ω/ω_i , то наряду с магнитозвуковой волной, возбуждается и альфвеновская. Характеристики этих волн и описываются в настоящей работе.

Рассматривая случай, когда параметр $\omega/\omega_i \ll 1$ и $\omega_i \ll \Omega_i \ll \Omega_e$, компоненты тензора диэлектрической проницаемости представим приближенно в виде

$$\epsilon_{\perp} \approx \frac{\Omega^2}{\omega_i^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right) \approx \frac{c^2}{v_a^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right), \quad (2)$$

$$g \approx \frac{c^2}{v_a^2} \frac{\omega}{\omega_i} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right), \quad \epsilon_{\parallel} \rightarrow -\infty,$$

где $v_a = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho}$ - альфвеновская скорость, B_0 - индукция внешнего магнитного поля, ρ - плотность ионов плазмы, μ_0 - магнитная постоянная.

Полагая зависимость компонент электромагнитного поля от времени гармонической ($e^{-i\omega t}$), из уравнений Максвелла получаем для напряженности электрического поля \tilde{E} гармоник

$$[\nabla[\tilde{v}\tilde{E}]] = (\omega^2/c^2)\hat{\epsilon}\tilde{E}. \quad (3)$$

Используя (2), уравнение (3) запишем в цилиндрических координатах (ρ, ϕ, z)

$$-\frac{\partial^2 \tilde{E}_\rho}{\partial z^2} = \frac{\omega^2}{v_a^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right) \tilde{E}_\rho + \frac{i\omega^3}{\omega_1 v_a} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right) \tilde{E}_\varphi, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial^2 \tilde{E}_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tilde{E}_\varphi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{E}_\varphi}{\partial \rho} + \frac{\tilde{E}_\varphi}{\rho^2} = -\frac{i\omega^3}{\omega_1 v_a^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right) \tilde{E}_\rho + \frac{\omega^2}{v_a^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right) \tilde{E}_\varphi. \quad (5)$$

В предельном случае $\omega/\omega_1 \rightarrow 0$ (нулевое приближение) система уравнений (4), (5) "развязывается" и каждое из уравнений может быть использовано для описания альфеновской (4) и магнитозвуковой (5) волн. Заметим, что распространение этих волн происходит без дисперсии с альфеновской скоростью.

При разлете плазменного облака в магнитном поле возникает токовая система, возбуждающая магнитозвуковые волны. Рассматривая магнитозвуковые возмущения на расстояниях, существенно превышающих размеры плазменного облака, кольцевую токовую систему будем характеризовать магнитным дипольным моментом $\vec{M}(t)$, расположенным в начале координат.

Решая уравнение (5) для точечного источника с заданным дипольным моментом $\vec{M}(t)$ в нулевом приближении получим [2]

$$E_\varphi = -\frac{\mu_0 \rho}{4\pi r^3} \left[M'_z \left(t - \frac{r}{v_a} \right) + \frac{r}{v_a} M''_z \left(t - \frac{r}{v_a} \right) \right], \quad (6)$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $M_z(t)$ - проекция магнитного момента на ось Z.

Используя (6), из уравнения индукции магнитного поля находим компоненты магнитного поля в сферических координатах [2]

$$B_r = \frac{\mu_0 \cos\theta}{2\pi r^3} \left[M_z \left(t - \frac{r}{v_a} \right) + \frac{r}{v_a} M'_z \left(t - \frac{r}{v_a} \right) \right], \quad (7)$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 \sin\theta}{2\pi r^3} \left[M_z \left(t - \frac{r}{v_a} \right) + \frac{r}{v_a} M'_z \left(t - \frac{r}{v_a} \right) + \frac{r^2}{v_a^2} M''_z \left(t - \frac{r}{v_a} \right) \right], \quad (8)$$

где угол θ отсчитывается от оси Z.

В полученных выражениях штрихи означают производные по аргументу $t - r/v_a$. В нулевом приближении источники, характеризуемые системой кольцевых токов, не возбуждают альфеновскую волну. Однако,

как было отмечено в работе [1], в случае, когда параметр ω/ω_1 является малым, остается конечной величиной, быстрая магнитозвуковая волна, возбуждаемая источником и распространяющаяся в плазме, в свою очередь порождает альфеновскую волну.

С целью поиска решения для альфеновской волны воспользуемся уравнением (4), записывая его в первом приближении (по параметру ω/ω_1)

$$-\frac{\partial^2 \tilde{E}_\rho}{\partial z^2} = \frac{\omega^2}{v_a^2} \tilde{E}_\rho + \frac{i\omega^3}{\omega_1 v_a^2} \tilde{E}_\phi$$

и совершая обратное преобразование, имеем

$$\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} - \frac{1}{v_a^2} \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{\omega_1 v_a^2} \frac{\partial^3 E_\phi}{\partial t^3}. \quad (9)$$

Подставляя в (9) вместо E_ϕ выражение (6), получаем

$$\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} - \frac{1}{v_a^2} \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 \rho}{4\pi\omega_1 v_a^2 r^3} \left[M_z^{IV} \left(t - \frac{r}{v_a} \right) + \frac{r}{v_a} M_z^V \left(t - \frac{r}{v_a} \right) \right]. \quad (10)$$

Не представляет труда найти решение уравнения (10), если учесть, что альфеновская волна распространяется без дисперсии вдоль оси Z , сохраняя при этом величину амплитуды

$$E_\rho = -\frac{\mu_0}{4\pi\omega_1 v_a \rho} M_z''' \left(t - \frac{r}{v_a} \right). \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение $\partial E_\rho / \partial z = -\partial E_\phi / \partial t$ и интегрируя, находим компоненту магнитного поля

$$B_\phi = -\frac{\mu_0 Z}{4\pi\omega_1 v_a^2 r} M_z'' \left(t - \frac{r}{v_a} \right). \quad (12)$$

Полученное решение (11), (12) описывает распространение альфеновской волны в неограниченной однородной плазме (вдоль оси Z как в положительном, так и отрицательном направлениях). Источником альфеновской волны является магнитозвуковая, возникающая при разлете плазменного облака в холодной замагниченной плазме.

Перейдем к определению в первом приближении решения для магнитозвуковой волны. С этой целью воспользуемся уравнением (5), записывая его в первом приближении

$$-\frac{\partial^2 \tilde{E}_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tilde{E}_\varphi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{E}_\varphi}{\partial \rho} + \frac{\tilde{E}_\varphi}{\rho^2} = -\frac{i\omega^3}{\omega_1 v_a^2} \tilde{E}_\rho + \frac{\omega^2}{v_a^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \tilde{E}_\varphi$$

и совершая обратное преобразование, получаем

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{E_\varphi}{\rho^2} - \frac{1}{v_a^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\omega_1 v_a^2} \frac{\partial^3 E_\rho}{\partial t^3} - \frac{1}{\omega_1^2 v_a^2} \frac{\partial^4 E_\varphi}{\partial t^4}. \quad (13)$$

Подставляя в первую часть уравнения (13) вместо E_φ выражение (6) в нулевом приближении и вместо E_ρ выражение (11) в первом приближении, имеем

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{E_\varphi}{\rho^2} - \frac{1}{v_a^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2} = \quad (14)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi\omega_1^2 v_a^3 \rho} M_z^{VI} \left(t - \frac{r}{v_a}\right) + \frac{\mu_0 \rho}{4\pi\omega_1^2 v_a^3 r^3} \left[M_z^Y \left(t - \frac{r}{v_a}\right) + \frac{r}{v_a} M_z^{VI} \left(t - \frac{r}{v_a}\right)\right].$$

Найдем сначала частное решение неоднородного уравнения (14). С этой целью перейдем к сферическим координатам (r, φ, θ):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial E_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial E_\varphi}{\partial \theta}\right) - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{1}{v_a^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2} = (15)$$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi\omega_1^2 v_a^3 r \sin \theta} M_z^{VI} \left(t - \frac{r}{v_a}\right) + \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi\omega_1^2 v_a^2 r^2} \left[M_z^Y \left(t - \frac{r}{v_a}\right) + \frac{r}{v_a} M_z^{VI} \left(t - \frac{r}{v_a}\right)\right].$$

Учитывая линейность уравнения (15), прежде всего получим его решение лишь с первым членом правой части (15), который обратно пропорционален $\sin \theta$. Поэтому ищем решение в виде

$$E_{\varphi 1} = \frac{1}{\sin \theta} f \left(t - \frac{r}{v_a}\right) \quad (16)$$

(следует иметь в виду, что в выражении для E_φ в нулевом приближении (6) содержатся члены обратно пропорциональные r^2 и r , поэтому в следующем приближении амплитуда волны уже не зависит от координаты r).

Подставляя в (15) вместо E_φ зависимость (16), находим функцию

$$E_{\varphi 1} = \frac{\mu_0}{4\pi\omega_1^2 v_a^3 \sin \theta} M_z^Y \left(t - \frac{r}{v_a}\right). \quad (17)$$

Аналогичным образом находим частное решение уравнения (15) со вторым членом правой части уравнения

$$E_{\varphi 2} = - \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi \omega_1^2 v_a^2} M_z^Y \left(t - \frac{r}{v_a} \right). \quad (18)$$

Таким образом, складывая выражения (6), (17) и (18), получаем решение для компоненты E_φ в первых двух приближениях

$$E_\varphi = - \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r^2} \left[M_z' \left(t - \frac{r}{v_a} \right) + \frac{r}{v_a} M_z'' \left(t - \frac{r}{v_a} \right) \right] + \\ + \frac{\mu_0 \cos^2 \theta}{8\pi \omega_1^2 v_a^3 \sin \theta} M_z^Y \left(t - \frac{r}{v_a} \right). \quad (19)$$

Используя полученное решение (19), находим компоненты магнитного поля

$$B_r = \frac{\mu_0 \cos \theta}{4\pi r^3} \left[M_z \left(t - \frac{r}{v_a} \right) + \frac{r}{v_a} M_z' \left(t - \frac{r}{v_a} \right) \right] + \frac{\mu_0 \cos \theta}{4\pi \omega_1^2 v_a^3 r} M_z^{IY} \left(t - \frac{r}{v_a} \right), \quad (20)$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r^3} \left[M_z \left(t - \frac{r}{v_a} \right) + \frac{r}{v_a} M_z' \left(t - \frac{r}{v_a} \right) + \frac{r^2}{v_a^2} M_z'' \left(t - \frac{r}{v_a} \right) \right] + \\ + \frac{\mu_0 \cos^2 \theta}{8\pi \omega_1^2 v_a^3 \sin \theta r} \left[M_z^{IY} \left(t - \frac{r}{v_a} \right) - \frac{r}{v_a} M_z^Y \left(t - \frac{r}{v_a} \right) \right]. \quad (21)$$

Независимо от вида функции, определяющей магнитный момент источника, можно сделать некоторые выводы из полученного решения. На предельно больших расстояниях от источника, когда электромагнитное поле магнитозвуковой волны в нулевом приближении (6)–(8) исчезает, конечными остаются параметры альфвеновской и магнитозвуковой волн, распространяющихся в отсутствие диссипации в плазме под небольшими углами θ к направлению внешнего магнитного поля, описываемых решением в первом приближении (11), (12) и (19)–(21).

Такое решение можно трактовать следующим образом.

Возникающая вблизи источника магнитозвуковая волна вследствие гиротропных свойств плазмы порождает альфвеновскую волну, которая, распространяясь без ослабления вдоль внешнего магнитного поля, в свою очередь возбуждает магнитозвуковую.

Таким образом, отмеченный эффект может играть существенную роль, если рассматривать значительные расстояния от источника. При этом форма альфеновской и магнитозвуковой волн может быть различной в зависимости от свойств источника. В качестве примера импользуем модель источника работы [6] в двух вариантах:

$$M_z(t) = -\frac{2E}{3B_0} \exp\left(-\frac{\sigma_0 B_0^2}{m} t\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma_0 B_0^2}{m} t\right)\right], \quad (22)$$

где E – энергия разлетающейся плазмы, m – масса плазменного сгустка.

В рассматриваемом варианте полагается, что при разлете плазмы проводимость σ снижается обратно пропорционально объему $V(t)$ плазменного облака. В случае постоянной проводимости

$$M_z(t) = -\frac{4\pi\sigma B_0}{15} \left(\frac{10E}{3m}\right)^{5/2} t \Psi^3 \frac{d\Psi}{dt}, \quad (23)$$

$$\Psi(t) = \int_0^t dt \exp\left[-\pi\left(\frac{10E}{m}\right)^{3/4} \left(\frac{\sigma B_0^2}{6m}\right)^{1/2} t^2\right].$$

На рис. 1 и 2 представлены зависимости магнитного момента от времени для двух рассматриваемых случаев.

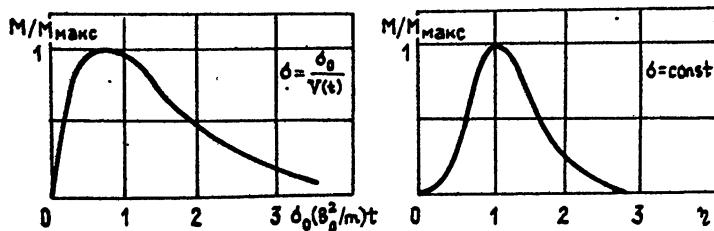


Рис. 1,2.

Подставляя в (11) и (12) выражение для магнитного момента в первом варианте (22), получим зависимость компонент электромагнитного поля альфеновской волны от координат и времени.

На рис. 3 представлена зависимость безразмерных радиальной компоненты электрического поля .

$$e_{\rho} = \frac{E_{\rho}}{\frac{\mu_0 E}{6\pi B_0 \omega_i v_a \rho} \left(\frac{\sigma_0 B_0^2}{m}\right)^3}$$

и тангенциальной компоненты индукции магнитного поля

$$b_\varphi = \frac{B_\varphi}{\frac{\mu_0 E z}{6\pi B_0 \omega_1 v_a^2 \rho r} \left(\frac{\sigma_0 B_0^2}{m} \right)^3}$$

от параметра $\frac{\sigma_0 B_0^2}{m} \left(t - \frac{r}{v_a} \right)$.

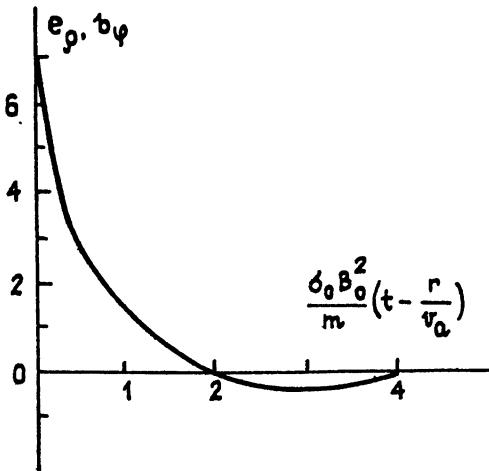


Рис. 3.

Аналогичные результаты можно получить и для варианта постоянной проводимости σ разлетающейся плазмы. В этом случае необходимо использовать выражение для магнитного момента (23).

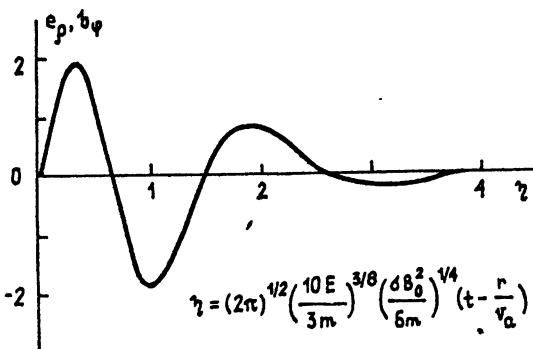


Рис. 4.

На рис. 4 представлена зависимость компонент электромагнитного поля

$$e_\rho = \frac{E_\rho}{\frac{\mu_0 \sigma B_0}{15 \omega_1 v_a \rho} \left(\frac{6m}{\sigma B_0^2} \right)^{1/4} \left(\frac{10E}{3m} \right)^{17/8}}$$

и

$$b_\varphi = \frac{B_\varphi}{\frac{\mu_0 \sigma B_0}{15 \omega_1 v_a^2 \rho r} \left(\frac{6m}{\sigma B_0^2} \right)^{1/4} \left(\frac{10E}{3m} \right)^{17/8}}$$

от параметра

$$\eta = \sqrt{2\pi} \left(\frac{10E}{3m} \right)^{3/8} \left(\frac{\sigma B_0^2}{6m} \right)^{1/4} \left(t - \frac{r}{v_a} \right).$$

Сравнивая кривые на рис. 3, 4, замечаем, что форма возбуждаемого сигнала альфвеновских волн существенно определяется зависимостью от времени дипольного магнитного момента источника. Аналогичные результаты получаются и для магнитозвуковой волны.

В заключение подчеркнем основной вывод работы: при распространении альфвеновских и магнитозвуковых волн в плазме (например, в магнитосфере Земли) на большие расстояния от источника их возникновения из-за гиротропных свойств плазмы в магнитном поле необходимо учитывать взаимодействие этих волн, которые приводят к канализации волн вдоль внешнего магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lutomirski R.F. //J.Geophys. Res. 1968. V. 73. N 15. P. 4943.
2. Горбачев Л. П., Савченко Ю. Н. //Геомагнетизм и аэрономия. 1971. Т. 11. С. 898.
3. Метелкин Е. В., Сорокин В. М. //Геомагнетизм и аэрономия. 1988. Т. 28. С. 756.
4. Антонов В. М., Башурин В. П., Голебев А. И. и др. Физика космической и лабораторной плазмы/Под ред. А. Г. Пономаренко. - Новосибирск, 1989. С. 4.
5. Голубев А. И., Соловьев А. А., Терехин В. А. //ПМТФ. 1978. N 25. С. 33.
6. Горбачев Л. П. //Магнитная гидродинамика. 1984. N 4. С. 81.
7. Горбачев Л. П., Семенова Т. А. //Материалы VIII Всесоюзной конференции. -Минск, 1991. Ч. 1. С. 165.

8. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. -М.: Наука, 1979. С. 265.

Московский инженерно-физический
институт

Поступила в редакцию
27 февраля 1992 г.

ON MAGNETOSONIC AND ALFVEN WAVES
GENERATED BY PLASMA CLOUD EXPANDING INTO COLD
MAGNETIZED PLASMA

L. P. Gorbachev

Main purpose of the article is to explore Alfen and magnetosonic waves propagation in cold gyrotropic magnetized plasma. For small but finite parameter ω/ω_i of external plasma dielectric tensor (where ω_i , ω are ion gyro- and wave frequencies) the interaction between Alfen and magnetosonic waves is occurred. The interaction causes the waves to propagate along magnetic line at large distances from extending plasma cloud.

УДК 519.217

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В ОСЦИЛЛЯТОРЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ТРЕНИЕМ.
АНОМАЛЬНЫЙ РЕЖИМ**

Р. Л. Стратонович, А. А. Рузмайкин, О. А. Чичигина

Найдено условие существования динамического хаоса в осцилляторе Неймарка в аномальном режиме его работы. Исследованы простейшие случаи, когда имеет место марковское отображение. Разработан метод расчета корреляционной функции хаотического процесса в марковском случае. Рассмотрены примеры корреляционной функции.

1. Введение

Неймарк в работе [1] (см. также [2]) предложил пример сравнительно простой системы, в которой возможен динамический хаос, - это осциллятор с отрицательным трением и регулированием импульса, приводящим к преобразованию $\dot{x} \rightarrow \dot{x} - h$, $h > 0$ при $x = 0$, $\dot{x} \geq a > 0$. Эта система удобна тем, что ее легко реализовать радиотехническими средствами и что хаотический процесс в ней поддается теоретическому анализу. В работах [3, 4] найдено стационарное распределение вероятности для указанного процесса в нормальном режиме. Нормальным режимом работы мы называем режим, при котором преобразование $\dot{x} \rightarrow \dot{x} - h$ не может изменить знак у скорости \dot{x} . В настоящей работе для аномального режима, когда $h > a$, указаны простейшие случаи марковских отображений, изложен метод расчета корреляционной функции для марковского случая, приведены примеры корреляционной функции.

Уравнение движения рассматриваемой системы в отсутствие регулирования удобно записать в виде

$$\ddot{x} - 2\delta\dot{x} + (1 + \delta^2)x = 0 \text{ при } \delta > 0. \quad (1)$$

Благодаря отрицательному трению амплитуда колебаний экспоненциально увеличивается. Чтобы траектория не уходила в бесконечность, в момент времени, когда скорость \dot{x} достигает определенной величины $a > 0$ и превосходит ее при $x = 0$ маятник испытывает удар, уменьшающий скорость на h .

В целом движение системы можно описать уравнением

$$\ddot{x} - 2\delta\dot{x} + (1 - \delta^2)x = -h[\vartheta(\dot{x} - a)]_{-\varepsilon}\dot{x}\delta(x),$$

где $\vartheta(z) = (1 - \operatorname{sgn}z)/2$, $[f(t)]_{-\varepsilon} = f(t - \varepsilon)$ обозначает запаздывание по времени на весьма малую величину $\varepsilon > 0$. В фазовом пространстве движение изображается раскрывающейся спиралью со скачками вниз (рис. 1). Здесь обозначено $\dot{x} = y$.

Решение уравнения (1) можно записать в виде

$$x = A \sin \Phi, \quad (2)$$

$$\dot{x} = A\delta \sin \Phi + A \cos \Phi,$$

$$\text{где } A = A_0 \exp(\delta t), \quad \Phi = \Phi_0 + t.$$

Отсюда следует, что амплитуда колебаний A увеличивается за период в $\gamma = \exp(2\pi\delta) > 1$ раз.

Поскольку значение $\dot{x} - h$ после удара может оказаться меньше нуля, необходимо, сводя процесс к точечному отображению, рассматривать отображение на некотором отрезке, включающем также отрицательные значения \dot{x} , а не на отрезке, лежащем только в области положительной полупрямой, как это делалось ранее в случае нормального режима.

Преобразование за полпериода колебаний запишется в виде следующего рекуррентного соотношения (рис. 2)

$$y_{i+1} = -\gamma^{1/2}y_i - h\vartheta(-\gamma^{-1/2}y_i - a). \quad (3)$$

Точку $y = -\gamma^{1/2}a$ можно назвать нижним краем, а точку $y = a$ — верхним. Точка $y = -\gamma^{-1/2}a$ (назовем ее точкой ветвления) отображается

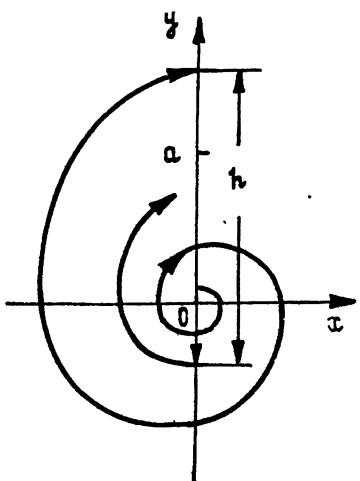


Рис. 1.

в верхний край и в точку $y = h - a$. Все точки отрезки $[-\gamma^{-1/2}a, a]$ отображаются по закону $y_{i+1} = -\gamma^{1/2}y_i$, а точка отрезка $[-\gamma^{1/2}a, -\gamma^{-1/2}a]$ — по закону $y_{i+1} = -\gamma^{1/2}y_i - h$.

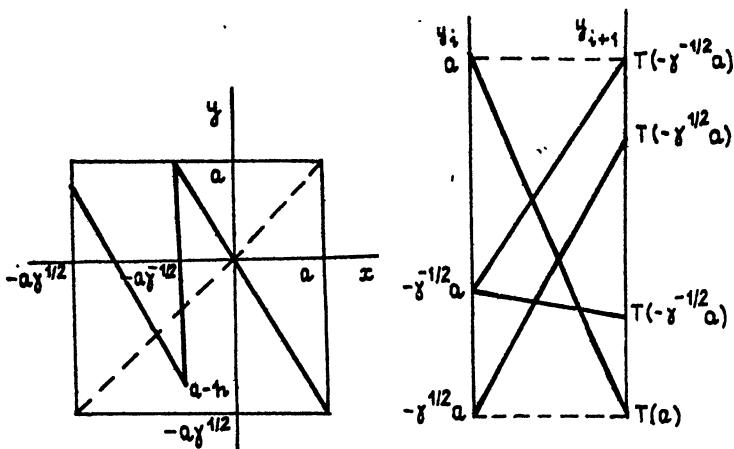


Рис. 2,3.

Чтобы движение не выходило за пределы отрезка $[-\gamma^{1/2}a, a]$ необходимо, чтобы все точки отрезка $[-\gamma^{1/2}a, -\gamma^{-1/2}a]$ отображались не выше верхнего края. На рис. 1, 2 видно, что из последнего отрезка за полпериода в самую верхнюю точку отобразится нижний край, поэтому необходимым условием отсутствия ухода в бесконечность будет переход нижнего края в точку, лежащую не выше верхнего края. Подставляя $y_1 = -\gamma^{-1/2}a$ в (3), видим, что неравенство $y_{i+1} \leq a$ дает

$$h/a \geq \gamma - 1. \quad (4)$$

Кроме того, необходимо, чтобы все точки отрезка $[-\gamma^{1/2}a, -\gamma^{-1/2}a]$ отображались за полпериода в точки, лежащие не ниже нижнего края. Как видно из рис. 2, это условие выполнено, когда $a - h \geq -a\gamma^{1/2}$, т. е.

$$h/a \leq 1 - \gamma^{1/2}. \quad (5)$$

Неравенства (4), (5) и условия $\gamma > 1$ ограничивают на плоскости параметров $\gamma, h/a$ область ABC (рис. 4) значений параметров при которых существует хаотическое движение (динамический хаос) с притягивающим

множеством $[-\gamma^{1/2}a, a]$. Линия CB , описываемая уравнение $h/a = 1 + \gamma^{1/2}$, соответствует случаям, когда точка ветвления за один такт переходит в нижний край, кроме того, она всегда переходит в верхний край. Линия AB ($h/a = 1 - \gamma$) соответствует случаям, когда нижний край переходит в верхний. Линия AC соответствует $\gamma = 1$, то есть случаю, когда нет отрицательного трения и динамического хаоса.

2. Точки марковости на плоскости параметров $\gamma, h/a$

Преобразование (3) для краткости удобно обозначить через T , т. е. $y_{i+1} = T(y_i)$. Тогда $y^m = T^k(y_{m-k}) = T^m(y_0)$.

Динамический процесс, описываемый отображением (3) особенно удобно анализировать, когда это отображение является марковским, то есть когда полный отрезок $[-\gamma^{1/2}a, a]$ можно разбить на некоторое число N элементарных отрезков, каждый из которых при преобразовании переходит в один или несколько из этих отрезков.

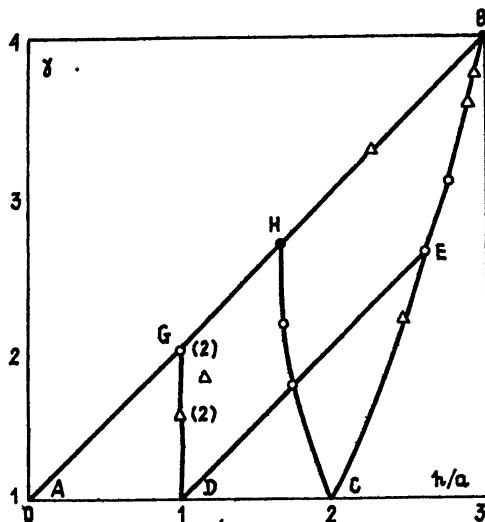


Рис. 4.

На рис. 3 показано, куда переходят за один такт края отрезка $[-\gamma^{1/2}a, a]$ и точка ветвления $-\gamma^{-1/2}a$. Видим, что при этом переходе, вообще говоря, образуются две новые точки $T(-\gamma^{-1/2}a)$, $T(-\gamma^{1/2}a)$. За один следующий такт, вообще говоря, появятся еще две новые точки

$T^2(-\gamma^{-1/2}a)$ и $T^2(-\gamma^{1/2}a)$ и т. д.

Если, начиная с некоторого n -го шага, новые точки будут попадать в старые, мы будем иметь марковское отображение n -го порядка.

На плоскости параметров $\gamma, h/a$ (рис. 4) показаны марковские точки нескольких низших порядков с небольшим числом N отрезков. Точки, помеченные маркером \circ , соответствуют двухотрезочному случаю $N = 2$, маркер \circ помечает точки с $N = 3$, маркер \wedge - точки с $N = 4$. Других марковских точек с $N \leq 4$ нет. Для области нормального режима в скобках число отрезков для отображения за период.

Эти точки лежат на линиях, среди которых видим три новых линии GD , IC , DE . Линия GD , описываемая уравнением $h/a = 1$, соответствует случаям, когда точка ветвления помимо верхнего края переходит в нуль. Она разграничивает области нормального и аномального режима. Линия IC ($h/a = \gamma^{-1/2} + 1$) соответствует случаям, когда точка ветвления переходит в себя. Линия DE ($h/a = \gamma$) описывает случаи, когда нижний край отображается в нуль.

Можно доказать, что точки марковости лежат всюду плотно в области ABC .

3. Расчет корреляционной функции в случае марковских отображений и разбиений

Точечное отображение называется марковским, если возможно марковское разбиение, то есть, если некоторый отрезок (в многомерном случае область), включающий в себя отрезок - носитель стационарной плотности вероятности, можно разбить на конечное число базовых отрезков (областей), каждый из которых линейно отображается на один или несколько базовых отрезков. Обозначим указанные базовые отрезки так: I_1, I_2, \dots, I_N . Внутри каждого отрезка I_α имеет место линейное отображение

$$y_n = s_\alpha y_{n-1} + c_\alpha \quad \text{при } y_{n-1} \in I_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (6)$$

которое отображает его на сумму (объединение) нескольких отрезков

$$I_\alpha \rightarrow \sum_{\gamma=1}^{N_\alpha} I_{\alpha\gamma}.$$

Для каждого значения α имеется свой непустой набор $m_{\alpha 1}, \dots,$

$m_{\alpha n}$ номеров отрезков ($m_{\alpha 1} = m_{\alpha 1} + i - 1$), в которые переходит I_α . Введя матрицу $D = \|d_{\alpha\beta}\|$, элементы $d_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \delta_{\beta m_{\alpha\gamma}}$ которой равны нулю или единице, последнюю формулу можно записать

$$I_\alpha \rightarrow \sum_{\beta=1}^N d_{\alpha\beta} I_\beta.$$

Благодаря (6) длина $|I_\alpha|$ отрезка I_α увеличивается в $|s_\alpha|$ раз и становится равной длине $|\sum_{\beta} d_{\alpha\beta} I_\beta|$ суммарного отрезка, стоящего в правой части формулы (7). Поэтому

$$|s_\alpha| |I_\alpha| = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} |I_\beta|.$$

Чтобы существовало нетривиальное решение этих уравнений, должно выполняться условие

$$\det \|d_{\alpha\beta} - |s_\alpha| \delta_{\alpha\beta}\| = 0. \quad (8)$$

В случае динамического хаоса корреляционную функцию можно определить интегралом усреднения, где в качестве весовой функции берется единовременная стационарная плотность вероятности:

$$R[k] = \int y_1 y_{1+k} (y_1) v_0(y_1) dy_1 - \langle y \rangle^2, \quad (9)$$

где $\langle y \rangle = \int y_1 v_0(y_1) dy_1$ – стационарное среднее значение, $k \geq 0$, 1 – любое. Рассчитывать корреляционную функцию напрямую при помощи (9) при больших k неудобно ввиду сложной зависимости $y_{1+k}(y_1)$. Целесообразно использовать рекуррентный метод, излагаемый ниже. Введем интегралы

$$U_\alpha[k] = \int_{I_\alpha} y_{n-k} y_n (y_{n-k}) dy_{n-k}, \quad (10)$$

$$v_\alpha[k] = \int_{I_\alpha} y_n (y_{n-k}) dy_{n-k}.$$

Чтобы получить рекуррентное соотношение, произведем в интеграле

$$U_\alpha[k+1] = \int_{I_\alpha} y_{n-k-1} y_n (y_{n-k-1}) dy_{n-k-1}$$

замену переменной, учитывая, что

$$y_{n-k-1} = (y_{n-k} - c_\alpha) / s_\alpha \text{ при } y_{n-k-1} \in I_\alpha$$

в силу (6). Взяв y_{n-k} в качестве новой переменной интегрирования и учитывая (7), получаем

$$U_\alpha[k+1] = s_\alpha^{-1} |s_\alpha|^{-1} \int_{\sum d_{\alpha\beta}^{-1} \beta} (y_{n-k} - c_\alpha) y_n dy_{n-k} \quad (11)$$

или

$$U_\alpha[k+1] = s_\alpha^{-1} |s_\alpha|^{-1} \sum_{\beta=1}^N d_{\alpha\beta} \{U_\beta[k] - c_\alpha v_\alpha[k]\}.$$

Аналогично находим

$$v_\alpha[k+1] = |s_\alpha|^{-1} \sum_{\beta=1}^N d_{\alpha\beta} U_\beta[k]. \quad (12)$$

Вводя обозначения $[a_\alpha, b_\alpha] = I_\alpha$, нетрудно найти начальные условия для указанных рекуррентных соотношений:

$$U_\alpha[0] = \int_{I_\alpha} y_n^2 dy_n = \frac{1}{3} [b_\alpha^3 - a_\alpha^3], \quad v_\alpha[0] = \int_{I_\alpha} y_n dy_n = \frac{1}{2} (b_\alpha^2 - a_\alpha^2). \quad (13)$$

Используя (11)–(13), можно найти $U_\alpha[k]$, $v_\alpha[k]$ при различных k на компьютере или аналитически. После этого находится корреляционная функция. Дело в том, что в рассматриваемом марковском случае стационарная плотность вероятности $v_0(y)$ является кусочно-постоянной

$$v_0(y) = \begin{cases} v_1 & \text{при } y \in I_1 \\ \dots & \dots \\ v_n & \text{при } y \in I_n \end{cases} \quad (14)$$

причем значения v_α без труда определяются при помощи уравнений

$$v_\beta = \sum_{\alpha=1}^N \frac{v_\alpha}{|s_\alpha|} d_{\alpha\beta}, \quad (15)$$

а также условия нормировки

$$\sum_{\alpha=1}^N v_\alpha (b_\alpha - a_\alpha) = 1 \quad (16)$$

(уравнений (15) недостаточно, так как $\text{def} \|s_\alpha\|^{-1} d_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\| = 0$ в силу (8)). Из (9) вследствие (10), (14) получаем

$$R[k] = \sum_{\alpha=1}^N v_\alpha U_\alpha[k] - \left\{ \sum_{\alpha=1}^N v_\alpha v_\alpha[0] \right\}^2 = M[k] - \langle y \rangle^2. \quad (17)$$

В случае преобразования (3), когда все s_α равны $-\gamma^{1/2}$ (обозначим $\beta = \gamma^{1/2}$), и когда $C_\alpha = 0$, для отрезков выше точки ветвления, можно вычислять корреляционную функцию, избегая расчета величин $U_\alpha[k]$. В самом деле, согласно (11) имеем

$$M[k+1] = \sum_{\alpha} v_\alpha U_\alpha[k+1] = -\beta^{-2} \sum_{\alpha_1} v_\alpha d_{\alpha_1} \{U_1[k] - C_\alpha v_1[k]\}.$$

Учитывая, что $\beta^{-1} \sum_{\alpha} v_\alpha d_{\alpha_1} = v_1$ вследствие (15), отсюда получим

$$M[k+1] = -\beta^{-1} M[k] + \beta^{-1} \sum_{\alpha_1} v_\alpha C_\alpha d_{\alpha_1} v_1[k]$$

или, если учесть (12),

$$M[k+1] = -\beta^{-1} \{M[k] + h \sum' v_\alpha v_\alpha[k+1]\}. \quad (18)$$

Здесь сумма Σ' содержит только те члены, которые соответствуют отрезкам I_α лежащим ниже точки $-\alpha\gamma^{-1/2}$.

Уравнение (18), (12) следует использовать при начальных условиях $M[0] = \sum_{\alpha} U_\alpha[0]$ и (13). Итак, достаточно использовать не $2N$, а $N+1$ рекуррентных соотношений.

4. Примеры марковских отображений

Применим указанный выше метод расчета корреляционной функции к регулируемому маятнику при тех значениях его параметров, когда имеют место простые марковские процессы.

1. Простейший случай имеет место в точке H (рис. 4), так как она находится на пересечении линии AB соответствующей уравнению $h/a = \gamma - 1$ и линии CH (уравнение $h/a = \gamma^{-1/2} + 1$). При этом новых точек разбиения не образуется и процесс является двухотрезочным ($N = 2$). Исключая h/a из этих равенств, получаем уравнение $\gamma - \gamma^{1/2} - 1 = 0$, которое имеет положительный корень

$$\gamma^{1/2} = (1 + 5^{1/2})/2 = 1,618034.$$

Данное значение определяет входящий в (1) параметр $\delta = \ln \gamma / (2\pi)$, кроме того $h/a = \gamma - 1$. В этом случае стационарное распределение сосредоточено на двух отрезках $I_1 = [-a\gamma^{-1/2}, a]$, $I_2 = [-a\gamma^{1/2}, -a\gamma^{-1/2}]$. При отображении они преобразуются так: $I_1 \rightarrow I_1 + I_2$, $I_2 \rightarrow I_1$, то есть, $d_{11} = d_{12} = d_{21} = 1$, $d_{22} = 0$.

Рекуррентные соотношения (12), (18), следовательно, принимают вид

$$v_1[k+1] = \gamma^{-1/2}\{v_1[k] + v_2[k]\}, \quad v_2[k+1] = \gamma^{-1/2}v_1[k], \quad (19)$$

$$M[k+1] = \gamma^{-1/2}\{M[k] + h w_2 v_2[k+1]\},$$

при начальных условиях

$$v_1[0] = \frac{a^2}{2}[1 - \gamma^{-1}], \quad v_2[0] = \frac{a^2}{2}[\gamma^{-1} - \gamma], \quad (20)$$

$$v_1[0] = \frac{a^3}{3}[1 + \gamma^{-3/2}], \quad v_2[0] = -\frac{a^3}{3}[\gamma^{-3/2} - \gamma^{3/2}].$$

Стационарная плотность вероятности (15), (16) определяется двумя значениями v , w , удовлетворяющими уравнениям

$$w_2 = \gamma^{-1/2}v_1, \quad a[1 - \gamma^{-1/2}v_1] + a[\gamma^{1/2} - \gamma^{-1/2}]w_2 = 1.$$

Отсюда

$$w_1 = \gamma^{1/2}/(1 + \gamma), \quad w_2 = 1/(1 + \gamma).$$

В формуле (17) следует положить $N = 2$. Расчет корреляционной функции, нормированной на единицу, при помощи (19), (20) дает результат, показанный на рис. 5 пунктирной линией.

2. Рассмотрим теперь процесс, обозначенный на плоскости параметров буквой E (рис. 4). Здесь нижний край переходит в нуль, а точка ветвления, кроме верхнего края, переходит в нижний край $\gamma = h = 2,62$. Нуль является еще одной точкой разбиения и мы имеем трехотрезочное отображение.

Стационарное разбиение сосредоточено на отрезках, они отображаются так:

$$I_1 \rightarrow I_2 + I_3, \quad I_2 + I_1, \quad I_3 \rightarrow I_2 + I_3.$$

Рекуррентные соотношения в данном случае имеют вид

$$v_{1,3}[k+1] = \gamma^{-1/2}\{v_2[k] + v_3[k]\}, \quad v_2[k+1] = \gamma^{-1/2}v_1[k], \quad (21)$$

$$M[k+1] = \gamma^{-1/2} \{M[k] + w_3 h V_3[k+1]\},$$

при начальных значениях

$$V_1[0] = \frac{a^2}{2}, \quad V_2[0] = -\frac{a^2}{2}\gamma^{-1}, \quad V_3[0] = \frac{a^2}{2}[\gamma^{-1} - \gamma], \quad (22)$$

$$U_1[0] = \frac{a^3}{3}, \quad U_2[0] = \frac{a^3}{3}\gamma^{-3/2}, \quad U_3[0] = \frac{a^3}{3}[\gamma^{3/2} - \gamma^{-3/2}].$$

Стационарное распределение характеризуется значениями

$$v_1 = a^{-1}(1/2), \quad v_2 = \gamma^{-1/2}v_1, \quad v_3 = \gamma^{-1/2}v_1.$$

На рис. 5 сплошной линией показана нормированная на единицу корреляционная функция, рассчитанная с помощью рекуррентных соотношений (21).

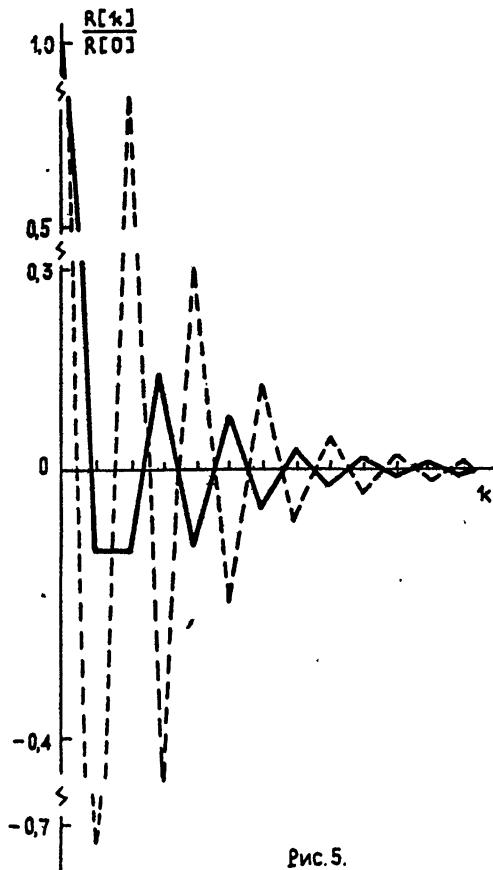


Рис. 5.

3. Для процесса, обозначенного на рис. 4 точкой G , корреляционная функция не стремится к 0 при $k \rightarrow 0$. Это объясняется тем, что процесс неэргодичен, но разложим на эргодические составляющие, которые соответствуют отображению за целый период. При рассмотрении отображений за целый период корреляционная функция для точки G убывает как 2^{-k} [5].

5. Использование рекуррентных соотношений для аналитического расчета корреляционной функции

Математическое решение уравнений (12) при $s_\alpha = -\beta$ таково

$$v[k] = \beta^{-k} \hat{D}^k v[0], \quad (23)$$

где $v[k]$ при фиксированном значении k есть матрица-столбец:

$$v[k] = \begin{pmatrix} v_1[k] \\ \vdots \\ v_n[k] \end{pmatrix}.$$

Предположим, что матрица \hat{D} приводима к диагональному виду. Это значит, что существует матрица $\hat{S} = [s_{\alpha\sigma}]$ такая, что

$$\hat{S}^{-1} \hat{D} \hat{S} = [\lambda_\sigma \delta_{\sigma\tau}]$$

и, следовательно,

$$\hat{D} = \hat{S} [\lambda_\sigma \delta_{\sigma\tau}] \hat{S}^{-1}, \text{ т.е. } d_{\alpha\beta} = s_{\alpha\sigma} \lambda_\sigma s_{\sigma\beta}^{-1}. \quad (24)$$

Здесь λ_σ - собственные значения матрицы \hat{D} , определяемые характеристическим уравнением $\det[d_{\alpha\beta} - \lambda \delta_{\alpha\beta}] = 0$. Мы уже знаем (см. (8) при $s_\alpha = -\beta$) одно из этих собственных значений: $\lambda_1 = \beta$. Вследствие (24) формула (20) принимает вид

$$v[k] = \sum_{\sigma=1}^n c_\sigma \left(\frac{\lambda_\sigma}{\beta} \right)^k, \quad (25)$$

где c_σ - при фиксированном σ есть матрица-столбец, составленный из

$$c_{\alpha\sigma} = s_{\alpha\sigma} \sum_i s_{\sigma i}^{-1} v_i[0].$$

Решение рекуррентного соотношения (18) для $M[k]$ в общем виде таково:

$$M[k] = (-\beta)^{-k} M[0] - h v_k \beta^{-1} \sum_{\alpha}^{} v_{\alpha} \sum_{l=1}^k (-\beta)^{-k} v_{\alpha}[l] \quad (26)$$

$$(v_k = 1 \text{ при } k = 0, v_0 = 0).$$

Подставляя (25) в правую часть (26) и суммируя по l , получаем

$$\begin{aligned} M[k] &= (-\beta)^{-k} M[0] + h v_k \beta^{-1} \sum_{\alpha}^{} v_{\alpha} \left\{ C_{\alpha 1} \frac{\beta}{\beta + 1} [(-\beta)^{-k} - 1] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=2}^k C_{\alpha l} \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} [(-\beta)^{-k} - (\frac{\lambda}{\beta})^k] \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Естественно ожидать, что вычитание постоянной при переходе к $R[k]$ удалит из обеих частей равенства (27) постоянные, т. е. не зависящие от k члены, и будем иметь

$$\begin{aligned} R[k] &= (-\beta)^{-k} M[0] + h v_k \beta^{-1} \sum_{\alpha}^{} v_{\alpha} \left\{ C_{\alpha 1} \frac{\beta}{\beta + 1} (-\beta)^{-k} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=2}^k C_{\alpha l} \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} [(-1)^k - (\lambda_1)^k] (\beta)^{-k} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда видно, с какой быстротой убывает корреляционная функция при $k \rightarrow \infty$.

Анализ частных случаев показывает, что не зависящие от k члены, действительно, выпадают.

Для случая, рассмотренного в примере (1) (точка H на рис. 4), имеем (см. (28)).

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = \beta, \quad \lambda_2 = 1 - \beta, \quad C_{21} = -\beta, \quad C_{22} = -\beta^2/2.$$

При этом окончательный результат таков:

$$R[k] = (-\beta)^{-k} \left\{ M[0] + v_k h v_2 \beta^{-1} \left\{ C_{21} \frac{\beta}{\beta + 1} + C_{22} \frac{\lambda_2^2}{1 + \lambda_2} [1 - (-\lambda_2)^k] \right\} \right\}.$$

Подставляя численные значения, имеем

$$\frac{R[k]}{R[0]} = (-\beta)^{-k} [1 + 1,2133845(1 - \beta^{-k})]. \quad (29)$$

Отсюда видна быстрота убывания корреляционной функции. Функция (29) соответствует пунктирной линии на рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. - М. :Наука, 1978. С. 28.
2. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. -М. :Наука, 1987. С. 69.
3. Ланда П. С., Стратонович Р. Л. //ДАН СССР. 1982. Т.267. N 4. С.832.
4. Ланда П. С., Стратонович Р. Л. //Механика твердого тела. 1984. N 4. С.26.
5. Стратонович Р. Л. //ДАН СССР. 1982. Т.267. N 2. С.355.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
25 февраля 1992 г.

DYNAMIC CHAOS IN THE OSCILLATOR WITH NEGATIVE FRICTION. ANOMALOUS MODE

R. L. Stratonovich, A. A. Rusmaikina, O. A. Chichigina

The condition of existence of dynamic chaos in the oscillator proposed by Neimark is found for anomalous mode. The simplest cases are investigated when the point mapping is Markovian. For the Markov mapping the analytic method of determining the correlation function of the chaos process is elaborated. Examples of correlation function are considered.

УДК 537. 874. 6

МОРСОВСКИЕ КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН РЕШЕТОК

В. П. Шестопалов, В. В. Яцик

В [1] на основании строгой спектральной теории решеток численными методами исследованы междutиповые колебания и волны, существование которых обусловлено "взаимодействием" собственных полей в открытых периодических структурах. Данная работа посвящена построению аналитической теории морсовских критических точек (МКТ) комплексных гиперповерхностей и описанию спектральных характеристик свободных колебаний и собственных волн решеток вблизи МКТ.

В работе, с использованием результатов теории особенностей гладких отображений, проведено исследование спектральных характеристик решеток, представляемых в виде открытых периодических резонаторов (спектральный параметр, частота) и открытых периодических волноводов (спектральный параметр постоянной квазипериодичности). Аналитическое описание спектральных характеристик решеток проводится в окрестности морсовских критических точек (МКТ) гладких отображений, являющихся функциями как двух $f(\{\begin{smallmatrix} \alpha \\ \phi \end{smallmatrix}\}, \tau)$ (одного из спектральных параметров α или ϕ и неспектрального τ), так и трех комплексных переменных $f(\alpha, \phi, \tau)$. Такой подход существенно облегчает анализ рассеивающих и направляющих свойств решеток. Показано, что в окрестности особых точек комплексных гиперповерхностей (случай функций трех комплексных переменных) могут быть эффективно восстановлены спектральные характеристики свободных колебаний (спектральные поверхности собственных частот $\Omega_\alpha(\phi, \tau)$ и собственных волн (спектральные поверхности постоянных распространения $\Omega_\phi(\alpha, \tau)$ одномерно-периодических структур.

1. МКТ комплексных гиперповерхностей и свободные колебания

Известно, что задача исследования спектральных характеристик открытых периодических резонаторов или открытых периодических волноводов, образующих решетку, сводится к описанию нетривиальных решений однородного операторного уравнения второго рода

$$\left(E + \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix} \right) \vec{a} = \vec{0}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} X \\ \Phi \end{pmatrix} \quad (1)$$

с конечно-мероморфной оператор-функцией $\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix}$. Здесь $\alpha = \omega(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ (ω - круговая частота, ϵ_0 и μ_0 - параметры среды) и постоянная квазипериодичности, ϕ - спектральные параметры, областью изменения которых являются многолистные римановы поверхности X и Φ (см. [2]); E - единичный оператор. Для решеток волноводного типа в [2, 3] получены уравнения (1) с бесконечными матрицами функции $\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix}$; $l_2 \rightarrow l_2$, порождающими матрицу Коха [4]. Это позволяет строить алгоритм поиска составляющих спектра Ω_{α} на приближенном решении характеристического уравнения

$$f \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix} = \det \left(E + \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix} \right) = 0, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} X \\ \Phi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

При проведении численных экспериментов, в ходе которых задача (1) разделялась по классам симметрии рассматриваемых свободных колебаний (собственных волн), не было обнаружено корней с кратностью, большей единицы. Отсутствие точек "вырождения" в спектре собственных частот Ω_{α} и собственных постоянных распространения Ω_{ϕ} , отвечающих определенным свободным колебаниям и собственным волнам одного класса симметрии, приводит к тому, что в области "взаимодействия" нарушается регулярный ход соответствующих спектральных кривых $\alpha(\tau) \in \Omega_{\alpha}(\tau)$ и $\phi(\tau) \in \Omega_{\phi}(\tau)$. Последнее указывает на то, что $\alpha(\tau)$ и $\phi(\tau)$ проходят вблизи критических точек отображения $f \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix}, \tau : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

[2]. Здесь $f \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix}, \tau = \det \left(E + \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix}, \tau \right)$ - функция, по нулям которой определяются спектральные характеристики $\Omega_{\alpha}(\tau)$ при $\operatorname{Im} \tau = 0$.

В окрестности морсовской критической точки $\left(\left\{\begin{matrix} \bar{x}_0 \\ \phi_0 \end{matrix}\right\}, \tau_0\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0, \quad \left(\left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\}, \tau\right) = \left(\left\{\begin{matrix} \bar{x}_0 \\ \phi_0 \end{matrix}\right\}, \tau_0\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\} \partial \tau} \frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\}} \neq 0, \quad \left(\left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\}, \tau\right) = \left(\left\{\begin{matrix} \bar{x}_0 \\ \phi_0 \end{matrix}\right\}, \tau_0\right) \quad (4)$$

спектральные характеристики $\bar{x}(\tau) \in \Omega_{\bar{x}}(\tau)$ и $\phi(\tau) \in \Omega_{\phi}(\tau)$ могут быть эффективно восстановлены из далее следующего квадратного уравнения (см. [2, 5]), полученного из уравнения $f\left(\left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\}, \tau\right) = 0$ разложением левой части в ряд Тейлора с точностью до кубически малых членов $\left(\left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} \bar{x}_0 \\ \phi_0 \end{matrix}\right\}\right)^i (\tau - \tau_0)^j$; $i + j \geq 3$; ($i, j = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\}^2} \right|_{\left(\left\{\begin{matrix} \bar{x}_0 \\ \phi_0 \end{matrix}\right\}, \tau_0\right)} \left(\left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} \bar{x}_0 \\ \phi_0 \end{matrix}\right\} \right)^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\} \partial \tau} \right|_{\left(\left\{\begin{matrix} \bar{x}_0 \\ \phi_0 \end{matrix}\right\}, \tau_0\right)} \left(\left\{\begin{matrix} \bar{x} \\ \phi \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} \bar{x}_0 \\ \phi_0 \end{matrix}\right\} \right) (\tau - \tau_0) + \\ & + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \right|_{\left(\left\{\begin{matrix} \bar{x}_0 \\ \phi_0 \end{matrix}\right\}, \tau_0\right)} (\tau - \tau_0)^2 + 2f \Bigg|_{\left(\left\{\begin{matrix} \bar{x}_0 \\ \phi_0 \end{matrix}\right\}, \tau_0\right)} = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

При исследовании рассеивающих и направляющих свойств одномерно-периодических структур интерес представляют не отдельно взятые спектральные кривые $\bar{x}(\tau) \in \Omega_{\bar{x}}(\tau)$ или $\phi(\tau) \in \Omega_{\phi}(\tau)$, а спектральные поверхности собственных частот $\Omega_{\bar{x}}(\phi, \tau)$ ($\bar{x} \in X$, ϕ и $\tau \in \mathbb{R}$) и $\Omega_{\phi}(\bar{x}, \tau)$ ($\phi \in \Phi$, \bar{x} и $\tau \in \mathbb{R}$). Здесь \mathbb{R} – область вещественных значений параметров. Они дают возможность получить наиболее полное представление о возможных особенностях рассматриваемых процессов (см. [2, 6]). Такие спектральные поверхности могут быть получены при численном решении задач (1), (2) на свободные колебания поля и собственные волны решеток, а также аналитически описаны в окрестности морсовых критических точек отображения

$$f(\bar{x}, \phi, \tau) = \det(E + A(\bar{x}, \phi, \tau)): \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (6)$$

или, что тоже самое, - в окрестности особых точек комплексных гиперповерхностей $\Omega(\mathbf{z}, \phi, \tau) = \{(\mathbf{z}, \phi, \tau) : f(\mathbf{z}, \phi, \tau) = 0\}$ [6]. При этом в области физических значений параметров открытого периодического резонатора ($\operatorname{Im} \phi = 0$ и $\operatorname{Im} \tau = 0$) и открытого периодического волновода ($\operatorname{Im} \mathbf{z} = 0$ и $\operatorname{Im} \tau = 0$) гиперповерхность $\Omega(\mathbf{z}, \phi, \tau)$ совпадает, соответственно, со спектральной поверхностью $\Omega_{\mathbf{z}}(\phi, \tau)$ и $\Omega_{\phi}(\mathbf{z}, \tau)$.

С учетом (6), аналогично (3) - (5), в окрестности изолированной и невырожденной точки $(\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0, \quad (\mathbf{z}, \phi, \tau) = (\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0); \quad (7)$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{z}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{z} \partial \phi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{z} \partial \tau} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial \mathbf{z}} & \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial \tau} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \mathbf{z}} & \frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \phi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \end{bmatrix} \neq 0, \quad (\mathbf{z}, \phi, \tau) = (\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0), \quad (8).$$

гиперповерхность $\Omega(\mathbf{z}; \phi, \tau)$ с точностью до кубически малых членов ($\mathbf{z} = (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^i (\phi - \phi_0)^j (\tau - \tau_0)^k$; $i+j+k \geq 3$ ($i, j, k = 1, 2, \dots$)) представима в виде

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{z}^2} \right|_{(\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0)} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right|_{(\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0)} (\phi - \phi_0)^2 + \\ & + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \right|_{(\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0)} (\tau - \tau_0)^2 + 2 \left\{ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{z} \partial \phi} \right|_{(\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0)} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)(\phi - \phi_0) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{z} \partial \tau} \right|_{(\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0)} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)(\tau - \tau_0) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial \tau} \right|_{(\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0)} (\phi - \phi_0)(\tau - \tau_0) \} + \\ & + 2f(\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В отличие от (3)-(5) задача (7)-(9) позволяет в окрестности одной и той же МКТ $(\mathbf{z}_0, \phi_0, \tau_0)$ отображения (6) аналитически описывать

динамику изменения спектральных характеристик как свободных колебаний поля, так и собственных волн решеток.

2. Моделирование на ЭВМ колебаний и волн вблизи МКТ

Численная реализация задач (3)-(5) и (7)-(9) основана на итерационном методе Ньютона [7] для нелинейных систем уравнений (3) и (7). Он позволяет в процессе вычисления искомой изолированной критической точки $\left(\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0 \\ \boldsymbol{\phi}_0 \end{Bmatrix}, \tau_0\right)$ или $(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\phi}_0, \tau_0)$ находить значения всех коэффициентов квадратных уравнений (5) или (9), а также провести проверку на вырожденность матрицы Гессе (проверить условия (4) или (8)) соответствующих отображений. Для всех рассматриваемых далее случаев условия (4) и (8) выполняются, следовательно, изолированные критические точки $\left(\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0 \\ \boldsymbol{\phi}_0 \end{Bmatrix}, \tau_0\right)$ и $(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\phi}_0, \tau_0)$ - морсовские. Как показали результаты численных экспериментов, итерационный процесс может быть прекращен, если вносимая им погрешность в (3) (или (7)) не превосходит 10^{-6} . Следует также отметить, что представления (5) и (9) носят локальный характер. Поэтому погрешность полученных с помощью (5) и (9) спектральных характеристик решеток в окрестности морсовых точек, может быть оценена в результате подстановки соответствующих спектральных характеристик в условия (2); это позволяет также локализовать окрестность морсовой точки, в которой (5) и (9) дают удовлетворительные результаты.

В качестве иллюстрации приведем сравнение спектральных характеристик решеток из идеально проводящих металлических брусьев с диэлектрическим заполнением волноводных каналов, полученных при прямом численном анализе задачи (1), (2) и восстановленных в окрестности МКТ: $\left(\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0 \\ \boldsymbol{\phi}_0 \end{Bmatrix}, \tau_0\right)$ с помощью (3)-(5) и $(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\phi}_0, \tau_0)$ с помощью (7)-(9). Рассматриваемая периодическая структура в безразмерных пространственно-временных координатах имеет следующие параметры: длина периода решетки 2π , высота периодической структуры $4\pi\delta$, ширина волноводной области (расстояние между брусьями) $2\pi\theta$. Далее вместо обобщенного неспектрального параметра τ будем рассматривать δ .

На рис. 1 представлен фрагмент спектральной поверхности $\Omega_{\alpha}(\phi, \delta)$

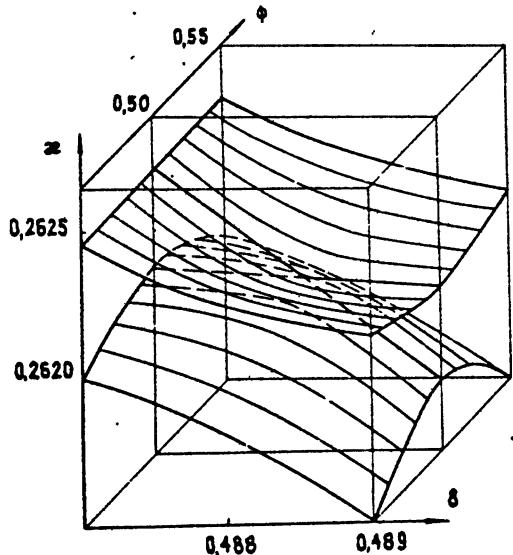


Рис.1.

практически совпадает с осооой точкой ($\alpha_0 = 0,26209$; $\phi_0 = 0,49864$; $\delta_0 = 0,48804$) комплексной гиперповерхности $\Omega(\alpha, \phi, \delta)$. В малой окрестности этой точки с графической точностью восстанавливаются спектральные поверхности собственных частот $\Omega_{\alpha}(\phi, \delta)$ и собственных постоянных распространения $\Omega_{\phi}(\alpha, \delta)$. При удалении от нее точность восстановления (с помощью (9)) спектральных характеристик открытых периодических резонаторов и открытых периодических волноводов уменьшается, однако динамика изменения собственных частот и собственных постоянных распространения сохраняется. Это хорошо видно из рис. 2 и 3, на которых представлены фрагменты спектральных кривых, полученных при сечении спектральных поверхностей $\Omega_{\alpha}(\phi, \delta)$ и $\Omega_{\phi}(\alpha, \delta)$ плоскостями $\phi = 0,45$ и $\alpha = 0,26185$, соответственно. На этих рисунках сплошными кривыми нанесены спектральные характеристики $\alpha(\delta)$ и $\phi(\delta)$, полученные при решении задачи (1), (2), а штрих-пунктиром - восстановленные в окрестности рассматриваемой особой точки гиперповерхности $\Omega(\alpha, \phi, \delta)$.

Задача (3)-(5), в отличие от (7)-(9), позволяет описывать не спектральные поверхности, а отдельно взятые спектральные кривые. В небольшой окрестности особых точек гиперповерхностей $\Omega(\alpha, \phi, \delta)$ полученные с помощью (3)-(5) и (7)-(9) спектральные характеристики свободных колебаний и собственных частот волн совпадают. "Вдали" от особых точек гиперповерхностей $\Omega(\alpha, \phi, \delta)$ (там, где точность восстановленных с помощью (7)-(9) спектральных характеристик

($\varepsilon = 25$, $\Theta = 0,8$), полученный при решении задачи (1), (2). Точки такой поверхности определяют условия существования действительных собственных колебаний поля решетки с закрытыми каналами излучения энергии в свободное пространство [1, 2]. Два участка этой поверхности имеют одну общую точку с $\phi = 0,5$, где спектральные линии $\alpha(\delta)$ свободных колебаний H_{031} и H_{021} пересекаются. Эта точка "вырождения" свободных колебаний разных классов симметрии

невысока), описание спектральных кривых, отвечающих случаям "взаимодействия" свободных колебаний поля и собственных волн, проведенное с помощью задач (3)-(5), оказывается достаточно эффективным. Так, спектральные кривые собственных частот $\alpha(\delta)$ (см. рис. 2), полученные из (1), (2), с графической точностью совпадают с восстановленными с помощью (3)-(5) в окрестности морсовской точки ($\alpha_0 = 0,26212$, $\delta_0 = 0,48754$). На рис. 3 пунктиром представлены спектральные кривые собственных постоянных распространения $\phi(\delta)$, восстановленные с помощью (3)-(5) в окрестности морсовской точки ($\phi_0 = 0,49862$, $\delta_0 = 0,49156$).

Отмеченные выше закономерности, связанные с описанием спектральных поверхностей $\Omega_\alpha(\phi, \delta)$ и $\Omega_\phi(\alpha, \delta)$ в окрестности особых точек комплексных гиперповерхностей $\Omega(\alpha, \phi, \delta)$ (задача (7)-(9)) и описания спектральных кривых собственных частот и собственных постоянных распространения в окрестности, соответствующих морсовских точек (задачи (3)-(5)), сохраняют свою силу и в случае решеток с открытыми каналами излучения энергии. Отличие состоит

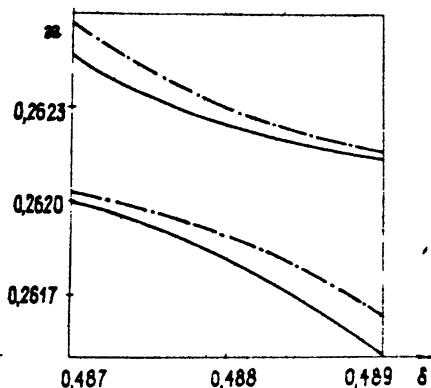


Рис 2

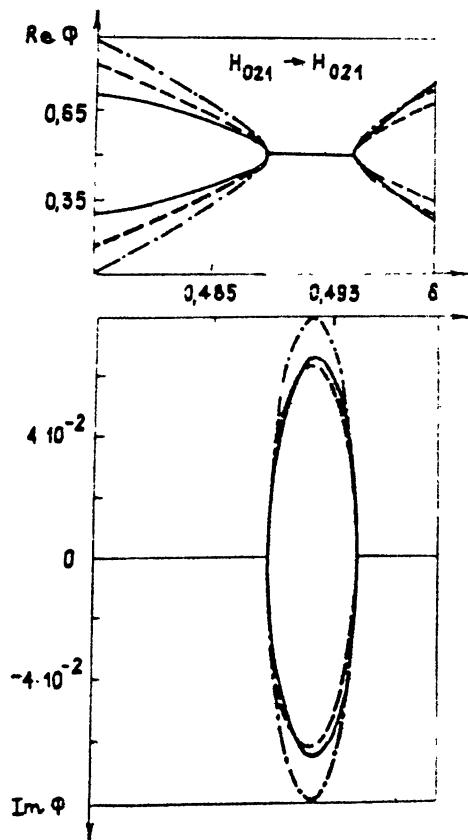


Рис 3

в том, что особые точки гиперповерхностей $\Omega(\alpha, \phi, \delta)$ (задача (7)-(9)), а также морсовые критические точки, в окрестности которых проводится аналитическое описание (с помощью (3)-(5)), выходят в область нефизических значений параметров (становятся комплексными

величинами). Это может привести к тому, что расстояние в метрике соответствующих комплексных пространств, от особой точки $(\alpha_0, \phi_0, \delta_0)$ до области физических значений неспектральных параметров (для $\Omega_\alpha(\phi, \delta)$), область физических значений - $\text{Im } \Phi = 0$, $\text{Im } \delta = 0$, а для $\Omega_\phi(\alpha, \delta)$ - это $\text{Im } \alpha = 0$, $\text{Im } \delta = 0$) слишком велика (погрешность полученных с помощью (9) спектральных характеристик свободных колебаний или собственных волн в требуемом диапазоне изменения параметров - велика). Так, на рис. 4 ($\varepsilon = 6, 92$; $\theta = 0, 8$) представлен фрагмент спектральной поверхности $\Omega_\alpha(\phi, \delta)$ (полученной при решении задачи (1), (2)), точки которой определяют условия существования вступающих во "взаимодействие" свободных колебаний H_{031} и H_{023} типов. Динамика изменения собственных частот этой поверхности может быть восстановлена в окрестности особой точки ($\alpha_0 = 0, 73839 - i 3,9712 \cdot 10^{-4}$; $\phi_0 = 0$; $\delta_0 = 0, 39110 + i 4,2320 \cdot 10^{-4}$) комплексной гиперповерхности $\Omega(\alpha, \phi, \delta)$, а восстановление спектральных характеристик $\Omega_\phi(\alpha, \delta)$ с помощью (9) не приводит к удовлетворительному результату в требуемом диапазоне изменения α, δ .

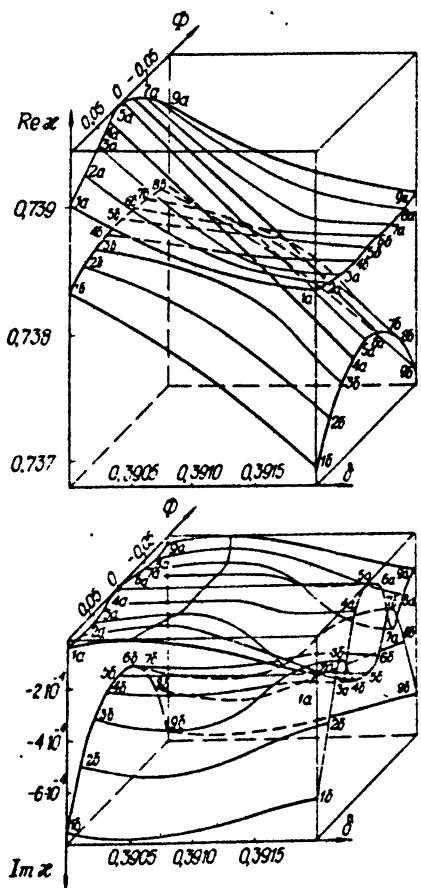


Рис 4

В таких случаях поверхность собственных постоянных распространения $\Omega_\phi(\alpha, \delta)$ может быть воссоздана по отдельным фрагментам спектральных кривых в окрестности МКТ $\{(\phi_0, \delta_0)\}$, полученных с помощью (3)-(5), при различных значениях параметров α . При отыскании таких точек $\{(\phi_0, \delta_0)\}$ в качестве начального приближения для итерационного процесса Ньютона могут быть взяты значения ϕ_0 и δ_0 особой точки комплексной гиперповерхности $\Omega(\alpha, \phi, \delta)$.

Таким образом, в работе приведены результаты описания спектральных характеристик свободных колебаний и собственных волн в окрестности МКТ гладких отображений. Показано, что по МКТ можно

эффективно восстанавливать спектральные характеристики, связанные с проявлением эффектов междугородней связи свободных электромагнитных полей решеток. Рассмотренный подход может быть без существенных изменений перенесен на случай функций $f(\alpha, \Phi, \tau_1, \dots, \tau_n)$ многих комплексных переменных ($\alpha, \Phi, \tau_1, \dots, \tau_n$ - параметры, допускающие аналитическое продолжение (1), (2) в область комплексных значений). В окрестности МКТ на численно-аналитическом уровне могут быть описаны не только дисперсионные характеристики собственных частот и (или) собственных постоянных распространения, но и отвечающие им свободные колебания и (или) собственные волны открытых периодических структур. Последнее связано с анализом в окрестности МКТ соответствующих оператор-функций и может быть предметом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сиренко Ю. К., Шестопалов В. П., Яцик В. В. //Радиотехника и электроника. 1990. Т.35. № 12. С.2507.
2. Шестопалов В. П., Сиренко Ю. К. Динамическая теория решеток. - Киев: Наукова думка, 1989. - 216 с.
3. Сиренко Ю. К., Шестопалов В. П., Яцик В. В. //ДАН АН УССР. Сер. A. 1985. № 9. С.60.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несакомо-сопряженных операторов. - М.:наука, 1965. -448 с.
5. Яцик В. В. //Радиофизика и электроника миллиметровых и субмиллиметровых волн. Сб. научн. трудов. -Харьков:ИРЭ АН УССР. 1988. С.5.
6. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. - М.:Мир, 1971. -124 с.
7. Форсайт Дж., Малькольм М., Модлер К. Машинные методы математических вычислений. - М.:Мир, 1980. - 280 с.

Институт радиофизики и электроники
АН Украины

Поступила в редакцию
25 февраля 1992 г.

MORSE CRYTICAL POINTS OF FREE OSCILLATIONS AND WAVES OF GRATINGS

V.P. Shestopalov, V.V. Vatsik

In [1], intertymode oscillations and waves have been investigated on the base of the rigorous spectral theory of gratings by numerical methods, the existence of which (oscillations and waves) has been caused by the "interaction" of natural fields in open periodic structures. The paper presented deals with a construction of the analytical theory of Morse crytical points (MCP) of complex hypersurfaces and description of spectral characteristics of free oscillations and natural waves of gratings near MCP.

УДК 538. 573

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТИВНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ПЛОСКОСЛОЙСТОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

С. М. Голынский, В. Д. Гусев

На основании обобщенного уравнения эйконала введено понятие эффективного показателя преломления одномерной случайно-неоднородной среды. Эта физическая величина однозначно определяет волновое поле, распространяющееся в рассматриваемой среде, при заданных граничных условиях. В рамках марковского диффузионного приближения найдены одноточечная плотность вероятности усредненного эффективного показателя преломления и ряд его статистических характеристик, в частности, среднее значение и дисперсия его флуктуаций. Обсуждены границы применимости полученных результатов для случайных неоднородностей с конечным радиусом корреляции.

1. Определение эффективного показателя преломления случайно-неоднородной среды

Рассмотрим нормальное падение плоской монохроматической волны на одномерный случайно-неоднородный слой, расположенный в области $0 < z < L$. Полагаем, что диэлектрическая проницаемость среды внутри слоя имеет вид $\epsilon(z) = \epsilon_0 + \alpha \epsilon_1(z)$, где $\epsilon_0 = \text{Const}$, α - малый безразмерный параметр, характеризующий глубину флуктуаций ($\alpha \sim \sigma_\epsilon = \sqrt{\langle \epsilon^2 \rangle}$), а $\epsilon_1(z)$ - случайный однородный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции $B(\zeta)$:

$$\langle \epsilon_1(z) \rangle = 0, \quad B(\zeta) = \langle \epsilon_1(z_1) \epsilon_1(z_2) \rangle = \sigma_\epsilon^2 K(\zeta), \quad \zeta = z_1 - z_2.$$

Здесь σ_ϵ^2 - дисперсия флуктуаций диэлектрической проницаемости среды, а угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций. Вне слоя $\epsilon(z) = 1$.

Внутри слоя волновое поле $U(z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$U''(z) + k^2[\epsilon_0 + \alpha\epsilon_1(z)]U(z) = 0 \quad (1.1)$$

с соответствующими условиями непрерывности для самого поля $U(z)$ и его производной $U'(z)$ на обеих границах слоя. В уравнении (1.1) и в дальнейшем штрих указывает дифференцирование по переменной z , $k = 2\pi/\lambda$, λ - длина волны падающего излучения. Решение уравнения (1.1) может быть представлено в виде бегущих волн $U(z) = A(z) \exp\{\pm ik\Phi(z)\}$ [1, 2], причем действительно, амплитуда A и эйконал Φ связаны соотношением $A = \text{Const}(\Phi')^{-1/2}$ и удовлетворяют уравнению

$$A'' + k^2[\epsilon - (\Phi')^2]A = 0. \quad (1.2)$$

По аналогии с работой [1] используем уравнение (1.2) для определения эффективного показателя преломления рассматриваемой среды, записывая это уравнение в форме обобщенного уравнения эйконала

$$(\Phi')^2 = m^2 \quad (1.3)$$

при условии, что $m(z)$ удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$2mm'' - 3(m')^2 + 4k^2m^2(m^2 - \epsilon) = 0. \quad (1.4)$$

В результате общее решение уравнения Гельмгольца (1.1) имеет вид суммы двух линейно-независимых бегущих волн [1, 2]: распространяющихся в противоположных направлениях и невзаимодействующих друг с другом [3],

$$U(z) = C_1 m^{-1/2} \exp(ik\Phi) + C_2 m^{-1/2} \exp(-ik\Phi). \quad (1.5)$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями. Следовательно, для описания волнового поля $U(z)$ (1.5) и его статистических характеристик необходимо исследовать распределение единственной неизвестной функции - эффективного показателя преломления среды $m(z)$, введенного посредством (1.3) и являющегося частным решением уравнения (1.4). Для однозначности выбора $m(z)$ уравнение (1.4) следует дополнить двумя дополнительными условиями (начальными, граничными или какими-либо другими, вытекающими для конкретной задачи из соответствующих физических соображений). В частности, для рассматриваемого случая, полагая, что глубина флуктуаций диэлектрической проницаемости невелика ($\alpha \ll 1$),

воспользуемся начальными условиями на нижней границе слоя для соответствующей невозмущенной задачи. Очевидно, что в предельном случае распространения волны в однородной среде ($\alpha = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$) эффективный показатель преломления должен совпадать с локальным показателем преломления, т. е. $m^2 = \epsilon_0$, при этом (1.5) переходит в известное решение уравнения Гельмгольца (1.1) для однородной среды. Из анализа общего решения (1.4) при $\epsilon = \epsilon_0$ вытекает, что эффективный показатель преломления тождественно равен локальному только при единственном выборе начальных условий, а именно,

$$m(z = 0) = m_0 = \sqrt{\epsilon_0}, \quad m'(z = 0) = 0. \quad (1.6)$$

Отметим, что при рассмотрении распространения волн в неоднородной среде отличие между локальным показателем преломления и эффективным, определенным (1.3), связано с сохранением первого члена в уравнении (1.2), которым пренебрегают при геометрооптическом подходе и его различных модификациях.

2. Вывод уравнения Фоккера-Планка и границы его применимости

Для решения задачи о нахождении статистических характеристик эффективного показателя преломления $m(z)$ целесообразно перейти к переменной $\theta(z) = m^{-1}(z)$, удовлетворяющей согласно (1.4) и (1.6) уравнению

$$2\theta'' - (\theta')^2 + 4k^2(\epsilon\theta^2 - 1) = 0,$$

$$\theta(z = 0) = \theta_0 = \epsilon_0^{-1/2}, \quad \theta'(z = 0) = 0,$$

формальное решение которого может быть представлено в виде

$$\theta = \theta_0[u + \sqrt{u^2 - 1} \cos\psi], \quad \theta' = -2k_0\theta_0\sqrt{u^2 - 1} \sin\psi, \quad (2.1)$$

где $k_0 = k\epsilon_0^{1/2}$. При этом оказывается, что две вновь введенные функции $u(z)$ и $\psi(z) = 2k_0z + \varphi(z)$ описываются известной системой дифференциальных уравнений первого порядка [4, 5]

$$u' = \alpha \frac{k_0 \epsilon_1}{\epsilon_0} (u^2 - 1)^{1/2} \sin\psi, \quad u(z = 0) = 1, \quad (2.2)$$

$$\psi' = 2k_0 + \alpha \frac{k_0 \epsilon_1}{\epsilon_0} [1 + u(u^2 - 1)^{-1/2} \cos\psi], \quad \psi(z = 0) = \psi_0.$$

Система стохастических дифференциальных уравнений (2.2) может быть использована для перехода к марковскому диффузионному приближению, а именно, для вывода уравнения Фоккера-Планка (УФП), определяющего одноточечную плотность вероятности $P_2(u, \psi, z)$. Не останавливаясь на хорошо исследованном случае δ -коррелированного случайного поля [5, 6], рассмотрим более общую и более реалистическую модель, когда $\epsilon_1(z)$ — одномасштабный случайный процесс с конечным радиусом корреляции $r_k = a$ (a — характерный масштаб неоднородностей среды в z -направлении).

Вводя двумерный вектор $u = \{u, \psi\}$ и разделяя в правой части системы (2.2) детерминированные и флуктуационные члены (для сокращения выкладок ниже полагаем, что $\epsilon_0 = 1$, т. е. $k_0 = k$)

$$F_0 = \{0, 2k\}, \quad (2.3)$$

$$F_1 = \{k\epsilon_1(u^2 - 1)^{1/2} \sin\psi, k\epsilon_1[1 + u(u^2 - 1)^{-1/2} \cos\psi]\},$$

преобразуем (2.2) к стандартной форме стохастического дифференциального уравнения

$$v' = F_0 + \alpha F_1(v, z). \quad (2.4)$$

Для получения соответствующего (2.4) УФП введем новый безразмерный параметр — параметр Кубо

$$\chi = \alpha ka \quad (2.5)$$

и используем метод Ван Кампена [7], в результате чего приходим к стандартной форме УФП (по повторяющимся индексам $\nu, \mu = u, \psi$ предполагается суммирование)

$$\frac{\partial P_2(v, z)}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial v_\nu} \{G_\nu(v)P_2(v, z)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_\nu \partial v_\mu} \{G_{\nu\mu}(v)P_2(v, z)\}. \quad (2.6)$$

Коэффициенты сноса и локальных дисперсий в (2.6) имеют вид

$$G_\nu(v) = F_{0\nu} + \chi^2 \int_0^\infty \left\langle \frac{\partial F_{1\nu}}{\partial v_\mu}(v, z) \right\rangle F_{1\mu}(v^{-\zeta}, z - \zeta) d\zeta, \quad (2.7)$$

$$G_{\nu\mu}(v) = 2\chi^2 \int_0^\infty \left\langle F_{1\nu}(v, z) F_{1\mu}(v^{-\zeta}, z - \zeta) \right\rangle d\zeta,$$

где F_0 и F_1 определены (2.3), а $v^{-\zeta} = \{u, \psi - 2k\zeta\}$. При выводе УФП

(2.6) учитывалось, что

$$\langle F_{1\nu}(v, z) F_{1\mu}(v^{-\zeta}, z - \zeta) \rangle \approx 0 \text{ при } \zeta \geq a, \quad (2.8)$$

а также аналогичные соотношения для более высоких кумулянтов.

В общем случае коэффициенты УФП (2.7) представляют собой весьма громоздкие выражения, а решение самого уравнения (2.6) затруднительно даже для простейших предельных случаев. Однако ситуация существенно упрощается, если учесть, что при условии $\alpha \ll 1$ переменная $\psi(z)$ имеет структуру

$$\psi(z) = \psi_0 + 2kz + \varphi(z).$$

Следовательно, согласно (2.2) статистические характеристики функций $u(z)$ и $\varphi(z)$, характеризующих модуль и фазу коэффициента R отражения от слоя соответственно [4, 5], медленно меняются на расстояниях порядка длины волны λ . В то же время в правой части системы уравнений (2.2) имеются быстро осциллирующие функции. Поэтому для определения медленных изменений статистических характеристик волнового поля можно усредним УФП (2.6) по периоду быстрых осцилляций [5]. В результате такой операции коэффициенты УФП (2.7) приобретают вид

$$\tilde{G}_u = 2D_u u, \quad \tilde{G}_\varphi = 2k + D_\psi \frac{2u^2 - 1}{(u^2 - 1)^2}, \quad (2.9)$$

$$\tilde{G}_{uu} = 2D_u(u^2 - 1), \quad \tilde{G}_{u\psi} + \tilde{G}_{\psi u} = 0, \quad \tilde{G}_{\psi\psi} = 4 \left(D_0 + \frac{D_u}{2} \frac{u^2}{u^2 - 1} \right),$$

где введены обозначения

$$D_0 = \frac{k^2}{2} \int_0^\infty B(\zeta) d\zeta, \quad D_u = \frac{k^2}{2} \int_0^\infty B(\zeta) \cos(2k\zeta) d\zeta, \quad (2.10)$$

$$D_\psi = \frac{k^2}{2} \int_0^\infty B(\zeta) \sin(2k\zeta) d\zeta,$$

а верхняя тильда означает усреднение по периоду быстрых изменений.

Коэффициенты (2.10) играют роль коэффициентов диффузии и зависят от выбора вида функции корреляции случайного процесса $\varepsilon_1(z)$. Приведем явный вид этих коэффициентов для трех наиболее употребительных в приложениях моделей одномасштабной функции

корреляции:

$$B(\zeta) = \sigma_{\epsilon}^2 a \delta(\zeta);$$

$$D_0 = D_u = \frac{1}{2} \sigma_{\epsilon}^2 k^2 a, \quad D_{\psi} = 0; \quad (2.10a)$$

$$B(\zeta) = \sigma_{\epsilon}^2 \exp(-|\zeta|/a);$$

$$D_0 = \frac{1}{2} \sigma_{\epsilon}^2 k^2 a, \quad D_u = \frac{1}{2} \sigma_{\epsilon}^2 \frac{k^2 a}{1 + 4(ka)^2}, \quad D_{\psi} = \sigma_{\epsilon}^2 \frac{k(ka)^2}{1 + 4(ka)^2}; \quad (2.10b)$$

$$B(\zeta) = \sigma_{\epsilon}^2 \exp(-\zeta^2/a^2);$$

$$D_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sigma_{\epsilon}^2 k^2 a, \quad D_u = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sigma_{\epsilon}^2 k^2 a \exp[-(ka)^2], \quad (2.10b)$$

$$D_{\psi} = \frac{1}{2} \sigma_{\epsilon}^2 k(ka)^2 \exp[-(ka)^2] {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; k^2 a^2\right),$$

где ${}_1F_1(\beta, \gamma; x)$ - вырожденная гипергеометрическая функция.

При выводе УФП (2.6) было проведено разложение по малому параметру $x = a/\Lambda$ (2.5), где $\Lambda = (\alpha k)^{-1}$ характеризует масштаб медленных изменений функций $u(z)$ и $\varphi(z)$. Если $x \ll 1$, т. е.

$$\sigma_{\epsilon} k a \ll 1, \quad (2.11)$$

то можно разделить толщину слоя L на подинтервалы Δz такие, что $\Delta z \gg a$ и в то же время $\Delta z \ll \Lambda$. Это означает, что на подинтервале Δz функции $u(z)$ и $\varphi(z)$ практически не меняются, в то время как случайное поле $\epsilon_1(z)$ полностью забывает свое прошлое (2.8). Собирая эти неравенства вместе

$$L \geq \Lambda \gg \Delta z \gg a, \quad (2.12)$$

приходим к обычному в теории диффузационных марковских процессов условию двухмасштабности задачи [7, 8]. Таким образом, условия (2.11) и (2.12) определяют границы применимости УФП (2.6) и вытекающих из него результатов, так как по грубой пространственной шкале, определяемой Δz , исследуемый процесс можно приближенно считать процессом Маркова.

В случае, если $\epsilon_1(z)$ представляет собой нормальный случайный процесс, то (2.11) заменяет более слабым условием малоти рассеяния на масштабе неоднородности

$$\chi^2 = \sigma_{\epsilon}^2 k^2 a^2 \ll 1. \quad (2.13)$$

Отметим, что (2.13) совпадает с необходимым условием применимости приближения Бурре для среднего поля [9] и с условием применимости локального метода Чернова [10], которое справедливо также при учете предположения о нормальности $\epsilon_1(z)$, но только для случая рассеяния на крупномасштабных неоднородностях ($ka \gg 1$).

Таким образом, условие (2.11) определяет возможности исследования процесса рассеяния волн в плоскослоистой случайно-неоднородной среде для произвольного распределения флуктуаций диэлектрической проницаемости $\epsilon_1(z)$. При этом в рассматриваемом приближении марковского диффузационного процесса в отличии от локального метода Чернова эштаб неоднородностей среды не имеет ограничения снизу, а ограничение сверху в обоих методах определяется (2.12).

3. Усредненный эффект: эффективный показатель преломления среды и его статистические характеристики

Эффективный показатель преломления среды $m(z)$, введенный на основании обобщенного уравнения эйконала (1.3), содержит быстро осциллирующие члены. Для описания плавных изменений волнового поля $U(z)$ (1.5) введем усредненный по быстрым осцилляциям эффективный показатель преломления $\tilde{m}(z)$, определив его при учете первой из формул (2.1) соотношением

$$\tilde{m} = [\tilde{\theta}]^{-1} = m_0 u^{-1}, \quad (3.1)$$

и исследуем его статистические характеристики при помощи УФП (2.6). Не уменьшая общности результатов, в дальнейшем для сокращения выкладок ограничимся, как и ранее, рассмотрением случая, когда $\epsilon_0 = 1$, т. е. $m_0 = 1$.

Учитывая, что коэффициенты УФП (2.9) не зависят от переменной ψ , проинтегрируем УФП (2.6) по этой переменной. В результате приходим к известному УФП для одноточечной плотности вероятности $P(u, z)$

$$\frac{\partial P(u, z)}{\partial z} = D_u \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P(u, z), \quad P(u, z = 0) = \delta(u - 1). \quad (3.2)$$

Решение уравнения (3.2) представим в виде [5]

$$P(u, t) = \int_0^\infty \mu \operatorname{th}(\mu\pi) \exp[-(\mu^2 + 1/4)t] P_{-1/2+1\mu}(u) d\mu, \quad (3.3)$$

где введена новая безразмерная переменная

$$t = D_u z, \quad (3.4)$$

а $P_{-1/2+1\mu}(u)$ - функция Лежандра первого рода (функция конуса).

Принимая во внимание определение усредненного эффективного показателя преломления (3.1) при $m_0 = 1$ и учитывая (3.3), находим одноточечную плотность вероятности $V(\tilde{m}, t)$, характеризующую распределение случайной величины \tilde{m} , а именно,

$$V(\tilde{m}, t) = \tilde{m}^{-2} \int_0^\infty \mu \operatorname{th}(\mu\pi) \exp[-(\mu^2 + 1/4)t] P_{-1/2+1\mu}(\tilde{m}^{-1}) d\mu. \quad (3.5)$$

Используем (3.5) для вывода по аналогии с [11] общей формулы для вычисления среднего значения произвольной ограниченной функции, зависящей от усредненного эффективного показателя преломления \tilde{m} , которая, в частности, описывает его любые одноточечные статистические характеристики:

$$\langle \mathcal{H}(\tilde{m}) \rangle = \int_0^1 \mathcal{H}(\tilde{m}) V(\tilde{m}) d\tilde{m} = \quad (3.6a)$$

$$= \int_0^1 \mathcal{H}(\tilde{m}) \left\{ \int_0^\infty \mu \operatorname{th}(\mu\pi) \exp[-(\mu^2 + 1/4)t] P_{-1/2+1\mu}(\tilde{m}^{-1}) d\mu \right\} \tilde{m}^{-2} d\tilde{m}.$$

Представим искомое значение $\langle \mathcal{H}(\tilde{m}) \rangle$ (3.6a) в виде

$$\langle \mathcal{H}(\tilde{m}) \rangle = \exp(-t/4) \mathcal{F}(t, r = 0), \quad (3.6b)$$

где

$$\mathcal{F}(t, r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-t(\mu + r)^2] Z(\mu) d\mu, \quad (3.7)$$

$$Z(\mu) = Z(-\mu) = \mu \operatorname{th}(\mu\pi) \int_0^1 \mathcal{H}(\tilde{m}) P_{-1/2+1\mu}(\tilde{m}^{-1}) \tilde{m}^{-2} d\tilde{m}. \quad (3.8)$$

Далее находим фурье-трансформанту $\hat{\mathcal{F}}(t, \omega)$ от вновь введенной

вспомогательной функции $\mathfrak{F}(t, r)$ (3.7) по переменной r :

$$\hat{\mathfrak{F}}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(t, r) \exp(i\omega r) dr = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/t} \exp(-\omega^2/4t) \hat{Z}(-\omega),$$

где

$$\hat{Z}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\mu) \exp(-i\omega\mu) d\mu. \quad (3.9)$$

Подставляя четную функцию (3.8) в формулу (3.9) и учитывая выражение для интеграла от функции конуса по индексу [12]

$$\int_0^{\infty} \sin(\omega\mu) \operatorname{th}(\mu\pi) P_{-1/2+1/\mu}(\tilde{m}^{-1}) d\mu = \begin{cases} \tilde{m}^{1/2} [2(\tilde{m} \operatorname{ch}\omega - 1)]^{-1/2}, & 1 > \tilde{m} > \operatorname{ch}^{-1}\omega \\ 0, & m < \operatorname{ch}^{-1}\omega (\omega > 0) \end{cases}$$

после несложных преобразований получим явное выражение функции (3.9)

$$\hat{Z}(-\mu) = \hat{Z}(\omega) = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\int_{\operatorname{ch}^{-1}\omega}^1 \mathcal{H}(\tilde{m}) (\tilde{m} \operatorname{ch}\omega - 1)^{-1/2} \tilde{m}^{-3/2} d\tilde{m} \right], \quad (3.10)$$

которое определяет вспомогательную функцию (3.7) при $r = 0$

$$\mathfrak{F}(t, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathfrak{F}}(t, \omega) d\omega = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\pi/t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega^2/4t) Z(-\omega) d\omega. \quad (3.11)$$

И, наконец, подставляя (3.11) при учете (3.10) в исходную формулу (3.6б) и производя интегрирование по частям, приходим к искомому выражению для среднего значения (3.6а), а именно,

$$\langle \mathcal{H}(\tilde{m}) \rangle = \frac{\exp(-t/4)}{2\sqrt{2\pi t^{3/2}}} \int_0^{\infty} \omega \exp\left(-\frac{\omega^2}{4t}\right) \left[\int_{\operatorname{ch}^{-1}\omega}^1 \mathcal{H}(\tilde{m}) \frac{\tilde{m}^{-3/2} d\tilde{m}}{\sqrt{\tilde{m} \operatorname{ch}\omega - 1}} \right] d\omega. \quad (3.12)$$

Полагая в простейшем случае $\mathcal{H}(\tilde{m}) = 1$, убедимся, что плотность вероятности $V(\tilde{m}, t)$ (3.5) удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^1 V(\tilde{m}, t) d\tilde{m} = 1.$$

В качестве примера применения основной формулы работы (3.12) для нахождения статистических характеристик как усредненного

эффективного показателя преломления среды $\tilde{m}(z)$, так и волнового поля $U(z)$ (1.5) на выходе из слоя, приведем расчетные выражения для первого и второго моментов случайной величины \tilde{m} , а также для отражательной способности слоя — среднего квадрата модуля коэффициента отражения R от слоя:

a) $\mathcal{H}(\tilde{m}) = \tilde{m}$:

$$\langle \tilde{m} \rangle = 2\sqrt{2/\pi t} \exp(-t/4) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\text{ch}2\omega}} \ln(\sqrt{\text{ch}2\omega} + \sqrt{\text{ch}2\omega-1}) x e^{-x^2} dx; \quad (3.13)$$

б) $\mathcal{H}(\tilde{m}) = \tilde{m}^2$:

$$\langle \tilde{m}^2 \rangle = \sqrt{2/\pi t} \exp(-t/4) \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{\text{ch}2\omega-1}} + \frac{\ln(\sqrt{\text{ch}2\omega} + \sqrt{\text{ch}2\omega-1})}{\sqrt{\text{ch}2\omega}} \right] \frac{e^{-x^2}}{\text{ch}2\omega} dx; \quad (3.14)$$

в) $\mathcal{H}(\tilde{m}) = |R|^2 = (1 - \tilde{m}) / (1 + \tilde{m})$:

$$\langle |R|^2 \rangle = 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-t/4) \int_0^{\infty} (\text{ch}\omega)^{-1} x^2 e^{-x^2} dx, \quad (3.15)$$

где $\omega = x\sqrt{t}$.

Отметим, что формула (3.15) была впервые получена в работе [4]. Графики функций, определяемых формулами (3.13) и (3.15), в зависимости от безразмерного параметра t (3.4) (для отражательной способности слоя $\langle |R|^2 \rangle$) $t = D_u L$, так как коэффициенты отражения и прохождения через слой определяются значениями эффективного показателя преломления на обеих границах слоя) приведены на рис. 1. Сравнение этих кривых приводит к выводу, что среднее значение (сплошная линия) $\langle \tilde{m} \rangle$ позволяет дать правильное качественное описание процесса рассеяния излучения внутри слоя. Уменьшение среднего значения эффективного показателя преломления $\langle \tilde{m} \rangle$ сопровождается усилением обратного рассеяния в слое, т. е. увеличением отражательной способности слоя $|R|^2$ (штрихпунктирная кривая). Хотя по определению (1.3) эффективный показатель преломления положителен и отличен от нуля, но начиная со значений $t \geq 9$ величина $\langle \tilde{m} \rangle$ близка к нулю и слой становится практически непрозрачным $\langle |R|^2 \rangle \approx 0,985$.

Используя формулы (3.13) и (3.14) становится возможным исследовать зависимость от безразмерного параметра t дисперсии

Флуктуаций усредненного эффективного показателя преломления

$$\sigma_m^2 = \langle \tilde{m}^2 \rangle - \langle \tilde{m} \rangle^2,$$

которая приведена на рис. 2. При $t \approx 0,83$, когда $\langle \tilde{m} \rangle = 0,40$ и $\langle |\tilde{R}|^2 \rangle \approx 0,48$ дисперсия флуктуаций σ_m^2 достигает максимума.

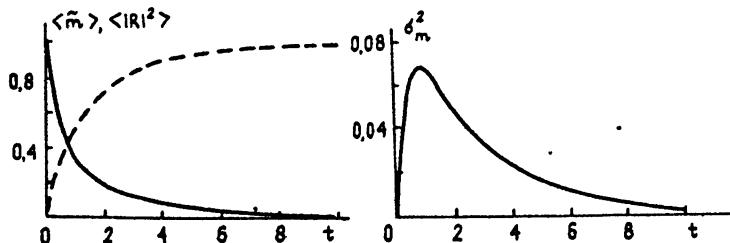


Рис. 1.2.

4. Влияние модели среды и масштаба ее неоднородностей на статистические характеристики задачи

Границы применимости полученных результатов определяются условиями справедливости УФП (2.6), а именно, неравенствами (2.11) и (2.12), а также возможностью перейти к уравнениям, усредненным на расстояниях порядка длины волны [5, 13]. Следовательно, УФП (2.6) и вытекающие из него выражения для плотности вероятности $V(\tilde{m}, t)$ (3.5) и основной расчетной формулы (3.12) остаются справедливыми при любых масштабах неоднородностей среды, удовлетворяющих этим условиям.

В простейшем предельном случае $ka \rightarrow 0$ для любой модели корреляционной функции приходим к известным результатам для δ -коррелированного процесса (2.10а) [5, 6]. Более интересным представляется анализ другого предельного случая $ka \gg 1$, когда коэффициенты диффузии (2.10а) для экспоненциальной (2.10б) и гауссовой (2.10в) корреляционных функций приобретают вид

$$б) D_0^e = \frac{1}{2} \sigma_\varepsilon^2 k^2 a, \quad D_u^e = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{8a}, \quad D_\psi^e = \frac{1}{4} \sigma_\varepsilon^2 k, \quad (4.1a)$$

$$D_0^e = 2D_\psi^e(ka) = 4D_u^e(ka)^2;$$

$$в) D_0^g = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sigma_\varepsilon^2 k^2 a, \quad D_u^g = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sigma_\varepsilon^2 k^2 a \exp[-(ka)^2], \quad D_\psi^g = \frac{1}{4} \sigma_\varepsilon^2 k, \quad (4.1b)$$

$$D_0^g = \sqrt{\pi} D_\psi^g(ka) = D_u^g \exp(ka)^2.$$

В этом случае при заданном масштабе неоднородностей среды и фиксированном значении безразмерного параметра $t = D_u^g L^e = D_u^g L^g = \text{const}$ толщины слоев с одинаковой отражательной способностью $\langle |R|^2 \rangle$, но различными рассматриваемыми корреляционными функциями неоднородностей среды будут связаны соотношением

$$L^g/L^e \approx (ka)^2 \exp[-(ka)^2].$$

Это означает, что для двух слоев случайно-неоднородной среды одинаковой толщины с одинаковым фиксированным масштабом неоднородностей слой с гауссовой функцией корреляции (в) будет обладать значительно меньшей отражательной способностью, чем слой с экспоненциальной корреляционной функцией (б).

Обычно в задачах распространения волн в неоднородных средах условие $ka \gg 1$ считается достаточным для применимости приближения геометрической оптики (ВКБ-метода). Однако для исследуемого случая распространения излучения в случайно-неоднородной среде использование геометрооптического подхода связано с необходимостью выполнения дополнительного условия, а именно, $t = D_u^g L \ll \sigma_e^2/8$ [14]. Следовательно, для рассматриваемой задачи область применимости приближения геометрической оптики может занимать весьма узкий интервал по шкале безразмерного параметра t , в пределах которого эфективный показатель преломления среды \tilde{n} близок к единице, а отражательная способность слоя близка к нулю. При этом для модели экспоненциальной функции корреляции (4.1а) при учете условия $L \gg a$ (2.12) метод геометрической оптики вообще неприменим. При описании же модели среды с гауссовой функцией корреляции (4.1б) коэффициент диффузии D_u^g при условии $ka \gg 1$ ничтожно мал, в силу чего геометрооптическое приближение, когда $\langle \tilde{n} \rangle = \text{const}$ и $\langle |R|^2 \rangle = \text{const}$, справедливо для слоев, толщина которых весьма велика.

Из формул (4.1а) и (4.1б) вытекает, что при условии $ka \gg 1$ коэффициенты диффузии D_u и D_ψ малы по сравнению с коэффициентом D_0 и ими можно пренебречь. В этом приближении в соответствии с (2.6) УФП для одноточечной плотности вероятности $P(\varphi, z)$ фазы φ коэффициента отражения R от слоя имеет вид

$$\frac{\partial P(\varphi, z)}{\partial z} = 2D_0 \frac{\partial^2 P(\varphi, z)}{\partial \varphi^2},$$

т. е. в этом случае модуль коэффициента отражения $|R|$ практически постоянен, а его фаза $\varphi = \arg R$ распределена по нормальному закону.

Еще раз подчеркнем, что все предыдущие выводы в общем случае справедливы при выполнении условия $\sigma_{\varepsilon}ka \ll 1$ (2.11), которое является новым при описании распространения волн в плоскослоистых средах, неоднородности которых имеют конечный радиус корреляции.

В заключение отметим, что распределение случайного эффективного показателя преломления среды (3.5) дает возможность исследования произвольных одноточечных статистических характеристик волнового поля, в частности, зависимости этих характеристик от выбора модели среды и масштаба ее неоднородностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградова М. Б., Гусев В. Д. //Радиотехника и электроника. 1974. Т.19. № 3. С.481.
2. Golynski S.M., Gusev V.D. //Phys.Letters A. 1990. V.154. N 3,4. P.145.
3. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. - М.:Наука, 1967. С. 291.
4. Papanicolaou G.C.//SIAM J. Appl.Math. 1971. V.21. N 1. P.13.
5. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. - М.: Наука, 1986. С. 115.
6. Golynski S.M., Gusev V.D.//Waves in Random Media. 1992. V. 2. N 2. P.111.
7. Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. - М.: Высшая школа, 1990. С.361.
8. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. - М.: Сов. радио, 1961. С. 86.
9. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. С. 412.
10. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. - М.: Наука, 1977. С. 102.
11. Morisson J:A., Papanicolaou G.C., Keller J.B.//Comm.Pure Appl.Math. 1971. V. 24. N 4. P.473.
12. Magnus W., Oberhettinger F., Sony R.P. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. - New York: Springer-Verlag, 1966. P.463.
13. Кляцкин В. И., Татарский В. И.//Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 10. С. 1040.
14. Гусев В. Д., Голынский С. М.//Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1990. Т. 31. № 5. С. 90.

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF AN EFFECTIVE REFRACTIVE
INDEX IN STRATIFIED RANDOM MEDIA

S. M. Golynski, V. D. Gusev

We introduce an effective refractive index of a onedimensional random medium with the help of a generalized eikonal equation. It defines uniquely a wave field propagating in this medium under the given boundary conditions. The probability density of the averaged effective refractive index and some of its statistical characteristics, in particular, the mean value and the variance of its fluctuations are found out due to the markovian diffusion approximation. The conditions of the obtained results applicability for random inhomogeneities with a finite correlation radius are discussed.

УДК.621.396.6.001.63:621.371

**МУЛЬТИСТАТИЧЕСКИЙ МЕТОД КОМПЕНСАЦИИ РЕФРАКЦИОННЫХ ОШИБОК
В РАДИОЛОКАЦИИ И СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМАХ НАВИГАЦИИ**

Д. Г. Мальковский

Предлагается вариант мультистатического метода компенсации ошибок определения координат объекта, вызванных рефракцией, без использования модели профиля показателя преломления атмосферы, применимый в радиолокации и спутниковых системах навигации.

Все возрастающие требования к точности определения координат объектов в существующих и, тем более, разрабатываемых системах радиолокации и спутниковой навигации наталкиваются на принципиально неустранимые рефракционные ошибки при использовании традиционного метода компенсации с помощью модели профиля показателя преломления от высоты. Неустранимость обусловлена отличием реального мгновенного профиля показателя преломления от модельного (см., например, [1, 2, 3]).

В [3] изложен универсальный подход - мультистатический метод компенсации, который не нуждается в какой-либо модели профиля показателя преломления и использует для компенсации рефракционных ошибок только одновременно измеренные "кажущиеся" координаты объекта.

Проведенный в [3] анализ качества компенсации дал удовлетворительные результаты даже для небольших углов места.

Модификация этого метода, направленная на повышение точности за счет измерения только дальностей до объекта, изложена в [4] в применении к радиолокации (объект находится за или в атмосфере, измерители - на поверхности Земли).

В данной работе рассматривается возможность применения общих принципов, изложенных в [3, 4], в спутниковых системах навигации и радиолокации.

Рассмотрим вариант, применимый для спутниковых систем навигации (объект и спутники - измерители находятся в или за атмосферой).

Конкретная реализация этого метода зависит от многих условий: параметров сигналов, количества и характеристик орбит спутников, заданных точностей определения координат и пр., поэтому здесь целесообразно ограничиться рассмотрением общих принципов.

Предположим, что 1) определение координат объекта x, y, z происходит с помощью измерения дальностей L_{10} от объекта до i -го спутника ($i = 1, \dots, n$), координаты которого x_i, y_i, z_i известны. 2) среда плоско-слоистая с неизвестным профилем показателя преломления $n(z)$ (это значительно упрощает математические выкладки, но не ограничивает общности подхода). Известно [4, 5], что "истинная" дальность от i -го спутника до объекта L_{10} в первом приближении равна: $L_{10} = L_{10}(1 - J_{10}/2(z_i - z))$ - тропосферная рефракция, $L_{10} = L_{10}(1 + J_{10}/2(z_i - z))$ - ионосферная рефракция,

где $J_{10} = \int_{z}^{z_i} \delta\mu(z) dz$ - неизвестный интегральный параметр, $\delta\mu = n^2(z) - n_0^2$, n_0 - значение показателя преломления в точке положения объекта. Между параметрами J_{10} существует связь: $J_{10} = J_{j0} + J_{ij}$, где $J_{ij} = \int_z^{z_i} \delta\mu(z) dz$. Итак, имеем $N+3$ неизвестных x, y, z, J_{10}, J_{ij} ($j = 1, \dots, N$) и N уравнений

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = L_{10}^2, \quad i = 1 \dots N. \quad (1)$$

Чтобы привести в соответствие число неизвестных и число уравнений, нужно либо сделать еще одно предположение и пренебречь параметром J_{ij} (это верно для источников, которые находятся далеко за рефрагирующей средой), либо провести дополнительные измерения дальностей от i -го спутника до j -го ($j = 1, \dots, N$) и вычислить эти добавочные параметры из уравнения (2)

$$(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 = L_{ij}^2(1 \pm J_{ij}/2(z_i - z_j)) \quad (2)$$

+ или - в правой части выбирается в соответствии с рассматриваемой средой: ионосфера или тропосфера.

Задача свелась к решению системы из четырех уравнений с четырьмя неизвестными: x, y, z, J_{10} , т. е. необходимо иметь четыре измерения дальностей от объекта до четырех спутников и три измерения дальностей между i -м спутником и остальными тремя.

Естественно, задача упростится, если *a priori* известно, что объект находится на Земле ($z = 0$).

Этот метод может, вероятно, заменить или дополнить ныне применимые двухчастотный и модельный методы компенсации в существующих (Navstar и пр.) и разрабатываемых системах GPS.

Расширяя возможности метода [3] в радиолокации, предлагается использовать избыточность информации, полученную при определении элементов траектории объекта (координаты, скорость, ускорение и пр.) по многократным измерениям координат с одного радара.

Предположим, что радар, расположенный в точке с координатами $x = 0, y = 0, z = 0$ в моменты t_i ($i = 1, \dots, J$) измеряет координаты объекта $L(t_i), \epsilon(t_i), \beta(t_i)$ (дальность, угол места, азимут).

Считая среду плоско-слоистой с неизвестным профилем показателя преломления $n(z)$, используя известные формулы из [5, 6] для траектории лучей, запишем выражение для измеренной в момент t_i дальности до объекта $L(t_i)$ и разложим его в ряд по малому параметру $\delta\mu/\sin^2\epsilon \ll 1$

$$L(t_i) = c \int_0^{s(t_i)} \frac{ds}{v_{gp}} = \int_0^{z(t_i)} dz / (\delta\mu + p_{z0}^2(t_i))^{1/2} = \quad (3)$$

$$= \frac{Z(t_i)}{p_{z0}(t_i)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n - 1)!! J_n}{2^n n! p^{2n+1}(t_i)},$$

где $J_n = \int_0^{z(t_i)} \delta\mu^n(z) dz$, v_{gp} – групповая скорость, взятая, например,

равной $c \cdot n$ (ионосфера), $\delta\mu(z) = n^2(z) - n^2(0)$, $p_{z0} = (0) \sin \epsilon$, $p_{x0} = n(0) \cos \epsilon \sin \beta$, $p_{y0} = n(0) \cos \epsilon \cos \beta$.

Сделаем следующие предположения:

- 1) Отбросим все члены ряда в выражении (3), начиная с $N + 1$, если выполнено условие $\max(\delta\mu) \ll \sin^2\epsilon$.
- 2) Разложим $z(t_i)$ в ряд в точке t_i и ограничимся N членами

$$z(t_1) = z(t_j) + \sum_{m=1}^M \frac{d^m z}{dt^m} \Big|_{t=t_j} \left. \frac{t_1 - t_j}{m!} \right. \quad (4)$$

если выполнено условие

$$\frac{d^{m+1} z}{dt^{m+1}} \Big|_{t_j} (t_1 - t_j) < \frac{d^m z}{dt^m} \Big|_{t_j}. \quad (5)$$

3) Интеграл $J_n(t_1) = \int_0^{z(t_1)} \delta \mu^n(z) dz$ преобразуем, используя (4),

и ограничимся K членами $J_n(t_1) = \sum_{k=0}^K J_{nk}$

$$J_{nk} = \int_0^{\Delta z_k} \delta \mu^n(z + \sum_{l=0}^k \Delta z_l) dz, \quad \Delta z_k = \frac{d^k z}{dt^k} \Big|_{t_j} \frac{(t_1 - t_j)^k}{k!}. \quad (6)$$

Преобразованное в соответствии с этими предположениями выражение (3) имеет вид

$$L(t_1) = \sum_{m=0}^M \frac{d^m z}{dt^m} \Big|_{t_j} \frac{(t_1 - t_j)^m}{m!} + \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n! p_{x_0}^{2n+1}(t_1)} J_{nk} \quad (7)$$

и содержит $M + 1 + (K + 1)N$ неизвестных вида $\frac{d^m z}{dt^m} \Big|_{t_j}$ - параметры траектории, J_{nk} - интегральные параметры.

Если мы располагаем J измерениями ($J \geq M + 1 + (K + 1)N$) координат объекта, то определение неизвестных сводится к решению линейной системы уравнений, каждое уравнение которой имеет вид (7) ($i = 1, \dots, J$); x и y координаты объекта находятся из следующих соотношений [6]

$$x(t_1) = p_{x_0}(t_1)L(t_1), \quad y = p_{y_0}(t_1)L(t_1). \quad (8)$$

Совокупность решений системы (7) и выражений (8) дают истинные координаты объекта в момент t_j . Наряду с этим можно получить истинные x -, y -, z -составляющие скорости, другие элементы траектории и

интегральные параметры J_{n_1} .

Предложенный метод можно обобщить как на сферически-неоднородные среды, так и на среды, имеющие другие выражения для групповой скорости (тропосфера, гидролокация, оптическая локация и пр.).

Замечательно и то, что метод пригоден для случайно-неоднородных сред, если верно предположение о слоистости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бин Б. Р., Даттон Е. Дж. Радиометрология. -Л.:Гидрометеоиздат, 1971.
2. Крэйн Р.К. //ТИИЭР. 1981. Т.69. N 2. С.64.
3. Кутуков В. Б., Мальковский Д. Г. Препринт РТИ АН СССР N 832. М., 1983.
4. Кутуков В. Б., Мальковский Д. Г. //Тезисы докл. XI Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. - Л.:1 984. Т. 2. С. 70.
5. Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И., Виноградова А. Г. Прохождение радиоволн через атмосферу Земли. - М.: Радио и связь, 1983.
6. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. - М.: Наука, 1980.

Радиотехнический институт
им. академика А. Л. Минца

Поступила в редакцию
27 февраля 1992 г.,
объединенная статья
23 июня 1992 г.

THE MULTISTATIC REFRACTION ERROR COMPENSATION METHOD IN SATELLITE NAVIGATIONAL SYSTEMS

D. G. Mal'kovskiy

The variant of the multistatic method for compensation of positioning errors, caused by refraction, without any model of refractive index media is suggested for satellite navigational systems.

УДК 621.37

**ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА КОММУТАЦИИ НА ФОРМИРОВАНИЕ
НАНОСЕКУНДНЫХ РАДИОИМПУЛЬСОВ**

В. А. Августинович, С. Н. Артеменко

Получены рекуррентные соотношения для построения огибающих радиоимпульсов, формируемых при накоплении и выводе СВЧ-энергии из объемных резонаторов на основе прямоугольных волноводных тройников. В рамках принятой модели процесса коммутации выполнен теоретический анализ его влияния на параметры радиоимпульсов. Результаты анализа сравнены с экспериментальными данными. Приведены рекомендации по проектированию формирователей наносекундных радиоимпульсов.

1. Несмотря на значительное количество публикаций, посвященных проблеме формирования мощных СВЧ-импульсов наносекундной длительности путем накопления и быстрого вывода энергии электромагнитного поля из объемных резонаторов [1-5], до настоящего времени нет работ по исследованию причин существенного отклонения параметров формируемых радиосигналов от расчетных. Так, например, известно [4, 5], что амплитуда получаемых сигналов и запас энергии в них обычно в 1,5 - 2 раза ниже ожидаемых. Существенно отличаются от предсказываемых теорией форма огибающей импульсов и их длительность. Все это вносит значительные неопределенности в рабочие параметры разрабатываемых формирователей.

В настоящей работе предпринята попытка путем моделирования процесса коммутации, управляющего выводом энергии, проанализировать степень его влияния на параметры радиоимпульсов в формирователях с накопительными резонаторами на основе прямоугольных волноводных тройников [2-5], а также, используя результаты анализа, выработать рекомендации по улучшению рабочих характеристик таких формирователей.

Схематично

устройство

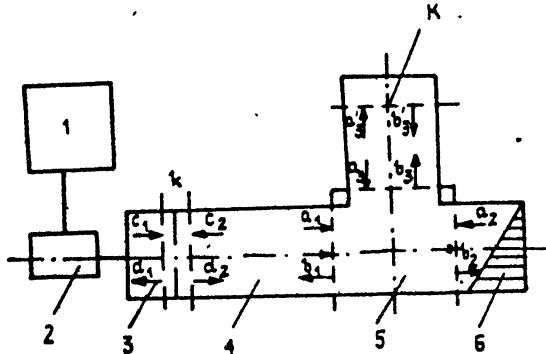


Рис 1.

формирователя наносекундных радиоимпульсов с накопительным резонатором на основе π -тройника изображено на рис. 1, где 1 - СВЧ-резонатор, 2 - ферритовый вентиль, 3 - волноводный тракт, 4 - накопительный резонатор, 5 - тройник, 6 - согласованная нагрузка, K - элемент ввода энергии, K - газоразрядный СВЧ-коммутатор, a_1 , b_1 , c_1 , d_1 - падающие и отраженные волны в волноводной системе формирователя.

2. Удобным параметром, через который можно установить влияние процесса коммутации на характеристики радиоимпульсов, является коэффициент отражения $\Gamma(t)$ в плоскости коммутации. Это следует из того, что, используя метод матрицы рассеяния [6], можно достаточно просто определить зависимость от $\Gamma(t)$ амплитуды волн b_1 и b_2 (рис. 1), соответственно отраженной от тройника и излученной в нагрузку при выводе энергии.

Действительно, согласно этому методу для падающих и отраженных волн в резонансной системе формирователя можно записать следующие равенства:

$$\begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-k^2} & jk \\ jk & -\sqrt{1-k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ 0 \\ a_3(t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Из (1) получаем

$$d_1(t) = -\sqrt{1-k^2} c_1(t) + jkc_2(t).$$

$$d_2(t) = jkc_1(t) - \sqrt{1-k^2} c_2(t). \quad (3)$$

Тогда для $a_1(t)$, учитывая взаимное временное запаздывание волн в системе и условие $k \ll 1$, находим

$$\begin{aligned} a_1(t) &= d_2(t-T_2/2) e^{-\gamma/2} = jkc_1 e^{-\gamma/2} - \\ &- \sqrt{1-k^2} b_1(t - T_2) e^{-\gamma} \approx - b_1(t - T_2) e^{-\gamma}, \end{aligned} \quad (4)$$

где T_2 , γ - время двойного пробега волны вдоль резонатора и затухание волны при двойном пробеге. Далее по определению коэффициент отражения $\Gamma(t)$ в плоскости коммутации дается соотношением

$$\Gamma(t) = b'_3(t)/a'_3(t). \quad (5)$$

Так как

$$a_3(t) = jb'_3(t - \frac{T_3}{2}) e^{-\frac{\alpha(t)}{2}},$$

$$a'_3(t) = jb_3(t - \frac{T_3}{2}) e^{-\frac{\alpha(t)}{2}},$$

то $\Gamma(t)$ можно представить в виде

$$\Gamma(t) = - \frac{a_3(t + T_3/2)}{b_3(t - T_3/2)} e^{\alpha(t)}, \quad (6)$$

где T_3 , $\alpha(t)$ - соответственно время двойного пробега волны вдоль бокового плеча тройника и затухание волны в этом плече при двойном пробеге.

Из (2) и (6) для волн $b_1(t)$, $b_2(t)$ и $b_3(t)$ получаем

$$b_1(t) = - \frac{a_1(t)}{2} - \Gamma(t - \frac{T_3}{2}) \frac{b_3(t - T_3)}{\sqrt{2}} e^{-\alpha(t)},$$

$$b_2(t) = - \frac{a_1(t)}{2} - \Gamma(t - \frac{T_3}{2}) \frac{b_3(t - T_3)}{\sqrt{2}} e^{-\alpha(t)}, \quad (7)$$

$$b_3(t) = \frac{a_1(t)}{\sqrt{2}}.$$

Используя (4), и (7), окончательно находим интересующие нас зависимости:

$$b_1(t) = -\frac{a_1(t)}{2} \Gamma(t - \frac{T_3}{2}) \frac{a_1(t - T_3)}{\sqrt{2}} e^{-\alpha(t)} \approx \quad (8)$$

$$\approx -\frac{1}{2} \left[b_1(t - T_2) + \Gamma(t - \frac{T_3}{2}) b_1(t - T_2 - T_3) e^{-\alpha(t)} \right],$$

$$b_2(t) = \frac{a_1(t)}{2} - \Gamma(t - \frac{T_3}{2}) \frac{a_1(t - T_3)}{2} e^{-\alpha(t)} \approx \quad (9)$$

$$\approx -\frac{1}{2} \left[b_1(t - T_2) - \Gamma(t - \frac{T_3}{2}) b_1(t - T_2 - T_3) e^{-\alpha(t)} \right].$$

При заданных законах изменения во времени коэффициента отражения $\Gamma(t)$ и затухания $\alpha(t)$ рекуррентные соотношения (8), (9) позволяют построить огибающие амплитуд отраженной от тройника и выходной волн в любой момент времени.

3. Выбор модели процесса коммутации основывался на результатах экспериментов по имитации на низком уровне ВЧ-мощности плазменного канала СВЧ-разряда коммутатора тонким медным проводником.

Как показали эксперименты, в зависимости от конструкции тройника (длины его бокового плеча, соотношения между широкой и узкой стенками волновода и т.п.) по мере погружения проводника внутрь бокового плеча, вплоть до полного перемыкания стенок волновода в месте коммутации, происходит либо плавное и практически полное открывание резонансной системы, либо сначала ее полное открывание, а затем "подзапирание", иногда до такого уровня, при котором от тройника отражается до 1/4 подводимой к нему ВЧ-мощности.

В соответствии с этим процессы коммутации задавались следующими законами изменения коэффициента отражения $\Gamma(t)$ в плоскости коммутации:

$$\Gamma_1(t) = Ae^{-t/\tau} - B, \quad (10)$$

$$\Gamma_2(t) = (5,82 e^{-t/\tau} - 4,82)e^{-t/\tau}, \quad (11)$$

где τ - постоянная переключения, A, B - численные коэффициенты. Первое отражение при $A = 2, B = 1$ отвечает случаю полного открывания тройника. При $A = 1, B = 0$ тройник открывается не полностью. Такая ситуация возможна, например, когда при выводе энергии СВЧ-разряд не успевает пройти все стадии развития и перемыкание плазменным каналом стенок волновода не происходит. Выражение (11) соответствует случаю с "подзапиранием" тройника. Причем коэффициенты при экспонентах в (14) выбраны из условия обращения $\Gamma_2(t)$ в -1 через время $t \approx \tau$. Кроме того, закон $\Gamma_2(t)$ выбран таким, что при $t > \tau$ от тройника отражается $\sim 1/4$ подводимой к нему ВЧ-мощности и $\sim 1/4$ проходит в нагрузку. Моделирование такого сильного "подзапирания" может позволить более наглядно выявить степень его влияния на параметры формируемых сигналов.

Возможные потери СВЧ-энергии в плазме разряда задавались изменением во времени затухания $\alpha(t)$ по законам

$$\alpha_1(t) = \alpha_0(1 - e^{-t/\tau}), \quad (12)$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_0(1 - e^{-t/\tau})e^{-t/\tau}. \quad (13)$$

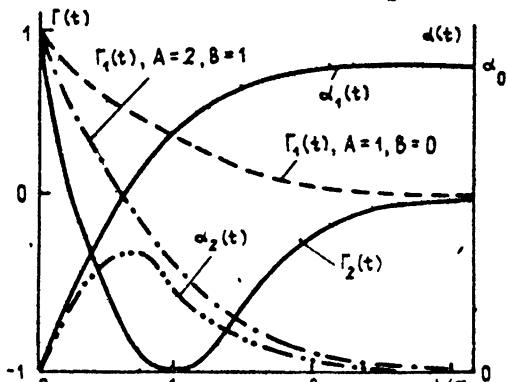


Рис. 2.

Соотношение (12) описывает появление при коммутации определенного уровня дополнительных потерь энергии, тогда как (13) позволяет учесть только влияние потерь, идущих на образование плазменного канала. Графики зависимостей $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$, $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ приведены на рис. 2.

Типичные картины огибающих отраженной от тройника волны и формируемых радиоимпульсов, построенные на основе выражений (8) – (13), представлены на рис. 3 (а) – штриховая кривая $\Gamma_1(t)$, $A = 1, B =$

$= 0$, $\alpha = 10^{-3}$; $\Gamma_1(t)$, $A = 2$, $B = 1$, $\alpha(t) = \alpha_1(t)$, $\alpha_0 \approx 10^2$; штрих-пунктирная - $\Gamma_1(t)$, $A = 2$, $B = 1$, $\alpha_0 \approx 10^{-3}$; точечная - $\Gamma_2(t)$, $\alpha(t) = \alpha_1(t)$, $\alpha_0 \approx 1$; сплошная - $\Gamma_2(t)$, $\alpha(t) = 10^{-3}$; сплошная - $\Gamma_2(t)$, $\alpha = 10^{-3}$; штриховая - $\Gamma_1(t)$, $A = 1$, $B = 0$, $\alpha = 10^{-3}$; $\Gamma_1(t)$, $A = 2$, $B = 1$, $\alpha(t) = \alpha_1(t)$, $\alpha_0 = 10^2$; точечная - $\Gamma_2(t)$, $\alpha(t) = \alpha_1(t)$, $\alpha_0 = 1$.

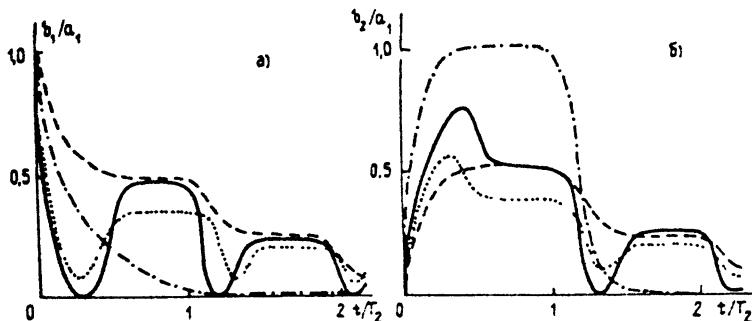


Рис 3

Как видно из рисунка форма огибающих существенно зависит как от закона изменения коэффициента отражения, так и от характера потерь в плазме. Так, как и следовало ожидать, формирование практически прямоугольных импульсов с минимальной длительностью, равной времени двойного пробега волны вдоль резонатора, возможно только при полном открывании тройника, отсутствии потерь в плазме и выполнении условия $2t < t_2$. При этом достигается максимальный коэффициент усиления формирователя близкий к теоретическому пределу и соответственно практически полный вывод энергии. Появление же достаточно сильного затухания в плазме ($\alpha_0 \approx 0.1 \div 1$), "подзапирание" тройника или неполное перемыкание стенок волновода приводят к искажению формы импульсов, увеличению их длительности и снижению амплитуды и запаса энергии в импульсе.

Это наглядно иллюстрируют рис. 4 и 5, где изображены, соответственно, расчетные зависимости коэффициента усиления M^2 бегущей волны накопительного резонатора 3-сантиметрового диапазона длин волн с H_{10n} видом колебаний от длины резонатора L (рис. 4, кривая 1, а также коэффициента усиления M_1^2 формирователя (рис. 4, кривая 2, 3) и эффективности вывода энергии η (рис. 5, кривые 1-3) от L при различных законах изменения $\Gamma(t)$, $\alpha(t)$ и различных значениях τ . (Рис. 4 - кривая 1 - M^2 , M_1^2 , $\Gamma_1(t)$, $\alpha = 10^{-3}$; 2 - M_1^2 , $\Gamma_2(t)$, $\alpha = 10^2$; 3 - M_1^2 , $\Gamma_1(t)$, $\alpha_0 \approx 10^{-3}$).

$= 10^{-3}$; 3 - M_1^2 , $\Gamma_2(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_0 \approx 1, 10^2$.) (Рис. 5 - кривая 1 - $\Gamma_1(t)$, $\alpha = 10^{-3}$; 2 - $\Gamma_2(t)$, $\alpha \approx 10^{-3}$; 3 - $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$, $\alpha_1(t)$.)

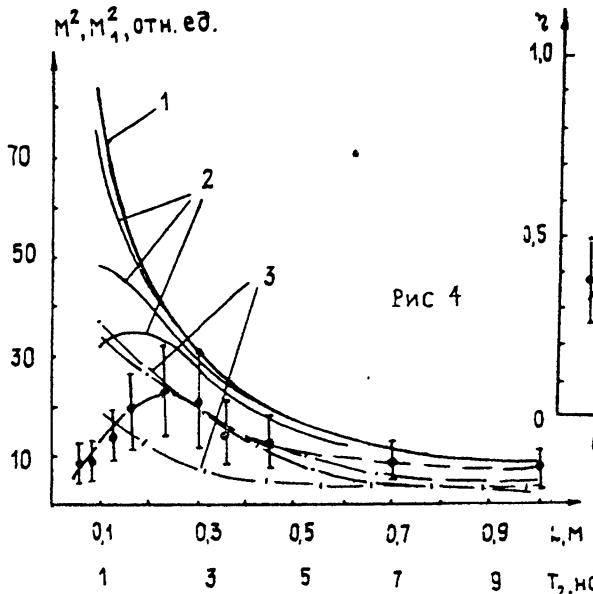


Рис 4

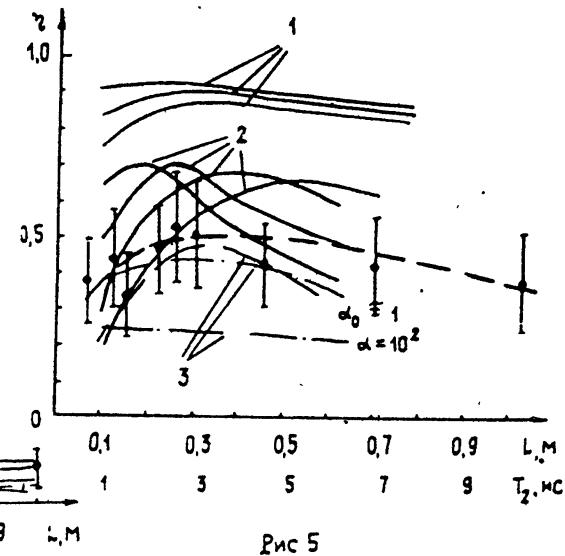


Рис 5

Как видно из рисунков при уменьшении длины накопительного резонатора от 1 до 0,05 м (что эквивалентно уменьшению времени двойного пробега от ~ 10 до $\sim 0,5$ нс) коэффициент усиления M^2 возрастает с 8-9 до 22-23 дБ. При этом существенные отклонения M^2 от M^2 в случае отсутствия потерь в плазме и при полном перемыкании стенок волновода начинаются при длине резонатора, когда постоянная переключения τ становится сравнимой или больше времени двойного пробега волны вдоль резонатора. Наличие же значительных потерь в плазме или неполное перемыкание стенок приводят к снижению коэффициента усиления формирователя независимо от длины резонатора. Аналогичное поведение наблюдается и в зависимости η от L .

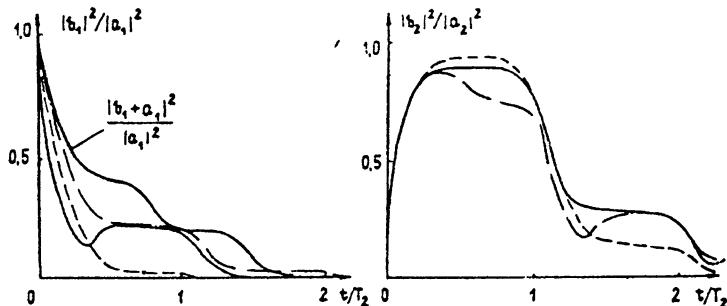


Рис 6

4. Типичные осциллограммы огибающих отраженной от тройника волны и формируемых радиоимпульсов, получаемые экспериментально в формирователях трехсантиметрового диапазона длин волн, приведены на рис. 6. Сравнение этого рисунка с рис. 3 показывает, что форма этих сигналов достаточно хорошо коррелирует со всем многообразием форм расчетных сигналов.

На рис. 4 и 5 пунктирными линиями изображены экспериментальные зависимости M_1^2 и η от L для формирователей 3-сантиметрового диапазона. При этом коэффициент усиления формирователя измерялся методом сравнения, а значение эффективности вывода определялось из выражения

$$\eta = \frac{M_1^2 t_u \omega (1 + \beta)}{48Q(1 - e^{-t_u/\tau_0})^2}, \quad (14)$$

где t_u - длительность выходного импульса по уровню 0,5, ω - циклическая рабочая частота резонатора, β - коэффициент связи резонатора с питающим ВЧ-трактом, Q - нагруженная добротность резонатора и τ_0 - его постоянная затухания. Из сравнения экспериментальных и расчетных кривых рис. 4 и 5 можно сделать вывод о том, что определяющую роль в формировании параметров выходных сигналов играют дополнительные потери энергии при ее выводе, которые могут возникать либо в плазме разряда, либо в боковом плече тройника при неполном перемыкании волновода. Механизм возникновения дополнительных потерь в боковом плече может быть связан с тем, что при неполном перемыкании стенок волновода в плече организуется низкодобротный резонатор со связью близкой к критической, в силу чего значительная часть подводимой к нему энергии рассеивается в его стенах. Общей закономерностью для экспериментальных зависимостей η и M_1^2 от L является нарастание их отставания, по мере уменьшения длины резонатора, от расчетных в случае отсутствия потерь в плазме или резонансных потерь в боковом плече, что, по-видимому, связано как с увеличением при этом относительной доли энергии, идущей на развитие разряда, так и, начиная с некоторой длины резонатора, с незавершенностью процесса развития разряда за время вывода энергии. Поэтому вполне логичен максимум в зависимостях η и M_1^2 от L при такой длине резонатора, когда длительность формируемого импульса сравнима с постоянной переключения.

5. Таким образом, сопоставление экспериментальных и расчетных результатов в принципе подтверждает справедливость принятой модели

процесса коммутации и тем самым дает ответ на вопрос о причинах существенного отклонения параметров формируемых импульсов от ожидаемых. Вместе с тем анализ численных расхождений в каждом конкретном случае требует детального исследования процесса коммутации на уровне изучения динамики формирования плазменного канала разряда и определения его электрофизических характеристик. Наряду с этим из работы достаточно очевидно вытекают следующие рекомендации, учет которых может быть полезным при проектировании формирователей:

а) для достижения максимального коэффициента усиления формирователя и максимальной эффективности вывода энергии необходимо использовать накопительные резонаторы с временем двойного пробега волны вдоль резонатора сравнимым с временем развития разряда в коммутаторе;

б) для обеспечения завершенности процесса развития разряда при выводе энергии и уменьшения затрат накопленной энергии в систему для поджига разряда желательно вносить энергию извне, например используя для этой цели лазер либо пучок электронов;

в) при конструировании накопительных резонаторов необходимо обращать особое внимание на создание условий для полного открывания тройника при выводе энергии, что может быть обеспечено, например соответствующими согласующими элементами в месте сочленения волноводов тройника.

В заключение авторы благодарят Ю. Г. Юшкова за постоянную поддержку и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диденко А. Н., Юшков Ю. Г. Мощные СВЧ-импульсы наносекундной длительности. - М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 112.
2. Диденко А. Н., Зеленцов В. И. и др. //Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17. № 8. С. 1545.
3. Девятков Н. Д., Диденко А. Н., Замятина Л. Я. и др. //Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. № 6. С. 1227.
4. Альварец Р., Биркс Д., Берн Д. и др. //Атомная техника за рубежом. 1981. № 11. С. 36.

5. Alvarez R.A., Byrne D.R., Johnson R.M. // Rev. Sci. Instrum. 1986. V.57. N 10. P.2475.
6. Альтман Дж. Устройства СВЧ. - М.: Мир, 1968. С. 488.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
при Томском политехническом институте

Поступила в редакцию
19 декабря 1991 года

INFLUENCE THE PROCESS OF COMMUTATION IN FORMING
THE NANOSECONDS RF-PULSES

V. A. Augustynovich, S. N. Artyomenko

The recurrent correlations for defining the RF-pulses envelope which are formed at storage and extraction RF-energy from the resonant cavities there are received. At the basis of model process commutation the theoretical analysis influence of it for the parameters RF-pulses there are carried out. The results of analysis are compared from the experimental data. Recommendations of projecting the devices for generating of nanoseconds RF-pulses are resulted.

УДК 621.371:551.510.535

**ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОИМПУЛЬСОВ В ПРОЗРАЧНЫХ
ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ**

А. В. Лапин, Н. П. Чубинский

В работе рассматриваются искажения импульсных радиосигналов при прохождении диспергирующей среды с квадратичной фазовой зависимостью. Количественно эти искажения определяются относительным уширением импульса. Проведенный анализ показывает, что степень искажения огибающей определяется значением только одного безразмерного параметра и практически не зависит от типа спектра сигнала. Этот параметр, названный дисперсионной расфазировкой на спектральном интервале, легко вычисляется и оказывается очень полезным для оценки степени уширения радиосигналов. Приведен пример его использования для простейшего случая распространения импульса через параболический ионосферный слой.

В настоящее время создается большое количество радиосистем различного назначения, в которых передаваемый сигнал, распространяясь через диспергирующую среду, искажается. Степень этих искажений определяется величиной амплитудных и фазовых возмущений, вносимых средой, а также шириной спектра сигнала. В современных работах, касающихся вопросов распространения электромагнитных волн, чаще рассматриваются квазикогерентные радиосигналы, у которых $\Delta\omega \ll \omega_0$ ($\Delta\omega$ - ширина спектра, ω_0 - средняя спектральная частота). В большинстве случаев для них получены точные или асимптотические решения, что позволяет правильно описывать параметры узкополосных линий связи [1, 3, 4]. Однако широкополосные линии имеют большое преимущество по сравнению с ними с точки зрения информативности и находят все более многочисленное применение. Поэтому актуально рассмотреть поведение радиоимпульсов с широким спектром. В данной работе предполагается рассмотреть искажения радиоимпульсов при распространении через среды без потерь с чисто фазовой дисперсией.

При изучении распространения электромагнитных волн в

диспергирующих средах обычно пользуются частотными или импульсными характеристиками. У реальных сред они достаточно сложны для анализа. Здесь, отвлекаясь от конкретных свойств и механизма распространения сигнала, рассматривается модельная среда с квадратичной фазовой зависимостью частотной характеристики:

$$\dot{K}(\omega) = \exp\{i[a\omega^2 + b\omega + c]\}, \quad (1)$$

где a, b, c - параметры, связанные с характеристиками среды, константа a определяет степень ее дисперсии. Несмотря на физическую абстрактность такой модели, существуют реальные среды, фазовые характеристики которых могут быть аппроксимированы на исследуемом интервале частот ($\omega_0 - 0,5 \Delta\omega, \omega_0 + 0,5 \Delta\omega$) квадратичным полиномом.

К тому же, относительно простой вид $\dot{K}(\omega)$ позволяет аналитически получить форму сигнала на выходе среды.

Уширение огибающей радиоимпульса можно характеризовать отношением

$$\gamma = T_{\text{out}}/T_{\text{in}}, \quad (2)$$

где T_{in} и T_{out} - длительности исходного импульса и прошедшего слой с дисперсией. Чтобы исследовать влияние среды на искажения сигналов, зададимся определенными значениями γ , выбор которых довольно произведен. Например, в [2] обсуждалась аналогичная задача о распространении узкополосного гауссова импульса через среду с квадратичной фазовой функцией. Авторы рассмотрели случай $\gamma = 1, 1$. Следует отметить, что выбор 10-процентного изменения длительности целесообразен лишь при проведении прецизионных метрологических экспериментов. С целью обобщения указанных результатов здесь рассматриваются импульсы с различными типами спектров; на ширину спектров не делается никаких ограничений. Обсуждается четыре случая:

$$\text{А)} \gamma = 1.1, \quad \text{Б)} \gamma = 1.5, \quad \text{В)} \gamma = 2.0, \quad \text{Г)} \gamma = 4.0.$$

Если случаи Б) и Г) представляют лишь теоретический интерес, то В) может служить универсальным критерием, определяющим допустимую степень искажений радиоимпульсов в системах радиосвязи.

Необходимо также остановиться на вопросе определения длительности T . Обычно под этим понимается промежуток времени, в котором сосредоточена заданная часть энергии. Аналитически это можно

сформулировать так:

$$\int_{t_1}^{t_2} |S(t)|^2 dt = \eta_p \int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 dt = \eta_p P_0, \quad (3)$$

где P_0 - величина, пропорциональная полной энергии импульса, η_p - относительная доля полной энергии, приходящаяся на интервал длительности $T = t_2 - t_1$. На практике часто используют более простой и быстрый способ определения T , основанный на понятии уровня измерения амплитуды η_a :

$$|S(t_1)| = |S(t_2)| = \eta_a R_{\max}, \quad (4)$$

где R_{\max} - максимальное значение огибающей импульса, а $t_2 - t_1 = T$. В обоих случаях значение длительности T зависит от η_p или η_a . Однако первый является более общим, точным и, следовательно, более предпочтительным. Поэтому здесь используется именно этот способ для определения как длительности импульса, так и ширины спектра.

Дисперсионные искажения сигнала определяются нелинейной частью фазовой функции $\Phi(\omega)$ в частотной характеристики $\dot{K}(\omega) = \exp(-i\Phi(\omega))$ на исследуемом интервале частот (ω_1, ω_2) . Назовем величину

$$\beta = |\Delta\Phi - \Delta\Phi_L| \quad (5)$$

дисперсионной расфазировкой на спектральном интервале сигнала. Здесь $\Delta\Phi = \Phi(\omega_2) - \Phi(\omega_1)$ - абсолютная разность фаз, $\Delta\Phi_L$ - линейный набег фаз, приводящий только к временному смещению импульса. Надо отметить некоторую неоднозначность вычисления $\Delta\Phi_L$, связанную с неопределенностью времени группового запаздывания для широкополосных сигналов, прошедших диспергирующую среду. В рассматриваемом случае можно считать, что

$$\Delta\Phi_L = \Delta\omega\Phi'(\omega_1) = \Delta\omega(2\alpha\omega_1 + b). \quad (6)$$

Для произвольного вида фазовой характеристики среды задача определения $\Delta\Phi_L$ требует специального изучения и выходит за рамки данной работы. Как будет показано ниже, величина β играет большую роль в оценке искажений импульсных сигналов. Для среды с частотной характеристикой в форме (1) она имеет вид

$$\beta = \alpha(\Delta\omega)^2, \quad (7)$$

и определяется шириной спектра сигнала $\Delta\omega$ и степенью дисперсии среды a .

Рассмотрим теперь конкретные примеры. Огибающая гауссова радиоимпульса и его спектр имеют соответственно вид

$$R_{in}(t) = A_0 \exp(-t^2/2\tau_0^2); \quad (8)$$

$$F_{in}(\omega) = \frac{A_0 \tau_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau_0^2(\omega - \omega_0)^2}{2}\right), \quad (9)$$

где τ_0 определяет длительность T и ширину спектра $\Delta\omega$. После прохождения через среду с дисперсионной характеристикой в форме (1) огибающая будет иметь вид

$$R_{out}(t) = A_0 \tau_0 (\tau_0^2 + 4a^2)^{1/4} \exp\left(-\frac{(t+b+2a\omega_0)^2 \tau_0^2}{2(\tau_0^4 + 4a^2)}\right). \quad (10)$$

Используя (2) и определение (3), получим условие, при котором гауссов импульс уширяется в γ раз:

$$a/\tau_0^2 = \sqrt{\gamma^2 - 1} / 2. \quad (11)$$

В рассматриваемом случае оба определения равноправны и приводят к одному результату (11). Левая часть равенства представляет собой величину, пропорциональную дисперсионной расфазировке β , так как $\Delta\omega = 1/\tau_0$. Следовательно, пользуясь (3) для вычисления $\Delta\omega$, формула (11) позволяет получить для заданного η_p такое значение β , при котором происходит увеличение длительности в γ раз. Отметим, что согласно (11) величина β является функцией только η_p и γ , т.е. $\beta = \text{const}$ при постоянных η_p и γ .

Аналогичные вычисления были проведены для радиоимпульсов со следующими типами спектров: 1) косинусоидальный, 2) квадратично-косинусоидальный, 3) треугольный, 4) прямоугольный. Для них первоначально были аналитически получены формы огибающих на выходе среды (1), а затем численно найдены значения дисперсионной расфазировки β , которая соответствовала уширению импульсов в γ раз. На рис. 1, 2 представлены следующие импульсы: - квадратично-косинусоидальный, + - косинусоидальный, \times - прямоугольный, \circ - треугольный, \cdot - гауссов. Зависимости дисперсионной расфазировки, полученные для прямоугольного спектра, представлены только на

графиках с $\gamma = 2,0$ и $\gamma = 4,0$. Анализируя графики, можно сделать вывод, что при $\eta_p = \text{const}$ и $\gamma = \text{const}$ значение β остается практически одинаковым для всех рассмотренных примеров за исключением радиоимпульса с прямоугольным спектром. Заметные расхождения результатов для него можно объяснить тем, что случай 4) представляет собой пример сигнала с разрывами фазы.

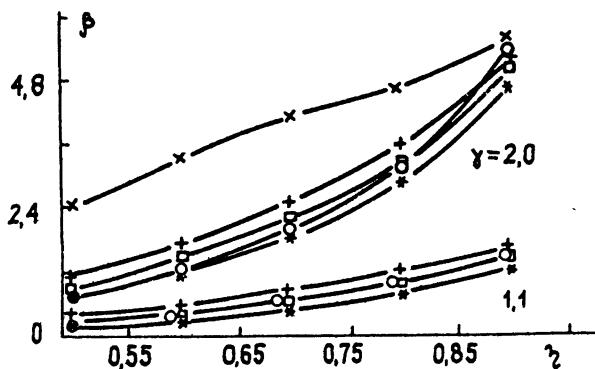


Рис. 1.

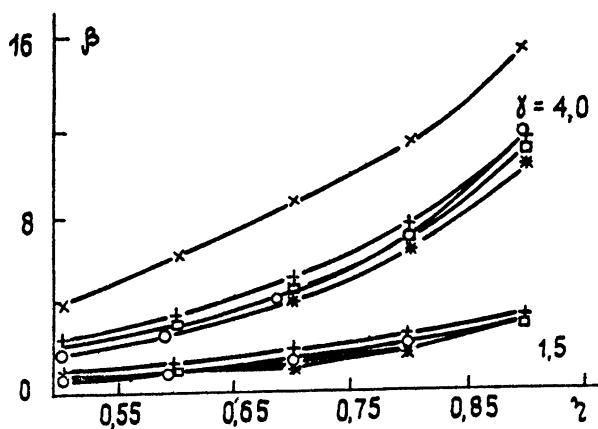


Рис. 2.

Точность вычисления β зависит сложным образом от γ , η_p и шага интегрирования Δt в (3). Например, для $\gamma = 2$ и $\eta_p = 0,9$

относительная ошибка $\epsilon \approx 3\%$. Разброс значений $\delta\beta$ дисперсионной расфазировки β относительно типов спектра несколько больше и составляет приблизительно 5%. Это говорит о том, что значение β зависит некоторым образом от вида спектра сигнала. Исследование всех типов спектров невозможно. Однако можно предположить, что чем более гладкой является спектральная функция сигнала, тем лучше согласуются значения β этого импульса со значениями, полученными из (11).

Стандартным значением η_p , используемым для измерения длительности сигнала и ширины его спектра, является $\eta_p = 0,9$. Отметим, что при $\eta_p = 0,9$ относительный разброс $\delta\beta$ дисперсионной рафазировки β наименьший (исключая случай 4)), а использование величин $\eta_p > 0,9$ нецелесообразно, так как точность вычисления β при $\eta_p \rightarrow 1$ ухудшается. Средние значения β для предложенных γ приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\gamma(\eta_p = 0,9)$	1, 1	1, 5	2, 0	4, 0
β	1, 27	3, 15	5, 0	11, 1
$\alpha\beta$	13%	5%	5%	5%

Из изложенного выше можно сделать вывод, что при заданном уровне η_p степень уширения огибающей импульса γ определяется значением только одного безразмерного параметра и практически не зависит от типа спектра сигнала. Этот параметр, названный дисперсионной расфазировкой, легко вычисляется через произведение степени дисперсии среды a и квадрата ширины спектра сигнала $\Delta\omega$ и оказывается очень полезным для оценки степени искажений радиоимпульсов. Для заданной дисперсии a и $\eta_p = \text{const}$ он позволяет определить ширину спектра, при которой уширение импульса не превышает γ .

Таким образом, дисперсионная расфазировка оказывается очень полезной при проведении оценок степени искажений радиосигналов и выборе ширины спектра импульса. Для выполнения таких оценок необходимо аппроксимировать реальную фазовую функцию среды $\Phi(\omega)$ квадратичным полиномом на исследуемом частотном отрезке $[\omega_1, \omega_2]$, а затем воспользоваться результатами данной работы.

В качестве простейшего примера рассмотрим параболический ионосферный слой:

$$N_e(h) = N_0 \left(2 \frac{h - h_0}{y_m} - \left(\frac{h - h_0}{y_m} \right)^2 \right), \quad (12)$$

где h_0 – нижняя граница ионосфера, y_m – полутолщина слоя, N_0 – значение электронной концентрации в максимуме параболы. В рамках геометрической оптики без учета поглощения фазовая характеристика среды имеет вид

$$\Phi(\omega) = \frac{y_m \omega_m}{2c} \left\{ -2 \frac{\omega \cos \phi_0}{\omega_m} + \left(\frac{\omega^2 \cos^2 \phi_0}{\omega_m^2} - 1 \right) \ln \frac{\omega \cos \phi_0 + \omega_m}{\omega \cos \phi_0 - \omega_m} \right\}. \quad (13)$$

Здесь $\omega_m = (4\pi N_0 e^2 / m_e)^{1/2}$ – критическая частота, ϕ_0 – угол падения. При $\omega \gg \omega_m$ дисперсия невелика, поэтому, пользуясь разложением в ряд Тейлора выражения (13), получим

$$\Phi_{\text{пр}}(\omega) = -2t_0 \omega_m^2 / 3\omega,$$

где $y_m/c \cos \phi_0$. Аппроксимируя (14) на интервале (ω_1, ω_2) квадратичным полиномом вида $a\omega^2 + b\omega + c$ и используя (7), находим после несложных преобразований относительный спектральный интервал, при котором умпульс уширяется не более, чем в два раза:

$$\frac{\Delta}{\omega_0} = \left(\frac{1}{1 + 4A/(\beta\omega_0)} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Здесь $A = (2t_0 \omega_m^2)/3$, $\omega_0 = 0,5(\omega_1 + \omega_2)$, $\Delta = |\omega_2 - \omega_0|$ – полуширина спектра. Точность параболической аппроксимации 2±3%. Графики зависимости (15) для различных углов падения Φ_0 и $\beta = 0,5$ представлены на рис. 3 (кривая 1 – $\varphi = 0^\circ$; 2 – $\varphi = 20^\circ$; 3 – $\varphi = 40^\circ$; 4 – $\varphi = 60^\circ$; 5 – $\varphi = 80^\circ$).

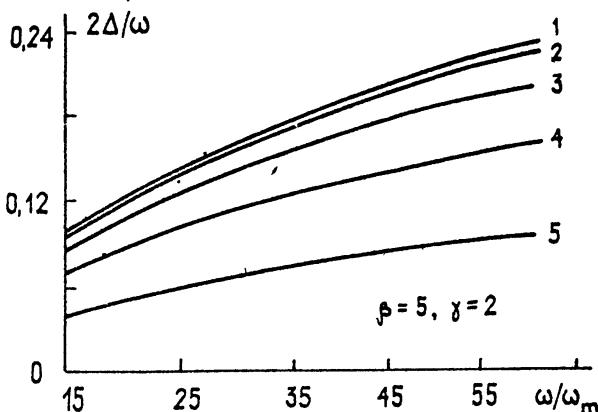


Рис. 3.

Анализ, основанный на изучении модельной характеристики (1), хорошо описывает поведение радиоимпульсов с гладкой спектральной функцией в среде с монотонной фазовой характеристикой. Если фазовая функция $\Phi(\omega)$ немонотонна или имеет точки перегиба, то приведенные в работе результаты имеют ограниченное применение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. - М. :Наука, 1967. -684 с.
2. Lin K.H., Yeh H.C., Soicher H. //Radio Sci. 1989. V.24. N 4. P.519.
3. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. - М. :Наука, 1980. -304 с.
4. Аютин А. П. , Кольцов Ю. И. //Тезисы докл. Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. -Тбилиси, 1985. Т. 2. С. 487.

Московский физико-технический
институт

Поступила в редакцию
5 февраля 1992 г.

REGULARITY OF RADIOPULSE PROPAGATION IN TRANSPARENT
DISPERSIVE MEDIA

A. V. Lapin, N. P. Chubinsky

This work concerns distortions of a radiopulse when it propagates through the dispersive medium with parabolic phase function. These distortions are determined by relative broadening of a pulse. Analysis accomplished shows that pulse broadening degree is determined by the only dimensionless parameter and slightly depends upon the type of a pulse spectrum. This parameter called dispersive disphasing over the spectral interval is calculated easily and turns out to be very useful to estimate radiopulse broadening. A simple example of the pulse propagation through the parabolic ionospheric layer is presented to demonstrate how this invariant can be used.

Краткие сообщения и письма в редакцию

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ МАТРИЦЫ СТОЛКНОВЕНИЙ В ТЕОРИИ УШИРЕНИЯ
И СДВИГА МОЛЕКУЛЯРНЫХ ЛИНИЙ ДАВЛЕНИЕМ ГАЗА

В. А. Скворцов

В современных ударных теориях уширения и сдвига спектральных линий давлением газа основной проблемой является расчет S - матрицы столкновений, при котором, обычно, ограничиваются вторым порядком теории возмущений [1, 5]. Вопрос о справедливости полученных выражений для больших возмущений (в области малых прицельных расстояний) оставался открытым. В работе приводятся результаты численного счета элементов S - матрицы двухуровневой системы для любых по величине возмущений. Подобная задача при рассмотрении столкновений тяжелых частиц решалась в [1] методом приближенного решения исходной системы дифференциальных уравнений, а в [3] для специальных видов возмущения получены точные решения.

Согласно [1] стр. 269, элементы $S_{mn}(t)$ удовлетворяют системе уравнений, которая для случая двух уровней принимает вид

$$i\hbar \dot{S}_{11} = V_{12} S_{21} e^{i\omega_0 t} \quad (1)$$

$$i\hbar \dot{S}_{21} = V_{21} S_{11} e^{-i\omega_0 t},$$

где ω_0 - частота перехода, а диагональные матричные элементы возмущения $V(t)$ считаются равными нулю, так как они соответствуют переходам между M - подуровнями и зануляются либо при усреднении по квантовым числам M , либо из-за запрета таких переходов. Исследуемая молекула с дипольным моментом μ при соударении испытывает возмущение, в дипольном приближении равное

$$V(t) = - \frac{\mu \mu_B}{\rho^3} f(t), \quad (2)$$

где μ_b - дипольный момент возмущающей молекулы, ρ - прицельное расстояние, $f(t)$ - функция, описывающая форму импульса возмущающего поля. Это выражение справедливо для медленно вращающихся по сравнению с ω_0 достаточно тяжелых возмущающих молекул. Для сравнительно легких, быстро вращающихся молекул типа симметричного волчка в (2) следует учитывать лишь составляющую $\vec{\mu}_b$ по направлению момента импульса молекулы, среднее значение которой равно (см. [2]) $\mu_{\text{эфф}} = \mu_b \sqrt{B}/(\sqrt{A} + \sqrt{B})$, где A и B - вращательные постоянные возмущающей молекулы. Такое упрощенное рассмотрение взаимодействия соударяющихся молекул при расчетах уширения и сдвига спектральных линий было успешно использовано в [2].

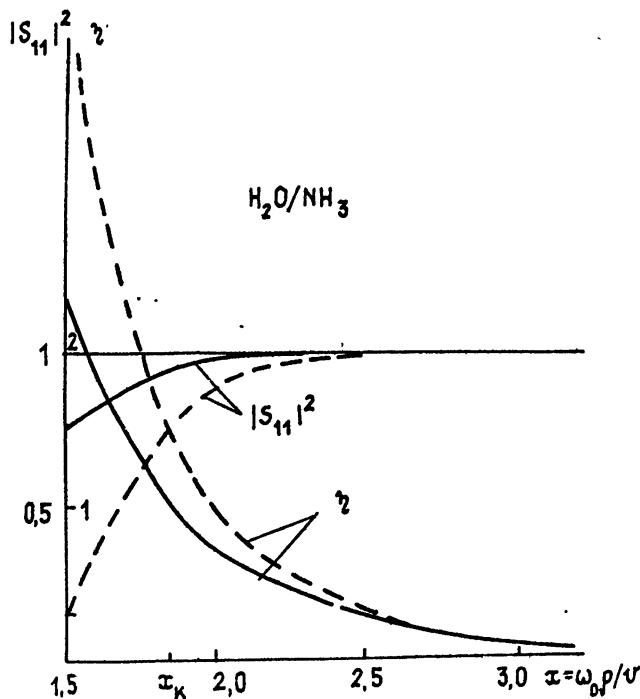


Рис 1.

Как и в [2] принималась либо гауссова форма импульса

$$f(t) = \exp(-t^2/2\tau), \quad (3a)$$

либо более естественная, получающаяся из простых геометрических соотношений

$$f(t) = (1 + t^2/\tau^2)^{3/2}, \quad (3b)$$

где $\tau = \rho/v$, v - средняя относительная скорость соударяющихся молекул. В начальном состоянии $t = -N\tau$ (было выбрано $N = 6$ для формы импульса (за) и $N = 20$ для формы (зб)), при этом $S_{11} = 1$, $S_{21} = 0$. Методом Рунге-Кутта с переменным шагом проводился численный счет системы (1), в результате которого определялось значение S_{11} при $t = -N\tau$ (т. е. после взаимодействия с возмущающей молекулой) для различных прицельных расстояний. Численные значения коэффициентов в (1) выбирались в соответствии с [2]. На рисунках 1 и 2 для формы импульса (за) приведены типичные зависимости величины $\eta = |\arg S_{11}|$, а также $|S_{11}|^2$, которая равна вероятности остаться в начальном состоянии после соударения. Рис. 1 иллюстрирует случай возмущения линии $1_{01}-1_{10}$ молекулы воды молекулами амиака NH_3 и является примером почти адиабатических соударений. Рис. 2 соответствует линии инверсионного перехода $\tau = K = 3$ молекулы NH_3 при самовозмущении, видно, что это случай, в основном, неадиабатических соударений. На рисунках x_k соответствует прицельному расстоянию, равному среднему газокинетическому диаметру соударяющихся молекул. Кроме того, пунктиром показаны S и $|S_{11}|^2$, рассчитанные с точностью до второго порядка теории возмущений по формулам в [1, 2]. Расчеты, проведенные для формы импульса (зб), дали аналогичные результаты. Обоснованием применимости двухуровневой модели в этих примерах является относительная малость вероятностей дипольных переходов на другие вращательные уровни. Для H_2O это переходы $1_{01} - 2_{12}$ и $1_{10} - 2_{21}$, отношение вероятностей которых к вероятности перехода $1_{01} - 1_{10}$ достигает при $x = x_k$ всего лишь $\sim 10^{-12}$ и 10^{-36} для формы импульса (за); $\sim 10^{-4}$ и 10^{-8} для формы (зб). Для амиака это переходы с уровней $\tau = K = 3$ на пару $\tau = K = 4$, в этом случае отношение вероятностей достигает значений $\sim 10^{-2}$ и $5 \cdot 10^{-5}$ для формы (за) и (зб). Расчет проводился в рамках теории возмущений по формуле (41.2) в [4]. Более подробный анализ применимости двух уровневой модели в подобных задачах имеется в [1].

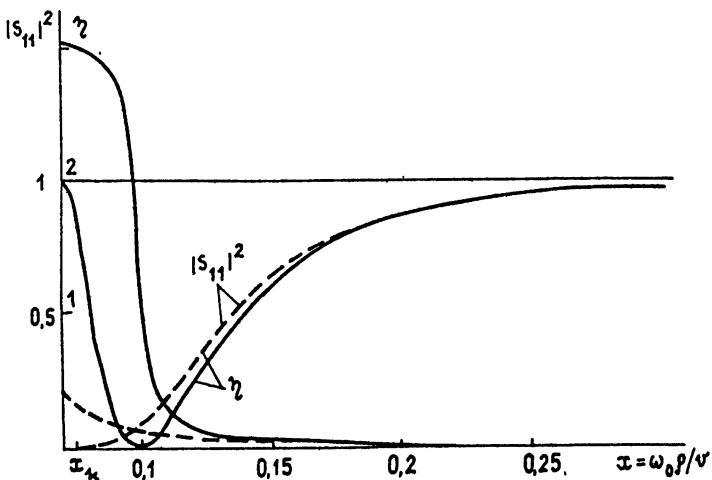


Рис.2.

Оценка максимальных разностей между значениями полуширины γ , а также значениями сдвига Δ линии, рассчитанными по точным и приближенным величинам S_{11} , проводилась по формуле андерсоновской ударной теории (см. (21.18) в [1])

$$\gamma - i\Delta = \frac{2\pi n v^3}{\omega_0^2} \int_{x_{\min}}^{\infty} [1 - (S_{11}^*)] x dx,$$

где n - концентрация возмущающего газа, $x = \omega_0 \rho / v$, x_{\min} принималось равным x_k . Как для полуширины, так и для сдвига линии ограничение вторым порядком теории возмущений при вычислении матрицы столкновений дает погрешность расчета не более 10%. Эта оценка как верхняя граница остается справедливой для любых систем вращательных уровней в случае диполь-дипольного взаимодействия. Действительно, если иметь в виде, что $|S_{11}|^2$ - вероятность остаться в начальном состоянии, а η - сдвиг фазы из-за сдвига уровней перехода при соударении [1], то из простых соображений следует, что учет других уровней системы, кроме рассматриваемой пары, уменьшит расхождение между точным и приближенным решениями. Для других типов взаимодействия, например H_2O - He, Ne, H_2 , O_2 , задача требует специального рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А., Собельман И. И., Юков Е. А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. - М.: Наука, 1979.
2. Скворцов В. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 12. С. 1349.
3. Никитин Е. Е., Смирнов Б. М. //УФН. 1978. Т. 124. С. 201.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. - М.: Физматгиз, 1963.
5. Leavitt R.//J.Chem. Phys. 1980. V. 73. P.5432; Leavitt R., Korff D.//J.Chem. Phys. 1981. V. 74. P.2180.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
10 июля 1991 года

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА НИЗКОЧАСТОТНЫХ ШУМОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО АВТОЭМИТТЕРА*

А. Ф. Голубенцев, В. М. Аникин

В спектре шумов полупроводниковых автоэмиттеров наблюдаются шумы фликкерного типа $1/f^\gamma$, $1 \leq \gamma \leq 3$. Их существование соотносят, в частности, с явлением "мерцания" (самопроизвольного "включения" и "выключения") центров автоэлектронной эмиссии (ЦАЭ) [1].

Получим теоретическую оценку спектральной плотности шумов автоэмиссии в рамках марковской схемы рождения и гибели, примененной к моделированию процесса "мерцания" ЦАЭ. Поступлаты классического разрывного процесса принимают следующую интерпретацию:

* Докладено на Всесоюзно-координационном совещании "Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах" (поселок Черноголовка Московской области, июнь, 1991 г.).

а) вероятность $P_\lambda(\Delta t)$ восстановления автоэмиссионной способности одного ЦАЭ бесконечно малом интервале времени $(t, t + \Delta t)$ пропорциональна величине интервала Δt и числу действующих в момент t ЦАЭ $N(t)$ (коэффициент пропорциональности λ имеет смысл постоянной интенсивности процесса рождения ЦАЭ):

$$P_\lambda(\Delta t) \sim \lambda N(t) \Delta t;$$

б) вероятность $P_\mu(\Delta t)$ "отключения" одного ЦАЭ в малом интервале пропорциональна тем же характеристикам с постоянными коэффициентом μ , имеющим смысл интенсивности процесса гибели ЦАЭ:

$$P_\mu(\Delta t) \sim \mu N(t) \Delta t;$$

в) вероятность "резкого" (более чем на один ЦАЭ) изменения числа работающих ЦАЭ пренебрежимо мала;

г) полную группу событий, характеризующих состояние эмиттера на малом интервале времени, входят, таким образом, события "рождение одного ЦАЭ", "гибель одного ЦАЭ", "сохранение постоянного числа функционирующих ЦАЭ":

$$P_\lambda(\Delta t) + P_\mu(\Delta t) + P_c(\Delta t) \rightarrow 1;$$

955

д) развитие эмиссии прекращается при $N(t) = 0$.

Если $P_N(t)$ - вероятность существования N ЦАЭ в момент t , то система перечисленных условий приводит к следующей системе уравнений Колмогорова [2]:

$$\begin{aligned} dP_N(t)/dt &= \lambda(N - 1)P_{N-1}(t) - (\lambda + \mu)NP_N(t) + \\ &+ \mu(N + 1)P_{N+1}(t), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Соответственно уравнение для производящей функции

$$F(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n \quad (2)$$

имеет вид

$$\frac{\partial F(z, t)}{\partial t} = (\lambda z^2 - (\lambda + \mu)z + \mu) \frac{\partial F(z, t)}{\partial z}. \quad (3)$$

957

Уравнение (3) для начального условия $P_{N_0}(0) = \delta_{N_0 N_0}$

$$F(z, t) = \left[\frac{\alpha(t) + \gamma(t)z}{1 - \beta(t)z} \right]^{N_0}, \quad (4)$$

где

$$\alpha(t) = \frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - \mu)},$$

$$\beta(t) = (\lambda/\mu)\alpha(t), \quad \gamma(t) = 1 - \alpha(t) - \beta(t).$$

Используя (4), найдем статистические характеристики числа функционирующих ЦАЭ. Математическое ожидание

$$\overline{N(t)} = M\{N(t) | N(0) = N_0\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} F(z, t) \Big|_{z=1} = N_0 e^{(\lambda-\mu)t}. \quad (5)$$

Дисперсия

$$\begin{aligned} \sigma_N^2(t) &= M\{(N(t) - \overline{N(t)})^2 | N(0) = N_0\} = \\ &= \frac{\partial^2 F(z, t)}{\partial z^2} \Big|_{z=1} + \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=1} - \overline{N(t)}^2 = N_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Автокорреляционная функция

$$\begin{aligned} R_N(t_1, t_2) &= M\{N(t_1)N(t_2)\} - \overline{N(t_1)} \overline{N(t_2)} = \\ &= M\{N^2(t_1)\} e^{(\lambda-\mu)(t_2-t_1)} - \overline{N(t_1)} \overline{N(t_2)} = \\ &= e^{(\lambda-\mu)(t_2-t_1)} \left[N_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t_1} (e^{(\lambda-\mu)t_1} - 1) + \right. \\ &\quad \left. + N_0^2 e^{2(\lambda-\mu)t_1} \right] - N_0^2 e^{(\lambda-\mu)(t_2+t_1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

или, в переменных $t = (t_1 + t_2)/2$, $\tau = t_2 - t_1$

$$R_N(t - \frac{\tau}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = N_0 \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)t} \left\{ e^{(\lambda-\mu)\tau} - e^{(\lambda-\mu)\tau/2} \right\} \quad (8)$$

Нестационарный спектр флуктуаций числа ЦАЭ находится [3] однократным преобразованием Фурье от (8) по переменной t :

$$S_N(\omega, t) = -N_0 \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\lambda-\mu}{2} \right)^{2m-1} \frac{\Gamma(2m)}{\omega^{2m}}. \quad (9)$$

Ряд (9) содержит члены только с четными степенями $1/\omega$. Соответственно для тока $J(t) = j_0 S_0 N(t)$ (j_0 и S_0 - плотность тока и типичная площадь ЦАЭ) спектр флуктуаций без учета дробовых эффектов, связанных с невоспроизводимостью параметров ЦАЭ, и пр. есть

$$S_J(\omega, t) = j_0^2 S_0^2 S_N(\omega, t). \quad (10)$$

Для "равновесного" процесса "мерцания" ЦАЭ ($\mu \approx \lambda$) из (9) следует

$$S_J(\omega) = \frac{\lambda J_0^2}{\pi N_0 \omega^2}, \quad (11)$$

где $J_0 = j_0 S_0 N_0$ - среднее значение тока.

Экспериментально зависимость $S_J \sim 1/\omega^2$ обнаружена при исследовании, в частности, фликкер-шумов кремниевых и германиевых фоточувствительных автоэмиттеров при переходе от участка Фаулера-Нордгейма (для последнего характерен шум $1/\omega$) к участку насыщения ВАХ [4].

Таким образом, нестационарный спектр низкочастотных флуктуаций тока автоэмиттера, представляемого совокупностью отдельных ЦАЭ, в рамках марковской модели структуры катода выражается рядом, содержащим члены со степенями $1/\omega^{2k}$, $k = 1, 2, \dots$

ЛИТЕРАТУРА

- Голубенцев А. Ф., Аникин В. М., Клименко В. Г. Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур. - Саратов: Гос. ун-т, 1991. 116 с.

2. Баруч-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. - М.: Наука, 1969. 512 с.
3. Малахов А. Н. Флуктуаций в автоколебательных системах. - М.: Наука, 1968. 660 с.
4. Бахтизин Р. З., Гоц С. С. //Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 1276.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 апреля 1992 г.