

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г

Том XXXVI N 8

Нижегород

1993

С о д е р ж а н и е

Труды Международной школы-семинара

"ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ"

| | |
|--|-----|
| Нечаев А.Г., Хилько А.И. Акустическая дифракционная томография океана..... | 738 |
| Зайцев В.Ю., Прончатов-Рубцов Н.В. О методах расчета полей параметрических излучателей звука в океанических волноводах..... | 752 |
| Бенилов Е.С., Пелиновский Е.Н. Нелинейные волны в случайных средах со слабой дисперсией..... | 760 |
| Зорин А.Ю., Смирнов И.П., Хилько А.И. Характеристики энергетической связи точек неоднородной среды..... | 767 |
| Климов М.Ю., Сорокин Ю.М. Коллективное оптическое плазмообразование в протяженном аэрозольном облаке..... | 771 |
| Hedberg S.M. Nonlinear propagation through a fluid of waves originating from a biharmonic sound source..... | 774 |
| Бойков С.Н., Гурбатов С.Н. Автомодельность эволюции сложных сигналов в нелинейных средах без дисперсии..... | 778 |
| Sionóid P.N. Nonlinear acoustic propagation and focusing..... | 783 |
| Hoyle R.B. Long wavelength instabilities of perfectly square planforms in nonlinear convection..... | 788 |
| Linardatos D. Magnetostatic equilibria and corresponding steady Euler flows..... | 793 |
| Harris S.E. Nonlinear Waves in Gas-Fluidized Beds..... | 797 |
| Рындык Д.А. Флуктуационно-динамическая неустойчивость и индуцированное резистивное состояние в длинном переходе Джозефсона..... | 801 |
| Курин В.В., Юлин А.В. Возбуждение волн деформации в пепочке флаксонов, движущейся в неоднородном длинном джозефсоновском переходе..... | 805 |

| | |
|---|-----|
| Алексеев А.А., Шалфеев В.Д. О синхронизации сложномодулированных сигналов в ансамбле связанных автогенераторов..... | 808 |
| Козлов А.К. Синхронный отклик в связанных фазовых системах | 811 |
| Корзинова М.В., Матросов В.В. Моделирование нелинейной динамики каскадного соединения фазовых систем..... | 815 |
| Ажстов А.В., Гавриленко В.Г. Эволюция светового пучка при наклонном освещении мутной среды..... | 820 |
| Ерухимов Л.М., Рындык У.Ю., Чугурин В.В. Динамика лучей за набором пространственно-периодических фазовых экранов..... | 825 |
| Грязнова И.Ю. Экспериментальное исследование отражения от дискретных случайных неоднородностей..... | 832 |
| Антонец М.А., Сидоровская Н.А. Оценивание характеристик источника шумового излучения по измерениям поля..... | 836 |
| Савинов И.В., Серебряков Г.В. Влияние флуктуаций угла прихода внешней помехи на статистические характеристики адаптивной решетки..... | 840 |
| Младенцев А.Л., Якимов А.В. Подвижные дефекты: источник $1/f$ шума?..... | 843 |
| Barbone P.E., Braga A.M.B. Active Suppression of Radiating Wavenumbers in the Dynamic Response of Submerged Plates..... | 848 |
| Лебедев О.В., Павлов И.В. Селекция нормальных волн в модельном мелководном волноводе..... | 853 |
| Долин Л.С., Кондратьева М.И. О возможности восстановления спектра ветрового волнения по сигналу реверберации в двухпозиционной схеме акустического зондирования океана..... | 856 |

АКУСТИЧЕСКАЯ ДИФРАКЦИОННАЯ ТОМОГРАФИЯ ОКЕАНА

А.Г.Нечаев, А.И.Хилько

1. ВВЕДЕНИЕ

Широкий круг проблем, связанных с освоением ресурсов Мирового океана, с экологией, с наблюдением за климатом Земли, с навигацией и др., приводит к необходимости мониторинга состояния океанической толщи на больших акваториях, размерами в сотни и тысячи километров. Реализация такого мониторинга с помощью одних контактных средств практически не осуществима. Дистанционные радиолокационные и оптические методы дают возможность изучать только поверхность и очень узкий, толщиной в несколько десятков метров, приповерхностный слой океана. Поэтому одним из основных и наиболее перспективных инструментов исследования Океана на больших акваториях является низкочастотная акустическая томография (АТО).

Рождение АТО датируется 1979 г., когда Манк и Вунш опубликовали свою работу [1], в которой ввели и сам термин "акустическая томография океана". Справедливости ради следует отметить, что и ранее низкочастотные звуковые поля использовались для определения параметров океанической среды (см. библиографию, например, в [2, 3]). Многообразие типов диагностируемых объектов и гидрологоакустических условий распространения звука в океане привели в настоящее время к разработке большой группы существенно различающихся между собой методов АТО. Их можно разделить на три основные группы: дно, источники акустического шума, неоднородности водной толщи и поверхности в зависимости от типа исследуемого объекта. Методы реконструкции неоднородностей водной толщи и поверхности подразделяются на методы [1, 4-8], в которых для описания процесса взаимодействия звукового поля с неоднородностью используется адиабатическое приближение, не учитывающее межмодовую или межлучевую трансформацию энергии, и методы дифракционной томографии (ДТ), не использующие адиабатическое приближение. Как известно [2], условием применимости адиабатического приближения является неравенство $l > \Lambda$, где l - характерный масштаб неоднородности по горизонтали, Λ - максимальный масштаб горизонтальной интерференционной структуры звукового поля (например, длина цикла лучей). Если $l < \Lambda$, то существенными оказываются эффекты рассеяния или дифракции звуковых полей в вертикальной плоскости.

Предлагаемый ниже доклад посвящен обсуждению основных принципов акустической реконструкции неоднородностей объема и поверхности океана в случае $l < \Lambda$. Вопросы, касающиеся математических аспектов решения интегральных уравнений дифракционной томографии, затрагиваться не будут. (Соответствующую информацию можно найти в [9-13]).

Изложение основного материала в докладе построено следующим образом. Вначале (разд.2) мы остановимся на некоторых общих проблемах ДТ. Далее в разд.3 выделим специфику, связанную с низкочастотной акустикой океана. И наконец, в разд.4 и 5 обсудим некоторые конкретные методы акустической дифракционной томографии океана.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Дифракционная томография охватывает широкий диапазон методов, использующих при теоретическом обосновании различные физические приближения (Борна, Рытова, Кирхгофа и т.д.) [14-16]. Для того, чтобы пояснить некоторые общие проблемы ДТ, остановимся на подходе, основанном на приближении однократного рассеяния [14]. С этой целью рассмотрим связь статических ("замороженных") неоднородностей поля скорости звука ($c + \delta c$) с характеристиками звукового давления $p(\vec{R})$. Источник звука для определенности считаем монохроматическим: $p(\vec{R}) \exp(i\omega t)$. Полагая возмущения скорости звука δc малыми ($|\delta c| \ll c$) и применяя к уравнению Гельмгольца теорему Грина, получим следующее интегральное уравнение [14]:

$$p_s(\vec{R}) = p(\vec{R}) - p_0(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{R}' W(\vec{R}, \vec{R}') g(\vec{R}'), \quad (1)$$

где $p_0(\vec{R})$ - звуковое поле (поле "подсветки") в отсутствие неоднородностей ($\delta c \equiv 0$), $p_s(\vec{R})$ - рассеянное (дифрагированное) поле, $g(\vec{R}) = 2\delta c(\vec{R})/c(\vec{R})$ - функция, описывающая неоднородность,

$$W(\vec{R}, \vec{R}') = \Gamma_0(\vec{R}, \vec{R}') k_0^2(\vec{R}') p(\vec{R}'), \quad k_0(\vec{R}) = \omega/c(\vec{R}),$$

$\Gamma_0(\vec{R}, \vec{R}')$ - функция Грина невозмущенной среды. Т.о. в дифракционной томографии, в общем случае, задача реконструкции неоднородности $g(\vec{R}')$ по измеряемым данным $p_s(\vec{R})$ сводится к решению интегрального уравнения (1). Однако, поле $p(\vec{R})$ и, следовательно, ядро интегрального уравнения $W(\vec{R}, \vec{R}')$ зависят не только от положения источников и приемников, но и от условий распространения звука, описываемых функцией $g(\vec{R})$. Поэтому, строго говоря, дифракционная томографическая задача является нелинейной.

Приближение однократного рассеяния, условием применимости которого служит требование малости энергии рассеянного поля $p_s(\vec{R})$ по сравнению с энергией недифрагированного поля $p_0(\vec{R})$, позволяет линеаризовать задачу. В этом приближении полное поле $p(\vec{R})$ в ядре интегрального уравнения (1) заменится на недифрагированное поле $p_0(\vec{R})$. В результате выражение (1) сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с ядром

$$W \simeq W_0(\vec{R}, \vec{R}') = \Gamma_0(\vec{R}, \vec{R}') k_0^2(\vec{R}') p_0(\vec{R}').$$

В общем случае решение этого интегрального уравнения также сопряжено с определенными трудностями. Однако в ряде частных случаев алгоритм восстановления $g(\vec{R})$ существенно упрощается. Продемонстрируем это на примере плоской зондирующей волны $p_0(\vec{R}) = \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{R})$ в предположении, что опорная, невозмущенная среда однородна ($c(\vec{R}) = C = \text{const}$) и безгранична в пространстве. Если измерения $p_s(\vec{R})$ осуществляются в дальней по отношению к неоднородностям зоне ($|\vec{R}'| \ll |\vec{R}|$), то

$$|\vec{R} - \vec{R}'| \simeq R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{R}'}{R} + \frac{1}{2R} \left[(R')^2 - \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{R}'}{R} \right)^2 \right] + \dots \quad (2)$$

При подстановке разложения (2) в показатель экспоненты функций Грина однородного безграничного пространства учтем только первые два члена разложения (зона дифракции Фраунгофера: $k_0 |\vec{R}'|^2 \ll |\vec{R}|$). Тогда интегральное преобразование (1) с ядром $W_0(\vec{R}, \vec{R}')$ сводится к преобразованию Фурье от искомой функции $g(\vec{R})$ [14]:

$$p_s(\vec{R}) = A_0 \int_{V_g} d^3 \vec{R}' g(\vec{R}') e^{-i\vec{q}(\vec{R}) \cdot \vec{R}'} = A_0 \hat{g}(\vec{q}(\vec{R})), \quad (3)$$

где $\hat{g}(\vec{q})$ – пространственный спектр $g(\vec{R})$,

$$\vec{q}(\vec{R}) = \vec{k}_s - \vec{k}_i, \quad \vec{k}_s = k_0 \frac{\vec{R}}{R}, \quad A_0 = \frac{k_0^2}{R} e^{ik_0 R}.$$

Через V_g обозначена область, занятая неоднородностями.

Таким образом, алгоритм реконструкции $g(\vec{R})$ на основе (3) заключается в обратном преобразовании Фурье от совокупности всех измеренных значений спектра $\hat{g}(\vec{q}) \sim p_s(\vec{R})$. Перебор значений комплексной амплитуды дифрагированного поля (проекций) для всех возможных векторов \vec{q} может осуществляться двумя способами. Первый способ – это перебор всех углов наблюдения рассеянной волны плюс перебор всех углов падения зондирующей волны. В этом случае, как нетрудно видеть, измеренные значения спектра $\hat{g}(\vec{q})$ в трехмерном пространстве волновых векторов \vec{q} лежат внутри сферы радиуса $2k_0$. Следовательно, значения спектра вне этой сферы (при $|\vec{q}| > 2k_0$) могут быть определены только на основе априорных предположений.

Во втором способе перебора проекций осуществляется перебор всех частот при фиксированных углах наблюдения и падения. Здесь измеренной областью в пространстве векторов \vec{q} является отрезок прямой, границы которого определяются диапазоном используемых частот. На практике даже комбинация обоих способов часто не позволяет определить достаточно полно спектр $\hat{g}(\vec{q})$. Следствием ограниченного числа проекций является необходимость интерполяции или экстраполяции данных (на основе некоторых априорных предположений) с измеренной области значений \vec{q} в узлы, наперед заданной решетки, для которой реализуется алгоритм решения интегрального уравнения.

Остановимся на еще одном важном с практической точки зрения приеме. Предположим, что измерения проводятся с помощью достаточно

протяженной антенны, так что неоднородности для нее находятся в области дифракции Френеля. В этом случае приемная система позволяет измерить не только наклон волнового фронта, как это имеет место в случае дифракции Фраунгофера (формула (3)), но также и кривизну фронта. Это дает возможность сфокусировать антенну на заранее выбранную область пространства аналогично тому, как это делается в оптических системах [17, 18]. Формальный переход к дифракции Френеля состоит в учете третьего (квадратичного по \vec{R}_1) члена разложения (2). В результате реконструкция неоднородностей будет заключаться в переборе параметров фокусировки (или точек пространства, на которые фокусируется приемная система) с последующим интегральным преобразованием измеренных данных (подробный анализ этого случая дан в разделе 5).

3. ОСОБЕННОСТИ АКУСТИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ В ОКЕАНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Дифракционные методы томографии разрабатываются и широко применяются в различных областях науки и техники: ультразвуковой диагностике [19–21], неразрушающем контроле [19] и т.д. Однако там, как правило, предполагается, что среда является однородной. В океане ситуация значительно более сложная. В области низких звуковых частот (10 Гц – 1 кГц) океан представляет собой многомодовый слоистонеоднородный по вертикали волновод, который, к тому же, очень часто оказывается и горизонтально неоднородным. Объекты реконструкции в акустической дифракционной томографии океана весьма разнообразны, охватывая как распределенные в пространстве случайные неоднородности типа внутренних волн, турбулентности, тонкой структуры скорости звука, морского волнения, так и относительно компактные детерминированные образования типа айсбергов, скоплений рыб, различных акустических линз. Поэтому восстанавливаемыми параметрами, характеризующими исследуемый объект, могут быть возмущения скорости звука и плотности, характеристическая функция тела (равна единице в области, занятой неоднородностью, и равна нулю вне ее), функция корреляции (или ее спектр) скорости звука или волнения.

Обсудим специфику ДТ в акустике океана. С этой целью рассмотрим связь измеряемого поля $p_s(\vec{R})$ с функцией $g(\vec{R}')$ для плоскостойкого опорного волновода ($k_0^2(\vec{R}) = k_0^2(z)$). При этом будем использовать модовое описание звукового поля.

Пусть первичное поле $p_0(\vec{R})$ создается точечным источником с индексом i , помещенным в точке $\vec{R}_i = (\vec{r}_i, z_i)$, где \vec{r}_i – координата в горизонтальной плоскости, z – вертикальная координата. Полагая область V_g , занятую неоднородностями, ограниченной и расположенной достаточно далеко от источника и приемника, в формулу для ядра интегрального уравнения (1) в приближении однократного рассеяния W_0 подставим модовые разложения функций Грина $\Gamma_0(\vec{R}, \vec{R}')$ и $p_0(\vec{R}') = \Gamma_0(\vec{R}', \vec{R}_i)$ в волновой зоне ($k_0|\vec{R} - \vec{R}'|, k_0|\vec{R}' - \vec{R}_i| \gg 1$). Тогда

$$p_s(\vec{R}, \vec{R}_i) = \sum_{n,m=1}^N A_{nm}(\vec{r}, \vec{r}_i) \varphi_n(z) \varphi_m(z_i), \quad (4)$$

$$A_{nm}(\vec{r}, \vec{r}_i) = \iint d^2 \vec{r}' L_{nm}(\vec{r}, \vec{r}_i; \vec{r}') g_{nm}(\vec{r}'), \quad (5)$$

$$g_{nm}(\vec{r}') = \int dz' T_{nm}(z') g(\vec{r}'; z'), \quad (6)$$

$$T_{nm}(z') = k_0^2(z') \varphi_n(z') \varphi_m(z'), \quad (7a)$$

$$L_{nm}(\vec{r}, \vec{r}_i; \vec{r}') = \left(h_n h_m |\vec{r} - \vec{r}'| |\vec{r}' - \vec{r}_i| \right)^{-1/2} \cdot \exp \left(-i h_m |\vec{r} - \vec{r}'| - i h_n |\vec{r}' - \vec{r}_i| - i(\pi/2) \right), \quad (7b)$$

где N – число захваченных волноводом мод, $\varphi_n(z)$ – собственные функции опорного волновода, h_n – постоянные распространения мод. Комплексная амплитуда рассеянного поля p_s полностью характеризуется матрицей $\|A_{nm}\|$, элементы которой определяются ориентацией акустической трассы (парой источник–приемник (\vec{r}, \vec{r}_i)) и номерами излученной (n) и принятой (m) мод. Следовательно, максимальное число независимых томографических проекций равно $M \cdot N^2$, где M – число акустических трасс. В силу ортогональности собственных функций волновода элементы матрицы $\|A_{nm}\|$ легко определяются по значениям дифрагированного поля. Учитывая $\int \varphi_n^2(z) dz = 1$, из (4) имеем

$$A_{nm}(\vec{r}, \vec{r}_i) = \iint dz dz_i p_s(\vec{R}, \vec{R}_i) \varphi_n(z) \varphi_m(z_i) \quad (8)$$

Отсюда видно, что уравнение (4) каких-либо принципиальных ограничений на возможность определения $\|A_{nm}\|$ не накладывает. Несколько более неприятная ситуация имеет место при восстановлении $g(\vec{R}')$ по значениям $A_{nm}(\vec{r}, \vec{r}_i)$. Ядро интегрального соотношения, связывающего $g(\vec{R}')$ и $A_{nm}(\vec{r}, \vec{r}_i)$, факторизуется по горизонтальным (ядро L_{nm}) и вертикальным (ядро T_{nm}) координатам. В результате исходное интегральное уравнение разбивается на два интегральных уравнения (5) и (6).

Реконструкция горизонтальной структуры на основе (5) при фиксированных индексах n и m полностью тождественна рассмотренному выше случаю однородного безграничного пространства с единственным отличием в размерности. Возникающие при этом проблемы также аналогичны: ограничение в возможности измерения полного пространственного спектра $\hat{g}_{nm}(\vec{q})$, необходимость интерполяции или экстраполяции данных в узлы вперед заданной решетки, необходимость привлечения априорной информации и т.д.

Возможность реконструкции структуры неоднородностей в вертикальной плоскости на основе (6) зависит от матрицы $T_{nm}(z')$. Неполнота системы из N^2 функций $T_{nm}(z')$ принципиально требует привлечения априорной информации. Проиллюстрируем это на примере изоскоростного волновода $k_0^2(z) = const$. Представляя собственные функции волновода в виде суммы двух бриллюэновских волн $\exp(\pm i \varkappa_n z)$, где $\varkappa_n = \sqrt{k_0^2 - h_n^2}$, получим

$$g_{nm}(\vec{r}') = \sum_{(\pm)} \hat{g}(\vec{r}'; \pm \varkappa_n \pm \varkappa_m).$$

Суммирование проводится по всем комбинациям знаков "+" и "-". Поскольку матрица g_{nm} определяется только компонентами спектра типа $\hat{g}(\alpha_n - \alpha_m)$ и $\hat{g}(\alpha_n + \alpha_m)$ ($\hat{g}(-\alpha) = \hat{g}(\alpha)$), то информация о других спектральных компонентах в однократно рассеянном поле не содержится. Кроме того, величина g_{nm} пропорциональна сумме спектральных компонент $\hat{g}(\alpha_n - \alpha_m)$ и $\hat{g}(\alpha_n + \alpha_m)$. Следовательно, в общем случае определить вертикальный спектр неоднородностей, не привлекая каких-либо априорных предположений о его структуре, нельзя.

В океане роль априорной информации существенно возрастает по сравнению со случаем однородного безграничного пространства. Дело в том, что, во-первых, диапазон углов падения и рассеяния в вертикальной плоскости ограничен малым интервалом значений. Во-вторых, в горизонтальной плоскости из-за технических и финансовых сложностей реализовать измерения с большим числом приемных и излучающих датчиков затруднительно. В-третьих, сильная зависимость коэффициента затухания звука от частоты ограничивает возможный диапазон варьирования частоты зондирующего поля. Указанные причины обуславливают необходимость выбирать такую подходящую модель неоднородности, которая описывалась бы небольшим числом параметров, достаточным для решения задачи реконструкции при имеющейся значительной неполноте измеренной акустической информации.

Другая существенная особенность ДТ океана связана с процессом сбора информации о структуре дифрагированных (рассеянных) полей. Помимо упомянутых выше вариантов варьирования углов "подсветки" и регистрации дифрагированных полей и частоты зондирующего поля, следует отметить и способы, используемые для определения матрицы A_{nm} (для выделения отдельных волноводных мод). С этой целью применяется пространственная фильтрация полей с помощью вертикальных или горизонтальных антенн. При этом селекция определенных интервалов углов прихода сигналов обеспечивает выделение определенной моды, либо пачки мод [22-24]. С этой же целью применяется временное стробирование в сочетании с импульсным возбуждением зондирующих сигналов. Наконец, для диагностики неоднородностей возможно использование эффекта Доплера в случае, когда время наблюдения существенно больше характерного масштаба временной изменчивости неоднородности [24], либо когда источник зондирующих сигналов перемещается [22].

4. ПРОСВЕТНАЯ СХЕМА ИМПУЛЬСНОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ОКЕАНА

Традиционное решение задачи ДТ связано с использованием широкополосных зондирующих сигналов. Временное стробирование коротких импульсов, рассеянных на неоднородности, позволяет выделить отдельные области океанической среды (импульсные объемы), от которых рассеянный сигнал приходит в приемник в одно и то же время [14, 16], т.е. временное стробирование позволяет локализовать неоднородности в соответствующем импульсном объеме. Если приемная антенна имеет достаточно узкую диаграмму направленности в горизонтальной плоскости,

то удастся полностью локализовать рассеивающую неоднородность (ее местоположение определяется областью пересечения соответствующего импульсного объема с диаграммой направленности антенны). Такая схема хорошо работает в случае, когда горизонтальный масштаб неоднородности l порядка длины волны звука λ .

Если же $l \gg \lambda$ (и ширина индикатрисы рассеяния λ/l меньше или порядка ширины диаграммы направленности антенны в горизонтальной плоскости), то неоднородности, сигналы от которых достигают приемника, концентрируются вблизи прямой, соединяющей источник и приемник. При этом локализовать неоднородность на трассе традиционным путем не удастся. Кроме того, относительно слабый рассеянный сигнал приходит на приемник одновременно с относительно мощным сигналом "подсветки" и маскируется им. Имеется ряд различных подходов к решению задачи в этом случае. Рассмотрим один из них – дифференциальный метод [22, 23], использующий многомодовость и дисперсионные свойства океанического волновода.

Основная идея дифференциального метода достаточно проста [22].

Пусть излучающая система возбуждает моду океанического волновода с номером n , а приемная система выделяет моду с номером m , причем групповые скорости этих мод v_n и v_m заметно различаются. Пусть на расстоянии x_Σ от излучателя расположена неоднородность, которая вызвала "перекачку" энергии из моды n в моду m . Тогда время распространения сигнала по трассе будет равно $t_\Sigma = \frac{a}{v_m} + x_\Sigma \left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_m} \right)$, где a – длина трассы. В итоге времена запаздывания сигналов, порождаемых различными неоднородностями трассы, зависят от местоположения неоднородностей и, следовательно, распределение неоднородностей по трассе может быть восстановлено по временной структуре принятого сигнала подобно тому, как это делается при восстановлении распределения рассеивателей по сигналам обратной реверберации.

Полагая, что выполняется условие $l > \lambda \sqrt{a \Delta f / c}$, где Δf – ширина частотного спектра зондирующего сигнала, из (4)–(7) получим [22]

$$I_s(t_\Sigma) = \langle |p_s|^2 \rangle \simeq \frac{32\pi}{k^3 a} |A_R(m)|^2 |A_s(n)|^2 \Delta x \sigma_{nm}(x_\Sigma), \quad (9)$$

где

$$x_\Sigma = \left(t_\Sigma - \frac{a}{v_m} - \frac{T}{2} \right) \frac{v_n v_m}{|v_m - v_n|},$$

$$\Delta x = \frac{v_n v_m T}{|v_m - v_n|},$$

T – длительность импульса зондирующего сигнала, $A_R(m)$ и $A_s(n)$ – коэффициенты возбуждения мод приемником и источником,

$$\sigma_{nm}(x_\Sigma) = \frac{1}{4} \int dk \iint dz' dz'' k_0^2(z') k_0^2(z'') \varphi_n(z') \varphi_m(z') \cdot \varphi_n(z'') \varphi_m(z'') W_g(h_n - h_m, k; x_\Sigma; z', z''),$$

$W_g(k_x, k_y; x_\Sigma; z', z'')$ – пространственный спектр по горизонтальным переменным от функции корреляции поля неоднородностей $g(\vec{R})$. Как следует из (9) при $t = t_\Sigma$ регистрируется сигнал, рассеянный неоднородным

слоем толщины Δx , отстоящим от излучающей системы на расстоянии $x_{\Sigma}(t_{\Sigma})$. Сканируя t , можно определить элемент матрицы σ_{nm} , который пропорционален элементу матрицы рассеяния, а по величине σ_{nm} можно восстановить характеристики океанических неоднородностей.

В качестве иллюстрации рассмотрим элемент матрицы σ_{nm} в канале с линейным профилем скорости звука $c(z) = c_0 + \alpha z$ для объемных неоднородностей типа тонкой термохалинной структуры поля скорости звука, функцию корреляции которых можно приближенно задать в виде

$$\langle g(\vec{r}_1, z_1)g^*(\vec{r}_2, z_2) \rangle \simeq \left\langle \mu^2 \left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \right) \right\rangle \Phi_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Phi_2(z_1 - z_2) \Phi_3 \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right), \quad (10)$$

где

$$\Phi_3(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq z \leq d, \\ 0, & \text{если } d < z, \end{cases}$$

d — толщина приповерхностного слоя, в котором сосредоточены неоднородности. Полагая

$$\Phi_1(x, 0) = \exp\left(\frac{-x^2}{l_x^2}\right), \quad \Phi_2(z) = \exp\left(\frac{-z^2}{l_z^2}\right)$$

и используя ВКБ-приближение для собственных функций волновода, при $l_x \ll (h^2 - h_n^2)^{-1/2}$ получим [23]

$$\sigma_{nm}(z_{\Sigma}) \simeq 4\pi h^2 \alpha^2 \Delta x M_n^m(x_{\Sigma}) [c_0 \Theta_n \Theta_m]^{-2}, \quad (11)$$

где $h = \omega/c_0$, $\Theta_n = \arccos(h_n/h)$,

$$M_n^m = \langle \mu^2 \rangle l_x l_z d \exp[-(h_n - h_m)^2 (l_x^2/4)]$$

характеризует "мощность" тонкоструктурных неоднородностей скорости звука. Из (11) следует, что диагностика неоднородностей сводится к определению пространственного распределения "мощности" $M_n^m(x_{\Sigma})$. Варьирование номеров мод n и m или частоты позволяет определить горизонтальный радиус корреляции l_x , однако для определения $\langle \mu^2 \rangle$, l_z и d необходимо привлечение дополнительной априорной информации.

Число элементов матрицы σ_{nm} , которые в общем случае требуется измерить для восстановления океанологической информации, определяется количеством параметров, используемых в модели, описывающей неоднородность. Если неоднородность удается описать малопараметрической моделью, то достаточно измерить один либо два элемента σ_{nm} . Если параметров, требующих оценки, несколько, то придется измерять максимально возможное число элементов σ_{nm} (варьировать угол наклона диаграммы направленности антенны в вертикальной плоскости), варьировать частоту, а также привлекать независимые данные.

Обсуждение проводилось в предположении, что излучается одна, а принимается другая мода. Однако высказанные соображения остаются в силе и в том случае, когда возбуждение и прием осуществляются в достаточно узких и далеко разнесенных группах мод. Единственное отличие будет заключаться в том, что за счет межмодовой дисперсии в группах

будет ухудшаться пространственное разрешение. При этом задача селекции мод может решаться не только за счет использования развитых по вертикали или горизонтали антенн, но и благодаря существованию в океане естественных зон "модовой тени", которые, например, возникают вблизи крупных неровностей рельефа дна.

5. ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЕ ВИДЕНИЕ

Рассмотрим теперь другую "просветную" схему исследования океанических неоднородностей – видение [25, 26]. Метод основан на использовании достаточно больших горизонтальных антенн, для которых неоднородности расположены во Френелевской зоне. Выше мы говорили, что в этом случае в безграничном однородном пространстве реконструкция неоднородностей поля скорости звука сводится к последовательному фокусированию антенны на различные точки пространства с дальнейшим преобразованием данных. В океаническом волноводе в силу многомодового (или многолучевого) характера звукового поля задача существенно усложняется.

Следует отметить, что помимо распределенных в пространстве неоднородностей скорости звука метод может быть использован и для реконструкции неоднородностей, занимающих относительно небольшую область пространства и имеющих достаточно резкие границы. Для них задача заключается в определении характеристической функции объекта исследования и его акустического импеданса (скорости звука и плотности). Чтобы продемонстрировать возможности метода, рассмотрим для определенности компактный рассеиватель в виде абсолютно жесткого тонкого вертикального экрана, плоскость которого перпендикулярна акустической трассе. В такой постановке задача восстановления характеристической функции сводится к определению положения и горизонтального и вертикального размеров экрана. Заметим, что более общая задача реконструкции характеристической функции выпуклого тела произвольной формы в коротковолновом приближении эквивалентна рассматриваемому случаю плоского экрана [27]. Однако, для восстановления трехмерной формы тела потребуется определить набор эквивалентных экранов, полученных по нескольким проекциям (различно ориентированным в горизонтальной плоскости акустическим трассам), а уже по этому набору из элементарных геометрических построений определяется форма тела.

Дифрагированное на неоднородности звуковое поле p , в соответствии с формулой Грина представляется в виде интеграла по поверхности рассеивателя. Считаем, что размеры экрана велики по сравнению с длиной волны звука. Тогда можно воспользоваться приближением Кирхгофа, и под интегралом значение поля на освещенной части тела заменить на значение падающего поля, а на неосвещенной части считать равным нулю. В результате, используя модовое представление функции Грина, получим [25, 26]

$$p_s(\vec{R}) \approx \sum_{m=1}^N A_m(x_\Sigma) \exp \left[-ih_m \frac{y^2}{2(a-x_\Sigma)} \right].$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy' L(y') \exp \left[i h_m \frac{y y'}{a - z_{\Sigma}} \right], \quad (12)$$

где

$$A_m(z_{\Sigma}) = \frac{Q}{8\pi \sqrt{z_{\Sigma}(a - z_{\Sigma})}} \sum_{n=1}^N \left(\frac{h_m}{h_n} \right)^{1/2} \varphi_m(z) \varphi_n(z_s) \cdot T_{nm} \exp[-i h_n z_{\Sigma} - i h_m(a - z_{\Sigma})], \quad (13a)$$

$$T_{nm} = \int dz' T(z' \varphi_n(z') \varphi_m(z')), \quad Q = \text{const.} \quad (13b)$$

При выводе формулы (12) полагали, что источник расположен в точке ($x = 0, y = 0, z = z_s$), приемник - в точке (a, y, z), а рассеивающий экран находится в вертикальной плоскости $x = z$ ($0 < z_{\Sigma} < a$). Кроме того считали, что характеристическая функция экрана $\sigma(y', z')$ факторизуется: $\sigma(y', z') = L(y') T(z')$.

Не останавливаясь на определении вертикальной функции $T(z')$ (эта задача аналогична рассмотренному в разд.3 случаю реконструкции функции $g(z)$), обсудим возможность восстановления горизонтальной функции $L(y')$. Предположим, что при излучении и приеме осуществляется селекция моды с номером ν (например, за счет импульсного излучения и временного стробирования или использования вертикальных антенн). Тогда в суммах (12) и (13a) сохранится лишь одно слагаемое с индексом $n = m = 1$.

В принципе, как следует из (12), $L(y')$ может быть найдено путем преобразования Фурье от дифрагированного поля $p_s(\vec{R})$. Однако поскольку регистрируемый сигнал является суммой ($p + p_s$), то необходимо подавить "подсветку", сфокусировав антенну на заданную область пространства. С этой целью необходимо сигналы с отдельных приемных гидрофонов когерентно сложить, используя апертурный множитель

$$\tilde{M}(y; R_{\Phi}, \beta) = M_{\nu}(y) \exp[i h_{\nu} y \sin \beta + i h_{\nu} (y^2 / 2 R_{\Phi})], \quad (14)$$

где $M_{\nu}(y)$ характеризует антенну (в частности, ее длину и положение). Параметры фокусировки R_{Φ} и β выбираются равными радиусу кривизны и углу наклона фронта волны, приходящей от источника, расположенного в той области волновода, на которую фокусируется антенна.

Интегрируя дифрагированное поле по координате y с апертурным множителем \tilde{M} , получим

$$\Phi_s(R_{\Phi}, \beta) = A_{\nu} \int \int_{-\infty}^{\infty} dy dy' M_{\nu}(y) L(y') \cdot \exp \left[-i \frac{h_{\nu} y^2}{2} \left(\frac{1}{a - z_{\Sigma}} - \frac{1}{R_{\Phi}} \right) + i h_{\nu} y \left(\sin \beta - \frac{y'}{a - z_{\Sigma}} \right) \right]. \quad (15)$$

Функция $\Phi_s(R_{\Phi}, \beta)$ в пространстве параметров (R_{Φ}, β) или на горизонтальной плоскости, если каждой паре (R_{Φ}, β) сопоставить ту точку пространства (z, y) , на которую фокусируется антенна, дает изображение

рассеивающего экрана. Действительно, полагая, что апертура антенны достаточно большая ($M_\nu(y) \simeq \text{const}$), при $R_\Phi = (a - z_\Sigma)$ имеем $\Phi_\nu(\beta) \sim \sim L[(a - z_\Sigma) \sin \beta]$.

В силу конечности апертуры реальной антенны пространственное распределение функции $L(y')$ в изображении будет искажено. Такие искажения описываются импульсно-переходной характеристикой, являющейся изображением точечного рассеивателя (когда $L(y') = \sigma(y' - y_\Sigma)$). Из (15) следует, что импульсно-переходная характеристика зависит от координат и в различных частях поля зрения искажения различны. Наиболее существенно это проявляется в пространственном разрешении отдельных элементов по оси x (по глубине фокусировки). По мере уменьшения размеров антенны разрешение падает.

Поскольку реально измеряется сигнал $(p_0 + p_s)$, то вклад относительно мощного сигнала "подсветки" $\Phi_0(R_\Phi, \beta)$ на выходе антенны может маскировать изображение рассеивателя. Однако, для источника, расположенного в дальней зоне антенны, изображение источника подсветки $\Phi_0(R_\Phi, \beta)$ в области расположения рассеивателя (при $R_\Phi = (a - z_\Sigma)$) является существенно размытым или пространственно низкочастотным. Поэтому для подавления поля "подсветки" используется низкочастотная пространственная фильтрация, хотя это и приводит к дополнительному искажению в изображении рассеивателя. Такая фильтрация осуществляется путем задания специальной формы апертурной функции $M_\nu(y)$, учитывающей информацию о позиции источника "подсветки". Применение специального пространственного фильтра позволяет также компенсировать влияние интерференционной структуры, обусловленное многомодовым характером звукового поля (формулы (12), (13а), (13б)).

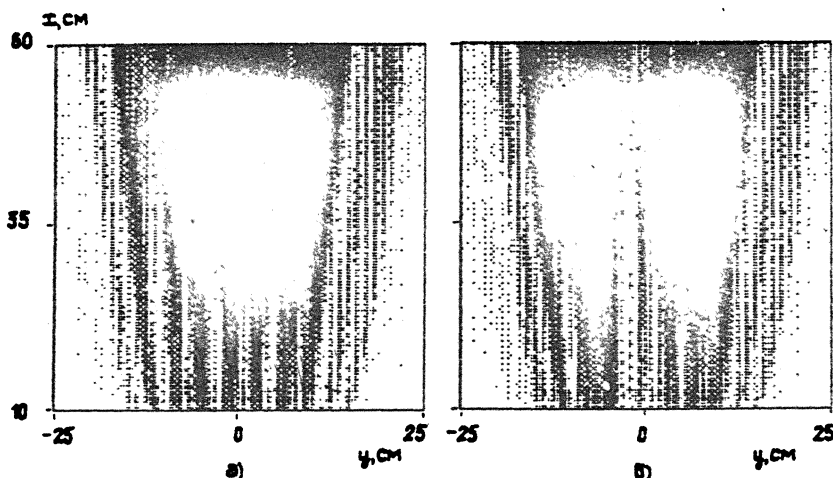


Рис. 1: Изображение источника без цилиндра (а) и источника в присутствии цилиндра (б) без фильтрации.

Проиллюстрируем вышесказанное результатами лабораторного эксп

римента по построению изображения стального цилиндра [26]. Цилиндр диаметром 0,25 см был расположен вертикально в слое воды толщиной 3 см на расстоянии 44,6 см от горизонтальной антенны с апертурой 28,6 см. Измерения проводились на частоте 140 кГц с помощью импульсов длиной 300 мкс. На рис.1 показано поле зрения, содержащее изображение цилиндра.

Можно видеть, что изображение имеет характерную изрезанность, связанную с интерференцией нескольких хорошо возбуждающихся в слое воды мод. Все поле зрения маскируется размытым изображением источника. Изображение цилиндра практически не заметно. На рис.2 показаны результаты того же эксперимента после пространственной фильтрации.

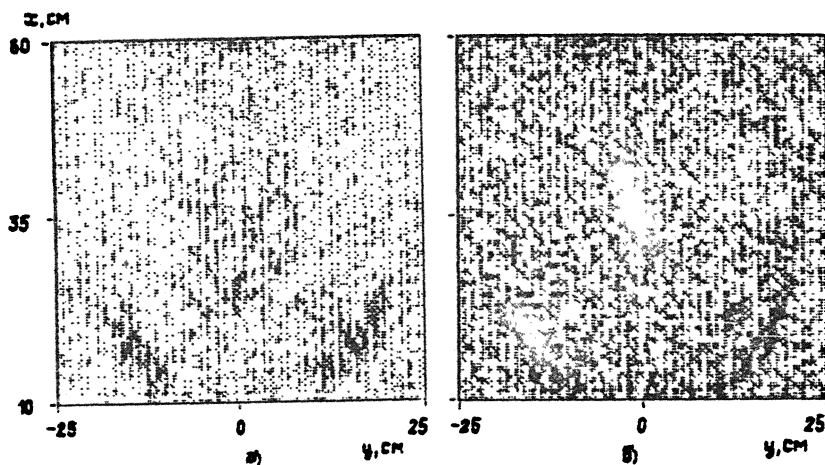


Рис. 2: Те же изображения, что на рис.1, но после фильтрации поля источника.

Конструкция фильтра учитывает как положение источника, так и межмодовую интерференцию. На рисунке отчетливо выделяется искаженное пространственным фильтром изображение цилиндра. Построение формы рассеивателя (цилиндра) в данном эксперименте было невозможно из-за недостаточного пространственного разрешения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на примере двух методов были затронуты некоторые аспекты акустической дифракционной томографии океана. Естественно, что они не исчерпывают весь круг вопросов, имеющих отношение к данной проблеме. В настоящее время, несмотря на некоторые успехи и достаточно обширную литературу, на наш взгляд, необходимы дальнейшие исследования, включающие развитие моделей взаимодействия звуковых полей с неоднородностями океана, разработку алгоритмов и программ реконструкции, проведение экспериментов. В этой связи можно указать

на проблему оптимизации системы наблюдения (схемы измерения). Поскольку в силу финансовых и технических сложностей реальный гидроакустический эксперимент ограничен относительно небольшим количеством датчиков (источников и приемников звука), то принципиальное значение имеет поиск такого размещения датчиков, при котором достигается максимальный объем информации об исследуемой области [1, 20]. Другим важным моментом является необходимость разделения вкладов различных типов океанических неоднородностей. В принципе такое разделение осуществимо, так как различные типы неоднородностей, как правило, имеют различные пространственно-временные масштабы. Однако для этого требуется определение интервалов оптимальных значений параметров измерения, при использовании которых вклад соответствующего типа неоднородностей доминирует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Munk W., Wunsch C. // Deep-Sea. Res. A. 1979. V.26. N 2A. P.123.
2. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. – Л.: Гидрометеонадат, 1982. – 262 с.
3. Акустика океана / Под ред. Л.М.Бреховских. – М.: Наука, 1974. С.231.
4. Зайцев В.Ю., Нечаев А.Г., Островский Л.А. Акустика океанской среды / Под ред. Л.М.Бреховских и И.Б.Андреевой. – М.: Наука, 1989. С.98.
5. Coornuelle V., Munk W., Wunsch C. et al. // J.Phys. Oceanogr. 1985. V.15. P.133.
6. Гончаров В.В., Куртепов В.М. Акустические волны в океане / Под ред. Л.М.Бреховских, И.Б.Андреевой. – М.: Наука, 1987. С.15.
7. Любавин Л.Я., Нечаев А.Г. // Акуст. журн. 1989. Т.35. N 4. С.703.
8. Shang E.C. // JASA. 1989. V.85. N4. P.1531.
9. Луитт Р.М. // ТИИЭР. 1983. Т.71. N 3. С.111.
10. Белов М.А., Цирулис Т.Т. Асимптотические методы обращения интегральных преобразований. – Рига: Зинатне, 1985. – 286 с.
11. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. – Новосибирск: Наука, 1987. – 231 с.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
13. Ценсор Я. // ТИИЭР: 1983. Т.71. С.148.
14. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику.
15. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 380 с.
16. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. – М.: Мир. 1981. Т.1, 2. – 317 с.
17. Зверев В.А. Радиооптика. – М.: Сов.радио, 1975. – 304 с.
18. Левин Г.Г., Вишняков Г.Н. Оптическая томография. – М.: Радио и связь, 1989. – 223 с.
19. Гринлиф Дж.Ф. // ТИИЭР. 1983. Т.71. N 3. С.54.
20. Буров В.А., Горюнов А.А., Сасковец А.В., Тихонова Т.А. // Вопросы

- судостроения. Сер.Акустика. 1985. N 1. С.32.
21. Mueller R.K. // *Ultrason. Jmag.* 1980. V.2. P.213.
 22. Нечаев А.Г., Хилько А.И. // *Акуст.журн.* 1988. Т.34. N 2. С.285.
 23. Нечаев А.Г., Хилько А.И. // *Акуст. журн.* 1988. Т.34. N 4. С.694.
 24. Каретникова И.Р., Нечаев А.Г., Хилько А.И. // *Изв.вузов. Радиофизика.* 1990. Т.33. N 12. С.1370.
 25. Бородина Е.Л., Горская Н.В., Горский С.М. и др. *Формирование акустических полей в океанических волноводах / Под ред. В.А.Зверева. – Нижний Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. С.174.*
 26. Бородина Е.Л., Горская Н.В., Горский С.М. и др. // *Акуст.журн.* 1992 (в печати).
 27. Горская Н.В., Горский С.М., Зверев В.А. // *Акуст. журн.* 1988. Т.34. N 1. С.55.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
21 октября 1992 г.

ACOUSTIC DIFFRACTION TOMOGRAPHY OF THE OCEAN *Nechaev*

A.G., Khil'ko A.I.

Tomographic monitoring peculiarities of the ocean average-scale inhomogeneities are discussed. The basic integral equations are analysed. The two schemes of diffraction tomography of random inhomogeneities and the scheme of hydroacoustic vision. Some results of inhomogeneity image reconstruction, based on data of laboratory experiments, are discussed.

О МЕТОДАХ РАСЧЕТА ПОЛЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ ЗВУКА В ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

В.Ю.Зайцев, Н.В.Прончатов-Рубцов

С первых публикаций, посвященных параметрическим излучателям звука (ПИ), отмечались их уникальные свойства по сравнению с обычными линейными излучателями – широкополосность на частоте и узость диаграммы направленности при малых габаритах излучающего устройства. Теория ПИ в однородной среде исследована сейчас достаточно полно [1]. В то же время указанные свойства ПИ позволяют рассчитывать на их полезные океанографические применения в условиях волноводного распространения звука – для создания заданной пространственно-временной структуры звукового поля, в частности, селективного возбуждения мод океанических волноводов и т.п. В этих условиях оказывается существенным влияние неоднородностей среды на процесс генерации волны разностной частоты (ВРЧ). Прямой перенос способов описания полей ПИ в свободном пространстве на океанические волноводы, как правило, невозможен и поэтому анализ соответствующих физических эффектов при формировании характеристик ПИ в неоднородной среде представляется весьма актуальной задачей. В настоящей статье дается краткий обзор исследований полей ПИ в гидроакустических волноводах, проведенных в работах авторов [2-7]. Для описания формирования поля ВРЧ использованы как модовое, так и лучевое представление. Рассмотрены предельные режимы генерации низкочастотного излучения, аналогичные режимам Вестервельта и Берктея в свободном пространстве [1]. Исследования проведены как для плоских изоскоростных волноводов (модель мелкого моря), так и для рефракционных звуковых каналов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим акустический волновод, в котором введем декартову систему координат (x, y, z) и ось z направим вертикально. Считаем, что волноводный характер распространения может быть обусловлен как наличием отражающих границ (дно, поверхность) при $z = \text{const}$, так и стратификацией скорости звука по глубине $c = c(z)$ [8]. Распределение полей накачки в плоскости $x = 0$, созданное бигармоническим излучателем с частотами ω_1 и ω_2 ($|\omega_1 - \omega_2| = \Omega \ll \omega_{1,2}$) будем описывать функциями $f(y, z, \omega_k) = f_k(y, z)$ ($k = 1, 2$). Считаем, что излучатель ориентирован в плоскости (x, z) , имеет эффективные размеры d_y и d_z , а его геометрический центр находится в точке $(0, 0, z_0)$.

При малых числах Рейнольдса в приближении заданного поля накачки акустическое давление $P_H(x, y, z)$ удовлетворяет неоднородному уравне-

нию [1,4]:

$$\Delta P_H + k^2 n^2(z) P_H = -Q(x, y, z), \quad (1)$$

где $k = \Omega/c_0$, $n(z) = c_0/c(z)$ – показатель преломления среды, c_0 – скорость звука на оси волновода. Для изоскоростных волноводов $n = 1$. Функция $Q(x, y, z)$ описывает пространственное распределение "виртуальных" источников, созданных полями накачки $P_k(x, y, z)$ ($k = 1, 2$),

$$Q(x, y, z) = \beta(z) P_1(x, y, z) P_2^*(x, y, z), \quad (2)$$

где $\beta(z) = \epsilon \Omega^2 / \rho c^4(z)$, ϵ – параметр нелинейности, ρ – плотность среды, а поля накачки $P_k(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца на частоте $\omega_{1,2}$ с условием $P_k(0, y, z) = f_k(y, z)$ при $x = 0$.

Используя функцию Грина $G(\vec{r}, \vec{r}')$, $\vec{r} = \{x, y, z\}$ уравнения (1), поле ВРЧ представим в виде

$$P_H(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 \vec{r}' Q(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (3)$$

где интегрирование проводится по всему объему, занятому "виртуальными" источниками. В дальнейшем в зависимости от условий задачи при анализе различных режимов работы ПИ в волноводах будем использовать либо модовое, либо лучевое представление функции Грина $G(\vec{r}, \vec{r}')$. Так, в модовом представлении

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_m \left(\frac{2\pi}{\alpha_m R} \right)^{1/2} \Psi_m(z) \Psi_m(z') e^{i(\alpha_m R + \pi/4)}, \quad (4)$$

где $R = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$; $\Psi_m(z)$, α_m – собственные функции и собственные значения соответствующей краевой задачи, причем α_m имеет смысл горизонтального волнового числа m -й моды.

В лучевом представлении

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_l A_l(\vec{r}, \vec{r}') \exp\{ik S_l(\vec{r}, \vec{r}') + i\chi_l\}, \quad (5)$$

где суммирование проводится по всем возможным геометроакустическим лучам, соединяющим точку наблюдения (\vec{r}) с точкой "виртуального" источника (\vec{r}'), $S_l(\vec{r}, \vec{r}')$ – эйконал, рассчитанный вдоль траектории l -го луча, $A_l(\vec{r}, \vec{r}')$ – лучевая амплитуда, χ_l – добавка к фазе l -го луча, связанная с прохождением каустик.

Прежде чем перейти к анализу характеристик ПИ в конкретных типах волноводов, выделим два предельных случая. В первом случае для остро-направленного пучка накачки "виртуальные" источники в поперечном сечении являются синфазными и реализуется режим генерации, аналогичный режиму Вестервельта в свободном пространстве. Для расходящегося пучка накачки основной вклад в поле ВРЧ вносят "виртуальные" источники, расположенные в малой окрестности геометроакустического луча, соединяющего апертурный излучатель с точкой наблюдения. В свободном пространстве этой ситуации соответствует режим Берктея [1].

2. РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПИ С ВЫСОКОНАПРАВЛЕННЫМ ПУЧКОМ НАКАЧКИ В ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

Основные особенности формирования поля ПИ в волноводе по сравнению с однородной средой можно показать на примере простой модели плоского изоскоростного волновода с отражающими границами. Далее будем следовать подходу, использованному в [3], для анализа модовой структуры поля ПИ, у которого высоконаправленный первичный пучок ориентирован в вертикальной плоскости под произвольным углом Θ к оси волновода и может испытывать отражения от дна и поверхности.

Считаем, что изоскоростной волновод ограничен свободной поверхностью жидкости при $z = 0$ и отражающим дном в плоскости $z = H$ и используем модовое представление функции Грина (4). Высоконаправленный пучок накачки представим в виде

$$P_{1,2} = F_{1,2}(\vec{r}') \exp(i \int \vec{k}_{1,2} d\vec{\xi} - \alpha \xi), \quad (6)$$

где $\xi = \xi(x, z)$ — лучевая координата, отсчитываемая вдоль оси пучка, $F_{1,2}(\vec{r}')$ характеризует распределение комплексной амплитуды волны поперек пучка накачки, $\int \vec{k}_{1,2} d\vec{\xi}$ — фазовый набег вдоль осевого луча ($k_{1,2} = \omega_{1,2}/c(z)$), α — коэффициент затухания высокочастотной волны, причем в силу $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}$ считаем $\alpha_1 \simeq \alpha_2 \simeq \alpha$. Тогда из (1) для амплитуды ВРЧ можно записать

$$P_H \simeq \frac{\varepsilon \Omega^2}{\rho c^4} e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_m \Psi_m(z) \int d^3 r' \Psi_m(z') F_1(\vec{r}') F_2^*(\vec{r}') \frac{1}{(z_m R)^{1/2}} \times \\ \times \exp\{i \int \vec{k} d\vec{\xi} - 2\alpha \xi + i z_m R\}. \quad (7)$$

Упростим выражение (7), рассмотрев его в дальней зоне ($z \gg \alpha^{-1}$); где структура низкочастотного поля уже сформировалась. Кроме того, считаем, что излучатель работает в режиме, аналогичном режиму Вестервельта для однородного пространства [1], т.е. характерная ширина пучка накачки много меньше вертикального масштаба моды σ_m^{-1} , и в каждом сечении пучка вертикальной плоскостью $z = \text{const}$ изменение фазы "виртуальных" источников много меньше π . Это дает ограничение на эффективную длину нелинейной антенны L :

$$L \ll \left\{ kaH, \frac{ka^2 \omega_{1,2}}{\Omega}, \frac{a \omega_{1,2}}{\Omega \Theta} \right\}, \quad (8)$$

где a — размер апертуры излучателя накачки.

При выполнении условий (8) интеграл (7) можно привести к виду

$$P_H \simeq \frac{i \varepsilon \Omega^2}{c^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\pi/4} W \sum_m \Psi_m(z) \int \int \Psi_m(z') \frac{\exp(i z_m z')}{(z_m z')^{1/2}} \times \\ \times \delta[z' - z(z')] \exp\{i \int \vec{k} d\vec{\xi} - 2\alpha \xi - i z_m z' \cos \beta\} dz' dz', \quad (9)$$

где $W = \iint (F_1 F_2^* / \rho c) dS_{\perp}$ имеет смысл "мощности" пучка накачки; β - угол, отсчитываемый от оси излучателя в горизонтальной плоскости, $z(\mathbf{x})$ - уравнение осевого луча пучка накачки.

Для горизонтально ориентированного пучка накачки из (9) следует выражение

$$P_H = \frac{i\epsilon\Omega^2}{4c^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\pi/4} \frac{2}{H} W \sum_m \Psi_m(z) \Psi_m(z_0) \frac{\exp(i\alpha_m x)}{(\alpha_m x)^{1/2}} M_m, \quad (10)$$

где $M_m = (i\Delta_m + 2\alpha)^{-1}$, $\Delta_m = k - \alpha_m \cos \beta$ - волновая расстройка от строгого синхронизма между взаимодействующими волнами и модой номера m . Из (10) видно, что максимум диаграммы направленности ПИ в горизонтальной плоскости приходится на угол $\beta = 0$. Для полуширины диаграммы на каждой моде по уровню половинной мощности из (10) получаем

$$(\Delta\beta)_m = ((2\Theta_m^4 + (4\alpha/k)^2)^{1/2} - \Theta_m^2)^{1/2}, \quad (11)$$

где $\Theta_m = \arctg(\sigma_m/\alpha_m)$ - угол наклона бриллюэновских волн, соответствующих моде с номером m ($\Theta_m^2 \ll 1$). Число мод N , эффективно возбуждаемых ПИ, из выражения (10) равно $N \simeq 2(\alpha/k)^{1/2}/\Delta\Theta_m$, где $\Delta\Theta_m$ - угловое расстояние между соседними по номеру волнами Бриллюэна.

При наклонной ориентации оси пучка накачки он испытывает отражения от границ волновода. В этом случае интеграл (9) разбивается на сумму интегралов по элементарным участкам пучка накачки, ограниченными точками поворота, причем конечный результат будет определяться уже интерференцией полей от всех таких участков. Используя разложение каждой моды на две бриллюэновские волны, из (9) имеем следующее выражение для амплитуды ВРЧ:

$$P_H \simeq \frac{i\epsilon\Omega^2}{4c^3} e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{W}{H} \sum_m \Psi_m(z) \frac{\exp\{i\alpha_m x\}}{(\alpha_m x)^{1/2}} M_m(\beta, \Theta). \quad (12)$$

где $M_m(\beta, \Theta)$ имеет смысл диаграммного множителя для моды номера m . Детальный анализ вида $M_m(\beta, \Theta)$ для различных физических ситуаций проведен в [3-5]. Здесь мы лишь отметим, что при $\beta, \Theta, \Theta_m \ll 1$ выражение для угла главного максимума диаграммы направленности моды с номером m в горизонтальной плоскости имеет вид

$$\beta_{\max} = \pm [2\pi\Theta/kH - (\Theta - \Theta_m)^2]^{1/2}, \quad (13)$$

т.е. максимум излучения разных мод ВРЧ приходится на различные углы. Если рассинхронизм между взаимодействующими волнами за счет неколлинеарности пучка накачки и бриллюэновских волн низкочастотного поля компенсируется фазовыми сдвигами при отражении от поверхностей волновода, то $\beta_{\max} = 0$. Таким образом, в отличие от диаграммы направленности ПИ в свободном пространстве угловая структура поля ПИ в горизонтальной плоскости в плоскостном волноводе может быть многопестковой, причем различной на разных модах, если реализуется режим генерации ВРЧ, аналогичный режиму Вестервельта.

Изложенный выше подход, основанный на условии синфазности "виртуальных" источников по вертикальному сечению пучка, был использован

авторами для анализа формирования поля ПИ в плоскостном волноводе с профилем скорости звука $c = c(z)$ в работах [4,5].

3. ЛУЧЕВОЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ПИ С РАСХОДЯЩЕЙСЯ НАКАЧКОЙ

Выше было рассмотрено формирование поля ВРЧ узконаправленным пучком накачки. При этом для описания использовалось модовое представление. Проведем анализ другой предельной ситуации, когда принципиальна дифракционная расходимость пучка накачки. Этот режим генерации может реализовываться при работе ПИ на достаточно низких частотах накачки, когда возрастает размер эффективной области взаимодействия и сокращается характерный масштаб дифракционной расходимости [7].

Рассмотрим процесс генерации поля ВРЧ в волновой зоне пучка накачки, когда распределение "виртуальных" источников $Q(\vec{r}')$ можно приближенно представить в виде

$$Q(\vec{r}') = \beta(z) \sum_l |M_l(\Theta_l, \beta_l, \vec{r}_0, \vec{r}')|^2 \exp\{ikS_l(\vec{r}_0, \vec{r}') - 2\alpha L_l(\vec{r}')\}, \quad (14)$$

где суммирование проводится по всем геометроакустическим лучам, соединяющим точку \vec{r}_0 , приближенно совпадающую с геометрическим центром апертурного излучателя, с точкой виртуального источника \vec{r}' , L_l — длина дуги l -го луча, Θ_l, β_l — углы выхода луча из точки \vec{r}_0 по отношению к плоскостям (x, z) и (x, y) соответственно. Лучевая амплитуда $|M_l(\Theta_l, \beta_l, \vec{r}_0, \vec{r}')|^2$ пропорциональна диаграмме направленности излучателя накачки. Как функция координат y', z' она задает поперечные размеры пучка накачки на расстоянии z' , а зависимость от Θ_l и β_l определяется направленными свойствами апертурного излучателя. При этом углы Θ_l, β_l и координаты \vec{r}' взаимосвязаны ($\Theta_l = \Theta_l(\vec{r}')$, $\beta_l = \beta_l(\vec{r}')$, $S_l(\vec{r}_0, \vec{r}')$ — эйконал вдоль l -го геометроакустического луча. Эффективные размеры пучка d_y^* и d_z^* по осям y и z на расстоянии z' приближенно определяются из соотношений:

$$d_y^* \approx \frac{\pi}{k_{1,2} d_y} \left| \frac{\partial^2 S(\vec{r}_0, \vec{r}')}{\partial y_0 \partial y'} \right|^{-1}, \quad (15)$$

$$d_z^* \approx \frac{\pi}{k_{1,2} d_z} \left| \frac{\partial^2 S(\vec{r}_0, \vec{r}')}{\partial z_0 \partial z'} \right|^{-1},$$

где все производные вычисляются в точке $(\vec{r}') = \vec{r}(z')$, лежащей на осевом луче пучка.

Подставляя в (3) выражение (14) для $Q(\vec{r}_0, \vec{r}')$ и функцию Грина $G(\vec{r}, \vec{r}')$ в лучевом представлении (5), получим для амплитуды поля ВРЧ:

$$P_H(\vec{r}) = \sum_{l_1} \sum_{l_2} \int_V d^3(\vec{r}') \beta(z) |M(\Theta_{l_1}, \beta_{l_1}, \vec{r}_0, \vec{r}')|^2 \times \\ \times A_{l_2}(\vec{r}, \vec{r}') \exp\{-2\alpha L_{l_1}(\vec{r}')\} \exp\{ik(S_{l_1}(\vec{r}_0, \vec{r}') + S_{l_2}(\vec{r}', \vec{r})) + i\chi_{l_2}(\vec{r}')\}. \quad (16)$$

Упростим выражение (16), используя метод стационарности фазы для вычисления интегралов. Рассмотрим фазу подинтегрального выражения (16),

$$k\bar{S} + \chi = k[S_{11}(\vec{r}_0, \vec{r}') + S_{12}(\vec{r}', \vec{r})] + \chi_2, \quad (17)$$

которое определяет набег фазы ВРЧ от апертурного излучателя к "виртуальному" источнику в точке \vec{r}' и от него к точке наблюдения \vec{r} . Стационарные точки лежат на траектории геометроакустических лучей, соединяющих непосредственно точки \vec{r}_0 и \vec{r} . Пусть такие стационарные траектории описываются уравнениями $\vec{r} = \vec{r}_i(x', \theta_i, \beta_i)$ или

$$z = z_i(x', \theta_i, \beta_i), \quad (18)$$

$$y = y_i(x', \theta_i, \beta_i).$$

В общем случае стационарных траекторий может быть несколько. Основной вклад в интегралы в (16) дают окрестности стационарных траекторий - так называемые френелевские объемы, размеры которых определяются радиусами Френеля [9]:

$$R_y^2(x') = \frac{2\pi}{k} \left| \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial y'^2} \right|^{-1}, \quad (19)$$

$$R_z^2(x') = \frac{2\pi}{k} \left| \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial z'^2} \right|^{-1}.$$

Условия применимости интегрирования методом стационарной фазы выражения (16) сводятся, в основном, к требованию малости размеров зон Френеля по отношению к эффективным размерам пучка накачки в каждом сечении x' в пределах области взаимодействия ($x' < 1/\alpha$):

$$d_y^*(x') > R_y(x'); \quad d_z^*(x') > R_z(x'). \quad (20)$$

Поскольку радиус зон Френеля определяется по низкой частоте, а дифракционная расходимость - частотой накачки, можно показать, что условия (20) начинают выполняться с расстояния x^* от излучателя накачки, приблизительно в ω/Ω раз превосходящего характерный масштаб прожекторной зоны исходного пучка $R_n(x^* \simeq (\omega/\Omega)R_n)$. (Отметим, что специальный анализ необходим для каустических областей.)

Таким образом, интегрируя в (16) методом стационарной фазы, получим

$$P_n(\vec{r}) = \tilde{P}_n(\vec{r}, x^*) + \tilde{P}_{nl}(\vec{r}, x^*), \quad (21)$$

где слагаемое $\tilde{P}_n(\vec{r}, x^*)$ описывает вклад в результирующее поле ВРЧ "виртуальных" источников, расположенных в области нелинейного взаимодействия $x < x^*$, для которой условия (20) не реализуются и метод стационарной фазы не применим. Второе слагаемое $\tilde{P}_{nl}(\vec{r}, x^*)$ описывает поле ВРЧ, генерируемое в волновой зоне пучка накачки и имеет вид

$$\tilde{P}_{nl}(\vec{r}) = \sum_i \exp\{ikS_i(\vec{r}_0, \vec{r})\} \int_{x^*}^z dx' \beta(z_i(x')) |M(\theta_i(\vec{r}), \beta_i(\vec{r}), \vec{r}_0, \vec{r}_i(x'))|^2 \times$$

$$\begin{aligned} & \times A_l(\vec{r}_l(x'), \vec{r}) \exp\{-2\alpha L_l(\vec{r}_l(x'))\} R_{ul}(x') R_{ul}(x') \times \\ & \times \exp\{i(\frac{\pi}{4}) \operatorname{sgn}(\frac{\partial^2 \tilde{S}_l}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \tilde{S}_l}{\partial z'^2}) + i\chi(\vec{r}_l(x'))\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Каждый из множителей интегрального выражения (22) имеет прозрачный физический смысл. Функция $|M|^2$ характеризует направленные свойства апертурного излучателя волны накачки. Так, если угол выхода луча $\vec{r}_l(x')$ лежит вне диаграммы направленности антенны накачки, то вклад этого луча в результирующее поле ВРЧ мал. Вклад "виртуальных" источников, лежащих в окрестности луча, эффективным образом учитывается амплитудным множителем подынтегрального выражения. Влияние волноводных свойств среды приводит к тому, что амплитудный множитель в (22) убывает при удалении от источника медленнее, чем в свободном пространстве.

Отметим, что в волноводах с отражающей акустически мягкой поверхностью генерация до и после отражения от границы происходит в противофазе [3]. В результате увеличение эффективной длины нелинейной антенны (характерного масштаба затухания волны накачки) больше длины цикла луча в волноводе не сопровождается дополнительным ростом амплитуды ВРЧ. В рефракционных волноводах аналогичная ситуация возникает благодаря наличию каустического сдвига фазы на $\pi/2$. Однако вблизи самой каустики пользоваться выражением (22) нельзя, так как в этой области нарушаются условия применимости лучевого представления функции Грина. К тому же в каустических областях происходит обужение пучка накачки, что может приводить к нарушению условия (20).

Слагаемое $\tilde{P}_n(\vec{r}, x^*)$ в (21), как уже отмечалось, описывает генерацию ВРЧ в областях, где условие (20) не выполняется: в прожекторной зоне пучка и в окрестностях каустик. Для расчета вклада в поле ПИ "виртуальных" источников, лежащих в непосредственной близости от излучателя накачки, можно применить, например, метод, описанный в предыдущем разделе.

Отметим, что вычисления интеграла по траектории луча в выражении (22), выполняемые численно, гораздо проще, чем интегрирование исходного выражения (3). Таким образом, лучевой метод оказывается удобным для расчета полей ПИ, работающих в волноводе в режиме, аналогичном режиму Берктея для свободного пространства, если зона генерации ВРЧ не включает каустических областей. 4. В заключение отметим, что идеология более общего подхода, позволяющего с единых позиций рассмотреть особенности формирования поля ПИ в рефракционном волноводе как в рассмотренных частных режимах расходящегося и высоконаправленного пучка накачки, так и в промежуточной области значения параметров, изложена в работе [6]. К сожалению, данный метод, в отличие от рассмотренных выше, сложнее реализуется при численных расчетах.

Анализ формирования полей ПИ в реальных океанических волноводах требует также учета влияния наряду с регулярными неоднородностями и случайных неоднородностей скорости звука. Некоторые аспекты данной задачи были рассмотрены в работах [10-12].

Методы расчета полей ПИ в волноводах, описанные выше, прошли ал-

пробацию при анализе экспериментов по параметрической генерации низкочастотного звука в изоскоростных и рефракционных волноводах как в модельных [13], так и в натуральных условиях [14, 15], причем теоретический прогноз дал хорошее совпадение с результатами экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. - Л.: Судостроение, 1981. - 264 с.
2. Гурбатов С.Н., Прончатов-Рубцов Н.В. // Акуст.журн. 1984. Т.30. N 1. С.51.
3. Зайцев В.Ю., Островский Л.А., Сутин А.М. // Акуст.журн. 1987. Т.33. N 1. С.37.
4. Гурбатов С.Н., Зайцев В.Ю., Прончатов-Рубцов Н.В. // Акуст.журн. 1989. Т.35. N 4. С.620.
5. Зайцев В.Ю. // Акуст.журн. 1989. Т.35. N 4. С.646.
6. Гурбатов С.Н., Костерин А.Г., Прончатов-Рубцов Н.В. // Акуст.журн. 1989. Т. 35. N 5. С.809.
7. Гурбатов С.Н., Прончатов-Рубцов Н.В., Шолин Д.В. // Труды III съезда советских океанологов. - Л.: Гидрометеонадат, 1988. С.50.
8. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. - Л.: Гидрометеонадат, 1982. - 264 с.
9. Вировлянский А.Л., Костерин А.Г. // Изв.вузов. Радиофизика. 1989. Т.32. N 4. С.412.
10. Гурбатов С.Н., Прончатов-Рубцов Н.В. // Акуст.журн. 1982. Т.28. N 6. С.770.
11. Зайцев В.Ю., Раевский М.А. // Акуст.журн. 1990. Т.36. N 2. С.288.
12. Зайцев В.Ю., Раевский М.А. Препринт ИПФ АН СССР N 259. - Горький, 1990.
13. Зайцев В.Ю., Курин В.В., Сутин А.М. // Акуст.журн. 1989. Т.35. N 2. С.266
14. Зайцев В.Ю., Калачев А.И. и др. // Акуст.журн. 1988. Т.34. N 3. С.470.
15. Донской Д.М., Зайцев В.Ю. и др. // Акуст.журн. 1993. Т.39. N 1.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 февраля 1993 г.

**CALCULATION METHODS OF THE FIELD OF PARAMETRIC
ACOUSTIC ARRAY IN OCEANIC WAVEGUIDES**

V. Yu. Zaitsev, N. V. Pronchatov-Rubtsov

Different calculation methods of the field of parametric acoustic array in inhomogeneous medium are considered. The regimes of low frequency wave generation which correspond to Westervelt and Berktaу regimes in infinite space are investigated. Normal waves and ray approach for difference frequency wave have been used. The investigation is carried out both for a plane isovelocity waveguide and for a refractive sound channel.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ СО СЛАБОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Е.С.Бенцлов, Е.Н.Пелиновский

Изучение рассеяния волн в средах с пространственно-временными неоднородностями является одной из центральных проблем общей теории волновых процессов. В простейшем случае задача сводится к анализу линейного волнового уравнения с переменными случайными коэффициентами. Его первое (не совсем строгое) решение, получившее название метода среднего поля, приведено в работах Канера [1] и Бурре [2], а затем обосновано с помощью диаграммной техники в работах Татарского [3,4]. Используя эти результаты, многие авторы плодотворно применяли метод среднего поля для решения разнообразных задач физики плазмы, радиофизики, акустики и океанологии. Естественно, что проблема обобщения полученных результатов на нелинейные среды представляется весьма интересной и важной. Такие обобщения начали появляться еще 20 лет назад [5 – 11]. Заметим, однако, что распространить методы диаграммной техники на нелинейные задачи не удалось и использование не вполне корректного метода среднего поля требовало дополнительного обоснования. Более того, в [12] был построен пример нелинейной системы с флуктуирующим параметром, для которых метод среднего поля давал заведомо неправильные результаты. Возникающие здесь трудности были суммированы в обзоре [13]. Новый импульс спустя 10 лет был дан в работах [14,15], где предложено асимптотически строгое обобщение метода среднего поля для нелинейного одномерного волнового уравнения, названное методом средней формы. Этот метод сейчас обобщается на более общие волновые системы [16 – 18].

В настоящей лекции изложены основные идеи, лежащие в основе нелинейных обобщений метода среднего поля. Как нам представляется, данный метод окажется весьма эффективным для решения разнообразных физических задач о рассеянии нелинейного волнового поля в случайных средах.

1. МЕТОД СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Рассмотрим сначала основную идею нелинейного обобщения метода среднего поля, как она была предложена еще 20 лет назад в [5 – 11]. Наиболее просто ее можно продемонстрировать на примере операторного уравнения вида

$$\hat{L}u = \epsilon \hat{M}u + \mu \hat{Q}u^2, \quad (1.1)$$

где \hat{L} , \hat{M} и \hat{Q} – детерминированные линейные интегродифференциальные операторы, u – вектор функций, описывающих волновое поле, μ – параметр, характеризующий нелинейность, и $\epsilon(\vec{r}, t)$ – вектор случайных функций с заданной статистикой, определяющий пространственно-временные

неоднородности среды. Выберем $\varepsilon(\vec{r}, t)$ так, что

$$\langle \varepsilon(\vec{r}, t) \rangle = 0, \quad (1.2)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций. Представим волновое поле в виде среднего $\langle u \rangle$ и рассеянного u' полей:

$$u = \langle u \rangle + u', \quad \langle u' \rangle = 0. \quad (1.3)$$

Подставим (1.3) в (1.1) и усредним полученное уравнение по ансамблю неоднородности с учетом (1.2):

$$\widehat{L}\langle u \rangle = \langle \varepsilon \widehat{M} u' \rangle + \mu \widehat{Q} \langle u \rangle^2 + \mu \widehat{Q} \langle u'^2 \rangle. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) является незамкнутым относительно среднего поля. Другое уравнение получим, вычитая (1.4) из (1.1):

$$\widehat{L}u' = \varepsilon \widehat{M} \langle u \rangle + (\varepsilon \widehat{M} u' - \langle \varepsilon \widehat{M} u' \rangle) + \mu \widehat{Q} (u'^2 - \langle u'^2 \rangle) + 2\langle u \rangle u'. \quad (1.5)$$

Получение решений уравнений (1.4) и (1.5) отнюдь не легче, чем исходного уравнения (1.1), поскольку они содержат случайную вектор-функцию ε .

Целью метода среднего поля является получение уравнений, в которые бы входили только детерминированные функции (например, корреляционные функции от ε). Эта процедура обычно получается с использованием каких-либо приближений. Например, часто можно считать $\langle \varepsilon^2 \rangle$ малым параметром и этот случай соответствует определенной малости рассеяния, так что волна долго может распространяться, сохраняя свою индивидуальность. Будем также считать нелинейность малой, причем

$$\mu \sim \langle \varepsilon^2 \rangle. \quad (1.6)$$

Генерация рассеянного поля описывается первым слагаемым в (1.5) и при малых ε можно ожидать, что рассеянное поле u' пропорционально ε . Но тогда остальные члены в (1.5) являются малыми второго порядка малости (или более высоких степеней) и в первом приближении могут быть опущены. Тогда уравнение (1.5) сводится к следующему:

$$\widehat{L}u' = \varepsilon \widehat{M} \langle u \rangle \quad (1.7)$$

и легко интегрируется в квадратурах

$$u' = \widehat{L}^{-1} \varepsilon \widehat{M} \langle u \rangle. \quad (1.8)$$

(Мы не останавливаемся на возможных технических сложностях получения обратного оператора \widehat{L}^{-1} , поскольку они не связаны со случайностью среды.)

Если в качестве $\langle u \rangle$ выбрать невозмущенное решение уравнения (1.4) (с нулевой правой частью), то с помощью (1.8) легко исследовать все характеристики рассеянного поля и это приближение получило название приближения Борна или приближения однократного рассеяния [3,4]. Как правило, такой подход справедлив при малой величине неоднородностей и малости объема, занимаемого неоднородностями, при этом u' остается

малым по сравнению с $\langle u \rangle$. Можно, однако, попытаться получить решение исходного уравнения, пригодное для больших рассеивающих объемов. Для этого нужно, так же как это делается в асимптотических методах, считать поле $\langle u \rangle$ не заданным и распорядиться им так, чтобы u' оставалась ограниченной на достаточно больших расстояниях.

Искомое уравнение для $\langle u \rangle$ нами уже написано (уравнение 1.4) и задача, по существу, сводится к вычислению с той или иной степенью точности рассеянного поля u' через $\langle u \rangle$, чтобы уравнение (1.4) оказалось замкнутым. В первом приближении естественно связать u' с $\langle u \rangle$ формулой (1.8) (но не считая $\langle u \rangle$ заданной функцией), тогда уравнение для среднего поля принимает вид

$$\widehat{L}\langle u \rangle = \langle \varepsilon \widehat{M} \widehat{L}^{-1} \varepsilon \widehat{M} \rangle \langle u \rangle + \widehat{Q}\langle u \rangle^2. \quad (1.9)$$

В результате получено замкнутое уравнение с детерминированными коэффициентами, и его решение можно получить с помощью регулярных методов нелинейной теории волн. В этом и состоит вся идея метода среднего поля, а сами приближения получили названия:

приближение Бурре (пренебрежение многократностью рассеяния), при этом опускаются слагаемые в первой скобке в правой части уравнения (1.5),

приближение Хоува (пренебрежение нелинейностью рассеянного поля), в уравнениях (1.4) и (1.5) опускаются слагаемые типа $\langle u'^2 \rangle$ и $u'x(u)$.

Данный метод кажется весьма привлекательным, поскольку на уровне "значков" малость каждого слагаемого представляется очевидной, тем более, что в линейных задачах данный метод (то есть приближение Бурре) обосновывается. Однако в нелинейных задачах не все так просто.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим простейшую модель одномерной слабонелинейной недиспергирующей среды с малыми флуктуациями скорости распространения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(1 + \mu \varepsilon(x)\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

Применяя описанный выше метод среднего поля к уравнению (2.1), мы получим замкнутое уравнение для среднего поля (подробности см. в [15]):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} = \\ & = \mu^2 \left(2 \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau) \frac{\partial^3 \langle u \rangle}{\partial x^2 \partial t} (x - \tau, t - |\tau|) dt - 3\sigma^2 \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u \rangle^2}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $W(\tau) = \langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+\tau) \rangle$ - корреляционная функция флуктуаций скорости распространения и $\sigma^2 = \langle \varepsilon^2 \rangle = W(0)$ - дисперсия флуктуаций. При этом рассеянное поле в данном приближении записывается в квадратурах:

$$u'(x, t) = \mu \iint_{-\infty}^{\infty} G(x - x_0, t - t_0) 2\varepsilon(x_0) \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x_0^2} (x_0, t_0) dx_0 dt_0. \quad (2.3)$$

Здесь G – функция Грина линейного волнового уравнения, равная $G(x, t) = 1/2H(t - |x|)$, где H – функция Хевисайда.

Для более тщательного анализа удобно использовать одноволновое приближение, справедливое при условии, например, что начальные условия отвечают волне, бегущей только вправо. Тогда решение уравнения (2.2) зависит от переменных x и t через следующие аргументы:

$$z = x - t, \quad T = \mu^2 t \quad (2.4)$$

и с помощью стандартных методов нелинейной теории волн с точностью до μ^2 уравнение (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial T} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - \frac{3\sigma^2}{2} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - \left(\int_0^\infty W(\tau) d\tau \right) \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2} - \\ - \int_0^\infty W(\tau) \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2} (z + 2\tau, T) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

С точностью до последнего слагаемого это уравнение совпадает с уравнением Бюргерса и сводится к нему при условии мелкошпалтности флуктуаций. Уравнение (2.5) и является "окончательным продуктом" метода среднего поля.

Для оценки применимости метода среднего поля удобно перейти к одноволновому приближению в выражении для рассеянного поля (2.3):

$$u'(z, t) = -\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \mu \Theta(z) - \int_0^\infty \mu \varepsilon(z + t + \tau) \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} (z + 2\tau, T) dt, \quad (2.6)$$

где

$$\Theta = \int_{-\infty}^z \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

– флуктуации фазы. Отметим, что первое слагаемое в (2.6) описывает малый сдвиг падающей волны как целого (рассеяние "вперед"), а второе – отраженную волну (рассеяние назад). Действительно, сумма падающей волны и слагаемого, отвечающего за рассеяние "вперед", с указанной точностью "сворачивается" в одно слагаемое $\langle u(z - \mu\Theta) \rangle$. Легко видеть, что среднеквадратичная флуктуация фазы $\langle \Theta^2 \rangle$ неограничена с возрастанием z :

$$\langle \Theta^2 \rangle \rightarrow 2z \int_0^\infty W(\tau) dt. \quad (2.8)$$

Ясно, что вместе с $\langle \Theta^2 \rangle$ бесконечно велика и $\langle u'^2 \rangle$, а именно это слагаемое отбрасывается при переходе от точных уравнений (1.4) и (1.5) к приближенному уравнению для среднего поля (1.9), в данном примере к уравнению (2.2). Таким образом, метод среднего поля оказывается некорректным в нелинейных задачах. Сказанное выше не затрагивает линейных сред, в которых слагаемое типа $\langle u'^2 \rangle$ вообще не возникает и здесь метод среднего поля является вполне надежным.

3. МЕТОД СРЕДНЕЙ ФОРМЫ

Из приведенного выше становится понятным, что неприменимость метода среднего поля связана с фазовыми флуктуациями в волне (рассеянием "вперед"). Но тогда следует подумать, каким образом мы можем исключить фазовые флуктуации, поскольку они не несут физического смысла и не соответствуют потерям энергии в случайной среде. В случае одномерности задачи ответ, естественно, очень простой: надо перейти в систему координат, движущуюся с флуктуирующей скоростью, так чтобы в ней фазовые флуктуации отсутствовали. Рассмотрим снова нелинейное волновое уравнение (2.1), но для упрощения выкладок будем считать ϵ функцией только t (пространственные флуктуации рассмотрены в [15]). Перейдем в систему отсчета, движущуюся с неопределенной (пока) скоростью:

$$x' = x - \int c(t)dt, \quad t' = t. \quad (3.1)$$

В новых переменных уравнение (3.1) принимает вид (штрихи опущены)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2c(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{\partial c}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + [c^2 - (1 + \mu\epsilon)^2] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (3.2)$$

Мы здесь снова рассмотрим одноволновое приближение и в соответствии с методом многих масштабов, применяемых для получения эволюционных уравнений [19, 20] (фактически мы его использовали и в предыдущем параграфе), введем наряду с "быстрым" временем медленное время $T = \mu^2 t$ и будем отыскивать решение в виде асимптотических рядов с точностью до μ^2 :

$$u(x, t, T) = u^{(0)}(x, T) + \mu u^{(1)}(x, t, T) + \mu^2 u^{(2)}(x, t, T), \quad (3.3)$$

$$c(t) = 1 + \mu c^{(1)}(t) + \mu^2 c^{(2)}(t). \quad (3.4)$$

Главные члены этих рядов соответствуют волне, бегущей вправо. Нулевой по μ порядок теории возмущений удовлетворяется автоматически, а в первом получается уравнение для рассеянного поля:

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t \partial x} = \frac{\partial c^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + 2 \left(\epsilon - c^{(1)} \right) \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2}. \quad (3.5)$$

Оно тривиально интегрируется с учетом начальных условий отсутствия отраженных волн при $t \rightarrow -\infty$:

$$u^{(1)} = \int_0^\infty \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x}(x + 2\tau; T) \epsilon(t - \tau) d\tau - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x}(x, T) \int_{-\infty}^t (\epsilon(\tau) - c^{(1)}(\tau)) d\tau. \quad (3.6)$$

Легко видеть, что последнее слагаемое в (3.6) отвечает рассеянию "вперед" и оно приводит к неограниченному возрастанию $u^{(1)2}$. Для исключения этого положим

$$c^{(1)}(t) = \epsilon(t), \quad (3.7)$$

тогда рассеянное поле остается ограниченным. Во втором порядке по μ имеем неоднородное линейное уравнение для $u^{(2)}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - 2 \frac{\partial}{\partial x} \right) u^{(2)} = F(x, t, T), \quad (3.8)$$

$$F = 2 \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial T \partial x} + \frac{\partial^2 (u^{(0)})^2}{\partial x^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + 2c^{(2)} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial c^{(2)}}{\partial t} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}. \quad (3.9)$$

Для ограниченности $u^{(2)}$ при $t \rightarrow \infty$ необходимо потребовать

$$\langle F \rangle = \lim_{2\Delta} \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{+\Delta} F(x, t, T) dt = 0. \quad (3.10)$$

Это условие и приводит к искомому эволюционному уравнению для $u^{(0)}$ (индекс (0) опущен):

$$\frac{\partial u}{\partial T} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^{\infty} W(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x + 2\tau, T) d\tau = 0, \quad (3.11)$$

где W , как и ранее, корреляционная функция ϵ . Уравнение (3.11) содержит только детерминированные коэффициенты, как и в методе среднего поля. Однако поскольку усреднение поля произведено в системе отсчета, движущейся со случайной скоростью и "отслеживающей" флуктуации фазы волны, то $u(x, T)$ описывает среднюю форму волны, а не среднее поле. Вычисление же среднего поля производится без труда по формуле

$$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^{(0)}(x - t - \Theta) \Gamma(\Theta, t) d\Theta, \quad (3.12)$$

где Γ – вероятностное распределение фазы Θ .

Таким образом, удается построить непротиворечивую схему для описания характеристик нелинейных волн в случайных средах. Разумеется, уже из текста этой лекции видно, что здесь еще нет такой же полноты и общности, как для линейных сред. Ряд обобщений предложенной схемы удастся сделать [17, 18], но только для одномерных флуктуаций среды. Вопрос о поведении нелинейного волнового поля в двумерных и трехмерных случайных средах остается пока открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канер Э.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т.2. N 5. С.827.
2. Bourget R.S. // Can. J. Phys. 1962. V.40. P.782.
3. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. –

М.: Наука, 1967.

4. Рытов С.М., Кравцов Ю.Я., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1978. Ч.2.
5. Howe M.S. // J.Fluid Mech. 1971. V.45. N 4. P.785.
6. George A.R., Plotkin K.I. // Phys. Fluids. 1971. V.14. N 3. P.548.
7. Plotkin K.I., George A.R. // J.Fluid. Mech. 1972. V.45. P.785.
8. Yajima N. J. // Phys.Soc.Japan. 1972. V.33. P.1475.
9. Тамойкин В.В., Файнштейн С.М. // ЖЭТФ. 1973. Т.64. С.505.
10. Пелиновский Е.Н., Саичев А.И., Фридман В.Е. // Изв.вузов. Радиофизика. 1974. Т.17. N 6. С.875.
11. Богатырев Ю.К., Файнштейн С.М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т.18. N 6. С.888.
12. Гурбатов С.Н., Пелиновский Е.Н., Саичев А.И. // Изв.вузов. Радиофизика. 1978. Т.21. N 10. С.1485.
13. Пелиновский Е.Н. Распространение волн в статистически неоднородном океане. – В кн.: Нелинейные волны. – М.: Наука, 1979. С.331.
14. Бенилов Е.С., Пелиновский Е.Н. // ДАН СССР. 1988. Т.301. N 5. С.1100.
15. Бенилов Е.С., Пелиновский Е.Н. // ЖЭТФ. 1988. Т.94. N 1. С.175.
16. Benilov E.S., Pelinovsky E.N. Amplification of Nonlinear Waves in the Medium with Temporal Fluctuations. – In: Res. Reports in Physics. Nonlinear Waves in Active Media. Springer, 1989. P.121.
17. Gurevich B., Jeffrey A., Pelinovsky E. A method for obtaining evolution equations for nonlinear waves in a random medium. – (in press).
18. Пелиновский Е.Н., Разин А.В. // Колебания и волны. – Нижний Новгород: Политехнический ин-т (в печати).
19. Jeffrey A., Kawahara T. Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory. – Pitman, London. 1982.
20. Engelbrecht J.K., Fridman V.E., Pelinovsky E.N. Nonlinear Evolution Equations. Pitman Research Notes in Mathematics Series, No. 180. Longman, London. 1988.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
5 октября 1992 г

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ ТОЧЕК НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

А.Ю.Зорин, И.П.Смирнов, А.И.Хилько

Известно, что поле источника в неоднородной среде распределено неравномерно. Следствием этого является существование областей слабой чувствительности, характеризующихся тем, что пространственно-локализованные неоднородности среды в этих областях не вызывают заметных возмущений поля в точке наблюдения. Это имеет важное значение при построении систем томографического мониторинга и видения в различных неоднородных средах. Указанные свойства неоднородной среды удобно описать с помощью двух коэффициентов связи - "коэффициента энергетической связи" (КЭС) и "коэффициента анизотропности" (КА). Представляются интересными исследование характеристик энергетической связи точек неоднородной среды, построение пространственного распределения коэффициентов энергетической связи и анизотропности для часто встречающихся в натуральных условиях типов плоских волноводов (отметим, что для этого можно применить различные методы расчета полей в неоднородных средах [1]. Ниже будет использовано приближение геометрической оптики [2]. Вместе с тем, предложенный в работе подход может быть полезен и при расчете полей других приближений.), а также выработка рекомендаций по использованию таких распределений при построении систем видения и мониторинга. Учитывая особенности часто встречающихся в натуральных условиях неоднородных сред, будем рассматривать задачу на примере слоисто-неоднородного волновода.

Пусть S , R и T - заданные точки горизонтально стратифицированной среды. Поместим в точки R , S соответственно, ненаправленные приемник и источник звука мощности W , а в точку P малое тело с гладкой равномерно выпуклой поверхностью, моделирующее произвольную пространственно-локализованную неоднородность. Для полной интенсивности отраженной от тела волны в точке приема R имеем:

$$I = (W/4\pi) \sum_{i,j}^{m,n} (f_{ij}^{(S)} S_{ij} f_{ij}^{(R)}) (\rho_{ij}^{(S)} \rho_{ij}^{(R)})^{-2}. \quad (1)$$

Здесь $S_{ij} = |\Gamma_{ij}|^2 / |K_{ij}|$, Γ_{ij} - коэффициент Френеля, K_{ij} - полная кривизна поверхности в точке отражения P , $\rho_{ij}^{(S,R)}$ - расстояния в горизонтальной плоскости, $f_{ij}^{(S,R)}$ - факторы фокусировки лучей, соединяющих P с S , R соответственно. Формула (1) выведена в предположении, что полная кривизна отражающей поверхности значительно превосходит кривизны фазовых фронтов полей; она неверна также вблизи каустик семейств выходящих из точек S , R лучей [2]. Если размеры тела достаточно малы, то в (1) можно приближенно положить $\rho_{ij}^{(S)} \approx \rho_S$, $\rho_{ij}^{(R)} \approx \rho_R$. И для соответствующих факторов фокусировки $f_{ij}^{(S)} \approx f_i^{(S)}$, $f_{ij}^{(R)} \approx f_j^{(R)}$, где

$f_i^{(S)}$, $f_j^{(R)}$ – факторы фокусировки лучей, приходящих в точку P . Функция $S(\vec{n}) = K(\vec{n})^{-1}$ (где $K(\vec{n}) \equiv K(n_x, n_y, n_z)$) – гауссова кривизна поверхности в той ее точке, где внешняя нормаль равна \vec{n} в системе координат $X'Y'Z'$, связанной с телом), далее называемая "функцией поверхности", характеризует рассеивающее тело. Тогда для идеального отражателя ($|\Gamma_{ij}| = 1$) легко найти сечения рассеяния S_{ij} в (1). Действительно, если U – унитарная матрица преобразования от связанной со средой декартовой системы XYZ к системе $X'Y'Z'$, то

$$S_{ij} = S(U\vec{n}_{ij}), \quad \vec{n} = (\vec{t}_i^{(S)} + \vec{t}_j^{(R)}) / \sqrt{2(1 + (\vec{t}_i^{(S)} \vec{t}_j^{(R)}))},$$

где $\vec{t}_i^{(S)}$, $\vec{t}_j^{(R)}$ – касательные орты лучей, приходящих в P из S и R соответственно. Используя все вышесказанное, преобразуем (1) к виду

$$I = (W/4\pi)(\rho_S \rho_R)^{-2} \sum_{\alpha=1}^k \mathcal{F}_\alpha S(U\vec{n}_\alpha), \quad (2)$$

где $\alpha = (ij)$, $\mathcal{F}_\alpha = f_i^{(S)} f_j^{(R)}$, $k = mn$.

Из (2) видно, что для определения интенсивности поля в точке приема необходимо знание следующего набора параметров $\{\rho_s, \rho_r, (\mathcal{F}_\alpha, \vec{n}_\alpha)_{\alpha=1..k}\}$. Вместе с тем этого набора еще недостаточно для нахождения интенсивности – требуется еще знать функцию поверхности $S(\vec{n})$ и ориентацию тела в пространстве. Указанные факторы взаимодействуют в формуле (2), что затрудняет учет их влияния на величину интенсивности. Но найдем, например, среднюю по всем возможным ориентациям тела интенсивность в точке приема. Имеем из (2)

$$\bar{I}_U = (W/4\pi)(\rho_S \rho_R)^{-2} \sum_{\alpha=1}^k \mathcal{F}_\alpha \bar{S}_\alpha.$$

Так как величина $S_\alpha = \langle \bar{S}(U\vec{n}_\alpha) \rangle_U = \langle S(\vec{n}') \rangle_{\vec{n}}$ не зависит от индекса α , то

$$\bar{I}_U = (W/4\pi)V\bar{S}, \quad V \equiv (\rho_S \rho_R)^{-2} \sum_{\alpha=1}^k \mathcal{F}_\alpha. \quad (3)$$

В (3) вышесказанные факторы оказываются полностью разделенными: величина S – среднее значение эффективной поверхности тела, V – величина, определяемая исключительно свойствами среды. Последнюю естественно назвать коэффициентом энергетической связи точек S, R через точку P (КЭС). Укажем следующие очевидные свойства КЭС $V = V(S, R; P)$:

1. $V \geq 0$; $V = 0$ тогда и только тогда, когда $k = 0$.

2. $V(S, R; P) \equiv V(R, S; P)$.

3. Если точки S и R лежат на одном горизонте, то график функции $V(P) \equiv V(R, S; P)$ симметричен относительно плоскости, параллельной оси z , ортогональной линии, соединяющей точки S и R и проходящей через середину этой линии.

Характеризуя среднюю по всем возможным ориентациям тела интенсивность, КЭС не дает никакой информации относительно того, насколько велики вариации интенсивности при изменении ориентации. Величина этих вариаций при заданной функции поверхности $S(\vec{n})$ определяется, очевидно, степенью равномерности распределения направлений ортов \vec{n}_α в пространстве. Скалярной характеристикой степени равномерности распределения может служить величина

$$\delta = |(\sum_{\alpha=1}^k \mathcal{F}_\alpha \vec{n}_\alpha) / (\sum_{\alpha=1}^k \mathcal{F}_\alpha)|,$$

где множители \mathcal{F}_α учитывают неравноценность вклада различных лучей в суммарную интенсивность. Назовем эту величину "коэффициентом анизотропности" (КА) среды в точке P . КА принимает свои значения в интервале $[0,1]$. Он характеризует потенциальные возможности среды по созданию вариаций интенсивности в точке приема при изменении ориентации отражателя: чем ближе δ к 1, тем больше эти возможности и, наоборот, если δ мало, то даже для сильно асимметричного тела изменение его ориентации не приведет к большим вариациям поля.

Для практических целей важно проанализировать пространственное распределение КЭС и КА для типичных плоскостойких волноводов, встречающихся в атмосфере и океане. В качестве такового рассмотрим билинейный канал [1]. Учитывая то обстоятельство, что лучи, распространяющиеся под большими углами к оси канала, в реальных условиях быстро затухают, будем считать, что одна из стенок волновода (дно) — идеально поглощающая, а другая (поверхность) — является свободной либо идеально проводящей. Таким образом имеем простейшую модель геофизического волновода.

В случае симметричного расположения источника и приемника структура КЭС также симметрична по координатам. Вблизи оси волновода формируются области с большой степенью связи (значением КЭС). Это обуславливается большим количеством каналов связи (лучей) КА, но в противоположном смысле - в районах, где поле формируется большим числом каналов связи коэффициент коэффициент анизотропности мал. В определенном смысле структуры КЭС и КА как бы дополняют друг друга, однако существуют и такие области, где оба эти коэффициента велики. Качественно иная структура распределения коэффициентов имеет место при расположении приемника и источника на разных расстояниях от оси канала. В этом случае вся картина не симметрична как в вертикальной так и в горизонтальной плоскости. Характерно практически полное совпадение распределений КЭС и КА. Это можно объяснить тем, что все "связывающие" области формируются небольшим числом каналов связи и практически для каждой точки таких областей ориентация неоднородности будет существенной.

Анализ пространственных распределений КЭС и КА для волноводов различной структуры показывает, что поле зрения систем видения, либо область реконструкции при томографическом мониторинге, является неоднородным с точки зрения доступности наблюдения и реконструкции неоднородностей. По существу распределения КЭС и КА учитывают свой-

ства априорно построенной модели неоднородной среды и позволяют выделить участки поля зрения, в которых реконструкцию неоднородностей осуществить нельзя. Более широкие возможности практического использования исследуемые коэффициенты, по-видимому, могут иметь в случае, когда характеристики неоднородностей, так же как и среды, априорно известны. Применение КЭС и КА для таких неоднородностей позволяет путем предварительных расчетов сформировать базис функций, необходимых для быстрого построения изображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. - Л.: Гидрометеонадат, 1982. - 262 с.
2. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. - М.: Наука, 1980. - 304 с.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
14 сентября 1992 г.

УДК 535.21:538.97

КОЛЛЕКТИВНОЕ ОПТИЧЕСКОЕ ПЛАЗМООБРАЗОВАНИЕ В ПРОТЯЖЕННОМ АЭРОЗОЛЬНОМ ОБЛАКЕ

М.Ю.Климов, Ю.М.Сорокин

1. Среди многочисленных возможностей формирования распределенных нелинейных структур, в том числе плазменных, мы хотим обратить внимание на известный в атмосферной оптике, но слабо разработанный в нелинейной динамике и физике плазмы класс явлений, связанных с оптическим (лазерным) пробоем газов [1] и аэродисперсных сред [2]. Как механизм плазмообразования, так и динамика возникающих при этом самосогласованных структур (оптических разрядов) существенно зависит от длины волны инициирующего пучка, давления газа и характера аэрозольной компоненты, поэтому с известной степенью общности мы будем говорить далее лишь о разрядах в длинноволновой части видимого и ближнем ИК диапазонах для случая твердого высококонцентрированного аэрозоля при давлениях порядка атмосферного. Специфика СВЧ-разрядов в газе и при давлениях того же порядка (равновесный режим) и значительно меньше атмосферного (холодный неравновесный разряд) освещена соответственно в работах [3-5] и [6,7]. Влияние аэрозольной компоненты на пороговые характеристики и динамику разряда в этом частотном диапазоне не исследовалось. По отношению к интенсивности инициирующего излучения оптические разряды в чистом газе обладают наиболее высоким порогом ($I^* \geq 10^{10} - 10^{11}$ Вт/см².) Наличие отдельных аэрозольных частиц микронных и более крупных размеров позволяет снизить порог до $I^* \sim 10^9 - 10^8$ Вт/см². Возможность предельно низкого порогового оптического плазмообразования ($I^* \sim 10^5 - 10^6$ Вт/см²) может быть реализована в аэрозольном облаке достаточно высокой плотности за счет коллективных эффектов [8,9,2]. При этом формирование разряда (плазменной области с размерами порядка фокальной перетяжки инициирующего пучка) обеспечивается в миллисекундных лазерных импульсах за счет "холодного" (при температуре порядка температуры кипения вещества аэрозоля слияния плазменных микрофакелов, образовавшихся на соседних аэрозольных частицах и резкого изменения соотношения между энергозатратами и тепловыми потерями).

2. Описанные к настоящему времени в литературе пороговые модели [2,8-10] и результаты экспериментального исследования возникающего таким образом коллективного оптического разряда (КОР)[2] соответствуют, фактически, параметрическому случаю, когда по отношению к инициирующему пучку разряд остается оптически тонким, его размеры вдоль и поперек пучка отстают от одного порядка (2-5 см) и в лабораторных экспериментах определяются диаметром пересекающей лазерный пучок аэрозольной струи.

Поскольку концентрация электронов в разрядах типа КОР не слишком велика ($N_e \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$)[2], а требуемые плотности энергии весьма значительны (как следует из приведенных выше оценок, $W^* \geq 10^2 \text{ Дж/см}^2$), практически возможность формирования самосогласованных (существенно нелинейных) плазменных структур в высококонцентрированном аэрозоле связана с инициированием оптического разряда, геометрические размеры которого вдоль и поперек пучка отличаются по крайней мере на порядок, а оптическая толщина на рабочей длине волны близка к единице. Основным механизмом поперечного распространения разряда в указанном диапазоне интенсивностей и длин волн является медленный теплопроводностный механизм со скоростями $V_{\perp} \sim 10 \text{ м/с}$ [1,2], что определяет минимальный поперечный размер КОР ($L_{\perp} \geq 1 \text{ см}$), а, значит, в соответствии со сказанным выше продольные размеры протяженного КОР должны составлять $L_{\parallel} \geq 10 \text{ см}$. Это требует использования формирующей оптической системы с эффективным фокусом расстоянием $F \geq 1 \text{ м}$ и предполагает обеспечение однородности аэрозольного облака высокой плотности ($n_a \geq 10^3 \text{ см}^{-3}$) на масштабах, не меньших L_{\parallel} . Нами впервые получен протяженный КОР и определены пороговые условия его возникновения. Результаты предварительных исследований приведены в работе [11].

3. Создание необходимого для КОР стационарного квазиоднородного облака высокой концентрации с размерами $\sim 25 - 30 \text{ см}$ вдоль пучка обеспечивалось с помощью аэрозольного генератора, работающего по принципу бункера с рассеивателями.

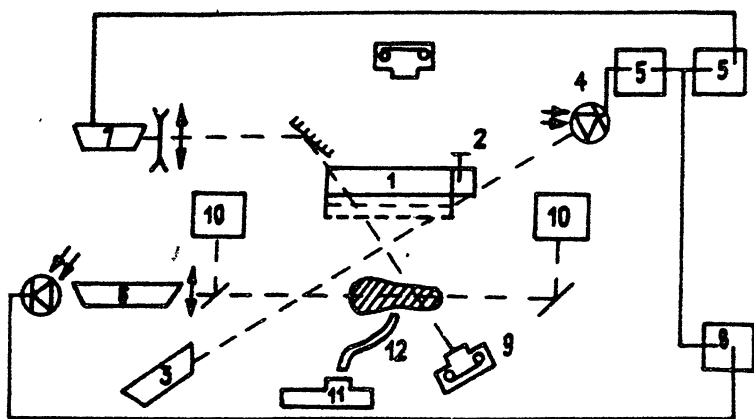


Рис. 1: Установка для получения и исследования протяженного КОР: 1 - аэрозольный бункер, 2 - синхронизирующий затвор, 3 - синхронизирующий лазер, 4 - фотодиод, 5 - генератор импульсов, 6 - инициирующий лазер, 7 - зондирующий лазер, 8 - осциллограф, 9 фотокамера, 10 - измеритель энергии, 11 - спектрометр, 12 - световод.

Использовался SiC эрозоль с размерами частиц $a = 70 - 100 \text{ мкм}$ при концентрации $n_a \sim 10^3 \text{ см}^{-3}$. Протяженный КОР возбуждался импуль-

сом свободной генерации Nd лазера ($W \leq 200$ Дж, $\tau_n \sim 1$ мс) в условиях умеренной фокусировки ($F = 1$ м). Объективное измерение длины разряда в схеме, приведенной на рис.1, проводилось по спектроскопическому критерию (линии Ca II 393,37 нм, 386,85 нм) с использованием волоконного световода.

4. При энергии $W = 125$ Дж получена сплошная плазменная область ($N_e > 10^{16}$ см $^{-3}$) с продольным размером $L_{\parallel} = 16$ см при поперечных размерах $L_{\perp} \leq 3$ см. Поскольку единственным механизмом формирования оптического разряда этом диапазоне параметров a, n_a, I является механизм ХС-КР [2,8-10], наблюдаемый разряд по своей природе является коллективным. Поглощение иницирующего импульса ($\lambda = 1,06$ мкм) на трассе КОР составляло более 50%.

Таким образом, наблюдаемый разряд удовлетворяет сформулированным выше критериям протяженного КОР. В настоящее время ведутся исследования его параметров и динамики взаимодействия с лазерным пучком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райзер Ю.П. Лазерная искра и распространение разрядов. - М.: Наука, 1974.
2. Копытин Ю.Д., Сорокин Ю.М., Скрипкин А.М., Белов Н.Н., Букатый В.И. Оптический разряд в аэрозолях. - Новосибирск: Наука, 1990.
3. Бродский Ю.Я., Голубев С.В., Зорин В.Г., Лучинин А.Г., Семенов В.Е. // ЖЭТФ. 1983. Т.84. Вып.5. С.1695.
4. Еремеев А.Г., Семенов В.Е. // Физика плазмы. 1987. Т.13. N 3. С.362.
5. Голубев С.В., Грицинин С.И., Зорин В.Г., Косый И.А., Семенов В.Е. // Высокочастотный разряд в волновых полях. - Горький: ИПФ АН СССР, 1988. С.136.
6. Гильденбург В.Б. // Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. - М.: Наука, 1981. С. 87.
7. Вихарев А.Л., Гильденбург В.Б., Голубев С.В., Еремин Б.Г., Иванов О.А., Литвак А.Г., Степанов А.Н., Юнаковский А.Д. // ЖЭТФ. 1988. Т.94. С.136.
8. Сорокин Ю.М. // ЖТФ. 1986. Т.56. N 7. С. 1431.
9. Сорокин Ю.М., Королек И.Я., Крикунова Э.М. // Квантовая электроника. 1986. Т. 13. N 12. С.2464.
10. Сорокин Ю.М. // Оптика атмосферы. 1988. Т.1. N 8. С.36.
11. Климов М.Ю., Сорокин Ю.М. // XVI Всесоюзная конференция по распр. радиоволн. Тезисы докл. Ч.2. - Харьков, 1990. С.226.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
14 октября 1993 г.

NONLINEAR PROPAGATION THROUGH A FLUID OF WAVES ORIGINATING FROM A BIHARMONIC SOUND SOURCE

Claes M. Hedberg

A sufficiently strong finite amplitude sound wave exhibits nonlinear behavior and after a certain distance a shock wave appears due to energy transfer between frequencies. This paper is restricted to plane weak shock waves where the nonlinear and dissipative effects are of the same order. This is well described by the Burgers' equation.

The nonlinearity creates all higher harmonics of the single frequency but due to the attenuation of high frequencies, in the end, only the lowest frequency, the fundamental, is left. With more frequencies at the boundary a spectrum is created consisting of all multiples of the original frequencies and the sums and differences of these multiples. This means that if we have a boundary with two close frequencies it will be their difference frequency which will be among the least damped and will eventually have the strongest amplitude. This phenomenon is for underwater purposes utilized in parametric radiators which are smaller and have a broader range of operating frequencies than traditional underwater radiators and also the angular widths of their beams are usually only a few degrees which decreases disturbing reflections from bottom and surface.

From now on this paper concerns the behavior of the wave from a biharmonic source. In this work the saddle point method is used to obtain an expression in the area after formation of shock.

Burgers' equation for plane waves may be written

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} - \nu \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

where V is the velocity amplitude, σ the distance from the source, θ retarded time and ν a ratio between dissipation and nonlinearity. A biharmonic sound source gives the boundary condition

$$V_0 = V(\sigma = 0, \theta) = a_1 \sin b_1 \theta + a_2 \sin b_2 \theta \quad (2)$$

By transforming Eq.(1) through Cole-Hopfs transformation we want to obtain the amplitude of the combination frequencies in the form of double Fourier series.

$$V = \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{im u} e^{in v} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iku} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{il v} \right\} \quad (3)$$

where θ has been generalized by

$$u = b_1 \theta \quad (4)$$

when the θ has originated from the first term in Eq.(2) and

$$v = b_2 \theta \quad (5)$$

when originated from the second term. When using the saddle point method Eq.(6) appears

$$a_1 \sin b_1 \theta_r + a_2 \sin b_2 \theta_r = 0 \quad (6)$$

whose negative solution closest to zero is θ_{r1} which appears in the final solution of the total amplitude, Eq.(7).

$$V = \frac{K_1}{1 - \sigma K_1} \left(\theta + \theta_{r1} \tanh \frac{\theta_{r1} K_1 \theta}{2\nu(1 - \sigma K_1)} \right) - \frac{K_1 \theta_{r1}}{1 - \sigma K_1} \cdot \frac{\sigma K_2 \theta}{(2(1 - \sigma K_1)^2 + \sigma K_2 \theta_{r1}) \cosh^2 \frac{\theta_{r1} K_1}{2\nu(1 - \sigma K_1)} \theta} \quad (7)$$

The last term is a correction and

$$K_1 = a_1 b_1 \cos b_1 \theta_{r1} + a_2 b_2 \cos b_2 \theta_{r1} \quad (8)$$

$$K_2 = a_1 b_1^2 \sin b_1 \theta_{r1} + a_2 b_2^2 \sin b_2 \theta_{r1} \quad (9)$$

From this expression the well known Khoklov solution, Eq.(10) for a single harmonic boundary condition is easily obtained.

$$V = \frac{1}{1 + \sigma} \left(-\theta + \pi \tanh \frac{\pi \theta}{2\nu(1 + \sigma)} \right) \quad (10)$$

Now a Fourier series is derived by double integration over u and v so that the individual frequencies are obtained. Ignoring the correction term, the Fourier coefficients in Eq.(3) become

$$c_{mn} = i \frac{-\nu K_1 (-1)^m (\sin n\pi \frac{a_1 \cos b_1 \theta_{r1}}{a_2 \cos b_2 \theta_{r1}})}{\pi (n a_1 \cos b_1 \theta_{r1} - m a_2 \cos b_2 \theta_{r1}) \sinh \frac{n\pi\nu(1 - \sigma K_1)}{\theta_{r1} a_2 \cos b_2 \theta_{r1}}} \quad (11)$$

$$c_k = i \frac{1}{1 - \sigma K_1} \cdot \frac{(-1)^k}{k} \left[\frac{\theta_{r1} K_1 a_1 \cos b_1 \theta_{r1}}{\pi a_2 \cos b_2 \theta_{r1}} + a_1 \cos b_1 \theta_{r1} \right] \quad (12)$$

$$c_l = i \frac{1}{1 - \sigma K_1} \cdot \frac{(-1)^l}{l} \left[\frac{\theta_{r1} K_1}{\pi} + a_2 \cos b_2 \theta_{r1} \right] \quad (13)$$

Specializing to a single frequency boundary condition, Eq.(14), by letting $a_2 = 1$, $b_2 = 1$ and $a_1 \rightarrow 0$ the Fay solution Eq.(15) is obtained.

$$V_0 = \sin \theta \quad (14)$$

$$V_{FAY} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\nu}{\sinh(n\nu(1 + \sigma))} \sin n\theta \quad (15)$$

The main contribution to the velocity of the difference frequency is

$$V_{diff} = -2\Im(c_{m=-1, n=1}) \sin((b_2 - b_1)\theta) = \frac{2\nu K_1 \sin \frac{\pi a_1 \cos b_1 \theta_{r1}}{a_2 \cos b_2 \theta_{r1}} \sin((b_2 - b_1)\theta)}{\pi (a_1 \cos b_1 \theta_{r1} + a_2 \cos b_2 \theta_{r1}) \sinh \frac{\pi\nu(1 - \sigma K_1)}{\theta_{r1} a_2 \cos b_2 \theta_{r1}}} \quad (16)$$

Fig.1 shows the evolution of the difference frequency as a function of the distance parameter with different source amplitude ratios while $a_1^2 + a_2^2 = \text{constant} = 2$. We observe the strong dependence on the ratio of the amplitudes coming from the sine-term giving a maximum at an amplitude ratio of about two.

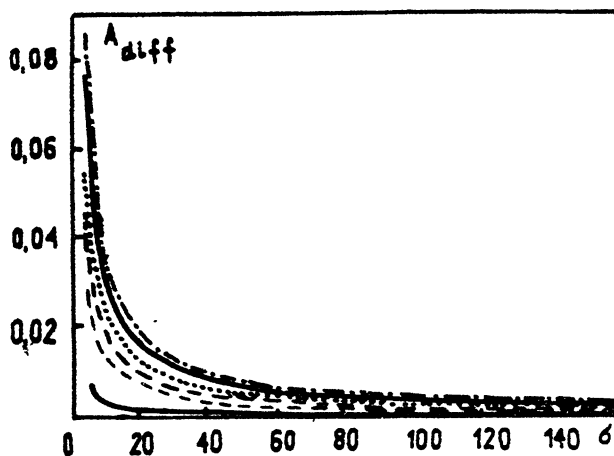


Fig. 1: $V_0 = a_1 \sin \theta + a_2 \sin 1.2\theta$, $\nu = 0.001$ The lines from bottom to top represent: (a) $a_1 = .99$, $a_2 = 1.0199$; (b) $a_1 = 0.95$, $a_2 = 1.0975$; (c) $a_1 = 0.3$, $a_2 = 1.91$; (d) $a_1 = 0.9$, $a_2 = 1.19$; (e) $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1.75$; (f) $a_1 = 0.7$, $a_2 = 1.51$.

On the other hand there is almost no dependence of the frequencies. To explain why the beforehand expected frequency dependence, that the difference frequency amplitude would diminish with decreasing difference frequency, doesn't present itself, we must examine the method. When the difference frequency goes towards zero, its period goes towards infinity, while the integration length remains constant. Even though the total amplitude fits very well inside this bound, the difference frequency just can't be expected to be continued to fit exactly on an interval growing extremely large. The conclusion must be that this solution is not valid for very small difference frequencies. Practically these very small difference frequencies are not of importance because of the actual smallness of their amplitude.

REFERENCES

1. Fubini E. // *Alta Frequenza*. 1935. V.4. P.530.
2. Fay R.D. // *Journal of the Acoustical Soc. of America*. 1931. V.3. P.222.
3. Khoklov R.V. and Soluyan S.I. // *Acustica*. 1964. V.14. P.241.
4. Novikov B.K., Rudenko O.V. and Timoshenko V.I. *Nonlinear underwater acoustics*. New York: American Institute of Physics, 1987. Chap. 3. P.36.
5. Naugolnykh K.A., Soluyan S.I. and Khoklov R.V. // *Sov. Phys.-Acoust.* 1963. V.9. P.155.
6. Cary B.B. // *Journal of Sound and Vibration*. 1973. V.30. P.455.

7. Cary B.B. // Journal of Sound and Vibration. 1975. V.42. P.235.
8. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A. and Marichev O.I. Integrals and Series. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986. Vol.1/2. P.730. Eq. (5.4.5.2).

Royal Institute of Technology
Stockholm, Sweden

Поступила в редакцию
11 марта 1993 г.

УДК 534.222

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ ЭВОЛЮЦИИ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

С.Н.Бойков, С.Н.Гурбатос

В рамках одномерного уравнения Бюргерса рассмотрен сложный сигнал, имеющий фрактальную структуру. Показано, что в логарифмическом масштабе времени эволюция данного сигнала является периодически автомодельной, а за счет слияния разрывов его энергия затухает медленнее, чем энергия периодического возмущения и однополярного импульса.

Распространение нелинейных волн в средах без дисперсии описывается уравнением Бюргерса (УБ):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(x, t = 0) = v_0(x), \quad (1)$$

Это уравнение отражает два эффекта, присущих гидродинамической турбулентности: нелинейную перекачку энергии по спектру и вязкость в области мелких масштабов. Совокупное действие нелинейности и диссипации в уравнение (1) приводит к возникновению автомодельных режимов эволюции поля, для которых характерным является потеря информации о тонкой структуре поля.

Покажем это для случая исчезающе малой вязкости ($\nu \rightarrow 0$), когда решение УБ может быть получено из неявного решения Римана

$$v = v_0(x - vt)$$

введением разрывов, положение которых определяется из интегральных законов сохранения площади. Пусть при $t = 0$ поле представляет линейный профиль $v_0(x) = \alpha_k(x - x_k)$. Тогда из решения УБ

$$v(x, t) = \frac{\alpha_k(x - x_k)}{1 + \alpha_k t} \quad (2)$$

следует, что при $\alpha t \gg 1$ градиент волны v'_x перестает зависеть от начального наклона α_k . Если рассмотреть произвольный начальный профиль $v(x)$, то очевидно, что на достаточно больших временах "выживут" лишь те участки, которые в начальный момент были сосредоточены в малой окрестности нулей начального поля $v_0(x) = 0$. Связано это с тем, что участки профиля с большой начальной амплитудой поглощаются на разрывах. С учетом соотношения (2) мы имеем, что асимптотически поле будет представлять последовательность треугольных импульсов с одинаковым наклоном $v'_x = 1/t$, что и означает потерю информации о тонкой структуре начального возмущения. Для ряда важных частных случаев это решение является автомодельным и представимо в виде

$$v(x, t) = \frac{l}{t} F\left(\frac{x}{l}\right),$$

где l – пространственный масштаб поля. Так для гармонического на входе сигнала $F(\xi)$ есть периодическая функция и на каждом из периодов $F(\xi) = \xi$, где $\xi \in [-1/2, 1/2]$, а $l = l_0$ – период волны. Для однополярного на входе импульса с начальной площадью $m = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) dx$, локализованного в начале координат, получаем, что функция $F(\xi) = \xi$ при $\xi \in [0, 1]$ и равна нулю вне этого интервала. Масштаб поля $l(t)$ при этом растет как $l(t) = (2mt)^{1/2}$. Автомодельность означает, что профиль волны в произвольный момент времени t подобен профилю в некоторый момент времени t_1 , а изменение масштабов характеризуется параметром $q = l(t)/l(t_1)$. Амплитуда разрыва σ спадает при этом как $\sigma = l(t)/t$, причем для однополярного импульса из-за движения разрывов амплитуда спадает более медленно ($\sigma \sim t^{-1/2}$), чем для периодического сигнала, для которого $\sigma \sim t^{-1}$.

Возникновение автомодельности является характерным и для шумовых сигналов [1]. Так, энергетический спектр шумового поля $g(k, t)$, где k – пространственная частота, асимптотически выходит на автомодельный режим эволюции

$$g(k, t) = \frac{l^3}{t^2} \bar{g}(kl),$$

где $l(t)$ – внешний масштаб поля, равный среднему расстоянию между разрывами. При этом характерная амплитуда поля, которую можно определить как корень из дисперсии, $\sigma = l(t)/t$ спадает по степенному закону $\sigma \sim t^{-p}$, где $p \leq 1/2$. Более медленный закон спада связан в данном случае со слиянием разрывов.

В работе [2] предложена модель фрактального сигнала и показано, что из-за слияния разрывов их амплитуда спадает медленнее, чем для простых сигналов. Ниже мы покажем, что для фрактальных сигналов также можно говорить об возникновении автомодельных режимов.

Пусть начальное поле есть последовательность однополярных импульсов с положительной площадью m и имеет различные пространственные масштабы. В наименьшем масштабе L_0 это последовательность N импульсов с периодом L_0 . Затем эта структура воспроизводит сама себя N раз с периодом L_1 и т.д. вплоть до последнего масштаба L_n . Пусть $n \rightarrow \infty$. Предполагаем, что масштабы удовлетворяют соотношению:

$$L_p = \alpha L_{p-1}, \quad L_p = \alpha^p L_0; \quad \alpha > N.$$

Фрактальную размерность такого сигнала можно представить как $D = \lim_{L \rightarrow \infty} (\ln R / \ln L)$, где R – число импульсов в интервале L , $L \gg L_0$. В нашем случае $D = \ln N / \ln \alpha < 1$. Рассмотрим эволюцию данного сложного сигнала. В наименьшем масштабе с течением времени каждый импульс приобретает универсальную треугольную форму с протяженностью $x_s(t) = (2mt)^{1/2}$. Взаимодействие импульсов в наименьшем масштабе начинается при $t_0 = L_0^2/2m$, когда разрыв одного импульса достигает следующего импульса. После начала взаимодействия скорости первых $(N-1)$ -разрывов увеличиваются, причем их скорости равны, а координаты разрывов $\sim t$. Координата же последнего N -го разрыва по-

прежнему $\sim t^{1/2}$. Очевидно, что предпоследний импульс догонит последний и произойдет их слияние. Далее процесс повторяется пока все импульсы наименьшего масштаба не сольются в один с площадью mN и протяженностью $x_{1,s}(t_0^*) = (2mNt_0^*)^{1/2}$. Можно показать, что это произойдет в момент времени $t_0^* = t_0[N^{1/2} - (N-1)^{1/2}]^{-2}$. Мы предполагаем также, что $x_{1,s}(t_0^*) < L_1$. Взаимодействие импульсов в следующем масштабе L_1 начинается при $t_1 = t_0(\alpha^2/N)$. В этот момент t_1 структура поля полностью воспроизвела себя, и профиль сигнала стал подобен профилю в момент t_0 :

$$v(x, t_1) = \frac{N}{\alpha} v(x/\alpha, t_0).$$

Исходя из инвариантности УБ к преобразованию координат и времени эволюция профиля сложного сигнала в интервале времени $[t_1, t_2 = t_1(\alpha^2/N)]$ (t_2 - начало взаимодействия импульсов в масштабе L_2) будет подобна эволюции в интервале $[t_0, t_1 = t_0(\alpha^2/N)]$. Введем логарифмическую шкалу времени $\tau = \ln(t/t_0)$ (τ_i соответствует $t_i = t_0(\alpha^2/N)^i$). Используя инвариантность УБ, легко найти связь между эволюцией профиля $u_0 \equiv v$ в "начальном" интервале времени $\tau \in [\tau_0; \tau_1]$ и профилем $u_p \equiv v$ в интервале $[\tau_p = \tau_0 + pT_0; \tau_{p+1} = \tau_1 + (p+1)T_0]$:

$$u_p(x, \tau + pT_0) = (N/\alpha)^p u_0(x/\alpha^p, \tau), \quad \text{где } p = 1, 2, \dots,$$

$$T_0 = \ln(\alpha^2/N).$$

Видно, что эволюция сигнала, имеющего фрактальную структуру, явля-

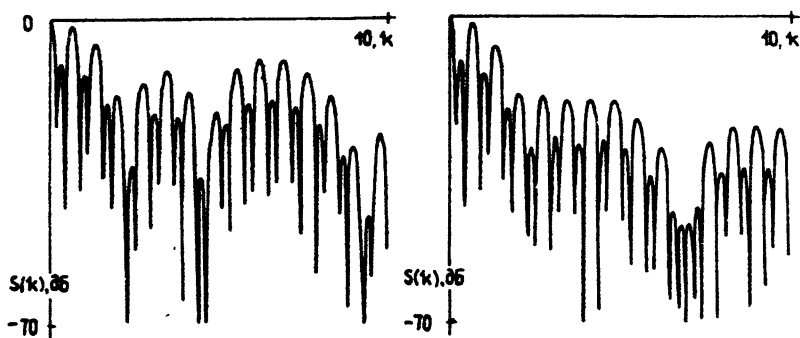


Рис. 1.2.

ется периодически автомодельной в логарифмическом масштабе времени. Спектр такого сигнала может быть представлен в виде:

$$S(k, \tau + pT_0) = S_p(k, \tau + pT_0) \prod_{j=p+1}^{\infty} S_j(kL_j) \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

$$S_j(kL_j) = \frac{\sin^2(kNL_j/2)}{\sin^2(kL_j/2)}.$$

Очевидно, что периодически автомодельной является и эволюция спектра сигнала, причем спектр $C_p \equiv S$ в интервале $[\tau_p; \tau_{p+1}]$ может быть выражен

через спектр $C_0 \equiv S$ в интервале $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$:

$$C_p(k, \tau + pT_0) = N^{2p} C_0(k\alpha^p, \tau).$$

Из выражения (3) видно, что в спектре S эволюционирует только та часть спектра — S_p , которая связана с наименьшим на данный момент масштабом p . Зная координаты разрывов в любой момент времени, которые могут быть легко получены аналитически, можно рассчитать эволюцию спектра. На рис. 1–3 представлен спектр двухмасштабного L_0 и L_1 сигнала соответственно в моменты времени $\tau = 0$, $\tau = \ln 4$ и $\tau = \tau_1$, из которых видно, что эволюционирует только спектр наименьшего масштаба L_0 .

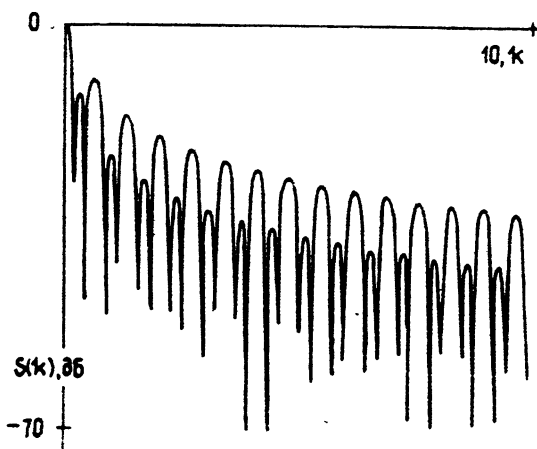


Рис. 3.

С течением времени происходит последовательное исчезновение все больших и больших масштабов n , таким образом, теряется информация о тонкой структуре поля. Информация об p -ом масштабе полностью исчезает в момент $t_p^* = t_p [(N)^{1/2} - (N-1)^{1/2}]^{-2}$, когда все N импульсов в этом масштабе слились в один импульс. В частности, если все масштабы $j \leq p$ заменить при $t = 0$ на один импульс с площадью $S = mN^p$, то начиная с момента времени t_p^* эволюция нового сигнала будет такой же как и эволюция исходного.

Рассматривая усредненное затухание плотности энергии сигнала, возможна ее аппроксимация степенным законом:

$$E(t) = C_e \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-z}, \quad \text{где } z = \frac{1-D}{2-D},$$

который является характерным для автомодельных режимов эволюции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I. Nonlinear Random Waves and

Turbulence in Nondispersive Media: Waves, Rays and Particles.
Manchester University Press, 1991.

2. Gurbatov S.N., Crighton D.G. Wavelets, Fractals and Fourier Transforms: New Developments and New Applications. Conf. Report, Cambridge, 1990.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 февраля 1992 г.

**SELF-SIMILAR EVOLUTION OF COMPLEX SIGNALS
IN NONLINEAR NONDISPERSIVE MEDIA**

S.N.Bojkov, S.N.Gurbatov

The fractal signal is considered in the framework of the one-dimensional Burgers' equation. It is shown that the evolution of the given signal is periodically self-similar in the logarithmic scale and due to the merging of discontinuities its energy decays more slowly than the energy of the periodical disturbance and one-signed pulse.

NONLINEAR ACOUSTIC PROPAGATION
AND FOCUSING*P.N.Sionoid*

Two model equations of nonlinear acoustics are considered. The implications of a point transformation between a point transformation between forms of the generalised Burgers equation (GBE) is discussed. New exact and asymptotic solutions are obtained. The dissipative Zabolotskaya-Khokhlov (dZK) equation describing acoustic wave propagation with allowance for transverse amplitude variation is studied. By considering a transformation onto the GBE, solutions exhibiting caustic behaviour are presented. A mechanism for the control of such singularities is presented along with a comparison with shock formation time.

INTRODUCTION

When considering problems in nonlinear acoustics, it is common practice to study 'model equations'. These are equations derived from the fundamental governing equations under assumptions regarding the magnitude of the important physical phenomena. Crighton (1979) reviews a variety of such model equations in acoustics. In this report two such model equations are considered. They describe wave propagation in media where account is taken of both thermoviscous diffusion and convective nonlinearity.

The first of these equations is the well-known Burgers equation.

$$u_t + uu_\xi - \nu u_{\xi\xi} = 0 \quad (1)$$

with u a signal, often a pressure or a velocity, t a slow time and ξ , a travelling coordinate. For ν , a constant, equation (1) describes the evolution of a travelling planar wave in a nonlinear thermoviscous media. In this particular case there exists a transformation, the Hopf-Cole transformation, which transforms equation (1) onto the linear diffusion equation for which there is an exact solution.

When the diffusive coefficient ν is allowed to vary, i.e. $\nu = \nu(t)$, we have what is known as the generalised Burgers equation (GBE). Physically, such a term may arise through a genuine variation in the viscosity through the medium. It is more commonly the result of considering wave propagation with cylindrical or spherical symmetry. In this case, the governing equation is as equation (1) with an additional linear term which may be incorporated into the diffusive term through a transformation of both the dependent and independent variables, see Crighton & Scott (1979) for details. As particular examples, we mention the case of cylindrical symmetry for which $\nu(t) = (1+t)$ and the spherically symmetric GBE with $\nu(t) = \exp(t)$. To date, the only known exact solution to a generalised Burgers equation has been shown in the case of cylindrical symmetry. It was given first in implicit form by Rudenko & Soluyan (1977) and further studied by Scott (1981).

The second equation we consider may also be thought of as a 'generalisation' of a Burgers equation. In this case transverse variation of amplitude is allowed resulting in the dissipative Zabolotskaya-Khokhlov equation (dZK) (1969). In initial value coordinates where u is the perturbation velocity (or pressure), it takes the form

$$u_{\xi t} + uu_{\xi\xi} - \nu u_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 u, \quad (2)$$

where $\xi = z - a_0 t$ is a space variable in the direction of propagation, t is the time and ∇_{\perp}^2 represents the transverse Laplacian ($\nabla_{\perp}^2 u \equiv u_{\nu\nu}$ in two dimensions). A term ($\nu u_{\xi\xi\xi}$) representing diffusion has been included. Much interest attaches to solutions of this equation, in particular, those describing focusing beams. Such situations are regularly found in practice with lithotripters using focused ultrasound to shatter kidneystones. In aeroacoustics sonic booms from aircraft can result in caustics and local inhomogeneities may result in curved wavefronts. A large proportion of the work published to date has relied on asymptotic or numerical techniques with no useful exact solutions being available. Developing on work by Vinogradov and Vorob'ev (1976), Cates & Crighton (1990) were able to present a transformation of the dZK onto the generalised Burgers' equation. In so doing they were able to generate exact solutions to the non-dissipative ZK equation.

RESULTS

In this work, we first consider the generalised Burgers equation. Cates (1989) presents a point transformation between two versions of the GBE. In particular he demonstrates the equivalence of the cylindrical and exponential horn GBEs. These equations are characterised by the diffusivity functions $\nu(t) = (1+t)$ and $\nu(t) = (1-t)^{-1}$, respectively. Recalling that we already have an (implicit) exact solution to the cylindrical GBE we recognise that the equivalence yields a solution to the exponential horn GBE. It is natural to enquire as to the boundary conditions satisfied by this new solution. Whereas the solution to the cylindrical boundary GBE satisfies constant, but distinct conditions at infinity, we find that the new solutions to the exponential horn GBE satisfy linear ramp-like end conditions appropriate to sawtooth waves.

We now turn to a rather special class of GBEs—those with negative or decreasing viscosity. Physical situations leading to such equations do not seem to be common. One such occurrence, however, is in connection with ZK theory where for converging geometries one obtains the cylindrical GBE with decreasing viscosity. Following a similar procedure to that of Rudenko & Soluyan (1977) we derive an exact (implicit) representation of this solution. Analysis reveals that it has a finite-time blow-up, characteristic of linear equations with negative diffusivity. A treatment of this phenomenon in the case of the plane Burgers equation with negative diffusivity is given by Pelinovskii & Fridman (1974). The result of the present work is to present an exact description of this phenomenon for the cylindrical Burgers equation.

It is possible to exploit these exact solutions further. Scott (1981) proves a number of results regarding the long-time behaviour of compressive wave

solutions of generalised Burgers equations. Such solutions satisfy constant end conditions at infinity. That analysis involves consideration of the limiting behaviour of $\nu(t)/t$ as $t \rightarrow \infty$. By employing the point transformation referred to earlier and the exact solutions discussed above, we may prove analogous results for wave solutions satisfying ramp-like conditions. They may be useful in the consideration of sawtooth waves which arise when considering the evolution of periodic waveforms.

We now turn to the dissipative ZK equation (2). As mentioned before it is possible to reduce this equation to a GBE. In this case, however, a more restrictive initial/boundary condition must be adopted. If we consider a single transverse coordinate, y , it takes the form:

$$u(\xi, y, 0) = P\left(\xi + \frac{1}{2}\lambda y^2\right) \quad (3)$$

where λ is a constant. The condition (3) describes a parabolic wavefront, convex or concave or convex to the direction of propagation as $\lambda > 0$ or $\lambda < 0$. The function P gives the amplitude distribution normal to the front.

The first problem we consider is the long time behaviour of a piston signal. In the two-dimensional case with an initial condition as above we find that the diffusivity function $\nu(t)$ in the equivalent GBE is that corresponding to cylindrical symmetry. This yields the first known *exact* solution to the dissipative ZK equation. We note that for $\lambda < 0$, or converging wavefronts, $\nu(t)$ is negative. We may employ all the preceding results on GBEs including the long-time asymptotic results of Scott (1981) to show that these solutions for diverging wave fronts tend to the similarity solution of Rudenko & Soluyan (1977) as $t \rightarrow \infty$.

For the dZK in three dimensions but with cylindrical symmetry we have $\nabla_{\perp}^2 u = r^{-1}(ru_r)_r$ where $r^2 = x^2 + y^2$. In this case the reduced equation takes the form of a spherical GBE i.e. equation (1) with diffusivity function $\nu(t) = \exp(t)$. Therefore, in addition to the equivalence between the *two-dimensional* dZK with a parabolic boundary condition and the *cylindrical* GBE, we now have the equivalence of the *three-dimensional* dZK with a parabolic boundary condition (and cylindrical symmetry) and the *spherical* GBE. We may also apply the results of Scott (1981) to show that in the limit of large times, waves from a parabolic piston in *three dimensions* with cylindrical symmetry are described by solutions to the *linear diffusion* equation.

We next consider converging wave profiles. We find the factor $(\lambda t + 1)^{-1}$ in the transformed solution of the dZK equation in terms of the GBE. For $\lambda < 0$ this gives singular behaviour as $t \rightarrow -\lambda^{-1}$. As the singularity occurs at the focus of geometrical acoustics we interpret it as a caustic i.e. an overlapping of wavefronts. In the geometrical optics approach the development of such singularities indicates the breakdown of the original assumptions. Typically a boundary layer approach must then be adopted in the vicinity of the caustic in which nonlinearity and diffraction are taken into account. In this particular case, the ZK equation, it is seen that the singularity persists even in the presence of terms accounting for nonlinearity and diffraction. In order to examine what processes might affect the singular behaviour we look at alternative version of the transformation from the dZK onto the GBE. We

may then consider boundary conditions of the form:

$$u(\xi, y, 0) = -\frac{1}{2}\mu y^2 + P(\xi + \frac{1}{2}\lambda y^2). \quad (4)$$

These initial conditions may be interpreted as specifying the amplitude distribution from one parabola to the next with a superimposed quadratic variation in amplitude in the transverse direction. For $\mu < 0$ this would correspond to an amplitude increasing with distance from the axis. In physical applications, to underwater acoustics for example, it is more appropriate to consider such conditions as arising from inhomogeneities in the medium. In this particular example, the relevant physical feature is variation in the local sound speed, leading to a modified dZK to account for a transverse variation in sound speed, as in Cates (1990). This in turn would impose boundary conditions of the type (4) via the modified similarity reductions. For our purposes, however, the interpretation of condition (4) in terms of transverse amplitude variation is adequate. When we examine the solutions to the dZK in this case, we find that there exists a range of values for μ and λ for which singular behaviour is not observed. The corresponding physical interpretation is relatively simple: when there is a 'sufficient' concentration of amplitude close to the axis ($y = 0$) initially caustic formation is avoided. We may contrast these results with the nonlinear defocusing postulated by Whitham (1974). In the context of the dZK equation we have focusing singularities in spite of the presence of and viscous diffusion.

We have yet to mention shock formation in the dZK. It is clear that the presence of a convective nonlinear term allows for such a possibility. In the case ($\nu = 0$) the transformation discussed above yields the simple-wave equation which is exactly soluble. For an arbitrary initial condition we may also derive the time to shock formation. In the particular case of the initial condition (3) this time takes the value

$$t_s = -\frac{1}{S} + \frac{\lambda}{4S^2}, \quad (5)$$

where $S = \min dP/d\theta$. The corresponding caustic formation time is $t_c = -\lambda^{-1}$, as before. We observe that shock formation occurs before caustic formation as long as $\lambda > 4S$. We interpret this condition as saying that shock formation always occurs before caustic formation provided that the initial radius of curvature is not too small.

We also consider further the wave profile behaviour approaching a caustic. In two dimensions the relevant equation is the cylindrical Burgers' equation i.e. equation (1) with $\nu(T) = T - T_0$ in the transformed variables. The limit $T \rightarrow T_0$ indicates the approach to a caustic. From previous considerations we know that we can have shock formation before caustic formation. We consider this scenario here with a 'tanh' type profile as a model shock structure. By employing a transformation similar to the Hopf-Cole transform to the GBE we obtain a linear diffusion equation with a nonlinear remainder. Recalling that ν is small in the dZK scaling we may solve the linear equation to first order. This solution allows us to determine the dominant terms in the equation as the caustic is approached. In fact, three regimes are found depending on the magnitude of $T - T_0$. In particular, for $t - t_0 \sim O(\nu)$ (in the original variables)

all three terms are found to be invoked. The appropriate equation in this régime is the cylindrical GBE with decreasing viscosity. It is not possible, however, to match with the similarity solution found above for this equation.

The thrust of the work so far has been to elucidate some features of wave profile behaviour governed by the GBE and dZK. For the former we have some new exact and asymptotic solutions. Developing the work of Cates & Crighton (1990) we have studied both the long-time asymptotic behaviour of solutions to the dZK and the approach to the caustic singularity. In so doing we have presented the first known exact solution to the dZK and demonstrated the persistence of the caustic singularity. The rôle of diffraction remains to be studied in more detail in particular its effect in the caustic region as represented by full wave theory rather than the ZK approximation to diffraction.

REFERENCES

1. Cates A.T. // *Phys. Lett.* 1989. V.A137. P.113.
2. Cates A.T. // *Physica.* 1990. V.D44. P.303.
3. Cates A.T. & Crighton D.G. // *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1990. V.A430. P.69.
4. Crighton D.G. // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1979. V.11. P.11.
5. Crighton D.G. & Scott J.F. // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* 1979. V.292. P.101.
6. Rudenko O.V. & Soluyan S.I. *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics*, transl. - New York: Consultants bureau, Plenum, 1977.
7. Scott J.F. // *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1981. V.A373. P.443.
8. Vinogradov A.M. & Vorobe'ev E.M. // *Sov. Phys. Acoust.* 1976. V.22(1). P.12.
9. Whitham G.B. *Linear and Nonlinear Waves.* - New York: Wiley, 1974.
10. Zabolotskaya E.A. & Khokhlov R.V. // *Akusticheskii Zhurnal.* (Transl. *Soviet Phys. Acoustics*). 1969. V.15. P.35.

University of Cambridge, U.K.

Поступила в редакцию
21 октября 1992 г.

LONG WAVELENGTH INSTABILITIES OF PERFECTLY SQUARE PLANFORMS IN NONLINEAR CONVECTION

Rebecca B. Hoyle

The long wavelength instabilities of square planforms are studied, using amplitude equations which describe the general interaction of two orthogonal coupled roll patterns. In addition to the sig-sag, two-dimensional and three-dimensional Eckhaus instabilities, a truly three-dimensional rectangular instability is found. Nonlinear phase diffusion equations are derived close to the onset of the instabilities.

1. INTRODUCTION

Converting fluids are observed to form cellular patterns close to the onset of motion. Two-dimensional rolls are the most common planform, but three-dimensional patterns such as hexagons and squares are also observed experimentally.

This paper will be concerned with square patterns, which have been predicted and observed in a number of physical situations. A regular square planform has been shown to be preferred in the case of convection between poorly conducting boundaries by Busse & Riahi [1] and Proctor [2]. This has been observed experimentally by Le Gal & Croquette [3]. Further theoretical work has been carried out by Jenkins & Proctor [4] and Riahi [5]. Square cells have also been observed in convection experiments using a fluid with a temperature-dependent viscosity, by Oliver & Booker [6] and by White [7]. Busse & Frick [8] and Jenkins [9] have made theoretical investigations of this situation. Stationary square patterns have also been observed close to the onset of convection in binary fluid mixtures at positive separation ratios, *e.g.* Moses & Steinberg [10], Bigazzi, Ciliberto & Croquette [11] and Moses & Steinberg [12]. There has been theoretical work on this system by Müller & Lücke [13], Knobloch [14] and Clune & Knobloch [15].

The evolution of convective planforms can be investigated by means of amplitude equations, which were first introduced by Newell & Whitehead [16] and Segel [17]. Secondary instabilities of stationary two-dimensional convective rolls have been studied theoretically and experimentally by Busse and others, *e.g.* Busse & Clever [18], Clever & Busse [19]. The compression-dilatation instability of two-dimensional rolls, known as the Eckhaus instability was first analysed by Eckhaus [20]. However, there has been little previous work on the secondary instabilities of three-dimensional convective patterns. Previous studies include those by Malomed & Tribel'skiĭ [21], Milner [22], and Zaleski [23]. A more detailed analysis of the long wavelength instabilities of square and rectangular patterns, including numerical simulations of planform evolution, may be found in Hoyle [24].

2. STABILITY ANALYSIS OF A SQUARE PLANFORM

We will consider the following equations, which describe the general interaction of two orthogonal coupled roll patterns close to onset:

$$A_T = rA - \mu|A|^2A - \nu|B|^2A + \left[\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\epsilon}{2i} \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \right]^2 A, \quad (1a)$$

$$B_T = rB - \mu|B|^2B - \nu|A|^2B + \left[\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\epsilon}{2i} \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \right]^2 B. \quad (1b)$$

Here r , μ and ν are $O(1)$ constants, $0 < \epsilon \ll 1$, and r and μ are positive.

A special case of these equations can be arrived at using a multiple scales analysis of the equations governing convection between poorly conducting boundaries. The method is due to Segel [17] and Newell & Whitehead [16]. The physical variable $F(x, y, t)$, representing the vertically averaged temperature perturbation due to fluid motion, or the vertically averaged vertical fluid velocity, can be reconstructed using

$$F(x, y, t) = \epsilon[A(X, Y, T)e^{iz} + B(X, Y, T)e^{iy} + c.c.] + h.o.t., \quad (2)$$

where X , Y and T are long scales in the directions x , y and t respectively. Throughout this paper we will be dealing with equations where the vertical dependence has been averaged out. In the physical system, however, vertical motion will be superimposed upon the horizontal, and so we will refer to a pattern which varies in one or two horizontal dimensions as two- or three-dimensional respectively.

By considering solutions which are constant in space, we find that when $r > 0$, $\mu > 0$ and $-\mu < \nu < \mu$, squares ($|A| = |B|$) are stable, rolls ($|A| \neq 0$, $|B| = 0$, or $|A| = 0$, $|B| \neq 0$) are nonstable, and the trivial solution ($|A| = |B| = 0$) is unstable. It is this regime which we will consider in the following analysis since we wish to investigate the instabilities of a square pattern when it is the preferred planform at the bifurcation from the trivial solution.

Now allowing spatial modulations, we search for a steady solution of the form

$$A = R_0 e^{iqX}, \quad B = R_0 e^{iqY}, \quad (3)$$

where R_0 and q are constants. This represents a perfect square pattern at a wavenumber slightly differing from the critical. From equations (1a, b) we obtain

$$R_0^2 = \frac{r - q^2(1 + \epsilon q/2)^2}{\mu + \nu}. \quad (4)$$

We consider a perturbation of the form

$$A = R_0 e^{iqX} (1 + \alpha_1 e^{\sigma T + ikX + iY} + \bar{\alpha}_2 e^{\sigma T - ikX - iY}), \quad (5a)$$

$$B = R_0 e^{iqY} (1 + \beta_1 e^{\sigma T + ikX + iY} + \bar{\beta}_2 e^{\sigma T - ikX - iY}), \quad (5b)$$

where the overbar denotes complex conjugate, and $\alpha_i \ll 1$, $\beta_i \ll 1$, $0 < \epsilon \ll 1$. We discover that when $q < 0$ and $k = 0$, the growth rate, σ , is positive in the

limit $l \rightarrow 0$, and there is an instability. Similarly, when $l = 0$, there is a positive growth rate in the limit $k \rightarrow 0$. These instabilities are analogous to the zig-zag instability in the case of two-dimensional rolls, where rolls at an unstable long wavelength bend to achieve a shorter wavelength in the stable band.

It is possible to derive a nonlinear equation governing the diffusion of the phase variables, ϕ and ψ , in the zig-zag unstable region. This can be done by expanding in terms of the phase gradients, this method being due to Pomeau & Manneville [25]. We will perform a weakly nonlinear analysis with q small and negative, to reveal the behaviour in the vicinity of the bifurcation. We write $A = Re^{i(qX+\phi)}$, and $B = Se^{i(qY+\psi)}$, where R, S, ψ, ϕ are functions of X, Y and T . At leading order, we find that the phases evolve according to the equations

$$\phi_T = -\epsilon d\phi_{YY} - \frac{\epsilon^2}{4}\phi_{YYYY} + \frac{\epsilon^2}{2}(\phi_Y^3)_Y, \quad (6)$$

$$\psi_T = -\epsilon d\psi_{XX} - \frac{\epsilon^2}{4}\psi_{XXXX} + \frac{\epsilon^2}{2}(\psi_X^3)_X. \quad (7)$$

This demonstrates that the zig-zag instability on each set of rolls decouples at leading order, and we recover the phase diffusion equation for zig-zags on a single set of rolls. The instability is supercritical, so the pattern should stabilise rather than break down by means of defects.

It is possible to show that

$$\sigma = -2R_0^2(\mu \pm \nu) + O(k^2, l^2) \quad (8)$$

for the amplitude modes. So these are damped in the long wavelength limit, for all $R_0^2 > 0$. For the phase modes we have

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2R_0^2(\mu^2 - \nu^2)} \{ (k^2 + l^2)(2q^2\mu - \mu^2 R_0^2 + \nu^2 R_0^2) \pm [(k^2 - l^2)(2q^2\mu - \mu^2 R_0^2 + \nu^2 R_0^2)^2 + 16k^2 l^2 q^4 \nu^2]^{1/2} \} + O(\epsilon, k^4, l^4). \quad (9)$$

The second derivatives inside the brackets in equations (1a, b) represent curvature effects, and are the source of the $O(\epsilon)$ terms. When k or l is zero, they lead to the zig-zag instability as discussed above. Otherwise, they may be neglected. When $\sigma = 0$, the perturbed solution bifurcates from the original square pattern. In the case of the phase modes, the bifurcation points are given by $\sigma_{\pm} = 0$, or $R_0^2 = 2q^2/(\mu \mp \nu)$. In anticipation of the nonlinear results, we shall refer to these as the rectangular and Eckhaus cases respectively. In the case $\nu = 0$, where there is no coupling, they both reduce to the two-dimensional Eckhaus instability boundary, $R_0^2 = 2q^2/\mu$. When either k or l is zero, so that we are only considering perturbations along one axis, we find another phase instability boundary at $R_0^2 = 2\mu q^2/(\mu^2 - \nu^2)$. This is an instability on one set of rolls only. It is therefore a two-dimensional Eckhaus instability. Its instability boundary always lies between the rectangular and the three-dimensional Eckhaus instability boundaries, and so this is never the principal means of breakdown of the pattern. For $\nu > 0$, the rectangular instability, corresponding to $\sigma_+ = 0$ is the more important. In the case $\nu < 0$, the Eckhaus instability boundary is the relevant one.

The behaviour in the neighbourhood of these two bifurcations, is also susceptible to a weakly nonlinear analysis. Considering the rectangular, or $\nu > 0$, case first we find that at leading order

$$\phi_X = -\psi_Y, \quad (10)$$

from which we deduce that the perturbation leads to a tilted rectangular planform at first order. After an extensive calculation we discover that the leading order phase is governed by an equation

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_T = & -\frac{4d}{R_0^2(\mu - \nu)} \phi_{XXYY} - \frac{1}{2R_0^2(\mu - \nu)} \nabla^2 \phi_{XXYY} + \\ & + \frac{\nu - 9\mu}{2\nu} (\phi_X^3)_{XXYY}. \end{aligned} \quad (11)$$

This instability is subcritical, and is not quenched.

In the Eckhaus case, with $\nu < 0$, the analysis is similar, and we find

$$\phi_X = \psi_Y, \quad (12)$$

at leading order. This shows that the perturbation leads to squares which maintain their shape, but change their size. Again we expect some tilting of the pattern. This is a three-dimensional compression-dilatation instability, equivalent to the Eckhaus instability of rolls. The leading order phase diffusion equation is found to be

$$\nabla^2 \phi_T = -\frac{4d}{R_0^2(\mu + \nu)} \phi_{XXYY} - \frac{1}{2R_0^2(\mu + \nu)} \nabla^2 \phi_{XXYY} - 3(\phi_X^2)_{XXYY}. \quad (13)$$

This instability is also subcritical. Consequently, we expect the square pattern to break down creating defects.

3. CONCLUSIONS

The amplitude equations (1a, b) describe a system where square cells are the stable preferred planform at the onset of convection.

The square pattern is subject to four types of instability. When $q < 0$, there is a zig-zag instability, which is the direct equivalent of the zig-zag instability in two-dimensional convection. In fact, the instability on each set of rolls decouples at leading order. This is a supercritical instability, and the bifurcated pattern is stable. For all wavenumbers, q , when $\nu < 0$, we find the three-dimensional equivalent of the Eckhaus instability, where cells are unstable to compression or dilatation, but for $\nu > 0$ there is a new instability where the squares become unstable to rectangles. Both these instabilities are subcritical, and defects are created in the pattern before a stable configuration is achieved. There is also a two-dimensional Eckhaus instability, where perturbations are only allowed along one axis, but this is never the principal method of breakdown of the planform.

I would like to thank Dr M. R. E. Proctor for useful discussions. I gratefully acknowledge the financial support of a SERC Research Studentship.

REFERENCES

1. Busse F.H. and Riahi N.J. // Fluid Mech. 1980. V.96. P.243.
2. Proctor M.R.E. // J.Fluid Mech. 1981. V.113. P.469.
3. Le Gal P. and Croquette V. // Phys. Fluids. 1988. V.31. P.3440.
4. Jenkins D.R. and Proctor M.R.E. // J.Fluid Mech. 1984. V.139. P.461.
5. Riahi N. // J.Fluid Mech. 1985. V.152. P.113.
6. Oliver D.S. and Booker J.R. // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1983. V.27. P.73.
7. White D.B. // J.Fluid Mech. 1988. V.191. P.247.
8. Busse F.H. and Frick H. // J.Fluid Mech. 1985. V.150. P.451.
9. Jenkins D.R. // J.Fluid Mech. 1987. V.178. P.491.
10. Moses E. and Steinberg V. // Phys. Rev. Lett. 1986. V.57. P.2018.
11. Bigazzi P., Ciliberto S. and Croquette V. // J. Phys. (Paris). 1990. V.51. P.611.
12. Moses E. and Steinberg V. // Phys. Rev. 1991. V.A43. P.707.
13. Müller H.W. and Lücke M. // Phys. Rev. 1988. V.A38. P.2965.
14. Knobloch E. // Phys. Rev. 1989. V.A40. P.1549.
15. Clune T. and Knobloch E. // Phys. Rev. 1991. V.A44. P.8084.
16. Newell A.C. and Whitehead J.A. // J.Fluid Mech. 1969. V.38. P.279.
17. Segel L.A. // J.Fluid Mech. 1969. V.38. P.203.
18. Busse F.H. and Clever R.M. // J.Fluid Mech. 1979. V.91. P.319.
19. Clever R.M. and Busse F.H. // J. Fluid Mech. 1974. V.65. P.625.
20. Eckhaus W. Studies in nonlinear stability theory. - Berlin: Springer, 1965, p.93 ff.
21. Malomed B.A. and Tribel'skiĭ M.I. // Sov. Phys. 1987. V. JETP 65. P.305.
22. Milner S.T. // J.Fluid Mech. 1991. V.225. P.81.
23. Zaleski S. Ph.D. thesis, Université de Paris. 1980.
24. Hoyle R.B. (1992) Long wavelength instabilities of square patterns. (Submitted to Physica D.)
25. Pomeau Y. and Manneville P. // J.Physique Lett. 1979. V.40. P.L609.

University of Cambridge,
Cambridge, U.K.

Поступила в редакцию
21 октября 1992 г.

MAGNETOSTATIC EQUILIBRIA AND CORRESPONDING STEADY EULER FLOWS

D. Linardatos

It has been established by (1985) that there is a perfect mathematical analogy between the equations describing an incompressible steady Euler flow and a equilibrium of a magnetic field embedded in a perfectly conducting incompressible medium. The well established procedure of magnetic relaxation was suggested by Arnol'd (1974) and later developed by Moffatt (1985). This method can be used as a powerful algorithm for finding magnetostatic equilibria of prescribed topology and hence inferring the existence of steady Euler flows.

Consider the magnetic relaxation of a field embedded in a two-dimensional domain D , with the magnetic field B given by a flux function $\chi(x, y, t)$

$$B = (\partial\chi/\partial y, -\partial\chi/\partial x, 0). \quad (1)$$

The B-lines are given by the contours $\chi(x, y, t) = \text{const}$, and without loss of generality we can suppose that $\chi = 0$ on ∂D . Suppose that the initial flux function $\chi_0(x, y)$ one stationary point O in the interior of D and that this is a maximum. Then $B = 0$ at O and the B-lines are elliptic in a neighbourhood of O .

Let $A(\chi_c)$ be the area enclosed by the contour line $\chi_0(x, y) = \chi_c$, where χ_c satisfies $0 \leq \chi_c \leq \chi_{\text{max}}$. In this interval $A(\chi_c)$ is monotonically decreasing with

$$A(0) = A_0 \quad \text{and} \quad A(\chi_{\text{max}}) = 0 \quad (2)$$

where A_0 is the area of the domain D . During relaxation the B-lines are frozen in the fluid and the frozen field equation in two dimensions simplifies to $D\chi/Dt$. Since the flow is incompressible the area inside any such B-line is conserved which implies that the function $A(\chi)$ continues to characterise the field for all times. It is thus reasonable to call $A(\chi)$ the signature function of the field (Moffatt 1986).

The asymptotic equilibrium field described by a flux function $\chi^E(x, y)$ satisfies

$$\nabla^2 \chi^E = F(\chi^E) \quad (3)$$

for some current function $F(\chi^E)$ which will in principle be determined by the signature function and the shape of the boundary ∂D .

Without the influence of the boundary, each B-line would tend to minimize its length its contained area constant; thus in the case of a circular or unbounded domain it is plausible to conclude that the whole field will relax to a configuration of concentric circles. For different boundary shapes however the boundary plays a constraining role and the general solution is non-trivial.

This constrained minimization of the magnetic energy is therefore equivalent to the following variational problem. The functional

$$M = \int_D |\nabla\chi|^2 dS \quad (4)$$

is to be minimized subject to the of constraints

$$\int_{\chi(x,y) \geq \chi_c} dS = A(\chi_c). \quad (5)$$

The infinite family of constraints (5) can be integrated using a Lagrange multiplier function $\lambda(\chi_c)$ and can be hence as an integral over the domain D ,

$$\int_D \lambda(\chi) \left[\frac{A}{\left(\frac{dA}{d\chi}\right)^2} - \frac{1}{2} \frac{x\chi_x + y\chi_y}{\left(\frac{dA}{d\chi}\right)} \right] dS = 0. \quad (6)$$

To the energy functional (4) subject to the family of constraints (6) we construct the Lagrangian

$$L(x, y, \chi, \chi_x, \chi_y) = \int_d \left\{ \chi_x^2 + \chi_y^2 + \lambda(\chi) \left[\frac{A}{\left(\frac{dA}{d\chi}\right)^2} - \frac{1}{2} \frac{x\chi_x + y\chi_y}{\left(\frac{dA}{d\chi}\right)} \right] \right\} dS. \quad (7)$$

The Euler-Lagrange equation for stationary values of L is

$$\nabla^2 \chi = \frac{\frac{d}{d\chi} \left(\lambda(\chi) \frac{dA}{d\chi} \right)}{\frac{dA}{d\chi}} \quad (8)$$

where the Lagrange multiplier function $\lambda(\chi)$ can be determined in principle by imposing the boundary condition (5).

It can be shown that $\lambda(\chi)$ is a geometric property of the B-lines and that it is a constant when the field lines are self-similar with respect to the elliptic point O . Its minimum is attained 4π when the field lines are concentric circles. The dependence of $F(\chi)$ on the boundary shape is maintained through $\lambda(\chi)$ since the boundary is a B-line and thus $\lambda(\chi)$ implicitly depends on its shape.

For a field of the usual elliptic topology extending to infinity, the equilibrium magnetic energy can be written as

$$M^E = -\frac{1}{2} \int_0^{\chi_{max}} \lambda(\chi) \frac{dA}{d\chi} d\chi, \quad (9)$$

assuming that the field's strength falls off faster than $1/r$ so that the total energy is finite. Since $A(\chi)$ is invariant, the minimum energy of the field is attained when λ is minimized. Since in this case there is no boundary constraining the behaviour of $\lambda(\chi)$, the minimum energy is attained when $\lambda(\chi) = 4\pi$ and all the B-lines have relaxed to circles.

If instead the field initially contains any saddle points then tangential discontinuities of B may form during relaxation. Since the B-lines are hyperbolic in the neighbourhood of the saddle point the force may cause the angle between the to collapse to zero. In general any initial field $\chi_0(x, y)$ will be topologically characterised by the topology of the web of separatrices that divide the domain D into n subdomains and by the n signature functions

corresponding to these subdomains. As a generalisation of equation (7) the equilibrium field χ^E is expected to satisfy

$$\nabla^2 \chi^E = \frac{\frac{d}{d\chi^E} \left(\lambda_i(\chi^E) \frac{A}{\frac{dA}{d\chi^E}} \right)}{\frac{dA}{d\chi^E}} \quad \text{in } D_i; \quad \text{for } i = 1, 2, \dots \quad (10)$$

This equation has to be solved subject to the constraint that the total pressure is continuous on ∂D_i for $i = 1, 2, \dots$. An additional complication comes from the fact that in (7) $\lambda(\chi)$ depended implicitly on the boundary shape which was fixed. Now, each $\lambda_i(\chi)$ depends on the boundary shape of the subdomain D_i which is not fixed. It is therefore interesting to look for solutions of

$$\nabla^2 \chi = \infty \chi^{1-\frac{2}{\alpha}} \quad (11)$$

describing a collapsed saddle point.

Without loss of generality we assume that the saddle point has collapsed onto a current sheet on the line $\Theta = \pi$ and that the three separatrices forming the Y-point divide the domain D into the three convex subdomains

$$D_1 : -\Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_2 \quad (\Theta_1 \geq 0, \Theta_2 \geq 0)$$

$$D_2 : \Theta_2 \leq \Theta \leq \pi$$

$$D_3 : -\pi \leq \Theta \leq -\Theta_1.$$

Equation (10) is modified by replacing the term $\chi^{1-2/\alpha}$ by $|\chi|^{1-2/\alpha}$. This is necessary since χ can now be both negative and positive in the vicinity of the saddle point. We hence adopt the equation

$$\nabla^2 \chi = A_i |\chi|^{1-\frac{2}{\alpha}} \quad \text{in } D_i \quad \text{for } i = 1, 2, 3$$

which by setting $\chi(r, \Theta) = (r/a)^\alpha f(\Theta)$ becomes

$$f''(\Theta) + \alpha^2 f(\Theta) = A_i |f(\Theta)|^{1-\frac{2}{\alpha}} \quad \text{for } i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

The solution to this equation has to vanish on the and must satisfy the pressure continuity condition

$$\left\{ \frac{B^2}{8\pi} + p \right\} = 0 \quad \text{on } \partial D_i \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

where the braces denote the jump of the enclosed quantity across the separatrices. When $r \rightarrow 0, B \rightarrow 0$ and therefore $\{B^2/8\pi\} = 0$ in the vicinity of $r = 0$. Hence according to (12), $\{P\} = 0$ and the magnetic field either is continuous or changes sign on each separatrix. Any solution of equation (11) must therefore satisfy $f'(\pi) = -f'(-\pi)$ in addition to $f(-\pi) = f(-\Theta_1) = f(\Theta_2) = f(\pi) = 0$. Equation (11) can be solved numerically subject to those boundary conditions for every $\alpha \geq 2$, giving rise to a wide family of solutions.

In this paper we have seen that we can use a magnetic relaxation method to find a family of nonlinear two-dimensional magnetostatic equilibria. Using the exact analogy between a magnetostatic equilibrium and a steady Euler flow an

equilibrium flux function χ^E can be replaced by an analogous streamfunction ψ^E . When the initial field contains saddle points, the steady Euler flow obtained may contain a number of vortex sheets which will presumably be unstable to a Kelvin-Helmholtz type of instability. Even so this suggests that the existence of vortex sheets might be a generic feature of steady Euler flows, which can be regarded as unstable fixed points in the function space in which unsteady solutions of the Euler equations evolve (Moffatt 1985). Any such unsteady solution is represented by a trajectory in this function space and very often it spends long periods of time close to such unstable fixed points. Study of such steady Euler flows of prescribed streamline topology can therefore give us valuable information about the structure of turbulence and their existence could not be inferred other than via the magnetic relaxation method. Under two-dimensional magnetic relaxation every field line tries to minimise its length while preserving the area it encloses. This can be therefore treated as a variational problem with an infinity of constraints. This problem was formulated in terms of a Lagrange multiplier function $\lambda(\chi)$, which was shown to be a geometric property of the field lines. For the case of a finite energy field containing a stationary elliptic point and extending to infinity we have shown that the minimum energy state is the one where all field lines have become concentric circles and that this state is topologically accessible from the original one. This state provides a useful reference state for understanding relaxation constrained by finite boundaries.

REFERENCES

1. Arnol'd V.I. In Proc. Summer School in Differential Equations. - Erevan: ArSSR Ac. of Sci., 1974. (Eng. transl., // Sel. Math. Sov. 1986. V.5. P.327.)
2. Batchelor G.K. // J. Fluid Mech. 1955. V.1. P.177.
3. Moffatt H.K. // J. Fluid Mech. 1985. V.159. P.359.
4. Moffatt H.K. // J. Fluid Mech. 1986. V.173. P.289.
5. Moffatt H.K. // Fluid Dyn. Res. 1988. V.3. P.22.
6. Moffatt H.K. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1990. V.A333. P.321.
7. Vainshtein S.I. // Astron. Astrophys. 1990. V.230. P.238.

University of Cambridge, U.K.

Поступила в редакцию
15 октября 1992г.

NONLINEAR WAVES IN GAS-FLUIDIZED BEDS

S.E. Harris

A mathematical model for gas-fluidized beds is examined which treats both the particles and gas as continua by volume averaging. The system is then considered as two, interlocking one-phase fluids. For small perturbations to the uniform state, these equations have been shown by Crighton (1991) to reduce to the Burgers-KdV equation and under certain criteria, we have instability. We consider the unstable situation when the amplification effects are a perturbation to the KdV equation and take an initial condition of a single KdV soliton. The growth of this soliton is followed through several regions in which the unstable Burgers-KdV equation is no longer appropriate, but KdV remains the leading order equation. Eventually, there is a fundamental change in the solution and the new governing equations are fully nonlinear and $O(1)$. These admit a solitary wave solution which matches back onto the KdV soliton. Thus, we can follow the formation of a bubble from a small amplitude perturbation to the uniform state.

1. INTRODUCTION

A bed of stationary, solid particles supported on a porous plate in a vertical tube can be fluidized by forcing fluid upwards through the bed. If the fluid velocity is increased from zero, then a critical velocity is reached when the drag force of the fluid on the particles exactly balances the gravitational force. The particles becoming mobile and buoyant in the bed is said to be fluidized. A fluidized bed exhibits many liquid-like properties, including large-scale phenomena such as surface waves.

If the flow velocity is increased beyond the minimum required for fluidization to occur, the resultant behavior depends mainly on the fluid but can also be influenced by the type, size and density of the particles used. Most liquid-fluidized beds are stable and just expand uniformly, yielding a homogeneous mixture. In contrast, beds fluidized by gas tend to be unstable and for gas velocities above a certain threshold, they will exhibit bubbling or slugging. This can also occur in liquid-fluidized beds if the ratio of the density of the solid particles to that of the liquid is high - for example if lead shot is fluidized with water.

It is useful to define a quantity known as the voidage fraction, which is the volume of fluid in unit volume of the two-phase mixture. Then a bubble or slug can be described as a voidage non-uniformity in the bed. A bubble is approximately spherical and consists of essentially particle-free fluid rising through the bed, so it is a high voidage region. Bubbling tends to occur in wide beds, whereas slugging takes place in narrow tubes, when the container walls have a strong influence. There are two sorts of slugging: type A in which we have highly deformed bubbles filling the whole tube cross-section and type B, where there are alternating horizontal bands of high and low

voidage regions, with rapid particle raining at the voidage fronts. For a more detailed discussion see Davidson & Harrison (1963).

The motivation for the study of fluidized beds and, in particular, the interest in bubbling and slugging behavior arises from the industrial applications. The most major use of the fluidization process is in catalytic reactions, such as the cracking of heavy hydrocarbons, to obtain petrol. Here, the solid particles are made of the catalyst and the fluidizing fluid consists of the reactants and the catalyst. However, if bubbling or slugging occurs, then appreciable amounts of the reactants do not come into contact with the catalyst and so will not react. This adversely affects the conversion rate and may limit the commercial viability of the process.

2. SOLITONS AND SOLITARY WAVES

The interesting features for a mathematical study are the mechanisms governing the onset of instability and the description of formation of bubbles and slugs from voidage non-uniformities in the bed. Here, we use a one-dimensional model developed by Needham & Merkin (1983), which considers the systems as two single-phase fluids. Thus we treat both the fluid and particles as continua but using volume averages.

The model equations can be written in the nondimensional form

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}([1 - \phi]v) = 0, \quad (1)$$

$$(1 - \phi) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{(1 - \phi)}{F^2} \left(\frac{\phi_0}{\phi} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{v}{\phi_0} \right) - \frac{(1 - \phi)}{F^2} + P_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2)$$

where t is the time, x is the vertical spatial coordinate, v is the particle velocity, ϕ is the voidage fraction, ϕ_0 is the voidage fraction at uniform fluidization, F is a Froude number, R is a Reynolds number and P_0 is a constant associated with a particle pressure. For a more detailed description of the quantities involved and a derivation of the equations, see Harris (1992).

From equations (1) and (2), it can be seen that uniform fluidization is defined by $\phi = \phi_0$, $v = 0$, so that the voidage fraction is a constant and the particles have no mean vertical velocity. Physical measurements indicate that Froude number is small, so we use the approximation $F \ll 1$. Then if we superimpose a small perturbation on a uniform bed and linearize, we find that over short times, voidage disturbances propagate upwards with the constant velocity $\alpha_0 = (n + 1)(1 - \phi_0)$. However, over longer time-scales, nonlinear effects become important and must be included. Crighton (1991) balances nonlinear terms with small dispersive and dissipative (amplifying) effects and shows that the equations reduce to the Burgers-Korteweg-de Vries equation for the voidage perturbation ϕ' :

$$\frac{\partial \phi'}{\partial \tau} + \beta_0 \phi' \frac{\partial \phi'}{\partial X} + \gamma_0 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial X^3} + \delta \frac{\partial^2 \phi'}{\partial X^2} = 0. \quad (3)$$

Here, $\tau = F^2 t$ is the long time-scale, X is a translating coordinate given by $X = x - \alpha_0 t$, the constants β_0 and γ_0 are both positive and $O(1)$, but δ can be of either sign.

If $\delta = 0$ in equation(3), then we have the KdV equation and any initial disturbance will break up into a series of solitons. These solitons are of higher voidage than the uniform state and they rise through the bed with constant velocity. If $\delta < 0$, then the final term on the right hand side of equation (3) is dissipative and so this is the stable side of the threshold. Thus, we are interested in the case when $\delta > 0$ and amplification takes place.

We consider the case when δ is small and positive and write $\delta = F\delta_0$, where δ_0 is a positive $O(1)$ constant, so that the amplification term is compared to the KdV equation in (3). Thus we have a perturbation problem in which KdV is the leading order equation we choose a single KdV soliton as the initial disturbance. A multiple scales analysis can be applied, which allows the size and speed of the soliton to vary on a long time-scale, $T = F^3 t$. This leads to secular condition, necessary to suppress resonant terms, and shows that the amplitude and velocity have a finite-time singularity. However, the Burgers-KdV equation was derived from the full system of equations (1) and (2) under the assumption that the disturbance was small. Eventually, the original approximations made no longer hold and other terms must be included. In fact, there is a sequence of such changes to the perturbation term, but still retaining KdV at leading order, and some of these changes weaken the singularity.

Finally, there is a fundamental change in the solution when the soliton is no longer a perturbation to the uniform bed but has become a fully nonlinear $O(1)$ wave. Then, we must return to the original system of equations (1) and (2) to derive the new, leading order equations

$$c\phi_\zeta + [(1 - \phi)v]_\zeta = 0, \quad (4)$$

$$(1 - \phi) \left(\frac{\phi_0}{\phi} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{v}{\phi_0} \right) - (1 - \phi) + \frac{1}{R} v_{\zeta\zeta} = 0, \quad (5)$$

where ζ is a travelling coordinate. These equations admit solitary wave solutions for the voidage fraction, ϕ , with c being the wave velocity. If the next order terms are also retained and a multiple scales analysis is applied to equations (4) and (5), then the method of matched asymptotic expansions shows that the solitons and the solitary wave can be matched directly. Thus there is no intermediate, time-dependent region and so one soliton grows into a single solitary wave.

It been shown that the stability of a fluidized bed depends on the sign of a term in the Burgers-KdV equation. Thus, when we have dissipation, the bed is stable, but amplification leads to the observed bubbling or slugging behavior in a gas-fluidized bed. By treating the amplification effects as small, we have a perturbed KdV equation and so any initial disturbance will break up into a number of solitons. We follow the development of one such soliton as it grows and eventually becomes a fully nonlinear solitary wave, which can be interpreted as a rising bubble or slug.

REFERENCES

1. Crighton D.G., In *Nonlinear Waves in real fluids* (ed.A.Kluwick).- Wien, New York.: Springer-Verlag , 1991. p.83-90.
2. Davidson, J.F. Harrison, D. *Fluidised Particles*. Cambridge University Press. 1963
3. Harris, S.E. Ph.D. Thesis, University of Cambridge. 1992
4. Needham D.J. Merkin J.H. // *J. Fluid Mech.* 1983. V.131. p.427.

University of Cambridge, U.K.

Поступила в редакцию
21 октября 1992 г.

УДК 535.21:538.97

ФЛУКТУАЦИОННО-ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ИНДУЦИРОВАННОЕ РЕЗИСТИВНОЕ СОСТОЯНИЕ В ДЛИННОМ ПЕРЕХОДЕ ДЖОЗЕФСОНА

Д.А. Рындык

Рассмотрены резонансная неустойчивость бризера и динамическое рождение вихрей при слабом нестационарном воздействии на длинный переход Джозефсона. Предложен комбинированный флуктуационно-динамический механизм разрушения пространственно однородного состояния длинного перехода Джозефсона. Проанализировано возникающее резистивное состояние.

1. Введение. Контакт двух массивных сверхпроводников через тонкую (порядка длины когерентности) несверхпроводящую прослойку называется переходом Джозефсона и его динамической характеристикой является так называемая джозефсоновская разность фаз $\varphi(x, y, t)$ – скачек фазы комплексного параметра порядка на контакте (x и y – координаты точки в плоскости контакта) [см.1,2]. В переходе прямоугольной формы LW при $L \gg \lambda_j$, $W \ll \lambda_j$, (λ_j – джозефсоновская глубина проникновения) $\varphi(x, y, t)$ не зависит от y и для $\varphi(x, t)$ можно получить обобщенное одномерное уравнение синус–Гордона (длинный переход Джозефсона)

$$\varphi_{tt} + \gamma\varphi_t - \varphi_{xx} + \sin \varphi = j(x, t), \quad (1a)$$

где $j(x, t)$ – безразмерная плотность внешнего тока, втекающего в переход по боковой стенке образца в точке x , член $\gamma\varphi_t$ учитывает диссипацию, x измеряется в единицах λ_j , а t – в единицах λ_j/c (c – скорость Свихарта). Внешний ток определяется геометрией массивных сверхпроводников, мы считаем его заданным и однородным по x

$$j(x, t) = j_0 + j_1 \sin \omega t. \quad (16)$$

Будем также считать a, j_0, j_1 малыми и $\omega < 1$. Граничные условия при $x = 0$ и $x = L$ зададим в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0. \quad (1b)$$

Условия (1b) соответствуют отсутствию внешнего магнитного поля в направлении y и, следовательно, проникновения магнитного потока внутрь перехода с краев не происходит.

Длинный переход Джозефсона является существенно нелинейной физической системой и его динамика при нестационарном воздействии определяется движением солитонов (Джозефсоновских вихрей) и их связанных состояний. В настоящей работе рассмотрен процесс динамического

рождения вихрей вследствие резонансной неустойчивости бризера (связанного состояния вихря и антивихря) при слабом однородном нестационарном воздействии и предложен новый флуктуационно-динамический механизм развития пространственно неоднородного резистивного состояния, которое характеризуется отличным от нуля средним напряжением на переходе

$$\langle V \rangle = \frac{1}{TL} \int_0^T \left[\frac{\hbar}{2e} \int_0^L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dx \right] dt. \quad (2)$$

2. Однородное решение и его устойчивость. Уравнение (1) имеет однородное решение $f(t)$, которое вдали от резонанса можно представить в виде ($A, f_0 \ll 1$)

$$f(t) = A \sin(\omega t + \delta) + f_0. \quad (3)$$

Нетрудно убедиться, что в этом состоянии $\langle V \rangle = 0$. Является ли однородное решение $f(t)$ устойчивым? Для выяснения этого вопроса представим $\varphi(x, t)$ как $\varphi(x, t) = f(t) + \psi(x, t)$, $\psi(x, t)$ — возмущение. Тогда при малом $f(t)$

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + \sin \psi = R[\psi] = -\gamma \psi_t + f(t)(1 - \cos \psi), \quad (4)$$

где $R[\psi]$ — малое возмущение. Можно показать, что в линейном по ψ приближении решение (3) устойчиво при $\omega < 1$. Таким образом, однородное нестационарное состояние устойчиво относительно бесконечно малых флуктуаций ψ . Ситуация, однако, может измениться при учете флуктуаций конечной амплитуды, например температурных. Следовательно, необходимо рассмотреть динамику конечной флуктуации в рамках уравнения (1). Ограничимся, однако, малыми флуктуациями, не приводящими сразу к образованию свободных вихрей (что не исключается в результате развития динамической неустойчивости). Большие флуктуации разрушают однородное состояние и приводят к резистивности и без участия переменного воздействия.

Уравнение (4) при $L \rightarrow \infty$ принадлежит к классу "почти интегрируемых" уравнений [3] и его общее решение может быть представлено в виде суммы трех различных типов возбуждений: кинков, бризеров и периодических волн, являющихся точными решениями невозмущенного уравнения синус-Гордона. Параметры этих возбуждений медленно зависят от времени при наличии возмущения $R[\psi]$. Любое малое начальное возмущение $\psi_i(x)$ может быть разложено по "бризерным" модам и "плазменным" (линейным с законом дисперсии $\omega^2 = 1 + k^2$) модам. Плазменные моды затухают, так как чет резонанса с внешним током ($\omega < 1$). Бризер же может быть возбужден, так как частота его собственных колебаний меньше единицы. Таким образом, мы пришли к задаче о динамике бризера под действием нестационарного возмущения [4-8].

3. Динамика бризера. В невозмущенном состоянии бризер описывается выражением

$$\psi_{br} = 4 \arctg[\operatorname{tg} \Theta \sin(\alpha/16) \operatorname{sech}(\sin \Theta(x - x_0))], \quad (5)$$

где $\Theta = \text{const}$ – амплитуда, $\alpha(t) = (16 \cos \Theta)t + \alpha_0$. Влияние возмущения $R[\psi]$ учтем в адиабатическом приближении, то есть будем считать что ψ_{br} определяется по прежнему выражению (5) где Θ и α , однако, некоторые новые функции времени. Уравнения для $\Theta(t)$ и $\alpha(t)$ можно получить либо методом обратной задачи рассеяния [3,6], либо методом усредненного гамильтониана [5,8]. В результате получаем следующие уравнения

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\pi f(t) \cos \alpha}{4 \cos \Theta} \frac{T^4 + 4T^2}{(1 + T^2)^{5/2}} - \gamma \frac{\text{tg} \Theta \cos^2 \alpha}{1 + T^2} \left[1 + \frac{\text{arcsh}(T)}{T(1 + T^2)^{1/2}} \right], \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \cos \Theta + \frac{\pi f(t) \cos \Theta}{4 \sin^2 \Theta} \left[\text{arcsh}(T) - \frac{T}{(1 + T^2)^{1/2}} - \frac{\sin \alpha}{\sin \Theta \cos^3 \Theta} \frac{T^4 + 4T^2}{(1 + T^2)^{5/2}} \right] + \\ + \gamma \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \Theta (1 + T^2)} + \gamma \frac{\text{tg} \Theta \cos^3 \alpha \text{arcsh}(T)}{(1 + T^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6b)$$

Здесь $T = \text{tg} \Theta \sin \alpha$. Анализ этих уравнений при различных значениях j_0 , j_1 , γ , ω и начальных амплитуд бризера Θ_i показал, что существуют три разных динамических режима.

1). Нерезонансный режим: $\Theta(t)$ слабо осциллирует около Θ_i ($\gamma = 0$) или около $\Theta = 0$ ($\gamma \neq 0$). Динамического возбуждения бризера не происходит.

2). Режим синхронизации: $\Theta(t)$ слабо осциллирует около некоторого значения Θ_s , не зависящего от Θ_i .

3). Режим распада: бризер нестабилен и за конечное время распадается на пару вихрь–антивихрь. Происходит динамическое рождение свободных вихрей.

Важной особенностью режимов 2 и 3 является их пороговый характер как по внешней силе, что было установлено в [7], так и по начальной амплитуде Θ_i . Только бризеры с $\Theta > \Theta_{tr}(j_0, j_1, \gamma, \omega)$ попадают в режим синхронизации или распада, если же $\Theta < \Theta_{tr}$, то бризер затухает.

Рассмотрим теперь, как неустойчивость надпорогового бризера и динамическое рождение вихрей влияют на ВАХ длинного перехода Джозефсона.

4. **Индукированное резистивное состояние.** Проведенный анализ показывает, что однородное решение уравнения (1) является устойчивым относительно бесконечно малых начальных возмущений, но может стать неустойчивым при учете флуктуаций конечной амплитуды. Если параметры возмущения соответствуют режиму синхронизации, то возникающее неоднородное состояние состоит из бризеров и среднего напряжения на переходе не возникает. Если же параметры соответствуют режиму распада бризера, то ситуация меняется. Возникающие свободные вихри приходят в движение под действием постоянного тока j_0 и движутся в противоположных направлениях, создавая напряжение на переходе. При граничных условиях (1в) вихри отражаются от края перехода с переменной "знака" (направления магнитного потока). Следовательно, возникший свободный вихрь будет осциллировать между краями перехода, меняя среднюю джозефсоновскую разность фаз $\langle \varphi \rangle$ на 2π за один пробог. Таким образом, среднее напряжение на переходе пропорционально полному

числу свободных вихрей N и обратно пропорционально времени пробега вихря по переходу T

$$\langle V \rangle = \hbar \pi N / eT. \quad (7)$$

Полное число вихрей не возрастает, разумеется, до бесконечности. При большой концентрации (N/L) начинает играть роль взаимодействие бризеров и свободных вихрей, приводящее к стабилизации N . Для описания развитого резистивного состояния необходимо построить кинетическую теорию, учитывающую взаимодействие между вихрями.

Рассмотрение динамики бризера в длинном переходе Джозефсона показало, что флуктуационно возникшие бризеры могут распадаться в присутствии однородного нестационарного внешнего тока на свободные вихри и антивихри, которые, двигаясь под действием постоянной составляющей внешнего тока, создают напряжение на переходе. Возникающее состояние названо индуцированным резистивным состоянием, так как появление напряжения (резистивности) является следствием динамического рождения вихрей под действием внешнего тока. В заключение выражаю благодарность В.В.Курину за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. – М: Наука, 1985.
2. Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. – М: Мир, 1984.
3. Kivshar Yu., Malomed B. // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V.61. N 4. P.763.
4. McLaughlin D.W., Scott A.C. // *Phys. Rev. A.* 1978. V.18. P.1652.
5. Nozaki K. // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V.49. N 26. P.1883.
6. Карпман В.И., Маслов Е.М., Соловьев В.В. // *ЖЭТФ.* 1983. Т.84. Вып.1. С.289.
7. Lomdahl P., Samuelsen M. // *Phys. Rev. A.* 1986. V.34. N1. P.664.
8. Ryndyk D. In: *Proceedings of DSWP-92.* – Nizhny Novgorod, 1992.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
3 ноября 1992 г.

FLUCTUATION-DYNAMIC INSTABILITY AND INDUCED RESISTIVE STATE IN LONG JOSEPHSON JUNCTION

Dmitry A. Ryndyk

Resonance instability of a breather and dynamic creation of vortices by weak nonstationary perturbation in long Josephson junction are considered. Combined fluctuation-dynamic mechanism of spatially homogeneous state breaking is proposed. Resulting resistive state is analyzed.

УДК 538.945

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В ЦЕПОЧКЕ ФЛАКСОНОВ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В НЕОДНОРОДНОМ ДЛИННОМ ДЖОЗЕФСОНОВСКОМ ПЕРЕХОДЕ

В.В.Курин, А.В.Юлин

Известно, что в длинном Джозефсоновском переходе (ДЦП) возможно существование солитонных возбуждений—флаксонов. В данной статье будут рассмотрены волны деформации в цепочке флаксонов в неоднородном ДЦП. Случай цепочки, закрепленной на неоднородностях описан в [1]. Мы исследуем цепочку флаксонов, движущуюся в ДЦП с периодически модулированной плотностью критического тока.

Динамика локальной разности фаз φ волновой функции сверхпроводящих электронов в ДЦП описывается известным уравнением:

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + j_c \sin \varphi = \gamma \varphi_t - j, \quad (1)$$

где γ — диссипативная константа, j_c — плотность критического тока, j — плотность стороннего тока. Это уравнение следует дополнить граничными условиями. Если ДЦП не замкнут в кольцо, то

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(l, t) = h \quad (2)$$

где h — нормированное внешнее магнитное поле. Для замкнутого в кольцо перехода имеем:

$$\varphi(0, t) = \varphi(2\pi r, t) + 2\pi n, \quad (3)$$

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(2\pi r, t) \quad (4)$$

где r — радиус перехода, n — целое число, равное числу вихрей в переходе.

Мы будем исследовать динамику Джозефсоновских вихрей в следующем случае: $\gamma \ll 1$, $j \ll 1$, $j_c = 1 + \mu \sin \alpha x$, $\mu \ll 1$. Здесь $2\pi/\alpha$ и μ соответственно пространственный период и амплитуда модуляции критического тока. Кроме того будем считать, что характерный размер вихря много меньше расстояния между вихрями d и пространственного периода модуляции плотности критического тока. Эти ограничения позволят нам применить теорию возмущений.

При сделанных предположениях можно пренебречь изменением формы вихрей из-за наличия соседних вихрей, неоднородностей, стороннего тока и диссипации. Поэтому будем считать, что форма каждого вихря определяется односолитонным решением следующего уравнения:

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0. \quad (5)$$

Это решение:

$$\varphi_0 = 4 \operatorname{arctg} \exp \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad (6)$$

где v_0 – скорость движения вихря.

Не учитывая сторонний ток и диссипацию и считая, что цепочка как целое движется со скоростью v , получим уравнение для движения центра масс каждого вихря с помощью метода Уизема. Считая, что смещение каждого флаксона относительно его положения в невозмущенной цепочке мало, получим линеаризованное уравнение

$$2 \frac{1+v^2}{(1-v^2)^2} \ddot{\xi}_k + I(2\xi_k - \xi_{k+1} - \xi_{k-1}) = -\mu \varepsilon \cos \varepsilon(vt - kd), \quad (7)$$

где $I = \text{const}$, $I \ll 1$. Эта константа определяет взаимодействие флаксона с соседями и экспоненциально убывает с расстоянием между флаксонами. Делая замену $\xi_k = ReU_k$ получим уравнение для U_k

$$2 \frac{1+v^2}{(1-v^2)^2} U_k + I(2U_k - U_{k+1} - U_{k-1}) = -\mu \varepsilon e^{i\varepsilon(vt - kd)}. \quad (8)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $U_k = W(t)e^{-i\varepsilon kd}$. Тогда для W получим:

$$2 \frac{1+v^2}{(1-v^2)^2} \ddot{W} + 4I \sin^2 \left(\frac{\varepsilon d}{2} \right) W = -\mu \varepsilon e^{i\varepsilon vt}. \quad (9)$$

Видно, что уравнение (9) имеет резонансы. Конечно, за счет диссипации и нелинейности амплитуда ξ_k ограничена. Нетрудно учесть влияние диссипации из баланса энергии [2]. Если флаксон движется с постоянной скоростью, то действие стороннего тока компенсируется диссипацией. Поэтому имеем следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\gamma \dot{\varphi}^2 - j \dot{\varphi}) dx = 0. \quad (10)$$

Подставляя (6) в (10), получим

$$j - \frac{4}{\pi} \gamma \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (11)$$

Действие же стороннего тока можно учесть методом Уизема. Теперь зная, что диссипация энергии при скорости v равна подкачке энергии сторонним током плотностью j , легко найти диссипативный член в уравнении (7). С этим членом уравнение (7) имеет вид:

$$2 \frac{1+v^2}{(1-v^2)^2} \ddot{\xi}_k + \frac{2\gamma}{1-v^2} \dot{\xi}_k + I(2\xi_k - \xi_{k+1} - \xi_{k-1}) = -\mu \varepsilon \cos \varepsilon(vt - kd). \quad (12)$$

Тогда уравнение (9) примет вид:

$$2 \frac{1+v^2}{(1-v^2)^2} \ddot{W} + \frac{2\gamma}{1-v^2} \dot{W} + 4I \sin^2 \left(\frac{\varepsilon d}{2} \right) W = -\mu \varepsilon \cos \varepsilon(vt - kd). \quad (13)$$

Определить скорость цепочки как целого тоже можно исходя из баланса энергии:

$$j = \frac{4}{\pi} \gamma \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{2}{\pi} \gamma \frac{v_A^2}{v \sqrt{1-v^2}} \quad (14)$$

где v_A – амплитуда скорости колебаний флаксонов относительно их положения в невозмущенной цепочке. Зависимость v_A от v определяется из уравнения (13) (амплитуда W равна амплитуде скорости колебаний флаксонов).

Существование скорости цепочки, при которой происходит резонансное возбуждение волн деформации, приводит к появлению ступеньки тока на ВАХ контакта из-за резкого возрастания диссипации энергии в переходе при этой скорости (рис.1). В случае достаточно ярко выраженного резонанса, на ВАХ появляется гистерезис (рис.2).

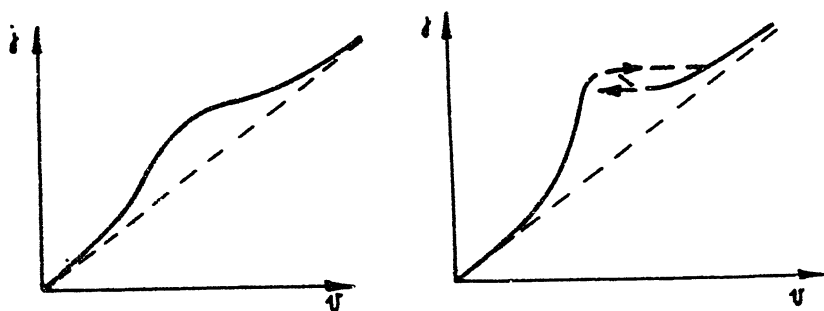


Рис. 1,2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маломец Б.А., Обоэнов В.А., Устинов А.В. // ЖЭТФ. 1990. Т.97. Вып.3. С.924.
2. McLaughlin D.W., Scott A.C. // Phys. Rev. A. 1978. V.18. P.1652.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
15 октября 1992 г.

EXCITATION OF DEFORMATION WAVES IN FLUXON CHAIN, MOVING
IN INHOMOGENEOUS LONG JOSEPHSON JUNCTION

V. V. Kurin, A. V. Yulin

О синхронизации сложномодулированных сигналов в ансамбле связанных автогенераторов

Алексеев А.А., Шалфеев В.Д.

В данной работе рассматривается синхронизация сигналов со сложной модуляцией, генерируемых системой двух взаимосвязанных автогенераторов, каждый из которых охвачен петлей обратной связи управления по частоте.

В данной работе обсуждается явление синхронизации сложномодулированных сигналов в системе двух связанных систем управления частотой автогенератора. Парциальная система представляет собой автогенератор с петлей обратной связи управления по частоте [1]. Подобные системы могут использоваться для управления параметрами различных радиофизических генерирующих устройств. Пользуясь трехмерной математической моделью системы [2] можно записать уравнение, описывающее динамику процессов в ней в следующем виде:

$$\mu \frac{d^3 x}{d\tau^3} + \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \lambda \frac{dx}{d\tau} + x + \Phi(x) = \gamma, \quad \Phi(x) = \frac{2\beta x}{1 + \beta^2 x^2},$$

где x – безразмерное текущее отклонение частоты управляемого генератора от частоты опорного генератора, γ , μ , λ , β – безразмерные параметры цепи управления. В работе [3] приводятся результаты аналогового и численного моделирования динамики данной системы. Отмечено, что в пространстве параметров μ , λ существуют области, отвечающие как регулярной (состояния равновесия, предельные циклы), так и хаотической (странные аттракторы) динамике.

Основной задачей, которая ставилась при аналоговом и численном моделировании динамики двух таких связанных систем, было получение режимов синхронизации различных модулированных сигналов, вырабатываемых парциальными подсистемами. Введение связи приводит к следующей математической модели изучаемого ансамбля:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\ \mu \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \lambda_1 z_1 - F[x_1 + \delta_1(x_2 - x_1)], \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\ \mu \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - \lambda_2 z_2 - F[x_2 + \delta_2(x_1 - x_2)], \\ F(x) &= x + \Phi(x) \end{aligned}$$

Связь обеспечивает выравнивание текущих координат и, вместе с тем, ограничивает амплитуды воздействий парциальных подсистем друг на друга.

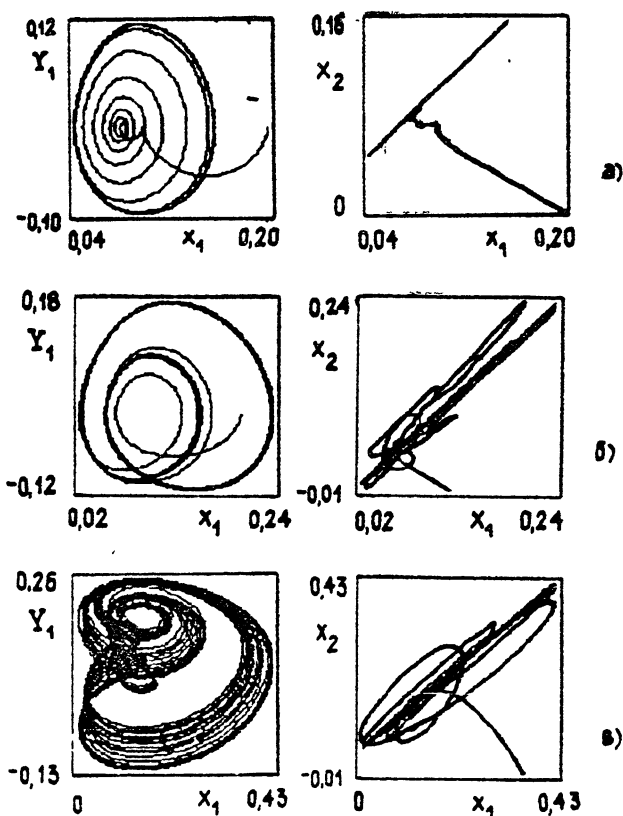


Рис. 1:

В случае симметричных связей $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ и фиксированных параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\beta = 8$ рассматривались режимы синхронизации при различных значениях параметра μ . При $\mu \leq 0,6$ в обеих парциальных подсистемах существуют устойчивые состояния равновесия, динамика ансамбля: обе системы генерируют сигналы с равными частотами. При $\mu = 0,8$ в каждой из парциальных подсистем устанавливается режим биений с периодически меняющейся во времени остаточной расстройкой частот управляемого и опорного генераторов, образами которого в парциальных фазовых пространствах подсистем являются предельные циклы, а в фазовом пространстве всей системы – двумерный тор. При включении связи происходит захват фаз колебаний в парциальных подсистемах, движения на предельных циклах синхронизируются (рис.1а). В фазовом пространстве всей системы существует устойчивый предельный цикл на торе. При $\mu = 1,2$ в парциальных подсистемах реализуются колебания удвоенного по сравнению со случаем $\mu = 0,8$ периода. Включение связи при $\delta = 0,35$ обеспечивает синхронизацию этих колебаний аналогично предыдущему случаю (рис. 1б). Дальнейшее увеличение

параметра μ приводит к тому, что биения частотной расстройки (или модуляция частоты опорного сигнала) приобретают характер нерегулярных, хаотических колебаний в связи с тем, что в фазовом пространстве парциальных подсистем существуют разные аттракторы. При значении параметра связи из области $0,21 \leq \delta \leq 0,6$ наблюдался режим стохастической синхронизации, аналогичный тому, что имел место в [4] (рис. 1в). При выходе из указанной области по параметру δ синхронизация разрушается.

Полученные результаты являются важными как с точки зрения практических приложений, так и для понимания особенностей коллективной динамики ансамблей, состоящих из большого числа активных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований /проект 93-02-15424/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капрапов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. – М. Наука, 1984.
2. Заулин И.А., Пономаренко В.П. // Радиотехника и электроника. 1993. Т.36. Вып.5. С.732-742.
3. Алексеев А.А. // Нелинейные колебания механических систем: 3 конф.: Тез.докл. – Нижний Новгород, 1993. С.8.
4. Волковский А.Р., Рульков Н.Ф. // Письма в ЖТФ. 1989. Т.15. Вып.7. С.5-10.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
12 октября 1993 г.

ABOUT THE SYNCHRONIZATION OF COMPLEXMODULATED SIGNALS IN ENSEMBLE OF TWO COUPLED GENERATORS

Alexeyev A.A., Shalfeyev V.D.

In this paper we report about the phenomenon of synchronization of signals with complex modulation, generated by the system of two mutually coupled generators each of those posses a loop of frequency control feedback.

УДК 621.373

СИНХРОННЫЙ ОТКЛИК В СВЯЗАННЫХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМАХ

А.К.Козлов

Отмечены некоторые отличительные черты явления синхронного отклика на хаотическое воздействие на примере связанных фазовых систем запаздывающего типа, а именно: а) возможность синхронизации при любых значениях параметров воздействующей подсистемы в случае точной настройки параметров подсистемы отклика; б) относительно невысокая чувствительность к расстройке параметров подсистем; в) "мягкий" характер рассинхронизации в неоднородной цепочке фазовых систем.

Явление хаотической синхронизации колебаний в диссипативных системах известно сравнительно давно [1,2] и уже стало привычным объектом теоретических и экспериментальных исследований. Вместе с тем, анализ процессов синхронизации в ряде конкретных неустойчивых автоколебательных систем [3,4] выявил некоторые существенные особенности хаотической синхронизации, затрудняющие ее практическое применение. В последнее время практически значимые результаты получены для устойчивых систем, возмущаемых внешним хаотическим сигналом [5-8]. В данной работе рассматривается взаимодействие связанных систем синхронизации (СФС) с точки зрения синхронного отклика на внешнее хаотическое воздействие.

В качестве ведущей подсистемы x взята простейшая СФС со сложной динамикой – бесфильтровая однопетлевая система фазовой автоподстройки частоты (ФАП) с запаздыванием в ВЧ тракте [9] и дополнительным частотным управлением. Ведомая устойчивая подсистема y строится по схеме той же ФАП, но с разомкнутой петлей обратной связи. Связь между подсистемами однонаправленная – от x к y . Блок-схемы подсистем x и y приведены на рис.1а, где ПГ – подстраиваемый генератор, ФД и ЧД – фазовый и частотный дискриминаторы, ЭЗ – элемент запаздывания. Динамика подсистемы x описывается следующим уравнением в безразмерных величинах:

$$\dot{\varphi}(t) + \sin \varphi(t - \tau_x) = \gamma_x + u_x(t), \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ – разность фаз сигнала ПГ и опорного сигнала, τ_x – запаздывание, γ_x – разность собственной частоты ПГ и опорной частоты ω_0 , $u_x(t)$ – внешний сигнал управления частотой. Подсистема y , согласно выбранной структуре, выполняет операцию обратную действию подсистемы x , то есть выделяет из реализации $\varphi(t)$ сигнал частотного управления $u_y(t)$:

$$u_y(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t) + \sin \varphi(t - \tau_y) - \gamma_y. \quad (2)$$

Очевидно, что при любых значениях $\gamma_y = \gamma_x = \gamma$, $\tau_y = \tau_x = \tau$ сигналы $u_x(t)$ и $u_y(t)$ совпадают; при этом все динамические процессы в подсистемах x и y идентичны. В частности, при значениях τ и γ , соответствующих режиму хаотической модуляции сигнала ПГ, имеет место синхронный хаотический отклик.

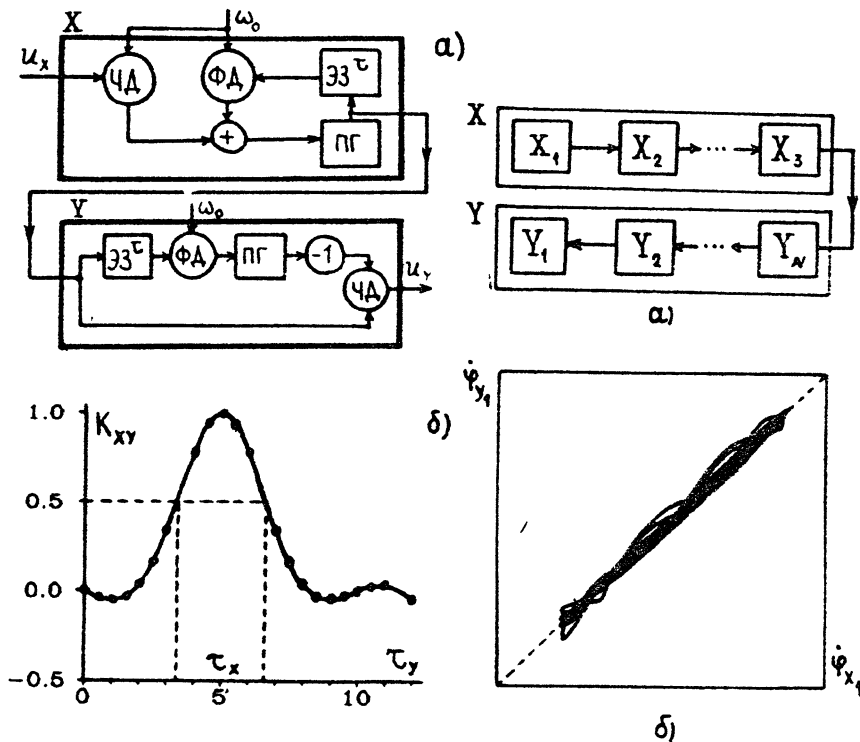


Рис. 1.

Рис. 2.

Рассматривается соответствие отклика подсистемы y на хаотическое воздействие со стороны подсистемы x при расстройке параметров. В качестве характеристики синхронности берется коэффициент корреляции k_{xy} мгновенных частот ПГ подсистем при $u_x(t) \equiv 0$: $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ и $\sin \varphi(t - \tau_y) - \gamma_y$, где $\varphi(t)$ - хаотический детерминированный процесс, удовлетворяющий (1). Поскольку k_{xy} не зависит от γ_y , будем далее считать $\gamma_y = \gamma_x = \gamma$. Зависимость k_{xy} от τ_y , при $\gamma = 0.1$, $\tau_x = 5$, полученная численно, приведена на рис.16. Ширина главного максимума $k_{xy}(\tau_y)$ на уровне 0.5 при этом равна 1.2, что составляет 24% от значения τ_x . Величина сигнала рассогласования $u_y(t)$ при $u_x(t) \equiv 0$ возрастает непрерывно с ростом $|\tau_y - \tau_x|$ то есть расстройка параметров приводит к "мягкому" нарушению синхронизма подсистем x и y .

Невысокая чувствительность рассматриваемой системы xy к расстройке параметров подсистем в режиме синхронного отклика позволяет предположить возможность синхронизации конечных ансамблей неидентичных СФС рассмотренного типа, соединенных в цепочки с одно-

направленными связями, подобные изображенной на рис.2а. При этом может быть обеспечена частичная синхронизация подсистем x_i и y_i , $i = 1, 2, \dots, N$. В качестве иллюстрации рассмотрена система в виде неоднородной цепочки $x_1 x_2 x_3 y_3 y_2 y_1$, состоящей из подсистем x_i и y_i , описываемых уравнениями вида (1) и (2) соответственно. При значениях параметров $\gamma_{x_i} = \gamma_{y_i} = 0.1$, $\tau_{x_i} = 5$, $i = 1, 2, 3$, $\tau_{y_3} = 5.05$, $\tau_{y_2} = 4.97$, $\tau_{y_1} = 5$ в численном эксперименте установлена синхронизация симметричных относительно середины цепочки подсистем с коэффициентом корреляции не ниже 0.95. При этом проекции фазовой траектории системы xy на плоскостях $(\varphi_{x_i}, \varphi_{y_i})$, $i = 1, 2, 3$ расположены в окрестностях линий φ_{x_i} , φ_{y_i} , $i = 1, 2, 3$, одна из которых ($i = 1$) представлена на рис.2б.

Установленные в данной работе для простейших фазовых систем свойства синхронного хаотического отклика согласуются с результатами исследования других моделей [5,6]. Полученные в данной работе результаты носят скорее иллюстративный, чем прикладной характер, но вместе с тем, обозначают актуальные направления дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований /проект 93-02-15424/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т.39. С.561.
2. Афраймович В.С., Веричев Н.Н. РАбинович М.И. // Изв.вузов. Радиофизика. 1986. Т.29. N 9. С.1050.
3. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Е., Сафонова М.А. // Радиотехника и электроника. 1991. Т.36. N 2. С.338.
4. Rulkov N.F., Volkovskii A.R., Rodriguez-Lozano A., Del Rio E., Velarde M.G. // Int. J. Bifurcation and Chaos. V.2. N 3. P.669.
5. Carrol T.L., Pecora L.M. // SPIE Visual Information Processing. 1992. V.1705. P.22.
6. de Sousa Vieira M., Khoury P., Lichtenberg A.J., Lieberman M.A., Wonchoła W. // Int. J. Bifurcation and Chaos. V.2. N 3. P.645.
7. Волковский А.Р., Рутьков Н.Ф. // Письма в ЖТФ. 1993. Т.19. N 3. С.71.
8. Бельский Ю.Л., Дмитриев А.С. // Радиотехника и электроника. 1993. Т.38. N 7. С.1310.
9. Ueda Y., Ohta H. // Chaos and Statistical Methods, Pros. 6-th Kyoto Summer Institute, Sept. 11-12, 1983. - Tokyo: Springer-Verlag, 1984. P.161.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
30 сентября 1993 г.

SYNCHRONOUS RESPONSE IN COUPLED PHASE SYSTEMS*A.K.Kozlov*

Some intrinsic features of chaotic drive response are pointed out for coupled first order delayed phase and frequency controlled systems, namely: a) possibility of synchronous response for arbitrary values of driving subsystem parameters in case of accurate tuned response subsystem; b) comparatively low sensitivity of phenomenon to detuning of subsystems parameters; c) nonstiff character of synchronization destroying. Possibility of synchronous response in nonuniform chain comprising finite number of phase systems is illustrated numerically.

УДК 519.673 : 621.396.66

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ КАСКАДНОГО СОЕДИНЕНИЯ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

М.В.Корзинова, В.В.Матросов

Изучаются динамические режимы системы двух каскадно соединенных взаимосвязанных автогенераторов, имеющих локальные фазовые цепи управления. Основное внимание уделяется анализу режима синхронизации.

Чрезвычайный интерес к пространственно-временным задачам, наблюдаемый сегодня в различных областях науки, стимулирован проблемами изучения турбулентности, биологических возбудимых сред и рядом других [1], среди которых значительное место занимают проблемы радиофизики, радиотехники и радиосвязи. К их числу относятся проблемы изучения пространственно-дискретных сред, образованных связанными между собой автогенераторами [2], в том числе, имеющими локальные фазовые цепи управления, т.е. системами фазовой синхронизации [3]. Обратимся к простейшей модели такой среды – цепочке систем фазовой синхронизации в случае их последовательного соединения. Идея последовательного (каскадного) соединения нескольких систем фазовой синхронизации в цепочку представляется достаточно привлекательной с точки зрения появляющихся при этом в синхронном режиме возможностей существенного улучшения фильтрующих свойств [4]. Естественно, что для обеспечения устойчивости, особый интерес представляет анализ динамических свойств такого соединения. Однако в силу сложности нелинейной математической модели [3], исследование коллективной динамики каскадно-соединенных фазовых систем в литературе практически отсутствует. В настоящей работе приводятся некоторые результаты компьютерного моделирования нелинейной динамики простейшего ансамбля из двух одинаковых каскадно-соединенных фазовых систем. Этот случай интересен как случай вырожденной цепочки минимальной длины, однако он представляет и самостоятельный интерес [5].

Математической моделью рассматриваемого каскада является система [3,6,7]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= \gamma_1 - \sin \psi_1 - \varkappa \sin \psi_2, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= (\gamma_2 - \gamma_1) + \sin \psi_1 - (1 - \varkappa) \sin \psi_2.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $\psi_1 = \varphi_{r1} - \varphi_0$ – текущая разность фаз первого генератора φ_{r1} и опорного сигнала φ_0 , $\psi_2 = \varphi_{r1} - \varphi_{r2}$ – текущая разность фаз первого φ_{r1} и второго φ_{r2} генераторов, γ_1 и γ_2 – начальные отклонения частот первого

и второго генераторов от опорной частоты, \varkappa – коэффициент усиления или ослабления в дополнительной цепи связи между генераторами. Кроме основной связи между генераторами, осуществляющейся в силу каскадного типа соединения только в прямом направлении (от первого ко второму), в приведенной модели учтена дополнительная связь, реализующая передачу сигнала в обратном направлении: с выхода фазового дискриминатора в кольце управления второго генератора на управляющий элемент первого генератора. Для простоты рассмотрим далее случай одинаковых начальных расстроек по частоте $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Система (1) в силу периодичности ее правых частей по переменным ψ_1 и ψ_2 с периодом 2π является динамической системой на торе. В силу инвариантности системы (1) относительно замены $\bar{\gamma} = -\gamma$, $\bar{\psi}_1 = -\psi_1$, $\bar{\psi}_2 = -\psi_2$ достаточно рассмотреть только $\gamma > 0$.

Для значений параметров \varkappa, γ , определяемых выражением

$$0 < \gamma < \min \left(\frac{1}{1 - \varkappa}, \frac{-1}{1 - \varkappa}, 1 \right), \quad (2)$$

система (1) имеет на поверхности тора четыре состояния равновесия:

$$O_1(\psi_1^*, \psi_2^*), \quad O_2(\psi_1^*, \pi - \psi_2^*), \quad O_3(\pi - \psi_1^*, \pi - \psi_2^*), \quad O_4(\pi - \psi_1^*, \psi_2^*), \quad (3)$$

где величины ψ_1^* и ψ_2^* определяются равенствами

$$\psi_1^* = \arcsin((1 - \varkappa)\gamma), \quad \psi_2^* = \arcsin(\gamma). \quad (4)$$

Исследуя характер состояний равновесия по корням соответствующих характеристических уравнений, устанавливаем, что состояния равновесия O_2 и O_4 являются седлами, а состояния равновесия O_1 и O_3 – узлами или фокусами, устойчивость которых определяется знаком величины $\sigma = \cos \psi_1^* + (1 - \varkappa) \cos \psi_2^*$. Если $\sigma < 0$ ($\sigma > 0$), то O_3 – устойчивый (неустойчивый) фокус или узел, а O_1 – соответственно неустойчивый (устойчивый) фокус или узел.

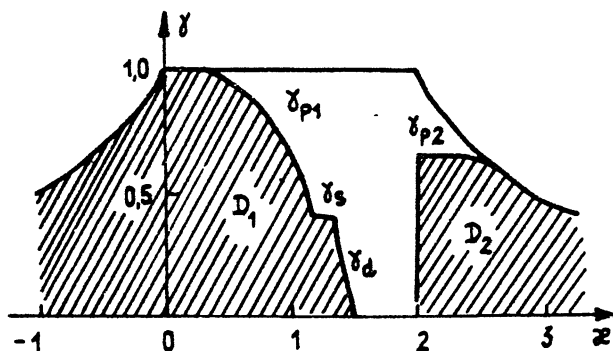


Рис. 1:

Устойчивые состояния равновесия O_1 и O_3 определяют синхронные режимы работы каскадной системы, когда оба генератора синхрони-

этированы опорным сигналом. Проанализируем условия гарантированного вхождения каскадной системы в синхронизм, т.е. определим параметры системы, для которых при любых начальных условиях реализуется режим синхронизации. Для этого обратимся к компьютерному моделированию динамики системы (1). В результате этого моделирования получен параметрический портрет (\varkappa, γ) , приведенный на рис.1. На этом портрете выделены штриховые области синхронизации $D_1 : \{0 < \gamma < \min(\frac{1}{1-\varkappa}\gamma_{p1}, \gamma_s, \gamma_d)\}$ и $D_2 : \{0 < \gamma < \min(\frac{-1}{1-\varkappa}\gamma_{p2}), \varkappa > 2\}$. Фазовые портреты системы (1), соответствующие областям параметров D_1 и D_2 , представлены на рис.2а и 2б соответственно.

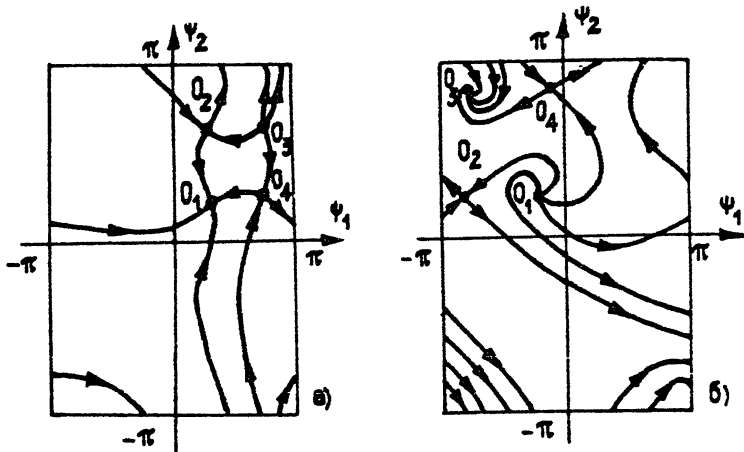


Рис. 2:

В области D_1 синхронный режим каскадной системы определяет состояние равновесия $O_1(\psi_1^*, \psi_2^*)$. Заметим, что при $\varkappa = 0$ в синхронном режиме между сигналом первого генератора и опорным сигналом устанавливается чекая разность фаз ($\arcsin \gamma$), в то время как между сигналом второго генератора и опорным сигналом устанавливается нулевая разность фаз. При $\varkappa \neq 0$ несмотря на положительность γ , остаточная разность фаз генераторов по отношению к опорному сигналу может устанавливаться как положительной, так и отрицательной.

При выходе из области D_1 через границу $\gamma = \frac{1}{1-\varkappa}$ или γ_d в фазовом пространстве системы (1) в результате бифуркаций петли сепаратрис седлоузла или двойного предельного цикла рождается устойчивый предельный цикл с числом вращения $\mu = 0$ [8] (цикл охватывает тор в направлении ψ_1). Этот цикл определяет автоколебательный режим работы каскадной системы, при котором текущая разность фаз ψ_1 первого генератора и опорного сигнала непрерывно нарастает, а разность фаз ψ_2 первого и второго генераторов колеблется около некоторого среднего значения. Следовательно, здесь нет синхронизации генераторов по отношению к опорному сигналу, однако, между генераторами имеет место взаимная квазисинхронизация (синхронизация с некоторой, колеблющейся во времени около нулевого среднего значения, частотной ошибкой).

При выходе из области D_1 через границу γ_{p1} в результате бифуркации петли сепаратрис седла O_2 на торе рождается предельный цикл с числом вращения $\mu = \infty$ (цикл охватывает тор в направлении ψ_2). Этот цикл определяет автоколебательный режим работы каскадной системы, характеризующийся тем, что разность фаз ψ_2 непрерывно нарастает, разность фаз ψ_1 колеблется возле некоторого среднего значения. Следовательно, первый генератор находится в режиме квазисинхронизма по отношению к опорному сигналу (частотная ошибка меняется около нулевого среднего значения), а второй генератор работает в асинхронном режиме.

Граница γ_s соответствует бифуркации совпадения сепаратрис седел O_2 и O_4 , не охватывающих тор. При пересечении этой границы в фазовом пространстве системы (1) предельные циклы не возникают. Однако, вблизи этой кривой (выше кривой γ_s) расположены области параметров, для которых на фазовом торе существуют устойчивые вращательные циклы, поэтому кривая γ_s взята в качестве условной границы области D_1 . Устойчивые вращательные предельные циклы, возникающие в окрестности кривой γ_s , имеют число вращения $\mu = p/q$ и определяют автоколебательный режим каскадной системы, при котором разности фаз ψ_1 и ψ_2 непрерывно нарастают, а степень нарастания определяется числом вращения μ . Эти режимы являются асинхронными.

В области D_2 синхронный режим определяется состоянием равновесия $O_3(\pi - \psi_1^*, \pi - \psi_2^*)$. Здесь остаточная ошибка по фазе в синхронном режиме (по сравнению с синхронным режимом в D_1) существенно определяется величиной сильной дополнительной связи $\varepsilon > 2$. При выходе из D_2 через границы γ_{p2} и $\gamma = \frac{-1}{1-\varepsilon}$ синхронизация нарушается и возникают режимы, аналогичные режимам, описанным выше (при выходе из области D_1 через границы γ_d и $\gamma = \frac{1}{1-\varepsilon}$). Граница $\varepsilon = 2$ области D_2 соответствует смене устойчивости состояний равновесия O_1 и O_3 и рождению (около этих состояний) устойчивого колебательного предельного цикла, определяющего такой автоколебательный режим, при котором разности фаз ψ_1 и ψ_2 колеблются около некоторых средних значений.

Таким образом, полученные в результате моделирования данные свидетельствуют о том, что каскадное соединение двух фазовых систем (с предельно простой динамикой парциальных систем) в единый ансамбль с введением дополнительной связи по цепям управления приводит к существенному усложнению динамики, характеризующемуся наличием двух различающихся между собой синхронных режимов и достаточно большим разнообразием путей нарушения синхронизации. Переход с ростом связи ε из одной области синхронизации D_1 в другую D_2 сопровождается большим количеством бифуркаций сепаратрис седел и двойных предельных циклов. При этом переходе отмечена возможность существования достаточно малых областей параметров, соответствующих режиму синхронизации, однако, в основном, при переходных значениях параметров отмечены мультистабильные режимы работы каскадной системы, изучение которых может быть предметом отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. – В кн.: Физика XX века: развитие и перспективы. – М.: Наука, 1984. С.219-280.
2. Дворников А.А., Уткин Г.М. Фазированные автогенераторы радиопередающих устройств. – М.: Энергия, 1980. – 176 с.
3. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации / Под ред. Гапонова-Грехова А.В., Рабиновича М.И. – Горький: ИПФ АН СССР, 1989. – 256 с.
4. Капранов В.М. // Динамика систем. 1976. N 11. С.76-85.
5. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении: Пер. с англ. / Под ред. Бакаева Ю.Н., Капранова М.В. – М.: Сов.радио, 1978. – 600 с.
6. Корзинова М.В., Матросов В.Б. // Материалы науч. конф. по радиофизике. – Нижний Новгород: ННГУ, 1993. С.6.
7. Корзинова М.В., Матросов В.Б. // Тез. докл. Всес. науч.-техн. конф. "Повышение качества и эффективности устройств синхронизации в системах связи". Ярославль, 1993. С.50.
8. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. – М.: Наука, 1967. – 367 с.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
12 октября 1993 г.

**MODELLING OF NONLINEAR DYNAMICS IN CONSEQUENTLY
COUPLED PHASE SYSTEMS**

M. V. Korzinova, V. V. Matrosov

Dynamical regimes in two consequently coupled generators with local phase control feedback loop are studied. A significant attention is payed to the analysis of synchronous regimes.

УДК 551.521.3:535.36

ЭВОЛЮЦИЯ СВЕТОВОГО ПУЧКА ПРИ НАКЛОННОМ ОСВЕЩЕНИИ МУТНОЙ СРЕДЫ

А.В.Аустов, В.Г.Гавриленко

Рассмотрены пространственное и угловое распределения интенсивности излучения в поглощающей анизотропно рассеивающей среде при наклонном освещении границы ограниченным пучком. Проведено сравнение аналитического решения уравнения переноса в малоугловом приближении с численным моделированием методом Монте-Карло процесса распространения света в морской воде. Обращено внимание на существование области глубин с аномально быстрым ростом дисперсии пространственного и углового распределения интенсивности, вызванным наличием поглощения и асимметрией задачи.

В ряде практически важных случаев (при описании световых полей в океане, исследовании особенностей распространения ИК-излучения в облаках, электромагнитных волн в столкновительной магнитоактивной плазме со случайными неоднородностями) среды, в которых распространяется излучение, имеют аналогичные оптические свойства, а именно, являются сильно поглощающими с анизотропной индикатрисой рассеяния (так называемые мутные среды). Данные особенности приводят к тому, что при освещении границы подобной среды в направлении, близком к нормали, излучение с ростом глубины погружения остается локализованным в малом телесном угле вблизи угла преломления и форма его углового распределения практически не изменяется. Это позволило в [1] предложить довольно мощный и эффективный способ решения подобных задач, названный автомодельным приближением. Однако, фактическое распространение данного метода на случай наклонного освещения под значительными углами (с углом преломления, большим 30°) привело авторов [2, 3] к потере некоторых "аномальных" эффектов, отмеченных в [4-7].

Ниже, в развитие работ [6, 7], приведено сравнение аналитических результатов, полученных по методике [4, 7], с результатами численного моделирования методом Монте-Карло.

Рассмотрим полубесконечную среду, верхняя плоская граница которой освещена пространственно ограниченным источником с узкой диаграммой направленности. Расположим систему декартовых координат так, что ось Z совпадает с направлением внутренней нормали к границе. Ось X лежит в плоскости преломления. ϑ – угол преломления. Для отсчета угловых переменных (направляющих косинусов) введем ортогональный базис $\vec{\mu}_x^0, \vec{\mu}_y^0, \vec{S}^0$. Вектор \vec{S}^0 направлен вдоль оси преломленного пучка, $\vec{\mu}_y^0$ совпадает с осью Y .

Распространение света в рассматриваемой нами среде может быть

описано уравнением переноса [8]

$$[\vec{S}\nabla + \sigma + \kappa] I(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{\sigma}{4\pi} \int I(\vec{r}, \vec{s}') x(\vec{s}, \vec{s}') d\omega' \quad (1)$$

где $I(\vec{r}, \vec{s})$ – лучевая интенсивность излучения в точке с радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$ в направлении единичного вектора $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$,

$$\begin{aligned} s_x &= \mu_x \cos \vartheta + \sqrt{1 - \mu_x^2 - \mu_y^2} \sin \vartheta, \\ s_y &= \mu_y, \\ s_z &= \sqrt{1 - \mu_x^2 - \mu_y^2} \cos \vartheta - \mu_x \sin \vartheta, \end{aligned}$$

σ и κ – соответственно коэффициенты рассеяния и поглощения; $x(\vec{s}, \vec{s}')$ – индикатриса рассеяния, удовлетворяющая условию нормировки $\int x(\vec{s}, \vec{s}') d\omega' = 4\pi$, где интегрирование, как и в (1), проводится по направлениям \vec{s}' в пределах полного телесного угла.

Пусть пространственно-угловое распределение интенсивности преломленного пучка в плоскости $z = 0$ описывается формулой:

$$I(x, y, 0, \vec{\mu}) = \frac{I_0}{(2\pi)^2 x_0 y_0 w_x w_y} \exp \left\{ -\frac{\mu_x^2}{2w_x^2} - \frac{\mu_y^2}{2w_y^2} - \frac{x^2}{2x_0^2} - \frac{y^2}{2y_0^2} \right\}. \quad (2)$$

Уравнение (1) с граничным условием (2) может быть решено по методике [7] при следующих ограничениях:

$$\sigma z \gg 1, \quad \sigma \ll \kappa, \quad (3)$$

$$\langle \mu^2 \rangle \ll \langle \mu^2 \rangle_z \ll 1,$$

где $\langle \mu^2 \rangle$ – средний квадрат угла однократного рассеяния, $\langle \mu^2 \rangle_z$ – средний квадрат угла многократного рассеяния на глубине z .

Приведем некоторые следствия полученного решения. Если проинтегрировать выражение для лучевой интенсивности по переменным x, y , то получим угловое распределение яркости, усредненное по сечению пучка плоскостью $z = \text{const}$:

$$G(z, \vec{\mu}) = \iint_{-\infty}^{\infty} I(\vec{r}, \vec{\mu}) dx dy = \frac{I_0 S}{2\pi \Omega_x \Omega_y} \exp \left\{ -\frac{(\mu_x + \nu)^2}{2\Omega_x^2} - \frac{\mu_y^2}{2\Omega_y^2} \right\}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} S &= \exp \left\{ -\frac{(\sigma + \kappa)z}{\cos \vartheta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa z \sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} w_x \right)^2 + \Phi[1] \right\}, \\ \nu &= \frac{\kappa z \sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} w_x^2 + \Phi[\mu_x], \\ \Omega_x^2 &= w_x^2 + \Phi[\mu_x^2], \quad \Omega_y^2 = w_y^2 + \Phi[\mu_y^2], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Phi[K] = \frac{\sigma}{4\pi \cos \vartheta} \int_0^z \iint_{-\infty}^{\infty} K x(\vec{\mu}) \exp \left\{ \frac{\kappa \xi \sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \mu_x \right\} d\xi d^2 \vec{\mu}, \quad (6)$$

Φ – функционал, зависящий от $K = K(\vec{\mu}, \xi)$

Аналогично, интегрируя лучевую интенсивность $I(\vec{r}, \vec{\mu})$ по угловым переменным $\vec{\mu}$, получим выражение для пространственного распределения интенсивности излучения на глубине z :

$$E(\vec{r}) = \frac{I_0 S}{2\pi \delta_x \delta_y} \exp \left\{ -\frac{(x-d)^2}{2\delta_x^2} - \frac{y^2}{2\delta_y^2} \right\}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} d &= z \operatorname{tg} \vartheta - \alpha \sin \vartheta \left(\frac{z w_x}{\cos^2 \vartheta} \right)^2 - \Phi \left[\frac{\xi \mu_x}{\cos^2 \vartheta} \right], \\ \delta_x^2 &= x_0^2 + \left(\frac{z w_x}{\cos^2 \vartheta} \right)^2 + \Phi \left[\left(\frac{\xi \mu_x}{\cos^2 \vartheta} \right)^2 \right], \\ \delta_y^2 &= y_0^2 + \left(\frac{z w_y}{\cos \vartheta} \right)^2 + \Phi \left[\left(\frac{\xi \mu_y}{\cos \vartheta} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Результат (4) совпадает с угловой диаграммой яркости излучения на глубине z в случае освещения границы бесконечно широким пучком [4]. Из [7] следует, что точно такое же угловое распределение интенсивности наблюдается на оси пучка (в точке с координатами $x = d$, $y = 0$) на глубине z при следующих ограничениях на его начальную ширину:

$$\left(\frac{x_0 \cos^2 \vartheta}{z} \right)^2 \gg \Omega_x^2, \quad \left(\frac{y_0 \cos^2 \vartheta}{z} \right)^2 \gg \Omega_y^2. \quad (9)$$

В соответствии с результатами [1–5], в распределениях (4), (7) присутствуют смещения максимумов в сторону направления нормали. Дисперсии обоих распределений имеют слагаемые (6), экспоненциально зависящие от αz . Мы хотим подчеркнуть, что дисперсии описанных распределений интенсивности на некоторых глубинах в поглощающей среде превышают соответствующие параметры в непоглощающей среде с теми же рассеивающими свойствами. Оба эффекта (смещения максимумов и быстрый рост дисперсий) обусловлены наличием поглощения в анизотропно рассеивающей среде и асимметрией задачи.

Наложение условий (3) ограничивает область применимости результатов относительно малыми глубинами

$$\sqrt{\frac{\alpha z \sigma z (\mu^2)}{2 \cos^2 \vartheta}} < 1, \quad (10)$$

на которых только начинается активная перестройка тела яркости пучка, связанная с его отклонением от первоначального направления. Кроме того, соотношение $\sigma \ll \alpha$ реально выполняется сравнительно редко (например, этому удовлетворяют лишь особо чистые океанические воды).

В связи с этим, нами были исследованы угловое и пространственное распределения интенсивности излучения в мутной среде на глубине σz с помощью численного моделирования методом Монте-Карло. Для согласования результатов с полученными ранее среда освещалась точечным источником с угловой расходимостью менее 4° и при этом на заданной глубине проводилось интегрирование интенсивности по координатам x, y для получения углового распределения и по всем направлениям с

положительной составляющей вдоль оси Z – для пространственного распределения. Моделировалось освещение с углом преломления оси пучка $\vartheta = 0^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 45^\circ$. В вычислениях использовалась степенная индикатриса, описывающая рассеяние света в морской воде [8, 9], пропорциональная $\gamma^{-2,3}$ в диапазоне углов $1^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ и постоянная вне этого интервала. Получены результаты для различных вероятностей выживания фотона в элементарном акте рассеяния $\Lambda = \frac{\sigma}{\sigma + \alpha} = 1, 0.6, 0.4, 0.2$. Численное моделирование полностью подтвердило наличие вышеописанных эффектов. Более того, в интервале глубин, на которых происходит переход неравенства (10) в равенство, наблюдалось значительное отклонение форм углового и пространственного распределений от гауссовых. Характерный вид полученных зависимостей дисперсий соответствующих распределений от глубины показан на рис.1 и 2.

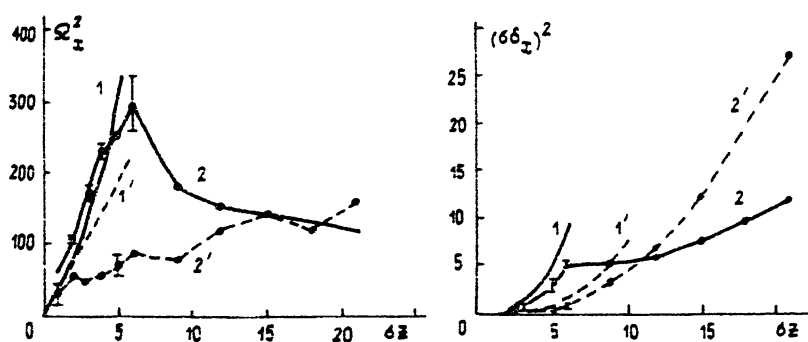


Рис 1,2.

Кривые 2, 2' – результат моделирования методом Монте-Карло, 2 – $\Lambda = 0.4$, 2' – $\Lambda = 1$. Исследование показало, что для $\vartheta \geq 30^\circ$ и $\Lambda < 0.6$ дисперсия углового распределения интенсивности на некоторых глубинах может превышать свое асимптотическое значение. Для сравнения, на рисунках 1 и 2 отображены результаты, полученные по формулам (5), (6), (8) при $x_0 = w_x = 0$ – кривые 1 ($\Lambda = 0.4$) и 1' ($\Lambda = 1$) при $\sigma = 0.02 \text{ м}^{-1}$. В (6) подставлена гауссова индикатриса с $\langle \gamma^2 \rangle = 0.00807$. Все графики соответствуют $\vartheta = 45^\circ$.

Проведенное сравнение численных и аналитических результатов подтверждает возможность наблюдения "аномальных" эффектов, связанных с поглощением светового излучения в морской воде, облаках и других анизотропно рассеивающих средах. Аналогичные эффекты, вызванные асимметричным затуханием рассеянных угловых гармоник, возникают и при просвечивании столкновительной магнитоактивной плазмы под углом к внешнему магнитному полю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долин Л.С. // ДАН СССР. 1981. Т.260. N 6. С.1344.
2. Зега Э.П., Полонский И.Н., Чайковская Л.И. // Изв. АН СССР.

- Сер.ФАО. 1987. Т.23. N 5. С.486.
3. Ремизович В.С., Шехмаметьев Ш.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33. N 2. С.202.
 4. Гавриленко В.Г., Петров С.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т.28. N 11. С.1408.
 5. Гавриленко В.Г., Петров С.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т.30. N 5. С.670.
 6. Аистов А.В., Гавриленко В.Г., Петров С.С. // Изв. АН СССР. Сер.ФАО. 1992. Т.27. N 3. С.297.
 7. Аистов А.В., Гавриленко В.Г., Петров С.С. // Изв. АН СССР. Сер.ФАО. 1992. Т.28. N 2. С.166.
 8. Долин Л.С., Левин И.М. Справочник по теории подводного видения. - Л.: Гидрометеониздат, 1991.
 9. Рогозкин Д.Б. // Изв. АН СССР. Сер.ФАО. 1987. Т.23. N 4. С.366.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
14 октября 1992 г.

EVOLUTION OF LIGHT BEAM AT SLANT ILLUMINATION OF ABSORBING TURBID MEDIUM

A. V. Aistov, V. G. Gavrilenko

The problem of discovering of angular and spatial radiation intensity distributions in strongly absorbing anisotroply scattering medium in the case of slant illumination of the boundary by limited beam is considered. The comparison of solution of transfer equation in small angle approximation and Monte Carlo modeling for light propagation in sea water is carried out. It is emphasized that there is a region of depths where the dispersions of both distributions increase anomalously fast because of the absorption and asymmetry of the problem are present.

УДК 621.37/39:534.001

ДИНАМИКА ЛУЧЕЙ ЗА НАБОРОМ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ ЭКРАНОВ

Л.М.Ерухимов, Е.Ю.Рындук, В.В.Чугурич

В работе рассмотрена динамика лучей при прохождении ими регулярно-неоднородной среды, являющейся набором одинаковых, глубоких, синусоидальных фазовых экранов. Для анализа процесса распространения применена техника построения дискретных отображений. Найден характерный параметр задачи, определяющий переход от регулярных (режим "нелинейного осциллятора" и режим "захвата лучей") к стохастическим режимам поведения луча. Диффузионное (стохастическое) распространение луча в данной среде исследовано, по аналогии со случайным блужданием броуновской частицы, одним из методов фрактального анализа, основывающегося на нахождении скейлинговых характеристики данного процесса (связанных с фрактальной размерностью).

1. В статье обсуждается процесс зарождения хаоса и метод его исследования при распространении лучей в регулярно-неоднородной среде фазовых экранов. Возможность появления сложного квази-шумового поведения поля за регулярным "глубоким" фазовым экраном в дальней зоне была показана в [1]. Предлагаемая постановка задачи может быть интересна при исследовании регулярных структур в среде распространения (в частности в ионосфере и космической плазме, где представление среды в виде фазового экрана или серии фазовых экранов широко используется). Здесь мы рассматриваем лучевое приближение задачи, что позволяет применить технику построения дискретных отображений [2] для исследования процесса распространения луча через заданную среду, моделируя ее в виде набора синусоидальных фазовых экранов [3].

Нахождение различных режимов поведения луча, характерных параметров, определяющих переход от порядка к хаосу является целью этой работы. Кроме того здесь проводится аналогия между стохастическим распространением луча через заданную регулярную среду и случайным блужданием броуновской частицы. Для этого сравниваются скейлинговые характеристики этих двух процессов, то есть используется один из методов фрактального анализа.

2. Рассмотрим среду, составленную из одномерных одинаковых фазовых экранов (рис.1), модулирующих по синусоидальному закону падающую волну:

$$E \sim e^{i\varphi}, \quad \varphi = \varphi_0 \sin(bz).$$

Будем считать, что среда между экранами однородна и луч распространяется в ней прямолинейно, а каждый экран меняет только угол распространения луча, который можно найти из условия сохранения гамильтониана

$$H = 1/2(p^2 - n^2),$$

где $\vec{p} = \nabla\varphi$ – импульс луча до и после экрана. Так, если на n -ый экран луч попадает под углом θ_n , то выражение для угла преломления луча θ_{n+1} на n -ом экране можно представить в виде:

$$\sin \theta_{n+1} = \sin \theta_n - 1/k_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}.$$

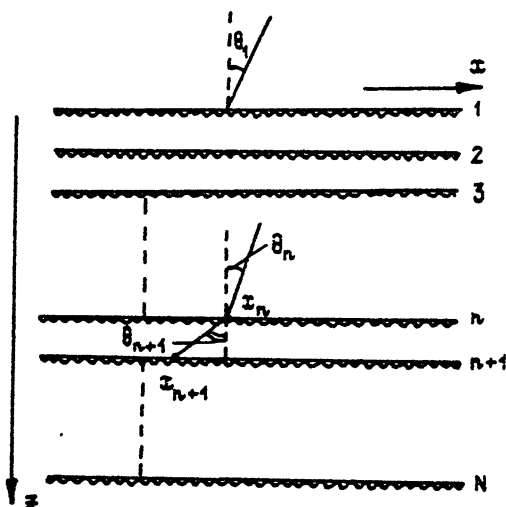


Рис. 1:

Характеризуя положение луча двумя координатами (X, ϑ) получаем систему дискретных отображений, полностью описывающую процесс распространения луча:

$$\vartheta_{n+1} = \arcsin(\sin \vartheta_n - A \cos B\xi_n), \quad (1)$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \operatorname{tg} \vartheta_{n+1}.$$

где $\xi_n = x_n/L$, $L = |z_{n+1} - z_n|$, $A = \varphi_0 b/k_0$, $B = bL$. В случае малых углов мы имеем хорошо изученную систему (так называемая система стандартных отображений цилиндра):

$$\theta' = \theta - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \xi' = \xi + \theta', \quad (2)$$

в которой θ является медленно-меняющейся функцией, а ξ – периодической функцией с периодом 2π . Используя критерий неустойчивости по Ляпунову (см., например, [4]) нетрудно найти параметр, который определяет переход от регулярных к хаотическим режимам для отображения (2). В данном случае хаос возможен при

$$D = AB = \frac{2\pi\lambda L\varphi_0}{l^2} \geq 1,$$

где $l = 2\pi/b$. Этот параметр, который грубо определяет границу "регулярность - стохастичность" и для системы (1) характеризует совместное действие параметров A (изменения угла при прохождении экрана) и B (периода модуляции фазы на экране, нормированного на величину расстояния между экранами). Заметим, что в волновой теории распространения волн параметр D является волновым параметром, характеризующим границу между геометрико-оптическим ($D \ll 1$) приближением и дифракцией Фраунгофера за фазовым экраном (см., например, [3]).

Кратко опишем результаты численного анализа системы (1). Существуют несколько качественно-различных режима поведения луча в такой системе, соответствующих различным порядкам величины характерного параметра D . Реально, однако менялся только параметр B , а параметр A оставался малым, что соответствует малому изменению угла преломления на экране (см. первое уравнение отображения 1).

а) Режим нелинейного осциллятора ($D \ll 1$).

В этом случае расстояние между экранами много меньше периода модуляции фазы на экране и можно ввести непрерывную переменную t вместо дискретной n . Тогда система (1) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение вида:

$$\ddot{x}_t + \sin x / \cos^2 \theta = 0.$$

В случае малых углов θ это уравнение, описывающее движение нелинейного осциллятора.

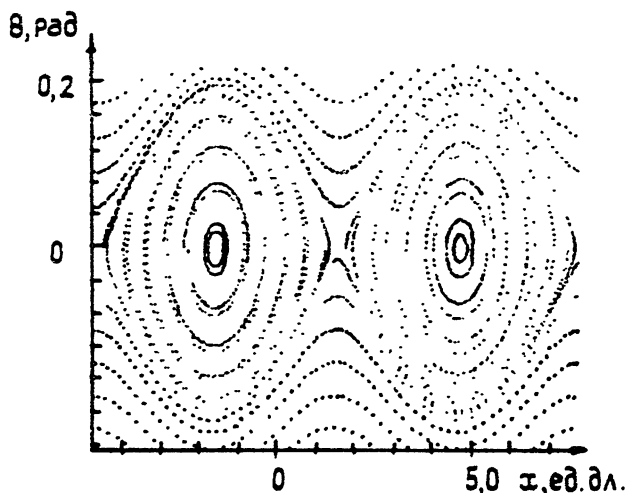


Рис. 2: Фазовый портрет движения луча. $D \ll 1$; $A = 0.01$; $B = 1$; $N = 300$.

На рис.2 показано движение луча при разных начальных условиях в плоскости (x, θ) , где очевидно сходство с фазовым портретом нелинейного осциллятора. На рис.3 представлена зависимость величины поперечного отклонения луча на последнем экране x_N от начального угла падения. Видно, что при $\theta < \theta^*$ луч движется по замкнутой траектории в фазо-

вом пространстве, а при $\vartheta > \vartheta^*$ переходит через сепаратрису на незамкнутые траектории. Луч, соответствующий углу падения ϑ^* является выделенным и распространяется по наикратчайшему возможному пути – практически параллельно оси z .

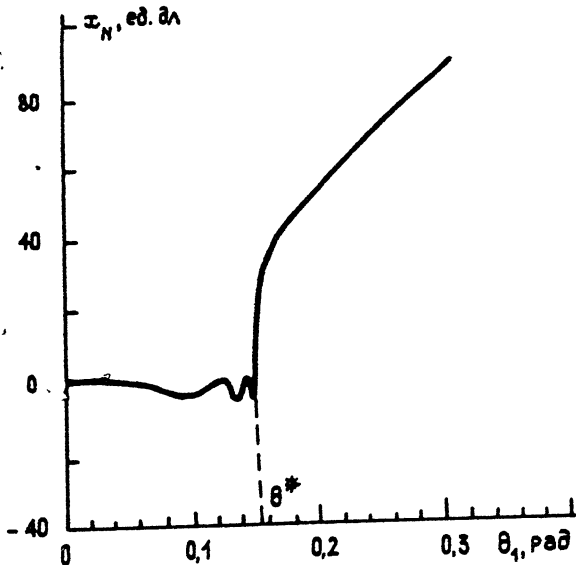


Рис. 3: Зависимость отклонения луча на последнем экране X_N от угла падения θ_1 . $D \ll 1$; $A = 0.01$; $B = 1$; $N = 300$.

б) Режим захвата лучей ($D \leq 10$).

Фазовый портрет в этом случае подобен фазовому портрету, изображенному на рис.2, но мы выделили этот режим, так как здесь появляется новый эффект в зависимости X_N от ϑ_1 – эффект захвата лучей (рис.4а). Лучи из интервала начальных углов попадают в одну точку на последнем экране (ступенька на рис.4а), то есть образуется эффективный канал, в который захватываются лучи из определенного интервала начальных углов, группируясь вокруг устойчивой траектории – прямолинейного распространения луча.

в) Режим зарождения хаоса ($D \sim 1$).

На рис.4б показан процесс образования значительных областей хаоса, в которых сколь-угодно малое изменение начальных условий приводит к сильному изменению выходных характеристик. Зарождение хаоса начинается около ступенек, которым соответствуют КАМ-острова в фазовом пространстве.

При дальнейшем увеличении параметра D происходит расширение областей стохастичности с переходом к полностью стохастическому режиму при $D \gg 1$ (рис.5а). При этом большое расстояние между экранами по сравнению с периодом фазовой модуляции и большое число экранов создают условия для возникновения динамического хаоса.

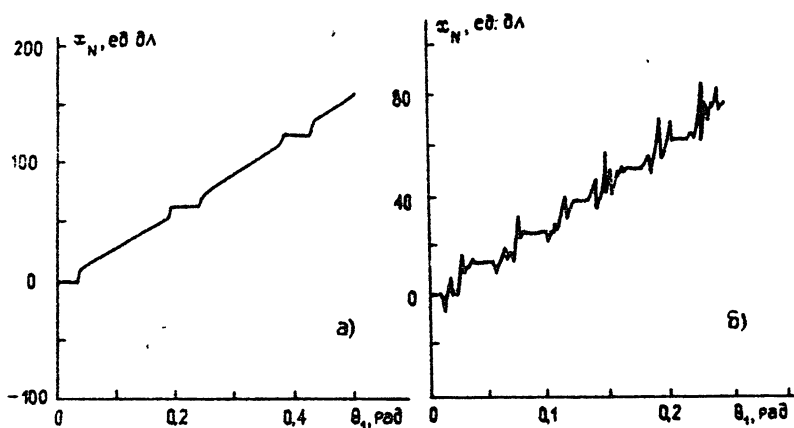


Рис. 4: а). Зависимость X_N от θ_1 , $D \leq 1$; $A = 0.01$; $B = 30$; $N = 300$.

б). Зависимость X_N от θ_1 , $D = 1$; $A = 0.01$; $B = 100$; $N = 300$.

3. На рис.5а показано движение луча от экрана к экрану при $D \gg 1$, имеющее, как видно, диффузионный характер. Сопоставим движение луча в этом режиме с блужданием броуновской частицы, используя метод, основанный на фрактальных свойствах случайных блужданий [5]. Следуя концепции Мандельброта о случайных фрактальных, будем основное понятие теории фракталов – самоподобие – трактовать в вероятностном смысле. Это позволяет для одномерного случая записать:

$$p(\hat{\xi} = b^H \xi, \hat{\tau} = b\tau) = b^{-H} p(\xi, \tau),$$

где ξ – элементарный случайный шаг броуновской частицы, τ – интервал времени между шагами, H – показатель, значение которого находится в интервале $[0, 1]$ для обобщенного броуновского движения с неизвестной функцией распределения $p(\xi, \tau)$ и равно $1/2$ для обычного броуновского движения с Гауссовской функцией распределения. Координата частицы в момент времени t , роль которой в нашем случае играет угол отклонения луча на n -ом экране, определяется суммой элементарных шагов ξ ; и зависит от периода усреднения τ :

$$X(t = n\tau) + \sum_{u=1}^t \{\xi(u) - \langle \xi \rangle_\tau\}. \quad (3)$$

Для нахождения показателя H в нашей задаче мы использовали эмпирический метод Херста, который оправдал себя при анализе рядов измерений случайных природных процессов, обладающих фрактальными свойствами. Суть экспериментов Херста заключается в том, что если случайная величина ξ измеряется в дискретные моменты времени, и ее накопившееся отклонение от среднего определяется соотношением (3), то для "фрактальных" временных рядов имеет место соотношение:

$$R/S = (\tau/a)^H. \quad (4)$$

Здесь R – разность между максимальным и минимальным отклонениями величины X :

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau),$$

а S – дисперсия на масштабе усреднения:

$$S(\tau) = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{\xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau}\}^2 \right)^{1/2}.$$

Другими словами, соотношение (4) означает, что $\log(R/S)$ от $\log(\tau)$ хорошо аппроксимируется прямой. Отметим, что показатель H связан с фрактальной локальной размерностью по покрытию $D = 2 - H$ [5].

Мы рассмотрели данные об изменении величины угла преломления луча от экрана к экрану (рис.5б) как случайный временной процесс, применяя алгоритм, рассмотренный выше. Полученные экспериментальные точки зависимости $\log(R/S)$ от $\log(\tau)$ аппроксимировались прямой по методу наименьших квадратов. Вычисление дало:

$$H = 0,5 \pm 0,03.$$

Таким образом, блуждание луча в данной среде имеет те же скейлинговые характеристики, что и движение одномерной броуновской частицы, что позволяет провести тесную аналогию между этими двумя процессами.

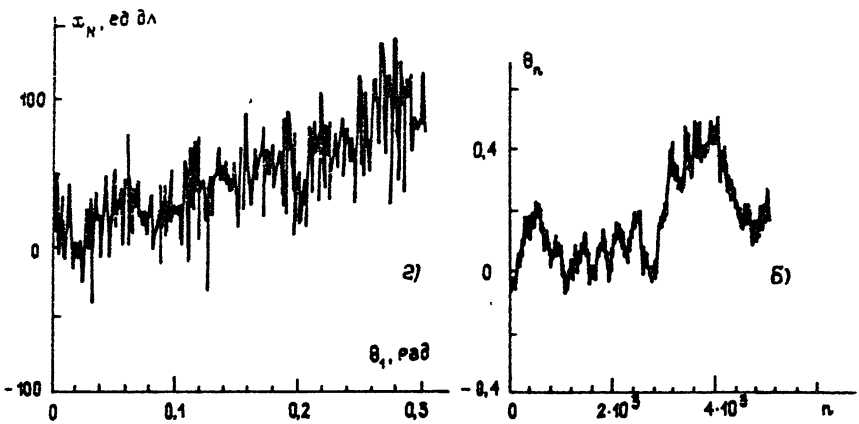


Рис. 5: а). Зависимость X_N от θ_1 . $D \gg 1$; $A = 0,01$; $B = 500$; $N = 300$.
б). Блуждание луча в диффузионном режиме. Зависимость угла распространения от номера экрана n . $D \gg 1$; $A = 0,01$; $B = 500$; $N = 5000$.

4. В заключение отметим возможности расширения модели и близкие проблемы.

а) Простейшим усложнением, соответствующим учету возможного движения среды, является введение движения экранов с постоянной или зависящей от Z скоростью вдоль оси X . В этом случае параметр стохастизации должен включать в себя соотношение скоростей движения

экранов и распространения луча между экранами $D = (V'/V)AB$. При этом стохастизация должна наступить значительно раньше и изменится положение выделенных и захваченных лучей, поскольку только движение экранов с постоянной скоростью в этом случае эквивалентно заданию начального угла падения. Математически движение экранов соответствует добавлению нелинейного слагаемого в отображение (1):

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \arcsin(\sin \theta_n - A \cos B\xi_n), \\ \xi_{n+1} = \xi_n + \operatorname{tg} \theta_{n+1} + \alpha / \cos \theta_{n+1} \end{cases}$$

где $\alpha = V'/V$, $\xi_n = x_n/L$.

б) В этой работе мы ограничились вопросом о распространении лучей, а поскольку уравнения лучевой оптики имеют прямую аналогию с уравнениями движения частиц, эта задача близка к задачам о диффузии частиц в двумерных потенциалах. С другой стороны, на наш взгляд, интересна также связь между динамикой лучей и структурой волнового поля в регулярной среде, а также в частично-детерминированной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградова М.Б. // Геомагнетизм и аэрономия. 1965. Т.5. N 1.
2. Абдуллаев С.С., Заславский Г.М. // УФН. 1990. Т.161. N 8.
3. Ерухимов Л.М., Урядов В.П. // Радиофизика. 1968. Т.11. N 2.
4. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. – М.: Наука, 1988.
5. Федер У. Фракталы. – М.: Мир, 1990.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
13 ноября 1992 г.

DYNAMICS OF RAY PROPAGATION PROCESS BEHIND A SERIES OF SPATIALLY-PERIODIC PHASE SCREENS

L.M.Eruchimov, E.Yu.Ryndyk, V.V.Thugurin

Ray propagation through the regular two-periodic inhomogeneous media is described. Such media are modelled here as a series of regular spatially periodic identical phase screens separated by equal distance from each other. To analyze the ray propagation process the technique of discrete maps is used. It is shown that dynamic and stochastic regimes of ray behaviour may be specified in dependence on the value of characteristic parameter. The ray trajectories in stochastic regime are investigated by one of the methods of random fractal analysis, based on the finding the scaling characteristics of ray trajectory. It is shown that stochastic ray motion can be characterized by Herst-index which defines the value of ray trajectory chaoticization.

УДК 534.231,534.24

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЯ ОТ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

И.Ю.Грязнова

Проведено физическое моделирование процессов обратного рассеяния акустических сигналов на неподвижных дискретных неоднородностях, хаотически расположенных на плоскости. Экспериментально обнаружены и обсуждены следующие эффекты: влияние на интенсивность обратного рассеяния когерентного отражения от слабо отражающей подложки, коллективного эффекта, связанного с корреляцией расположения рассеивателей и эффекта многократного рассеяния при больших концентрациях неоднородностей.

Классической задачей теории рассеяния можно считать задачу об обратном рассеянии монохроматической акустической волны на совокупности неподвижных дискретных вкраплений [1]. Особый интерес представляют экспериментальные исследования ряда возникающих при этом эффектов, например, коллективных эффектов рассеяния. Открытым остается вопрос и о правомерности использования теории однократного рассеяния, в частности, при больших концентрациях рассеивающих частиц. Кроме того, наличие незвукопрозрачной подложки может оказать существенное влияние на характеристики сигналов, отраженных от исследуемой плоскости.

Изучение процессов отражения акустических волн от донной поверхности, содержащей дискретные неоднородности, носит и прикладной характер. Так, задача разведки месторождений железомарганцевых конкреций (ЖМК) на дне океана состоит в определении их средней концентрации дистанционными акустическими методами [2]. Настоящие лабораторные исследования были выполнены с целью построения простых теоретических моделей обратного рассеяния, а также совершенствования методов акустического зондирования ЖМК.

В экспериментах неоднородности моделировались стальными сферами одинакового диаметра. Они располагались случайным образом на плоском резиновом дне лабораторной ванны, наполненной водой (Рис. 1). Запись амплитуды рассеянного в обратном направлении сигнала происходила по мере равномерного передвижения каретки с жестко заправленной на ней приемо-излучающей системой вдоль ванны.

Экспериментально исследовались зависимости статистических характеристик амплитуды от концентрации при нормальном и наклонном падении зондирующих сигналов на дно, а также влияние на них статистики расположения рассеивателей при неизменной концентрации. Основные параметры в экспериментах были равны: частота излучения 150 кГц,

диаметр рассеивателей 3.175 мм. Угол падения сигналов на дно α принимал значения от 0° до 60° через каждые 10° . Диаграммы направленности преобразователей хорошо аппроксимировались Гауссовыми кривыми $D(\Theta) = \exp\{-\Theta^2/\Theta_0^2\}$, где $\Theta_0 = \lambda/d_{\text{эф}}$. Эффективные апертуры преобразователей $d_{\text{эф}}$ составляли 5 и 7,5 см. Измерения проводились для восьми концентраций. При этом относительная площадь дна, занятая шариками (коэффициент их упаковки ϵ) изменялась от 0,05 до 0,76.

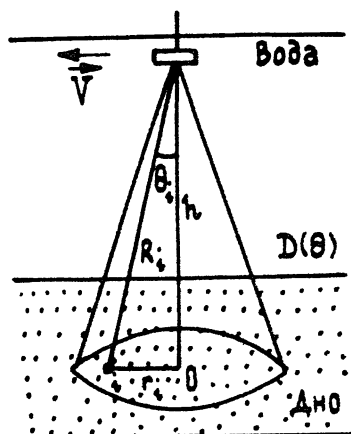


Рис. 1:

Неоднородности распределялись по плоскости дна как хаотически, так и группировались в случайно расположенные кучки с различными характерными масштабами. Для определения количественных характеристик возникающей при этом взаимной корреляции положений рассеивателей проводилась оптическая обработка фотографий дна. Это позволяло определять параметры корреляционной функции концентрации

$$B_n(\rho) = \bar{n}\delta(\rho) + \bar{n}^2(1 + \mu(\rho)) \quad (1)$$

где n – концентрация рассеивателей, ρ – расстояние между центрами двух шариков, $\mu(\rho)$ – функция, описывающая корреляцию положений рассеивателей. Измеряемый радиус пространственной корреляции ρ_0 в экспериментах составлял 0,6; 3; 8; 11; 18 см.

В результате проведенных модельных исследований были получены следующие результаты: – при нормальном падении сигналов на дно средний эффективный коэффициент отражения от плоскости дна сначала уменьшается, а затем растет с ростом концентрации (Рис. 2); – нерегулярное расположение рассеивателей, появление большего по сравнению с размером шарика характерного масштаба корреляции приводит к значительному росту (максимально – в 4 раза) средней интенсивности при неизменной средней концентрации; – при наклонном зондировании эффективный коэффициент отражения $V_{\text{эф}}$ является спадающей функцией концентрации при больших коэффициентах упаковки ϵ (Рис. 3).

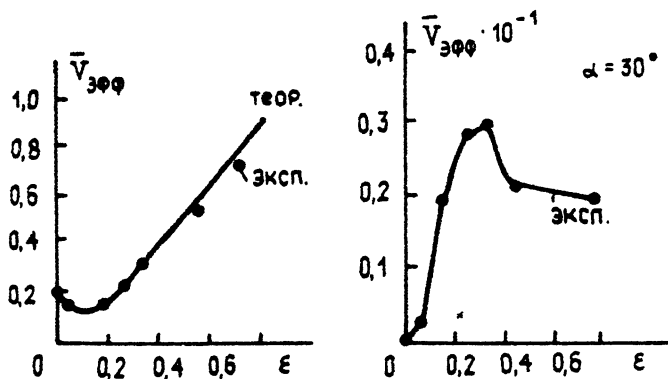


Рис. 2,3.

Наблюдаемые при нормальном зондировании эффекты хорошо описываются простой моделью, построенной в рамках теории однократного рассеяния[3]. Это объясняется тем, что при $ka \sim 1$ (k – волновое число, a – радиус шарика) рассеяние происходит в основном назад и отсутствует рассеяние вбок (под углом 90°), а поскольку рассеиватели находятся на плоскости, перерассеяния на соседних неоднородностях практически не происходит. Немонотонный рост $V_{эфф}$ от концентрации связан с тем, что при небольшой концентрации неоднородностей рассеянное в обратном направлении поле можно считать суммой двух компонент – отраженной от плоскости подложки и рассеянной дискретными вкраплениями. Тогда выражение для средней интенсивности будет содержать интерференционный член, благодаря чему средняя интенсивность может быть немонотонной функцией концентрации и иметь минимум, положение которого зависит от параметров рассеивателей и подстилающего дна и частоты зондирующего излучения.

При рассмотрении влияния коллективных эффектов рассеяния корреляционную функцию взаимного расположения неоднородностей (1) в наших экспериментах достаточно удовлетворительно можно аппроксимировать формулой, выбрав для функции $\mu(\rho)$ следующее выражение:

$$\mu = \mu_0 \exp\{-\rho^2/\rho_0^2\}(1 - \rho^2/\rho_0^2) \quad (2)$$

Эта модель позволяет показать 4, что наряду с когерентной и некогерентной составляющими средней интенсивности существенную роль может играть коллективная компонента

$$I_{кол} = I_{кор} \mu_0 \frac{\pi^2}{(d_{эфф}/\rho_0)^2 + \pi^2} \quad (3)$$

Зависимость выражения (3) от отношения эффективной апертуры преобразователя $d_{эфф}$ к радиусу пространственной корреляции неоднородностей ρ_0 можно объяснить влиянием на интенсивность принимаемого сигнала отношения диаграмм направленности переизлученного от области с

характерным размером ρ_0 и зондирующего сигналов. Чем больше размер эффективной области переизлучения ρ_0 , тем уже диаграмма обратного рассеяния и тем большая интенсивность регистрируется приемным устройством.

Уменьшение среднего эффективного коэффициента отражения с ростом коэффициента упаковки рассеивателей (Рис. 3) связано с возрастанием роли многократного рассеяния при наклонном зондировании. В частности, в приближении геометрической акустики нетрудно показать, что эффекты затенения приводят к спаданию интенсивности на больших концентрациях.

В заключение следует отметить, что модель однократного рассеяния применима лишь для случая вертикального зондирования неоднородностей. При этом должно учитываться влияние подстилающей поверхности и коллективных эффектов рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.2. Случайные поля. – М.: Наука, 1978. С.464.
2. Бунчук А.В., Ивакин А.Н. // Акуст.журн. 1989. Т. 35. N 1. С.8.
3. Горская Н.В., Грязнова И.Ю., Гурбатов С.Н., Николаев Г.Н. // Акуст.журн. 1990. Т.36. N 3. С.410.
4. Горская Н.В., Грязнова И.Ю., Гурбатов С.Н., Николаев Г.Н. // Акуст.журн. 1990. Т.36. N 4. С.637.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 февраля 1993 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF REFLECTION FROM DISCRETE RANDOM INHOMOGENEITIES

Gryaznova I. Yu.

Physical modeling of backscattering of the acoustic signals on unmovable discrete inhomogeneities, displaced randomly on the plane, is performed. The following effects are discovered experimentally and discussed: an influence of coherent reflection from the weakly reflecting subbottom, of the collective effect due to correlations and of the multiple-scattering effect under the large concentrations of inhomogeneities on the intensity of backscattering.

УДК 519.27 + 534.2

ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ИСТОЧНИКА ШУМОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ПОЛЯ

М.А. Антонец, Н.А. Сидоровская

Предложен алгоритм решения обратной задачи восстановления параметров движущегося акустического случайного источника по результатам наблюдения его излучения в ближней зоне, основанный на принципе максимального правдоподобия.

Задача оценивания параметров источника излучения (рассеяния) по результатам измерения излучаемого (рассеянного) поля может решаться различными методами, в зависимости от типа источника, пространственного расположения приемной системы относительно траектории излучателя и т.п. Применяемый для этих целей метод высокочастотного приближения [1] обладает рядом недостатков (потеря точности в области низких частот, сложность в учете влияния границ, невозможность использования при малых отношениях сигнал/шум), которые позволяет преодолеть описанный ниже метод параметрического оценивания. Алгоритм параметрического оценивания может быть реализован во всех тех случаях, когда возможно эффективное решение "прямой" задачи, т.е. определение поля известного источника в среде с известными параметрами. Следует отметить, что в предлагаемом методе все параметры источника (например, диаграмма направленности излучателя) оцениваются путем решения обратной задачи, т.е. путем оценивания амплитудно-фазового распределения в пространстве сторонних источников, создающих измеряемое поле излучения (рассеяния) (для источников шумового типа оцениваются средние характеристики амплитудно-фазового распределения, например, пространственная корреляционная матрица). В настоящей работе исследуются возможности этого алгоритма на примере оценивания пространственной корреляционной матрицы акустического случайного стационарного источника, движущегося в однородной среде.

Представим излучатель в виде набора M элементарных точечных источников, описываемых случайным вектором $\vec{g}(t) = \{g_1, \dots, g_M\}$ в классе гауссовых случайных процессов с произвольной пространственной корреляционной матрицей. Измерения производятся антенной решеткой из N_A элементов в присутствии аддитивного внешнего гауссова шума $\vec{n}(t)$, некоррелированного с полезным сигналом. Тогда принимаемый антенной решеткой сигнал $\vec{p}(t)$:

$$\vec{p}(t) = G(t, t')\vec{g}(t') + \vec{n}(t), \quad (1)$$

где $G(t, t') - N_A \cdot M$ - матрица коэффициентов передачи, задаваемых функцией Грина для данного канала распространения, $\delta t = t - t'$ - время запаз-

дывания при распространении сигнала. Функция правдоподобия L [2] случайного гауссова вектора \vec{p} для временной выборки (время между отсчетами Δt превосходит время корреляции, определяемое шириной спектра принимаемого сигнала: $\Delta t \geq \frac{1}{2\Delta f}$) имеет параметрическую зависимость от элементов пространственной корреляционной матрицы источника K_g ($K_g = K_g(t, t_1) = E\{\vec{g}(t)\vec{g}^+(t_1)\}\delta_{tt_1}$, δ_{tt_1} - символ Кронекера, E - знак статистического усреднения):

$$L = -\left\{\sum_{t_1}^{t_k} [\ln \det K_p(t) + (K_p^{-1}\vec{p}, \vec{p}) + N \ln \pi]\right\}, \quad (2)$$

где $K_p(t) = E\{\vec{p}(t)\vec{p}^+(t_1)\}\delta_{tt_1} = K_n + G(t)K_gG^+(t)$, G^+ - сопряженная к матрице G . Оценивание элементов K_g основывается на принципе максимального правдоподобия [2] (оценки неизвестных параметров должны максимизировать функцию правдоподобия)

$$\frac{\partial L}{\partial K_g} = 0. \quad (3)$$

В результате получается нелинейное матричное уравнение для восстановления K_g :

$$\sum_{t=t_1}^{t_k} G^+(K_p^{-1} - K_p^{-1}FK_p^{-1})G = 0, \quad F = \vec{p}(t)\vec{p}^+(t). \quad (4)$$

При малых отношениях сигнал/шум уравнение (4) может быть линеаризовано, тогда $K_p^{-1} = (K_n + \varepsilon GK_gG^+)^{-1} = K_n^{-1} - \varepsilon K_n^{-1}GK_gG^+K_n^{-1}$, где ε - малый параметр, и оценки элементов K_g могут быть получены в явном виде. Если оцениваемые элементы представить в виде вектора параметров \vec{K} размерности M^2 ($k_{n+lM} = K_{gnl}$), то

$$\vec{k} = -R^{-1}\vec{C}, \quad (5)$$

где вектор \vec{C} составлен из элементов матрицы $C = \sum_{t=t_1}^{t_k} (C_{1t} - C_{2t})$, $C_{1t} = G^+K_n^{-1}G$, $C_{2t} = G^+K_n^{-1}FK_n^{-1}G$, $F = \vec{p} \cdot \vec{p}^+$, $M^2 \cdot M^2$ - матрица $R = \sum_{t=t_1}^{t_k} (C_{1t} \otimes C_{2t} + C_{2t} \otimes C_{1t} - C_{1t} \otimes C_1)$, знак \otimes определяет внешнее (тензорное) произведение матриц. В других случаях функция правдоподобия может быть максимизирована численными методами.

Как показали результаты имитационного эксперимента для детерминированного источника, приведенные в работе [3], данный алгоритм позволяет существенно уменьшить объем требуемых экспериментальных данных и увеличить точность получаемых оценок. В данной работе исследуется возможность реализации алгоритма для восстановления характеристик случайных источников излучения. На рис. 1 а,б представлены результаты численного анализа структуры функции правдоподобия в зависимости от параметров источника. Моделирование проводилось для источника вида $\vec{g}(t) = \vec{p}\eta(t)$, где $\vec{p} = \{1, -1\}$ задает разность фаз между точечными источниками, $\eta(t)$ - случайная функция с гауссовой плотностью

вероятности с нулевым средним и дисперсией, равной σ^2 ; излучатель двигался параллельно приемной антенне. Естественными параметрами в такой задаче являются величины $C_1\sigma$, $C_2\sigma$. На рис.1а представлен график функции правдоподобия для максимального отношения сигнал/шум на приемных элементах в течении всего времени наблюдения, равном 10, для рис.1б это отношение равно 20.

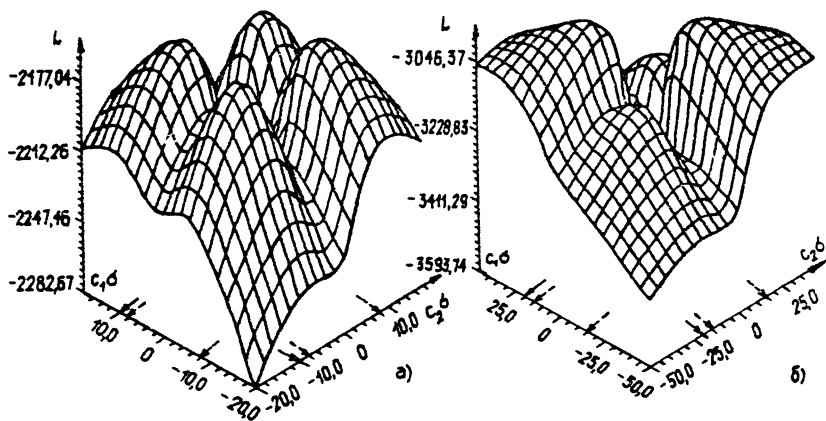


Рис. 1:

Сплошной стрелкой обозначены истинные значения параметров, пунктирной - параметры, при которых функция правдоподобия достигает максимума. Результаты моделирования показывают, что при увеличении отношения сигнал/шум (а также при выборе соответствующей траектории движения, увеличении числа приемных элементов и т.п.) разрешение по параметрам источника растет, и возможно оценивание не только амплитудных характеристик источников, но фазовых соотношений между ними - рис.1б. Наличие двух максимумов на рис. 1б есть следствие факта, что функция правдоподобия определена с точностью до постоянной фазы на излучателе, таким образом, мы оцениваем относительную разность фаз между источниками.

В заключение мы хотим отметить, что вышеописанный алгоритм может быть также использован для оценивания других параметров излучателя (например, траектории движения) и для оценивания параметров среды распространения - структуры пространственных океанических неоднородностей, параметров граничных условий и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турчин В.И., Фикс И.Ш. // Томографические методы в физико-технических измерениях. - М.: ВНИИФТРИ, 1990. С.159.
2. Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика /Пер. с фр. - М.: Наука, 1972.
3. Антонец М.А., Вугальтер С.А., Угриновский В.А.

Препринт ИПФ АН СССР N 298. – Нижний Новгород, 1991.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
26 августа 1992 г.

**ESTIMATION OF RANDOM SIGNAL SOURCE
CHARACTERISTICS BY FIELD MEASUREMENT**

M.A. Antonets, N.A. Sidorovskaya

A method of solving the inverse problem of reconstruction of acoustic moving random source parameters by measurements of a radiative field in bear zone is proposed. The parameter estimation procedure based on the maximum likelihood method is examined.

УДК 621.396

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ УГЛА ПРИХОДА ВНЕШНЕЙ ПОМЕХИ НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АДАПТИВНОЙ РЕШЕТКИ

И.В.Савинов, Г.В.Серебряков

Известно, что использование адаптивных антенных решеток (ААР) позволяет существенно повысить эффективность пространственной обработки сигналов в условиях априорной неопределенности. В то же время наличие в канале распространения различного рода нестационарностей может приводить к резкому ухудшению качества работы ААР. В ряде работ [1, 2] исследовалась эффективность обработки при наличии различного рода искажений как полезного сигнала, так и помех. Однако в них, в основном, ограничивались случаем либо сверхбыстрых по сравнению с временем адаптации алгоритма, либо сверхмедленных флуктуаций. В настоящей работе рассмотрено влияние полностью коррелированных флуктуаций волнового фронта внешней помехи с произвольным временем корреляции на статистические характеристики адаптивной антенной решетки, максимизирующей отношение сигнал/шум (МОСШ). Отметим, что такого рода флуктуации характерны для задач гидроакустики и могут возникать, например, при угловых колебаниях как антенны, так и волнового фронта помехи. К такому же результату приводят и частотные флуктуации помехового сигнала.

Выберем в качестве модели флуктуаций волнового фронта внешней помехи, жестко коррелированные (когерентные) флуктуации ($\varphi_k(t) \equiv \varphi(t)$). Такая ситуация может, например, возникнуть, когда флуктуирует угол прихода внешней помехи $\Theta(t)$ около своего среднего значения $\Theta_{\text{ср}}$. Считая изменения угла $\Delta\Theta(t) = \Theta(t) - \Theta_{\text{ср}}$ малой величиной ($\Delta\Theta \ll 1$), случайный вектор помехи $\vec{S}_n(t)$ математически можно записать следующим образом:

$$\vec{S}_n(t) = D(t)\vec{S}_n, \quad D(t) = \text{dia}\{1, \exp[j\varphi(t)], \dots, \exp[j(N-1)\varphi(t)]\},$$

$$D(t) \approx 1 + j\varphi(t)E_1 - \frac{1}{2}\varphi^2(t)E_2,$$

где $\varphi(t) = (2\pi d/\lambda) \cos(\Theta_{\text{ср}})\Delta\Theta(t)$ — случайный фазовый набег между соседними элементами ААР, соответствующий изменению угла $\Delta\Theta(t)$, $E_1 = \text{dia}\{0, 1, \dots, N-1\}$, $E_2 = \text{dia}\{0, 1, \dots, (N-1)^2\}$. Будем считать $\varphi(t)$ гауссовым процессом, с нулевым средним $\langle \varphi(t) \rangle = 0$. Полагая дисперсию флуктуаций σ_φ^2 малой величиной ($\sigma_\varphi^2 \ll (N-1)^{-2}$), выражения для среднего значения вектора $\vec{S}_n(t)$ и корреляционной матрицы $K_{ss}(\tau) = \langle S_n^*(t) S_n^T(t+\tau) \rangle$ можно записать следующим образом:

$$\langle \vec{S}_n(t) \rangle = (1 - \frac{1}{2}\sigma_\varphi^2 E_2)\vec{S}_n,$$

$$K_{ss}(\tau) = \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T + [\exp(k(\tau)) - 1] E_1 \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T E_1 - \quad (1)$$

$$- \frac{1}{2} [\exp(\sigma_\varphi^2) - 1] (E_2 \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T + \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T E_2).$$

где $k(\tau)$, σ_φ^2 - автокорреляционная функция и дисперсия процесса $\varphi(t)$. С учетом (1) для средних значений стохастической матрицы входных сигналов $M(t) = \vec{X}^*(t) \vec{X}^T(t)$ и флуктуационной составляющей $\Phi(t)$ можно записать

$$\langle M(t) \rangle = R_{xx} + \eta_0^2 \nu_n \sigma_\varphi^2 (E_1 \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T E_1 - \frac{1}{2} E_2 \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T - \frac{1}{2} \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T E_2),$$

$$\langle \Phi(t) \rangle = \eta_0^2 \nu_n \sigma_\varphi^2 (E_1 \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T E_1 - \frac{1}{2} E_2 \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T - \frac{1}{2} \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T E_2).$$

Ограничиваясь случаем одной действующей мощной ($\nu_n \gg 1$) помехи и применяя описанную в работе [3] процедуру для нахождения стохастического вектора весовых коэффициентов $\vec{W}(t)$, нетрудно получить выражение для среднего значения первого приближения $\langle \vec{W}_1(t) \rangle$

$$\langle \vec{W}_1(t) \rangle = -\sigma_\varphi^2 \nu_n \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} A \vec{W}_0,$$

где $A = [E_1 - (n_1/N)I] \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T E_1$ - матрица, зависящая от угла прихода внешней помехи, $n_1 = \vec{S}_n^T E_1 \vec{S}_n^*$. Заметим, что для наших вычислений остается в силе приближение $\vec{S}_n^T \vec{W}_0 \ll 1$.

Размыкая моментную скобку $\langle \Phi(t - \tau) Q L(\tau') Q^+ \Phi(t - \tau - \tau') \rangle$

$$\langle \Phi(t - \tau) Q L(\tau') Q^+ \Phi(t - \tau - \tau') \rangle = (\eta_0^2 \nu_n)^2 k(\tau') \times$$

$$\times \{ \exp(-\alpha_0 \tau') (n_2 - \frac{n_1^2}{N}) \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T + \exp(-\alpha_1 \tau') [(\frac{n_1^2}{N}) \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T + N E_1 \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T E_1] \},$$

где $n_2 = \vec{S}_n^T E_2 \vec{S}_n^*$, получим выражение для среднего значения второго приближения $\langle \vec{W}_2(t) \rangle$

$$\langle \vec{W}_2(t) \rangle = \sigma_\varphi \nu_n \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} \frac{\tau_{\text{кор}}}{\tau_{\text{кор}} + \tau_{\text{ад}}} A \vec{W}_0.$$

Для определения мощностных характеристик ААР при наличии угловых флуктуаций помехи нам потребуются выражения для вектора $\vec{\alpha}_W = \langle \Phi(t) \vec{W}_1(t) \rangle$ и корреляционной матрицы вектора поправки $K_W(t, t) = \langle \vec{W}_1^*(t) \vec{W}_1^T(t) \rangle$. Можно показать, что

$$\vec{\alpha}_W = \langle \Phi(t) \vec{W}_1(t) \rangle = -\sigma_\varphi^2 \eta_0^2 \nu_n \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} \frac{\tau_{\text{кор}}}{\tau_{\text{кор}} + \tau_{\text{ад}}} B \vec{W}_0,$$

$$K_W(t, t) = \langle \vec{W}_1^*(t) \vec{W}_1^T(t) \rangle = \sigma_\varphi^2 N^{-2} \times$$

$$\times \left[\frac{\mu_0}{1 + \mu_0} (\vec{W}_0^T B^* \vec{W}_0^*) \frac{\tau_{\text{кор}}}{\tau_{\text{кор}} + \tau_{\text{ад}}} \vec{S}_n \vec{S}_n^+ + |\vec{S}_n^T \vec{W}_0|^2 \frac{\tau_{\text{кор}}}{\tau_{\text{кор}} + \tau_n} (1 - N^{-1} \vec{S}_n \vec{S}_n^+) \right],$$

где $B = E_1 \vec{S}_n^* \vec{S}_n^T E_1$. Тогда для суммарной мощности помехи и собственного шума, мощности полезного сигнала на выходе системы можно записать

$$P_{\text{нфл}} = \left(1 - \sigma_\varphi^2 \nu_n \frac{1 - \mu_0}{1 + \mu_0} \frac{\vec{W}_0^T B^* \vec{W}_0}{N(1 - f_0^2/N^2)} \frac{\tau_{\text{ад}}}{\tau_{\text{кор}} + \tau_{\text{ад}}} \right) P_{\text{п}}, \quad (2)$$

$$P_{\text{сфл}} = \left(1 - 2\sigma_\varphi^2 \nu_n \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} \frac{\vec{W}_0^T B^* \vec{W}_0^*}{N(1 - f_0^2/N^2)} \frac{\tau_{\text{ад}}}{\tau_{\text{кор}} + \tau_{\text{ад}}} \right) P_{\text{с}}, \quad (3)$$

где $f_0 = \vec{S}_n^T \vec{S}_{\text{упр}}$, $\vec{S}_{\text{упр}}$ - вектор управления диаграммой направленности ААР в отсутствие помех. Поделив (3) на (2) с учетом малости σ_φ^2 и учитывая, что $\vec{W}_0^T B^* \vec{W}_0^* = |f_1 - (n_1/N)f_0|^2$, где $f_1 = \vec{S}_n^T E_1 \vec{S}_{\text{упр}}$, получим выражение для выходного отношения сигнал/шум при наличии угловых флуктуаций помехи $\rho_{\text{фл}}$

$$\rho_{\text{фл}} = \left(1 - \psi(\Theta_{\text{ср}}) \sigma_\varphi^2 \nu_n \frac{\tau_{\text{ад}}}{\tau_{\text{кор}} + \tau_{\text{ад}}} \right) \rho_0,$$

где $\psi(\Theta_{\text{ср}}) = |f_1 - (n_1/N)f_0|^2/N(1 - f_0^2/N^2)$. Отметим, что в случае независимых флуктуаций волнового фронта внешней помехи $\rho_{\text{фл}}$ определяется аналогичной формулой при $\psi(\Theta_{\text{ср}}) = \psi = 1$ [3]. Как видно из анализа выражения, $\psi(\Theta_{\text{ср}})$ достигает максимального значения, когда помеха приходит в ноль ДН ААР, и минимальна в случае прихода помехи в максимум бокового лепестка ДН. Что касается зависимости $\rho_{\text{фл}}$ от ν_n , σ_φ^2 и $\tau_{\text{кор}}$, то она остается такой же, как и в случае независимых флуктуаций волнового фронта внешней помехи, причем большее влияние на ОСШ оказывают помехи, приходящие в ноль исходной ДН ААР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А.А., Серебряков Г.В. // Изв.вузов. Радиофизика. 1991. Т.34. N 1. С.52.
2. Мальцев А.А. // Изв.вузов. Радиофизика. 1987. Т.30. N 8. С.1101.
3. Савинов И.В., Серебряков Г.В. // Радиотехника и электроника (в печати).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Нижегородском университете

Поступила в редакцию
22 апреля 1993 г.

FLUCTUATIONS OF ANGLE INCIDENCE EXTERNAL DISTURBANCES AND THEIR INFLUENCE ON ADAPTIVE ANTENNA STATISTICAL CHARACTERISTIC

I. V. Sawinov, G. V. Serebryakov

УДК 621.391.822

ПОДВИЖНЫЕ ДЕФЕКТЫ: ИСТОЧНИК $1/f$ ШУМА?*А.Л.Младенцев, А.В.Якимов*

В настоящее время исследование природы и свойств $1/f$ шума (т.е. шума со спектром вида $1/f$) чрезвычайно актуально. В связи с быстрым развитием полупроводниковой технологии возникают задачи уменьшения шумов полупроводниковых элементов, увеличения их надежности и долговечности. Поскольку $1/f$ шум присутствует во всех полупроводниках, и его интенсивность возрастает перед выходом прибора из строя, то, вероятно, изучение и выявление конкретных механизмов $1/f$ шума позволит решить многие проблемы.

В данной работе мы попытались, основываясь на идее о связи $1/f$ шума с подвижными дефектами, объяснить причину деградиационного дрейфа сопротивления полупроводниковых приборов, а также решить проблему анализа надежности образцов, проходящих шумовой контроль.

Существует довольно много различных взглядов на природу $1/f$ шума. Определенную путаницу вносит тот факт, что самые разнообразные флуктуационные процессы имеют спектр вида $1/f$ [1]. Естественно, что построить общую теорию, охватывающую целиком все эти процессы, проблематично. Однако, если рассматривать $1/f$ шум только в твердых телах, то здесь удастся с помощью единого подхода объяснить многие особенности $1/f$ шума. В этом подходе предполагается, что в образцах, обнаруживающих $1/f$ шум, происходят разнообразные релаксационные процессы с широким набором времен релаксации τ , охватывающим много порядков изменения τ [2]. Эти процессы связаны, например, с кинетикой дефектов, т.е. в конце концов с неупорядоченностью твердых тел. Интересно отметить, что подобную идею впервые выдвинул Шоттки сразу же после открытия $1/f$ шума, однако наиболее широко изучается она только сейчас. На связь $1/f$ шума с дефектами, в том числе и неконтролируемыми, указывает тот факт, что образцы, изготовленные по одной технологии и в одинаковых условиях, имеют разный уровень $1/f$ шума [2].

1. Рассмотрим модель $1/f$ шума, обусловленного движущимися дефектами [3]. Допустим, что твердое тело содержит дефект, который случайным образом изменяет свою конфигурацию. Для простоты считаем, что дефект может находиться в одном из двух состояний (например, условно обозначенных "1" и "0"). Вследствие тепловых колебаний решетки дефект случайным образом переходит из одного состояния в другое и обратно.

Естественно допустить, что электрофизические параметры дефекта в различных состояниях различны. Отсюда следует, что случайное изменение конфигурации дефекта сопровождается изменением сопротивления всего образца. Причем, эти изменения во времени имеют вид случайного телеграфного процесса с размахом $(\delta R)_1$, где $(\delta R)_1$ - относительное изменение сопротивления, соответствующее смене состояния отдельным дефектом (рис.1).

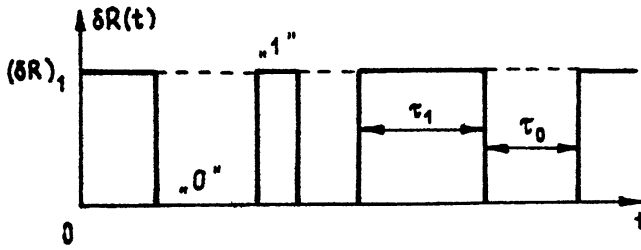


Рис. 1:

Времена пребывания дефекта в состояниях "0" и "1" есть случайные величины. Поскольку дефекту для перехода из одного состояния в другое приходится преодолевать относительно высокий потенциальный барьер (рис.2), то распределения τ_1 и τ_0 можно считать подчиненными закону Больцмана, вообще говоря, с разными средними временами $\bar{\tau}_1 = \tau_T \exp(E/k_B T)$ и $\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}_1 \exp(\Delta_0/k_B T)$, где τ_T - средний период тепловых колебаний решетки, k_B - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура.

Спектр такого телеграфного процесса имеет лоренцев вид:

$$S_{\delta R}(f/\nu) = \frac{A\nu}{\nu^2 + f^2}$$

где $A = (2\bar{\tau}_0\bar{\tau}_1)/[\pi(\bar{\tau}_0 + \bar{\tau}_1)^2](\delta R)_1^2$ - параметр, характеризующий интенсивность флуктуационного процесса, $\nu = \frac{1}{2\pi}(\bar{\tau}_0^{-1} + \bar{\tau}_1^{-1})$ - характерная (или опорная частота) процесса.

Очевидно, что в реальном образце присутствует ансамбль дефектов различных типов, отличающихся, в общем случае, и размахом возмущения и характерной частотой. Будем описывать каждый тип дефекта с помощью двухуровневой системы (рис.2) или сокращенно ДУС. В предположении одинаковости размахов $(\delta R)_1$ суммарный спектр процесса можно представить в виде:

$$S(f) = N_D \int S_{\delta R}(f/\nu)W(\nu)d\nu,$$

где $W(\nu)$ - распределение характерных частот, N_D - полное число дефектов в образце. Если также предположить одинаковость интенсивностей флуктуационных процессов A и принять $W(\nu) = \frac{1}{\ln(f_B/f_H)}\frac{1}{\nu}$ при $\nu \in [f_H, f_B]$, где f_H - нижняя, f_B - верхняя частоты перегиба, результирующий спектр будет фликерным в диапазоне от f_H до f_B :

$$S(f) = \frac{G}{f}, \quad (1)$$

где $G = (\pi A N_D)/[2 \ln(f_B/f_H)]$.

Данное распределение $W(\nu)$ возможно в том случае, если все ДУС имеют одинаковые разности глубин Δ_0 , а распределение энергий активации равномерно в некотором диапазоне от E_1 до E_2 , соответствующем

частотам f_H и f_B . Таким образом, движение дефектов в твердом теле по-

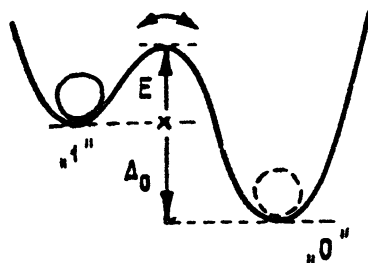


Рис. 2:

рожает стационарный случайный процесс со спектром вида $1/f$. Рассмотрим теперь, в каком случае модель стационарных флуктуаций позволяет объяснить нестационарный дрейф сопротивления образца.

2. Допустим, что в процессе изготовления образца внесенные в него дефекты оказались преимущественно в каком-то одном выделенном состоянии (например, в состоянии "1" на рис.2 в результате отжига прибора). В этом случае из-за нестационарности распределения по потенциальным ямам возникает ненулевой средний поток дефектов в другое состояние, приводящий весь образец к термодинамическому равновесию.

Сначала начнут релаксировать наиболее "быстрые" дефекты (обладающие малыми характерными временами $\tau \approx 1/2\pi f_B$). Затем в этот процесс начнут включаться более медленные дефекты, в результате чего равновесие, в основном, будет достигнуто спустя время $t > 1/2\pi f_H$. Процесс релаксации для различных значений глубин Δ_0 изображен на рис.3. Дрейф среднего значения сопротивления, соответствующий единичному дефекту с характерной частотой ν , происходит по экспоненциальному закону :

$$\langle \delta R(t/\nu) \rangle = (\delta R)_1 (p - p_0) (1 - e^{-2\pi\nu t}),$$

где $p = (1 + \exp(\Delta_0/k_B T))^{-1}$ - вероятность нахождения дефекта на "верхнем" уровне при температуре T , p_0 - та же вероятность, соответствующая температуре отжига, $\langle \dots \rangle$ - усреднение по ансамблю дефектов. Суммарный дрейф сопротивления, обусловленный установлением термодинамического равновесия всех дефектов, представляет суперпозицию экспонент с разными временами релаксации. При этом флуктуационному процессу со спектром (1) соответствует дрейф сопротивления, аппроксимируемый при $2\pi \in [1/f_B, 1/f_H]$ логарифмической зависимостью:

$$\langle \delta R(t) \rangle = B \ln(2\pi f_B t), \quad (2)$$

где $B = (p - p_0) N_d (\delta R)_1 / \ln(f_B/f_H)$.

Знание параметра B позволяет определить время стабильной работы прибора:

$$t_0 = t_1(\exp((\delta R_{\max})/B) - 1). \quad (3)$$

Здесь t_1 - время, прошедшее после изготовления образца; (δR_{\max}) - максимально допустимое относительное изменение сопротивления прибора. Используя (1) и (2), найдем связь между скоростью деградации и величи-

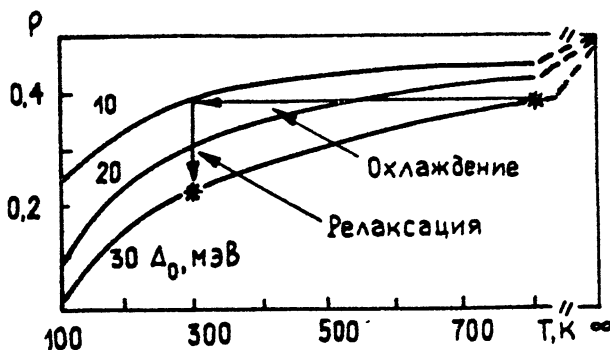


Рис. 3:

ной G , определяющей значение фликерного спектра на частоте 1 Гц:

$$B = G \frac{P - P_0}{P(1 - P)(\delta R)_1} \quad (4)$$

Таким образом, повышенная величина спектра $1/f$ шума может свидетельствовать о повышенной скорости деградации, то есть о потенциальной ненадежности прибора.

Формула (4) позволяет производить отбраковку полупроводниковых изделий по величине спектра фликерного шума. На рис.4 приведена номо-

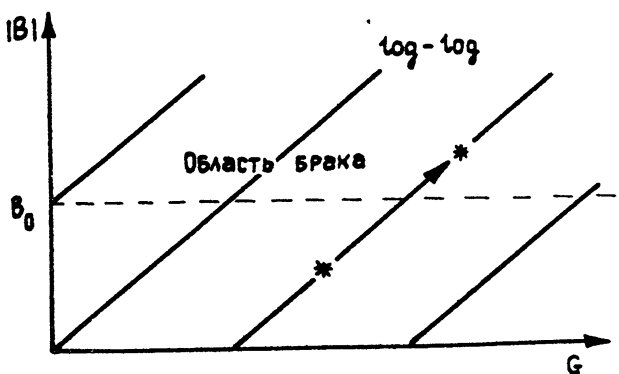


Рис. 4:

грамма, построенная на основании (4) в двойном логарифмическом масштабе. Для того, чтобы произвести отбраковку изделия, необходимо

знать максимально допустимую скорость деградации B_0 (определяется из соотношения (3)), а также величину $(p - p_0)/(p(1 - p)(\delta R)_1)$. Исходя из этих данных, выбираем соответствующую прямую на рис.4 и делаем необходимые выводы. Таким образом, каждая прямая на рис.4 соответствует образцам, различающимся по температурному режиму изготовления и по величине размаха случайных процессов телеграфного типа, образующих $1/f$ шум. В зависимости от условий отжига прибора и предполагаемой разности глубин Δ_0 , величина $(p - p_0)/(p(1 - p))$ может изменяться в пределах от 0,1 до 0,7. Теоретическое определение величины $((\delta R)_1)$ представляет собой самостоятельную задачу, рассмотренную, например, в [4]. При длительной работе исследуемого прибора выбранная в соответствии с (4) точка на прямой (рис.4), в результате увеличения количества дефектов в образце, может подняться в область брака. Такая ситуация показана стрелкой на рис.4. Контроль за постоянством величины N_0 осуществляется с помощью наблюдения величины спектра $1/f$ шума.

Возможно и обратное толкование результатов. Зная величину спектра на частоте 1 Гц и параметр B (в результате контроля дрейфа общего сопротивления образца), находим коэффициент пропорциональности между G и B в (6). Полученные значения могут использоваться для идентификации типов дефектов, присутствующих в твердом теле и характеризующихся параметрами p_0, p и $(\delta R)_1$.

Таким образом, модель подвижных дефектов позволяет не только объяснить наблюдаемый фликерный спектр, но и получить важные данные, характеризующие надежность полупроводниковых приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах. – М.: Мир, 1986. – 399 с.
2. Коган Ш.М. // УФН. 1985. Т.145. Вып.2. С.285.
3. Малахов А.Н., Орлов В.Б., Якимов А.В. // В сб. Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах. – Горький: Гос.ун-т, 1989. С.21; Статья депонирована в ВИНТИ, рег. N 5713-V90 от 12 ноября 1990 г.
4. Orlov V.B., Yakimov A.V. // Physica B. 1990. V.162. P.13.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 ноября 1992 г.

WANDERING DEFECTS: SOURCE OF $1/f$ NOISE?

A.L.Mladentsev, A.V.Yakimov

ACTIVE SUPPRESSION OF RADIATING WAVENUMBERS IN THE DYNAMIC RESPONSE OF SUBMERGED PLATES

Paul E. Barbone, Arthur M. B. Braga

The sound radiated from an electrically excited piezoelectric plate is computed. Voltage distributions obtainable from an array of finite sized electrodes are used to examine the possibility of actively suppressing sound radiated at particular spatial . An application to canceling the reflection of a plane wave at oblique incidence is presented. The results presented here can also be found in Barbone & Braga 1992.

1. INTRODUCTION

The use of active devices in noise control applications has become a topic of great interest during the last few years. The problem we study here is that of actively suppressing the field caused by a wave incident obliquely on a piezoelectric laminate. This model problem serves as a building for the implementation of a control algorithm in the domain.

The possibility of actively canceling the sound reflection at normal incidence has been both experimentally and analytically. In most of these studies, piezoelectric have been used as the input control. In fact, it has been demonstrated that the reflection of plane sound waves from a submerged plate can be actively cancelled when the appropriate voltage is applied across a piezoelectric layer bonded to the structure (Bao et al 1990; Lafleur et al 1991; Braga et al 1992; Barbone Braga 1992).

When an incident wave obliquely on a structure, *perfect cancellation* * of all outgoing sound can be achieved only if the voltage applied to the actuator varies sinusoidal in space (Braga et al 1992). A sinusoidal voltage distribution can be approximated, however, by using electrodes etched onto the of the piezoelectric actuator. In this case, a different voltage is applied to each electrode resulting in a piece-wise constant voltage distribution in space. This voltage distribution, however, generates waves other than the "anti-reflected" plane wave, and perfect cancellation is not possible.

In this paper, we consider the limitations imposed by electrode size on the possibilities of suppressing reflection at oblique incidence. We present a theoretical model for the piezoelectric actuator with electrodes etched as described above. We show that complete cancellation of the incident wave is sometimes possible in the far field, but that the acoustic field produced near the structure can be significant.

We formulate the problem of sound reflection from the surface of the active plate in Section 2, obtaining an expression for the reflected wave in terms of the amplitude of the incident wave and the voltage distribution. Next,

*Perfect cancellation implies here that the acoustic pressure everywhere in the fluid is identically zero.

in Section 3, we discuss the influence of the electrode size on the far-field sound radiation. We conclude that for a given size of the electrodes, complete suppression in the far-field is possible only for a limited range of incidence angles. But for electrodes with sizes of up to one half the wavelength of the acoustic wave, full cancellation is possible for any angle of incidence.

2. PROBLEM FORMULATION & SOLUTION

The configuration considered here consists of a submerged plate with a piezoelectric layer (and, perhaps matching layers) bonded to its surface. Etched onto one surface of the piezoelectric layer are electrodes of length l , while the other side of the layer is grounded. A plane acoustic wave with frequency ω propagates through the fluid (sound speed c_f) and upon the plate/transducer composite structure at an angle θ measured from normal. We assume that the wavelength of the acoustic wave is much smaller than the lateral of the plate and ignore effects of the edges.

The incident wave is characterized by the acoustic pressure

$$p_i(x, z, t) = P_i e^{i(\omega t - k_f x \sin \theta + k_f z \cos \theta)}, \quad \text{where } k_f = \omega/c_f. \quad (1)$$

In order to perfectly suppress the reflection of this incident wave, we need to apply the voltage $\phi_0 e^{-ik_f x \sin \theta}$ (we henceforth omit the $e^{i\omega t}$ factor) across the plate. The magnitude of for various frequencies as a function of the angle of incidence are presented in Braga *et al* (1992). The electrode on the bottom surface of the laminated piezoelectric actuator, however, is etched in such way that each piece of length l is subjected to a uniform electric potential, say V_j ($j = \dots, -1, 0, +1, \dots$). We assign the voltage to each electrode by the closest possible projection to $\phi_0 e^{-ik_f x \sin \theta}$ in L^2 . Thus, V_j is given by

$$V_j = \frac{1}{l} \int_{(j-1)l}^{jl} \phi_0 e^{-ik_f x \sin \theta} dx = i\phi_0 \frac{1 - e^{i\alpha}}{\alpha} e^{-ij\alpha}, \quad \text{with } \alpha = k_f l \sin \theta. \quad (2)$$

Applying this voltage to each electrode yields a voltage distribution in space, $V(x)$, given by

$$V(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} V_j H(x - (j-1)l) H(jl - x), \quad (3)$$

where $H(x)$ is the Heaviside step function. Our goal is to find the sound radiated by the system described above, under the dual excitation of the incident wave and applied electric field.

The acoustic pressure of the radiated (or reflected) wave, $p_r(x, z)$, satisfies the equation in $z > 0$,

$$(\nabla^2 + k_f^2)p_r(x, z) = 0, \quad (4)$$

Further, p_r , is subject to continuity of traction and normal velocity at the fluid/solid interface ($z = 0$).

In order to facilitate the calculation, we introduce the transform pair:

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx \text{ and } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(s)e^{-isx} ds. \quad (5)$$

Equations (4) and (5) may be used to show that the radiated pressure field can now be written in the form

$$p_r(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(s)e^{-isx - i\gamma(s)z} ds. \quad (6)$$

The wavenumber in the z -direction, $\gamma(s)$ is defined by

$$\gamma(s) = \begin{cases} \sqrt{k_f^2 - s^2}, & \text{if } |s| \leq k_f \\ -i\sqrt{s^2 - k_f^2}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

In order to enforce the boundary conditions at $z = 0$, we find it convenient to have expressions for the fluid and solid impedance. Thus we introduce the fluid impedance Z_f in space defined as

$$Z_f(s) = \omega \rho_f / \gamma(s). \quad (8)$$

Similarly, we introduce the impedance for the solid. This provides a relation between the transformed traction and transformed particle velocity, full account of the coupling to the electric field applied across the transducer:

$$\bar{t}(s) = Y(s)\bar{v}(s) - y(s)\bar{V}(s) \quad (9)$$

$\bar{t}(s)$ and $\bar{v}(s)$ represent, respectively, the transformed mechanical traction and particle velocity fields at the surface of the transducer ($z = 0$). $\bar{V}(s)$ is the transform of $V(x)$, the applied voltage. The ran-two tensor $Y(s)$ is the stiffened elastic impedance of the transducer/structure system. The vector $y(s)$ represents the effective traction at the surface of the transducer due to the applied voltage. Exact expressions for $Y(s)$ and $y(s)$ in terms of the electromechanical properties of the plate can be found in Braga et al (1992). We note only that they are based on exact solutions for time-harmonic plane wave propagation in piezoelectric media.

We now use equations (8) and (9) and enforce continuity of traction and normal velocity. Solving for the pressure, we find:

$$\bar{p}(s) = y(s)e_x \left(\frac{Z_s(s)Z_f(s)}{Z_s(s) + Z_f(s)} \right) \bar{V}(s) \quad (10)$$

Here, Z_s , is called the normal impedance of the solid and is defined by

$$Z_s(s) = 1/(e_x Y^{-1}(s)e_x). \quad (11)$$

From equation (11) above, we see that we need to evaluate \bar{V} . Using (3) in (5), it is a simple matter to show

$$\bar{V}(s) = \phi_0 \frac{(1 - e^{i\alpha})(1 - e^{-isl})}{s\alpha} \sum_n \delta(sl - \alpha - 2\pi n). \quad (12)$$

Finally, we can write the solution for the radiated field. Substituting the (10) and (12) into the integral (6), we find

$$p_r(x, z) = p_{ref}(x, z) + p_{sub}(x, z) \quad (13)$$

where

$$p_{ref}(x, z) = -\frac{Z_f(\frac{\alpha}{l}) - Z_s(\frac{\alpha}{l})}{Z_f(\frac{\alpha}{l}) + Z_s(\frac{\alpha}{l})} P_i \left[1 - \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2/2} \right] e^{-i\alpha z/l} e^{-i\gamma(\frac{\alpha}{l})z} \quad (14)$$

$$p_{sub}(x, z) = \phi_0 \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H(\frac{\alpha+2n\pi}{l})}{1 + \frac{2n\pi}{\alpha}} e^{-i\alpha+2n\pi z/l} e^{-i\gamma(\frac{\alpha+2n\pi}{l})z} \quad (15)$$

$$H(s) = \frac{Z_f(s)Z_s(s)}{Z_f(s) + Z_s(s)} (e_z Y^{-1}(s)y(s)). \quad (16)$$

3. RESULTS, DISCUSSION AND CONCLUSIONS

The sound field radiated into the fluid results from two contributions. p_{sub} represents those waves generated by the transducer other than the "anti-reflected" wave. For large n , these waves will be subsonic and so will decay exponentially in the z -direction radiating no energy to infinity at non-zero angles. To find the threshold where this will begin, we can set $\alpha + 2n\pi = k_f l$. For p_{sub} to carry no energy to infinity, we require all the waves in the sum to be subsonic. This leads us to the inequalities

$$\frac{l}{\lambda}(1 + \sin \theta) < 1 \quad \text{and} \quad \frac{l}{\lambda}(1 - \sin \theta) < 1 \quad \text{where } \lambda = 2\pi/k_f. \quad (17)$$

In (17), we have introduced the wavelength in the fluid, λ . We note that (17) is satisfied for any value of θ when $l < \lambda/2$. In obtaining the above expression for p_{ref} above, we have used the value of ϕ_0 presented in Braga et al (1992), calculated assuming infinitesimally small electrodes. We note that, in general, p_{ref} will not have zero amplitude. If instead of applying a voltage of magnitude ϕ_0 , we applied a voltage of magnitude ϕ_δ , then p_{ref} becomes

$$p_{ref}(x, z) = -\frac{Z_f(\frac{\alpha}{l}) - Z_s(\frac{\alpha}{l})}{Z_f(\frac{\alpha}{l}) + Z_s(\frac{\alpha}{l})} P_i \left[1 - \frac{\phi_0}{\phi_\delta} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2/2} \right] e^{-i\alpha z/l} e^{-i\gamma(\frac{\alpha}{l})z} \quad (18)$$

We see from equation (18) that the reflected field will have zero amplitude when the applied voltage $\phi_\delta = \phi_0 \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2/2}$. Thus we arrive at the electrode size correction factor for excitation using finite sized electrodes. The fact that when $l < \lambda/2$, suppression is possible at all angles implies that sound at any smaller than the acoustic wavenumber k_f can be cancelled. Since these are typically the which radiate energy directly into the far field, these are the need to be controlled to achieve broad band noise reduction from submerged structures.

The authors would like to thank Dr. Laura Ekroot for her help in arriving at the results presented here. Paul gratefully acknowledges the financial support of the Office of Naval Research.

REFERENCES

1. Barbone P.E., Braga A.M.B. // Proceeding of the First European Conference on Smart Structure and Material, Glasgow, May 1992, B Culshaw, PT Gardiner, A McDonach, Eds. 1992.
2. Bao, X.Q., Varadan V.K., Varadan V.V. and Howarth T.R. // J. Acoust. Soc. Am. 1990. V.87. P.1350.
3. Braga A.M.B., Honein B., Barbone P.E. and Herrmann G. // To appear in J. Intel. Mat. Sys. Struc. 1992.
4. Lafleur L.D., Shields F.D. and Hendrix J.E. // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V.90. P.1230.

University of Cambridge, U.K.
Pontificia Universidade Catolica
do Rio de Janeiro, Brazil

Поступила в редакцию
21 октября 1992 г.

УДК 551.463

СЕЛЕКЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В МОДЕЛЬНОМ МЕЛКОВОДНОМ ВОЛНОВОДЕ

О.В.Лебедев, И.В.Павлов

Проведено исследование распространения звука в мелководном волноводе. Приведены некоторые экспериментальные и численные результаты.

Целью настоящей работы являлось экспериментальное исследование структуры звукового поля в мелководном волноводе и построение адекватной математической модели распространения.

Эксперименты проводились в лабораторных условиях на кафедре акустики ННГУ. Исследуемый волновод представлял собой однородный водный слой толщиной $H = 30 \pm 1$ мм, со скоростью звука 1483 м/с, лежащий на толстом слое резины с относительной плотностью $\rho_1 = 1,13$ и априорно неизвестными значениями скорости продольных волн c_1 и коэффициента потерь η_1 . Излучение и прием тонального сигнала с частотой $f_0 = 140$ кГц осуществлялись квазиточечными пьезокерамическими преобразователями, расположенными на глубинах z_0 и z . В ходе эксперимента измерялись зависимости комплексной амплитуды звукового поля от горизонтального расстояния r между излучателем и приемником при их различных заглублениях. Путем спектрального анализа полученных реализаций исследовался модовый состав поля [1]. На рис.1 приведен пространственный спектр для значений $z_0 = 7$ мм и $z = 7$ мм, а на рис.2 представлены зависимости амплитуды спектральных составляющих сигнала от глубины приема z . Как видно из рисунков, звуковое поле форми-

руется тремя энергонесущими модами с продольными волновыми числами $\xi_1 = 584,677$ 1/м, $\xi_2 = 560,145$ 1/м, $\xi_3 = 519,258$ 1/м. Нижняя граница пространственного спектра позволяет сделать грубую оценку скорости звука в резиновой подложке $c_1 \approx 1700$ м/с.

На первом этапе построения математической модели исследуемого волновода это значение было взято в качестве начального приближения и уточнялось с точки зрения минимальной разности расчетных и экспериментально измеренных продольных волновых чисел. Для того исследовалась функция:

$$F(c_1) = \sum_i (\xi_i^{\text{теор.}}(c_1) - \xi_i^{\text{эксп.}})^2.$$

Значения $\xi_i^{\text{теор.}}$ вычислялись по программе, основанной на алгоритме поиска корней дисперсионного уравнения, предложенного в [2]. В результате минимизации функции $F(c_1)$ получено значение c_1 , которое использовалось как начальное приближение для следующего этапа.

На втором этапе исследовалась следующая функция:

$$F(c_1, \eta_1, z_0, z, H) = \sum_m (I_m^{\text{эксп.}} - I_m^{\text{расч.}}(c_1, \eta_1, z_0, z, H) r_m)^2,$$

где $I_m^{\text{эксп.}}$ и $I_m^{\text{расч.}}$ – экспериментально измеренная и расчетная интенсивность звукового поля, m – номер точки, расположенной на расстоянии r_m от излучателя. В число оптимизируемых параметров входили: скорость звука в дне c_1 , коэффициент поглощения в дне η_1 , а также толщина водного слоя H и заглубления источника z_0 и приемника z , значения которых измерялись в экспериментах с погрешностью ± 1 мм.

Для минимизации целевой функции применялись различные процедуры: метод Дэвидона–Флетчера–Пауэлла [3], метод локального поиска Нелдера–Мида и метод глобального дискретного поиска [4].

В результате независимого поиска с помощью различных методов найден единственный минимум функции $F(c_1, \eta_1, z_0, z, H)$ вблизи точки начального приближения со значениями $c_1 = 1748,51$ м/с и $\eta_1 = 0,118$.

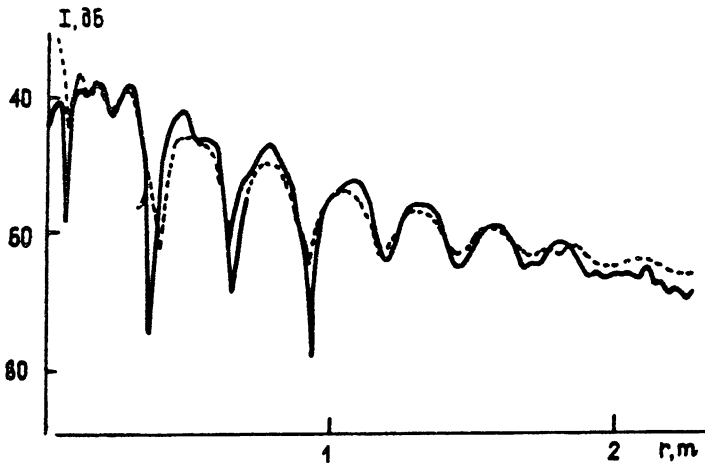


Рис. 3.

На рис.3 изображены экспериментальная (сплошная линия) и вычисленная по полученным значениям (пунктир) зависимости интенсивности поля от расстояния между источником и приемником.

Для проверки точности построенной модели дна были проведены эксперименты в волноводах различной глубины. На рис.4 представлены экспериментальная и расчетная зависимости для волновода толщиной $H = 100$ мм. Их достаточно хорошее совпадение подтверждает адекватность математической модели.

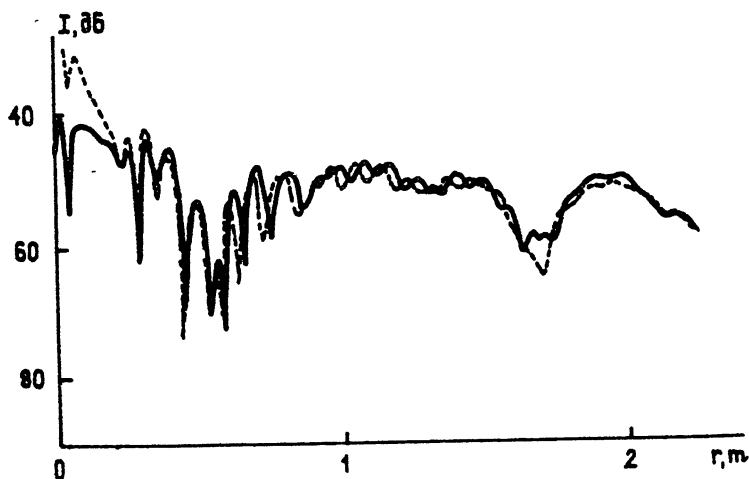


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горская Н.В., Николаев Г.Н., Рычова Т.А., Салин Б.М. // Акуст. журн. 1981. Т.27. N 2. С.202.
2. Белов А.И. // Судостр. промышл. Сер. Акустика. 1989. N 4. С.30.
3. Банди Б. Методы оптимизации: вводный курс. - М., 1988.
4. Савин В.А., Вазин В.А. // Материалы научной конференции по радиофизике. - Н.Новгород: Гос.ун-т, 1991.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
18 февраля 1993 г.

NORMAL WAVES SELECTION IN SHALLOW WATER

Lebedev O. V., Pavlov I. V.

The investigation of sound wave propagation in shallow water has been carried out. Some experimental and numerical results are presented.

УДК 534.44

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СПЕКТРА ВЕТРОВОГО ВОЛНЕНИЯ ПО СИГНАЛУ РЕВЕРБЕРАЦИИ В ДВУХПОЗИЦИОННОЙ СХЕМЕ АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ОКЕАНА

Л.С.Долин, М.И.Кондратьева

Получены выражения, связывающие текущий энергетический спектр сигнала поверхностной реверберации с пространственным спектром ветрового волнения в двухпозиционной схеме акустического зондирования океана.

Выберем в качестве модели океана акустический волновод, образованный абсолютно мягкой статистически неровной поверхностью $z = \xi(\vec{r}, t)$ и плоскостью $z = H$ (морское дно). Считаем, что зависимость скорости звука от глубины $c = c_0(z)$ и акустические свойства дна таковы, что в океана может распространяться конечное число (N) нормальных мод с волновыми числами k_n и вертикальными распределениями звукового давления $\varphi_n(z)$. Излучение зондирующих звуковых импульсов и прием рассеянных поверхностью сигналов осуществляется с помощью линейных вертикальных антенн, разнесенных по горизонтали на расстояние d . Несущую частоту считаем достаточно низкой с тем, чтобы выполнялось условие малости характерной высоты ветровых волн по сравнению с длиной волны звука: $[(\xi^2)]^{1/2} \ll \lambda_{\text{об}}$. Пренебрегая эффектами стохастизации зондирующего сигнала на трассе его распространения, представим поле звукового давления на достаточно больших расстояниях от источника в виде суммы мод волновода:

$$p_0(\vec{r}, z, t) = \sum_{n=1}^N A_n \varphi_n(z) \left[\frac{\cos(\omega_1 t - r_1 k_n)}{(k_n r_1)^{1/2}} \right] \exp(-\beta_n r_1) H_1(t - r_1/v_n), \quad (1)$$

где

$$H_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_1/2 \\ 0, & |t| > T_1/2. \end{cases} \quad (2)$$

\vec{r} – горизонтальная составляющая радиуса-вектора \vec{R} точки пространства; z – глубина этой точки; r_1 – расстояние от излучающей антенны до точки $R(\vec{r}, z)$ (см.рис.1); A_n – коэффициент возбуждения n -й моды, определяемый параметрами излучающей антенны; v_n и β_n – групповая скорость и коэффициент затухания n -й моды; ω_1 – несущая частота зондирующего сигнала; T_1 – длительность зондирующего импульса.

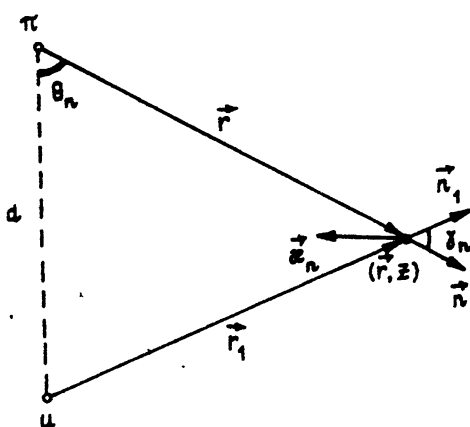


Рис. 1:

В приближении однократного рассеяния (см.[1]) расчет рассеянного на поверхности океана поля $p_s(\vec{r}, z, t)$ сводится к решению уравнения

$$\Delta p_s(\vec{r}, z, t) - [1/c_0^2(z)]\partial^2 p_s(\vec{r}, z, t)/\partial t^2 = 0 \quad (3)$$

при граничном условии (см.[2])

$$[p_s(\vec{r}, z, t)]_{z=0} = -\xi(\vec{r}, t)[\partial p_0(\vec{r}, z, t)/\partial z]_{z=0}. \quad (4)$$

Предположим, что приемная антенна осуществляет пространственную и частотную фильтрацию сигнала реверберации, в результате чего на выходе антенны формируется текущий энергетический спектр этого сигнала $S^2(\omega, t)$. Здесь $S(\omega, t)$ - сигнал на выходе приемной антенны, имеющий вид:

$$S(\omega, t) = \sum_{n=1}^N B_n \int_0^H \varphi_n(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} [p_s(\vec{r}, z, t')]_{\vec{r}=0} K(t-t') dt', \quad (5)$$

где $K(t) = [H_2(t) \cos \omega t] [\pi T]^{1/2}$ - импульсная переходная характеристика фильтра:

$$H_2(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2, \end{cases} \quad (6)$$

T - длительность "окна анализа" входного сигнала ($T \gg 2\pi/\omega$); $\overline{(\quad)}$ - операция усреднения по времени в пределах временного интервала $\sim 2\pi/\omega$.

Не вдаваясь в подробности, приведем окончательное выражение для сигнала на выходе приемной антенны:

$$S(\omega, t) = \sum_{n=1}^N B_n A_n [S_c(\omega, t) \cos \omega t + S_s(\omega, t) \sin \omega t], \quad (7)$$

где

$$S_{c,s}(\omega, t) = -[\varphi'_n(0)]^2 [4k_n^2 \pi T]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int \int \xi(\vec{r}, t') H_1(t' - r_1/v_n) \cdot \\ \cdot H_2(t - t' - r/v_n) [r_1 r]^{-1/2} \exp(-\beta_n r_1) \overset{\cos}{\sin} (\Omega t' + k_n s) d\vec{r} + \Delta S_{c,s} \quad (8)$$

и введены обозначения: $s = r + r_1$; $\Omega = \omega - \omega_1$. Член $\Delta S_{c,s}$ пропорционален $\overset{\cos}{\sin} ((\omega + \omega_1)t' + k_n[r - r_1])$ и при последующем усреднении выпадает. Выполняя операцию статистического усреднения спектра по ансамблю реализаций $\xi(\vec{r}, t)$, можно показать, что средний спектр представляется в виде:

$$w(\omega, t) = \overline{S^2(\omega, t)} = [\pi T]^{-1} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N A_n A_m B_n B_m [\varphi'_n(0) \varphi'_m(0)]^2 [8k_n k_m]^{-1} \cdot \\ \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint B_{\xi}(\vec{\rho}, \tau) \cos(\Omega \tau - \vec{\alpha}_n \vec{\rho} \pm [k_m - k_n]s) d\vec{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t} \iint [r_1 r]^{-1} \cdot \\ \cdot \exp(-[\beta_n + \beta_m]r_1) H_1(\bar{t} - r_1/v_n) H_1(\bar{t} - r_1/v_m) H_2(t - \bar{t} - r/v_n) \cdot \\ \cdot H_2(t - \bar{t} - r/v_m) d\vec{r}, \quad (9)$$

где $B_{\xi}(\vec{\rho}, \tau) = \langle \xi(\vec{r}', t') \xi(\vec{r}'', t'') \rangle$ - функция корреляции ветрового волнения; $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r}''$; $\tau = t' - t''$; $\vec{r} = (\vec{r}' + \vec{r}'')/2$; $\bar{t} = (t' + t'')/2$; $\vec{\alpha}_n = -k_n(\vec{n} + \vec{n}_1) = -k_n(\vec{r}/r + \vec{r}_1/r_1)$ (см.рис.1).

Представим функцию корреляции в виде

$$B_{\xi}(\vec{\rho}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int \int W_{\xi}(\vec{\alpha}\Omega) \cos(\Omega \tau - \vec{\alpha}\vec{\rho}) d\vec{\alpha} \quad (10)$$

где $W_{\xi}(\vec{\alpha}\Omega)$ - спектр ветрового волнения. Тогда (9) можно переписать следующим образом:

$$w(\omega, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N M_{nm} \int \int W_{\xi}(\vec{\alpha}\Omega) [r_1 r]^{-1} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t} \cos([k_m - k_n]s) \cdot \\ \cdot H_1(\bar{t} - r_1/v_n) H_1(\bar{t} - r_1/v_m) H_2(t - \bar{t} - r/v_n) H_2(t - \bar{t} - r/v_m) \cdot \\ \cdot \exp(-\beta_n + \beta_m)r_1, \quad (11)$$

где

$$M_{nm} = A_n A_m B_n B_m \pi^2 [\varphi'_n(0) \varphi'_m(0)]^2 [8k_n k_m]^{-1}. \quad (12)$$

Считая ветровое волнение изотропным, воспользуемся известной аппроксимацией его пространственно-временного спектра (см.[3]):

$$W_{\xi}(\vec{\alpha}\Omega) = W_{\xi}^0(\alpha_n) [\delta(\Omega - \Omega_n) + \delta(\Omega + \Omega_n)] 2^{-1}, \quad (13)$$

где $W_{\xi}^0(\alpha_n)$ - пространственный изотропный спектр,

$$\Omega_n = [\rho \alpha_n]^{1/2}. \quad (14)$$

Последнее соотношение означает, что мы рассматриваем достаточно длинные ветровые волны, для которых связь между пространственным и временным спектрами определяется дисперсионной характеристикой волн на свободной поверхности жидкости. Переходя далее в (11) к интегрированию по полярным координатам, получим

$$w(\omega, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N M_{nm} W_{\xi^0}(\alpha_{n0}) [s^2 - 2sd \cos \Theta_0 + d^2]^{3/2} [\rho k_n \cos(\gamma_0/2)]^{1/2} \cdot \\ \cdot [\rho k_n d^2 \sin \Theta_0 (s \cos \Theta_0 - d)]^{-1} \left\{ \int_0^{\infty} r_1^{-1} dr \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t} H_1(\bar{t} - r_1/v_n) H_1(\bar{t} - r_1/v_m) \cdot \right. \\ \left. \cdot H_2(t - \bar{t} - r/v_n) H_2(t - \bar{t} - r/v_m) \cos([k_m - k_n]s) \exp(-[\beta_n + \beta_m]r_1) \right\}_{\Omega=\Omega_n} \quad (15)$$

где $\alpha_{n0} = \Omega^2/\rho$, $\cos(\gamma_0/2) = \Omega^2[2\rho k_n]^{-1} = \alpha_{n0}[2k_n]^{-1}$, а угол Θ_0 определяется из соотношения $\cos(\gamma_0/2) = [s - d \cos \Theta_0][s^2 - 2sd \cos \Theta_0 + d^2]^{-1/2}$.

Как нетрудно увидеть, наиболее интересным с точки зрения возможности восстановления спектра ветрового волнения) является случай, когда в формировании сигнала реверберации принимает участие узкая группа мод с близкими волновыми числами. При достаточно больших длинах трасс ее выделение происходит автоматически, поскольку отсеивание высших гармоник (своеобразная селекция мод) производится самим волноводом. Если же размеры акватории, на которой мы хотим получить информацию о спектре волнового волнения, невелики, то маломодовый режим зондирования может быть обеспечен за счет использования протяженных вертикальных антенн. При реализации любого из этих вариантов величины волновых векторов резонансных гармоник ветрового волнения, формирующих сигнал реверберации, мало отличаются друг от друга. Следовательно, мы можем вынести в (15) пространственный спектр ветровых волн в некоторой точке $\bar{\alpha}_{n0} = \alpha_0$ знак двойной суммы. Кроме того, налагая на коэффициент затухания условие: $\beta_n v_n T_1 \ll 1$, обеспечивающее малость затухания сигнала на длине зондирующего импульса, вынесем из-под знака интеграла соответствующий экспоненциальный фактор. В итоге получим выражение, позволяющее восстановить пространственный спектр ветрового волнения по сигналу реверберации при условии, что нам известны параметры мод акустического волновода:

$$w(\omega, t) = W_{\xi^0}^0(\alpha_0) \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N M_{nm} [s^2 - 2sd \cos \Theta_0 + d^2]^{3/2} [\rho k_n \cos(\gamma_0/2)]^{1/2} \cdot \\ \cdot [\rho k_n d^2 \sin \Theta_0 (s \cos \Theta_0 - d)]^{-1} \left\{ \exp(-[\beta_n + \beta_m]\bar{r}_1) \int_0^{\infty} dr r_1^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cos([k_m - k_n]s) \cdot \right. \\ \left. \cdot H_1(\bar{t} - r_1/v_n) H_1(\bar{t} - r_1/v_m) H_2(t - \bar{t} - r/v_n) H_2(t - \bar{t} - r/v_m) d\bar{t} \right\}_{\Omega=\Omega_n} \quad (16)$$

В качестве примера рассмотрим частный случай, когда обе антенны настроены на одну и ту же моду с номером n . Тогда, полагая для про-

стоты размеры окна анализа" рассеянного сигнала и длительность зондирующего импульса равными ($T = T_1$) и считая $t \gg T$, окончательно будем иметь

$$w(\omega, t) = MD(\Omega, t)W_{\xi}^0(\Omega^2/\varrho), \quad (17)$$

где

$$M = \pi^2[\varphi'_n(0)]^4 A_n^4 \exp(-2\beta_n r_1)[k_n^2 T]^{-1}; \quad (18)$$

$$D(\Omega, t) = 2\Omega[\Omega_1^4 - \Omega^4]^{-1/2}[l^{-2} - 1 + \Omega^4/\Omega_1^4]^{-1/2}[ld]^{-1}, \quad (19)$$

$$l = v_n t/d, \quad \Omega_1 = [2\varrho k_n]^{1/2}$$

Зависимость функции $D(\Omega, t)$ от частоты Ω представлена качественно на рис. 2, где $\Omega_0 = \Omega_1[1 - l^{-2}]^{1/4}$.

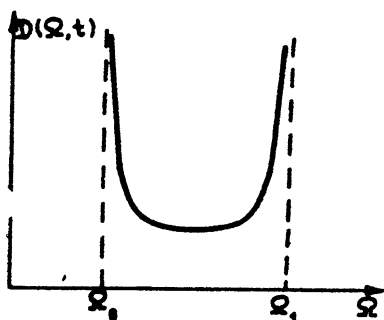


Рис. 2:

Нетрудно увидеть, что для получения наиболее полной информации о спектре волнового волнения необходимо для регис рации сигнала реверберации выбирать временные интервалы, близкие ко времени прихода прямого сигнала. При этом, зная вид функции $D(\Omega, t)$, мы можем восстановить пространственный спектр ветрового волнения в достаточно широкой полосе частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. - М.: Наука, 1978.
2. Долин Л.С., Нечаев А.Г.// Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т.24. N 11. С.1337.
3. Монин А.С., Красицкий В.П. Явления на поверхности океана. - Л.:Гидрометеониздат, 1985.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
15 октября 1992 г.

**ON THE POSSIBILITY OF RECONSTRUCTING THE WIND
WAVE SPECTRUM FROM A REVERBERATION SIGNAL IN A
DOUBLE-POSITION SCHEME OF ACOUSTIC SOUNDING OF
THE OCEAN**

Dolin L.S., Kondratyeva M.I.

The method of reconstructing the wind wave spectrum from a reverberation signal which arises when sounding the ocean by impulses of a low-frequency sound is investigated. It is shown that this method based on the use of linear vertical radiating and receiving antennas spaced horizontally permits one to obtain the information about the spatial wind wave spectrum in sufficiently wide frequency range.