

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XXXVI № 7

Нижний Новгород

1993

Содержание

Miller M.A. Waves, Waves, Waves	576
Миллер М.А. Волны, волны, волны ... (Перевод на русский язык).....	588
Громов Е.М., Таланов В.И. Динамические состояния высокочастотных полей в плавно неоднородных средах.....	601
Кондратьев И.Г., Пермитин Г.В., Смирнов А.И. Дифракция волновых пучков в плавно неоднородных средах.....	616
Степанов Н.С. Волны в нестационарных средах.....	623
Сорокин Ю.М. Эффект Доплера и aberrационные эффекты в диспергирующей среде.....	635
Mainardi F. Energy Propagation for dispersive Waves in dissipative Media.....	650
Enflo B.O. Some Analytical Results on Nonlinear Acoustic Wave Propagation in diffusive Media.....	665
Гурбатов С.Н., Саичев А.И. Сильная турбулентность и нелинейные случайные волны в потоках частиц гидродинамического типа.....	687
Максимов И.Л., Шалаев И.Ю. Нелинейные волны в сверхпроводниках.....	708
Yoon S.W., Crum L.A. Underwater Sound Generation and Scattering from a Bubble Column.....	727

**Международная школа-семинар
"ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ
ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ"**

В июне 1992 года в Нижегородском университете проходила школа-семинар "Динамические и стохастические волновые явления". Основной задачей школы по замыслу программного комитета (С.Н.Гурбатов, Н.С.Степанов, В.В.Тамойкин, Л.А.Островский) была попытка хотя бы частично отразить основные направления Нижегородской (Горьковской) школы радиофизиков в области теории волн. Это была одна из первых международных школ, проводимых в ННГУ и ранее закрытом г.Горьком, и, пожалуй, первая школа-семинар, где студенты, к которым мы причисляем также аспирантов и молодых научных сотрудников, выступали не только в качестве слушателей, но и докладчиков. В связи с тем, что семинар представлял Нижегородскую школу радиофизиков, в числе лекторов и студентов из России были представители только Нижнего Новгорода: ННГУ, Института прикладной физики РАН и Научно-исследовательского радиофизического института. Международная часть была представлена университетами Англии (Кембридж), Швеции (Стокгольм, Уппсала), Южной Кореи (Сеул), Италии (Болонья). Все лекции, доклады на школе были прочитаны на английском языке, но в специальных выпусках журнала "Радиофизика" большая часть докладов публикуется на русском языке.

Всего на школе было заслушано 28 лекций и 30 студенческих докладов. Лекции и доклады условно были распределены по следующим секциям:

1. Волны в неоднородных и нестационарных средах.
2. Нелинейные волны и структуры.
3. Волны в случайных средах.
4. Волны в природных средах.

Из докладов, которые прочитаны на школе и публикуются, особое место занимает лекция Михаила Адольфовича Миллера "Волны, волны, волны...". В ней содержится всего четыре формулы, самая сложная из которых — представление плоской волны в комплексном виде. Но тем не менее, на наш взгляд, она требует наибольших усилий от читателя, действительно пытающегося проникнуться волновым духом.

Организаторы и участники школы благодарны Министерству науки, образования и технической политики (в настоящее время Комитету по высшему образованию России) за финансовую поддержку, а также руководству Нижегородского университета, Института прикладной физики, Нижегородского радиофизического института, Российского акустического общества за помощь в проведении школы. Хочется также отметить четкую и слаженную работу студенческого оргкомитета (председатель Младенцев А.Л.), редактора сборника тезисов трудов школы Сорокина Ю.М. и членов оргкомитета школы Бакунова М.И., Балыбердина В.И., Донского Я.Л., Кондратьева И.Г., Куликова А.М., Лебедева В.В., Мартынова А.И., Муровской Г.И., Прончатова-Рубцова Н.В., Щемелева Е.Г.

Сопредседатели оргкомитета
С.Н. Гурбатов, Г.А. Марков

WAWES, WAVES, WAWES ...

M.A. Miller

In memory of M.L. Levin,
unseparable from me.

6. THE COMMON COMMENTARY TO THE RUSSIAN AND ENGLISH TEXTS.

In the spring of 92 Prof. S. Gurbatov invited me to deliver an introductory lecture at the International School-Seminar on Wave Phenomena here, there and everywhere. (The official nomination is given in the title-page). A friend of mine liked to joke in such a case (with a dismal mood): do not permit yourself to be ailing with arbitrary diseases but try to choose illnesses in accordance with specializations of your doctor friends. After I had studied the preliminary programme of the School I understood it was sorted out in accordance with interests and potentialities of selected wave-minded lectors. And then it has suggested a primitive idea to me to adjust my lecture to their weakness for waves. The more so, as some years ago Prof. L. Ostrovsky and I revealed (to our great surprise!) that almost all investigations of the Nature could be brought to a "waveous" kind of work. Therefore, the first lecture in the Wave-School could be slightly moralizing and covering a wide range of wave-views.

The time limitation (to keep within the limits of a single lecture!) as well as my uneasiness in English (the lecture was not only delivered but thought out in English) did not allow me to be sure of the success of a multi-scaled mixture of "seriosities, ironies and challenges". (The manners I prefer to be the most adequate to my purposes!) Therefore, I have made a translation into Russian, the language in which I feel more free and, moreover, it is the language of my irrational thinking. Although I am deeply persuaded that only rational algorithmic thoughts are extralanguageable and at the same time any imaginative (image-bearing) thought (which cannot be divided into isolated "micro-senses") is always contexted (contextual). And one hardly may tear it off the language which it was born among. Such a thought may be interpretable, treatable, expoundable... even be danceable but never can it be translated word-for-word without emotional losses.

Probably I have declared the trivial considerations which every linguist knows very well. But we the physicists, being "plenipotentiaries" of the so-called natural or exact sciences often forget that we belong to ordinary sinful members of mankind. Hence, we often fail to realize vacillation of many conceptions in which our logically created "well-being" is grounded.

By use of these short preliminary elucidations I want to relax an irritation which my deviation from "the rules of good manners" would provoke or excite; such rules are different not only for different gendres but for different languages too.

And, finally, I wish to say some grievous supplementary words. During the time-interval between the delivery and publication of the lecture M. L. Levin, my teacher and the nearest friend, died. A great number of my beliefs, convictions and dispositions were induced by him. And my strange speculations on waves were the last (it seems to me) matters (of the math-physics nature) which he had been reading before his dying day. When preparing the lecture I was advised by him in some points but afterwards he had no possibility to correct my eccentricity (or "kinks"!). And yet I dare to dedicate this "opus" to him (in his blessed memory!).

1. PREPREWORDS

"Rule! Rule the waves!
And never will be slaves!
...of the waves!"
(A free composition)

The authorities of the Wave-Phenomena-Summer-School-Seminar have entrusted me with delivering the starting-up lecture in English on a free subject. I should not dare to betray their confidence. I'll talk exactly about the waves. But at the beginning I am obliged to make some apologetic remarks.

English is not my first tongue (more essentially it is not the language I used to think in!) and I often experience great difficulties when trying to express in English fine details of my intentions slightly instructive and slightly challengeable.

Moreover I know that about a quarter of the so-called "emotional information" is not perceived by means of words, but through the other "channels" such as intonations, expressions of faces, eyes and other parts of bodies (to say nothing about some mysterious waves of "tele"-interaction!). I am not sure that my way of communications with an international (multilingual!) audience, will be adequate to my purposes. Another difficulty I shall be overcoming is due to the lack of information about the participants of the School. The age of the students represented here is dispersed between 19 and 30! Probably the interval of interests is also very large. A 30-year-old student, especially, is quite a "puzzle" for me: he either could have stayed too long on the start or in equal measure is approaching too fast the finish of his development (getting asymptotically to the state of "perpetual student, *ein ewiger Student*", nevertheless Hamlet, the student, was under forty!). And one more remark. I see most students and — so-to-say — post-students present here belong to — so-to-say — "Russian understanding" people and they can feel "lingual discomforts". In order to help them I shall translate some keywords that defined my train of thought into Russian putting them in — so-to-say — "oral brackets". And it could be useful for foreign students to catch some Russian soundings.

Besides, I have written the text beforehand and I shall be consulting it. The text is divided in sections supplied with titles. Such "quantization" must help (I believe!) to get to the idea (the plot) of the lecture.

2. PREWORDS OR PREMATURE WORDS *

I was told that there exist three types of musical introductions (overtures!) according to the effects they have to produce on listeners: a)the survey of basic melodies, b)putting listeners in an adequate spirit, c) adiabatic gradual (little by little) transiting them from the usual state of every-day life into the World of Music (or Physics, or Waves, or something else).

In spite of my piphagoric respectfulness (near to a worship!) of the Number Three (especially when something is being classified) I dare to extend (to prolong) the traditional list of overtures and to present to you the introduction of the fourth style where the principal subject of the musical (scientific) composition will be subjected to unmasking and preventive criticism.

3. THE HISTORICAL STORY

The story has its own history. Some years ago Prof. Lev Ostrovsky and I were engaged in the interesting and hard work: the editorial board of the Physical Dictionary (Encyclopaedia) invited us to write the article "Waves". The Encyclopaedia keeps strictly to one indisputable rule (very troublesome to be fulfilled): at the beginning of every article authors must give a precise definition of the entry word.

And we saw that we were unable to stand this test at least in the case concerned. We studied all reference books accessible to us and were awfully struck with the absence of a universal definition of the waves in spite of common use of the phenomena associated with this undefined term!

The waves exist by themselves but the conception of waves does not? The promising introduction to the wave-phenomena-school, isn't it?

4. THREE PERSONS IN ONE HEAD

One of the best ways of discussion was invented in the times of ancient Greeks (probably by Platon) and was reestablished many centuries later in the Renascence due to the prominent dialogues published by Galileo Galileo. Let three persons have gathered together (may be really or may be—and it is more feasible—mentally—somewhere inside the head of a single person!) in order to express their different (it is desirable) opinions on the subject regarded. The success would be essentially dependent on a selection of "personnel". For example, I prefer to draw in my head such a group of debators: a)a broad-minded person (in the limiting case he knows nothing about everything!); b)a deep-minded person (in the opposite limiting case he knows everything about nothing!); and c)and intuitive-minded person (who knows nothing about nothing and everything about everything simultaneously and vice versa too!).

By the way I have made a well-thought-out choice: every character plays his own role which approximately corresponds to specialization of the human brain: a)an imaginative thinking (usually due to the function of the right

*I have adopted this strange term from the Russian musical jargon (slang). Many musical experts (critics!) grew a habit to explain music before it has to be performed.

hemisphere); b) a logic thinking (the left hemisphere); and c) an intuitive thinking (the deep layers of brain).

Just now I'll retell you some fragments of a virtual discussion of the three without indicating whose opinion I shall be citing. Let this be your first easy exercises to-day.

5. DISCORD IN DEFINITIONS

The *McGraw-Hill Dictionary* declares: "WAVE (PHYS.) - DISTRIBUTION WHICH PROPAGATES FROM ONE POINT IN A MEDIUM TO THE OTHER POINTS WITHOUT GIVING THE MEDIUM AS A WHOLE ANY PERMANENT DISPLACEMENT".

One of the debators has to enter into an argument at once. This definition has reduced all wave-motion to the so-called travelling (or running) waves: however, two periodic waves propagated in the opposite directions form (so to say!) the standing (or stationary) wave which propagates nowhere because it is nothing but distributed oscillations! And vice versa two standing waves can give (being superposed, if possible!) a travelling wave again!

"Oh, it is not a single objection," - can say another (but different-minded man). "I know that even a usual travelling wave transfers only along the direction of its propagation a lot of different physical (measurable) values such as energy, momentum, angular momentum..." etc.

Suddenly, the fresh-minded man has displayed a keen interest in dissension. He asks: "Are we able to state what kind of physical (or of another nature!) values can be transmitted by travelling waves (or by wave-like motions)?" I do not know an exhaustive criterion. But the statement if being proved will look good as good as a high quality theorem!

May be somebody would make an attempt to formulate it more accurately and prove it in the most general form. Then they ought not to forget about (for instance!) the waves of rumors or the Ψ -waves in quantum physics (latent probabilistic!).

But let us go on. The *McGraw-Hill* definition has some more severe defects. It connects the waves-motions with perturbations of media. Consequently, it eliminates the most representative waves in the macroscale physics—the gravitational and the electromagnetic ones. These waves are not supported by any macro-medium, they are perturbations of physical fields and that's all. All facts, any measurements corroborate it.

At that moment one of the interlocutors could have a sensation of appearance of the brain-wave about the true symptom typical for all waves universally (the brain-wave on waves, excuse me for this word-play-pun-calembour). He stated: "The phenomena of interference is the general sign of any motions which one can interpret as a wave motion contrasting point-particles-motions."

"Oh, Lord," - the other refuser said, - "it is slightly wrong! The School-Seminar you will be attending is partly concentrated on the problem of the incoherent waves with stochastically varying phases. In this case the interference picture may be absolutely absent and, if generally speaking, it is dependent on the method of observation!"

"The dependence of the method of observation (or measurement!)!! Isn't it the death sentence to a definition of the conception of waves forever?" I do not know. May be. However, I am sure it is a typical situation in Physics in general! The best, the simplest, the most sound(!) demonstration consists in measuring any motion using different moving reference frames. So the hilly (corrugated) surface of the Earth would imitate a wave-behavior when observed from a frame flying above and along. And vice versa, any wave travelling at least with a velocity less than the limit velocity of light can be transformed into a motionless static relief (*Nature Morte, Stelles Leben, Still Life of waves!*)

The high-words-discussion of the Three has not been finished. And there is no reason to continue it: when every "no" follows every "yes" this alternating sequence cannot approach any answer!

6. THE "ZOO-COLLECTION" OF WAVES

What is to be done? I think nothing or follow a kind English prompting—*Live and let live'*

The situation resembles the biological impasse (a standstill!) about two and a half centuries ago. A great number of plants and animals had been observed and discovered before the Swede, Linnaeus, established his reputation (in 1730) having recommended his systematics. He classified every living thing, all vegetable organisms, all flesh, man and beast, distributed them into different groups and species according to their outward ("formal") appearance.

Later Charles Darwin suggested the most satisfactory classification which reflected the evolution of the organisms classified.

I invite you, my listeners (or readers) to do (to perform) the analogous work in the Kingdom of waves acting either by "the method of resemblance" (the Linnaeus-like systematics!) or by "the method of evolution" (the Darwin-like systematics!). It would be a multiparameter and a multivariant classification, I suppose. By the way it seems to me that the word "wave" shares the linguistic lead in numbers of "adjectives" specifying it (at least among physical terms)!

There is no end to list all waves known under various names: longitudinal, transverse, head, bow, shock, side, plasma, whistler, wind, surface, leaky, spin, circular-polarized... waves, waves, waves...

The organizers of the Wave-School-Seminar may announce a competition for the best (the most satisfactory or the most surprising!) wave-classification where static reliefs would be brought in correspondence with plants as well as non-stationary waves would be like movable animals. *

Frankly speaking I am unaware of a perfect result in the case. And I should like to welcome any success, particularly if the headquarters of the School will grant a prize for winners. But nothing can compare with the joys of the act of reaching a goal!

*Sic! As distinct from the plant-animal kingdom, in the wave-kingdom any "wave-plants" (motionless beings) can be transformed into some "wave-animals" (movable beings) and correspondingly a botanic wave-garden into a zoological one or vice versa

7. SOME MOTIONS ARE MORE WAVES

A month or two ago when I agreed to give an introductory talk about waves it was getting clear to me that I would finish at that particular place where the zoo of waves will be "open for surveying". Then I have changed my decision. The first lecture is destined to have the happy end! Hence if there is no common sign, no common property for all motions which our intuition, imagination and everyday experience used to regard as waves we may (and might!) appoint some motions on the post of wave by the method known in Russian as a method of "the administrative command". So we ought to select a proper "claimant" (pretender, candidate, applicant) for vacancy.

The prominent English novelist (writer) Orwell advised an outstanding aphorism about equality of rights among animals. He has advanced: "*All animals are equal but some animals are more equal than others!*" Though I have found a similar byword in ancient Chinese papers it does not matter because Orwell has breathed new life into it.

My late friend, Prof. Lev Weinstein, liked to comment such a collision as follows. He said: "*When somebody has discovered something, just immediately predecessors come running!*".

Adapting Orwell's aphorism to our purposes I am advancing the slogan (password): *All motions are waves but some motions are more waves than others!!*

The task is now to propose the simplest and at the same time the most representative wave-motion as a standard (as a "prime wave"!).

A new question arises now! What sense can be put into the conception of simplicity and complexity? I am afraid it is an unanswerable question.

For example, Kholmogorov's criterion of the complexity consists (approximately, roughly speaking) in evaluation of the numbers of the operation which can reduce a statement considered (a phrase, a function, something carrying information, etc.) to any primary statement selected as a standard one. Being applied to our case, this criterion has and uncertainty—it is uneasy to settle what one means by a separate operation! And I am leaving this question open or rather to your intuitive solution and interpretation. My principal (main, key!) attention will be paid to the choice of a primary standard wave.

The second part of the lecture can be called "the praise worthy-words to the sine waves" or using the Greek term deformed by English pronunciation "The eulogy to the sine-waves".

The simplicity of something cannot be proved or disproved, it can be only well-reasoned and argued (and as well-grounded as possible).

I shall list several sensible reasons and arguments for sine as a function deserving to play the role of a primary model for waves.

8. STRANGE PECULIARITIES OF THE CHOSEN STANDARD

You know a mathematical model of an arbitrary sine-wave:

$$a \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad (1)$$

This formula describes the single-scalar running waves in the r -space (sometimes I call it in jest "arty-space"!); it is conceivable that this nickname drops a hint in a theatrical character of the space which Shakespeare noticed once upon a time. Furthermore a is the amplitude, the phase, ω the frequency (in abbreviated form "freq"), \vec{k} the wave-vector (nicknamed by me "waver"). I like to call the (ω, \vec{k}) -space "*O.K.-space*" or sometimes "*freq-waver space*" (also in jest, certainly). It is necessary to notice that most waves involved in physical processes are double-scalar ones (densities and velocities in acoustics, electric and magnetic fields in electrodynamics, etc.). But it is of no essential importance for my main intentions now. Nevertheless, do you know why so? Pitifully I have the remotest idea about the standard of knowledges of the audience as a whole. May be some questions seem to you too trivial. But for me it is not an elementary problem. If somebody had the gift for generalizing everything on earth let him (or her) try to state general criteria for the quantity of independent scalars to be needed for mathematical description of wave-motions in one case or another.

I am going on. It may strike you as something strange that the wave standard (1) cannot be realized under any physically accessible (reachable) circumstances. The officials of the National Bureau of Standards would send you to doctors if you bring them for approval as a standard the infinite extended (in space and time!) wave-field. However that is no problem (truly speaking only in some unordinary cases) to satisfy their requirements. Please endeavour to demonstrate it by inventing the methods of trapping a piece of the purely travelling wave (of physical or nonphysical nature!) inside a finite volume surrounded by the closed surface with proper boundary conditions on it. It is of special interest to understand what kind of "media" filling the volume is permissible for successful solving the problem as well as in what cases making an acceptable standard one can use not a single sine-wave but the whole complex of sine-waves in the form of a sum or an integral.

(*Sic!* Don't forget about nonlinear media, dissipative and antidissipative systems, and certainly about the waves of information!)

9. SINE FUNCTION. MATHEMATICAL ARGUMENT.

Let us draw an equidistant succession (set, sequence) of points along the straight x -line (the rectilinear curve) and let us be asked to connect all points with the simplest analytical function. (A mathematician-purist-keeper of strong rigorousness has to compel me expressing more accurately to connect the set of points with the so-called entire-function which admits everywhere to be expanded in the Taylor series!). Of course the trivial connection is the rectilinear one while the following curve with minimal (but finite!) values of the first derivative is the sinusoidal curve:

$$a \sin kx \quad (2)$$

When I was preparing the lecture I expected that this statement will not have a well-deserved effect on most listeners. It is a great pity for I qualify it as the Property Number One! And I wish to convert you (or at least some people among volunteers) to my faith.

From the point of view of the orthodox Darwinism the first step in origin (and development) of human thinking was taken by our ancestors when they started to compare (in math-terms to compare isomorphically) a set of real objects (trees, fingers and so forth) with the abstract sequence of numbers (one, two, three, four, five...) "In the Beginning was the Number!" (The version of *The Gospel according to Falaley* the famous Greek thinker). And consequently, at the beginning of thinking was the simplest analytical function and that was the sine-function!

Thus, God has prompted us that the sine-function is isomorphical to the numerical sequence! God created it inside our mind-space and *He saw it is good*. So we also see it is good indeed!

10. SINE FUNCTION. PHYSICAL ARGUMENT.

Did someone meditate sometimes what laws of our Nature are the most stable and trusty? So to say, is there something Holy of Holies in the world? The raised question can be answered in the positive. So I think. The laws of conservation based on the time-space symmetry they are.

And every law from this group can be demonstrated by means of the elementary movement of a point object (classical point particle). For example, a particle moving along a straight line with the constant velocity serves as the simplest demonstrator of the conserved momentum. Just the law of the conservation of an angular momentum can be illustrated by a point-particle moving along a circle while absolute value of its velocity is being constant. I like to call the first model as "*lineator*", and the second one as "*rotator*". The projection of any rotatory movement on the direction of any lineatory movement gives the oscillatory movement described by the sine-function:

$$a \sin(\omega t) \quad (3)$$

Thus, there are two primary motions in the Nature (at least two!): a rectilinear one ($\dot{r} = \text{const}$) and a rotating motion ($|\dot{r}| = \text{const}$). And they give birth to the oscillating motion. Any oscillator ("sinusoidator") can always be considered as the component of a rotator.

A productive conjecture may occur to a broad-minded man here: is every rectilinear oscillator not more than "underconstructed" rotator?

The mathematical technique allowing to reconstruct the rotator from an oscillator in arbitrary cases of sine and cosine functions with varying amplitudes and phases is based on the Gilbert's transformation. I shall not go into details and allow myself only to pay an attention on two principal point-views on the philosophical aspect of the problem. Someone treats it as a purely mathematical procedure. (And I am ready to hold the same opinion reserving a portion of scepticism!) But someone believes that our minds are able spontaneously (automatically!) to reproduce the rotatory picture from the oscillatory one. (And I would like to adopt this view also preserving some portion of scepticism!)

A great number of theoretical speculations as well as of practical instruments (in the first turn measuring and receiving devices) use "the

method of rotorization" (more known in every-day science as the method of analytical signals).

One of the popular Russian satirists liked to exclaim: *Let secondary be primary and let primary be secondary!* Adapting to our purposes we may say after him: *Let oscillatory be rotatory and let rotatory be oscillatory!*

11. SINE FUNCTION. ANTHROPOIC ARGUMENT.

The third argument which parades the sine function as a unique dependence may be referred to the anthropic category. I am afraid it would seem to the majority of people present here not only a sudden but also a strange extract from science fiction. But I regard these reasons absolutely seriously.

The modern conception of the Origin of Human Intellect (the highest achievement of *Homo Sapiens*) disintegrated to two "subconceptions": the direct *subconception* and the converse (inverse) *subconception*. (By the way, almost all problems which have to be solved can be divided into such groups!)

The traditionally-minded scientists consider the Nature to be created by God or by the Play-thing of Destiny. And they investigate the laws of the Nature regarding them as directives being "sent from above". This is the typical model of the direct problem: the Universe is given and one has to explain the Origin of Life (Intellect) in it.

The converse task is quite opposite. The only initial condition lies in the fact of existence of Intellect. Then one must select a proper (appropriate!) Universe governed by proper laws. It is the well-known Anthropic Principle. There is the General Anthropism which embraces a wide range of problems including constructing "the good Universe" as a whole (*im Grosse*). And there is the Small Anthropism which guarantees the conditions of creating Intellect only in a separate region of the Universe (*im Kleine*, "in small" according to any parameter—not obligatory according to the scale of length).

The World we have been inhabitated in possesses a good universal property: the description of any processes, any motion, any phenomenon admits approximately/the linearization *im Kleine* ("in small"). Hence under this approximation the principle of superposition (addition of motions!) is strictly kept! It reigns! Out of this assumption we are unable to imagine the arithmetic (as well as usual logic!) actions. I think (and a lot of people too!) that the existence of the "*phenomenon of superposition of phenomena*"(!) is the necessary (!) condition (!) of creating Intellect.

Certainly this is neither an absolute Truth nor a theorem. One of our fellow-workers when asked "*what are you doing just now*" liked to reply (causing disorder in the ranks of his friends): "*What am I doing? I am beautiful, I am fine!*"

So we have quite the same answer! What significance is this rule of? It is beautiful and that is all!

Now I dare to formulate "the braver conjecture" outlooking similar to a theorem indeed. I assume: The description of all nonlinear phenomena can be reduced to finite or (at least) finiteless (infinite) set of linear relations (equations or any algorithmic forms open or concealed to measuring). Someone

considers this reducing to be trivial, someone—to be wrong. Please find your place among this disagreement. And maybe you will manage some criteria for those nonlinear relations which can be reduced to the finite (!) combination of linear ones.

The linear Schroedinger equation for Ψ -function may be regarded as the most fundamental example: the real measurable value $|\Psi|^2$ does not satisfy the principle of superposition but the directly unmeasurable Ψ -function does satisfy!

I do not know who the author of the outstanding aphorism on the subject is. I have been told about it by a scientist attending my every-week lecture. He used to say: "All linearities are from God, all nonlinearities are from the cunning Evil One!"

Have you caught a connection between my glorification of linearities and sine waves? I believe you have!

The sine-wave-motion expressed in the form of the exponential function (due to the mysterious Euler relation!)

$$a(\omega, \vec{k}) \exp(i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}), \quad (4)$$

is the universal solution of any linear equation (and often of any linear algorithmic operation).

Thus, if "Knowledge is Power", the sine-wave is a good instrument to master this knowledge!

12. SINE FUNCTION. MATH-PHYS-ANTHROP ARGUMENT.

The last argument is based on the wonderful property of the well-known Fourier transform. It puts into the single-valued correspondence (under certain math-conditions which are not very "severe" from the physical point of view) between (\vec{r}, t) -space and (ω, \vec{k}) -space. Consequently, both the spaces are isomorphical and in some sense they are identical!

A surprising question can be raised then: *Why do we prefer in our everyday activity to live in the "arty-space" \vec{r}, t -space?*

It is a conclusion made by a too deep-minded person, although the broad-minded man is well informed that we live in all sets of isomorphic spaces simultaneously! However some spaces seem more privileged in realization of the laws of Nature. We have got back again to the problem of simplification and complexification!

I confine myself only to the most important (from the view-point of the local Anthropism!) argument induced by the Principle of Causality.

In the "arty-space" God has given an order: "*Let Time be flowing unidirectionally!*" Under a totalitarian regime nobody makes a protest against "commands from above". And the Nature belongs (in a certain sense) to such a kind of systems. True enough, it is a moot point to get whether the real totalitarianism imposes (dictates) only laws of all possible motions also (i.e., all manifestations of the laws of the Nature). No theory can explain unidirectional course of Time "once and forever". But I suspect that refusal from the Causality Principle (at least in Macro-Physics!) would lead to an

"outburst of the causality instability"; cause → effect → cause → effect... and further something unpredictable!.

Under this absurd behavior neither artificial nor natural Intellect would hardly come into being. I am almost sure in it (however without removing some refined doubts!)

And look! The Principle of Causality can be expressed in the simplest form just (exactly!) only for "the arty-space"! In any other isomorphic space this Principle is concealed (hidden) in the depths of phys-mathematical complexities.

So in the "O.K.-space (ω, \vec{k})" it is represented by the generalized Kramers-Kroenig-Leontovich relations between ω and k — rather difficult for step-by-step interpretation. But on the other hand, the "O.K.-space" is a perfect room for wave-minded scientists who intend to study wave-kinematics or wave-dynamics when it is possible partly to ignore the Causality Principle.

What moral can be drawn from these speculations? *All isomorphical spaces are identical but some isomorphical spaces are more identical than others!* And everybody has the right to choose the most suitable space not forgetting to peep in the others in case of need (as required).

And one more notation. The "arty" and "O.K."-spaces are elite-like (extraordinary) among infinite sets of other isomorphical spaces due to special properties of the sine function I was talking you about just before. They are Fourier-conjugated Twin-spaces! But any twins have to have common genetic components. The simplest function being conserved under Fourier transformations is the Gaussian one. In a more general case these are Hermit-functions. They play an unprecedented role in our explanation of the Nature. And the prime cause of their high significance may be suggested to be connected with the genetic affinity according to Fourier-conjugated Twin-spaces!

Remember, please! Any point-object in the arty-space transforms into an "infinite-distributed-object" in the O.K.-space and vice versa. The Great Principle of the Nature—the Principle of Uncertainty based on the Duality of these Twin-spaces being taken combined!

13. PARTING WISHES.

I am coming to the promised happy end. In spite of plenty of waves, waves, waves... we have a good primary standard and can evaluate "wave-quality" of any motion by measure of near or remote likeness with the standard wave.

That is all. The rest is from the cunning Evil One!

Completing my talk I want to inform you that the written text of the lecture has a prefaced epigraph. It consists of a free composition of the British (Britania) National Anthem and of my parting wishes. Here it is:

" Rule! Rule the waves!
And never will be slaves...
...of the waves!"

But how can one avoid (or deliver from) slavery or servitude? The best way is advised by John the Apostle: *And you shall know the Truth, and*

the Truth shall make you free! (The Gospel according to John, Chapter 8, verse 32). I apologize for mistakes I was making during the lecturing in grammar, pronunciation and particularly in putting accents! to say nothing about intonation.

"Aber Irren ist menschlich." Das ist ein Deutscher Ausspruch. * *"To err is human."* May be such fault-making is also a symptom of our dependence on the Small Anthropic Principle!

I am very obliged to those who were understanding me and separately to those who weren't for their long-suffering. Thank you.

*In Latin: *"Errare humanum est."* However, I am not sure that it does not originate from ancient Greeks (hypothetically, Feognid, VI B.C.)?

ВОЛНЫ, ВОЛНЫ, ВОЛНЫ ...

(Перевод на русский язык)

M.A. Миллер

Памяти М.Л. ЛЕВИНА,
неотделимого от меня

• ОБЩИЕ ПОЯСНЕНИЯ К РУССКОМУ И АНГЛИЙСКОМУ ТЕКСТАМ

Весной-92 проф. С.Н. Гурбатов предложил мне прочесть вступительную лекцию на международной Школе (семинаре) по "волновым явлениям везде и всюду". Один мой знакомый мрачно шутил по аналогичному поводу: нельзя болеть чем попало, надо подбирать недомогания под знакомых врачей. Посмотрев прикидку тематики предстоящей школы, я понял, что она тоже подлажена под знакомых лекторов - "волновиков". Это навело меня на мысли (еще ранее брезжившие у нас со Львом Островским), что почти любое исследование природы можно подвести под волносодержащее занятие, и было бы нравоучительно посвятить лекцию, открывшую школу по волнам, именно просторности понятия "волна".

К сожалению, временные рамки одной лекции и стесненность в английском языке, на котором она не только произносилась, но и придумывалась, не позволили мне развернуться, а главное, обрести уверенность в том, что слушатели (а затем и читатели) уловят замысел перемешивания "серъезов, ухмылок и подначек". Поэтому я предпринял перевод на русский язык. В нем я чувствую себя свободнее, но этого мало, - это язык моего иррационального мышления. А я внутренне убежден, что только алгоритмизируемая мысль внеязычна, но мысль образная, не разбивающая на независимые и самостоятельные "микро-смыслы" всегда контекстна и трудноотрывна от языка своего порождения, т.е. она толкуема, трактуема, излагаема ..., может быть, даже танцуема, но тождественно не переводима буквально-словесным способом. Я привожу здесь эти, наверное, хорошо известные лингвистам соображения, ведь мы, физики, причисляя себя к представителям так называемых точных наук, часто забываем о своем принадлежании к до-греха-падкому человечеству и не отдаем себе отчета в зыбкости многих исходных понятий, на которых зиждется наше логически выстроенное благополучие.

Эти краткие предварительные пояснения имели целью ослабить реакцию раздражения, которую могут вызвать мои отступления от "правил хорошего тона", разных не только в разных жанрах, но даже в разных языках.

И еще я хочу сделать грустное добавление. За время, истекшее от произнесения до опубликования этой лекции, ушел из жизни мой друг и учитель Михаил Львович Левин, которому я обязан многими своими убеждениями и привязанностями. Мои шальные рассуждения о волнах, кажется, были его последним физ.-мат. чтивом. Успев дать до этого мне несколько советов, он уже не имел возможности подправить меня в

заскоках И все же я отваживаюсь посвятить сей опус светлой памяти о нем.

1. ПРЕД-ПРЕД-СЛОВО

"Управляйте волнами,
но не будьте рабами ...
воли, управляемых Вами!"
(вольная композиция)

Организаторы Летней Школы-семинара, посвященного волновым явлениям, обратились ко мне с доверительной просьбой прочесть вступительную лекцию на любую (свободную!) тему. Я знал, что лекция придется на первое июня - Международный День Защиты Детей (от взрослых, по-видимому!) - и не решился обмануть доверия руководства.

Буду говорить именно о волнах, о волнах как таковых. Но сначала считаю себя обязанным сделать несколько извинительных замечаний. Английский для меня не является моим материнским (первым) языком, и что более существенно - это не язык моего думанья, поэтому я порой испытываю раздражающие трудности, пытаясь выразить на нем тонкости своих намерений, - слегка назидательных и подначивающих.

Более того, насколько мне известно, почти четверть так называемой "эмоциональной информации" передается людьми, минуя слова, через иные каналы, - такие, как выражение лица, глаз и других частей тела (не говоря уже об использовании загадочных телепатических взаимодействий). И я не очень уверен, что все мои средства общения с международной (многоязычной!) аудиторией окажутся адекватными моим целям.

Другая трудность, которую я должен преодолеть, обусловлена отсутствием необходимой информации об участниках школы. Мне сказали, что возраст студентов, представленных здесь, будет "распределен" в пределах от 19 до 30. Вероятно, столь же широким окажется также диапазон их интересов и возможностей. Особенно загадочны для меня 30-летние студенты: то ли они застряли на старте, то ли - с той же степенью правдоподобности - слишком быстро продвинулись в завершении своего развития, асимптотически выходя в режим "вечного студента"; впрочем, "студенту" Гамлету было даже под сорок.

И, наконец, еще одно замечание. Большинство студентов и представителей послестуденческого уровня, присутствующих здесь, принадлежат к числу людей, так сказать, "думающих по-русски", и они могут испытывать языковые неудобства, слушая и переваривая английские речения. Чтобы немного облегчить им этот процесс, я постараюсь воспроизвести по-русски некоторые ключевые слова, определяющие ход моих рассуждений, как бы помещая их в - так сказать, - "устные скобки". Впрочем, и для иностранцев тоже полезно улавливать кое-какие русские звучания.

Кроме того, я буду более или менее пунктуально следовать тексту, написанному мною загодя. Текст распределен по разделам (параграфам),

снабженным заглавиями. Такое "квантование" должно помочь (я верю в это) уловить мой сценарный замысел.

2. ПРЕДСЛОВО ИЛИ ПРЕЖДЕВРЕМЕННОЕ СЛОВО *

Известно, что существуют музыкальные увертюры трех видов, они различаются замыслами воздействия на слушателей: а). одни составлены из главных мелодий произведений; б). другие рассчитаны на "разминку" слушателей и приведение их в нужное "расположение духа"; в). третьи имеют целью адиабатически плавный их перенос из повседневности в Мир Музыки (и по аналогии в Мир Физики, в Мир Волн или еще в какой-нибудь Мир).

Несмотря на мое пифагорийское преклонение (ну, прямо-таки благоговейное!) перед Числом Три, я осмелился в данном случае расширить этот традиционный перечень увертюр и представить вам вступление четвертого стиля, где основная музыкальная (или научная) тема произведения подвергается разоблачению и опережающей критике.

3. ИСТОРИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Эта история имеет свою историю. Несколько лет тому назад проф. Л. Островский и я были вовлечены в интересную, но трудную работу: редакция Физического энциклопедического словаря заказала нам написать статью "Волны". А у энциклопедии есть одно строгое и безвозражительное правило (доставляющее массу хлопот для исполнителей): в начале любой статьи авторы обязаны дать точное определение (определение) входного понятия. И мы с ужасом обнаружили, что не в состоянии удовлетворить этому требованию, по крайней мере, в статье о волнах. Изучив все доступные справочники, мы - к своему удивлению - узнали, что несмотря на широкое распространение волновых явлений, универсальное определение понятия "волны" отсутствует.

Люди имеют дело с неопределенным термином. И что же получается? Волны существуют сами по себе, а понятия "волны" не существует? Многообещающая интродукция к школе, посвященной изучению волновых явлений, не правда ли?

4. ТРИ "ЧЕЛОВЕЧКА" В ОДНОЙ ГОЛОВЕ

Один из лучших способов проведения дискуссий был придуман еще во времена древних греков (возможно, Платоном), а затем много столетий спустя переоткрылся (или восстановился) в Эпоху Возрождения, скорее всего благодаря выдающимся диалогам Галилео Галилея.

Представим себе, что три разных человека собираются вместе (может быть и на самом деле собираются, а может быть мысленно - три человечка в одной голове, - даже проще созвать!) собираются, чтобы высказать свои различные (очень желательно!) мнения по какому-то вопросу. Успех дела существенно зависит от "подбора кадров". Я, например, предпочитаю

* Такое странное словосочетание я извлек из русского музыкального жаргона. Это - когда музыканты осуществляют свою пагубную привычку объяснять музыку перед ее исполнением.

располагать в голове группкой таких спорщиков: а). широко-мыслящего человечка (в предельном случае он ничего не знает, зато обо всем!); б) глубоко-мыслящего человечка (в противоположном предельном случае он знает все, но ни о чем) и, наконец, в). интуитивно мыслящего человечка (который одновременно знает ничего ни о чем и все обо всем и "наоборот тоже"). Кстати говоря, мой выбор довольно-таки продуманно придуман: в нем каждый исполняет свою роль, приближенно соответствующую специализации человеческого мозга: а). образное мышление (обычно обусловленное функционированием правого полушария мозга); б). логическое мышление (левое полушарие), в). интуитивное мышление (глубинно-подкорковые слои). Далее я приведу несколько фрагментов возможной дискуссии этой Троицы, но не буду указывать, кому принадлежит каждое высказанное мнение. Пусть расшифровка будет первым (и пока что простым) упражнением для вас сегодня.

5. РАЗНОБОЙ В ОПРЕДЕЛЕНИЯХ

Энциклопедия по физике издательства Мак-Гроу-Хилл провозглашает: "Волна (физич.) - возмущения, распространяющиеся от одной точки среды в другую, без сообщения среде в целом какого-либо постоянного смещения".

Один из участников обсуждения обязан вступить в спор с места в кабинете. Это определение сводит все волновые движения к так называемым распространяющимся или бегущим волнам: однако, две периодических волны, движущиеся навстречу друг другу, образуют стоячую (или стационарную) волну, которая вообще никак не распространяется, ибо является ничем иным, как распределенными колебаниями! И наоборот - две стоячих волны могут дать (будучи сложенными, если сложение приемлемо вообще!) снова чисто бегущую волну.

"О, сие возражение не единственное", - может заявить другой и по-другому мыслящий "человечек". "Я знаю, что даже обычная бегущая волна сама по себе переносит вдоль направления распространения целый набор различных физических (т.е. измеряемых) величин, таких как энергия, импульс (количество движения), момент импульса и т.п."

Неожиданно свеже-мыслящий индивидуальчик обнаруживает острый интерес к возникшим разногласиям. Он спрашивает - "интересно, способны ли мы установить, какие физические величины (или нечто аналогичное, но другой природы!) могут переноситься бегущими волнами (или волнами-подобными движениями)?".

Я лично не знаю исчерпывающего критерия. Однако, утверждение - если оно будет доказано - выглядит совсем не плохо, почти как теорема хорошего качества!

Может быть кто-нибудь попытался бы сформулировать его поаккуратнее и даже доказать в наиболее общем виде? Но тогда "доказатели" не должны забывать о существовании таких "чудо-волн" как волны слухов (например) или скрыто-вероятностные Ψ -волны в квантовой физике.

Но проследуем дальше. Мак-гроу-хиллская дефиниция имеет и более серьезные недостатки. Она связывает волновые движения с возмущениями сред и тем самым исключает наиболее представительные волны в

макромасштабной физике, а именно - гравитационные и электромагнитные волны, которые не поддерживаются никакими средами, а являются возмущениями физических полей и все. Все факты, все измерения пока что служат тому подтверждением.

В этот момент одного из собеседников осенило - у него прошла вдоль мозга "волна мысли", и он якобы нашел типичный признак, универсальный для волн всех видов ("волна мысли о волнах", да простит мне слушатель каламбурную игру слов). Он провоизгласил: "Явление интерференции - вот что свойственно всем движениям, которые мы можем интерпретировать как волновые в противоположность движениям точечных объектов (частиц)!"

"О, нет! Боже мой - сказал возразитель əто тоже, увы, ошибочно! Школа-семинар, на которую студенты собирались здесь, сосредоточивает свои тематики частично на проблемах некогерентных волн со стохастически изменяющимися фазами. В этих случаях интерференция картина может полностью отсутствовать, а если говорить более обще, она будет зависеть от методов наблюдений".

"Зависимость от методов наблюдений (или измерений!)? Не равносильно ли это вынесению смертного приговора для установления концепции волн?"

Я не знаю. Может быть. Но вообще-то я уверен, что такая ситуация типична для всей физики. Наилучшей, наипростейшей и даже наиболее убедительной демонстрацией может служить измерение любого движения из движущихся систем отсчета. Так, холмистая (исковерканная) поверхность Земли может "имитировать волновое поведение", если ее наблюдать из летящей над ней и вдоль нее системы отсчета. И наоборот - любая бегущая волна (по крайней мере если ее скорость меньше предельной скорости света) может быть превращена (в сопровождающей системе отсчета) в неподвижный статический рельеф. (Превращение кинофильма в фото-слайд, натюрморт, в неподвижную жизнь)".

Перепалка трех человечков не завершена, но стоит ли ее продолжать, если на каждое "да" следует "нет", и знакопеременная последовательность не сходится ни к какому ответу...

6. "ЗООПАРК" (КОЛЛЕКЦИЯ) ВОЛН

Ну, и что же делать? Думаю - ничего... или следуя доброй английской подсказке - "живи самим и давать жить другим".

Положение напоминает "туник" в биологии, образовавшийся около двух с половиной столетий тому назад. Напомню, тогда тоже было наблюдано и открыто огромное количество растений и животных. Но появился в Швеции Линней, и создал в 1730 году себе имя в науке, предложив некую более или менее приемлемую систематизацию, а именно - он, распределил все живое на Земле, все растения, всех тварей, имеющих плоть или душу, по определенным классам, группам, отрядам и т.п., руководствуясь внешними, (можно сказать "формальными") данными. Позднее Чарльз Дарвин придумал более удачное распределение, отражающее эволюцию ("динамику") классифицируемых организмов.

И вот я призываю вас, мои слушатели (или читатели!), проделать подобную же работу в Царстве Волн, действуя либо по "методу сходности" (линейно-подобная систематика!), либо по методу "эволюционных превращений" (дарвино-подобная систематика!). Думается, что классификация получится многопараметрической и многовариантной. Кстати, мне кажется, что само слово "волна" - рекордистское по числу прилагательных, или пояснительных слов, которые могут ему придаваться (в физике - на-верниака); каких только волн не бывает: продольные, поперечные, носовые, ударные, боковые, плазменные, свистовые, ветровые, поверхностные, утекающие, спиновые, циркулярно-поляризованные ... несть им числа!

Организаторы Школы-семинара могли бы объявить конкурс на лучшую систематизацию волн (лучшую - в смысле наиболее удовлетворительную или даже наиболее удивительную!); в ней статические рельефы могут быть уподоблены растениям, а шевелящиеся волны - способным к движению животным. И как обогащается эта аналогия в волновом представлении. В отличие от Царства Растений в Царстве Волн любые "волновые растения" (неподвижные существа) могут быть сразу же (а не путем многоколенческой эволюции!) превращены в "волновых животных" (подвижные существа) и, следовательно, ботанические сады в зоологические и наоборот, конечно. Исключение составляют "высшие особи" - неостановимые волны, обладающие предельными скоростями.

Честно говоря, я не знаю ни одного совершенно удачного результата по части классификации.. И потому особенно приветствовал бы любой успех в этом деле. Руководство Школы могло бы даже установить призы для победителей. Но если оно и не сумеет раскошелиться, не надо унывать: ведь ничто не в силах сравниться с радостью собственного достижения!

7. ОДНИ ДВИЖЕНИЯ "ВОЛНОВЕЕ" ДРУГИХ

Дав согласие на вступительную лекцию (месяц или два тому назад), я думал закончить ее где-то здесь, после построения "зоопарка волн", открытого для публичного обозрения. Но потом изменил свое решение. У первой, запускающей школу, лекции должен быть счастливый конец, как бы предназначенный ей судьбой. В условиях, когда не обнаруживается ни одного признака, ни одного свойства, общего для всех движений, которые наша интуиция, воображение и повседневный опыт относят к волнам, для организации счастливого конца мы можем (и должны!) назначить на должность волны какие-нибудь избранные движения, т.е. действовать, как говорят у нас в России, административно-командным методом. Значит, нужно подобрать достойного кандидата на столь ответственную должность.

Выдающийся английский писатель Орвелл придумал выдающийся афоризм, касающийся "прав животного". Он выдвинул лозунг: "Все животные равны друг другу , но некоторые из них более равны, чем другие!" И хотя я откопал аналогичную присказку в древних китайских манускриптах, это не имеет большого значения, ибо Орвелл вдохнул в него новую жизнь. И вообще мой покойный товарищ профессор Л.Вайнштейн любил комментировать такие коллизии словами: "Не успеешь что-нибудь

открыть, как тут же набегут предшественники!"

Подлаживая орвелловский афоризм к своим целям, я выдвигаю девиз: "Все движения суть волны, но некоторые движения" волновее" других".

Задача теперь в том, чтобы предложить простейшее и в то же время наиболее представительное волновое движение в качестве эталонной, "первичной" волны.

Возникает новый вопрос. Какой смысл может быть придан понятиям сложности и простоты? Опасаюсь, что и этот вопрос останется безответным. Вот, например, колмогоровский критерий сложности: он состоит (если грубо и очень примитивно его толковать) в оценке числа операций, сводящих данное утверждение (фразу, функцию или еще что-нибудь способное нести информацию) к некоему первичному утверждению, выбранному в качестве "эталона простоты". Применительно к нашим целям этот критерий обладает известной неопределенностью - не так-то легко установить, что же все-таки надо понимать под отдельной, независимой операцией. Я оставляю эту трудность в стороне, вернее, на ваше интуитивное решение. Мое же главной и принципиальной (ключевой!) задачей сейчас будет выбор первичной эталонной волны.

Вторая часть лекции может быть названа так: "Похвальное слово синусоидальным волнам" или обращаясь к греческому языку "Эулогия синусоидам". Приведу несколько веских доводов в пользу вполне заслуженного выдвижения синусоидальной функции на роль простейшей первичной модели волны.

Простота чего-нибудь на свете не может быть доказана или опровергнута, она может быть только хорошо аргументирована или обоснована.

8. СТРАННЫЕ СВОЙСТВА ИЗБРАННОГО ЭТАЛОНА

Всем известна математическая форма представления синусоидальной волны ("син-волны")

$$a \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad (1)$$

Эта формула описывает одно-скалярную волну, бегущую (распространяющуюся) в \vec{r} , t - пространстве. По созвучию с английским произношением этих букв \vec{r} иногда (в шутку, конечно) произношу это, как "арти-пространство". Возможно, не только по-английски, но и по-русски такое аббревиатурное созвучие отдает намеком на некоторую театральность Мира Сего, подмеченную еще Шекспиром! Здесь a - амплитуда, φ - фаза, ω - частота (довольно однозначный перевод английского термина "фриквенс" или сокращенно "фрик"), (ω, \vec{k}) - пространство (O.K.)-пространством (по созвучию с английским произношением этих букв, и в этом случае тоже просвечивает намек на высокое качество). Иногда я его зову "фрик-вейверовским" пространством, что, разумеется, инородно для русского восприятия, впрочем, и без того уже сильно измученного "чужестями", а хорошего русского аналога подобрать не случилось, - разве что "частотно-вольновиковое пространство", но это, право же, тяжеловесновато!

Здесь уместно заметить, что большинство волн, вовлеченных в физические процессы, двух-скалярны (плотность и скорость в акустике, электрические и магнитные поля в электродинамике и т.д.). Правда, сейчас для моих главных целей это не так и важно. И тем не менее, раз уж я обмолвился, интересно спросить - а знаете ли вы, почему двухсклярное описание преобладает? К сожалению, я имею весьма скучное представление об уровне знаний слушателей (и уж тем паче читателей) в целом и среднем. Возможно, что некоторые мои обращения покажутся тривиальными. Но, признаюсь, для меня самого эти вопросы отнюдь не элементарны. Если среди слушателей есть люди, обладающие страстью (и даром) к обобщениям всего на свете, пусть попытаются установить общие критерии для числа независимых скалярных величин, требуемых для математического описания волновых движений в том и/или ином случае.

Я иду дальше. Вам может показаться немного странным, что мы взяли в качестве эталона волны некоторое распределение (1), которое не осуществимо (не реализуемо!) ни при каких физически приемлемых обстоятельствах. Представители нашего Госкомстандарта (или вашего Национального Бюро Стандартов) могли бы послать вас на медицинскую экспертизу, поняв, что вы притащили им для утверждения в качестве эталона бесконечно(!) протяженное (во времени и пространстве!) волновое поле! И все-таки это не проблема, вернее, не в этом проблема. Честно говоря, требованиям конечной протяженности можно удовлетворить почти всегда, кроме некоторых совсем уж неординарных случаев. Пожалуйста, попробуйте продемонстрировать это, придумывая разные способы ловли, захвата и удержания "кусочков" чисто бегущих волн (и физической и даже не физической природы!) внутри конечного объема, охватываемого замкнутой поверхностью с надлежащими граничными условиями. Особо интересно понять, какими свойствами должна обладать среда, заполняющая этот объем, чтобы внутри него создавалось чисто бегущее решение вида (1), и тем более интересно установить, когда одиночная волна (1) не выделяется, а поле представляется суммой (или интегралом) синусоидальных волн. При этом будьте внимательны, и не забывайте о существовании нелинейных сред, диссипативных и антидиссипативных (активных) систем и, конечно, об информационных волнах.

9. СИНУСОИДАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОВОДЫ

Нанесем эквидистантную последовательность точек на прямую x и попросим себя соединить все эти точки простейшей аналитической кривой, понимая под последней непрерывную, со всеми нужными производными, кривую. (Правда, математик-пуританин, блеститель высокой строгости, потребовал бы от меня более аккуратного выражения, а именно - соединения точек так называемыми целыми функциями, всюду допускающими разложение в ряд Тейлора). Разумеется, тривиальным решением является сама x -линия, но если искать отклонения от нее с минимальными (но конечными!) значениями первой производной, то простейшим ответом будет синусоидальная кривая

$$a \sin kx \quad (2)$$

Готовясь к лекции, я почему-то заранее ожидал, что данное утверждение не возымеет заслуженного отклика у большинства слушателей. А я отношу его к Свойствам Номер Один! И посему очень бы хотел обратить всех (или хотя бы некоторых добровольцев!) в свою веру.

С позиций ортодоксального дарвинизма первый шаг в возникновении (и начальном развитии) человеческого мышления был сделан нашими предками тогда, когда они стали сопоставлять (в математическом - групповом понимании, сопоставлять изоморфно) наборы реальных объектов (ну, там - деревьев, пальцев и тому подобное) с абстрактной (эквидистантной!) последовательностью чи-сел (один, два, три,...). "Вначале всего было Число" - такова исходная версия "Евангелия от Фалалея" - знаменитого греческого мыслителя. И тогда, следовательно, где-то в начале мышления была и простейшая аналитическая функция, и этой функцией была синусоида.

Итак, Бог намекнул нам подсказкой, что синусоидальная функция изоморфна числовому ряду. Всевышний создал эту функцию внутри нашего "мозгового пространства", и увидел Он, что это хорошо. Потому и мы вслед за Ним должны увидеть, что синусоида - воистину хорошая функция.

10. СИНУСОИДАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. ФИЗИЧЕСКИЕ ДОВОДЫ

Не размышлял ли кто-нибудь когда-нибудь, какие Законы Природы наиболее надежные и располагающие к доверию? Иными словами - есть ли что-то Святое Святых в нашем Мире? На мой взгляд, ответ на этот вопрос вполне может быть убедительным: да, есть такие законы и к ним заведомо принадлежат законы сохранения, вытекающие из свойств пространственно-временной симметрии.

Каждый закон из этой группы может быть представлен определенным простейшим (элементарным!) движением точечного объекта (классической точечной частицы). Например, частица, движущаяся вдоль прямой с постоянной скоростью служит простейшим демонстратором Закона Сохранения Импульса. Точно также Закон Сохранения Момента Импульса ("углового импульса") простейшим образом иллюстрируется движением точки по окружности с постоянной величиной (модулем) скорости. Мне нравится первую модель называть "линеатором", а вторую - "ротатором". Проекция любого ротаторного движения на направление любого линеаторного описывается синусоидой

$$a \sin(\omega t) \quad (3)$$

Таким образом, существует два (по крайней мере - два) простейших движения в Природе: прямолинейное ($d/dt \vec{r} = \text{const}$) и вращательное ($d/dt |\vec{r}| = \text{const}$). Именно они порождают осцилляторные (гармонические) синусоидальные движения (3). Так что любой осциллятор ("синусоидатор") можно рассматривать как проекцию некого ротатора.

В этом месте "человека широкого мышления" может осенить неожиданная, но весьма производящая догадка - а не является ли любой осциллятор всего лишь "недостроенным" ротатором?

Математический прием, позволяющий восстановить ротатор из осциллятора в общем случае, когда синусы и косинусы имеют переменные амплитуды и фазы, основан на преобразовании Гильберта. Я не хочу сейчас входить в подробности этой техники и позволю себе уделить внимание только двум принципиальным и почти философским аспектам проблемы.

Некоторые люди трактуют эту технику как чисто математическую процедуру (и я готов придерживаться такого же мнения, правда, с известной долей скептицизма). Другие же верят, что наши мозги способны автоматически воспроизводить ротаторные картинки из осцилляторных (и я готов разделить этот взгляд, тоже, однако сохранив некоторую долю недоверия).

И ведь большое число как теоретических обобщений, так и практических приборов (в первую очередь измерительных и приемных устройств) основано на "методе роторизации" (более известном в науке под именем метода аналитического сигнала).

Один популярный русский сатирик как-то воскликнул: "Да будет первичное вторичным и вторичное первичным!"

Приспособливаясь к нашим целям, мы можем, следуя ему, провозгласить: "Да будет осцилляторика роторикой и роторика осцилляторикой!"

11. СИНУСОИДАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. АНТРОПНЫЙ ДОВОД

Третий аргумент, демонстрирующий синусоидальную функцию как некоторую уникальную зависимость, может быть отнесен к категории антропных. Боюсь, что для большинства присутствующих эти доводы покажутся несколько неожиданными, а то и просто странными извлечениями из научной фантастики. Но я склонен рассматривать их вполне серьезно.

Современная концепция Происхождения Человеческого Интеллекта (наивысшего достижения Гомо Сапиенс??!) допускает две "субконцепции": прямую и обратную. (Кстати говоря, почти все задачи, с которыми нам приходится встречаться и в науке и в жизни могут быть разделены на две такие же группы!).

Традиционно мыслящий научный люд считает Природу созданной либо Всевышним, либо Игрои Обстоятельств и изучает законы Природы, рассматривая их как "спущенные сверху директивы". Типичный пример типичной прямой задачи: Задана Вселенная и необходимо найти объяснение Жизни в ней (в частности, Интеллекта).

Обратная задача противоположна. Единственное изначальное условие состоит в факте существования Интеллекта. И требуется подобрать подходящую Вселенную, которая управлялась бы подходящими (тоже подобранными) законами. Это и есть известный Антропный принцип. Существует Всеобщий Антропизм, охватывающий широкий (фактически весь!) круг проблем, связанный с созданием всей "хорошей" Вселенной (*im Großen e!*). Но допустимо существование также и малого антропизма, который гарантирует лишь условия создания интеллекта в "малой области" Вселенной (*im Kleinen*), причем малость не обязательно по масштабу длины, а вообще по любому параметру.

Мир, в котором нас поселили, обладает хорошим универсальным свойством: описание любого процесса, любого движения, любого явления до-

пускает приблизительную линеаризацию в малом (*im Kleine!*). Следовательно, в пределах такого приближения строго соблюдается Принцип Суперпозиции (Принцип Сложения Движений!). И не просто соблюдается - он господствует! вне этого утверждения мы не в состоянии представить себе ни арифметические, ни какие-нибудь обычные логические операции. Я считаю (и не я один), что "явление суперпозиции явлений"(!) является необходимым(!) условием (!) создания Интеллекта!

Конечно, это утверждение не относится ни к разряду Абсолютных Истин, ни даже к разряду Теорем. Один из моих товарищей по работе на вопрос "Что ты делаешь?" вдохновенно отвечал (вызывая веселую суматошу в рядах своих друзей): "Что я делаю? Я - красив!"

Так вот и мы можем выдать такой же ответ! Как можно оценить это правило? Что оно делает? Оно красиво и все!

А далее я осмеливаюсь позволить себе высказать совсем уж "смелую догадку", которая теперь уж выглядит почти как теоремка. Я утверждаю: описание любого нелинейного явления может быть сведено к набору (конечному! или для страховки - к бесконечному!) линейных соотношений (уравнений или других алгоритмических представлений - открытых или скрытых для непосредственных измерительных проверок). Кое-кто считает это сведение тривиальным, а кое-кто неверным. Пожалуйста, определите свое место между этими крайними позициями, а может быть вам удастся найти критерии (признаки), определяющие виды нелинейных связей, допускающих сведение к конечным(!) комбинациям линейных.

Наиболее фундаментальным примером в физике служит линейное уравнение Шредингера для Ψ - функции: реально наблюдаемая (измеримая) величина $|\Psi|^2$ не удовлетворяет Принципу Суперпозиции, а вот "скрытая от прямых измерений" Ψ -функция этому Принципу удовлетворяет!

Я не знаю истинного автора выдающегося афоризма на эту тему. Сам я услышал его от одного научного работника, посещавшего мои еженедельные лекции. Он говорил: "Все линейное от Бога, а нелинейное от Лукавого!"

Уловили ли Вы связь между моим прославлением линейности и синусоидальными волнами? Уверен, что да.

Синусоидальное волновое движение, представленное через экспоненциальную функцию (если использовать загадочную формулу Эйлера)

$$a(\omega, \vec{k}) \exp(i\omega t + i\vec{k}\vec{r}), \quad (4)$$

является универсальным решением любого линейного уравнения (а часто и другого алгоритмического соотношения).

Таким образом, если в "знания - сила", то синусоидальная волна - "сильный" инструмент проявления знания.

12. СИНУСОИДАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. МАТЕМАТИКО-ФИЗИКО-АНТРОПНЫЙ ДОВОД

И последний аргумент, который мы приведем, основан на удивительном свойстве преобразования Фурье. Оно приводит во взаимооднознач-

ное соответствие (при некоторых математических ограничениях, физически не очень жестких) \vec{r} , t -пространство и ω , \vec{k} -пространство. И в этом смысле оба пространства оказываются изоморфными и в этом смысле тождественными.

Тогда возникает вопрос, поражающий воображение: а почему мы в нашей повседневности предпочитаем жить в "арти"-пространстве (\vec{r} , t)? Такое заключение мог сделать слишком уж глубоко думающий человек, тогда как люди, думающие широко, прекрасно знают, что мы живем во всем множестве изоморфных пространств одновременно!! Однако, некоторые пространства кажутся нам более привилегированными в смысле реализации Законов Природы! Мы снова возвращаемся к проблеме простоты и сложности.

Я ограничусь только наиболее важным с позиции Локального Антропизма аргументом, индуцированным Принципом Причинности.

В "арти"-пространстве Всевышний издал приказ: "пусть время течет односторонне". А в условиях тоталитаризма никто не смеет противостоять против указаний сверху. Природа (в известном смысле) принадлежит к системам с тоталитарным режимом. Правда, всегда остается вопрос - что в этом случае есть тоталитаризм - навязывание законов или навязывание движений? * Ни одна из теорий в настоящее время не может объяснить природу одностороннего течения времени раз и навсегда. Но я подозреваю, что отказ от Принципа Причинности (по крайней мере, в макрофизике!) мог бы привести к взрывной причинно-следственной неустойчивости: причина \rightarrow следствие \rightarrow причина \rightarrow следствие \rightarrow и далее нечто непредсказуемое.

При таком абсурдном поведении никакого интеллекта - ни искусственного, ни естественного - не могло бы появиться на Свет Божий. Я почти уверен в этом (хотя кое-какие очищающие сомнения все-таки меня гложут).

Но посмотрите! Принцип Причинности в своей самой простой форме выражается именно только в "арти"-пространстве. В любом другом, ему изоморфном, этот Принцип укрывается (упрятывается) в дебрях физико-математических сложностей. В частности, в "О.К."-пространстве он представляется некоторыми соотношениями между ω и \vec{k} , обобщающими известные ограничения Крамерса-Кронига-Леоновича и довольно-таки трудно по-этапно интерпретируемыми. Однако, с другой стороны "О.К."-пространство открывает прекрасные "просторности" для ученых людей с волновым мышлением, для тех, кто изучает кинематику и динамику волн, частично игнорируя (когда это возможно!) Принцип Причинности.

Ну, и какая же мораль вытекает из всех этих умственных изысканий? "Все изоморфные пространства тождественны друг другу, но некоторые изоморфные пространства тождественнее других!" И каждый из нас вправе выбрать себе наиболее удобное пространство, не забывая заглядывать в другие пространства при случае, по потребности. И, наконец, еще одно замечание. "Арти" и "О.К."-пространства образуют элитарную (экстраординарную) пару среди бесконечного набора изоморфных

*Как говорил Вольтер: "Свобода состоит в зависимости только от законов".

пространств благодаря тем особым свойствам синусоидальных функций, о которых говорилось ранее. Это - Фурье-сопряженные пространства-близнецы! Но любые близнецы должны обладать какими-то общими генетическими компонентами. Простейшей функцией, сохраняющей свой вид при преобразовании Фурье, является распределение Гаусса. В более общем случае эту роль могут выполнять функции Эрмита различного порядка. И ведь не зря эти функции играют беспримерно важную роль в наших объяснениях действий Природы: первопричина этой выдающейся (можно предположить) связана с генетической родственностью Фурье-сопряженных пространств-близнецов.

И вспомните, пожалуйста. Любой точечный объект в "Арти"- пространстве перевоплощается в бесконечно протяженный объект в "О.К."-пространстве и наоборот, конечно.

Великий принцип Природы - Принцип Неопределенности - основан на дуальности этих пространств-близнецов, воспринимаемых воедино!

13. ПРОЩАЛЬНЫЕ ПОЖЕЛАНИЯ

Я приближаюсь к обещанному счастливому концу. Несмотря на изобилие волн, волн, волн... мы обладаем отличным первичным эталоном, и можем позволить себе оценивать "волновые качества" любого движения через близкое или удаленное его сходство с этим эталонным движением.

Это - все, а остальное, как уже говорилось, - от Лукавого!

Заканчивая свою беседу, я хочу сказать вам, что написанный текст лекции имеет предваряющий ее эпиграф. Он составлен из свободного соединения слов из Британского Гимна и моих расставательных пожеланий:

"Правьте! Правьте волнами!
Но не будьте рабами!
... Рабами...
волн, управляемых вами".

И как же можно избавиться от рабства или каторжности? Пожалуй, лучший совет дан Апостолом Иоанном: "И да познаете вы истину, и истина сделает вас свободными!" (Евангелие от Иоанна, Глава 8, стих 32).

Я приношу свои извинения за ошибки, сделанные мною в ходе лекции - грамматические и приэношенческие, особенно в расстановке ударений, не говоря уже о ложных интонациях.

"Aber Irrtum ist menschlich" - успокаивает немецкое изречение, берущее свое начало, как и многое другое, от древних греков (предположительно Феогнид, VI век до нашей эры). "Провирание - свойство людское". И может быть такого рода способность к совершению ошибок тоже составляет один из признаков нашей зависимости от Малого Антропного Принципа.

Я очень обязан всем, кто понял меня, и особенно тем, кто не смог понять, - за долготерпение. Спасибо.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
3 ноября 1992 г.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Е.М.Громов, В.И.Таланов

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что изотропная плаэма непрозрачна для электромагнитного (ЭМ) излучения частоты ω , если ее концентрация $N_e > N_{cr} = (m\omega^2)/(4\pi e^2)$, где m – масса электрона, e – его заряд. В то же время кавитоны в плаэме с пониженной концентрацией $N_e < N_{cr}$ могут играть роль ловушек ЭМ волн. Впервые самосогласованное поле в такой ловушке построил Волков в 1958 году [1]. Каждая ловушка представляет собой связанное состояние высокочастотного (ВЧ) поля и низкочастотного (НЧ) возмущения плотности среды (плаэмы) (рис.1).

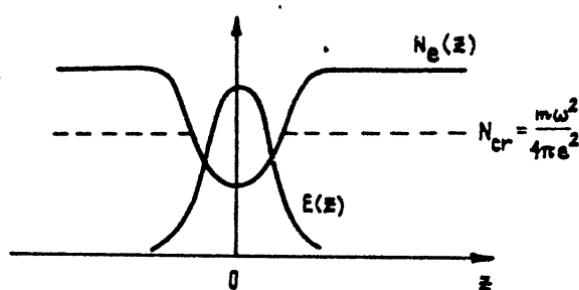


Рис. 1: Ловушка ЭМ поля в однородной плаэме – связанное состояние ВЧ поля и НЧ возмущения концентрации среды (плаэмы). Пунктирная линия отвечает критическому значению концентрации для ЭМ поля частоты ω .

НЧ возмущения, образующие плаэменные ловушки, могут находиться в движении, увлекая за собой и ВЧ ЭМ поле. Если захваченное в ловушку ЭМ поле слабое, то движение целиком определяется уравнениями НЧ возмущения. В сильном ВЧ поле необходимо учитывать обратное воздействие поля на среду посредством стикционной силы

$$f = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \nabla (\tilde{E}^2)^t,$$

усредненной по периоду ВЧ поля. Связанные состояния поле – среда представляют собой бегущие солитоны, скорость которых отличается от скорости свободных НЧ возмущений [2]. Аналогичная картина возникает и при взаимодействии ВЧ и НЧ возмущений в других средах.

Например, при взаимодействии поверхностных и внутренних волн в океане. Неоднородные течения, создаваемые внутренней волной на поверхности океана, могут захватывать и переносить поверхностные волны, модулируя их пространственное распределение (рис.2). НЧ возмущения границ волноводов (например, акустических) могут переносить локализованные ВЧ поля и т.д. В плавно неоднородных средах НЧ возмущения также образуют ловушки, которые могут служить для переноса захваченных ими ВЧ полей, в том числе и в сильно закритические области среды (рис.3). Особенности поведения полей в таких НЧ ловушках и рассматриваются в данной работе.

Локализованные или квазилокализованные состояния ЭМ поля в движущихся ловушках назовем динамическими состояниями по аналогии с динамическими модами в нестационарных резонаторах [1]. Вначале рассмотрим динамические состояния слабых ВЧ полей в плавно неоднородных средах в присутствии интенсивной НЧ волны параметра без учета влияния ВЧ волн на параметры среды [3–5]. Затем изучим самосогласованные нелинейные динамические состояния поле – плазма в неоднородных средах с линейным и параболическим барьерами плотности и стрикционной нелинейностью [6–8].

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ СЛАБЫХ ВЧ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ В ПРИСУТСТВИИ ВОЛНЫ ПАРАМЕТРА

2.1. Механизм переноса излучения продемонстрируем на модельной задаче об эволюции одномерного волнового поля $\Psi(z, t)$ –гибающей некоторого ВЧ волнового процесса, описываемого в безразмерных переменных уравнением типа Шредингера [3],

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - U(z, t)\Psi = 0, \quad (1)$$

с потенциалом

$$U(z, t) = \beta \frac{z}{2} + \tilde{V}(z - at),$$

содержащим стационарное линейное слагаемое по z : $V_0 = z/2$ и НЧ возмущение $\tilde{V}(z - at)$, движущееся с постоянной скоростью $a > 0$ в область высоких значений $V_0(z)$. В движущейся координатной системе

$$\xi = z - at, \quad t' = t \quad (2)$$

замена искомой функции

$$\Psi = \bar{\Psi}(\xi, t) \exp\left(i\alpha\xi - i\alpha\beta \frac{t^2}{4}\right) \quad (3)$$

приводит к уравнению

$$i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \xi^2} + \left[\frac{a^2}{2} - \beta \frac{\xi}{2} - \tilde{V}(\xi) \right] \bar{\Psi} = 0, \quad (4)$$

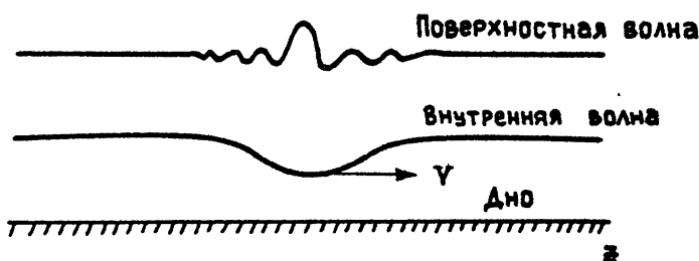


Рис. 2: Неоднородные течения, создаваемые внутренней волной на поверхности океана, могут захватывать и переносить поверхностные волны, моделируя их пространственное распределение.

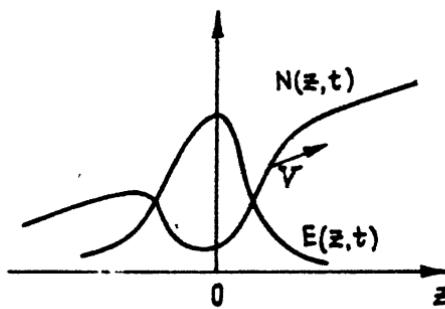


Рис. 3: В неоднородных средах НЧ возмущения также образуют ловушки, которые могут служить для переноса захваченных ими ВЧ полей.

из которого следует, что для возмущений потенциала $\tilde{V}(\xi)$ типа "ям" или "горбов" возможно существование увлекаемых в закритическую область $z > 0$ метастабильных состояний

$$\Psi(\xi, t) = \Psi_n(\xi) \exp \left(-i\mu_n t - ia\beta \frac{t^2}{4} + ia\xi \right), \quad (5)$$

огибающая которых $\Psi_n(\xi)$ описывается уравнением

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Psi_n}{d\xi^2} + \left[\mu_n + \frac{a^2}{2} - \beta \frac{\xi}{2} - \tilde{V}(\xi) \right] \Psi_n = 0, \quad (6)$$

где μ_n собственное число, определяемое из решения граничной задачи для функций Ψ_n и зависящее от профиля потенциала $\tilde{V}(\xi)$. Так, при конечных значениях возмущения $|\tilde{V}(\xi)| < +\infty$ спектр собственных значений μ_n комплексный, что отвечает квазилокализованным состояниям поля Ψ_n .

Частота полученных динамических состояний

$$\omega_n = \operatorname{Re} \mu_n + \frac{a\beta}{2} t \quad (7)$$

монотонно растет со временем. Время жизни данных состояний составляет $|J_m \mu_n|^{-1}$ и может быть достаточно велико для нижних слабозатухающих состояний. Глубина проникновения $z_{\text{пр}}$ ВЧ поля при этом равна $2a|J_m \mu_n|^{-1}$.

Чтобы проиллюстрировать не только увлечение, но и возможность захвата части стационарного ВЧ поля НЧ возмущением, рассмотрим ВЧ поле в потенциальной яме с вертикальной стенкой и наклонным дном:

$$V_0(z) = \begin{cases} z/2 & \text{при } z > 0 \\ \infty & \text{при } z = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Пусть в отсутствие НЧ возмущения в системе существует стационарное поле

$$\Psi_0(z, t) = \operatorname{Ai}(z + \lambda_n) \exp(-i\Omega_0 t), \quad (9)$$

где $\operatorname{Ai}(z)$ – функция Эйри, $\lambda_n < 0$ – ее n -й корень: $\operatorname{Ai}(\lambda_n) = 0$, $\Omega_0 = |\lambda_0|/2$. Это поле локализовано в области $0 < z < |\lambda_n|$. В качестве возмущения потенциала рассмотрим возникающий при $t = 0$ и бегущий в $+z$ -направлении уступ вид

$$\tilde{V} = \begin{cases} M > 0 & \text{при } 0 < z < at \\ 0 & \text{при } t \leq 0 \text{ и } z \geq at > 0 \end{cases} \quad (10)$$

На рис.4 приведена зависимость потенциала $U(z, t)$ от координаты z в момент времени $t > 0$.

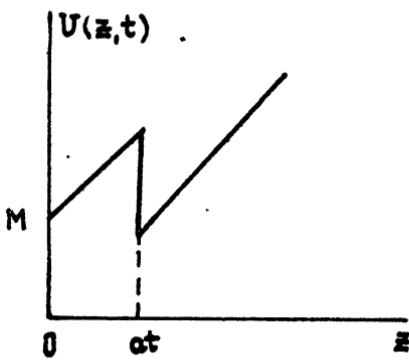


Рис. 4: Профиль потенциала $U(z, t) = V_0 + \tilde{V}$ в уравнении (1) в присутствии возмущения \tilde{V} в виде уступа (10) в момент времени $t > 0$.

Численное решение уравнения (1) было проведено при следующих параметрах: $n = 10$, $M = |\lambda_{10}|/4$ в полосе $0 \leq z \leq H = 2|\lambda_{10}|$ при двух значениях безразмерной скорости движения возмущения потенциала $a = 1$ и

0,5 на интервале времени $0 < t < t^* = H/a$. На рис.5 показаны распределения амплитуд поля $|\Psi|$ в системе в различные моменты времени при $a = 1$.

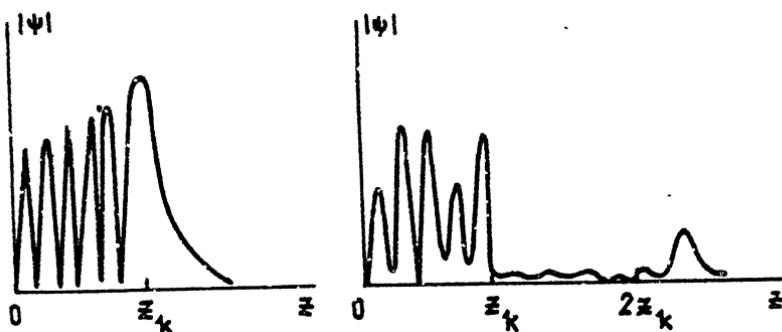


Рис. 5: Распределение амплитуд поля $|\Psi|$ в системе, описываемой уравнением (1) в различные моменты времени: 1 — $t = 0$; 2 — $t = 2z_k/a \approx 24,2$.

Видно, что при движении возмущения \tilde{V} через область первоначальной локализации поля Ψ происходит частичный захват поля в потенциальной яме справа от бегущего уступа. Энергия захваченного поля к моменту выхода фронта уступа из области локализации увеличивается с ростом скорости возмущения (рис.6).

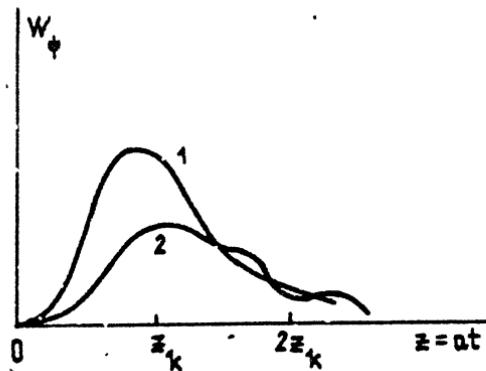


Рис. 6: Зависимость энергии поля W_Ψ локализована справа от уступа в область $z > z_k$ при $t < z_k/a$ и $z > at$ при $t > z_k/a$ от текущей координаты уступа $z = at$ при различных значениях скорости α . Кривая 1 отвечает значению $\alpha = 1$; 2 — $\alpha = 0,5$.

Увлечение пакетов ВЧ поля возможно и при ускоренно движущихся НЧ возмущениях

$$\tilde{V}(z - \int^t a(\tilde{t}) d\tilde{t}). \quad (11)$$

В этом случае переходом в (1) в систему отсчета, движущуюся со скоп-

ростью НЧ возмущения $a(t)$,

$$\xi = z - \int_{t'}^t a(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad t' = t, \quad (12)$$

и представлением решения вновь полученного уравнения в виде

$$\Psi(z, t) = \bar{\Psi}(\xi, t) \exp(i a(t) \xi),$$

получим

$$i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \xi^2} + \left\{ \frac{a^2(t)}{2} - \frac{\beta}{2} \int_{t'}^t a(\tilde{t}) d\tilde{t} - \xi \left(\frac{da}{dt} + \frac{\beta}{2} \right) - \bar{V}(\xi) \right\} \bar{\Psi} = 0$$

Отсюда следует, что при равноускоренно движущихся НЧ возмущениях \bar{V} , ускорение которых удовлетворяет соотношению

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\beta}{2} + \lambda, \quad (13)$$

где λ – постоянная величина (центр пакета в этом случае в переменных (z, t) движется по параболе (рис.7)), возможны динамические состояния

$$\Psi(z, t) = \Phi_n(\xi) \exp \left\{ -i \int \omega_n(t, \xi) dt \right\},$$

$$\omega_n(t, \xi) = -\xi \frac{da}{dt} - \frac{1}{2} a^2 + \frac{\beta}{2} \int a(\tilde{t}) d\tilde{t} + \mu_n,$$

огибающая которых $\Phi_n(\xi)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi_n}{d\xi^2} + [\mu_n - \lambda \xi - \bar{V}(\xi)] \Phi_n = 0. \quad (14)$$

В частности, при возмущениях потенциала $\bar{V}(\xi)$ типа ускоренно движущихся "ям" $\bar{V}(\xi) < 0$ с ускорением

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\beta}{2} \quad (15)$$

возможны неизлучающие локализованные в окрестности $\bar{V}(\xi)$ динамические состояния ВЧ поля, огибающая которых Φ_n описывается (14) при $\lambda = 0$.

При $\lambda \neq 0$ динамические состояния ВЧ полей квазилокализованы в окрестности $\bar{V}(\xi)$. На рис.8 представлены профили эффективного потенциала $U_{\text{эфф}}(\xi)$ уравнения (14)

$$U_{\text{эфф}}(\xi) = \lambda \xi + \bar{V}(\xi) \quad (16)$$

при $\lambda > 0$ (рис.8а), $\lambda = 0$ (рис.8б) и $\lambda < 0$ (рис.8в) и $\bar{V}(\xi)$ в виде "ямы" потенциала.

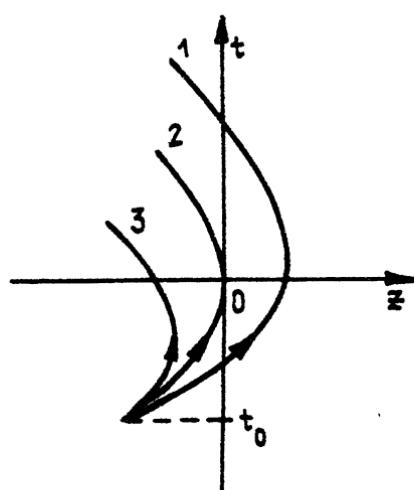


Рис. 7: Траектории движения пакета в плазме с линейным профилем плотности, определяемые соотношением $da/dt = -\beta/2 + \lambda$, при различных значениях λ . Кривая 1 отвечает значению $\lambda > 0$, 2 – $\lambda = 0$, 3 – $\lambda < 0$.

В первом случае, отвечающем более медленному по сравнению с (15) торможению волны потенциала $\tilde{V}(\xi)$ (кривая 1 рис.7), излучение ВЧ поля из области локализации осуществляется в направлении $\xi \rightarrow -\infty$. Во втором случае (при $\lambda = 0$), отвечающем движению по классической траектории (15) (кривая 2 рис.7), увлекаемое поле локализовано в окрестности $\tilde{V}(\xi)$; излучение ВЧ поля в этом случае отсутствует. В третьем случае, отвечающем более быстрому по сравнению с (15) торможению $\tilde{V}(\xi)$ (кривая на рис.7), излучение осуществляется в направлении $\xi \rightarrow +\infty$. Время жизни квазилокализованных динамических состояний при $\lambda \neq 0$ уменьшается с ростом $|\lambda|$. Таким образом, для ВЧ полей, описываемых уравнением Шредингера в среде с линейным профилем плотности и в присутствии НЧ волны параметра среды возможно существование перестраиваемых по частоте динамических состояний, увлекаемых волной параметра в плотные плазменные слои.

2.2. Возможен перенос в закритические области и сгустков полей, описываемых уравнением типа Клейна – Гордона

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \omega_c^2(z, t)\Psi = 0, \quad (17)$$

где $\omega_c(z, t)$ – критическая частота системы. К уравнению типа (17) сводится, например, описание поля вектор-потенциала поперечных электромагнитных волн в плазме с неоднородными и нестационарными параметрами. В качестве примера рассмотрим среду, критическая частота которой $\omega_c(z, t)$ определяется соотношением

$$\omega_c^2(z, t) = Az + B(z - at). \quad (18)$$

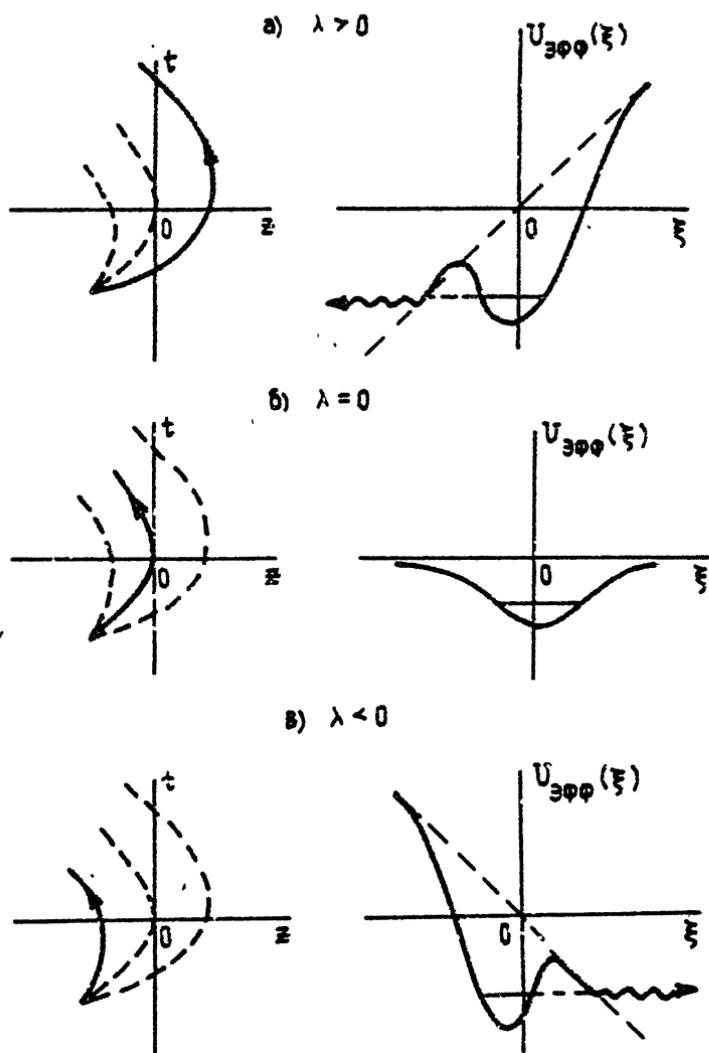


Рис. 8: Траектории движения пакетов в плаэме с линейным профилем плотности при различных значениях λ (сплошная линия на плоскости (t, z)) и отвечающие выбранным значениям профилям эффективного потенциала $U_{\text{эфф}} = \lambda\xi + \tilde{V}(\xi)$ при возмущении $\tilde{V}(\xi)$ в виде "ямы".

а) $\lambda > 0$, б) $\lambda = 0$, в) $\lambda < 0$; волнистая стрелка отвечает направлению излучения увлекаемого ВЧ поля.

Здесь $B(z - at)$ – возмущение критической частоты волной параметра, движущейся с постоянной скоростью a . В (17) перейдем в движущуюся со скоростью возмущения $a < 1$ систему координат (ξ, τ) с помощью преобразований Лоренца

$$\xi = \frac{z - at}{\gamma}, \quad \tau = \frac{t - az}{\gamma}, \quad (19)$$

где $\gamma = \sqrt{1 - a^2}$. Для Ψ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \left[\frac{\xi}{\gamma} + B(\xi \gamma) + \frac{a}{\gamma} \tau \right] \Psi = 0. \quad (20)$$

Представляя поле Ψ в (20) в виде произведения

$$\Psi_n = Z_n(\xi)T_n(\tau), \quad (21)$$

для функций Z_n и T_n получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 Z_n}{d\xi^2} + \left[\mu_n - \frac{A}{\gamma} \xi - B(\xi \gamma) \right] Z_n = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 T_n}{d\tau^2} + \left[\mu_n + A \frac{a}{\gamma} \tau \right] T_n = 0. \quad (23)$$

Отсюда следует возможность существования при возмущениях $B(\xi \gamma)$ типа "ям" и "горбов" метастабильных состояний $\Psi_n = Z_n(\xi)T_n(\tau)$, управляемых волной параметра $B(\xi \gamma)$, частота которых

$$\omega_n(z, t) = \sqrt{Aa \frac{t - za}{\gamma} + \operatorname{Re}(\mu_n \gamma)} \quad (24)$$

при $Aa > 0$ монотонно растет со временем.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ СИЛЬНЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

3.1. Проанализированные выше перестраиваемые по частоте динамические состояния слабых ВЧ полей в присутствии НЧ волны параметра в неоднородных средах, способные переносить энергию ВЧ волн через закритические области неоднородных сред, указывают на возможность существования перестрояемых по частоте нелинейных динамических состояний сильных ВЧ полей, также способных переносить энергию ВЧ волн через закритические области неоднородных сред. Проиллюстрируем это на примере безразмерного уравнения Шредингера (1) с нелинейным потенциалом

$$U(z, t) = \beta \frac{z}{2} - |\Psi|^2. \quad (25)$$

Преобразования, аналогичные (9),(10) при условии (12) приводят (1) к виду

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - (\lambda \xi - |\Phi|^2) \Phi = 0. \quad (26)$$

При $\lambda \neq 0$ решением (26) являются нестационарные (диссипативные) солитоны. Так, при излучении нелинейным волновым пакетом ВЧ поля в направлении $\xi \rightarrow -\infty$ "ядро" волнового пакета тормозится медленнее

$(\lambda > 0)$ по сравнению с неизлучающим солитоном ($\lambda = 0$) [6]. Это приводит к возможности проникновения диссипативных солитонов, излучающих назад, в более плотные плазменные слои по сравнению с глубиной проникновения бездиссипативных солитонов [6]. При излучении вперед в направлении $\xi \rightarrow +\infty$ "ядро" волнового пакета тормозится быстрее по сравнению и неизлучающим солитоном.

3.2. Увлечение нелинейных пакетов интенсивного ВЧ поля возможно и при более сложном по сравнению с (25) типе нелинейности, в частности, ионно-звуковом. Для иллюстрации рассмотрим эволюцию одномерного волнового поля $\varphi(z, t)$, описываемого в безразмерных переменных уравнением Шредингера в среде с линейным или параболическим барьерами плотности и нелинейностью ионно-звукового типа [8],

$$-2i \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - n\varphi + (-z)^p \varphi = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(|\varphi|^2).$$

Значение $p = 1, 2$ отвечает неоднородным средам соответственно с линейным и параболическим барьером плотности. Уравнение (27) заменой независимых переменных (9) и искомой функции

$$\varphi = \Phi(\xi, t) \exp \left\{ -ia\xi - i \frac{d(a^2)}{dt} \right\} \quad (28)$$

при скорости движения $a(t)$, определяемой соотношениями

$$\text{при } p = 1 : \quad \frac{da}{dt} + 1 = 0, \quad (29)$$

$$\text{при } p = 2 : \quad \frac{d^2 a}{dt^2} - a = 0, \quad (30)$$

сводятся к системе уравнений

$$-2i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \left\{ -n + \delta_{p,2}\xi^2 \right\} \Phi = 0, \quad (31a)$$

$$(a^2 - 1) \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 n}{\partial t \partial \xi} - \frac{\partial^2 (an)}{\partial t \partial \xi} = \frac{\partial^2 (|\Phi|^2)}{\partial \xi^2}, \quad (31b)$$

где $\delta_{p,2}$ – символ Кронекера.

В средах с линейным профилем плотности ($p = 1$) решение (29) $a = -t$ отвечает отражению пакетов от плотных слоев. Момент времени $t = 0$ в этом случае отвечает прохождению центром пакета точки поворота. В средах с параболическим барьером плотности ($p = 2$) скорость движения пакета удовлетворяет уравнению (30), одно из линейно независимых решений которого $a_1 = \operatorname{ch} t$ отвечает прохождению, другое – $a_2 = \operatorname{sh} t$ – отражению пакетов от барьера. В первом случае момент времени $t = 0$ соответствует прохождению центром пакета вершины барьера, во втором – точки поворота.

В режимах отражения, для которых $a(t) = -a(-t)$, уравнения (31a), (31b) инвариантны относительно одновременной замены

$$t \rightarrow -t \text{ и } \Phi \rightarrow \Phi^*, \quad (32)$$

где Φ^* – поле, комплексно-сопряженное Φ , откуда следует существование для волновых пакетов (31a),(31b), описываемых в момент прохождения центром пакета точки отражения действительными функциями $\Phi(\xi, 0) = \Phi^*(\xi, 0)$ сопряженных решений

$$\Phi(\xi, t) = \Phi^*(\xi, -t), \quad n(\xi, t) = n(\xi, -t). \quad (33)$$

В этом случае параметры пакетов до и после отражения отличаются знаком фазы (рис.9).

Решения (31a),(31b), удовлетворяющие (33), назовем сопряженными. В частности, при движении пакетов в среде с линейным барьером плотности ($p = 1$) и при достаточно малых скоростях $|a| \ll 1$ в результате интегрирования (31b) по ξ от $-\infty$ до ξ при условии $n(\xi \rightarrow -\infty, t) \rightarrow 0$ и $\Phi(\xi \rightarrow -\infty, t) \rightarrow 0$ система (31a),(31b) примет вид

$$-2i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - n\Phi = 0, \quad (34a)$$

$$-\frac{\partial n}{\partial \xi} + n = \frac{\partial(|\Phi|^2)}{\partial \xi}. \quad (34b)$$

Нелокальный характер нелинейности приводит, в частности, к существованию диссипативных солитонов ВЧ поля в отличие от рассмотренных в [6] солитонов без излучения.

В режиме прохождения, для которого $a(t) = a(-t)$, уравнения (31a), (31b) инвариантны относительно одновременной замены

$$t \rightarrow -t, \quad \xi \rightarrow -\xi (\text{в (4.6)}), \quad \Phi \rightarrow \Phi^*. \quad (35)$$

Отсюда следует, что для волновых пакетов (31a),(31b), поле Φ и концентрация n которых в момент прохождения центром пакета вершины барьера удовлетворяет соотношениям

$$\Phi(\xi, 0) = \Phi^*(-\xi, 0), \quad n(\xi, 0) = n(-\xi, 0), \quad (36)$$

(данным соотношениям удовлетворяют, в частности, четные действительные функции), возможно существование решений

$$\Phi(\xi, t) = \Phi^*(-\xi, -t), \quad n(\xi, t) = n(-\xi, -t), \quad (37)$$

связывающих амплитуды A поля $\Phi = A e^{i\omega t}$ и возмущения концентрации n пакетов перед и за барьером зеркальным соотношением

$$A(-\xi, -t) = A(\xi, t); \quad n(-\xi, -t) = n(\xi, t),$$

при котором передние фронты огибающей пакета и возмущения его концентрации перед барьером отвечают их задним фронтам за барьером;

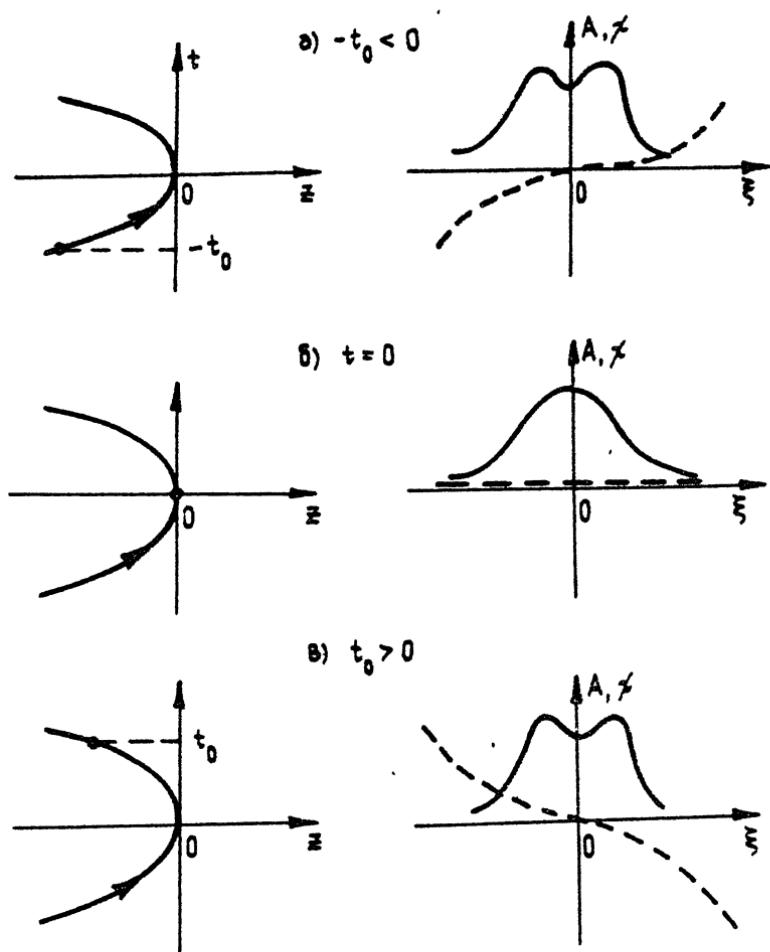


Рис. 9: Пример распределения огибающей A и фазы χ волновых пакетов $\Phi = Ae^{i\varphi}$ (соответственно сплошная и пунктируя линии), отвечающих сопряженным состояниям (35) при отражении от барьера плотности.
 а) отвечает моменту $-t_0 < 0$ движения центра пакета (ему соответствует точка на траектории пакета в плоскости (t, z)) к точке поворота z_r ; б) прохождение точки z_r : $t = 0$; в) движение от z_r : $t_0 > 0$.

фазы пакетов φ перед и за барьером в этом случае связаны зеркально-сопряженным соотношением (рис.10):

$$\varphi(\xi, t) = -\varphi(-\xi, -t). \quad (38)$$

Решения (31 а), (31 б), удовлетворяющие (37), назовем зеркально-сопряженными.

Модельные уравнения поля (27) и уравнения движения пакетов (29), (30) пригодны лишь при достаточно малых изменениях частоты нелиней-

ных волновых пакетов $\Delta\omega \ll \omega$. При движении пакетов в плавно неоднородной плаэме с большим изменением электронной концентрации, возникает и значительное изменение частоты импульса $\Delta\omega \sim \omega$ [8].

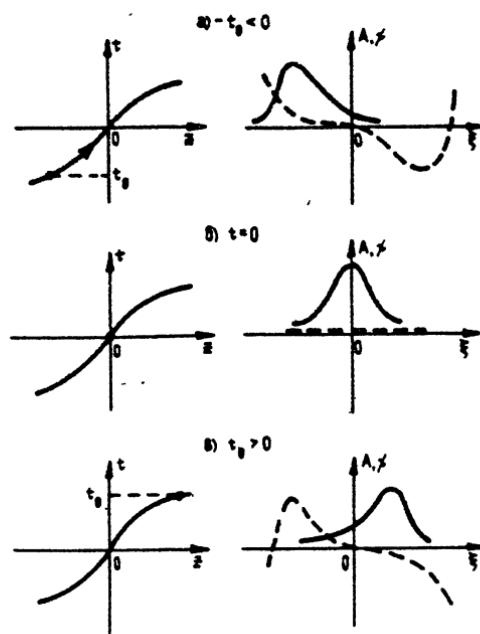


Рис. 10: Пример распределения огибающей A и фазы χ волновых пакетов $\Phi = Ae^{i\chi}$ (соответственно сплошная и пунктируя линии), отвечающих зеркально-сопряженным состояниям (39).

а) соответствует моменту нахождения центра пакета перед барьером: $-t_0 < 0$;
б) на его вершине $t = 0$; в) за барьером $t_0 < 0$.

Рассмотрим этот эффект на примере сильных линейно поляризованных ЭМ волн в плоскослоистой изотропной плаэме с нелинейностью ионно-звукового типа. В среде с невозмущенной концентрацией

$$N(z) = N_0 \left[1 - \left(\frac{-z}{\Delta} \right)^p \right], \quad (39)$$

уравнения для вектор-потенциала ЭМ поля A и возмущения концентрации N_s в безразмерных переменных

$$t_n = \frac{c}{\Delta} t_{\text{пакет}}, \quad z_n = \frac{z_{\text{пакет}}}{\Delta}, \quad A = \frac{\omega_p(0) A_{\text{пакет}}}{\alpha \sqrt{16\pi N_0 T_e}}, \quad (40)$$

$$\omega_n(t) = \frac{\omega(t)}{\omega_p(0)}, \quad n = \frac{N_s}{N_0},$$

(индекс "н" в дальнейшем опустим) имеют вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \alpha^2 [1 - (-z)^p + n] A = 0, \quad (41a)$$

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 \right), \quad (41b)$$

где $\omega_p^2(0) = (4\pi e^2 N_0)/(m_e)$, $\alpha = (\omega_p(0))/(c)\Delta$, $\zeta = c/c_S$, T_e – температура электронов. Переходя в сопровождающую пакет систему отсчета (12), пренебрежем во вновь полученных уравнениях членами порядка $\partial^2/\partial t^2$ что соответствует достаточно медленной перестройке параметров пакета. Представим решение (41 а), (41 б) в виде

$$A(z, t) = \frac{\phi(\xi, t)}{\sqrt{\omega(t)}} \exp \left\{ i \int^t \Omega(\xi, \tilde{t}) d\tilde{t} \right\}, \quad (42)$$

где

$$\Omega(\xi, t) = \alpha \left[\omega - \frac{1}{2(1-a^2)} \frac{\omega a^2}{(1-a^2)} - \frac{\mu}{2\omega} - \xi \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega a}{1-a^2} \right) \right]. \quad (43)$$

Частоту ω и скорость движения пакетов a подчиним уравнениям

$$\omega^2(t) - \omega_p^2(t) = \mu, \quad (44)$$

$$p=1 : \quad \omega \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega a}{1-a^2} \right) + \frac{1}{2} = 0, \quad (45)$$

$$p=2 : \quad \omega \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega a}{1-a^2} \right) - z(t) = 0, \quad (46)$$

где $\omega_p(t) = \sqrt{1-z^2(t)}$ – значение невозмущенной плазменной частоты в центре волнового пакета

$$z(t) = z_0 + \int_0^t V(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Тогда уравнения для огибающей пакета Φ и концентрации n будут следующие:

$$(1-a^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - 2i\alpha\omega \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \alpha^2 (\xi^2 - n) \Phi = 0, \quad (47)$$

$$(a^2 \zeta^2 - 1) \frac{\partial n}{\partial \xi} - \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial t} (an^2) = \omega \frac{\partial}{\partial \xi} (|\varphi|^2). \quad (48)$$

Здесь, как и при малых отстройках частоты возможны сопряженные и зеркально-сопряженные динамические состояния поле–среда. Частота пакетов $\omega(t)$ является при этом четной функцией времени относительно момента отражения или момента прохождения пакетом вершины барьера. Анализ уравнений (44)–(46) показывает, что при $\mu > 0$ траектории пакетов достигают границы плазмы, а при $\mu < 0$ – локализуются внутри

плазменного слоя $|z| \leq \omega_m < 1$, не достигая его границ. На рис.11 приведена фазовая плоскость уравнений (44)–(46) при $p = 2$.

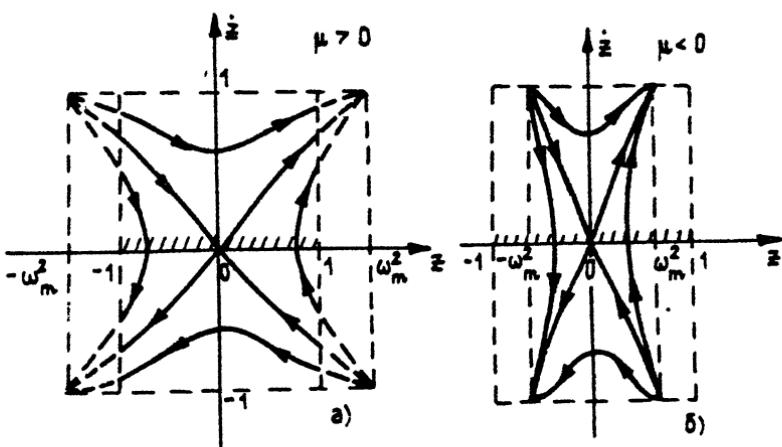


Рис. 11: Фазовая плоскость уравнения (43), описывающего движение пакетов в плаэме с параболическим барьером плотности.

а) $\mu > 0$; б) $\mu < 0$. Кривые 1 отвечают прохождению пакетов через барьер плотности, 3 – отражению, а разделяющая эти режимы сепаратриса 2 отвечает "затягиванию" пакетов поля на вершину барьера и "скатыванию" с нее.

Кривые 1 отвечают прохождению пакетов ЭМ поля через барьер плотности, 2 – отражению от него, 3 – разделяющим режимам "затягивания" и "скатывания" пакетов с вершиной барьера плотности. Подробный анализ полученных уравнений в приближении $\alpha \ll 1$ приведен в [8]. Изменение параметров пакетов при их движении по фазовым траекториям (43) описывается уравнениями (41 а), (41 б), (42). В частности, при скоростях движения пакета, как много меньших, так и много больших скорости ионно-звуковых волн, эволюция пакетов может быть проанализирована в безабберационном приближении. В заключение отметим, что с данными нелинейными волновыми пакетами может быть связан перенос энергии интенсивного ЭМ поля через закритические плазменные среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов В.Н., Широков Ю.М. // ЖЭТФ. 1967. Т.53. С.2121.
2. Горев В.В., Кингсеп А.С., Рудаков Л.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т.19. N 5-6. С.691.
3. Громов Е.М., Диденкулов И.Н., Таланов В.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т.30. N 4. С.562.
4. Gromov E.M., Talanov V.I. // Laser and particle beams. 1988. V.6. P.313.
5. Громов Е.М., Таланов В.И. // Физика плаэмы. 1992. Т.18. С.119.
6. Chen H.H. and Liu C.S. // Phus. Rev. Lett. 1976. V.37. P.693.
7. Gupta M.R., Som B.K., Dasgupta B. // Phus.Lett. 1978. V.69A. P.172.
8. Громов Е.М. Накаряков В.М. Таланов В.И.//ЖЭТФ. 1991. Т.97. С.1785.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
21 октября 1992 г.

ДИФРАКЦИЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

И.Г. Кондратьев, Г.В. Пермитин, А.И. Смирнов

При решении задач распространения и дифракции волн в плавно неоднородных средах возникают весьма значительные трудности, связанные с отсутствием аналитических методов решения волновых уравнений в частных производных с переменными коэффициентами и с громоздкостью и неэффективностью численных. Существует несколько способов совместного описания рефракционных и дифракционных эффектов в окрестностях каустик и фокальных точек, опирающихся на геометрическую оптику (ГО) и являющихся ее волновыми обобщениями, таких как метод эталонных функций Кравцова – Людвига, метод Маслова. Однако они не пригодны для устранения интегральных (квазидиффузионных) нарушений ГО, приводящих к постепенной потере не только ее применимости, но и информативности на протяженных трассах распространения. В отличие от дифракционных катастроф, интегральные (тихие) дифракционные эффекты необнаружимы "изнутри" приближения ГО, что делает их особенно опасными при коротковолновом асимптотическом описании полей.

В отсутствие рефракции, в однородных средах и в вакууме, наоборот, интегральные дифракционные эффекты относятся к классическим. Их достаточно подробное количественное описание было осуществлено Френелем еще в те времена, когда не были известны волновые уравнения. Метод Френеля основан на представлении волнового поля в виде суперпозиции интерферирующих виртуальных объектов (сферических волн), для которых всюду справедлива геометрическая оптика. Эта идея применения ГО не в качестве приближения к искомым волновым полям, а для расчета параметров их интегральных разложений получила развитие в дифракционной теории aberrаций оптических линзовых систем [1]. В [2] было предложено обобщение теории aberrаций на плавно неоднородные среды. В [3] поле волнового пучка было представлено в виде разложения по коротковолновым асимптотикам функций точечного источника в малоугловом приближении. В [4] получено приближенное отображение поля пучка в вакууме в поле пучка в неоднородной среде. В [5] распространены на плавно неоднородные среды понятия характерных зон дифракции. Целью настоящей работы является объединение результатов [2–5] на основе единого подхода.

1. КВАЗИОПТИКА ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Рассматривается задача о дифракции в плавно неоднородной среде монохроматического волнового пучка $U(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$, поведение которого описывается скалярным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta U + k^2 \epsilon(\vec{r}) U = 0. \quad (1)$$

Считается, что всюду по трассе распространения пучок остается узко-направленным и имеет малые по сравнению с характерным масштабом неоднородности среды $L_\epsilon \sim \epsilon/|\nabla\epsilon|$ поперечные размеры Λ . Другими словами, в задаче есть два малых параметра: характерная ширина углового спектра пучка ν и отношение $\mu = \Lambda/L_\epsilon$. Нашей целью будет построение асимптотических по параметрам ν и μ решений уравнения (1).

Можно показать (и это следует из изложенной ниже теории), что при $\nu \ll 1$ и $\mu \gg 1$ волновые пучки распространяются вдоль геометрооптического луча, выходящего из центра излучающего раскрыва в направлении максимума его диаграммы направленности. Уравнение такого луча (будем называть его "опорным") имеет вид

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\nabla\epsilon, \quad (2)$$

$$\vec{r}_0(\tau = 0) = 0, \quad \dot{\vec{r}}_0(\tau = 0) = \sqrt{\epsilon(0)} \vec{z}_0.$$

Здесь $\vec{r}_0(\tau)$ – радиус-вектор точек на опорном луче, отсчитываемый от центра излучающего раскрыва; \vec{z}_0 – единичный вектор в направлении максимума диаграммы направленности излучающего раскрыва; переменная τ связана с длиной дуги опорного луча s соотношением $d\tau = ds/\sqrt{\epsilon(\vec{r}_0)}$.

При описании структуры поля пучка удобно перейти в ортогональную криволинейную систему координат (τ, ξ, η) , связанную с опорным лучом:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \xi \vec{a}(\tau) + \eta \vec{b}(\tau), \quad (3)$$

где $(\vec{l}, \vec{a}, \vec{b})$ – ортогональный базис, повернутый относительно естественного трехгранника $(\vec{l}, \vec{n}, \vec{m})$ на угол $\Theta(\tau)$, меняющийся вдоль опорного луча в соответствии с законом Рытова*: $\Theta = \sqrt{\epsilon}/T$, где T – радиус кручения опорного луча. Коэффициенты Ламе криволинейной системы координат равны:

$$h_\xi = h_\eta = 1, \quad h_\tau = \sqrt{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\xi \cos \Theta + \eta \sin \Theta}{\varrho} \right),$$

где ϱ – главный радиус кривизны опорного луча.

Представим поле U в виде

$$U(\tau, \xi, \eta) = (\epsilon_0(\tau))^{-1/4} \cdot W(\tau, \xi, \eta) \exp(i k \int_0^\tau \epsilon_0(\tau') d\tau'), \quad (4)$$

где W – плавно (в масштабе λ) меняющаяся амплитуда поля, $\epsilon_0(\tau)$ – значение диэлектрической проницаемости на опорном луче. Подставляя (4) в (1) и пренебрегая членами порядка ν^4 , $\mu\nu^3$, получаем следующее укороченное уравнение:

$$2ik \frac{\partial}{\partial \tau} W + \frac{h_\tau}{\epsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(h_\tau \frac{\partial}{\partial \xi} W \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\tau \frac{\partial}{\partial \eta} W \right) \right] + \\ + k^2 \left(\frac{h_\tau^2}{\epsilon_0} \epsilon(\tau, \xi, \eta) - \epsilon_0(\tau) \right) W = 0. \quad (5)$$

*Закон установлен для вращения плоскости поляризации электромагнитного излучения в приближении геометрической оптики.

Уравнение (5) справедливо в квазиоптическом приближении для произвольной трехмерно неоднородной среды. Однако в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только двумерно неоднородных полей и сред ($\partial/\partial y = \partial/\partial\eta = 0$), дабы не перегружать текст громоздкими выкладками. Оставляя в (5) только кубические по ν и μ слагаемые, получаем

$$2ik \frac{\partial}{\partial\tau} W + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} W - k^2 \Phi_2(\tau) \xi^2 W - \\ - \left(2 \frac{\xi}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} W + k^2 \Phi_3(\tau) \xi^3 W \right) = 0, \quad (6)$$

$$\Phi_2(\tau) = \left[\frac{3}{4} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\xi} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\epsilon}{\partial\xi^2} \right]_{\xi=0},$$

$$\Phi_3(\tau) = \left[-\frac{1}{6} \frac{\partial^3\epsilon}{\partial\xi^3} + \frac{1}{2\epsilon} \frac{\partial^2\epsilon}{\partial\xi^2} \cdot \frac{\partial\epsilon}{\partial\xi} - \frac{1}{4\epsilon^2} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\xi} \right)^3 \right]_{\xi=0}.$$

Здесь ϱ – радиус кривизны опорного луча:

$$\varrho = \left(2\epsilon / \frac{\partial\epsilon}{\partial\xi} \right)_{\xi=0}.$$

Уравнение (6) записано в форме, позволяющей сопоставить двумерно неоднородной среде эквивалентную оптическую линию из распределенных квадратичных и кубических фазовых корректоров. Отсутствие в (6) линейных корректоров (призм) свидетельствует о том, что пучок локализован в окрестности опорного луча. В эквивалентной оптической линии квадратичные корректоры соответствуют идеальным линзам, а кубические (и более высокого порядка) коррекции приводят к аберрациям.

2. БЕЗАБЕРРАЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Если в (6) пренебречь аберрациями (оставить только квадратичные по ξ члены), то получим уравнение квазиоптики в идеальной линзоподобной среде [6]:

$$2ik \frac{\partial W_\delta}{\partial\tau} + \frac{\partial^2 W_\delta}{\partial\xi^2} - k^2 \Phi_2(\tau) \xi^2 W_\delta = 0, \quad (7)$$

где W_δ – комплексная амплитуда поля в безаберрационном приближении. Решение (7) с произвольными "начальными" условиями ($W_\delta(\tau = 0, \xi) = W_0(\xi)$) можно записать в квадратурах, если известна фундаментальная система (σ_1, σ_2) уравнения лучей, дифференциально близких к опорному:

$$\ddot{\sigma} + \Phi_2(\tau) \sigma = 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(0) &= 1, \quad \dot{\sigma}_1(0) = 0; \\ \sigma_2(0) &= 0, \quad \dot{\sigma}_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Поле в безаберрационном приближении имеет вид:

$$W_\delta = \int W_0(\zeta) G_\delta(\tau, \xi, \zeta) d\zeta, \quad (9)$$

$$G_\delta = \sqrt{\frac{k}{2\pi\sigma_2}} \exp \left\{ ik \left[\frac{\dot{\sigma}_1}{2\sigma_1} \xi^2 + \frac{\sigma_1}{2\sigma_2} \left(\frac{\xi}{\sigma_1} - \zeta \right)^2 \right] \right\},$$

где G_δ – функция Грина уравнения (7).

Прямое сравнение G_δ с функцией Грина квазиоптического уравнения в однородной среде (вакууме),

$$G^{(0)} = \sqrt{\frac{k}{2\pi z}} \exp \left\{ ik \frac{(z - \zeta)^2}{2z} \right\}, \quad (10)$$

показывает, что в рамках безаберрационного приближения поле пучка в вакууме отображается в поле пучка в плавно неоднородной среде с помощью замены:

$$z \rightarrow R = \sigma_2/\sigma_1, \quad z \rightarrow \xi/\sigma_1,$$

$$W_\delta(\tau, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \exp \left(ik \frac{\dot{\sigma}_1}{2\sigma_1} \xi^2 \right) \cdot W^{(0)}(R(\tau), \xi/\sigma_1); \quad (11)$$

где $W^{(0)}(z, z)$ – плавно меняющаяся амплитуда поля пучка в вакууме с тем же самым "начальным" распределением $W_0(z)$; $R(\tau)$ – радиус кривизны фазового фронта волны, расходящейся из точки $(\tau, \xi = 0)$, в центре излучающего раскрыва.

Приведенное преобразование координат и полей (11) * позволяет обобщить на плавно неоднородные среды понятия зоны геометрической оптики и характерных зон дифракции Френеля и Фраунгофера. Роль френелевского параметра при этом играет величина $p = \sqrt{|R| \lambda_0 / \Lambda_0}$, где Λ_0 – ширина пучка в плоскости $\tau = 0$. В отличие от дифракции волн в вакууме, где френелевский параметр монотонно увеличивается при удалении от исходной апертуры, в плавно неоднородных средах он, в общем случае, является немонотонной функцией τ . В силу этого, порядок чередования характерных зон дифракции в неоднородных средах может существенно отличаться от классического:

зона ГО (ближняя, прожекторная) → зона Френеля → зона
Фраунгофера,

имеющего место при дифракции плоской волны на щели в экране. В дефокусирующих средах ($\Phi_2 < 0$) область ГО ($p \ll 1$) может простираться от излучающего раскрыва до бесконечности. В фокусирующих системах ** ($\Phi_2 > 0$) чередование зон, наоборот, ускоряется, и дифракционная картина Фраунгофера устанавливается на конечном расстоянии в

*По сути дела, (11) является обобщением на плавно неоднородные среды известного [7,4] преобразования идеальной тонкой линзы.

**Как видно из (6), любое искривление лучей является фокусирующим фактором. Кроме того, фокусирующими являются свои с максимумом показателя преломления.

окрестностях "фокальных плоскостей", где $p \rightarrow \infty$ (т.е. вблизи точек касания опорного луча с каустиками изначально плоской волны). Затем следует, как правило, обратная смена зон, и вновь устанавливается область ГО ($p \ll 1$) вблизи каустики поля точечного источника, помещенного в центре излучающего раскрыва. По аналогии с линзовыми системами сечения пучка, где восстанавливается зона ГО, можно назвать плоскостями изображения (иногда их также называют зонами конвергенции). Описанная смена направлений чередования характерных зон дифракции может происходить, в принципе, много раз. На бесконечности ($\tau \rightarrow \infty$) может установиться любая из характерных зон, а не обязательно фраунгофера.

Следует отметить, что в отличие от оптических линзовых систем, элементы которых достаточно близки к идеальным корректорам, в произвольных плавно неоднородных средах область применимости безаберрационного приближения весьма ограничена, а aberrации приводят не к поправкам, а к существенным изменениям структуры полей.

3. АБЕРРАЦИОННЫЕ ИСКАЖЕНИЯ ПОЛЯ ПУЧКА

В дифракционной теории aberrаций дискретных оптических систем [1] развит метод, основанный на представлении волнового поля на выходе системы в виде свертки идеального "изображения" с так называемой функцией пропускания. Обобщая этот метод на плавно неоднородные среды, представим комплексную амплитуду поля вблизи опорного луча в виде

$$W(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(\tau, \zeta) K(\xi - \zeta, \tau, \zeta) d\zeta. \quad (12)$$

Ядро интегрального преобразования $K(\chi, \tau, \xi)$ назовем функцией пропускания плавно неоднородной среды; при малых aberrациях она остро локализована по переменной χ вблизи нуля и является плавной по переменным τ и ξ . Функция пропускания имеет весьма наглядный физический смысл; она описывает поле в сечении $\tau = \text{const}$, создаваемое источниками, распределенными в плоскости $\tau = 0$, имеющими постоянную амплитуду и квадратичную фазовую зависимость, обеспечивающую фокусировку в точку $(\tau, \xi + \chi)$. В свою очередь, (12) является разложением по таким виртуальным волнам поля произвольного волнового пучка.* Наряду с функцией пропускания в дифракционной теории aberrаций вводят коэффициент пропускания, являющийся ее фурье-образом:

$$\tilde{K}(\kappa, \tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\chi, \tau, \xi) \exp(i k \chi \kappa) d\chi. \quad (13)$$

*Система функций K является полной и ортогональной. Действительно, если в сечении $\tau = 0$ поставить два компенсирующих друг друга идеальных квадратичных фазовых корректора и в промежутке между ними разложить поле по плоским волнам, то на выходе мы будем иметь разложение (12). В частных случаях для сечений пучка, где $\sigma_2(\tau) = 0$ или $\sigma_1(\tau) = 0$, (12) переходит в разложение по функциям точечного источника или изначально плоским волнам.

Применяя к (12) теорему о свертке, получаем еще одно представление для поля пучка:

$$W(\tau, \xi) = \frac{k}{2\pi} \int \tilde{W}_\delta(\tau, \kappa) \tilde{K}(\kappa, \xi, \tau) \exp(-ik\kappa\xi) d\kappa , \quad (14)$$

где $\tilde{W}_\delta(\tau, \kappa)$ – Фурье-образ поля пучка в безаберрационном приближении.

Подробности вычисления функций и коэффициентов пропускания можно найти в [2]; здесь мы приведем выражения для них для случаев, когда aberrации четвертого порядка (и выше) не существенны:

$$\tilde{K} = \exp \left(-ik \sum_{m=0}^3 a_m \xi^m \kappa^{3-m} \right); \quad (15)$$

$$K(\chi, \tau, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi \Lambda_{ab}}} V \left((\chi + \beta \xi^2) / \Lambda_{ab} \right) \exp(ik\varphi), \quad (16)$$

$$\varphi = \left((a_1^3 / 27a_0^2) - a_3 \right) \xi^3 + (a_1 / 3a_0) \xi (\chi + \beta \xi^2);$$

где $V(x)$ – функция Эйри, $\beta = a_2 - a_1^2 / 3a_0$, $\Lambda_{ab} = (3a_0/k^2)^{1/3}$ – характерный аберрационный масштаб. Входящие в (15) и (16) параметры $a_m(\tau)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= a_1, & \dot{a}_1 &= 2a_2 - 3\Phi_2 a_0 - 1/\rho, \\ \dot{a}_2 &= 3a_3 - 2\Phi_2 a_1, & \dot{a}_3 &= -\Phi_2 a_2 + 0,5\Phi_3 \end{aligned} \quad (17)$$

и начальным условиям $a_m(\tau = 0) = 0$.

Как видно из (12) – (16), структура пучка зависит от довольно большого числа параметров. Однако основным параметром, определяющим существенность аберрационных искажений, является отношение $\Lambda_{ab}/\Lambda_\delta$, где, напомним, Λ_δ – ширина пучка в безаберрационном приближении. Можно выделить две следующие предельные ситуации:

$$a) \Lambda_\delta \gg |\Lambda_{ab}| : \quad W(\tau, \xi) \simeq W_\delta(\tau, \xi + \beta \xi^2) \exp(-ik a_3(\tau) \xi^3). \quad (18)$$

Аберрационные искажения в таких областях сказываются лишь на амплитудной и фазовой структуре периферийной части пучка, где амплитуда поля мала. Вблизи опорного луча поле достаточно хорошо описывается в безаберрационном приближении. Необходимо отметить, что выражение (18) справедливо для одномасштабных (колоколообразных) распределений W_δ , либо в тех случаях, когда все характерные масштабы W_δ много больше Λ_{ab} .

$$b) \Lambda_\delta \ll |\Lambda_{ab}| :$$

$$W(\tau, \xi) = (1/\sqrt{\pi \Lambda_{ab}}) V(\xi / \Lambda_{ab}) \tilde{W}_\delta(\tau, 0), \quad (19)$$

В этом пределе кубические aberrации приводят к формированию типичной для окрестностей гладкой каустики эйри-структуре поля вблизи опорного луча. Однако формула (19) неверно описывает асимптотическое поведение поля на больших расстояниях от опорного луча (где оно мало) –

закон спадания определяется не асимптотикой функции Эйри, а угловым спектром пучка в безаберрационном приближении.

Для расчета полей волновых пучков в неоднородных средах была составлена графическая программа; результаты расчетов (для частного случая параболического слоя диэлектрической проницаемости) иллюстрируются на рис.1, 2. На первом изображены опорный луч, границы пучка по уровню спадания $1/e$ и структура интенсивности поля в нескольких характерных сечениях в безаберрационном приближении. На втором – то же самое, но с учетом сильных кубических aberrаций.



Рис. 1.



Рис. 2

Авторы выражают признательность А.Л.Шаровой и А.В.Липатову за помощь при составлении программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970.
2. Кондратьев И.Г., Пермитин Г.В., Смирнов А.И. // Изв.вузов. Радиофизика. 1980. Т.23. N 10. С.1195.
3. Пермитин Г.В. Диссертация. Горький, 1973.
4. Пермитин Г.В. // Изв.вузов. Радиофизика. 1973. Т.16. N 2. С.254.
5. Kondrat'ev I.G., Permitin G.V. Proc. V Colloquim on Microwave Communication. – Budapest, 1974.
6. Таланов В.И. Диссертация. Горький, 1967.
7. Таланов В.И. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т.11. С.303.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
19 октября 1992 г.

ВОЛНЫ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СРЕДАХ*

Н.С.Степанов

1. ФИЗИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ СРЕД И ИХ ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

Изучение особенностей распространения волн в нестационарных (т.е. с изменяющимися во времени параметрами, или "параметрических") средах и системах, начатое еще в конце 50-х (см. обзоры [1-3] и приведенную в них литературу), продолжает оставаться одним из актуальных направлений современной "волновой" физики, применительно к волнам различной физической природы и разного частотного диапазона (в электродинамике и физике плазмы, оптике, акустике, других механических системах). Ниже, для определенности, мы в основном ограничимся свободными электромагнитными волнами в непроводящих или слабопроводящих средах, хотя многие соотношения, прежде всего — кинематические, оказываются справедливыми и для других волновых систем. Для иллюстраций чаще всего будут рассматриваться две характерные модели сред — недиспергирующего диэлектрика с переменными проницаемостями ϵ , μ и, в качестве существенно диспергирующей среды, плазмы с изменяющейся во времени концентрацией электронов N . Наконец, конкретные расчеты удобно проводить для типичного случая, когда изменение параметров происходит по закону бегущей волны: $p = p(x-Vt)$; при этом предел $V \rightarrow \infty$ (конкретнее, $V \gg v$, где v — скорость распространения волны в системе) соответствует чисто временному изменению параметров.

Укажем теперь основные механизмы подобной нестационарности волновых систем, возможные как в естественных, так и искусственных (в том числе лабораторных) условиях. Прежде всего, временные вариации параметров могут быть обусловлены движением пространственных неоднородностей среды (как в результате дрейфа ее как целого, например, в результате взрывных процессов, так и локальных волновых перемещений). Заметим, что при этом скорость V может быть сравнима со скоростью света c (например, в электронных и плазменных потоках). Далее, изменение электродинамических параметров во времени возможно и в отсутствие макроскопических движений в среде из-за ее ионизации, нагрева, рекомбинации и других релаксационных процессов; здесь, в принципе, возможно и $V \gg c$. Наконец, быстрые вариации параметров волновой системы могут быть достигнуты при помощи внешних управляющих полей — электрического, магнитного, или под воздействием специальной волны "накачки", которая может иметь иную физическую природу по отношению к "сигнальной" волне (например, электродинамические параметры среды могут изменяться под воздействием упругих волн, и наоборот). В подобных случаях, строго говоря, речь идет о нелинейном взаимодействии волн, однако в случае относительно слабых "сигнальных"

*Памяти С.И.Аверкова посвящено.

воли можно пренебречь обратным влиянием их на среду. Математически при этом задача сводится к линейным уравнениям с переменными коэффициентами; именно такой класс задач мы здесь будем рассматривать.

Прежде чем перейти к конкретным задачам, подчеркнем две основные особенности параметрических систем. Ясно, во-первых, что решения вышеупомянутых динамических уравнений с переменными коэффициентами не могут быть строго гармоническими во времени. По этой причине анализ процессов в параметрических системах существенно сложнее, чем для стационарных систем, в частности, метод Фурье здесь не столь эффективен. В физическом же плане то же самое фактически означает, что в нестационарных системах частота волн не остается постоянной, т.е. происходит преобразование их временного спектра, чем они, прежде всего, и интересны. Исследование закономерностей параметрического преобразования спектра волн – один из центральных вопросов, обсуждаемых ниже.

Вторая особенность нестационарных сред связана с энергетическими соотношениями: а именно, в общем случае внешние силы, изменяющие параметр среды, совершают определенную работу над полем (того или иного знака), поэтому энергия распространяющихся в такой среде волн не остается постоянной даже в отсутствие обычных механизмов диссипации. Легче всего это показать на примере недиспергирующего диэлектрика, описываемого материальными уравнениями

$$\vec{D} = \epsilon(\vec{r}, t)\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(\vec{r}, t)\vec{H}, \quad j_\sigma = \sigma(\vec{r}, t)\vec{E}, \quad (1)$$

где, как обычно, \vec{E} , \vec{H} – напряженности электрического и магнитного полей; \vec{D} , \vec{B} – соответствующие векторы индукции, j_σ – ток проводимости; ϵ , μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости; σ – проводимость среды. Из уравнений Максвелла нетрудно получить теорему Пойнтинга, обобщенную на случай переменных ϵ , μ и σ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\sigma E^2 - 1/2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} E^2 + \frac{\partial \mu}{\partial t} H^2 \right), \quad (2)$$

где, как обычно, $w = 1/2(\epsilon E^2 + \mu H^2)$ – плотность энергии электромагнитного поля, $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ – вектор Пойнтинга. Таким образом, кроме обычного члена $-\sigma E^2$, описывающего Джоулевы потери, в нестационарной среде имеет место параметрический энергообмен поля со средой (последний член в (5)); например, при $\mu = \text{const}$, $\partial \epsilon / \partial t < 0$ имеет место "накачка" энергии полю. В результате возможно параметрическое усиление распространяющихся волн (а в некоторых случаях – генерация). По-видимому, на это обстоятельство впервые было обращено внимание С.И. Аверковым (см. [4]). В случае же диспергирующих сред энергетические соотношения оказываются сложнее, эти вопросы обсуждаются в последнем разделе. При этом мы ограничимся нерезонансными параметрическими явлениями, когда характерные пространственно-временные масштабы изменения параметров $p(\vec{r}, t)$ не связаны с соответствующими периодами волнового поля (вариации $p(\vec{r}, t)$ могут быть, например, апериодическими). В математическом аспекте анализ оказывается наиболее простым в двух предельных случаях – резкого (скачкообразного) и плавного изменения параметров, которые мы ниже в основном и обсудим.

2. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ДИЭЛЕКТРИКЕ С ПАРАМЕТРАМИ, СКАЧКООБРАЗНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ

В качестве простейшей "эталонной" задачи, когда удается найти точные выражения как для спектральных, так и энергетических характеристик волны, начнем с однородной в пространстве диэлектрической среды, проницаемости которой ϵ, μ скачком изменяются от начальных значений ϵ_1, μ_1 при $t < 0$ до ϵ_2, μ_2 для $t > 0$; при этом термин "скакок" параметров означает, что их характерное время изменения $\Delta t_p \ll T_{1,2}$, где $T_{1,2} = 2\pi/\omega_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ – часть волнового поля до и после скачка (рис.1).

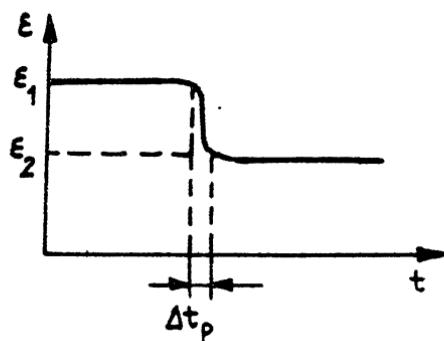


Рис. 1:

В этом пределе фактически не приходится решать вышеупомянутых уравнений с переменными коэффициентами, а достаточно сшивать решения, найденные для постоянных параметров для $t < 0$ и $t > 0$, при помощи некоторых начальных условий при $t = 0$. Поскольку, очевидно, как сами поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$, так и роторы от них здесь остаются конечными, то из уравнения $\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ следует, что приращение $\Delta \vec{B}$ за время скачка стремится к нулю при $\Delta t_p \rightarrow 0$; аналогично $\Delta \vec{D} \rightarrow 0$; значения же \vec{E} , \vec{H} , согласно (1) изменяются скачком. Таким образом, при произвольном резком изменении всех трех параметров $\epsilon(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ выполняются условия:

$$\vec{D} = \text{const}, \quad \vec{B} = \text{const}, \quad \frac{\vec{E}_2}{\vec{E}_1} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad \frac{\vec{H}_2}{\vec{H}_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (3)$$

В результате скачком изменяются и плотности энергии электрического ($w_e = \epsilon E^2 / 2$) и магнитного ($w_\mu = \mu H^2 / 2$) полей, а также вектор Пойнтинга $\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]$:

$$\frac{w_{E2}}{w_{E1}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad \frac{w_{\mu 2}}{w_{\mu 1}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \frac{\vec{S}_2}{\vec{S}_1} = \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}, \quad (4)$$

причем при $\epsilon_2 < \epsilon_1$ в соответствии с (2) $w_{E2} > w_{E1}$, и т.д.

Рассмотрим теперь пространственно-временную структуру полей. Пусть $\sigma = 0$ и при $t < 0$ была задана плоская первичная волна:

$$\vec{D}_1(z, t) = \vec{D}_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}, \quad \vec{B}_1(z, t) = \rho_1 \vec{D}_1(z, t), \quad (5)$$

здесь и далее $\rho = \sqrt{\mu/\epsilon}$ - импеданс среды, $n = \sqrt{\epsilon\mu/(\epsilon_0\mu_0)}$ - показатель преломления, так что $v_{ph} = \omega/k = c/n$. При $t > 0$ решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} \vec{D}_2(z, t) &= \vec{D}_+ e^{i(\omega t - kz)} + \vec{D}_- e^{-i(\omega t + kz)}, \\ \vec{B}_2(z, t) &= \rho_2 [\vec{D}_+ e^{i(\omega t - kz)} + \vec{D}_- e^{-i(\omega t + kz)}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя условия (3), легко найти

$$k = k_0, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}, \quad \vec{D}_{\pm} = 1/2(1 \pm \frac{\rho_1}{\rho_2}) \vec{D}_0. \quad (7)$$

Иными словами, значение волнового числа на чисто временном скачке параметров не изменяется, частота же ω изменяется обратно-пропорционально значению показателя преломления среды $n \sim \sqrt{\epsilon\mu}$. При этом, за исключением случая $\rho = \text{const}$ (т.е. $\mu(t) \sim \epsilon(t)$) появляется обратная волна с амплитудой \vec{D}_- , т.е. временные вариации параметров, так же как и пространственная неоднородность среды, вызывают отражение волн.

Эти результаты нетрудно обобщить на случай квазимохроматических импульсов (волновых пакетов). Пусть начальная волна в виде (5) занимала отрезок $0 \leq z \leq l_0$; тогда решение (6) сразу после скачка в соответствии с (3) также существует в той же области, а затем волновое поле распадается на прямой и обратный импульсы, имеющие ту же пространственную длительность $l_{\pm} = l_0$. Временная же длительность импульсов при этом меняется из-за изменения скорости распространения волны: $\tau = l/u$, где u - групповая скорость, так что $\tau_2/\tau_1 = u_1/u_2$. В результате изменяется и ширина спектра волнового пакета; для "однородных" сигналов $\Delta\omega \simeq 2\pi/\tau \sim u(t)$. Относительная ширина спектра $\Delta\omega/\omega$ тогда варьируется пропорционально отношению $u(t)/v_{ph}(t)$; в среде же без дисперсии $u(t) = v_{ph}(t)$ и $\Delta\omega/\omega = \text{const}$.

Наглядно трансформация импульсных сигналов на скачке параметров может быть проиллюстрирована на плоскости z, t , если, как обычно в математической физике, на ней изображать характеристические линии (или, в терминологии теории относительности "миевые" линии), соответствующие отдельным групповым фронтам импульсов (в частности,

переднего и заднего, рис.2).

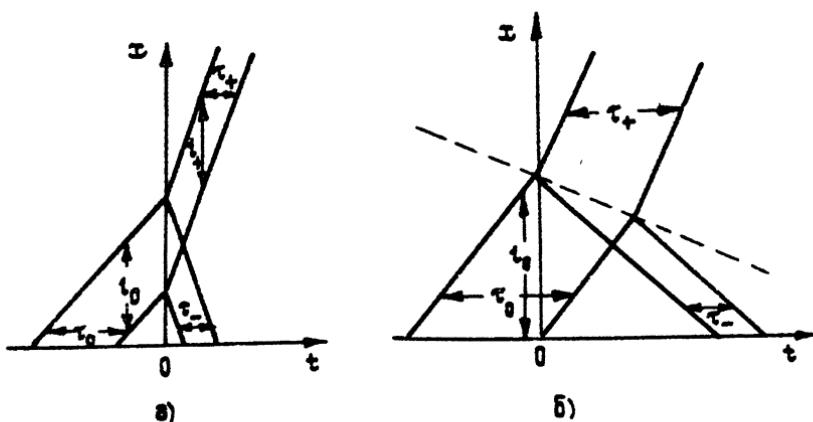


Рис. 2:

При $t = 0$ первичные характеристики расщепляются на прямые и обратные, имеющие другой наклон, в результате $\tau_{\pm} \neq \tau_0$.

3. ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН НА ДВИЖУЩЕМСЯ СКАЧКЕ ПАРАМЕТРОВ

Согласно (4), (7) величины параметрических эффектов, как энергетических, так и спектральных, для однократного скачка параметров оказываются того же порядка, что глубина изменения самих параметров ϵ, μ . Ситуация изменяется в случае движущихся скачков параметра $p = p(x - Vt)$. Рассмотрим простейший случай, когда и поверхность скачка параметров (движущаяся граница), и падающая волна являются плоскими. Границные условия для тангенциальных компонент векторов здесь имеют вид

$$(\vec{E} + [\vec{V}\vec{B}])_\tau = \text{const}, \quad (\vec{H} - [\vec{V}\vec{D}])_\tau = \text{const}. \quad (8)$$

Заметим, что в предельном случае неподвижной границы, $V \rightarrow 0$, отсюда следуют хорошо известные условия непрерывности E_τ, H_τ , а при $V \rightarrow \infty$ – соотношения (3).

Пусть $\sigma = 0$ и первичная волна падает слева (см. рис.3);

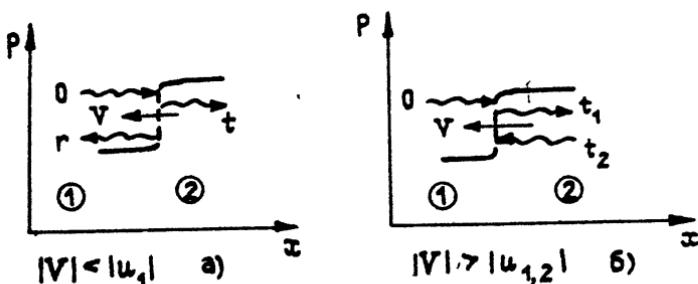


Рис. 3:

искомое решение для $\vec{E}(\vec{r}, t)$ в областях до и после скачка в случае $|V| < |u_r|$ можно записать в виде

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \vec{r})} + \vec{E}_r e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \vec{r})}, \quad \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_t e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \vec{r})}, \quad (9)$$

где индексы 0, r, t соответствуют падающей, отраженной и прошедшей волнам. Если же $V < 0$ и $|V| > |u_r|$, отраженной волны быть не может, а имеются две прошедшие волны t_1 и t_2 .

В любом случае, однако, условия (8) могут быть выполнены лишь, если частоты и волновые векторы всех волн удовлетворяют соотношению фазового синхронизма на поверхности скачка:

$$\omega_i - \vec{k}_i \vec{V} = \omega_0 - \vec{k}_0 \vec{V}. \quad (10)$$

В случае нормального падения из (10) следуют доплеровские соотношения:

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{1 - V/v_0}{1 + V/v_r}, \quad \frac{\omega_t}{\omega_0} = \frac{1 - V/v_0}{1 - V/v_t}, \quad (11)$$

где $v_i = \omega_i/k_i$ – фазовые скорости волн. В частном случае встречного падения ($v_0 > 0, V < 0$) частота $\omega_r > \omega_0$ и увеличивается при $|V| \rightarrow |v_r|$; в отличие от (7), значение ω_r/ω_0 вообще не зависит от величины перепада параметров среды на движущейся границе. Эффективная трансформация прошедшей волны, напротив, возможна при попутном движении границ ($V \rightarrow v_t$).

Существенно, что при выводе (14), (15) не были использованы конкретные материальные уравнения (например, в виде (1)), поэтому они справедливы в общем случае – для производных диспергирующих, в том числе – движущихся сред, только при этом сами значения v_i в (11) являются определенными функциями соответствующих частот (причем возможно $v_t < 0$ для $v_0 > 0$).

В случае импульсных сигналов, как и выше, можно найти преобразование их длительностей, рассматривая характеристики групповых фронтов

на плоскости x, t (см. рис. 2); ясно, что теперь изменяются как временные, так и пространственные длительности импульсов. Аналитические выражения для τ_i/τ_0 удобно получить, дифференцируя (10) по ω_0 и учитывая, что $\tau_0/\tau_i \approx \Delta\omega_i/\Delta\omega_0 \approx dw_i/d\omega_0$, $dw_i/dk_i = u_i$; в результате находим [1]:

$$\frac{\tau_r}{\tau_0} = \frac{1 + V/u_r}{1 - V/u_0}, \quad \frac{\tau_t}{\tau_0} = \frac{1 - V/u_t}{1 - V/u_0}. \quad (12)$$

Таким образом, сильное изменение (сжатие) длительности и, тем самым, уширение спектра импульсов $\Delta\omega_i \approx 2\pi/\tau_i$ происходит при приближении V к групповой скорости соответствующих волн.

Рассмотрим теперь конкретный пример высокочастотных электромагнитных волн в плаэме, когда дисперсионные соотношения имеют вид

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2, \quad n = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{\epsilon(\omega)}, \quad \epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2, \quad (13)$$

где $\omega_p = (e^2 N/m\epsilon_0)^{1/2}$ – плаэменная (ленгмюровская) частота, N – концентрация электронов. Заметим, что равенства (13) справедливы для по-перечных волн как в неподвижной, так и движущейся плаэме, поэтому соответствующие результаты справедливы для различных механизмов создания "волны концентрации" $N(x - Vt)$. Пусть $V < 0$ и в области 1 концентрация равна нулю, т.е. $\epsilon_1(\omega) = 1$, так что $|v_{0,r}| = |u_{0,r}| = c$. Исключая $\omega_{r,t}$ из правых частей (11), (12), нетрудно найти явные выражения для $\omega_i/\omega_0, u_i/u_0, \tau_i/\tau_0$, которые для $\beta = |V/c| < 1$ имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\omega_r}{\omega_0} &= \frac{\tau_0}{\tau_r} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, & \frac{\omega_t}{\omega_0} &= \frac{1 - \beta n'}{1 - \beta}, \\ \frac{\tau_t}{\tau_0} &= \frac{n'(1 - \beta)}{n' - \beta}, & \frac{u_t}{u_0} &= \frac{n' - \beta}{1 - \beta n'}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $n' = \sqrt{\epsilon(\omega')}$, $\epsilon(\omega') = 1 - \omega_p^2/\omega'^2$, $\omega'^2 = \omega_0^2(1 + \beta)/(1 - \beta)$. Из (14) видно, что при встречном падении частоты обеих вторичных волн смещаются вверх ($\omega_r, \omega_t > \omega_0$), причем этот эффект усиливается при $\beta \rightarrow 1$. При $\beta > n'$ знаки u_t, τ_t становятся отрицательными, т.е. прошедшая волна распространяется вдогонку фронту плаэмы. Условие $\epsilon(\omega') = 0$ определяет частоту отсечки; при $\epsilon(\omega') < 0$ (т.е. $|\omega'| < \omega_p$) прошедшей волны нет и происходит полное отражение плаэмы ("движущееся зеркало"). Не приводя выражений для $\beta > 1$, возможного в случае фронта ионизации, укажем лишь, что при этом уже точки отсечки нет и в плаэменной области всегда оказываются две прошедшие волны, причем при $\omega_p^2 > \omega_0^2(1 + \beta^2)$ обе они бегут вдогонку границе. Более подробный анализ можно найти в [1, 3, 5].

Отметим, что повышение частоты электромагнитных волн при отражении от движущегося фронта плаэмы (или электронного сгустка) неоднократно подтверждалось экспериментально. Наибольший эффект (более 5 раз на частотах порядка 40 ГГц) был достигнут в недавних экспериментах Ч.Джоси и др. [5], в которых релятивистский ($\beta \rightarrow 1$) фронт ионизации создавался при помощи мощного лазерного импульса.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРА ВОЛН В СРЕДЕ С ПЛАВНО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Перейдем теперь к противоположному случаю, когда параметры среды $p(\vec{r}, t)$ являются произвольными, но плавными функциями времени и, вообще говоря, пространственных координат. Удобным и довольно универсальным методом анализа при этом являются различные модификации приближения геометрической оптики [1-3]. Поля представляются в виде $\tilde{E} = \tilde{E}(\vec{r}, t)e^{i\varphi}$, $\tilde{B} = \tilde{B}(\vec{r}, t)e^{i\varphi}$ и т.д., где амплитудные множители \tilde{E}, \tilde{B} – плавные функции, так же как мгновенные значения частоты $\omega(\vec{r}, t)$ и волнового вектора $\tilde{k}(\vec{r}, t)$, выражаемые через $\varphi(\vec{r}, t)$ как

$$\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \tilde{k} = -\nabla \varphi. \quad (15)$$

Процедура вывода уравнений геометрооптического приближения сводится к разложению решения по степеням малого параметра $\chi \sim |(\omega_p)^{-1}(\partial p / \partial t)| \sim |(\omega \tilde{E})^{-1}(\partial \tilde{E} / \partial t)|$, однако интересующие нас здесь закономерности преобразования спектра волн можно получить более простым способом. Пусть при постоянных параметрах p дисперсионное уравнение имеет вид

$$c^2 k^2 = \omega^2 n^2(\omega, \tilde{k}, p), \quad (16)$$

где зависимость n от ω и k означает соответственно учет временной и пространственной дисперсии, а также анизотропии; это же уравнение с точностью до поправок порядка χ будет справедливо и при плавной вариации $p = (\vec{r}, t)$, $\omega(\vec{r}, t)$, $\tilde{k}(\vec{r}, t)$. Дифференцируя (16) по t и учитывая, что согласно (15) $\partial k / \partial t = -\nabla \omega$, нетрудно получить уравнение переноса для $\omega(\vec{r}, t)$ [6, 1-3]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \nabla \right) \omega = -\omega \left(\frac{\partial n \omega}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{\partial n}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (17a)$$

где $\vec{u} = d\omega / d\tilde{k}$ – групповая скорость волн. Аналогично, взяв пространственный градиент от (16), имеем

$$\frac{d\tilde{k}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \nabla \right) \tilde{k} = \omega \left(\frac{\partial n \omega}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{\partial n}{\partial p} \nabla p. \quad (17b)$$

Уравнения (17 а, б) означают, во-первых, что возмущения $\omega(\vec{r}, t)$, $\tilde{k}(\vec{r}, t)$ перекосятся в пространстве с групповой скоростью $\vec{u}(\omega, \tilde{k}, p)$. Соответствующая (17) характеристическая система уравнений ($d\vec{r} = \vec{u} dt$) определяет четырехмерные (пространственно-временные) лучи, описывающие эволюцию структуры волнового поля. В частности, согласно (17a) нестационарность среды ($\partial p / \partial t \neq 0$) вызывает вариацию частоты для фиксированного группового фронта, а пространственные неоднородности ($\nabla p \neq 0$) – к вариациям волнового вектора $\tilde{k}(\vec{r}, t)$, в том числе – искривлению траекторий групповых фронтов в пространстве.

Примеры интегрирования уравнений (17) для конкретных случаев приведены в [1, 3, 6-8]; здесь мы ограничимся двумя примерами. Так, для не-диспергирующей среды интегрирование (17a) дает

$$\omega(s, t) = \omega_0 \exp \left(-\frac{\partial n}{\partial t} ds \right), \quad (18)$$

(18) где $ds = |\vec{u}dt|$ – элемент длины вдоль групповой траектории, криволинейный интеграл берется для фиксированного группового фронта. Отсюда следует, что в области $\partial n/\partial t < 0$ происходит сжатие сигнала во времени, сопровождающееся повышением частоты. Второй пример – плазма с концентрацией $N(t)$; если $\nabla N = 0$, частное решение (176) можно взять в виде $\vec{k} = \vec{k}_0 = \text{const}$, тогда из (13) следует

$$\omega^2(t) = c^2 k_0^2 + \omega_p^2(t). \quad (19)$$

Согласно (19) в области с растущей концентрацией плазмы частота электромагнитных волн возрастает, и наоборот. Рассматривались также волны в магнитоактивной плазме, когда изменение частоты может быть вызвано вариациями как $N(t)$, так и внешнего магнитного поля [7,8].

Заметим, что согласно (17) накапливающееся возмущение частоты сигнала возможно, если волна параметра $p(x - Vt)$ синхронна с групповой скоростью волны \vec{u} . В самом деле, если $p = p(\zeta)$, $\zeta = x - Vt$, то для стационарных волн ($\omega = \omega(\zeta)$), из (17a) следует $d\omega/d\zeta = p_\omega[u(\zeta) - V]^{-1}$, где $p_\omega = V\omega(\partial n\omega/\partial\omega)^{-1}(\partial n/\partial p)(dp/d\zeta)$, и при $u(\zeta) \rightarrow V$ имеем $d\omega/d\zeta \rightarrow \infty$. На этом принципе были предложены параметрические модуляторы частоты с бегущей волной накачки, в том числе в оптическом диапазоне; при этом "накачка" осуществлялась СВЧ-волной. В заключение также отметим, что существенное влияние на эволюцию волн в диспергирующей среде оказывает эффект дисперсионной перегруппировки частотно-модулированных волн, связанный с зависимостью групповой скорости и от частоты, имеющей место и при $p = \text{const}$ [1-3].

5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ И ОСОБЕННОСТИ МАТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ СРЕД С ДИСПЕРСИЕЙ

При заданных материальных уравнениях среды нетрудно найти также амплитуды и другие энергетические характеристики волн как для резких границ, так и для плавного изменения параметров. Так, для недиспергирующего диэлектрика с материальными уравнениями в виде (1) из граничных условий (8) при $|V| < u_{1,2}$ и $\sigma = 0$ следует

$$E_r = E_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \frac{\omega_r}{\omega_0}, \quad E_t = E_0 \frac{2\rho_2}{\rho_2 + \rho_1} \frac{\omega_t}{\omega_0}, \quad (20)$$

где доплеровские множители ω_r/ω_0 , ω_t/ω_0 соответствуют (11). Равенства (20) показывают, что амплитуды волн коррелированы с их частотами. Более прозрачной эта связь становится, если подсчитать энергию волновых пакетов (W_i) с учетом изменения их длительностей согласно (12); в результате оказывается [1, 3]:

$$\frac{W_0}{\omega_0} = \frac{W_t}{\omega_t} + \frac{W_r}{\omega_r}, \quad (21a)$$

т.е. полное число квантов при распаде падающей волны на отраженную и прошедшую сохраняется.

Аналогичный расчет для "сверхсветового" случая ($|V| > |u_{1,2}|$), когда отраженной волны нет, но имеются две прошедшие волны, дает качественно другой результат:

$$\frac{W_0}{\omega_0} = \frac{W_{t1}}{\omega_{t1}} - \frac{W_{t2}}{\omega_{t2}}, \quad (216)$$

т.е. число квантов здесь при взаимодействии волны с движущейся границей увеличивается ($|W_{t1}/\omega_{t1}| > W_0/\omega_0$).

Что касается плавного изменения параметров, то в приближении геометрической оптики, когда отражением волн можно пренебречь, в отсутствие джоулевой диссипации число квантов в волновом пакете оказывается идиабатическим инвариантом [1-3]:

$$\frac{W(t)}{\omega(t)} = \text{const.} \quad (22)$$

Соотношение (22) полезно, в частности, тем, что оно позволяет найти энергетические характеристики волн по известному значению частоты $\omega(t)$ без дополнительных вычислений. В частности, повышение частоты всегда сопровождается усилением, и наоборот.

Для диспергирующих сред, в том числе – плазмы, картина более сложная. Обсудим для примера случай скачкообразного повышения $N(t)$ во времени. Пусть $N_1 = 0$, так что в (13) имеем $\epsilon_1(\omega_0) = 1$, $\epsilon_2(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2 < 1$; конкретнее, при этом $k = \text{const}$ и согласно (19) $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_p^2$, поэтому формальная подстановка в равенства (3) дает:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2(\omega)} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \gg 1 \quad \text{при } \omega_p^2 \gg \omega_0^2. \quad (23)$$

На этом основании предлагалось использовать плазму с быстро растущей концентрацией (в том числе за счет ионизации) для эффективного повышения частоты электромагнитных волн с одновременным их усилением.

На самом деле, однако, этот вывод неверен, что ясно уже из энергетических соображений: если в движущейся плазме еще в принципе можно указать источник энергии (это кинетическая энергия потока), то процесс ионизации в отличие от (2) не сопровождается совершением работы над полем волны. С чисто электродинамической точки зрения ошибки при выводе равенства (23) заключается в том, что "квазистационарное" соотношение $\vec{D}(t) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, где $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, неправомерно и при $t > 0$, когда концентрация перестает изменяться. Здесь принципиальной является нелокальность связи вектора $\vec{D}(t)$ (также как вектора поляризации $\vec{P}(t) = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$ или "поляризационного" тока $\vec{j} = \partial \vec{P} / \partial t$) со значением $\vec{E}(t)$ в тот же момент t ; иными словами, в вышеприведенном примере поля "помнят" о скачке $N(y)$ и при $t > 0$ до завершения релаксационных процессов. В феноменологической теории материальные уравнения для среды с временной дисперсией обычно записываются в интегральном виде:

$$\vec{P}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{\alpha}(t-t', t) \vec{E}(t') dt', \quad \vec{j}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{\sigma}(t-t', t) \vec{E}(t') dt', \quad (24)$$

где для нестационарной среды ядра $\hat{a}(\tau, t)$, $\hat{\sigma}(\tau, t)$, где $\tau = t - t'$, явно зависят также от времени t ; легко показать, что операторы \hat{a} и $\hat{\sigma}$ связаны соотношением $\hat{\sigma}(\tau, t) = \partial\hat{a}/\partial\tau + \partial\hat{a}/\partial t$ [10].

В общем случае ядра $\hat{\sigma}(\tau, t)$ или $\hat{a}(\tau, t)$ однозначно могут быть найдены лишь в рамках микротеории с учетом конкретных физических механизмов вариации параметров среды; существенно, что при одном и том же законе изменения $\vec{N}(\vec{r}, t)$ эти операторы оказываются разными для движущейся плазмы или ионизационно-рекомбинационного механизма вариаций концентрации.

В первом случае (при этом, кстати, в отличие от (24) существенна также пространственная дисперсия) расчеты показывают, что в отсутствие столкновительной диссипации энергии соотношения (21 а, б) для резких границ (соответственно при $\beta < 1$ и $\beta > 1$), также как инвариант (22) для плавного изменения концентрации, сохраняют силу [1-3, 7, 9, 10].

Приведем здесь явные выражения для \hat{a} и $\hat{\sigma}$ в случае ионизационного механизма изменения $N(\vec{r}, t)$. Пусть $\partial N/\partial t = \mu_i(\vec{r}, t) \geq 0$, так что $N(t) = \int_{-\infty}^t \mu_i(\tilde{t}) d\tilde{t}$. Из уравнения движения электронов $m\vec{v}/dt = e\vec{E} - m\nu\vec{v}$, где ν – эффективная частота столкновений, следует, что электроны, рожденные в момент \tilde{t} , при $t \geq \tilde{t}$ имеют скорость

$$\vec{v}(t, \tilde{t}) = \frac{e}{m} e^{-\nu t} \int_{\tilde{t}}^t e^{\nu t'} \vec{E}(t') dt', \quad (25)$$

а наведенный полем ток всегда будет равен

$$\vec{j}(t) = e \int_{-\infty}^t \mu_i(\tilde{t}) \vec{v}(t, \tilde{t}) d\tilde{t}. \quad (26)$$

Подставляя (25) в (26) и интегрируя по частям, учитывая, что $\vec{v}(t, \tilde{t}) = 0$ при $t = \tilde{t}$ и $N(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$, нетрудно привести (26) к виду (24) с ядрами [3, 10]:

$$\hat{\sigma}(\tau, t) = \frac{\omega_p^2(t - \tau)}{4\pi} e^{-\nu\tau}, \quad \hat{a}(\tau, t) = \frac{\omega_p^2(t - \tau)}{4\pi\nu} (1 - e^{-\nu\tau}). \quad (27)$$

Фактически для скачкообразного роста $N(t)$ отсюда вместо (23) следует непрерывность значений $\vec{E}(t)$ и $\partial\vec{E}/\partial t$, а высокочастотная энергия уменьшается наполовину (половина же переходит в кинетическую энергию поступательного движения вновь образуемых электронов и создаваемого при этом статического магнитного поля [3, 10]). Что касается движущихся с конечной скоростью фронтов ионизации, то здесь при $\nu \rightarrow 0$ вместо (21 а, б) соответственно имеют место соотношения

$$W_0\omega_0 = W_t\omega_t + W_r\omega_r \quad (\beta < 1), \quad W_0\omega_0 = W_{t1}\omega_{t1} - W_{t2}\omega_{t2} \quad (\beta > 1), \quad (28)$$

а при плавных вариациях

$$W(t)\omega(t) = \text{const.} \quad (29)$$

Из (28) и (29) следует, что полная электромагнитная энергия во всех случаях убывает. В заключение отметим, что в литературе рассматривались и более общие случаи, когда одновременно идут процессы ионизации и рекомбинации [10], магнитоактивной плаэмы [7,8], особенности преобразования продольных (плаэменных) волн [11] и т.д. Тем не менее, ряд интересных вопросов ждет своих исследователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский Л.А., Степанов Н.С. // Изв.вузов. Радиофизика. 1971. Т.14. N 4. С.489.
2. Kravtsov Yu.A., Ostrovsky L.A., Stepanov N.S. // Proc.IEEE. 1974. V.62. N 11. P.1492.
3. Степанов Н.С. Волны в нестационарных и неоднородных средах. Изд.ННГУ. 1986.
4. Аверков С.И., Островский Л.А. // Изв.вузов. Радиофизика. 1958. Т.1. N 4. С.46.
5. Joshi Ch.J. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1990. V.18. P.818.
6. Степанов Н.С. // Изв.вузов. Радиофизика. 1969. Т.12. N 2. С.283.
7. Степанов Н.С. // ЖЭТФ. 1967. Т.53. N 6. С.481.
8. Kalluri D.K., Gotteti V.R., Sessler A.M. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1993. V.21. N 1. P.70.
9. Миллер М.А., Сорокин Ю.М., Степанов Н.С. // УФН. 1977. Т.121. Вып.3. С.525.
10. Степанов Н.С. // Изв.вузов. Радиофизика. 1976. Т.19. N 7. С.960.
11. Бакунов М.И., Сорокин Ю.М. // Изв.вузов. Радиофизика. 1986. Т.29. N 5. С.519.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
7 февраля 1994 г.

ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА И АБЕРРАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Ю.М.Сорокин

Являясь по существу чисто кинематическим, эффект Доплера имеет место для систем любой физической природы и заключается в изменении частоты некоторого периодического процесса, наблюдаемого в двух различных инерциальных системах отсчета. Как исторически первое наблюдение [1], так и жизненный опыт ассоциируют этот эффект с акустическими волнами. В то же время тесно связанный с ними эффект изменения ориентации луча или волнового вектора (релятивистский аберрационный эффект) традиционно ассоциируется с оптическими волнами в вакууме [2-4]. Менее известны закономерности указанных эффектов в диспергирующих средах, где оба эффекта настолько тесно связаны, что могут быть понятны лишь при совместном анализе. Такой анализ для случая электромагнитных волн в сплошной однородной среде и предлагается ниже вашему вниманию.

1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ЭФФЕКТЫ

Пусть система отсчета K связана со средой, имеющей показатель преломления $n(\omega, \theta, \varphi)$, а система K' движется относительно этой среды со скоростью \vec{V} . Тогда из инвариантности фазы локально плоской монохроматической волны в некоторой мировой точке имеем

$$\omega' = \gamma \omega [1 - \beta n(\omega, \theta, \varphi) \cos \theta], \quad (1a)$$

$$\omega' n'(\omega', \theta', \varphi') \sin \theta' = \omega n(\omega, \theta, \varphi) \sin \theta, \quad (2)$$

$$\omega' n'(\omega', \theta', \varphi') \cos \theta' = \gamma [\omega n(\omega, \theta, \varphi) \cos \theta - \beta \omega], \quad (3)$$

$$\varphi' = \varphi, \quad \beta = V/c, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Здесь $n'(\omega', \theta', \varphi')$ – показатель преломления среды в системе K' , θ и θ' – углы между скоростью \vec{V} и волновыми векторами \vec{k} и \vec{k}' ; φ и φ' – азимутальные углы в системах K и K' соответственно. Соотношение (1a), связывающее частоты плоской волны для двух наблюдателей, движущихся друг относительно друга, представляет собой формулу Доплера в случае анизотропной среды с временной дисперсией.

Связь между углами θ и θ' (формулу для aberrаций) легко получить, разделив (2) на (3):

$$\operatorname{tg} \theta' = \gamma^{-1} \frac{n(\omega, \theta, \varphi) \sin \theta}{n(\omega, \theta, \varphi) \cos \theta - \beta}. \quad (4a)$$

Разумеется, в соответствии с принципом относительности формулы (1а) – (4а) допускают замену всех штрихованных величин на нештрихованные, а нештрихованных – на штрихованные с одновременным изменением знака β (эту операцию будем далее обозначать $(K \rightleftarrows K')$).

Если в системе K задан движущийся со скоростью \tilde{V} монохроматический источник и система отсчета K' связана с ним, то формула Доплера (1а) позволяет находить частоту ω квазимонохроматических волн, принимаемых под разными углами θ , покоящимся относительно среды наблюдателем во фраунгоферовой зоне источника. Поскольку в формулу (1а) входит показатель преломления среды $n(\omega, \theta, \varphi)$, сам зависящий, вообще говоря, от додлеровской частоты ω и угла наблюдения θ , соотношение (1а) для диспергирующих сред представляет собой по существу некоторое нелинейное уравнение относительно частоты ω . Поэтому при $\theta = \text{const}$ это уравнение может иметь несколько различных корней ω , соответствующих одному и тому же значению ω' . В последнем случае, следуя терминологии работ [5,6], говорят о сложном эффекте Доплера для монохроматического источника, движущегося в преломляющей среде. Однако формула (1а) сама по себе еще не позволяет выяснить ни физическую природу сложного эффекта Доплера, ни условия его наблюдения, поскольку угол наблюдения θ здесь не является независимой величиной, а определяется формулой (4а).

Для выяснения этих вопросов необходимо обратиться к исследованию формулы (4а), описывающей релятивистские aberrации волновых фронтов при переходе из системы K в систему отсчета K' . Если монохроматический источник покоится в K' , более удобной оказывается формула

$$\operatorname{tg} \theta = \gamma^{-1} \frac{n'(\omega', \theta', \varphi') \sin \theta'}{n'(\omega', \theta', \varphi') \cos \theta' + \beta}, \quad (46)$$

получающаяся из (4а) в результате операции $K \rightleftarrows K'$.

Уже из (46) видно, что в преломляющей среде интервал изменения угла θ может оказаться более узким, чем угла θ' . Действительно, если $\beta > |n' \cos \theta'|$ для всевозможных θ', φ' , то угол θ прихода волны в системе K не может превышать некоторого максимального значения θ_{\max} . Другими словами, пространственный спектр излучения произвольного источника оказывается ограниченным в K конусом острых углов, ориентированным вдоль направления движения.

Как сложный эффект Доплера, так и эффект ограничения пространственного спектра в системе K находят естественное объяснение, если зависимость $\theta(\theta')$ имеет экстремум при $\omega' = \text{const}$ [7]. При этом для углов θ' может иметь место эффект в определенной мере аналогичный эффекту Доплера для частот ω : две плоских волны с одной и той же частотой ω , испущенные в K' под разными углами θ'_1 и θ'_2 к направлению движения, могут быть приняты в K под одним и тем же углом θ . Следуя [7], в этом

случае будем говорить о сложном аберрационном эффекте (рис.1).

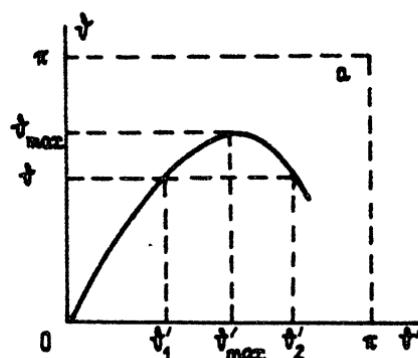


Рис. 1:

Из сказанного очевидно, что наличие сложного аберрационного эффекта является достаточным условием появления сложного эффекта Доплера. Действительно, плоские волны, соответствующие разным углам θ'_1 и θ'_2 и имеющие в системе K' одну и ту же частоту ω' , приобретут согласно формуле

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta n'(\omega', \theta', \varphi') \cos \theta') \quad (16)$$

разный доплеровский сдвиг в K , что и будет интерпретировано как сложный эффект Доплера.

Выяснение аберрационной природы сложного эффекта Доплера [7] показывает, что условия проявления последнего определяются не только дисперсионными характеристиками среды, как это неявно предполагалось в работах [8,9], но существенным образом зависит от пространственного спектра излучения источника, а сама постановка задачи имеет смысл лишь для определенного интервала углов наблюдения θ . Влияние пространственного спектра излучения источника становится особенно наглядным, если учесть, что для заданной формы дисперсионной кривой, допускающей в соответствии с (1а) наличие сложного эффекта Доплера, зависимость $\omega(\theta)$ может быть сделана однозначной, если диаграмма направленности излучения в K' отлична от нуля лишь в том интервале углов, где зависимость $\theta(\theta')$ остается монотонной (см.рис.1). *

Если анизотропной является среда в системе K , то понятие сложного эффекта Доплера нуждается в некотором уточнении. Именно, следует различать рассмотренный выше сложный эффект Доплера по волновому вектору \vec{k} и сложный эффект по лучу, т.е. по вектору групповой скорости (последний обсуждался, например, в работах [9-11]).

Анализ аберрационных особенностей, связанных со сложным эффектом Доплера по лучу, в литературе до настоящего времени не проводился.

*Строго говоря, такое предположение неадекватно свойствам реальных излучателей, однако с учетом конечной чувствительности приемной системы и наличия помех может быть вполне оправданным.

2. СЛОЖНЫЙ ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА И СЛОЖНЫЙ АБЕРРАЦИОННЫЙ ЭФФЕКТ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Отмеченные выше особенности релятивистского преобразования частотного и углового спектров движущегося излучателя рассмотрим теперь более подробно на примере изотропной плазмы, где в пренебрежении пространственной дисперсией и движением ионов дисперсионное уравнение для высокочастотных поперечных волн оказывается весьма простым,

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2, \quad (5)$$

и вместе с тем допускает существование сложного эффекта Доплера. Здесь ω_p — плазменная частота, определяемая концентрацией электронов N_e , а также их массой и зарядом: $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N_e/m$.

Дисперсионное уравнение вида (5) привлекательно для исследования еще и тем, что его вид релятивистски инвариантен. Таким образом, здесь в наиболее явной форме проявляется аберрационная природа сложного эффекта Доплера: без привлечения аппарата релятивистских аберраций наличие сложного эффекта Доплера следовало бы интерпретировать как появление новых волн (отсутствующих в K') в системе отсчета K , связанной с наблюдателем, что противоречит инвариантности дисперсионного уравнения (5). Для анализа же аберрационных закономерностей важную роль играет то обстоятельство, что аберрации согласно (4) определяются параметром $\beta/n(\omega)$ и в модели (5) могут быть значительными даже при малых β .

Для выяснения полной картины спектра излучения движущегося монохроматического, в сопровождающей системе отсчета, источника следует прежде всего исследовать функции $\theta(\omega', \theta')$ и $\omega(\omega', \theta')$ [7], так как именно ω', θ' являются переменными в рассматриваемой задаче. * В плоскости переменных (ω', ω) получаем картину, изображенную на рис.2а.

Все кривые в общей точке $N(\omega_p, \gamma\omega_p)$ имеют вертикальную касательную, уравнение асимптот $\omega = \gamma\omega(1 + \beta \cos \theta')$ имеет вид формулы Доплера в вакууме. Каждая плавная кривая $\omega(\omega')$ состоит из двух частей, соответствующих углам θ' и $\pi - \theta'$. График функции $\omega(\omega')$ для различных значений угла наблюдения θ легко получить, применяя к обозначенным на рис.2а величинам операцию $K \leftrightarrow K'$. Построенное таким образом семейство графиков изображено на рис.2б, откуда, в частности, видно, что в интервале частот $\omega_p < \omega' < \gamma\omega_p$ зависимость $\omega(\theta)$ для острых углов θ действительно является двузначной (сложный эффект Доплера) [7, 12, 13].

*Анализ одной лишь зависимости $\omega(\omega', \theta)$, как это сделано в работах [5, 6, 8-10, 12, 13] дает феноменологическую картину сложного эффекта Доплера. Его аберрационная природа и особенности, связанные с изменением углового спектра источника, остаются при этом вне поля зрения.

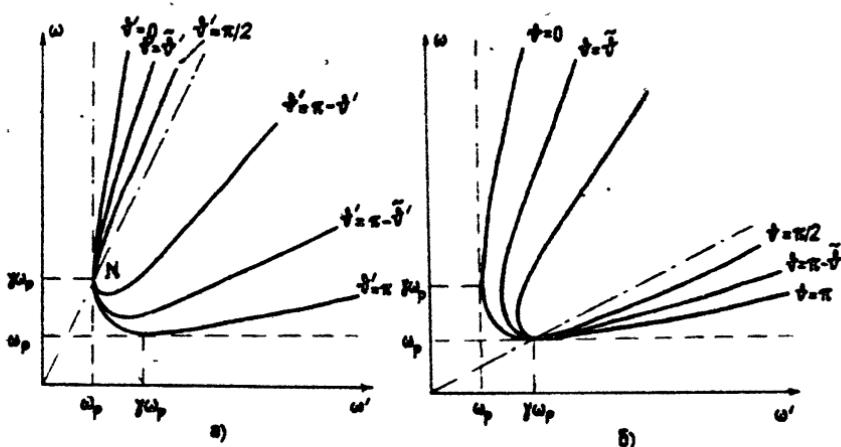


Рис. 2:

Физическая природа основных эффектов, связанных с релятивистским преобразованием спектра излучения движущегося монохроматического источника выясняется [7] при рассмотрении зависимости $\theta(\omega', \theta')$, изображенной на рис. 3, откуда видно, что излучение даже изотропного в системе K' источника с $\omega' < \gamma \omega_p$ может наблюдаться лишь в определенном интервале острых углов.

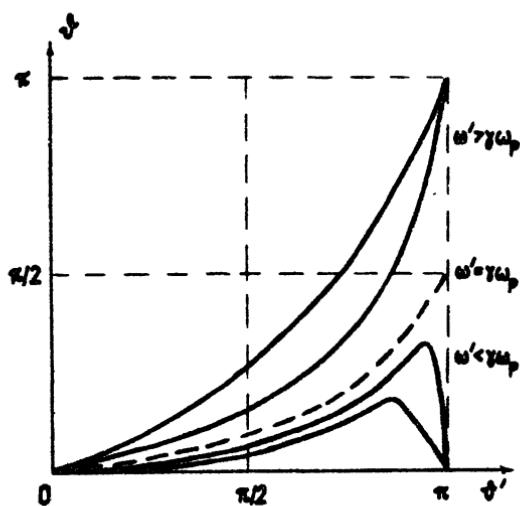


Рис. 3:

Максимальное значение угла приема равно:

$$\theta_{max} = \operatorname{arctg} \left[\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma^2 \omega_p^2}{\omega'^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (6)$$

По отношению к хорошо известному в СТО эффекту "фары" в вакууме [2-4] случай плазмы имеет по крайней мере три основных отличия:

1) эффект "фары" может быть сильно выражен даже при $\beta \ll 1$, если ω' близко к ω_p ;

2) мощность, излучаемая в заднюю полусферу (точнее в конус $\theta > \theta_{max}$), при $\omega' < \gamma \omega_p$ в точности равна нулю, тогда как в вакууме она имеет порядок [3,4]

$$\frac{P(\theta = \pi)}{P'} \sim (1 - \beta^2)^2 (1 + \beta)^{-3};$$

3) диаграмма направленности изотропного в K' излучателя в вакууме в системе отсчета K является монотонно спадающей функцией угла; в плазме же при $\omega' < \gamma \omega_p$, как можно понять из рис.3, это заведомо не так, поскольку в узкий конус вблизи угла $\theta = \theta_{max}$ поступает из-за aberrаций большее количество излучаемой энергии.

Интересно отметить, что при выполнении условий для сложного эффекта Доплера может происходить не только сужение, но и существенное уширение диаграммы направленности для наблюдателя в K . Этот эффект может быть заметным для остронаправленных (в системе K') излучателей, работающих в конечной полосе частот, содержащей точку $\omega' = \gamma \omega_p$. Действительно, как видно из рис.3, плоская волна, испущенная в K' под углом $\theta' \approx \pi$ на частоте $\omega' < \gamma \omega_p$, будет принята под углом $\theta \approx 0$, а такая же волна на частоте $\omega' > \gamma \omega_p$ — под углом $\theta \approx \pi$. Другими словами, ориентированная назад узкая диаграмма направленности достаточно широкополосного источника может не только ушириться в K , но и принять здесь качественно новый вид: в зависимости от того, вблизи какого конца полосы излучаемых частот $\Delta\omega'$ лежит точка $\gamma\omega_p$, в диаграмме направленности в K может появиться более или менее выраженный передний лепесток.

3. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

Пользуясь полученными выше формулами (1а), (4а), можно изучить [14] общие закономерности релятивистского преобразования интенсивности в анизотропной диспергирующей среде как для широкополосного, так и для монохроматического в сопровождающей системе отсчета K' источника. Здесь для краткости остановимся на последнем случае. Интенсивность $\mathfrak{I}(\theta, \varphi)$ определим общепринятым образом:

$$dE = \mathfrak{I}(\theta, \varphi) d\Omega dt, \quad (7)$$

где dE — полная энергия, излучаемая внутри телесного угла $d\Omega$ за время dt . Аналогичное равенство для штрихованных величин определяет интенсивность $\mathfrak{I}'(\theta', \varphi')$ в системе K' . Пересчитывая входящие в (7) величины

при условии $\omega' = \text{const}$ [14], можно получить следующий закон преобразования интенсивности:

$$\Im = \Im' n \gamma^{-4} R^{-\frac{3}{2}}(\theta; n, \beta) \times \\ \times |F(\omega, \theta; \beta)(1 - \beta n \cos \theta)^{-1}[1 - \beta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \omega}(n\omega)]^{-1}|, \quad (8)$$

где

$$F(\omega, \theta; \beta) = [1 - \beta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \omega}(n\omega)][n^2 - \beta \frac{\partial}{\partial \theta}(n \sin \theta)] - \beta^2 \omega \sin \theta \frac{\partial n}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial \theta}(n \cos \theta),$$

$$R(\theta; n, \beta) = (n \cos \theta - \beta)^2 + (1 - \beta^2)n^2 \sin^2 \theta.$$

В частном случае вакуума из (8) следует известная [3,4] формула $\Im = \Im' \gamma^{-4}(1 - \beta \cos \theta)^{-3}$. Подчеркнем, что вычисление характеристик конкретного излучателя в системе отсчета K' представляет собой самостоятельную задачу. Нас же сейчас интересуют лишь эффекты, связанные с относительным движением наблюдателя и источника. Для выделения указанных эффектов в случае монохроматического в K' излучателя целесообразно ввести функцию релятивистского преобразования интенсивности

$$G(\theta) = \frac{\Im(\theta)}{\Im'[\theta'(\theta)]}$$

и рассмотреть свойства этой функции. Функцию $G(\theta)$ можно интерпретировать, очевидно, как ненормированную диаграмму направленности изотропного в K' монохроматического источника.

Как видно из формулы (8), функция преобразования интенсивности $G(\theta)$ имеет особенность при выполнении одного из следующих трех условий:

$$1 - \beta n \cos \theta = 0, \quad (9)$$

$$R(\theta; n, \beta) = 0, \quad (10)$$

$$1 - \beta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \omega}(n\omega) = 0. \quad (11)$$

Соотношение (9) имеет вид черенковского условия и при $\omega' \neq 0, \omega < \infty$ согласно (1a) выполняться не может. Выполнение соотношения (10) соответствует особому случаю $\theta = 0, n(\omega, \theta, \varphi) = \beta, n' = 0$, когда собственные колебания среды в системе K' с $\Im' = 0$ переносят конечную энергию вдоль направления $\theta = 0$ с точки зрения наблюдателя в K .

Условие (11) есть условие на групповую скорость и распространяющихся волн:

$$u \cos(\psi - \theta) = V \cos \theta, \quad \psi = (\vec{u}, \vec{V}). \quad (12)$$

Другими словами, расходимость функции преобразования интенсивности возникает тогда, когда вдоль некоторого направления \vec{k} волновая энергия и излучающий ее источник движутся с одинаковой скоростью. С другой стороны, из aberrационных соображений ясно, что расходимость функции $G(\theta)$, соответствующая выполнению условия (11) может возникнуть

лишь под углом $\theta = \theta_{\max}$. В этом случае преобразованный в систему отсчета K' элемент телесного угла $d\Omega$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $d\Omega'$. Грубо говоря, целый пакет плоских волн, испущенных в K' вблизи некоторого угла θ' трансформируется вследствие aberrаций в единственную плоскую волну с $\theta = \theta_{\max}$ в системе отсчета K . Как и следует ожидать, особенность этого типа – интегрируемая.

Как видно из рис.1, при $\theta < \theta_{\max}$ должен наблюдаться сложный эффект Доплера. Таким образом, конус особенности функции $G(\theta)$ ограничивает область определения сложного эффекта Доплера, где функция $G(\theta)$ должна быть двузначной.

4. ПРИМЕР. ИСТОЧНИК В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Более детальное исследование полученных выше общих формул релятивистского преобразования интенсивности мы приведем ниже на примере монохроматического источника в изотропной плазме [14], что позволяет в достаточно простом и в то же время реальном приближении учесть влияние дисперсии среды. Подавая $n' = (1 - \omega_p^2/\omega'^2)^{1/2}$, из (8), (1a) имеем следующее выражение для функции преобразования интенсивности:

$$G(\theta; \omega', \beta) = \gamma^{-4} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^{-3} q^{-1} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 \pm \beta q \cos \theta) (\beta \cos \theta \pm q)^2, \quad (13)$$

где $q = [1 - \gamma^2 \omega_p^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) / \omega'^2]^{1/2}$.

На рис.4а построено семейство графиков функции $G(\theta)$ при $\beta = \text{const}$ для различных частот $\omega' > \gamma \omega_p$.

Качественно функция преобразования имеет здесь тот же вид, что и в вакууме; по мере понижения частоты ω' увеличивается лишь доля энергии, излучаемой в направлении вперед.

Аналогичное семейство графиков для случая $\omega' \leq \gamma \omega_p$ построено в полярных координатах на рис.4б. Двузначность функции $G(\omega)$ при $\theta < \theta_{\max}$ соответствует сложному эффекту Доплера. На образующих конуса $\theta = \theta_{\max}$ появляются своеобразные "усы" излучения, где интенсивность в рассматриваемом приближении бесконечна. В реальных системах такой особенности, разумеется, не возникает в первую очередь из-за конечной ширины полосы излучателя. Кроме того, принципиальным оказывается усредняющее действие диаграммы приемника: в любой конечный угол излучается конечная энергия. Преобразование спектральной плотности интенсивности широкополосного источника в той же модели среды подробно обсуждается в [14].

Для рассмотренного выше случая изотропной плазмы сложный эффект Доплера появляется лишь в передней полусфере и имеет здесь порядок не выше второго. В магнитоактивной плазме возможен сложный эффект

Доплера в заднюю полусферу [15], а порядок сложного эффекта Доплера в переднюю полусферу может быть выше второго [11,15].

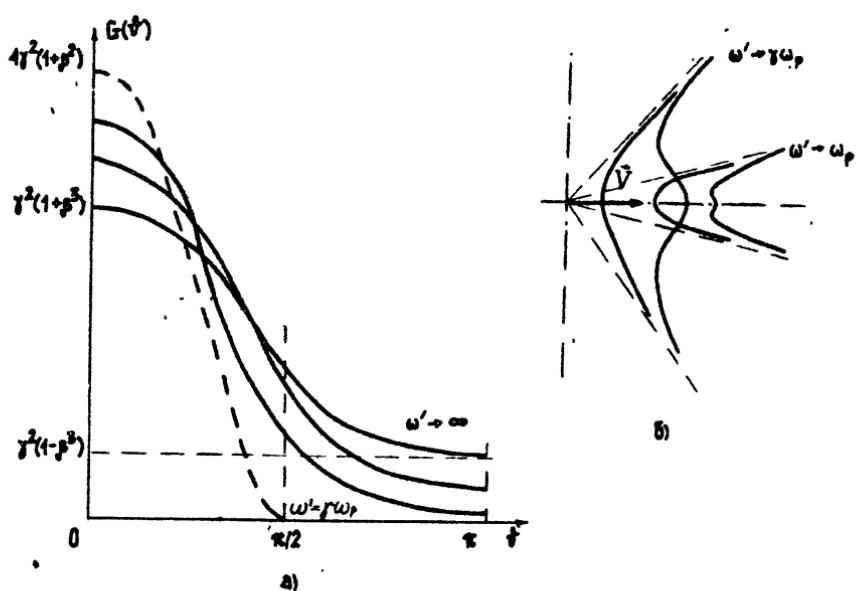


Рис. 4:

5. СРЕДА С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ДИПОЛЯ В ТЕПЛОЙ ПЛАЗМЕ

Для определения пространственного и временного спектров реальных источников в лабораторной системе K необходимо, помимо функции релятивистского преобразования интенсивности, знать диаграмму направленности источника в сопровождающей системе K' . При этом в связи с aberrационной природой сложного эффекта Доплера возникает по крайней мере два качественных вопроса: 1) приводит ли особенность функции пересчета к наблюдаемым эффектам в K , то есть может ли быть отличным от нуля пространственный спектр реальных источников, обдуваемых диспергирующей средой (в системе K') под теми углами θ' , для которых имеет место aberrационное наложение; 2) устойчив ли эффект aberrационной расходимости по отношению к пространственной дисперсии среды (введение которой, как известно, устраниет особенности в ряде задач теории излучения).

Эти принципиальные вопросы проще всего выяснить на конкретном примере, когда в системе K' задан гармонический дипольный осциллятор ($E \propto \exp i\omega' t'$), а система K связана с макроскопически покоящейся нагретой изотропной плазмой. Как показано в [16], дальнее поле такого осциллятора в собственной системе отсчета K' представляет собой сумму волн трех типов. Волны первого типа удовлетворяют инвариантному дисперсионному соотношению вида (5), в сопровождающей среде системе отсчета K являются чисто поперечными и поэтому далее будут называться

электромагнитной ветвью. Волны второго типа в случае умеренных температур, когда средняя тепловая скорость движения частиц $v_T \ll c$, удовлетворяют дисперсионному уравнению

$$v_T^2 k'^2 = \omega'^2 - \omega_p^2, \quad (14)$$

в сопровождающей среду системе отсчета K являются продольными и ниже будут называться плаазменными волнами. Волны третьего типа распространяются вдоль скорости среды $(-\vec{V})$, экспоненциально затухают в поперечном к \vec{V} направлении и определяют решение типа "следа", которое в системе отсчета K , связанной со средой, принадлежит ветви плаазменных колебаний ($\omega = \omega_p, k^2 = 0$).

Поскольку дисперсионное соотношение для электромагнитной ветви не отличается от использованного выше для случая холодной плаазмы, то для волн электромагнитного типа в теплой плаазме сохраняют силу все результаты разд.2.4. Поэтому далее рассмотрим следуя [17] эффект Доплера и релятивистские аберрации лишь для волн плаазменного типа. С учетом дисперсионного соотношения (14) формулу для эффекта Доплера (1) на плаазменных волнах можно представить в виде

$$\omega' = \gamma \omega \left(1 - M \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cos \theta} \right), \quad M = \frac{V}{v_T}. \quad (15)$$

Формула (15) позволяет изучить особенности эффекта Доплера для медленных волн, поскольку для движущихся излучателей легко может быть обеспечено как условие $M < 1$, так и противоположное условие $M > 1$. График зависимости $\omega(\omega')$ при $\theta = \text{const}$ для "дозвукового" движения излучателя ($M < 1$) качественно аналогичен построенному на рис.2б для высокочастотных волн в холодной плаазме (см.сплошные кривые на рис.5). Количественные отличия связаны с расширением области определения функции $\omega(\omega')$ в сторону низких частот.

При "сверхзвуковом" движении излучателя ($M > 1$) эффект Доплера на плаазменных волнах приобретает все качественные черты аномального эффекта Доплера, рассмотренного ранее для "сверхсветового" движения источника в диэлектрической среде с показателем преломления $n > 1$ [5,6,18]. Имеются, однако, и дополнительные особенности, связанные с наличием дисперсии в среде. Формула Доплера в этом случае

$$\omega' = \gamma \omega \left| 1 - M \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cos \theta} \right| \quad (16)$$

приводит к зависимости $\omega(\omega')$, которая при θ , достаточно близких к нулю, качественно отличается от случая "дозвукового" движения (штриховая кривая на рис.5). Как видно из рис.5, "сверхзвуковой" источник сколь угодно малой частоты ω' возбуждает в теплой плаазме продольные (в системе K) волны с частотами $\omega > \omega_p$. В соответствии с известными представлениями, аномальный эффект Доплера (внутри конуса $\theta < \theta_0$) является сложным, причем с увеличением угла θ здесь имеет место воз-

растание частоты для обеих доплеровских компонент (для более высокочастотной -- неограниченное).

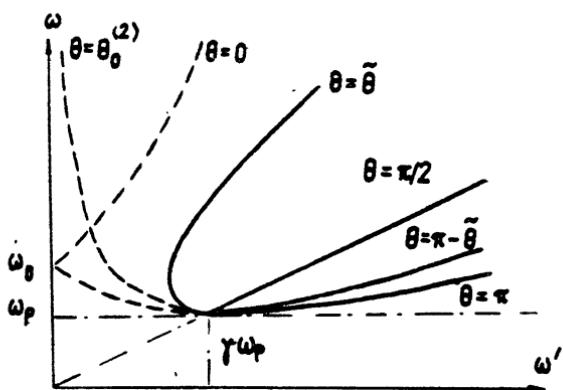


Рис. 5:

Следует обратить внимание на то, что в отличие от случая недиспергирующей среды эффект Доплера остается сложным и вне черенковского конуса, где доплеровская частота ω более высокочастотной компоненты падает с ростом угла θ . Конус существования сложного эффекта Доплера оказывается шире черенковского и занимает всю переднюю полусферу в пределе $\omega' \rightarrow \gamma\omega_p$.

Для того, чтобы выделить эффекты, связанные с дисперсией среды, исследование аберрационной зависимости $\theta(\theta')$ при $\omega' = \text{const}$ проведем для случая нерелятивистского движения источника ($\beta \ll 1$). Наиболее характерные аберрационные кривые, рассчитанные на ЭВМ по формулам (4a), (14), (15) и соответствующие различным соотношениям между тремя безразмерными параметрами: релятивистским γ , плазменным ($\xi_p = \omega_p/\omega'$) и маховским ($\Delta = [\gamma(1 - \beta M)^{\frac{1}{2}}]^{-1}$), приведены на рис.6. Семейство кривых 1–5 позволяет проследить особенности проявления аберрационных эффектов при "дозвучковом" ($M < 1$) движении источника по мере снижения его собственной частоты (роста плазменного параметра ξ_p). Для частот $\omega' > \gamma\omega_p$ ($\gamma\xi_p > 1$), когда сложный эффект Доплера отсутствует, аберрации выражены относительно слабо и заметны главным образом для волн, испущенных в заднюю полусферу (кривая 1). При $\gamma\xi_p = 1$ имеет место бифуркация зависимости $\theta(\theta')$, физически связанная с возникновением медленных волн, а формально выражаясь в проявлении максимума на кривой $\theta(\theta')$. Наличие такого максимума при $\gamma\xi_p > 1$ (кривая 2) соответствует эффекту локальной (по угловому спектру) аберрационной фокусировки под углом $\theta = \theta_{\max}^{(2)} < \pi/2$, приводящему к необходимости преобразования интенсивности на конусе, ограничивающем область существования сложного эффекта Доплера. При дальнейшем снижении частоты величина $\theta_{\max}^{(2)}$ уменьшается, а зона фокусировки плоских волн в системе K' смещается в область $\theta' < \pi/2$ (кривая 3).

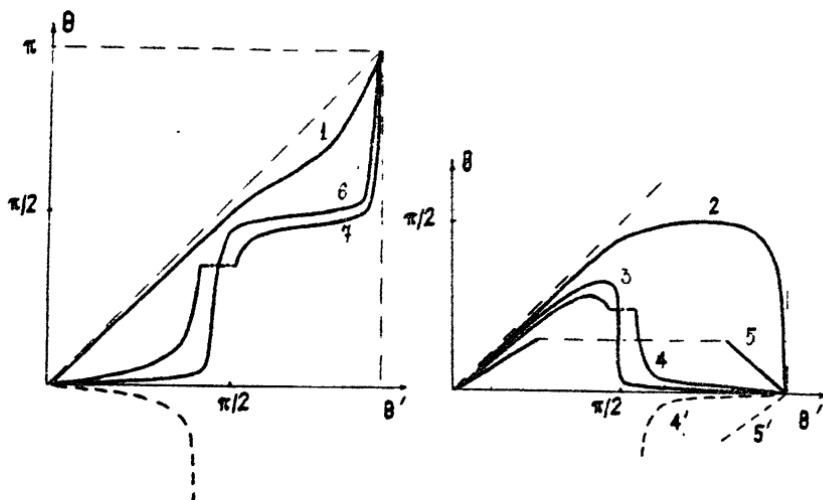


Рис. 6:

Точное равенство обеспечивается при $\xi_p = \Delta$. Для более низких частот, когда $\xi_p = \Delta^2$ локальная аберрационная фокусировка сменяется глобальной: плоские волны, испущенные в K' во всю заднюю полусферу, формируют в K одну плоскую волну, распространяющуюся под углом $\theta = 0$. В низкочастотной по ω' области, когда $\xi_p > \Delta^2$, аберрационная кривая терпит разрывы (кривые 4, 5). Вне разрыва расчет приводит к отрицательным значениям θ при $\theta' > \pi/2$, что показано на рис.6 штриховыми кривыми 4, 5. В области разрыва действительным частотам ω' соответствуют комплексные частоты ω в системе K . Другими словами, испущенные в некотором конусе в K' плазменные волны воспринимаются в системе K , связанной с плазмой, как "волны следа", экспоненциально затухающие под углом к скорости V . По мере снижения частоты ω' (роста параметров ξ_p) конус формирования следа в K' расширяется (кривая 5). Плоские волны, испущенные в K' вне этого конуса, испытывая аберрационное наложение, обеспечивают в K сложный эффект Доплера.

Отметим, что условие $\xi_p = \Delta^2$ перекачки плазменных волн в волны следа может быть выполнено и в отсутствие сложного эффекта Доплера, когда $\gamma\xi_p > 1$. Аберрационная зависимость для этого случая представлена на рис.6 кривой 7. Как видно из сравнения кривых 1, 6, 7 сильные аберрации возможны и при нерелятивистском движении источника, в том числе, в отсутствие сложного эффекта Доплера, но лишь для гиперзвуковых скоростей ($M \gg 1$).

Исследуя формулы преобразования интенсивности для электромагнитных и плазменных волн, можно показать [17], что эффект аберрационной расходимости устойчив по отношению к наличию пространственной дисперсии среды. Для ответа на вопрос о физической наблюдаемости эффекта, то есть о виде спектра реальных источников, обдуваемых теплой плазмой, в интервале особенности аберрационного наложения (в окрест-

ности экстремума функции $\theta(\theta')$) в качестве простейшего примера, обладающего достаточной общностью, рассмотрим дипольный осциллятор с моментом $\vec{p}(t) = \vec{p} \exp(i\omega' t')$.

Рассчитанные на ЭВМ [17] электромагнитные диаграммы направленности диполя, ориентированного вдоль и поперек скорости \vec{V} , приведены на рис. 7

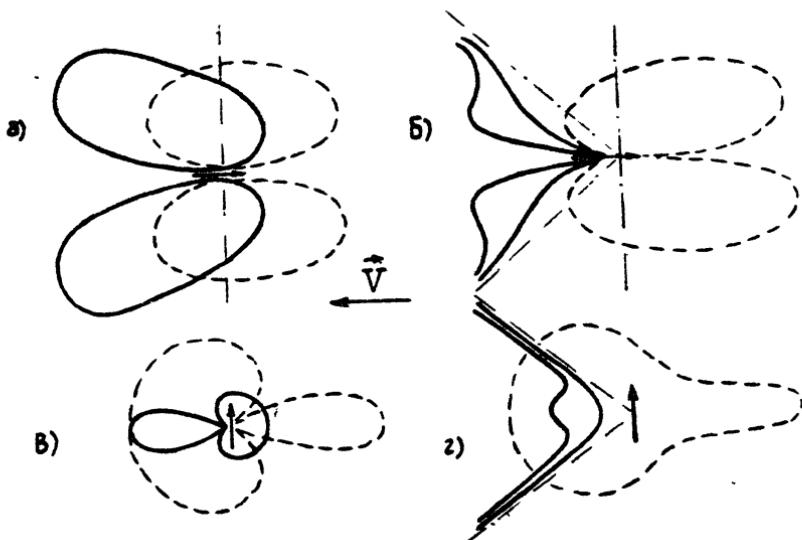


Рис. 7:

Для сравнения здесь же штриховыми линиями показаны диаграммы направленности в системе отсчета K' , то есть диполя, обдуваемого плазмой. Как видно из рис. 7, в интервале особенности аберрационноголожения спектр источника в собственной системе координат конечен и отличен от нуля. В результате в системе K , связанной со средой, на границе существования сложного эффекта Доплера при $\omega' < \gamma\omega_p$ формируется особенность диаграммы направленности движущегося диполя, что и подтверждается рис. 7.

Результаты расчета плазменных диаграмм направленности для диполя, ориентированного вдоль скорости ($\vec{p} \parallel \vec{V}$), отражены на рис. 8. Здесь же штриховыми линиями изображены соответствующие диаграммы направленности в системе K' , то есть диполя, обдуваемого плазмой (ср.[16]).

Как видно из сравнения рис. 7в и 8а при дозвуковом движении источника ($M < 1$) в отсутствие сложного эффекта Доплера ($\gamma\xi_p < 1$) диаграммы направленности электромагнитных и плазменных волн для соответствующих (ортогональных) ориентаций диполя качественно аналогичны. В условиях сложного эффекта Доплера ($\gamma\xi_p > 1$) появляются отличия, связанные с обращением в нуль плазменной диаграммы направленности на некотором конусе тупых (в K') или острых (в K) углов (ср. рис. 7г и 8б).

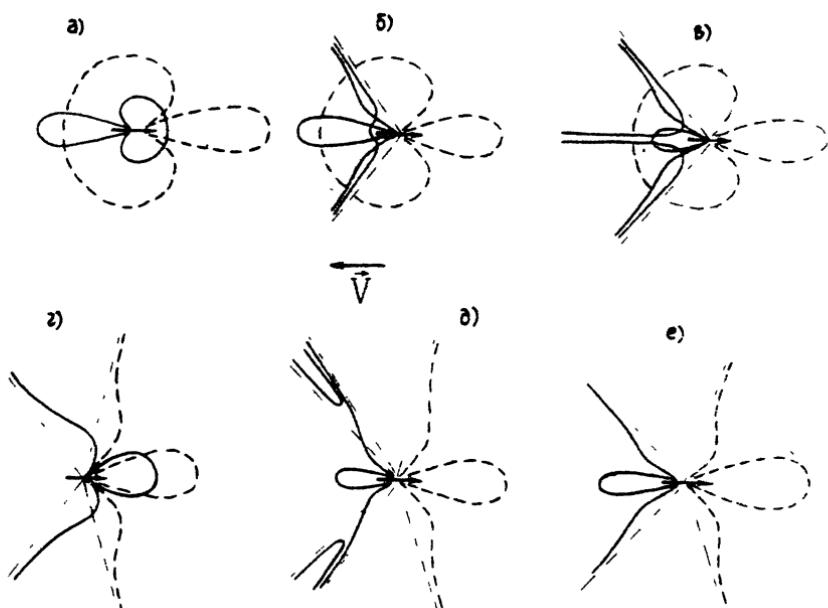


Рис. 8:

Отсутствующий для электромагнитных волн эффект глобальной aberrационной фокусировки на плазменных волнах возникает в особом случае $\xi_p = \Delta^2$ и проявляется в наличии дополнительной особенности при $\theta = 0$ (рис.8в). При сверхзвуковом движении источника ($M > 1$) диаграммы направленности электромагнитных и плазменных волн качественно различны. Наиболее характерные диаграммы для волн плазменного типа показаны на рис.8г-е. Всех их объединяет то, что в системе K' , где покоящийся диполь обдувается плазмой, диаграмма формируется лишь в конусе тупых углов, а на самом конусе имеет особенность. В системе же K , связанной с плазмой, при понижении частоты источника ω' могут формироваться три вида диаграмм. Диаграмма первого вида (рис.8г) возникает в отсутствие aberrационного наложения волн и качественно соответствует кривым 1, 6 на рис.6. Она отличается от плазменной диаграммы в K' лишь смещением конуса диаграммной особенности вперед. Диаграмма второго вида (рис.8а) возникает в том случае, когда становится возможным сложный эффект Доплера. С учетом вида диаграммы в K' этот эффект может быть реализован лишь в секторе между конусами aberrационной и диаграммной особенностей (см. кривую 2 на рис.6). При дальнейшем понижении частоты, когда $\xi_p > \Delta^2$, возникает плазменная диаграмма третьего типа (рис.8е), которая качественно может быть понята с помощью кривых 4, 5 на рис.6. Все излучение в K из-за aberrаций идет в переднюю полусферу, но сложный эффект Доплера невозможен из-за отсутствия в угловом спектре в K' необходимых для aberrационного положения компонент. Впервые на возможность подавления сложного эффекта Доплера диаграммой направленности в системе отсчета, сопровождающей источник, было указано в [7]. Особенность на рис.8е носит диаграммный характер и может вообще отсутствовать в K , если угловой

спектр в K' не попадает в область определения кривой 5 на рис.6. При этом излученные в системе K' плазменные волны принимаются в системе K как волны следа.

Вопрос о наличии или отсутствии интегрируемой расходимости в диаграмме направленности реального источника, движущегося в диспергирующей среде, имеет несколько аспектов. Как ясно из сказанного выше, такая расходимость может иметь aberrационную природу и формироваться реальными токовыми распределениями (в частности, дипольным излучателем) в среде как без пространственной дисперсии, так и при наличии таковой [17]. Аберрационная расходимость может быть подавлена как за счет вида диаграммы направленности реального источника в собственной системе отсчета, так и из-за его немонохроматичности [14,17]. Расходимость диаграммы направленности движущегося источника не обязательно связана с aberrационными эффектами – она может иметь место и в отсутствие сложного эффекта Доплера просто как результат формирования поля излучения в собственной системе отсчета [16]. Исходя из результатов работ [19,20], можно ожидать, что такая расходимость снижается при учете конечных размеров источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doppler Chr. // Abh.Bohm.Ges. 1942. B.2. S.465.
2. Weisskopf V.E. // Phys.Today. 1960. V.13. N 9. P.24; УФН. 1964. Т.84. С.183.
3. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1967.
4. Zheleznyakov V.V.// Astrophys.Space Sci. 1971. V.13. P.74.
5. Франк И.М. // Изв.АН СССР. Сер.физич. 1942. Т.6. С.3; Т.Phys. USSR. 1943. V.7. N 2. P.49.
6. Франк И.М. // УФН. 1946. Т.30. Вып.3-4. С.149.
7. Сорокин Ю.М. // Изв.вузов. Радиофизика. 1973. Т.16. N 3. С.342.
8. Франк И.М. // ЖЭТФ. 1959. Т.36. С.823.
9. Франк И.М. // ЖЭТФ. 1960. Т.38. С.1751.
10. Барсуков К.А.// ЖТФ. 1962. Т.32. С.161.
11. Lee K.S.H.// Radio Sci. 1968. V.3. P.1098.
12. Papas C.H. Theory of elektromagnetic wave propagation.- N.Y.: McGraw-Hill, 1965.
13. Manz B. // T.Opt.Soc.Amer. 1967. V.57. P.1543.
14. Сорокин Ю.М. // Изв.вузов. Радиофизика. 1974. Т.17. N 3. С.338.
15. Сорокин Ю.М. // ЖТФ. 1986. Т.56. С.532.
16. Зайцев С.И., Лупанов Г.А. // Изв.вузов. Радиофизика. 1979. Т.22. N 7. С.794.
17. Амелин В.В., Сорокин Ю.М. // ЖТФ. 1991. Т.61. С.32.
18. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика (дополнительные главы). - М.: Наука, 1987. С.486.
19. Sundaram A.K. // Canad.T.Phys. 1969. V.47. P.1643.
20. Беллюстин Н.С., Докучаев В.П. // Изв.вузов. Радиофизика. 1975. Т.18. N 1. С.17.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
23 марта 1993 г.

ENERGY PROPAGATION FOR DISPERSIVE WAVES IN DISSIPATIVE MEDIA

Francesco Mainardi

1. INTRODUCTION

In this paper we will investigate the energy propagation associated with a linear wave motion in the presence of dissipation. Let $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ be the n -vector field variable depending on position vector $\mathbf{r} := \{x, y, z\}$ and time t , chosen in such a way that the *energy density* be expressed by the quadratic functional

$$\mathcal{E}[\mathbf{U}] := \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2}, \quad (1.1)$$

where \cdot denotes the inner product in \mathbb{R}^n . The field variable must satisfy a system of n linear partial differential equations, that we assume to be of the first order in time and in normal form, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + L(\mathbf{r}) \mathbf{U} = 0, \quad (1.2)$$

where L is some linear $n \times n$ matrix operator, acting on the position vector \mathbf{r} . We will refer to the equation (1.2) subjected to the condition (1.1) as to the *evolution equation* in our canonical form.

In specific examples L will be a differential or pseudo - differential operator with constant coefficients. This means that for any function \mathbf{U} which is (spatially) Fourier transformable, the (spatial) Fourier transform of the function $\mathbf{U}' = LU$ reads

$$\hat{\mathbf{U}}'(\mathbf{k}) = \widehat{LU}(\mathbf{k}) := \hat{L}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{k}), \quad (1.3)$$

where $\hat{L}(\mathbf{k})$ denotes the appropriate symbol of the (pseudo -) differential operator L . We agree to use the following notation for the Fourier transform in \mathbb{R}^p :

$$\hat{f}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \iff f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{\mathbb{R}^p} \hat{f}(\mathbf{k}, t) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$

If, for example, $p = 1$ and $L = \partial/\partial x$, then $\hat{L}(\mathbf{k}) = ik$.

In order to treat the energy propagation the balance equation for the energy density is required to be in the form

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F} = -\mathcal{S}, \quad (1.4)$$

where $\mathbf{F} = \mathbf{F}[\mathbf{U}]$ is the *flux density vector* corresponding to \mathcal{E} and $\mathcal{S} = \mathcal{S}[\mathbf{U}]$ the *loss density*; furthermore, \cdot denotes the inner product in \mathbb{R}^3 and $\nabla_{\mathbf{r}}$ the *nabla operator*

$$\nabla_{\mathbf{r}} := \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Equation (1.4) will be referred to as the *energy balance equation*.

In the absence of dissipation ($S = 0$) the motion is called *conservative* (with respect to \mathcal{E}), since integration of (1.4) over a fixed space-domain Ω leads to the conservation of the integral

$$\langle \mathcal{E}[\mathbf{U}] \rangle := \int_{\Omega} \mathcal{E}[\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r}, \quad (1.5)$$

for any solution \mathbf{U} satisfying suitable conditions at the boundary $\partial\Omega$ of the domain itself (e.g. descent behaviour at infinity if $\Omega \equiv \mathbf{R}^3$, or periodicity). Then we write

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{E}[\mathbf{U}] \rangle = 0. \quad (1.6)$$

The functional $\langle \mathcal{E}[\mathbf{U}] \rangle$ is then said to be an *invariant integral* of the motion, and $\mathcal{E}[\mathbf{U}]$ is referred to as a *conserved density*.

In the presence of dissipation ($S \neq 0$) the integration of (1.4) yields

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{E}[\mathbf{U}] \rangle = - \langle S[\mathbf{U}] \rangle, \quad (1.7)$$

so that, if $\langle S[\mathbf{U}] \rangle \neq 0$, $\langle \mathcal{E}[\mathbf{U}] \rangle$ is no longer an invariant integral. In this case we refer to the motion as to a *non-conservative motion*.

From a mathematical point of view we note that in the *energy balance equation* $\mathbf{F} = \mathbf{F}[\mathbf{U}]$ and $S = S[\mathbf{U}]$ are not uniquely determined: if for a given \mathcal{E} the pair $\{\mathbf{F}, S\}$ satisfies (1.4), then so does the pair $\{\mathbf{F} + \mathbf{G}, S - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{G}\}$ for any arbitrary density \mathbf{G} . However, we assume that the uniqueness in the above equation be always ensured through suitable physical considerations.

The relevant concepts related to energy propagation are based on the definition of the following (generally *time dependent*) functionals,

i) the *energy-flux velocity*

$$\mathbf{V}_e[\mathbf{U}] := \frac{\langle \mathbf{F}[\mathbf{U}] \rangle}{\langle \mathcal{E}[\mathbf{U}] \rangle}, \quad (1.8)$$

ii) the *energy attenuation rate*

$$\alpha[\mathbf{U}] := \frac{\langle S[\mathbf{U}] \rangle}{\langle \mathcal{E}[\mathbf{U}] \rangle}. \quad (1.9)$$

For periodical motions we may interpret the brackets $\langle \cdot \rangle$ as an averaging operator over the periodic space domain. In these cases we may refer to \mathbf{V}_e as the mean energy-flux velocity, and to α as the mean energy attenuation rate.

From now on we will use the simplified terms of *energy velocity* and *attenuation rate*, respectively for \mathbf{V}_e and α .

The importance of the *attenuation rate* can be recognized from (1.7) and (1.9). It follows that

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{E}[\mathbf{U}] \rangle = - \langle S[\mathbf{U}] \rangle = - \alpha[\mathbf{U}] \langle \mathcal{E}[\mathbf{U}] \rangle, \quad (1.10)$$

from which it is found that

$$\langle \mathcal{E}[\mathbf{U}] \rangle = \langle \mathcal{E}_0 \rangle \exp \left\{ - \int_0^t \alpha[\mathbf{U}(\tau)] d\tau \right\}, \quad (1.11)$$

where \mathcal{E}_0 is the energy density corresponding to the initial data $\mathbf{U}(x, 0)$.

In the literature (see e.g. [1]) the concept of energy velocity is usually stated in the absence of dissipation and for monochromatic waves (the so-called *normal mode solutions*), extending a classical argument originally due to Reynolds [2] and Rayleigh [3] for surface water waves. This velocity is defined as in (1.8) where the average is taken over a cycle of the wave phase and it is known to coincide with the group velocity computed at the wavelength of the wave; this general property of linear wave motions without dissipation can be proven in different ways (see e.g. [4-9]).

When there is dissipation this coincidence is manifestly broken since the group velocity (defined by taking the real part in the usual formula) loses its original meaning and can assume nonphysical values (e.g. exceeding the wave-front velocity), as pointed out by Sommerfeld and Brillouin [10] for electromagnetic waves. In other words, for dissipative motions the concept of group velocity may become meaningless and appears not easily related to energy propagation, so that specific treatments are necessarily required.

In order to be able to treat energy propagation for non periodic waves with finite energy and to incorporate dissipative effects as well, the concept of *centrovelocity of energy*, originally introduced by the Russian scientist Vainshtein [11-12], may be useful. The centrovelocity, defined as the velocity of the center of gravity of some density, here the energy density, can be related to the usual energy flux velocity even in the presence of dissipation. Here, however, we will not treat this controversial subject matter, referring the interested reader to recent papers [13-14], where this concept is investigated for linear and non linear dissipative motions.

In this work we will present some results on the *energy velocity* and the *attenuation rate* for *normal mode solutions* in linear wave motions with dissipation; the analysis will be based on recent papers of ours [15-20].

In section 2 we will introduce the *normal mode solutions* and the related *dispersion equation* associated to a general linear wave motion in the presence of dissipation; some important properties will be stated which simplify our treatment of the energy propagation.

In section 3 we will consider uniaxial wave propagation governed by a *linear hyperbolic system* [15-17]. In this case general relations among the *energy velocity* and the *kinematic velocities* (phase and group velocity) will be derived. Two examples of physical interest will also be examined, which point out the different effects of the dissipation even if related with the same dispersion equation.

In section 4 we will consider a linear wave motion of particular relevance in fluid mechanics: the propagation of *internal gravity waves* in an unlimited viscous fluid [18-20]. This provides an interesting example of *anisotropic dispersion with dissipation*. Furthermore, in this case, dissipation is shown to induce a cut-off in the short wavelengths, leading to define an admissible range of waves.

2. THE NORMAL MODE SOLUTIONS

We consider particular space-periodic solutions of the basic equations, referred

to as *normal modes*, from which usually the analysis of linear dispersive waves starts. These solutions are of the form

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}) := \operatorname{Re} \left[\mathbf{V}(\mathbf{k}) e^{i\Theta(\mathbf{r}, t; \mathbf{k})} \right], \quad \Theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \bar{\omega}(\mathbf{k})t, \quad (2.1)$$

where \mathbf{V} denotes the amplitude (generally complex), $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{k}}$ the wavenumber vector (henceforth referred to as wave vector), \mathbf{r} the position vector, and $\bar{\omega}$ the radian frequency.

Henceforth we will denote a given normal mode simply by $\mathbf{U}(\mathbf{k})$, so dropping the dependence on \mathbf{r}, t ; furthermore we will use the notation $\mathbf{U}^c(\mathbf{k})$ to denote the complex solution whose real part provides $\mathbf{U}(\mathbf{k})$.

For $\mathbf{U}(\mathbf{k})$, and hence $\mathbf{U}^c(\mathbf{k})$, to be a solution of the *evolution equation* (1.2), $\bar{\omega}$ and \mathbf{V} depend on \mathbf{k} in such a way to satisfy the following eigenvalue problem

$$[-i\bar{\omega} I + \hat{L}(\mathbf{k})] \mathbf{V} = 0, \quad (2.2)$$

where \hat{L} denotes the symbol of the operator L . This implies that $\bar{\omega}$ and \mathbf{V} should be an eigenvalue and a corresponding eigenvector of the matrix

$$\Omega(\mathbf{k}) := -i\hat{L}(\mathbf{k}). \quad (2.3)$$

In particular $\bar{\omega}$ must satisfy the *dispersion equation* that follows from (2.2-3), i.e.

$$\mathcal{D}(\bar{\omega}, \mathbf{k}) := \det [-i\bar{\omega} I + \hat{L}(\mathbf{k})] := i^n \det [\Omega(\mathbf{k}) - \bar{\omega} I] = 0. \quad (2.4)$$

Of course the *dispersion equation* is an implicit relation between the frequency $\bar{\omega}$ and the wave-vector \mathbf{k} . Allowing $\bar{\omega}$ to be complex-valued, this equation can generally be solved into several branches $\bar{\omega}^{(j)}(\mathbf{k})$ (say $j = 1, \dots, m$), that provide m distinct normal modes. This implies that at a given \mathbf{k} there may be m distinct normal mode solutions, each of them characterized by its complex frequency and its amplitude.

These normal mode solutions represent *pseudo monochromatic waves*, since they are sinusoidal in space with wavelength $\lambda = 2\pi/k$, but not necessarily sinusoidal in time, since $\bar{\omega}$ may be complex, say

$$\bar{\omega}(\mathbf{k}) := \omega_r(\mathbf{k}) - i\omega_i(\mathbf{k}). \quad (2.5)$$

Only if $\bar{\omega}$ is real, say $\bar{\omega} = \omega_0$, these solutions represent effectively *monochromatic waves* with a period $T_0 = 2\pi/\omega_0$. In general these waves exhibit an exponential time decay in amplitude with a *damping factor*

$$\gamma(\mathbf{k}) := \omega_i(\mathbf{k}), \quad (2.6)$$

and a *pseudo period*

$$T(\mathbf{k}) := \frac{2\pi}{\omega_r(\mathbf{k})}. \quad (2.7)$$

Furthermore they propagate with their *phase velocity* defined by

$$\mathbf{V}_p(\mathbf{k}) := \frac{\omega_r(\mathbf{k})}{\mathbf{k}}, \quad (2.8)$$

since the actual phase turns out to be

$$\Phi(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}) := \operatorname{Re} [\Theta(\mathbf{r}, t; \mathbf{k})] = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_r(\mathbf{k})t. \quad (2.9)$$

To the *normal-mode solutions* we can associate the concepts of *group velocity* and *energy velocity*, *attenuation rate* as well.

For the *group velocity* we adopt the definition

$$\mathbf{V}_g(\mathbf{k}) := \nabla_{\mathbf{k}} \omega_r(\mathbf{k}), \quad (2.10)$$

where $\nabla_{\mathbf{k}}$ denotes the *nabla* operator in the wave-vector space. Of course, this definition reduces to the ordinary one in the conservative case i.e. in the absence of dissipation. In the presence of dissipation the concept of group velocity is expected to lose its usual kinematic meaning of the speed of the group (*wave packet*). Meanwhile, we note that the concept of phase velocity keeps its kinematic meaning of the speed of the phase even in the presence of dissipation.

For the *energy velocity* and the *attenuation rate* we adopt our previous definitions (1.8-9) where brackets denote average over the periodic space domain, or, if the time is kept fixed, over a cycle of the actual phase Φ in (2.9).

We first recall the following properties concerning two normal modes $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ with given $\mathbf{k}, \bar{\omega}(\mathbf{k})$ and amplitude $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ respectively, pointed out in [16]:

$$2\langle \mathbf{U}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{U}_2(\mathbf{k}) \rangle = \operatorname{Re} [\langle \mathbf{U}_1^c(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{U}_2^c(\mathbf{k}) \rangle], \quad (2.11)$$

and

$$\langle \mathbf{U}_1^c(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{U}_2^c(\mathbf{k}) \rangle = \mathbf{U}_1^c(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{U}_2^c(\mathbf{k}) = e^{-2\gamma(\mathbf{k})t} (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2), \quad (2.12)$$

where the inner product is in \mathbf{R}^n or \mathbf{C}^n as appropriate.

The importance of relations (2.11-12) is that they enable us to compute \mathbf{V}_e and α without carrying out the averages present in equations (1.8-9). Thus, the *energy velocity* and the *attenuation rate* for a normal mode solution $\mathbf{U}(\mathbf{k})$ turn out to be *time independent*, depending uniquely on the wave vector; they are obtained considering the energy terms ($\mathcal{E}, \mathbf{F}, \mathcal{S}$) for the corresponding complex solution $\mathbf{U}^c(\mathbf{k})$, namely

$$\mathbf{V}_e(\mathbf{k}) := \frac{\langle \mathbf{F}[\mathbf{U}(\mathbf{k})] \rangle}{\langle \mathcal{E}[\mathbf{U}(\mathbf{k})] \rangle} = \frac{\mathbf{F}[\mathbf{U}^c(\mathbf{k})]}{\mathcal{E}[\mathbf{U}^c(\mathbf{k})]}, \quad (2.13)$$

and

$$\alpha(\mathbf{k}) := \frac{\langle \mathcal{S}[\mathbf{U}(\mathbf{k})] \rangle}{\langle \mathcal{E}[\mathbf{U}(\mathbf{k})] \rangle} = \frac{\mathcal{S}[\mathbf{U}^c(\mathbf{k})]}{\mathcal{E}[\mathbf{U}^c(\mathbf{k})]} \quad (2.14)$$

Furthermore, we can prove

$$\alpha(\mathbf{k}) = 2\gamma(\mathbf{k}), \quad (2.15)$$

which provides a simple relation between the damping factor and the attenuation rate in a dissipative wave motion for a normal mode solution $\mathbf{U}(\mathbf{k})$. In fact, from (1.1) and (2.11-12) with $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$, we recognize that

$$\langle \mathcal{E}[\mathbf{U}(\mathbf{k})] \rangle := \frac{\langle \mathbf{U}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}) \rangle}{2} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{4} e^{-2\gamma(\mathbf{k})t} = \langle \mathcal{E}_0 \rangle e^{-2\gamma(\mathbf{k})t}, \quad (2.16)$$

that implies (2.15) using (1.11). This general result on the energy attenuation rate will be confirmed in the examples treated in the next sections.

However, no general result for the energy velocity in dissipative motions can be derived so that specific treatments are necessarily required. We will note that an exception is provided by hyperbolic systems, treated in the next section, where an explicit relation among the energy velocity and the kinematic velocities (phase and group velocity) can be obtained.

3. HYPERBOLIC WAVES

A large class of waves in physics can be described by a system of n first order, linear, partial differential equations of symmetric, hyperbolic type. In the one-dimensional case, referring to the *normal form*, we write:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + D \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + M \mathbf{U} = 0, \quad (3.1)$$

where $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$ is a real n -vector function which represents the field variable and D and M are constant real $n \times n$ matrices, with D symmetric. We assume that \mathbf{U} is chosen to satisfy (1.1) i.e. that (3.1) is the *evolution equation* in our canonical form.

In this case the *energy balance law* (1.4) reduces to

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = -\mathcal{S}, \quad (3.2)$$

where $\mathcal{F} = \mathcal{F}[\mathbf{U}]$ is the (*scalar*) *flux density* corresponding to the *energy density* $\mathcal{E} = \mathcal{E}[\mathbf{U}]$ and $\mathcal{S} = \mathcal{S}[\mathbf{U}]$ is the *loss density*. We obtain particularly simple expressions for \mathcal{F} and \mathcal{S} [15-17], i.e.

$$\mathcal{F}[\mathbf{U}] = \frac{\mathbf{U} \cdot D \mathbf{U}}{2}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{S}[\mathbf{U}] = \mathbf{U} \cdot M^* \mathbf{U}, \quad (3.4)$$

where M^* (M^a) denotes the symmetric (antisymmetric) part of the constant matrix M .

As a consequence of equations (3.3-4) we get the following expressions for the *energy velocity* (1.8) and the *attenuation rate* (1.9):

$$V_e[\mathbf{U}] = \frac{\langle \mathbf{U} \cdot D \mathbf{U} \rangle}{\langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \rangle}, \quad (3.5)$$

$$\alpha[\mathbf{U}] = 2 \frac{\langle \mathbf{U} \cdot M^* \mathbf{U} \rangle}{\langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \rangle}. \quad (3.6)$$

We note that if the matrix M^* is proportional to the Identity matrix, then, for any solution $\mathbf{U}(x, t)$ of (3.1) and for all x, t , the loss density is proportional to the energy density; this peculiar fact is referred to as *uniform damping*.

Let us consider *normal mode solutions* of our *evolution equation* (3.1) which read, using (2.1),

$$\mathbf{U}(x, t; k) := \operatorname{Re} \left[\mathbf{V}(k) e^{i\Theta(x, t; k)} \right], \quad \Theta = kx - \bar{\omega}(k)t, \quad (3.7)$$

where k denotes the wavenumber, $\bar{\omega} = \omega_r - i\omega_i$ the complex frequency, and \mathbf{V} the amplitude (generally complex). In this case the matrix $\Omega(k)$ defined in (2.3) reads

$$\Omega(k) = kD - iM, \quad (3.8)$$

so that the *dispersion equation* which follows from (2.4) is

$$\mathcal{D}(\bar{\omega}, k) := \det[-i\bar{\omega}I + ikD + M] = 0. \quad (3.9)$$

For a single mode we can easily obtain the *damping factor* (2.6), the *phase velocity* (2.8), and the *group velocity* (2.10). After some manipulations, we get [15]

$$\gamma(k) := \omega_i(k) = \frac{\mathbf{V} \cdot M^* \mathbf{V}}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}, \quad (3.10)$$

$$V_p(k) := \frac{\omega_r(k)}{k} = \frac{\mathbf{V} \cdot D\mathbf{V}}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} - \frac{i}{k} \frac{\mathbf{V} \cdot M^* \mathbf{V}}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}, \quad (3.11)$$

and [16]

$$V_g(k) := \frac{d\omega_r(k)}{dk} = \frac{\mathbf{V} \cdot D\mathbf{V}}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} - 2i \frac{\mathbf{V} \cdot (M^* - \gamma I)\mathbf{V}'}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}, \quad \mathbf{V}' = \frac{d\mathbf{V}}{dk}. \quad (3.12)$$

Furthermore, the *energy velocity* and the *attenuation factor* can be derived without carrying out the averages in (3.5-6) because of (2.13-14); they read

$$V_e = \frac{\mathbf{V} \cdot D\mathbf{V}}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}, \quad (3.13)$$

and

$$\alpha = 2 \frac{\mathbf{V} \cdot M^* \mathbf{V}}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}. \quad (3.14)$$

We recognize from (3.13) that the energy velocity turns out to be bounded from above and below by the extreme eigenvalues of the matrix D , i.e. by the extreme characteristic velocities of the hyperbolic system. Furthermore we obtain the following relations among the energy velocity and the kinematic velocities

$$V_e(k) = V_p(k) + \frac{i}{k} \frac{\mathbf{V} \cdot M^* \mathbf{V}}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} = V_g(k) - \frac{2}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} \operatorname{Im}[\mathbf{V} \cdot (M^* - \gamma I)\mathbf{V}'], \quad (3.15)$$

and the known identity, pointed out in (2.15),

$$\alpha(k) = 2\gamma(k). \quad (3.16)$$

We recognize from (3.15) the fact that the identification of energy velocity with group velocity is valid not only in the absence of dissipation ($\gamma = 0 \iff M^* = 0$) proven in [21], but also for uniform damping ($M^* = \gamma I$). In the particular case of uniform damping without dispersion ($M = M^* = \gamma I$) we recover the trivial equality of the three velocities V_e, V_p, V_g . Furthermore, when the matrix M is symmetric, the energy velocity equals the phase velocity.

Let us illustrate the application of our theory for two hyperbolic systems of physical interest, which are provided by the *Klein Gordon equation with dissipation* (KGD) and by the *Telegraph system* (TEL).

3.1 THE KLEIN GORDON EQUATION WITH DISSIPATION. The KGD equation reads, in an obvious notation,

$$\Phi_{tt} + 2a\Phi_t + b^2\Phi = c^2\Phi_{xx}, \quad (3.17)$$

where $\Phi = \Phi(x, t)$ and $a \geq 0, b \geq 0, c > 0$. This equation governs the transverse displacement $\Phi(x, t)$ of a uniform stretched string anchored elastically to its equilibrium position by a transverse restoring force and damped by air friction; the constants $2a$, b^2 , and c^2 refer to air damping, restoring force and tension, respectively. In this case the energy terms \mathcal{E} , \mathcal{F} and \mathcal{S} are given by [22]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\Phi_t^2 + c^2\Phi_x^2 + b^2\Phi^2), \quad \mathcal{F} = -c^2\Phi_x\Phi_t, \quad \mathcal{S} = 2a\Phi_t^2. \quad (3.18)$$

We have to transform the second order equation (3.17) into an equivalent first order system (3.1) that preserves the energy properties stated in (1.1). Choosing $\mathbf{U} = \text{col}(\Phi_t, c\Phi_x, b\Phi)$, we obtain the required *evolution equation* with $n = 3$, where

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

The *dispersion equation* can be derived from (3.9) with (3.19), and reads (neglecting the spurious eigenvalue $\bar{\omega} = 0$ that arises because a three-vector \mathbf{U} is introduced to describe a second order equation),

$$(\bar{\omega} + ia)^2 = c^2 k^2 + (b^2 - a^2). \quad (3.20)$$

This dispersion equation indicates that different cases are expected, depending on the sign of $(b^2 - a^2)$. If $0 \leq a \leq b$, then for any k the real part of $\bar{\omega}$ does not vanish, i.e. there is propagation for each k ; if $0 \leq b < a$, there is propagation only for wavenumbers k such that $|k| \geq \sqrt{a^2 - b^2}$. The propagation regimes are characterized by a constant damping factor $\gamma = a$ and

$$V_p = \frac{\sqrt{c^2 k^2 + (b^2 - a^2)}}{k}, \quad V_g = \frac{c^2}{V_p}. \quad (3.21)$$

In particular we get *normal dispersion* ($0 \leq V_g \leq c \leq V_p$) if $0 \leq a < b$, *anomalous dispersion* ($0 \leq V_p \leq c \leq V_g$) if $0 \leq b < a$, *no dispersion* ($V_p = V_g = c$) if $a = b$. In order to derive the *energy velocity* we need the eigenvector for the progressive mode to be inserted in (3.13) or (3.15), i.e. $\mathbf{V} = \text{col}(\bar{\omega}, -ck, ib)$. After simple algebra we get [16]

$$V_e = \omega_r \frac{c^2 k}{b^2 + c^2 k^2} = V_p \left[1 - \frac{b^2}{b^2 + c^2 k^2} \right] = V_g \left[1 - \frac{a^2}{b^2 + c^2 k^2} \right]. \quad (3.22)$$

The above equivalent results thus provide a check of our theory.

We note that V_e is an increasing function of k which does not exceed the wave front velocity c (either V_p or V_g), and that it reduces to the phase velocity only if $b = 0$, and to the group velocity only if $a = 0$. In the particular

case $a = b$, it remains distinct from c in spite of the absence of dispersion (dissipation is however acting not uniformly on the energy since M^* is not proportional to I).

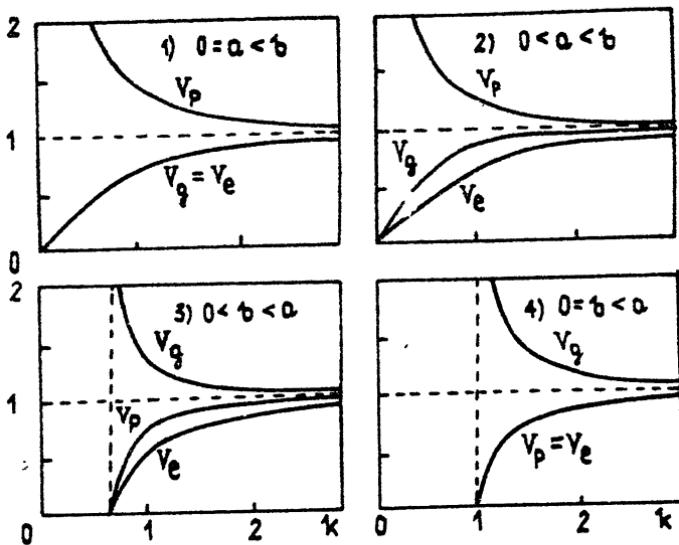


Figure 1: Comparison among the energy velocity V_e , the phase velocity V_p , and the group velocity V_g for the linear KGD equation $\Phi_{tt} + 2a\Phi_t + b^2\Phi = c^2\Phi_{xx}$, with $c = 1$ and 1) $a = 0, b = 1$; 2) $a = 1/\sqrt{2}, b = 1$; 3) $a = 1, b = 1/\sqrt{2}$; 4) $a = 1, b = 0$.

For the sake of clearness, in Figure 1 we show pictures that compare the energy velocity V_e with the kinematic velocities V_p, V_g in the following relevant cases:

1) $0 = a < b$, 2) $0 < a < b$, 3) $0 < b < a$, 4) $0 = b < a$.

3.2 THE TELEGRAPH SYSTEM: The TEL system governs the voltage V and the current I in a (coaxial or parallel two-wire) uniform transmission line, characterized per unit length by shunt capacitance C , self inductance L , resistance R and shunt/conductance G . It reads

$$\begin{cases} CV_t + I_x + GV = 0, \\ LI_t + V_x + RI = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

In this case the energy terms are [23]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(CV^2 + LI^2), \quad \mathcal{F} = VI, \quad \mathcal{S} = GV^2 + RI^2 \quad (3.24)$$

We note that the TEL system can be transformed in the second order equation (3.17), where $\Phi = \{V, I\}$ and

$$c^2 = \frac{1}{LC}, \quad a = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right), \quad b^2 = \frac{R}{L} \frac{G}{C}, \quad (3.25)$$

with the restriction $0 \leq b \leq a$. We also note that $G/C, R/L$ are respectively the real roots ϱ_-, ϱ_+ of the equation $\varrho^2 - 2a\varrho + b^2 = 0$, namely

$$\frac{G}{C} = \varrho_- = a - \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \frac{R}{L} = \varrho_+ = a + \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (3.26)$$

so that $0 \leq \varrho_- \leq \varrho_+ \leq 2a$.

We have to transform the original system (3.23) in our canonical form (3.1). Choosing $\mathbf{U} = \text{col}(\sqrt{C}V, \sqrt{L}I)$, we obtain the required evolution equation with $n = 2$, where, using the notation introduced in (3.25-26),

$$D = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \varrho_- & 0 \\ 0 & \varrho_+ \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

The dispersion equation, derived from (3.9) with (3.27), reduces to (3.20) with the restriction $0 \leq b \leq a$. In this case we have only anomalous dispersion with propagation for wavenumbers k such that $|k| \geq \sqrt{a^2 - b^2}$. The propagation regimes are characterized by the same kinematic velocities as in (3.21), plotted in Figure 1 (being $0 \leq b \leq a$).

In order to derive the energy velocity we need the eigenvector for the progressive mode to be inserted in (3.13) or (3.15), i.e. $\mathbf{V} = \text{col}(ck, \bar{\omega} + ig_-)$. After simple algebra we get [15-17]

$$V_e = \frac{\omega_r}{k} = V_p = V_g \left[1 - \frac{a^2 - b^2}{c^2 k^2} \right]. \quad (3.28)$$

The coincidence for any a, b between the energy velocity with the phase velocity is the consequence of the fact that now the matrix M in (3.1) is always symmetric.¹

4. INTERNAL GRAVITY WAVES

Internal gravity waves are a common feature of many fluid flows. They find special applications in geophysical context, being involved in different phenomena characterizing the atmosphere and the ocean, like momentum transfer and mixing, as well as being possible triggers of non linear processes, like deep convection [21-28].

Dissipative effects are present in real fluids which generally exhibit either viscous dissipation or thermal conduction, characterized respectively by the parameters ν (*kinematic viscosity*) and χ (*kinematic thermal conductivity*). For ideal fluids both parameters reduce to zero. Assuming uniform properties and Boussinesq approximation, the basic linear equations for real fluids are [18-20]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{continuity equation}) \quad (4.1)$$

¹The difference between the results (3.22), (3.28) is, of course, a consequence of the different energy balances of the corresponding phenomena, no matter if they exhibit the same dispersion equation. We also note that the absence of dissipation occurs for KGD when $a = 0$ and $b > 0$, while for TEL when $a = b = 0$. In other words, in the former case we have a unique dissipative parameter a , which can be less or greater than b , while in the latter we have two dissipative parameters a, b ($a \geq b \geq 0$). Thus, the effect of dissipation is expected to be different in the above phenomena.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \sigma \hat{\mathbf{z}} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (\text{equation of motion}) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \Omega^2 \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \chi \nabla^2 \sigma, \quad (\text{equation of state}) \quad (4.3)$$

where \mathbf{u} is the fluid velocity, $\hat{\mathbf{z}}$ the unit vector in the vertically upward direction, p the pressure, σ the buoyancy acceleration, and Ω the Brunt-Väisälä radian frequency.

For real fluids the terms entering the *energy balance equation* (1.4) read [19-20]

$$\mathcal{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{\sigma^2}{\Omega^2}), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{F} := p\mathbf{u} - \frac{\nu}{2}\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \frac{\chi}{\Omega^2}\sigma\nabla\sigma, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{S} := \nu \sum_{j=1}^3 (\nabla u_j \cdot \nabla u_j) + \frac{\chi}{\Omega^2}(\nabla\sigma) \cdot (\nabla\sigma). \quad (4.6)$$

In the r.h.s. of (4.4) the first term represents the kinetic energy \mathcal{E}_k , while the second one the potential energy \mathcal{E}_p due to the buoyancy; in the r.h.s. of (4.6) u_j denote the cartesian components of the vector \mathbf{u} . It should be noted that the energy balance equation is a consequence of the basic equations; to this aim let us take the inner product between \mathbf{u} and the equation (4.2), and use (4.1), (4.3).

We note that our basic equations (4.2-4) can be written in canonical form (1.1-2) introducing the 4-vector field

$$\mathbf{U} := \{\mathbf{u}, \sigma/\Omega\}, \quad (4.7)$$

with the restriction provided by the continuity equation (4.1). The continuity equation implies $\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0$, i.e. $\mathbf{u} = u \hat{\mathbf{n}}$, where $\hat{\mathbf{n}}$ is the unit vector of the normal to \mathbf{k} . Since the fluid velocity is everywhere perpendicular to the wave vector, the internal waves turn out to be transverse waves. Denoted by φ the angle between $\hat{\mathbf{k}}$ and $\hat{\mathbf{z}}$, we get $\cos \varphi = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$, $\sin \varphi = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$.

The dispersive properties of internal waves are related to the *dispersion equation* appropriate for dissipative fluids, which reads (see e.g. [18], [29])

$$\bar{\omega}^2 - \Omega^2 \sin^2 \varphi + i\bar{\omega}(\nu + \chi) k^2 - \nu \chi k^4 = 0. \quad (4.8)$$

Separating the real and imaginary parts of the frequency, we get

$$\omega_r = \omega_0 \left[1 - \frac{(\nu - \chi)^2}{4} \frac{k^4}{\omega_0^2} \right]^{1/2}, \quad \omega_i = \frac{(\nu + \chi)}{2} k^2, \quad (4.9)$$

where

$$\omega_0 = \Omega \sin \varphi \quad (4.10)$$

may be referred to as the *inviscid frequency*. Besides the well known dispersive effect present in inviscid fluids (*anisotropic dispersion*) related to ω_0 , there arises an additional dispersive effect induced by dissipation, that depends on the difference between the dissipative parameters, ν and χ . While the *inviscid dispersion* is responsible for the cut-off in frequencies ($\omega_0 \leq \Omega$), the *viscous*

dispersion when present, provides a further cut-off in wavenumbers, which is obtained from the condition

$$1 - \frac{(\nu - \chi)^2}{4} \frac{k^4}{\Omega^2 \sin^2 \varphi} \geq 0. \quad (4.11)$$

This condition thus provides the domain \mathcal{W} of admissible wave vectors in the presence of dissipation. At a definite angle φ the corresponding wavelength λ must be greater than a critical value according to

$$\lambda \geq \lambda_c(\varphi) := \frac{\Lambda}{\sqrt{\sin \varphi}}, \quad \Lambda = 2\pi \sqrt{\frac{|\nu - \chi|}{2\Omega}}. \quad (4.12)$$

However, for fluids with Prandtl number $Pr := \chi/\nu \rightarrow 1$, the cut-off Λ tends to zero and the difference between ω_r and ω_0 tends to zero, independently of how large the dissipative coefficients are. This peculiar behaviour has been discussed in [18] and [29].

The second equation in (4.9) rules the dissipation: in this case the influence of viscosity and thermal conductivity is simply additive and, for an admissible wave, the *damping factor* turns out to be proportional to the square modulus of the wave vector as in the case of surface gravity waves [30].

From (4.9-10) the kinematic velocities (*phase* and *group velocity*) can be derived. Using the notation 0 to denote the absence of dissipation (ideal fluids), we get the *phase velocity* as

$$\mathbf{V}_p := \frac{\omega_r}{k} \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{V}_p^0 \left[1 - \frac{(\nu - \chi)^2}{4} \frac{k^4}{\omega_0^2} \right]^{1/2}, \quad \mathbf{V}_p^0 := \frac{\omega_0}{k} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\Omega}{k} \sin \varphi \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.13)$$

and the *group velocity* as

$$\mathbf{V}_g := \frac{d\omega_r}{dk} = \frac{\omega_0}{\omega_r} V_g^0 \hat{\mathbf{n}} - \frac{(\nu - \chi)^2}{2} \frac{k^3}{\omega_r} \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{V}_g^0 := \frac{d\omega_0}{dk} = -\frac{\Omega}{k} \cos \varphi \hat{\mathbf{n}}. \quad (4.14)$$

In the presence of dissipation, as $\lambda \rightarrow \lambda_c$, we get $\omega_r \rightarrow 0$, so that $V_p \rightarrow 0$ and $V_g \rightarrow \infty$. Thus, in the over-damped regime, the group velocity exhibits an anomalous behaviour: its magnitude becomes infinite and its direction is no longer perpendicular to the wave vector.

Let us now evaluate the *energy velocity* for internal waves according to (1.8), averaging (4.4-5). To this aim we have to express \mathcal{E} and \mathbf{F} in terms of the amplitude u and the phase $\Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_r t$ and then average over a wavelength $\lambda \geq \lambda_c$. After some computations, and noting that $\langle \cos^2 \Phi \rangle = \langle \sin^2 \Phi \rangle = 1/2$, $\langle \sin \Phi \cos \Phi \rangle = 0$, we find

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{\Omega^2} \langle \sigma^2 \rangle = \frac{u^2}{2} e^{-2\omega_r t}, \quad \langle \mathbf{F} \rangle = \langle p \mathbf{u} \rangle = -\frac{u^2}{2} \frac{\omega_r}{k} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} e^{-2\omega_r t} \hat{\mathbf{n}}. \quad (4.15)$$

The first equation in (4.15) states the equipartition of the mean energy between kinetic and potential energy, a well known property valid in the absence of dissipation. The second equation shows that the mean flux maintains the same expression as in the inviscid case, since the dissipation terms in (4.5) do not contribute to the average.

Then, from (4.15) the energy velocity for a dissipative fluid turns out to be

$$\mathbf{V}_e = - \frac{\omega_r}{k} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.16)$$

that reduces for an ideal fluid ($\omega_r = \omega_0, \omega_i = 0$), using (4.10) and (4.14), to

$$\mathbf{V}_e^0 = - \frac{\Omega}{k} \cos \varphi \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{V}_g^0. \quad (4.17)$$

We note that for a dissipative fluid the energy velocity is no longer to be identified with the group velocity but remains perpendicular to the wave vector as in the conservative case. The discrepancy between the two velocities is due to the effect of the *viscous dispersion*; of course, it is sensible only in the overdamped regime.

We can also verify the relation (2.15) between the *attenuation rate* defined by (1.9) and the *damping factor* defined by (2.6); averaging (4.4), (4.6) and using (4.9) we get

$$\alpha(k) = (\nu + \chi) k^2 = 2\gamma(k). \quad (4.18)$$

For a presentation in physical terms of the results on kinematic and energy velocities we prefer to use *frequency* $f = \omega/2\pi$ and *wavelength* $\lambda = 2\pi/k$; furthermore we find it convenient referring to normalized variables. For frequencies the natural scale is provided by the Brunt-Väisälä frequency $N = \Omega/2\pi$, while for wavelengths by

$$L = \frac{2\pi}{K} \quad \text{with} \quad K = \sqrt{\frac{2\Omega}{\nu + \chi}}. \quad (4.19)$$

The velocity scale is therefore $V = L N$. Introducing the parameter

$$\mathcal{P} := \frac{|\nu - \chi|}{\nu + \chi} := \frac{|1 - Pr|}{1 + Pr}, \quad 0 \leq \mathcal{P} \leq 1, \quad (4.20)$$

the condition (4.12) for wave propagation reads, since $\Lambda = L \sqrt{\mathcal{P}}$,

$$\lambda \geq \lambda_c(\varphi) := \sqrt{\mathcal{P} / \sin \varphi}. \quad (4.21)$$

The effect of *viscous dispersion* is provided by the parameter $\delta := \omega_r/\omega_0$ defined for $\lambda \geq \lambda_c(\varphi)$, that turns out to be, using (4.9-12), (4.19-21),

$$\delta(\lambda, \varphi; \mathcal{P}) := \frac{f_r(\lambda, \varphi; \mathcal{P})}{f_0(\varphi)} = \left[1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^4 \right]^{1/2}, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (4.22)$$

As a consequence, the magnitudes of the phase and energy velocities, derived from (4.13-14), (4.16-17), become

$$V_p = V_p^0 \delta, \quad V_p^0 = \lambda \sin \varphi; \quad (4.23)$$

$$V_e = V_e^0 \delta, \quad V_e^0 = V_g^0 = \lambda \cos \varphi. \quad (4.24)$$

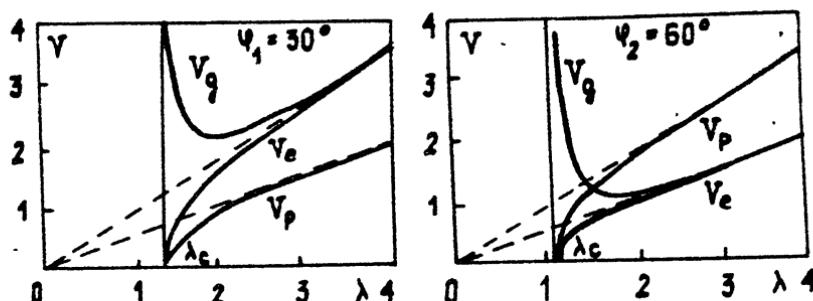


Figure 2: Comparison among the energy velocity, the phase velocity and the group velocity for internal gravity waves in a fluid with and without dissipation

In Figure 2 we report the magnitudes of the phase, group and energy velocities versus wavelength, for two particular angles of propagation ($\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$); continuous lines refer to a *dissipative fluid* (with $\mathcal{P} = 1$), dashed lines to an *ideal fluid*.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported in part by C.N.R., Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica, by I.N.F.N., Sezione di Bologna, and by Italian Ministry of University (MURST: 60% grants). The author wishes to thank his former students Enrico Grassi, Giuliano Vitali and Donatella Tocci for their helpful comments and assistance with computing.

REFERENCES

1. Whitham G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. – Wiley, New York, 1974.
2. Reynolds O // *Nature*. Sect. A. 1877. V.16. P.343.
3. Strutt J.W. (Lord Rayleigh). // *Proc. London Math. Soc.* 1877. V.9. P.21.
4. Rossby C.G. // *J. Meteorol.* 1945. V.2. P.187.
5. Broer L.J.F. // *Appl. Sci. Res.* 1951. V.2B. P.329.
6. Biot M.A. // *Phys. Rev.* 1957. V.105. P.1129.
7. Whitham G.B. // *Comm. Pure Appl. Math.* 1961. V.14. P.675.
8. Sir Lighthill J. // *J. Inst. Math. Appl.* 1965. V.1. P.1.
9. Hayes M. // *J. Austral. Math. Soc.* 1977. V.20B. P.106.
10. Brillouin L. // *Wave Propagation and Group Velocity*. Academic Press, N.Y. 1960.
11. Vainshtein L.A. // *Soviet Phys. Techn. Phys.* 1957. V.2. P.2420.
12. Vainshtein L.A. // *Soviet Phys. Usp.* 1976. V.19. P.189.
13. Van Groesen E., Mainardi F. // *Wave Motion*. 1989. V.11. P.201.
14. Derkx G., Van Groesen E. // *Wave Motion*. 1992. V.15. P.159.
15. Mainardi F. // *Wave Motion*. 1987. V.9. P.201.

16. Mainardi F., Van Groesen E. // Il Nuovo Cimento. 1989. V.104B. P.487.
17. Mainardi F., Tocci D. // Notes in Numerical Fluid Mechanics. 1993, in press.
18. Mainardi F., Tampieri F., Vitali G. // Il Nuovo Cimento. 1991. V.14C. P.391.
19. Mainardi F., Tocci D., Tampieri F. // Proc. IV Int. Conf. Fluid Mechanics, held in Alexandria, Egypt, 28-30 April 1992. Vol 2. P.271.
20. Mainardi F., Tocci D., Tampieri F. // Il Nuovo Cimento. 1992. V.107B. P.1337.
21. Broer L.J.F., Peletier L.A. // Appl. Sci. Res. 1967. V.17A. P.65.
22. Baldock G.R., Bridgeman T. The Mathematical Theory of Wave Motion. - Chichester, U.K.: Ellis Horwood, 1981.
23. Levine H. Unidirectional Wave Motions. - Amsterdam: North-Holland, 1978.
24. LeBlond P.H., Mysak L.A. Waves in the Ocean. - Amsterdam: Elsevier, 1978.
25. Sir Lighthill J. Waves in Fluids. -Cambridge Univ. Press, 1978.
26. Turner J.S. Buoyancy Effects in Fluids. - Cambridge Univ. Press, 1978.
27. Gill A.E. Atmosphere-Ocean Dynamics. - Orlando: Academic Press, 1982.
28. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. - Oxford: Pergamon Press, 1987.
29. LeBlond P.H. // Meeresforschungen. 1966. V.21. P.127.
30. LeBlond P.H., Mainardi F. // Acta Mechanica. 1987. V.68. P.203.

University of Bologna,
Italy

Поступила в редакцию
7 сентября 1992 г.

SOME ANALYTICAL RESULTS ON NONLINEAR ACOUSTIC WAVE PROPAGATION IN DIFFUSIVE MEDIA

B.O. Enflo

1. INTRODUCTION. DERIVATION OF KUZNETSOV's EQUATION

The aim of this paper is to present the analytical results hitherto achieved on some fundamental problems of nonlinear acoustic wave propagation. By fundamental problems we mean the most simple and idealized cases, which are natural starting points for more detailed calculations on realistic cases. These latter problems can often be considered as disturbances on or generalizations of the simple cases treated here. Thus in these lectures we treat wave propagation in homogeneous media and in simple geometries, such as plane, cylindrical or spherical geometry. In nonlinear acoustics, an important problem is to calculate the effects of nonlinearity on a propagating wave. We will study how originally simple waveforms, such as monochromatic waves and N-waves, are distorted because of nonlinearity. Thus we start with a vibration with a given time dependence and a given geometry at a certain place and try to calculate the effect of this vibration at another time and place. The mathematical model for those fundamental wave propagation problems is Burgers' equation. We will begin with a derivation of Burgers' equation, used on acoustical problems, from first principles.

Burgers' equation is an equation for wave propagation in a diffusive medium, which means that the wave loses energy because of viscosity and heat conduction. We assume that these effects are small, but important enough to be considered in their lowest order and causing terms in the wave equation comparable with terms of the second order in the deviations from equilibrium of velocity, density and pressure.

If \vec{v} is the velocity of the medium and ρ its density, the continuity equation is

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

and the Navier-Stokes' equation is

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + (\zeta + \frac{\eta}{3}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}, \quad (2)$$

where p is the pressure and η, ζ are the shear and bulk viscosity respectively. As the constitutive equation of the medium we choose the state equation of an ideal gas:

$$p = \rho R T, \quad (3)$$

where T is the absolute temperature and R is the difference between the heat capacities at constant pressure and volume respectively:

$$R = c_p - c_v. \quad (4)$$

Instead of using ρ and T as independent variables we also will have to use ρ and s , where s is the entropy per mass. An equation of state equivalent to (3) then is

$$p = p(\rho, s). \quad (5)$$

We need not at present specify the function $p(\rho, s)$, although it can be calculated from (3) and (4). In addition to the continuity equation, Navier-Stokes; equation and the state equation we need a heat conduction equation

$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} = \kappa \Delta T, \quad (6)$$

where κ is the heat conduction number.

Our goal is to eliminate the pressure p from (2) by using (1) and (3) - (6). Before beginning this somewhat lengthy procedure we will make some simplifications. We assume

$$\text{rot} \vec{v} = 0, \quad (7)$$

$$\vec{v} = -\text{grad} \phi. \quad (8)$$

Because of the operator relation

$$\text{rot} \text{rot} \vec{v} = \text{grad} \text{div} \vec{v} - \Delta \quad (9)$$

and the vector relation

$$\frac{1}{2} \text{grad} \vec{v}^2 = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} \quad (10)$$

the equation (2) is simplified:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 \right) = -\nabla p + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \Delta \vec{v}. \quad (11)$$

We also introduce new notations for the small deviations from the equilibrium state of density, pressure, entropy and temperature:

$$\rho = \rho_0 + \rho', p = p_0 + p', s = s_0 + s', T = T_0 + T'. \quad (12)$$

Using (12) in (1), (2) and (6) we obtain the first order equations for small quantities:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (13)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \Delta \vec{v}, \quad (14)$$

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s'}{\partial t} = \kappa \Delta T'. \quad (15)$$

We note that, if κ and T' are assumed to be small of the first order, the entropy change s' becomes small of the second order according to (15). The equations (13) -(15) will be used for giving approximate relations between small quantities to be used in (11), which is the equation to be transformed.

We remember that we wanted to eliminate p in (11). To that end we begin with a Taylor expansion of $p'(\rho, s)$:

$$p'(\rho, s) = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{s=s_0} \rho'^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{s=s_0} s' \quad (16)$$

where we have used the expression for the undisturbed sound velocity

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=s_0}. \quad (17)$$

Since s' is small of the second order, the expansion (16) is consistent to the second order in small quantities.

We continue by transforming the quantities s' , $(\frac{\partial p}{\partial s})_s$ and $(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2})_s$ in (16).

1. Transformation of s' . In order to transform s' we use (15) and consider T as a function of p and s . Then instead of T' we write

$$T' = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s=s_0} p'. \quad (18)$$

The derivative in (18) can be evaluated using the following mathematical identity for the functions $T(p, s)$, $s(T, p)$ and $p(s, T)$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s=s_0} \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{T=T_0} = -1. \quad (19)$$

Combining (19) with the Maxwell relation

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, V = \frac{1}{\rho}, \quad (20)$$

we obtain

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s=s_0} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=p_0}}{\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=p_0}}. \quad (21)$$

From the state equation (3) we obtain

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=p_0} = \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial T} \right)_{p=p_0} = \frac{R}{p_0} = \frac{1}{T_0 \rho_0}. \quad (22)$$

Combining the relation

$$c_p = T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=p_0} \quad (23)$$

with (21) and (22) we obtain

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s=s_0} = \frac{1}{\rho_0 c_p}. \quad (24)$$

Using (18) and (24) in the heat conduction equation (15) we obtain, because c_p is a constant in our approximation

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s'}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p} \Delta p'. \quad (25)$$

Remembering that we are transforming s' , which occurs in a first order correction term in (16), we can replace p' in (25) using a linearized version of (11) without viscosity terms:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p'. \quad (26)$$

Using (26) in (25) we obtain

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s'}{\partial t} = -\frac{\kappa}{c_p} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (27)$$

Because $\vec{v} = 0$ means $s' = 0$ we obtain by integration of (27):

$$s' = \frac{\kappa}{c_p \rho_0 T_0} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (28)$$

2. Transformation of $(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2})_{s=s_0}$. Continuing the transformation of the terms (15) we now consider the second ρ -derivative of p . For changes with constant s , i.e. reversible adiabatic changes, Poisson's equation

$$p \rho^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma}, \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (29)$$

is valid. From (29) we obtain

$$(\frac{\partial p}{\partial \rho})_s = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (30)$$

and

$$(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2})_s = -\gamma \frac{p}{\rho^2} + \frac{\gamma}{\rho} (\frac{\partial p}{\partial \rho})_s = \frac{\gamma(\gamma-1)}{\rho^2} p. \quad (31)$$

Because of (16) and (30) we have

$$\gamma \frac{p_0}{\rho_0} = c_0^2 \quad (32)$$

and thus from (31) and (32)

$$(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2})_{s=s_0} = \frac{\gamma-1}{\rho_0} c_0^2. \quad (33)$$

3. Transformation of $(\frac{\partial p}{\partial s})_\rho$. The s -derivative of p in (15) is evaluated using that $\rho = \frac{1}{V}$ and using the Maxwell relation

$$(\frac{\partial p}{\partial s})_V = -(\frac{\partial T}{\partial V})_s. \quad (34)$$

Using (3) Poisson's equation (29) can be written

$$T V^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1} \quad (35)$$

from which we derive

$$(\frac{\partial T}{\partial V})_s = T_0 V_0^{\gamma-1} (1-\gamma) V^{-\gamma} = (1-\gamma) T \rho. \quad (36)$$

Using (34) in (36) we obtain the result

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho = \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) T \rho. \quad (37)$$

Inserting the expressions (28), (33) and (37) into (15), the expansion of p' to the second order in small quantities can be written:

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{\gamma - 1}{2\rho_0} c_0^2 \rho'^2 - \frac{\kappa}{c_p} \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) \operatorname{div} \vec{v}. \quad (38)$$

Because

$$\Delta = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \quad (39)$$

and

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \quad (40)$$

we obtain

$$\nabla p' = c_0^2 \nabla \rho' + \frac{\gamma - 1}{\rho_0} c_0^2 \Delta \rho'^2 - \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) \Delta \vec{v}. \quad (41)$$

Insertion of (41) into the Navier-Stokes' equation (11) gives

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 \right) = -c_0^2 (\nabla \rho' + \frac{\gamma - 1}{\rho_0} \rho' \nabla \rho') + b \Delta \vec{v} \quad (42)$$

where

$$b = \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) + \zeta + \frac{4}{3} \eta. \quad (43)$$

Thus, to the second order, the total effect of viscosity and heat conduction is given by the single constant b .

Now we have to eliminate ρ_0 and ρ' in (42). Using that for $\rho' \ll \rho_0$ we have

$$\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \approx \frac{1}{\rho_0} - \frac{\rho'}{\rho_0^2} \quad (44)$$

and keeping terms of the first and the second order we obtain

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 = -\frac{c_0^2}{\rho_0} \left(\nabla \rho' - \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla \rho' + \frac{\gamma - 1}{\rho_0} \rho' \nabla \rho' \right) + \frac{b}{\rho_0} \Delta \vec{v}. \quad (45)$$

The equation (45) is now rewritten using (8) and multiplied with $\frac{\partial}{\partial t}$:

$$\nabla \left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi)^2 \right] = \nabla \left[-\frac{c_0^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\gamma - 2}{2\rho_0} \frac{\partial (\rho'^2)}{\partial t} \right) - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \phi \right]. \quad (46)$$

Integration of (46) gives

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi)^2 + \frac{c_0^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\gamma - 2}{2\rho_0} \frac{\partial (\rho'^2)}{\partial t} \right) + \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \phi. \quad (47)$$

The integration gives an arbitrary function of t , which can be included in ϕ and chosen to be equal to zero, since it does not change the physically observable

quantity $\vec{v} = -\nabla\phi$. It now remains to eliminate ρ' in (47). That can be done by use of the continuity equation (1), which is written using (8) and (12):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \nabla\rho' \cdot \nabla\phi - (\rho_0 + \rho')\Delta\phi = 0. \quad (48)$$

In (48) there are two first order terms and two second order terms in the small quantities ρ' and ϕ . Because $\nabla\rho'$ occurs in a second order term in (48), it can be expressed by means of the first order of (45), which gives:

$$\nabla\rho' = -\frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi). \quad (49)$$

Inserting (49) into (48) we obtain $\frac{\partial \rho'}{\partial t}$ correct to the second order:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi)^2 + \rho_0 \Delta\phi + \rho' \Delta\phi. \quad (50)$$

From (50) we obtain immediately

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho')^2 = 2\rho_0 \rho' \Delta\phi, \quad (51)$$

where third order terms are neglected. In order to replace ρ' we integrate (49) and obtain

$$\rho' = \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (52)$$

Using the equations (49) - (52) in (47) and also the fact that in second order terms $\Delta\phi$ can be replaced by $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$, we obtain finally the nonlinear wave equation, correct to the second order:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta\phi = \frac{\partial}{\partial t}[(\nabla\phi)^2 + \frac{b}{\rho_0} \Delta\phi + \frac{1}{2c_0^2}(\gamma - 1)(\frac{\partial \phi}{\partial t})^2]. \quad (53)$$

This equation was derived by V.P. Kuznetsov [1] in 1971 and can be considered as a method of treating nonlinear and dissipative effects in a wide range of acoustic wave problems, which are in the lowest approximation treated by d'Alembert's equation, i.e. by neglecting the second order righthand side of (53).

2. THE PLANE WAVE PROBLEM; EXACT SOLUTION OF BURGERS' EQUATION

Kuznetsov's equation (53) has three space dimensions. However, in these lectures we limit ourselves to problems in which the number of space dimensions can be reduced to one. The first case that we study is a plane wave, initiated by a piston movement with a prescribed time dependence at the end of a long pipe. We also assume that the wave profile, i.e. the time dependence of the wave at a given distance from the sound source, changes slowly with space because of the nonlinear and dissipative terms on the righthand side of (53). More precisely, we assume that a substantial change of the wave profile requires that the wave travels many wavelengths. This suggests a rescaling of

the space variable, leading to the assumption that the process is described by a function $\phi(\mu z, t)$, where μ is a small parameter. In Kuznetsov's equation (53) we now use new coordinates z' and τ , where

$$\tau = t - \frac{z}{c_0}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (54)$$

$$z' = \mu z, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial z'} + \mu \frac{\partial}{\partial z}. \quad (55)$$

Inserting (54) and (55) into (53) and considering μ, b and ϕ as small we obtain an equation correct to the second order:

$$2\mu c_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial z'} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma - 1}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 \right]. \quad (56)$$

In (56) we return to the fluid velocity

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial \phi(z, \tau)}{\partial \tau} + o(\mu) \quad (57)$$

as dependent variable. Using z instead of z' we obtain from (56) and (57):

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\beta}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0, \quad (58)$$

where

$$\beta = \frac{\gamma + 1}{2}. \quad (59)$$

The equation (58) is *Burgers' equation*, proposed in 1948 by J.M. Burgers as a model for turbulence. It describes plane wave propagation in a diffusive medium in the case where neither dissipative nor nonlinear effects can be neglected.

From a practical point of view there are advantages in introducing dimensionless variables in Burgers' equation. If the oscillation at the end of the pipe has an amplitude v_0 and a frequency ω , we introduce the dimensionless variables V, θ, σ :

$$V = \frac{v}{v_0}, \quad (60)$$

$$\theta = \omega \tau, \quad (61)$$

$$\sigma = \frac{\beta}{c_0^2} \omega v_0 z. \quad (62)$$

Insertion of (60) - (62) into (58) gives

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} - \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad (63)$$

where

$$\epsilon = \frac{1}{2\beta Re} \quad (64)$$

and the acoustic Reynolds number Re is defined as

$$Re = \frac{c_0 v_0 \rho_0}{b \omega}. \quad (65)$$

When we are looking for approximate solutions of (65) we will assume that $\epsilon \ll 1$ which means $Re \gg 1$.

Burgers' equation (65) can be transformed into a linear equation by a transformation found about 1950 independently by J.D Cole and E. Hopf [2],[3]. The Cole-Hopf transformation seems to be most perspicuous if we start with this linear equation, which is the heat conduction equation (with the time σ and the space coordinate θ)

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} = \epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}. \quad (66)$$

In (66) we attempt the solution

$$U(\sigma, \theta) = C \exp \left(\frac{1}{2\epsilon} \int_0^\theta V(\sigma, \theta') d\theta' \right). \quad (67)$$

Derivation of (67) gives

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} = \left(\frac{C}{2\epsilon} \int_0^\theta \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\theta' \right) \exp \left(\frac{1}{2\epsilon} \int_0^\theta V d\theta' \right), \quad (68)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{C}{2\epsilon} V(\sigma, \theta) \exp \left(\frac{1}{2\epsilon} \int_0^\theta V d\theta' \right), \quad (69)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \left(\frac{C}{2\epsilon} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{C}{4\epsilon^2} V^2 \right) \exp \left(\frac{1}{2\epsilon} \int_0^\theta V d\theta' \right). \quad (70)$$

Insertion of (68) and (70) into (66) gives

$$\int_0^\theta \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\theta' = \epsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{2} V^2. \quad (71)$$

After derivation with respect to θ we obtain Burgers' equation (63) from (71). The idea of the Cole-Hopf transformation thus is to write the two terms with θ -derivatives in (63) as a single second derivative.

From (67) and (69) we see that a solution U of the heat conduction equation (66) gives us a solution

$$V = 2\epsilon \frac{\frac{\partial U}{\partial \theta}}{U} \quad (72)$$

and that all solutions of Burgers' equation can be represented by (72).

We will now study how a monochromatic vibration at the end of the pipe, $\sigma = 0$, is deformed during its propagation through the pipe. This means that we have to solve the dimensionless Burgers' equation (63) with the boundary condition

$$V(0, \theta) = \sin \theta. \quad (73)$$

That solution of Burgers' equation (63), which develops from the monochromatic oscillation (73) at the end of the pipe, is now obtained from a solution of (66). That latter solution can be expanded in a Fourier series

$$U(\sigma, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \exp(-k^2 \epsilon \sigma) \cos k\theta. \quad (74)$$

It is easy to see that (66) is identically satisfied by the Fourier series (74). The Fourier coefficients A_k can be determined by putting $\sigma = 0$ and using (67) and (73):

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U(0, \theta) d\theta = \frac{C}{\pi} \int_0^\pi \exp\left(\frac{1}{2\epsilon} \int_0^\theta \sin \theta' d\theta'\right) d\theta, \quad (75)$$

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi U(0, \theta) \cos k\theta d\theta = \frac{2C}{\pi} \int_0^\pi \exp\left(\frac{1}{2\epsilon} \int_0^\theta \sin \theta' d\theta'\right) \cos k\theta d\theta, \quad (76)$$

$$k = 1, 2, \dots, \infty$$

Evaluation of the integrals in (75) and (76) gives us the Fourier coefficients A_k in terms of modified Bessel functions:

$$A_0 = C \exp\left(\frac{1}{2\epsilon}\right) I_0\left(-\frac{1}{2\epsilon}\right), \quad (77)$$

$$A_k = 2C \exp\left(\frac{1}{2\epsilon}\right) I_k\left(-\frac{1}{2\epsilon}\right). \quad (78)$$

Using (77), (78), (72) and the formula $I_n(-z) = (-1)^n I_n(z)$ we obtain the exact solution of Burgers' equation with the boundary condition (73) as a quotient between two Fourier series:

$$V(\sigma, \theta) = -4\epsilon \frac{\sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{2\epsilon}\right) e^{-k^2 \epsilon \sigma} (-1)^k k \sin k\theta}{I_0\left(\frac{1}{2\epsilon}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{2\epsilon}\right) e^{-k^2 \epsilon \sigma} (-1)^k \cos k\theta}. \quad (79)$$

Of course we want to expand the solution (79) in a Fourier series

$$V(\sigma, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\theta. \quad (80)$$

A system of equations for the Fourier coefficients $b_m(\epsilon, \sigma)$ can be found from (79) and (80). If we put

$$e^{-\epsilon \sigma} = q \quad (81)$$

and use that $I_{-n} = I_n$ we obtain by putting $V(\sigma, \theta)$ in (79) and (80) equal:

$$\begin{aligned} & 2\epsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n\left(\frac{1}{2\epsilon}\right) n i q^{n^2} e^{ni\theta} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n I_n\left(\frac{1}{2\epsilon}\right) q^{n^2} e^{ni\theta} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{2i} (e^{mi\theta} - e^{-mi\theta}). \end{aligned} \quad (82)$$

The double sum in (82) is changed by putting $n+m=k$ and $n-n=k$ respectively. We obtain

$$\begin{aligned} 2\epsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k I_k \left(\frac{1}{2\epsilon}\right) k i q^{k^2} e^{ki\theta} = \\ = \left(-\frac{i}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\theta} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{k-m} I_{k-m} \left(\frac{1}{2\epsilon}\right) q^{(k-m)^2} b_m - \\ - \left(-\frac{i}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ki\theta} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{k+m} I_{k+m} \left(\frac{1}{2\epsilon}\right) q^{(k+m)^2} b_m. \end{aligned} \quad (83)$$

Identifying the coefficients of equal powers of $e^{i\theta}$ on both sides of (83) we obtain an infinite linear system of equations for the Fourier coefficients of (80):

$$4\epsilon I_k \left(\frac{1}{2\epsilon}\right) k = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b_m q^{m^2} [I_{k+m} \left(\frac{1}{2\epsilon}\right) q^{2km} - I_{k-m} \left(\frac{1}{2\epsilon}\right) q^{-2km}], \quad (84)$$

where $k = 1, 2, 3 \dots \infty$. This equation was given 1963 by D. Blackstock [4]. The solution of the linear system of equations (84) can be represented as a series expansion

$$b_m = 4\epsilon \sum_{k=1}^{\infty} d_{mk} q^k. \quad (85)$$

Inserting (85) into (84) we obtain

$$\begin{aligned} I_k \left(\frac{1}{2\epsilon}\right) k = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} q^{m^2} [I_{k-m} q^{-2km} (d_{m1} q + d_{m2} q^2 + \dots + \\ + d_{m,4km} q^{4km}) + q^{2km} ((I_{k-m} d_{m,4km+1} - I_{k+m} d_{m1}) q + \\ + (I_{k-m} d_{m,4km+2} - I_{k+m} d_{m2}) q^2 + \dots)]. \end{aligned} \quad (86)$$

Requiring that the equation (86) be identically satisfied, we put the coefficients for each power of q equal on both sides and find a system of equations for the coefficients d_{mr} . We find that

$$d_{mr} = 0, m > r \quad (87)$$

and

$$d_{mr} = 0, m+r = 2n+1, n = 0, 1, 2 \dots \quad (88)$$

The recursion formula for the coefficients d_{mr} obtained from (86) is (use that $I_{-n}(z) = I_n(z)$)

$$\begin{aligned} I_0 d_{rs} = I_1 (d_{r-1,s-1} + d_{r+1,s-1}) - I_2 (d_{r-2,s-4} + d_{r+2,s-4}) + \dots + \\ + (-1)^{n+1} I_n (d_{r-n,s-n^2} + d_{r+n,s-n^2}) + \dots \end{aligned} \quad (89)$$

The righthand side of (89) terminates with $(-1)^{r+1} r I_r$, if $s = r^2$. Otherwise it is broken for $n^2 > s$. In order to be able to write (89) in a uniform notation we also define

$$d_{-r,s} = -d_{rs}, s \neq 0, \quad (90)$$

$$d_{00} = 1. \quad (91)$$

From (90) automatically follows that

$$d_{0s} = 0, s \neq 0. \quad (92)$$

Some of the first equations of the recursion formula (89) are

$$d_{00} = 1, \quad (93)$$

$$d_{11} = \frac{I_1}{I_0} d_{00}, \quad (94)$$

$$\begin{aligned} d_{22} &= \frac{I_1}{I_0} d_{11}, \\ d_{13} &= \frac{I_1}{I_0} d_{22}, \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} d_{33} &= \frac{I_1}{I_0} d_{22}, \\ d_{24} &= \frac{I_1}{I_0} (d_{13} + d_{33}) - 2 \frac{I_2}{I_0}, \\ d_{15} &= \frac{I_1}{I_0} d_{24} + \frac{I_2}{I_0} d_{11}. \end{aligned} \quad (96)$$

In the last term of the last equation of the equations (96) the rule (90) is used. We also see that before calculating d_{rs} , we can use (89) for calculating $d_{r+1,s-1}, d_{r+2,s-2} \dots d_{\frac{r+s}{2}, \frac{r+s}{2}}$ and d_{mn} with $m+n < r+s$. Thus the equations (89) can be solved one by one, although a general expression of d_{rs} is rather complicated to write down. It can be shown that for $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} d_{rs} &\rightarrow 1, s = (2n+1)r, n = 0, 1, 2 \dots \\ d_{rs} &\rightarrow 0, s \neq (2n+1)r, n = 0, 1, 2 \dots \end{aligned} \quad (97)$$

Using (97) in (85) we obtain

$$\begin{aligned} b_m &= 4\epsilon \sum_{k=0}^{\infty} d_{m,(2k+1)m} q^{(2k+1)m} = 4\epsilon(q^m + q^{3m} + q^{5m} + \dots) = \\ &= 4\epsilon \frac{q_m}{1 - q^{2m}} = \frac{2\epsilon}{\sinh m\epsilon\sigma}, \end{aligned} \quad (98)$$

which, inserted into (80), gives the wellknown Fay [5] solution of Burgers' equation. It is important, in Fay's solution, that ϵ does not approach zero unlimitedly but has a small finite value. The validity of Fay's solution then depends on the accuracy of the first term in the asymptotic expansion

$$I_n(\frac{1}{2\epsilon}) = \sqrt{(\frac{\epsilon}{\pi})} e^{\frac{1}{2\epsilon}} (1 - \epsilon(n^2 - \frac{1}{4}) + O(\epsilon^2)) \quad (99)$$

when used in the recursion formula (89). The exact expressions for d_{rs} are polynomials in $\frac{I_k}{I_0}$. One example is

$$d_{1,11} = 42 \frac{I_1^{11}}{I_0^{11}} - 56 \frac{I_2 I_1^7}{I_0^8} + 14 \frac{I_2^2 I_1^3}{I_0^5} + \frac{I_3 I_1^2}{I_0^3}. \quad (100)$$

Of course $d_{1,11}$ is badly approximated using only the first term of (99) in the modified Bessel functions in (100) if $\epsilon \geq \frac{1}{10}$. For the validity of Fay's solution it is then important that b_1 in (85) is well approximated by the terms preceding $d_{1,11} \exp(-11\epsilon\sigma)$ in the series (85). Since it is obvious that d_{rs} is badly approximated using only the first term in (99) when $\epsilon \geq \frac{1}{\epsilon}$, then the validity of Fay's solution is seen to depend only on σ independently of ϵ . If we desire the error in Fay's solution to be on the one percent level we must require $\sigma \geq 4$.

We now turn to another approximation of the Fourier coefficients b_m in which it is essential that $\epsilon \rightarrow 0$. To that end we write (84) using Bessel functions and multiply with u^k :

$$4\epsilon J_k(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\epsilon})ku^k = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b_m e^{-m^2\epsilon\sigma} [e^{-im\frac{\pi}{2}} J_{k+m}(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\epsilon}) e^{-2km\epsilon\sigma} u^k - e^{im\frac{\pi}{2}} J_{k-m}(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\epsilon}) e^{2km\epsilon\sigma} u^k] \quad (101)$$

We now need the formulas [6]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k J_{k\pm n}(z) = t^{\pm n} \exp((t - \frac{1}{t})\frac{z}{2}), \quad (102)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} kt^k J_k(z) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})z \exp((t - \frac{1}{t})\frac{z}{2}). \quad (103)$$

Using (102) and (103) in (101) and letting $\epsilon \rightarrow 0$ we obtain after summation over k :

$$\frac{1}{2}(u + \frac{1}{u}) = \frac{1}{2i} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b_m [u^{-m} \exp(-\frac{im\sigma}{2}(u + \frac{1}{u})) e^{-im\frac{\pi}{2}} - u^m \exp(\frac{im\sigma}{2}(u + \frac{1}{u})) e^{im\frac{\pi}{2}}]. \quad (104)$$

In deriving (104) we have used that for $m\epsilon\sigma \ll 1$:

$$(e^{-2m\epsilon\sigma} u - e^{2m\epsilon\sigma} u^{-1}) \frac{1}{4\epsilon} \approx (u - u^{-1}) \frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2} m\sigma(u + u^{-1}). \quad (105)$$

In (104) we choose

$$u = e^{i\phi} \quad (106)$$

and obtain

$$\cos \phi = \frac{1}{2i} \sum_{m=1}^{\infty} b_m [e^{-im(\frac{\pi}{2}+\phi)} \exp(-im\sigma \cos \phi) - e^{im(\frac{\pi}{2}+\phi)} \exp(im\sigma \cos \phi)] \quad (107)$$

or

$$\cos \phi = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\frac{\pi}{2} - m\sigma \cos \phi - m\phi). \quad (108)$$

If we put $\phi = \frac{\pi}{2} - \psi$ we obtain from (108)

$$\sin \psi = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\psi - m\sigma \sin \psi). \quad (109)$$

From (109) we find the approximate Fourier coefficient as an integral

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin(n\psi - n\sigma \sin \psi)(1 - \sigma \cos \psi) d\psi. \quad (110)$$

Partial integration of (110) gives

$$b_n = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \cos \psi \cos(n\psi - n\sigma \sin \psi) d\psi \quad (111)$$

or

$$b_n = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} [\cos((n-1)\psi - n\sigma \sin \psi) + \cos((n+1)\psi - n\sigma \sin \psi)] d\psi. \quad (112)$$

Using the wellknown relations for Bessel functions

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\nu\psi - n\sigma \sin \psi) d\psi = J_{\nu}(n\sigma) \quad (113)$$

$$\frac{1}{2}(J_{n-1}(n\sigma) + J_{n+1}(n\sigma)) = \frac{1}{\sigma} J_n(n\sigma) \quad (114)$$

we finally obtain

$$b_n = \frac{2J_n(n\sigma)}{n\sigma}, \quad (115)$$

which inserted into (80) gives the wellknown Bessel-Fubini [7] formula (1935). It is important to remember that the evaluation of b_m in (109) as the integral (110) requires that the argument $n\psi - n\sigma \sin \psi$ of the sine function grows monotonically with ψ . This is the case only for

$$\sigma < 1 \quad (116)$$

which is the region of validity for the Bessel-Fubini solution, which completely neglects the dissipative effects.

For the region

$$1 < \sigma \leq 4 \quad (117)$$

some refinements [8] of the Bessel-Fubini or the Fay solution can be used. However, the only solution representation valid for all $\sigma > 0$ and giving the Fay and Fubini solutions as limits is the exact solution with the Fourier coefficients b_m in (83) given by the formulas (85), (81) and (89). The limit transition to the Bessel-Fubini solution seems so difficult to do from the expressions of the b -coefficients in terms of the d -coefficients, so that we have made this transition in the linear system of equations for the b -coefficients.

3. SPHERICAL GEOMETRY: PERIODIC WAVES

From Kuznetsov's equation (53), in the same way as Burgers' equation (58) was derived, we derive a generalized Burgers' equation for spherical waves:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{\beta}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{b}{2c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}. \quad (118)$$

Here r is the radial distance from the sound centre and τ is defined as

$$\tau = t - \frac{r - r_0}{c_0}, \quad (119)$$

where r_0 is the source radius. At the source surface, where $r = r_0$, it is assumed that the wave has a pure sine form

$$v(r_0, \tau) = v_0 \sin \theta, \theta = \omega \tau. \quad (120)$$

With the substitutions

$$V = \frac{r}{r_0} \frac{v}{v_0}, \quad (121)$$

$$z = \ln \frac{r}{r_0} \quad (122)$$

and the definitions (cf (64))

$$R_0 = \frac{\beta r_0 v_0 \omega}{c_0^2}, \quad (123)$$

$$\epsilon = (2\beta R_0)^{-1}, \quad (124)$$

we obtain the dimensionless equation

$$\frac{\partial V}{\partial z} - R_0 V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \epsilon R_0 e^z \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (125)$$

Thus the problem is determined by two dimensionless parameters, ϵ and R_0 . As in the case of plane waves we assume $\epsilon \ll 1$. The region in the (ϵ, R_0) -plane treated in the present paper is $\epsilon R_0 = \mathcal{O}(1)$. Some other regions in the (ϵ, R_0) -plane are treated by Scott [9] in 1981.

A tentative approximate solution of (125) developing from a pure sine wave can now be written by comparing (125) with (63) and knowing that an exact solution of (63) is given by [10]:

$$V = \frac{1}{1 + \sigma} (\pi \tanh \frac{\pi \theta}{2\epsilon(1 + \sigma)} - \theta), -\pi < \theta < \pi. \quad (126)$$

In analogy with (126) we attempt as solution of (125):

$$V = \frac{1}{1 + R_0 z} (\pi \tanh \frac{\pi e^{-z} \theta}{2\epsilon(1 + R_0 z)} - \theta), -\pi < \theta < \pi. \quad (127)$$

Investigating how the solution (127) satisfies (125) one finds the condition

$$\frac{1 + R_0 z}{\pi R_0} \ll 1. \quad (128)$$

Remembering that V in (80) with (98) is an approximate Fourier expansion of V in (126) we find easily the approximate Fourier expansion of the one-period waveform given in (127):

$$V = 2\epsilon e^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\sinh(n\epsilon(1+R_0 z)e^z)}. \quad (129)$$

Because the error in (80) with (98) is small for terms with $m\epsilon\sigma = O(1)$ or less than $O(1)$ we realize that the error in the expansion (129) in comparison with (127) is very small for the important terms, i.e. those terms for which the argument of the sinh function in (129) is $\ll 1$. Of course (128) is also necessary for (129) to be valid.

We now turn to the solution of (125) for z so great that the nonlinear term can be neglected in (125). The linear equation

$$\frac{\partial V}{\partial z} - ae^z \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad (130)$$

where

$$a = \epsilon R_0 = O(1), \quad (131)$$

has the periodic solution

$$V = \frac{\epsilon}{a} C \exp(-ae^z) \sin \theta, \quad (132)$$

where the constant C (called the old-age amplitude) has to be determined.

The expression (132) can be used as the first term in an exact series solution of (125):

$$V(z, \theta) = \frac{\epsilon}{a} C \exp(-ae^z) (f_1(\theta) + f_2(z, \theta) \exp(-ae^z) + f_3(z, \theta) \exp(-2ae^z) + \dots). \quad (133)$$

Inserting (133) into (128) and putting the coefficient for each power of $\exp(-ae^z)$ equal to zero we see that we obtain a solution of (125) if we can solve the infinitely many linear equations for the functions $f_n(z, \theta)$. These equations are

$$\begin{aligned} ae^z \frac{\partial^2 f_n}{\partial \theta^2} - \frac{\partial f_n}{\partial z} + nae^z f_n(z, \theta) &= \\ = -C(f_1 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \theta} + f_2 \frac{\partial f_{n-2}}{\partial \theta} + \dots + f_{n-1} \frac{\partial f_1}{\partial \theta}), \end{aligned} \quad (134)$$

where

$$f_1 = \sin \theta. \quad (135)$$

We are interested in solutions $f_n(z, \theta)$ which are limited for all z independently of n , so that the series (133) is uniformly convergent for $z = 0$. The amplitude constant C now can be determined by requiring the exact series solution (133) to be identical with the series (129), valid for z values fulfilling (128), in the lowest order in the region where z fulfills (128). To that end we make the following scaling of the z variable:

$$z = \epsilon \zeta \quad (136)$$

and use (131) and (136) in (129):

$$V = (4\epsilon + O(\epsilon^2)) \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp(-(2\nu+1)n(1+a\zeta)\epsilon + O(\epsilon^2)). \quad (137)$$

In order to compare (137) with (133), evaluated for $z = O(\epsilon)$, it is sufficient to evaluate f_ν in (134) to $O(1)$. Neglecting $O(\epsilon)$ in f_ν we can write (134)

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial \theta^2} + n f_n = -\frac{C}{a} (f_1 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \theta} + f_2 \frac{\partial f_{n-2}}{\partial \theta} + \dots + f_{n-1} \frac{\partial f_1}{\partial \theta}). \quad (138)$$

It can be shown that the solution of (138) with (135) is

$$f_n = \left(\frac{C}{4a}\right)^{n-1} \sum_{\nu=1}^n b_{\nu n} \sin \nu \theta, \quad (139)$$

where

$$\begin{aligned} b_{\nu n} &= 1, n = (2k+1)\nu, k = 0, 1, 2, \dots \\ b_{\nu n} &= 0, n \neq (2k+1)\nu, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (140)$$

The series (133) thus becomes, using (136) and (137)

$$\begin{aligned} V(z, \theta) &= \frac{\epsilon}{a} C [e^{-a} e^{-\epsilon \zeta} \sin \theta + \frac{C}{4a} \sin 2\theta e^{-2a} e^{-2\epsilon \zeta} + \\ &\quad + (\frac{C}{4a})^2 (\sin 3\theta + \sin \theta) e^{-3a} e^{-3\epsilon \zeta} + \dots]. \end{aligned} \quad (141)$$

The series (141) and (137) are identical, in the lowest order in ϵ , if

$$C = 4ae^a + O(\epsilon). \quad (142)$$

Returning to the physical variables, we can write the asymptotic monochromatic solution v_∞ of (118) with the boundary condition (120) using (131)

$$v_\infty = \frac{c_0^2}{\beta r \omega} 4ae^a \exp(-a \frac{r}{r_0}) \sin \theta. \quad (143)$$

The phenomenon of saturation is obvious from (143); because of the independence of the amplitude on v_0 , the asymptotic wave does not increase unlimitedly with increasing v_0 .

Another approximate calculation of the amplitude constant of the asymptotic wave is done for spherical waves by Shooter, Muir and Blackstock [10] 1974. They study the rates of attenuation of the fundamental component in the Fourier expansion of the wave due to shockwave dissipation and due to ordinary small-signal absorption. At a certain range $r = r_{max}$, where r is the distance from the source, these two rates are equal. By making the approximate assumption that a switchover from the first to the second damping mechanism takes place at $r = r_{max}$, they can calculate the asymptotic monochromatic wave. They obtain

$$v_\infty^{SMB} = \frac{c_0^2}{2\beta r \omega} D(a) \exp(-a \frac{r}{r_0}) \sin \theta, \quad (144)$$

where $D(a)$ is given [11] as

$$D(a) = 4\Gamma(a) \exp \Gamma(a), \quad \Gamma(a) \ln\left(\frac{\Gamma(a)}{a}\right) = 1. \quad (145)$$

From (145) we find

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{v_{\infty}^{SMB}}{v_{\infty}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{D(a)}{8ae^a} = \frac{e}{2} \quad (146)$$

and

$$\frac{v_{\infty}^{SMB}}{v_{\infty}} > \frac{e}{2}, \quad a < \infty. \quad (147)$$

The limit $a \rightarrow \infty$ corresponds to the transition from spherical to plane waves, for which the ratio $\frac{e}{2}$ between their approximate asymptotic solution and their exact asymptotic solution was found by Shooter, Muir and Blackstock [11] in 1974. Thus the approximation suggested by those authors is not so good for spherical as for plane waves.

4. CYLINDRICAL GEOMETRY: PERIODICAL WAVES AND N-WAVES

For cylindrical waves the same problem (i.e. with $\epsilon R_0 = O(1)$) as that treated for spherical waves in the preceding section can be solved in the same way. A more complicated case with cylindrical geometry and periodic waves is $\epsilon R_0 \ll 1$. This case is treated by the present author [13] who obtained an old-age amplitude slightly different from the old-age amplitude obtained numerically by other authors [14].

A problem which has until now had no satisfactory analytical solution is the problem of finding the old-age amplitude of the short pulse developing from a cylindrical N-wave. The corresponding spherical problem was solved by Crighton and Scott [12] in 1979. In their paper they called the problem of determining the old-age constant of a cylindrical N-wave "an important unsolved canonical problem of nonlinear acoustics".

The first attempt of solving the cylindrical N-wave problem was made by the present author in 1981 [15]. The confluent hypergeometric series old-age wave function suggested in this paper did not, however, fit to later numerical calculations [14], [16] which were consistent with an exponential fading of the old-age wave profile. It also became obvious that a better procedure was needed for the matching of the wave function in the outer (i.e. old-age) region to the wave function in the inner (i.e. shock-wave) region, since a closer examination of the matching procedure used in ref. [15] shows that there is no overlap between the outer and the inner region. A new attempt to solve the cylindrical N-wave problem was accounted for by the present author in a report to the XII:th ISNA 1990 [17]. It was shown that the fading wave in the shock region can be written as an integral, which, in the old-age region, is a superposition of confluent hypergeometric functions. This result was, however, not quite satisfying since it did not fulfil the requirement of an antisymmetric wave profile, like the N-wave profile, with an exponential fading in the old-age region, which is suggested by numerical calculations [14] [16].

The next progress on the cylindrical N-wave problem was the observation that both the antisymmetric wave profile and the exponential fading of the old-age wave function can be achieved by choosing the integration path properly in the integral representation of the fading wave in shock region. The integration was made in the same manner on all three Riemann sheets of the integrand. In this attempt, which was reported at the Euromech Conference 265 (1990) [18], the old-age amplitude C was given as

$$C = \frac{1}{\sqrt{(6e)}} \frac{27}{16} \approx 0,418, \quad (148)$$

which differs by about 20 percent from the values 0,35 and 0,36 obtained numerically by Hammerton and Crighton [14] and Sachdev, Tikekar and Nair [16] respectively.

However, recently the present author has studied a better approximation in the evaluation of the fading wave integral in the shock region by the steepest descent method and found that it gives the old-age amplitude 0,35 in agreement with refs. [14] and [16]. Some details of this calculation are given below.

A dimensionless generalized Burgers' equation for cylindrical waves corresponding to (63) and (125) is [12]

$$\frac{\partial V}{\partial T} + V \frac{\partial V}{\partial z} = \epsilon \frac{T}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \epsilon \ll 1, \quad (149)$$

where we have chosen the same notation of the independent variables as Crighton and Scott [12]. The N-wave boundary conditions are

$$V(z, 1) = z, |z| < 1, \quad (150)$$

$$V(z, 1) = 0, |z| > 1. \quad (151)$$

As is shown by Crighton and Scott [12] the boundary conditions (150), (151) give the following discontinuous N-wave "outer" solution of (149):

$$V_0 = \frac{z}{T}, |z| < T^{\frac{1}{2}}, \quad (152)$$

$$V_0 = 0, |z| > T^{\frac{1}{2}}. \quad (153)$$

An "inner" solution, valid in the neighborhood of $z = T^{\frac{1}{2}}$ can be matched to the solution (152), (153). To the order ϵ this solution has been calculated by Crighton and Scott [12]. The result is

$$V = V_0^* + \epsilon V_1^*, \quad (154)$$

where

$$V_0^* = \frac{1}{2} T^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \tanh \frac{z^* + \frac{1}{2} T^{\frac{1}{2}} (T-1)}{2T^{\frac{1}{2}}} \right),$$

$$V_1^* = \frac{dA}{dT} - T^{-\frac{1}{2}} g(T) \left(\frac{z^2}{\cosh^2 z} - 2z + 2z \tanh z - 1 \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + G(T) \left(\frac{z}{\cosh^2 z} + \tanh z \right) + \frac{K(T)}{\cosh^2 z} + \\
 & + 4T^{\frac{1}{2}} \frac{dg}{dT} [z + \tanh z - \ln(\cosh z) \tanh z + \\
 & + \frac{1}{\cosh^2 z} (z \ln 2 + \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} d \ln(1 + e^{2z}))]
 \end{aligned} \quad (155)$$

and

$$x^* = \frac{x - T^{\frac{1}{2}}}{\epsilon} \quad (156)$$

$$z = \frac{x^* + \frac{1}{2} T^{\frac{1}{2}} (T - 1)}{2T^{\frac{1}{2}}}, \quad (157)$$

$$A(T) = -\frac{1}{2} T^{\frac{1}{2}} (T - 1), \quad (158)$$

$$g(T) = \frac{T}{2}, \quad (159)$$

$$G(T) = -4T^{\frac{1}{2}} \frac{dg}{dT} (1 + \ln 2) - \frac{1}{2} AT^{-1}, \quad (160)$$

$$K(T) = -T^{-\frac{1}{2}} \frac{A^2(T)}{16g(T)} + \frac{\pi^2}{6} T^{\frac{1}{2}} \frac{dg}{dT}. \quad (161)$$

The definition of the dilogarithm function is

$$d \ln x = - \int_1^x \frac{\ln t}{t-1} dt. \quad (162)$$

The second term on the righthand side of (161) is missing in ref. [12], formula (3.23).

The Taylor shock solution (154) with (155) is valid for $1 \leq T \ll \frac{1}{\epsilon}$. The shock fades out when z becomes greater than $T^{\frac{1}{2}}$. For great values of the variable z defined in (157) or, more precisely, for

$$\frac{z}{\epsilon T^{3/2}} - \frac{1}{\epsilon T} > \ln \frac{1}{\delta}, \quad \delta \ll 1 \quad (163)$$

the solution (154) with (155) becomes

$$\begin{aligned}
 V = & \exp(-\frac{1}{2} - Y) T^{-\frac{1}{2}} [1 + \epsilon(-\frac{3}{2} Y^2 T - 2YT + \frac{1}{2} + \\
 & + (-\frac{x^2}{3} + 2 \ln 2 - \frac{5}{4})T - \frac{1}{8} T^{-1})],
 \end{aligned} \quad (164)$$

where

$$Y = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{z}{T^{3/2}} - \frac{1}{T} \right). \quad (165)$$

If δ is chosen so that

$$\frac{\delta}{\ln \frac{1}{\delta}} \ll \epsilon \ll \frac{1}{(\ln \frac{1}{\delta})^2}, \quad (166)$$

then the nonlinear term in the generalized Burgers' equation (149) can be neglected and (164) is a solution to order ϵ of the corresponding linear equation.

For studying the solution of the generalized Burgers' equation (149) in the region where the solutions (152), (153) and (154) with (155) are not valid, i.e. for $T > \frac{1}{\epsilon}$, the following scaling is made:

$$\begin{aligned} T' &= \epsilon T, \\ x' &= \epsilon^{\frac{1}{2}} x, \\ V &= \epsilon^{\frac{1}{2}} V'_0. \end{aligned} \quad (167)$$

Inserting (167) into (149) we obtain

$$\frac{\partial V'_0}{\partial T'} + V'_0 \frac{\partial V'_0}{\partial x'} = \frac{T'}{2} \frac{\partial^2 V'_0}{\partial x'^2}. \quad (168)$$

For T' sufficiently great, the so called old-age region, the nonlinear term in (168) can be neglected:

$$\frac{\partial V'_0}{\partial T'} = \frac{T'}{2} \frac{\partial^2 V'_0}{\partial x'^2}. \quad (169)$$

The solution (164), however, is a solution of the linear equation (169) rescaled so that T and x are $O(1)$. Considered as a solution of the nonlinear equation (149), the expression (164) is a valid approximation in the fading shock region given by (163). Thus a correct old-age solution of (168) must be continued, through an (x, T) region where the nonlinear term can still be neglected, into the fading shock region. It is easy to see that the general real solution of (169) can be written

$$\frac{V}{\epsilon^{1/2}} = V'_0 = I + I^*, \quad (170)$$

where

$$I + \int_0^\infty \exp(-\lambda^2 T'^2 + 2ix'\lambda) h(\lambda) d\lambda. \quad (171)$$

From the expression (170) with (171) it must be possible, choosing suitable variables, to derive the expression (164). This is done by the steepest descent method after changing the variables in (171) from (x', T') into (Y, T) . To the first order in ϵ the steepest descent method gives [19]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp\left(\frac{\chi(\kappa)}{\epsilon}\right) F(\kappa) d\kappa &= \exp\left(\frac{\chi(\kappa_0)}{\epsilon}\right) \left(-\frac{2}{\chi''(\kappa_0)}\right)^{\frac{1}{2}} F(\kappa_0) \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &\cdot \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\chi'''}{(\chi'')^2} \frac{F'}{F} + \frac{1}{4} \frac{\chi^{IV}}{(\chi'')^2} - \frac{5}{12} \frac{(\chi''')^2}{(\chi'')^3} - \frac{F''}{F \chi''}\right)\right], \end{aligned} \quad (172)$$

where the argument of the functions in the last parenthesis is the saddle-point κ_0 . It can be shown that the expression (164) is obtained from (170) with (171) using (172) if

$$h(\lambda) = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{(6\epsilon)}} \exp(\gamma \lambda^{\frac{2}{3}}) \lambda^{-\frac{1}{3}} [1 + A \lambda^{-\frac{2}{3}} + \epsilon (\frac{2}{3} \gamma \lambda^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}) - \frac{\epsilon^2}{9} \gamma \lambda^{\frac{2}{3}}], \quad (173)$$

where

$$\gamma = \frac{3}{2} 2^{-\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad (174)$$

$$A = e^{i\frac{\pi}{3}} 2^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{11}{18} + 2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \approx -1,2924 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}. \quad (175)$$

The linear wave equation solution (170), (171) with (173) can be expanded in a series of inverse powers of T' , the first term of which is the old-age solution valid for $T' \gg 1$. For this series expansion we need the integral representation of Hermite functions [20]

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu e^{z^2}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \exp(-u^2 + 2izu - i\frac{\nu\pi}{2}) u^\nu du + c.c., \quad (176)$$

where *c.c.* means complex conjugated. Using (176) in (171) we obtain a series expansion in the powers $T'^{-\frac{2}{3}}, T'^{-\frac{4}{3}}, T'^{-\frac{2}{3}} \dots$ with the Hermite functions $H_{-\frac{1}{3}}(\frac{z'}{T'})$, $H_{\frac{1}{3}}(\frac{z'}{T'})$, $H_1(\frac{z'}{T'}) \dots$ as coefficients.

However, that series expansion does not satisfy the requirement that the old-age solution be antisymmetric in z' like the N-wave (150), (151) and (152), (153). In order to achieve this antisymmetry we consider again the path of integration in (171); only the passage of the saddle-point is needed to give the fading shock solution (164). We notice that because of (173) the endpoint $\lambda = 0$ is a branchpoint of the integrand with three Riemann sheets. The Riemann sheets are characterized by the choices

$$\lambda^{\frac{2}{3}} = |\lambda|^{\frac{2}{3}}, \quad (177)$$

$$\lambda^{\frac{2}{3}} = |\lambda|^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad (178)$$

$$\lambda^{\frac{2}{3}} = |\lambda|^{\frac{2}{3}} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad (179)$$

respectively. If the integral in (171) is taken as the sum of the integrals from 0 to ∞ of the integrand on all three Riemann sheets, which can be done without changing the result in the fading shock region, then the result can be expressed as a power series in $(T')^{-1}$ with odd integer order Hermite functions, i.e. Hermite polynomials antisymmetric in their arguments, as coefficients. The first term is

$$V = \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(6e)}} \frac{27}{32} \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \ln 2 - \frac{11}{36} \right) \right) \frac{1}{T'^2} \exp\left(-\frac{z'^2}{T'^2}\right) H_1\left(\frac{z'}{T'}\right) + \dots + \\ + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{3}{2}}). \quad (180)$$

Because

$$H_1(z) = 2z \quad (181)$$

the result (180) can be written

$$V = \epsilon^{\frac{1}{2}} C \frac{z'}{T'^3} \exp\left(-\frac{z'^2}{T'^2}\right), \quad (182)$$

where the coefficient C is (cf. (148))

$$C = \frac{1}{\sqrt{(6e)}} \frac{27}{16} \left[1 + 2\epsilon - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{8}{3}\epsilon \right) \left(\frac{\pi^2}{6} - \ln 2 - \frac{11}{36} \right) \right] \approx 0,2828 + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (183)$$

By requiring the old-age solution to be antisymmetric in x' we have also automatically obtained an exponential fading in x' of the solution. This behaviour might be expected because of the exponential fading in x of the solution in the shock region (cf. (155)). The true value of C is expected to lie between the values (148) and (183). This is in agreement with numerical results [14][16], which determine C to be 0,34 or 0,35. The present analysis also shows how C depends on ϵ . For $\epsilon = \frac{1}{10}$ we expect a raising of C with about 20 percent. This prediction is confirmed by the numerical calculation of C by Hammerton and Crighton [14]. For $\epsilon = \frac{1}{10}$ they find $C = 0,43$, which is about 23 percent higher than their result $C = 0,35$ for $\epsilon = 0,001$.

REFERENCES

1. Kuznetsov V.P. // Sov. Phys.-Acoust. 1971. N 16. P.467.
2. Cole J.D. // Quart. Appl. Math. 1951. V.9. P.225.
3. Hopf E. // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V.3. P.201.
4. Blackstock D.T. // J. Acoust. Soc. Am. 1963. V.36. P.534.
5. Fay R.D. // J. Acoust. Soc. Am. 1931. V.3. P.222.
6. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A. and Marichev O.I. Integrals and Series, Volume 2: Special Functions. Translated from the Russian, Gordon and Breach, 1986.
7. Fubini-Ghiron E. // Alta Freq. 1935. V.4. P.530.
8. Ref. 4, equations (22) and (24).
9. Scott J.F. // Proc. Roy. Soc. 1981. V.A375. P.211.
10. Rudenko O.V. and Soluyan S.I. Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. / English translation by R.T.Beyer. – New York, Consultants Bureau (Plenum), 1977.
11. Shooter J.A., Muir T.G. and Blackstock D.T. // J. Acoust. Soc. Am. 1974. V.55. P.54.
12. Crighton D.G. and Scott J.F. // Philos. Trans. R. Soc. (London). 1979. V.A292. P.101.
13. Enflo B.O. // J. Acoust. Soc. Am. 1985. V.77. P.54.
14. Hammerton P.W. and Crighton D.G. // Proc. Roy. Soc. Lond. 1989. V.A422. P.387.
15. Enflo B.O. // J. Acoust. Soc. Am. 1981. V.70. P.1421.
16. Sachdev P.L., Tikékar V.G. and Nair K.R.C. // J. Fluid Mech. 1986. V.172. P.625.
17. Enflo B.O. // Proceedings of the 12th International Symposium on Nonlinear Acoustics, Austin, Texas, USA 1990, ed. by M.F. Hamilton and D.T.Blackstock, 1990. P.131.
18. Enflo B.O. // Euromech Colloquium (265) Report, Cambridge, England, 1990. P. 9.1.
19. Brekhovskikh L.M. Waves in Layered Media. – Academic Press, 1980, formula (27.16).
20. Lebedev N.N. Special Functions and Their Applications. – Prentice-Hall, 1965, formula (10.5.5.).

СИЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПОТОКАХ ЧАСТИЦ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

С.Н.Гурбатов, А.И.Саичев

Содержание

1. Введение
2. Общее и асимптотическое решения уравнения Бюргерса
3. Одномерная акустическая турбулентность
4. Римановы волны, геометрическая оптика и флуктуации плотности газа невзаимодействующих частиц
5. Потенциальная турбулентность и формирование структур в гравитационно неустойчивой среде

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Теория нелинейных случайных волн включает в себя широчайший класс физических явлений, таких как турбулентность самой разной физической природы (гидродинамическая, плазменная), распространение электромагнитных, акустических шумовых волн большой интенсивности. В настоящей статье мы ограничимся описанием методов анализа и исследованием физических эффектов, присущих нелинейным случайным волнам гидродинамического типа, когда в линейном случае дисперсия среды отсутствует или мала. Характерной чертой таких волн является лавинообразный рост числа взаимодействующих гармоник, что приводит к сильному уширению спектра волны и возникновению как мелкомасштабных, так и крупномасштабных структур в волне.

В одномерном случае эталонными уравнениями, описывающими распространение нелинейных волн в средах без дисперсии, являются уравнение Римана [1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

и уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) описывает нелинейные искажения профиля волны, обусловленные зависимостью скорости распространения волны от ее величины, а в уравнении (1.2) правая часть учитывает диссиацию мелкомасштабных компонент волны.

2. В динамических задачах проблема описания эволюции волны считается решенной после того, как найдено поле $v(x, t)$ в произвольный момент времени t по известному начальному профилю

$$v_0(x, t=0) = v_0(x). \quad (1.3)$$

Однако в статистических задачах, когда поле $v_0(x)$ случайно, анализ поведения одной реализации далеко не исчерпывает проблему. Более того, это только первый шаг, так как в статистических задачах оперируют с такими устойчивыми характеристиками, как средняя дисперсия, корреляционные функции и спектры, вероятностное распределение. Последние же находятся усреднением по ансамблю реализаций и математическая задача статистического описания случайного поля заключается в нахождении статистических характеристик поля $v(x, t)$ по известной статистике начального поля $v_0(x)$. Даже в том случае, если известно точное решение исходных уравнений (например, явное решение в виде простой волны уравнения (1.1), или решение Хопфа-Коула уравнения Бюргерса (1.2)), задача статистического описания остается весьма нетривиальной.

3. Применительно к уравнениям гидродинамического типа возможно два альтернативных подхода. Если мы следим за эволюцией профиля волны в фиксированной точке и в фиксированный момент времени – это так называемое эйлерово описание. Если же мы интересуемся поведением отдельных точек профиля (отдельных частиц), это будет лагранжево описание [2]. Уравнению в частных производных (1.1) соответствует система характеристических уравнений

$$\frac{dV}{dt} = 0, \quad \frac{dX}{dt} = V, \quad (1.4)$$

$$X(t=0, y) = y, \quad V(t=0) = v_0(y). \quad (1.5)$$

Таким образом, решение уравнения Римана допускает наглядную физическую интерпретацию: оно описывает поле скорости потока невзаимодействующих частиц, при этом лагранжева координата y есть начальная координата частицы. При лагранжевом описании движение отдельной частицы тривиально – она движется с постоянной скоростью и, конечно, при этом нет никаких нелинейных эффектов. Однако, как отмечается в работе [3], "рассмотрение сплошной среды, т.е. не одной, а целого ансамбля частиц, приводит к интересным и нетривиальным результатам даже в этом простом случае". Действительно, при наблюдении за профилем скорости потока частиц, можно увидеть такие типично нелинейные явления как укручение профиля волны и изменение спектрального состава.

4. В связи с этим подчеркнем, что проявление нелинейных эффектов возможно и в сугубо линейных системах. Так, если обратиться к задаче о дифракции оптической волны за фазовым экраном, то в малоугловом приближении поле $E(x, z)$ описывается параболическим уравнением квазиоптики

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \quad E(x, z=0) = E_0(x). \quad (1.6)$$

Здесь z – продольная координата, x – поперечная координата, k_0 – волновое число. Переходя от (1.6) к комплексной фазе

$$E = \exp(-ik_0 S), \quad (1.7)$$

мы получаем нелинейное уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}. \quad (1.8)$$

В приближении геометрической оптики ($k_0 \rightarrow \infty$) из уравнения для комплексной фазы $S = S_r + iS_i$ мы получаем уравнение для углов наклона волнового фронта $v = \partial S_r / \partial x$ и интенсивности волны $I = \exp(2k_0 S_i)$:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} I v = 0. \quad (1.9)$$

Таким образом, эволюция углов прихода волнового фронта в двумерной однородной среде сводится к уравнению Римана, а уравнение для интенсивности совпадает с уравнением непрерывности для плотности $\rho(x, t)$ потоков невзаимодействующих частиц. Следовательно, при регистрации углов прихода и интенсивности волны можно наблюдать такие типично нелинейные эффекты как укручение профиля углов наклона и возникновение локальных областей повышенной интенсивности. В трехмерном случае области повышенной интенсивности – каустики – существенно анизотропны и образуют связную ячеисто-сетчатую структуру. Такие же структуры возникают и при развитии гравитационной неустойчивости холодного газа. Такой газ является типичным примером нелинейной среды без дисперсии. На начальном этапе все масштабы увеличиваются из-за гравитационной неустойчивости одинаково, так как в среде нет давления. Образование же резко анизотропных структур обусловлено кинематической нелинейностью – т.е. движением частиц по инерции. Приближенное описание процессов формирования ячеисто-сетчатой структуры распределения вещества во Вселенной на нелинейной стадии развития гравитационной неустойчивости может быть проведено в рамках трехмерного уравнения Бюргерса [4].

Уравнения Римана и Бюргерса описывают широкий класс физических систем, где нелинейность достаточно слаба и нет взаимодействия встречных волн, а дисперсия пренебрежимо мала по сравнению с затуханием. Это электромагнитные волны в нелинейных линиях передач, нелинейные волны в термоупругих средах, турбулентные волны ионизации в столбе светящегося газа и т.д. [4].

Пожалуй, практически наиболее важным примером нелинейных волн в средах без дисперсии являются акустические волны большой интенсивности. Здесь уравнение Бюргерса следует из уравнений гидродинамики вязкой теплопроводящей жидкости в предположении медленности изменения профиля волны из-за нелинейности и диссипации (см. [5, 6], а также статью B. Enflo в настоящем номере). К уравнениям подобного типа сводится распространение цилиндрических и сферических акустических волн, распространение интенсивных акустических пучков в плавнонеоднородных средах.

5. Хотя в физике уравнение (1.2) появилось, по-видимому, в 1915 году в работе Бейтмана [7], сейчас оно заслуженно носит имя Бюргерса, который предложил его в качестве модели гидродинамической турбулентности

и провел достаточно подробное исследование его статистических свойств [8, 9]. Уравнение Бюргерса описывает два эффекта, присущих гидродинамической турбулентности – нелинейную перекачку энергии по спектру и вязкость в области мелких масштабов. Решение уравнения (1.2) со случайными начальными условиями принято называть турбулентностью Бюргерса, или, поскольку в нелинейной акустике оно описывает эволюцию интенсивного акустического шума, его называют также акустической турбулентностью.

Обычно принято говорить о сильной и слабой турбулентности. Слабая турбулентность реализуется в средах с сильной дисперсией (плаазменная турбулентность, поверхностное волнение), когда линейные моды слабо связаны. В такой турбулентности справедливо предположение о хаотизации фаз отдельных гармоник и энергия в ней передается эстафетно по спектру между некогерентными гармониками. При описании такой турбулентности очень плодотворным оказался метод кинетических уравнений.

При сильном взаимодействии гармоник последние становятся взаимосвязанными и в результате в среде формируются достаточно устойчивые когерентные образования, между которыми и происходит взаимодействие. В гидродинамической турбулентности, например, это случайное движение жидкости можно представить как взаимодействие хаотической системы вихрей. С этой точки зрения турбулентность Бюргерса является примером сильной турбулентности. За счет когерентного взаимодействия гармоник здесь формируются ударные пилообразные волны, которые можно рассматривать как газ частиц с локальным взаимодействием, а именно, в результате столкновения ударных фронтов происходит их слияние, эквивалентное неупругому столкновению частиц.

При описании случайных полей, удовлетворяющих уравнению Бюргерса или Римана, мы сталкиваемся с классической проблемой теории турбулентности – проблемой замыкания моментов: в уравнение для корреляционной функции поля $v(x, t)$ входит третий момент, в уравнение для третьего момента – четвертый и т.д. Существует обширная литература, посвященная различным приближенным методам описания турбулентности, и, в частности, проблема замыкания моментов (см., например, библиографию в [4, 10, 11]).

Ниже мы укажем альтернативные пути статистического описания волн гидродинамического типа и турбулентности Бюргерса в частности. Одним из таких способов является переход от лагранжева описания к эйлерову. Действительно, статистическое описание отдельной фиксированной частицы, описываемой уравнением (1.4), (1.5) тривиально. Однако для того чтобы найти среднее поле $\langle v(x, t) \rangle$ или энергетический спектр волн нужна эйлерова статистика. В геометрической оптике также измеряется статистика фазы и амплитуды волны в фиксированной точке, а не вдоль фиксированного луча. Поэтому установление связей лагранжева и эйлерова статистических описаний представляет общефизический интерес.

2. ОБЩЕЕ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

1. Уравнение Бюргерса (1.2) замечательно тем, что имеет точное решение. Представим поле $v(x, t)$ как градиент некоторой функции $S(x, t)$, которую мы назовем действием

$$v(x, t) = \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Действие удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \mu \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}. \quad (2.2)$$

Заменой переменных Хопфа–Коула [12, 13],

$$S(x, t) = -2\mu \ln \varphi(x, t), \quad (2.3)$$

нелинейное уравнение (2.2) сводится к линейному уравнению диффузии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

Начальное условие к (2.4) нелинейным образом связано с начальным полем $v_0(x)$:

$$\varphi(x, t=0) = \varphi_0(x) = \exp[-S_0(x)/2\mu], \quad S_0(x) = \int_x^\infty v_0(y) dy.$$

В свою очередь искомое поле $v(x, t)$ выражается через вспомогательное поле $\varphi(x, t)$ с помощью нелинейного соотношения

$$v(x, t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln \varphi(x, t) = -2\mu \frac{\varphi'_x}{\varphi}. \quad (2.5)$$

Таким образом, общее решение уравнения Бюргерса записывается в виде

$$v(x, t) = \frac{\int [(x-y)/t] \exp[-\Phi(x, y, t)/2\mu] dy}{\int \exp[-\Phi(x, y, t)/2\mu] dy}, \quad (2.6)$$

$$\Phi(x, y, t) = S_0(y) + \frac{(x-y)^2}{2t}. \quad (2.7)$$

2. Поскольку в уравнении Бюргерса есть нелинейные и диссипативные члены, то их относительное влияние можно характеризовать безразмерным параметром – числом Рейнольдса – R . Если σ_0 и l_0 характерная амплитуда и масштаб начального поля, то непосредственно из уравнения Бюргерса (1.2) можно оценить начальное число Рейнольдса

$$R \approx \frac{\sigma_0 l_0}{\nu}. \quad (2.8)$$

При $R \ll 1$ преобладают диссипативные эффекты и нелинейность скажется слабо, при $R \gg 1$ нелинейные эффекты играют большую роль

в искажении профиля волны. Число Рейнольдса естественно возникает и при анализе точного решения уравнения Бюргерса. Поскольку вспомогательное поле $\varphi(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению диффузии, то нелинейность уравнения Бюргерса проявляется в нелинейной связи полей φ и v . Степень проявления нелинейных эффектов согласно (2.5) можно характеризовать величиной относительных изменений φ . На начальной стадии относительные изменения φ определяются величиной изменения начального действия и тогда $R \approx |\Delta \ln \varphi_0| \approx |\Delta S/\nu|$. Если учесть, что $\Delta S \approx \sigma_0 l_0$, то для числа Рейнольдса мы получим оценку, совпадающую с (2.8).

Обширный класс частных решений уравнения Бюргерса систематизирован в обзорной статье [14]. Ниже мы ограничимся анализом асимптотического решения уравнения Бюргерса при больших числах Рейнольдса, что соответствует формально пределу $\nu \rightarrow 0$. При $R_0 \gg 1$ основной вклад в интегралы в (2.6) дают окрестности точек локальных минимумов функции

$$\Phi'_y = v_0(y) + (y - x)/t = 0, \quad \Phi''_y y > 0. \quad (2.9)$$

При $\nu \rightarrow 0$ доминирующим оказывается то слагаемое, для которого Φ достигает абсолютного минимума и тогда решение уравнения Бюргерса принимает вид

$$v(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t}, \quad (2.10)$$

где $y(x, t)$ – координата абсолютного минимума функции $\Phi(x, y, t)$ (2.7) при фиксированных x и t .

3. Обсудим, как связано асимптотическое решение уравнения Бюргерса (2.10) с решением уравнения Римана. Пусть $\tilde{y}(x, t)$ есть решение уравнения (2.9) при фиксированных x и t . Тогда из (2.10) можно записать, что

$$v(x, t) = v_0[y(x, t)] = v_0[x - \tilde{y}(x, t)t] \quad (2.11)$$

и мы получаем известное неявное решение Римана. В общем случае решение уравнения (2.9) может иметь несколько корней и тогда решение (2.11) – многозначная функция. Используя же правило отбора абсолютного минимума, мы выбираем при любом x из множества ветвей решения уравнения Римана единственную, соответствующую асимптотическому решению уравнения Бюргерса при $\nu \rightarrow 0$.

Если интерпретировать решение уравнения Бюргерса на языке частиц, то очевидно, что уравнение (2.9) определяет лагранжеву координату у частицы, которая в момент времени t попала в точку x . Если для решения Римана в точку x может прийти несколько частиц и при этом решение Римана будет многозначным, то в асимптотическом решении уравнения Бюргерса из всех частиц "выживает" лишь та, у которой действие минимально.

4. Обсудим теперь связь уравнения Бюргерса с параболическим уравнением квазиоптики. Если в уравнении для вспомогательного поля y (2.4) положить $\mu = 1/2ik_0$ и $t = z$, то это уравнение перейдет в параболическое уравнение квазиоптики (1.6). При этом процедура построения точного решения уравнения Бюргерса с помощью замены Хопфа–Коула (2.1)–(2.5)

в данном случае обратна переходу от параболического уравнения (1.6) к уравнению для комплексной фазы и угла волнового фронта (1.7)–(1.10). Асимптотика больших чисел Рейнольдса в уравнении Бюргерса соответствует при этом приближению геометрической оптики, когда волновое число $k_0 \rightarrow \infty$. При этом поведение траекторий частиц и лучей одинаково до тех пор, пока не начнется их пересечение. Однако, если в оптике после пересечения лучей происходит их интерференция, то в уравнении Бюргерса, из-за мнимости волнового числа $k_0 = 1/2i\mu$, частицы конкурируют и выживает лишь частица с наименьшим действием (см. рис.1).

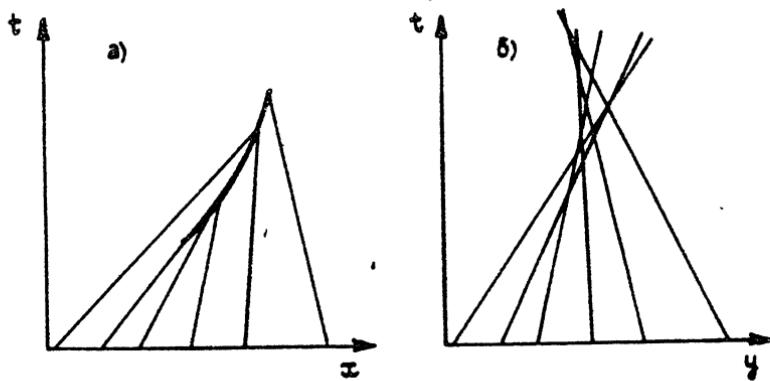


Рис. 1: а) - траектории частиц, описывающих предельное решение уравнения Бюргерса; в) - траектории геометрооптических лучей.

Таким образом проблема описания турбулентности Бюргерса тесно связана с классической задачей о дифракции оптической волны за случайным фазовым экраном.

5. Предельное решение уравнения Бюргерса допускает очень удобную и простую графическую процедуру описания поля $v(x, t)$. Легко видеть, что координата абсолютного минимума Φ есть абсцисса первой точки касания параболой

$$\alpha(x, y, t) = -\frac{(x - y)^2}{2t} + H \quad (2.12)$$

начального действия $S_0(y)$ при изменении H из $-\infty$. Подставив координату абсолютного минимума $y(x, t)$ в (2.10), мы найдем значение поля $v(x, t)$ в точке x в момент времени t . Чтобы построить решение для всех x , нужно перемещать координату центра параболы, равную x , и отыскивать абсциссу первой точки касания. Очевидно, что характер касания этих двух кривых определяется соотношением кривизны параболы $\alpha''_{yy} = 1/t$ и кривизны начального действия S_0 , равной $V'_0 \sim \sigma_0/l_0$.

На начальной стадии при $t \lesssim t_n = l_0/\sigma_0$ парабола имеет большую кривизну и при изменении координаты центра параболы x точка касания

$y(x, t)$ непрерывно скользит по профилю $S_0(y)$ (рис.2).

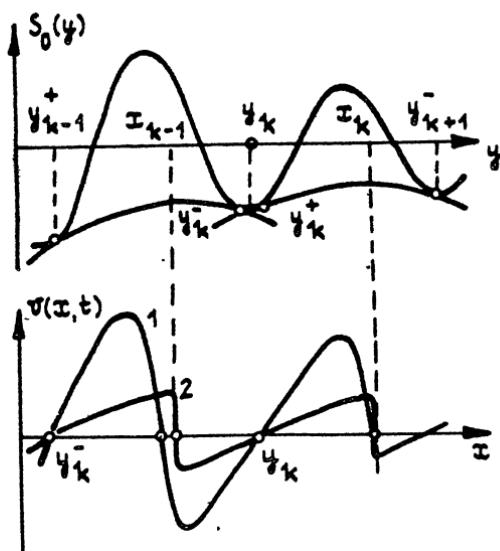


Рис. 2: Графическая процедура отыскания абсолютного минимума и профиль волны при $t \ll t_n - 1$, а при $t \gg t_n - 2$.

Очевидно, что при этом непрерывно и само поле $v(x, t)$, которое на этой стадии может быть описано уравнением Римана.

При $t > t_n$ наряду с участками непрерывного скольжения параболы α по начальному профилю $S_0(y)$ имеются скачки точек касания, когда $y(x, t)$: при малом изменении x в окрестности некоторой точки x_k скачком меняет свое значение с y_k^+ на y_{k+1}^- (рис.2). Поле $v(x, t)$ в этой точке имеет разрыв. Координата разрыва x_k определяется из условия одновременного касания параболой α начального действия $S_0(y)$ в двух точках y_k^+ и y_{k+1}^- , что эквивалентно равенству $\Phi(x_k, y_k^+, t) = \Phi(x_k, y_{k+1}^-, t)$. Координату разрыва можно представить в виде

$$x_k = \frac{y_{k+1}^- + y_k^+}{2} + V_k t, \quad (2.13)$$

$$V_k = \frac{S_0(y_{k+1}^-) - S_0(y_k^+)}{y_{k+1}^- - y_k^+} = (y_{k+1}^- - y_k^+)^{-1} \cdot \int_{y_k^+}^{y_{k+1}^-} v_0(x) dx. \quad (2.14)$$

В общем случае при изменении t меняются как координаты точек двойного касания y_k , так и координаты разрыва x_k . Однако, используя уравнение (2.9) для точки касания y из (2.13), (2.14), можно показать, что $dx_k/dt = V_k$ и, следовательно, V_k есть скорость разрыва.

6. В заключение дадим еще одну наглядную интерпретацию эволюции поля $v(X, t)$ на языке частиц с абсолютно неупругими столкновениями.

Пусть в начальный момент имелся газ частиц с начальной скоростью $v_0(x)$ и единичной плотностью $\rho_0 = 1$. Пока частицы не сталкиваются, поле скорости такого гидродинамического потока совпадает с решением уравнения Римана и, следовательно, с асимптотическим решением уравнения Бюргерса. Предположим, что в момент столкновения частицы слипаются. Тогда масса и скорость сгустка — тяжелой частицы, будет определяться из законов сохранения. Очевидно, что масса тяжелой частицы равна массе слипшихся в нее легких частиц $m_k = (y_{k+1}^- - y_k^+)$, и ее импульс равен

$$P_k = m_k V_k = S_0(y_{k+1}^-) - S_0(y_k^+) = \int_{y_k^+}^{y_{k+1}^-} v_0(x) dx.$$

Отсюда следует, что скорость частицы совпадает со скоростью разрыва V_k (2.14). Таким образом, на разрывной стадии можно интерпретировать решение уравнения Бюргерса как эволюцию газа, состоящего из частиц двух сортов. Передача импульса от мелких частиц к тяжелым и столкновение тяжелых частиц происходит при этом по законам абсолютно неупругих столкновений.

3. ОДНОМЕРНАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

1. Как уже отмечалось, задача об эволюции решений уравнения Бюргерса со случайными начальными условиями называется турбулентностью Бюргерса или одномерной акустической турбулентностью. Предположим, что начальное возмущение можно характеризовать одной амплитудой σ_0 и одним пространственным масштабом l_0 . Тогда можно ввести характерные времена проявления нелинейных и диссипативных эффектов

$$t_n = l_0/\sigma_0, \quad t_d = l_0^2/\nu. \quad (3.1)$$

Отношение этих времен показывает относительный вклад нелинейных искажений и линейного затухания в процесс трансформации начального поля

$$R_0 = t_d/t_n = \sigma_0 l_0 / \nu$$

и называется числом Рейнольдса. При $R_0 \ll 1$ преобладают диссипативные эффекты и нелинейность сказывается слабо, а при $R_0 \gg 1$ нелинейные эффекты играют существенную роль в искажении профиля волны.

При больших числах Рейнольдса, что формально соответствует $\nu \rightarrow 0$, можно воспользоваться асимптотическим решением уравнения Бюргерса (2.10). При $t \ll t_n$ из-за нелинейности происходит искажение профиля волны и уширение ее спектра, но число разрывов, а следовательно, и диссипация энергии еще пренебрежимо малы [4]. Для описания поля при $t < t_n$ можно с известной степенью осторожности использовать уравнение Римана (1.1). Мы же ограничимся здесь другим предельным случаем $t \gg t_n$, когда непрерывное начальное поле превращается в последовательность треугольных импульсов с одинаковым наклоном профиля, но со случайнм положением координаты разрыва. Такая трансформация

произвольного начального поля становится очевидной, если воспользоваться графической процедурой описания координаты абсолютного минимума $y(x, t)$ как первой точки касания параболы α (2.12) и начального действия $S_0(y)$. Действительно, при $t \gg t_n$ – парабола α плавная функция в масштабе начального действия $S_0(y)$. Поэтому координаты точек касания α и S_0 близки к координатам начальных минимумов начального действия y_k , а для координат точек двойного касания справедливо приближенное равенство $y_k^+ \approx y_k^- \approx y_k$ (см. рис.2). Это означает, что $y(x, t)$ – кусочно-постоянная функция x : она практически не меняется с ростом x от x_{k-1} вплоть до координаты следующего разрыва x_k . При переходе x через $x = x_k$ координата $y(x, t)$ скачком меняет свое значение с $y = y_k^- \approx y_k$ на $y = y_{k+1}^+ \approx y_{k+1}$. При $t \gg t_n$ структура поля $v(x, t)$ полностью характеризуется набором критических парабол, имеющих двойные точки касания с начальным действием $S_0(y)$. Точки касания при этом близки к локальным минимумам $S_0(y)$: $y_k^+ \approx y_k^- \approx y_k$ и определяют "нули" поля $v(x, t)$, а координаты центров критических парабол есть положение разрывов x_k . Возвращаясь к полю $v(x, t)$, мы получаем, что при $t \gg t_n$ поле $v(x, t)$ имеет универсальную структуру в интервалах между разрывами

$$v(x, t) = (x - y_k)/t, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad (3.2)$$

где y_k – "нуль" поля – пересечение наклонной прямой или ее продолжение с осью $v = 0$.

Таким образом, при $t \gg t_n$ эволюция поля определяется простыми законами:

- градиент поля v_x между разрывами монотонно уменьшается, как $1/t$;
- "нули" y_k пилообразной волны неподвижны;
- разрывы x_k (2.13) двигаются с постоянной скоростью V_k , определяемой соотношением (2.14);
- амплитуды разрыва пропорциональны расстоянию между двумя соседними "нулями" $\Delta v_k = (y_{k+1} - y_k)/t$; в момент столкновения ударных фронтов число "нулей" и разрывов уменьшается на единицу, а из двух разрывов образуется один с амплитудой, равной сумме амплитуд слившихся разрывов.

Таким образом, можно говорить о локальной автомодельности поля на стадии развитых разрывов: между разрывами поле $v(x, t)$ имеет универсальную структуру (3.2).

Если вернуться к интерпретации решения уравнения Бюргерса на языке газа частиц, то стадия $t \gg t_n$ соответствует этапу, когда все легкие частицы уже слиплись и газ состоит из тяжелых частиц. При этом столкновение ударных фронтов эквивалентно слипанию тяжелых частиц по законам абсолютно неупругого удара. Скорости частиц равны при этом скоростям разрывов, и масса тяжелой частицы $m_k = \eta_k = y_{k+1} - y_k$ связана с амплитудой разрыва Δv_k соотношением $m_k = \Delta v_k t$.

2. На стадии развитых разрывов возможно двоякое описание турбулентности Бюргерса: можно интересоваться такими традиционными характеристиками поля как вероятностное распределение поля $w(v, t)$, корреляционная функция $B_v(\rho, t) = \langle v(x + \rho, t) v(x, t) \rangle$, энергетический спектр $g(k, t)$, характеризующий распределение энергии по пространственным

частотам k , и т.д. Статистический анализ поля $v(x, t)$ удобно проводить здесь на основе асимптотического решения (2.10), используя теорию выбросов случайных процессов [4]. С другой стороны, можно интересоваться статистикой таких дискретных элементов волны как разрывы (тяжелые частицы): полное статистическое описание дает при этом иерархия многоточечных вероятностных распределений скоростей, масс и расстояний между соседними разрывами (частицами) [15].

Ниже мы ограничимся качественным описанием эволюции турбулентности Бюргерса на стадии развитых разрывов. Предположим, что поле $v(x, t)$ можно характеризовать единственным масштабом $l(t)$ (внешним масштабом турбулентности), равным среднему расстоянию между разрывами или между нулями поля. Очевидно, что среднее число разрывов на единицу длины $n(t)$ связано с этим масштабом соотношением $n(t) = 1/l(t)$, а дисперсию поля $v(x, t)$ в силу его локальной автомодельности можно оценить как

$$\langle v^2(x, t) \rangle = \sigma^2(t) \approx l^2(t)/t^2. \quad (3.3)$$

Для периодического начального сигнала $l(t) = l_0$ – периоды волны, энергия затухает как $\sigma^2 \sim t^{-2}$ и не зависит от начальной амплитуды поля. При случайных начальных условиях разрывы имеют случайные скорости, что приводит к их слиянию, т.е. к уменьшению среднего числа разрывов $n(t)$ и росту внешнего масштаба $l(t)$. Из (3.3) видно, что из-за слияния разрывов энергия случайного поля затухает медленнее, чем энергия периодического сигнала. Из выражения для скорости разрыва (2.14) видно, что скорость отдельного разрыва, а значит скорость их сближения и темп слияния разрывов определяется статистическими характеристиками начального действия $S_0(y) = \int^y v_0(x)dx$. Предположим, что начальный спектр поля $v_0(x)$ имеет в области крупных пространственных масштабов следующую асимптотику

$$g_0(k) = \alpha_n^2 |k|^n b_0(k), \quad b_0(0) = 1, \quad (3.4)$$

где $b_0(k)$ – функция с характерным масштабом $k_* = 1/l_0$, быстро спадающая при $k > k_*$. Тогда для структурной функции начального действия

$$d_s(z) = \langle [S_0(z + z) - S_0(z)]^2 \rangle = 4\alpha_n^2 \int_0^\infty (1 - \cos kz) k^{n-2} b_0(k) dk \quad (3.5)$$

имеем следующую асимптотику при $z \gg l_0$:

$$d_s(z) = \begin{cases} 2\sigma_s^2 & n > 1 \\ \alpha_n^2 |z|^{1-n} & n < 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Используя выражение для скорости разрыва (2.14), мы можем теперь оценить закон роста внешнего масштаба турбулентности $l(t)$ (закон уменьшения среднего числа разрывов $n(t) = 1/l$). Очевидно, что уменьшение $n(t)$ из-за слияния разрывов за время Δt пропорционально самому $n(t)$, а также отношению возможного сближения разрывов $\Delta v \Delta t$ к характерному расстоянию между ними $l(t)$:

$$\Delta n \approx -n(\Delta v \Delta t / l). \quad (3.7)$$

За оценку скорости сближения разрывов Δv можно взять среднеквадратичную скорость отдельного разрыва $\Delta V \approx (\langle V_k^2 \rangle)^{1/2}$. Считая, что в (2.14) случайное расстояние между нулями $t_k = y_{k+1} - y_k$ равно внешнему масштабу турбулентности $l(t)$, для дисперсии скорости разрыва имеем

$$\langle V_k^2 \rangle \approx \frac{d_s(l)}{l^2}, \quad (3.8)$$

где $d_s(l)$ – структурная функция начального действия (3.5). Переходя в (3.7) к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ и учитывая соотношение $n(t) = 1/l(t)$, для внешнего масштаба турбулентности имеем уравнение

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{d_s(l)}}{l}. \quad (3.9)$$

Таким образом, при $t \gg t_n$ закон роста внешнего масштаба определяется поведением структурной функции начального действия при $z \gg l_0$ или, что то же самое, видом спектральной плотности действия $g_s(k) = g_0(k) k^{-2}$ в области малых пространственных частот. Из (3.6), (3.8) для внешнего масштаба турбулентности имеем следующую оценку:

$$l(t) \approx \begin{cases} (\sigma_s t)^{1/2}, & n > 1 \\ (\alpha_n t)^{2/3+n}, & n < 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Таким образом, при $n > 1$, когда в начальном энергетическом спектре скорости крупномасштабные компоненты представлены слабо, закон роста внешнего масштаба носит универсальный характер. При $n < 1$ закон роста $l(t)$ определяется видом низкочастотной части пространственного спектра. Подставляя (3.10) в (3.3), мы получаем следующую оценку для энергии шумового сигнала:

$$\sigma^2(t) \approx \begin{cases} \sigma_0^2(t_n/t), & n > 1 \\ \sigma_0^2(t_n/t)^{\frac{2(1+n)}{3+n}}, & n < 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Здесь мы определили начальный масштаб l_0 из условий: $\sigma_0 l_0 = \sigma_s$ при $n > 1$; $\sigma_0^2 l_0^{n+1} = \alpha_n^2$ при $n < 1$, и ввели время нелинейных искажений как $t_n = l_0/\sigma_0$.

3. Образовавшиеся разрывы приводят к формированию универсальной асимптотики спектра в области высоких пространственных частот. Действительно, Фурье-образ отдельного разрыва,

$$C(k, t) = \frac{\Delta v_n}{2\pi i k} e^{-ikx_n}$$

спадает по спектральному закону. Из-за флюктуаций положений разрывов интерференцией фурье-образов в высокочастотной части энергетического спектра $g(k, t)$ можно пренебречь, и в результате мы имеем степенную асимптотику при $kl \gg 1$:

$$g(k, t) = \frac{n(t)\langle \Delta v^2 \rangle}{2\pi k^2}. \quad (3.12)$$

На стадии развитых разрывов уровень этих компонент будет определяться также внешним масштабом турбулентности:

$$g(k, t) \sim l/t^2 k^2.$$

При конечных числах Рейнольдса наряду с внешним масштабом $l(t)$ случайное поле имеет и внутренний масштаб $\delta(t)$, равный толщине ударного фронта и $\delta \approx vt/l$. Очевидно, что идеализация разрывных волн справедлива, пока $\delta \ll l$. Отношение этих масштабов совпадает с определением числа Рейнольдса:

$$R(t) = l/\delta = l^2/vt = \sigma l/\nu. \quad (3.13)$$

Для периодической волны $l = l_0$ число Рейнольдса спадает как t^{-1} и при $t \approx t_n R_0$ пилообразная периодическая волна трансформируется в синусоидальную и затухает далее по линейному закону. Используя законы роста внешнего масштаба турбулентности (3.10) для текущего числа Рейнольдса турбулентности Бюргерса, имеем

$$R(t) \approx \begin{cases} R_0, & n > 1 \\ R_0(t/t_n)^{\frac{1-n}{n+3}}, & n < 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Таким образом, для шумового поля мы имеем удивительный результат, при $n < 1$ увеличение характерного расстояния между разрывами из-за их слияния ведет к росту эффективного числа Рейнольдса. Поэтому идеализация разрывных волн в этом случае с ростом t становится все более корректной.

4. Выше мы дали качественное описание турбулентности Бюргерса на стадии развитых разрывов. Строгий статистический анализ подтверждает большинство выводов, полученных на основе качественного рассмотрения [4]. На основе точного решения Хопфа–Коула (2.6) можно показать, что при $n < 1$ статистические свойства турбулентности становятся автомодельными вне зависимости от величины начального Рейнольдса и определяются единственным масштабом – внешним масштабом турбулентности $l(t)$. Закон роста определяется при этом выражением (3.10). При $n > 2$ режим автомодельности реализуется, если начальное число Рейнольдса $R_0 \gg 1$. При этом решение развитой турбулентности существует на конечном временном интервале $t < t_n \exp R_0^2$. По сравнению с периодической волной это время чрезвычайно велико.

На автомодельной стадии энергетический спектр турбулентности представим в виде

$$g(k, t) = \frac{l^3}{t^2} \tilde{g}(kl), \quad (3.15)$$

где функция $\tilde{g}(\alpha)$ зависит от типа турбулентности. При $n > 2$ функция $\tilde{g}(\alpha)$ имеет универсальные асимптотики и в области низких ($\tilde{g}(\alpha) \sim \alpha^2$) и высоких ($\tilde{g}(\alpha) \sim \alpha^{-2}$) пространственных частот, и ее форма не зависит от структуры начального спектра. При $n < 1$ нелинейность не может изменить поведение низкочастотных компонент спектра и $\tilde{g}(\alpha) \sim \alpha^n$. В области высоких пространственных частот спектр по-прежнему имеет

степенную асимптотику $g(\infty) \sim \infty^{-2}$, связанную с образованием разрывов.

Достаточно полное статистическое описание турбулентности Бюргерса удается провести для случая $n > 2$, используя асимптотическое решение (2.10). Используя математический аппарат теории выбросов случайных процессов, удается найти одно- и двухточечное вероятностное распределение, корреляционные функции и энергетические спектры, высшие моментные функции [4].

4. РИМАНОВЫ ВОЛНЫ, ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА И ФЛУКТУАЦИИ ПЛОТНОСТИ ГАЗА НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

1. Выше мы анализировали статистические характеристики акустической турбулентности на стадии развитых разрывов, когда первоначально непрерывное поле трансформировалось в последовательность треугольных импульсов с одинаковым наклоном, но со случайным положением ударных фронтов. Начальная стадия развития акустической турбулентности, когда влияние разрывов еще не очень существенно, может быть с известной степенью осторожности описана уравнением Римана (1.1). Как уже отмечалось, это уравнение описывает поле скорости гидродинамического пучка невзаимодействующих частиц, а также эволюцию углов наклона волнового фронта (1.8) оптической волны за фазовым экраном. Для последних двух случаев важнейшей характеристикой является поле плотности или соответственно интенсивности волны, которые удовлетворяют уравнению непрерывности (1.9). Ниже мы для определенности будем обсуждать эволюцию статистических характеристик полей скорости $v(x, t)$ и плотности $\rho(x, t)$ одномерного пучка невзаимодействующих частиц. Обобщение на случай двумерного фазового экрана и более детальное обсуждение можно найти в монографии [4].

Нахождение статистических характеристик полей скорости и плотности проще всего осуществить, используя связи между эйлеровым и лагранжевым описанием случайных полей. Действительно, в лагранжевом представлении уравнения движения отдельной частицы (1.4) тривиальны, и поэтому не представляет труда найти лагранжеву плотность вероятности координаты $X(y, t)$, скорости $V(y, t)$ и расходимости $J(y, t)$ отдельной частицы:

$$W_{X, V, J}^n(x, v, j; y, t) = \langle \delta[X(y, t) - x] \delta[V(y, t) - v] \delta[J(y, t) - j] \rangle_x. \quad (4.1)$$

Здесь (...) означает статистическое усреднение, а $J = |\partial x / \partial y|$ характеризует расходимость элементарного объема в окрестности рассматриваемой частицы и связь с плотностью среды $R(y, t)$ в ее окрестности очевидным соотношением

$$R(y, t) = \frac{\rho_0(y)}{|J(y, t)|} \quad (4.2)$$

где $\rho_0(y) = R(y_0 t)$ – начальная плотность среды.

Очевидно, что J есть якобиан преобразования от лагранжевых к эйлеровым переменным, и что для δ -функции справедливо следующее соотношение

$$J(y, t)\delta[X(y, t) - z] = \delta[y(z, t) - y], \quad (4.3)$$

где $y(z, t)$ есть решения уравнения $z = X(y, t)$ и есть лагранжевые координаты той частицы, которая в момент времени t попала в точку z . С учетом этого лагранжевые и эйлеровы переменные связаны равенством

$$v(z, t) = V[y(z, t), t], \quad \rho(z, t) = R[y(z, t), t]. \quad (4.4)$$

Для того, чтобы найти эйлерово вероятностное распределение скорости $v(z, t)$,

$$w_v^o(v; z, t) = \langle \delta[v(z, t) - v] \rangle, \quad (4.5)$$

домножим (4.1) на j и проинтегрируем с учетом равенств (4.3), (4.4) по j и лагранжевой координате y ,

$$w_v^o(v; z, t) = \int_0^\infty dj \int_{-\infty}^{+\infty} dy j W(z, v, j; y, t). \quad (4.6)$$

Учитывая связь якобиана J и плотности R , можно записать аналогично формулу для связи лагранжева и эйлерова распределений скорости и плотности:

$$\rho w_v^o(v, \rho; z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(y) W(z, v, \rho; y, t) dy. \quad (4.7)$$

Для статистически однородных полей лагранжева плотность вероятности зависит только от разности координат $z - y$ и поэтому интегрирование по параметру y в (4.7) эквивалентно интегрированию по переменной z лагранжевой плотности вероятности, и тогда

$$\rho w^o(v, \rho; t) = \rho_0 W^o(v, \rho; t). \quad (4.8)$$

Аналогичные формулы связи можно написать и для двухточечных вероятностных распределений, зная их, можно найти корреляционные функции и спектры полей скорости и плотности гидродинамического пучка частиц [4].

2. Остановимся вначале на одноточечных характеристиках этих полей, предполагая, что начальное поле статистически однородно. Из (4.6) можно показать, что одноточечное вероятностное распределение плотности сохраняется: $w^o(v; t) = w_o^o(v)$. Этот весьма нетривиальный результат можно понять, если рассматривать относительную длину пребывания процесса $v(z, t)$ в интервале $v, v+dv$. Действительно, несмотря на искажения профиля волны сумма длин двух соседних интервалов ($\Delta z_k + \Delta z_{k+1}$) сохраняется.

Из (1.4), (1.5) следует, что эволюция якобиана определяется уравнением

$$J(y; t) = 1 + U(y)t, \quad U(y) = v'_0(y). \quad (4.9)$$

Таким образом, если $w_u(U)$ вероятностное распределение градиента начального поля, то с учетом связи лагранжева и эйлерова вероятностного распределения плотности получаем

$$w_\rho^*(\rho; t) = \frac{1}{\rho t} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \left[w_u \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho t} \right) + w_u \left(-\frac{\rho_0 + \rho}{\rho t} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Пусть $\sigma_n^2 = \langle U^2 \rangle = \sigma_0^2 / l_0^2$ – дисперсия градиента, тогда при $\sigma_u t = t/t_n \ll 1$ вероятностное распределение плотности приблизительно повторяет форму распределения градиента скорости с эффективной шириной $\rho_0 \sigma_n t$. Однако при $\rho \rightarrow \infty$ распределение w_ρ имеет универсальную степенную компоненту

$$w_\rho^*(\rho, t) = \frac{2\rho_0^2 w_u(-1/t)}{t \rho^3}. \quad (4.11)$$

Нетрудно убедиться, что появление такой асимптотики связано с появлением особенностей вида $\rho(x, t) \sim x^{-1/2}$ в реализациях плотности, а значение $w_u(-1/t)$ пропорционально среднему числу особенностей на единицу длины. Характерной чертой вероятностного распределения плотности является смещение максимума распределения в сторону малых $\rho < \rho_0$ и одновременное появление медленно спадающих хвостов распределения при $\rho > \rho_0$. В реализациях поля плотности $\rho(x, t)$ это соответствует тому, что

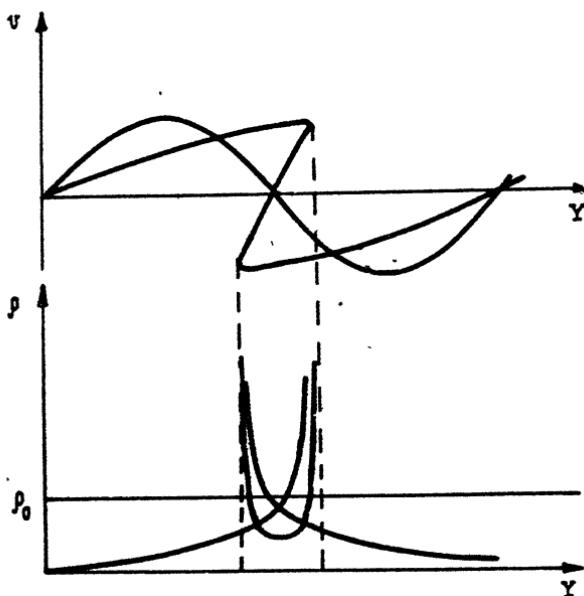


Рис. 3: Эволюция полей скорости и плотности.

области пониженной плотности занимают все большую часть, в то время

как области повышенной плотности достаточно сильно локализованы (см. рис.3). В геометрической оптике эти особенности соответствуют каустикам.

3. Существенно более подробную информацию дают двухточечные вероятностные распределения, корреляционные функции и спектральные плотности случайных полей. Здесь мы дадим вывод выражения для корреляционной функции и спектра поля плотности $\rho(x, t)$ и приведем готовое выражение для спектральной плотности поля скорости, предполагая, что поля статистически однородны.

Формула (4.7) описывает связь лагранжевой и эйлеровой одноточечной плотностей вероятности. Нетрудно записать аналогичное выражение и для двухточечных плотностей вероятности. Тогда, используя определение функций корреляции через эйлерову двухточечную плотность вероятности,

$$k_\rho(x_1, x_2; t) = \langle \rho(x_1, t) \rho(x_2, t) \rangle = \int \int \rho_1 \rho_2 w^0(\rho_1, \rho_2; x_1, x_2; t),$$

формулу связи лагранжева и эйлерова вероятностных распределений, аналогичную (4.7), нетрудно получить для статистически однородного поля

$$k_\rho(S, t) = \rho_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W^x(S; S_0, t) dS_0. \quad (4.12)$$

Здесь

$$W^x(S, S_0) = \langle \delta[S - X(S_0, t) + X_0(0, t)] \rangle$$

— лагранжева плотность вероятности вектора относительно смещения двух частиц, начальный вектор смещения которых был равен S_0 . Переходя от (4.12) к спектральной плотности

$$\begin{aligned} G_\rho(k, t) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikS} k_\rho(S, t) dS = \\ &= \frac{\rho_0^2}{2\pi} \int \langle \exp\{-ik[X(S_0, t) - X_0(0, t)]\} \rangle dS_0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

из (4.4) мы видим, что эволюция $G_\rho(k, t)$ определяется двухточечной характеристической функцией начального поля скорости

$$\Theta_2(x_1, x_2, S_0) = \langle \exp[i\alpha_1 v_0(S_0) + i\alpha_2 v_0(0)] \rangle.$$

В частности, если входное поле гауссово с корреляционной функцией $\langle v_0(S_0) v_0(0) \rangle = B_0(S_0) = \sigma_0^2 R(S_0)$, то для спектра флуктуаций плотности $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ получаем из (4.13)

$$\begin{aligned} G_\rho(k, t) &= \frac{\rho_0^2}{2\pi} \exp[-(\sigma_0 kt)^2] \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \exp[\sigma_0^2 R(S_0) k^2 t^2] - 1 \} \exp(-ikS_0) dS_0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Аналогичным образом можно вывести и выражение для спектральной плотности скорости $g_v(k, t)$. Однако в данном случае проще поступить, используя связь полей плотности и скорости. Используя (4.2), (4.9), мы имеем

$$R(y, t) = \frac{\rho_0}{1 + v'_0(y)t},$$

$$\tilde{\rho}(x, t) = R[y(x, t), t] - \rho_0 = -\frac{\rho_0 t v'_0[y(x, t)]}{1 + v'_0[y(x, t)]t} = -\rho_0 t \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}; \quad (4.15)$$

$$v(x, t) = v_0[y(x, t)].$$

Следовательно, спектры скорости и плотности связаны соотношением

$$g_\rho(k, t) = k^2 t^2 g_v(k, t), \quad (4.16)$$

которое позволяет сразу записать, исходя из (4.14), явное выражение для спектральной плотности поля скорости.

Из (4.14), (4.15) следуют два важных инварианта теории: сохранение спектральной плотности скорости на нулевой частоте $g_v(0, t) = g_v(0, 0)$ и равенство нулю спектра флюктуаций плотности $g_\rho(0, t) \equiv 0$. Из (4.16) видно, что на малых временах спектр флюктуаций плотности пропорционален начальному спектру флюктуаций градиента $g_n(k) = k^2 g_v(k, 0)$, однако из-за нелинейных искажений происходит весьма существенная трансформация спектров скорости и плотности. Если в начальном спектре скорости отсутствовали крупномасштабные компоненты ($g_v(k, 0) \sim k^n$, $n \geq 2$), то нелинейность приводит к формированию универсальной низкочастотной асимптотики спектра скорости:

$$g(k, t) = k^2 t^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_v^2(k, o) dk / 2.$$

При этом начальный спектр расширяется как в сторону высоких, так и низких частот. Легко убедиться, что в области высоких пространственных частот многократное взаимодействие гармоник исходной волны приводит к формированию универсальной высокочастотной асимптотики. При больших k интеграл в (4.14) можно вычислить методом перевала. Ограничивааясь в разложении $B_0(S)$ двумя первыми членами $B_0(S) = \sigma_0^2(1 - S^2/2l_0^2 + \dots)$, из (4.14) получаем

$$g_\rho(k, t) = \frac{\rho_0^2 \exp(-t_n^2/2t^2)}{\sqrt{2\pi} kt \sigma_n}, \quad (4.17)$$

где $\sigma_n^2 = \sigma_0^2/l_0^2$ - дисперсия флюктуаций градиента скорости, $t_n = 1/\sigma_n \equiv l_0/\sigma_0$ - характерное время проявления нелинейности. Медленное спадание спектра объясняется возникновением в реализациях плотности кавитаций, имеющих особенности вида $\rho(x, t) \sim x^{-1/2}$. При этом экспоненциальный сомножитель пропорционален среднему числу особенностей на единицу длины. Из (4.16) следует, что спектр римановой волны спадает по степенному закону $g_v \sim k^{-3}$, что связано с наличием в реализациях особенностей вида $v(x, t) \sim x^{1/2}$.

Не имея возможности детально обсудить условия применимости полученных выражений, отметим лишь, что для акустической турбулентности формулы (4.15), (4.16) описывают эволюцию спектра поля скорости $g_v(k, t)$ при $t < t_n$ в основной области спектра при $k \ll k_* \approx l_0^{-1}(t_n/t)^3$. В области же $k > k_*$ из-за появления разрывов возникает более медленная степенная асимптотика $g_v(k) \sim k^{-2}$ [4].

Выражение же для спектра плотности (4.14) справедливо при любых t даже в том случае, когда движение существенно многопотоково. При этом в области развитого многопотокового движения ($t \gg t_n$) асимптотика (4.17) описывает практически весь спектр за исключением малой, сужающейся со временем области $k \sim 1/\sigma_0 t$ вблизи нулевой частоты.

4. Возникновение особенностей в реализациях плотности в окрестностях каустик приводит к расходимости дисперсии флюктуаций плотности гидродинамического потока (дисперсии флюктуаций интенсивности оптического пучка). Ограничение плотности в пучке частиц может быть связано с тепловым разбросом частиц или с силами давления. Для холодного газа, когда тепловой разброс C_T мал по сравнению с гидродинамическими флюктуациями σ_0 , спектр повторяет все основное спектра флюктуаций плотности гидродинамического пучка, но экспоненциально спадает в области высоких пространственных частот. Дисперсия флюктуаций при этом ограничена и ее максимальное значение тем больше, чем больше отношение $\sigma_0/C_T[n]$. В оптике ограничение дисперсии флюктуаций интенсивности обусловлено дифракционными эффектами.

5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУР В ГРАВИТАЦИОННО НЕУСТОЙЧИВОЙ СРЕДЕ

1. Естественным обобщением (1.2) является трехмерное уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{v}. \quad (5.1)$$

Для потенциальных полей $\vec{v} = \nabla S$ заменой Хопфа–Коула оно сводится к линейному уравнению диффузии и, следовательно, имеет точное решение. В предельном случае $\nu \rightarrow 0$, по-прежнему справедливо решение (2.10), где однако \vec{v} , \vec{x} , \vec{y} есть векторы. При этом $\vec{y}(x, t)$ удобно рассматривать как первую точку касания трехмерного параболоида (2.12) гиперповерхности начального действия $S_0(\vec{y})$. Естественно, что в трехмерном случае картина касания существенно богаче, чем в одномерном случае.

Если начальное поле случайно, то решение уравнения (5.1) естественно назвать потенциальной турбулентностью, при этом наряду с полем скорости можно еще вводить поле плотности $\rho(\vec{x}, t)$, удовлетворяющее уравнению непрерывности.

При $\nu = 0$ (5.1) описывает поток невзаимодействующих частиц, и в двухмерном случае задача потенциальной турбулентности эквивалентна задаче о прохождении оптической волны случайного фазового экрана в приближении геометрической оптики. Возникновение особенностей соответствует при этом появлению каустик – областей повышенной (бесконечной) интенсивности. В трехмерном случае особенности возникают

первоначально в виде резко анизотропных хаотически ориентированных областей – "блинов". С течением времени возникают новые блины, старые области бесконечной интенсивности растут и затем образуют связанный структуру. Из-за расширения областей особенностей эта отчетливо выраженная структура с течением времени вырождается. В двухмерном случае связанный структуру каустик можно наблюдать в солнечный день на дне бассейна при соответствующей силе ветра, когда структура уже образовалась (т.е. фазовые флуктуации уже перешли в амплитудные), но еще не разрушилась.

Статистические характеристики за двухмерным и "трехмерным" фазовым экраном ищутся аналогично одномерному случаю, хотя здесь и встречаются некоторые вычислительные трудности [4]. Отметим лишь, что асимптотическое поведение вероятностного распределения плотности (интенсивности) такое же, как и в одномерном случае (4.11), что связано с преимущественно одномерным характером образования каустик.

При $\nu \rightarrow 0$ уравнение (5.1) эквивалентно движению газа со слипанием частиц. При этом особенности (области бесконечной плотности) имеют нулевую толщину. Классификация особенностей и их перестройка дана в приложении к английскому варианту монографии [4]. При $t \gg t_n$, когда парабола (2.12) – плавная функция в масштабе начального действия, эти особенности образуют связанный структуру. Действительно, $\tilde{y}(\vec{x}, t)$ есть при этом разрывная функция $\vec{\epsilon}$, практически постоянная в некоторых областях $\vec{x} \in \Sigma_i$ и терпящая разрыв на границах этих областей. В этих областях поле скорости универсально:

$$\tilde{v}(\vec{x}, t) = (\vec{x} - \vec{y}_i)/t, \quad (5.2)$$

где \vec{y}_i – координата соответствующего локального минимума начального действия S_0 . Можно показать, что при $t \gg t_n$ грани этих ячеек – плоскости, которые пересекаются по прямым – ребрам. Ребра, в свою очередь, пересекаются в общих узлах – вершинах ячеек.

2. Наиболее важным приложением потенциальной турбулентности является модельное описание нелинейной стадии гравитационной неустойчивости холодного газа, так как именно этим физическим процессом объясняется возникновение и эволюция крупномасштабной структуры Вселенной. Под крупномасштабной структурой Вселенной в астрофизике понимают распределение вещества в масштабах сотен мегапарсек. Группы и скопления галактик имеют тенденцию сосредотачиваться вдоль сравнительно тонких поверхностей, линий или же образовывать сверхскопления.

Для описания этих эффектов Я.Б.Зельдовичем было предложено приближенное описание нелинейной стадии гравитационной неустойчивости [3]. Было показано, что в разумных предположениях движение гравитационно взаимодействующих частиц может быть сведено к анализу потока невзаимодействующих частиц, т.е. к уравнению (5.1) с $\nu = 0$. Поэтому приближенную теорию Зельдовича часто называют также теорией блинов. Однако численные эксперименты показали, что для гравитационно взаимодействующих частиц толщина блинов возрастает существенно медленнее, чем для невзаимодействующих частиц. Связано это с возникновением осцилляторного движения частиц в областях повышенной плотно-

сти. Качественно эффекты торможения частиц в блинах могут быть описаны вязким членом в уравнении (5.1) [4]. Сравнение прямых численных расчетов с результатом численного моделирования на основе уравнения Бюргерса показало, что модельное описание достаточно хорошо описывает глобальную структуру полей плотности газа гравитационно взаимодействующих частиц. В то же время уравнение (5.1) замечательно тем, что на его основе можно получить ряд аналитических результатов для статистических характеристик полей скорости и плотности [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. - М.: Мир, 1977.
2. Зельдович Я.Б., Мыскис А.Д: Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц. - М.: Наука, 1973.
3. Зельдович Я.Б., Мамаев А.В., Шандарин С.Ф. // УФН. 1983. Т.139. С.153.
4. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. - М.: Наука, 1990.
Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I. Nonlinear random waves and turbulence in nondispersing media: waves, rays and particles. - Manchester University Press, 1991.
5. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. - М.: Наука, 1975.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. - М.: Наука, 1990.
7. Bateman H. // Montly weather rev. 1915. V.43. P.163.
8. Burgers I.M. // Proc. Roy. Neth. Acad. Sci (Amsterdam). 1940. V.43. P.2.
9. Burgers I.M. The Nonlinear Diffusion equation. - Dordrecht: Riedel, 1974.
10. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. - М.: Наука. 1965: Ч.1; 1967. Ч.2.
11. Tatsumi T. // Adv. Appl. Mech. 1980. V.20. P.39.
12. Hopf E. // Comm. Pure appl. Math. 1950. V.3. P.201.
13. Cole J.D. // Quart. Appl. Math. 1951. V.9. P.225.
14. Benton E.R., Platzman G.N. // Quart. Appl. Math. 1972. V.7. P.195.
15. Kida S. // J. Fluid Mech. 1979. V.93. P.337.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 февраля 1993 г.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

И.Л.Максимов, И.Ю.Шалаев

Исследование динамики критического состояния в сверхпроводниках 2-го рода (особенно в высокотемпературных) представляет заметный интерес. Диссипация энергии, сопровождающая движение магнитного потока в сверхпроводнике, способна вызвать заметный локальный разогрев, стимулируя тем самым дальнейшую термически активированную диффузию потока. Таким образом, в токовом состоянии сверхпроводника 2-го рода реализуется положительная обратная связь между тепловыми и электромагнитными возмущениями. С точки зрения динамики нелинейных систем [1] наличие такой обратной связи означает, что сверхпроводник 2-го рода является активной нелинейной средой, допускающей существование стационарных волн разного типа.

В настоящей работе изложены основные результаты исследования нелинейной динамики термомагнитных возмущений большой амплитуды в сверхпроводниках с транспортным током.

1. ФИЗИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ 2-ГО РОДА

Как известно, магнитное поле проникает в сверхпроводник 2-го рода в виде квантов магнитного потока [2]. Саму вихревую нить Абрикосова, несущую один квант потока $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ можно представить себе состоящей из двух областей: ствола вихря и его периферии. Ствол вихря

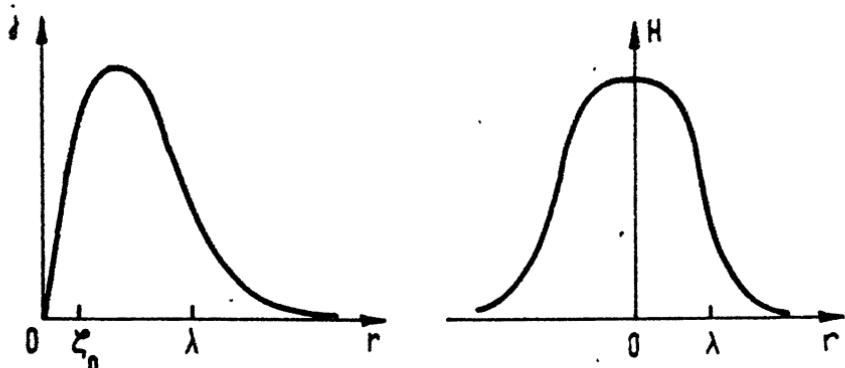


Рис. 1:

радиуса ξ_0 состоит из практически нормального металла; в периферийной его области, размера λ_L , циркулируют незатухающие сверхпроводящие токи j_s . Распределение токов и магнитного поля вблизи вихря показано на рис.1. Напомним, что сверхпроводники 2-го рода характеризуются безразмерным параметром Гинзбурга – Ландау [2]:

$$\alpha_{\text{гл}} = \lambda_L / \xi_0 \gg (1/2)^{1/2}.$$

В равновесном состоянии вихревые нити в образце образуют треугольную решетку со средней плотностью $n = B/\Phi_0$, где B – магнитная индукция внутри образца.

Однако если в сверхпроводнике есть дефекты структуры, то на них вихри могут закрепляться (это явление носит название пиннинга, а подобные сверхпроводники – жесткими) и образовывать метастабильную конфигурацию магнитного потока. Поскольку структура и энергия вихревой нити существенно зависят от температуры T , то и сила пиннинга F_p зависит от температуры, как правило, уменьшаясь с ростом T . При протекании транспортного тока j в образце на каждый вихрь действует сила Лоренца $F_L = 1/c[j, \Phi_0]$. При условии $F_L > F_p$, где $F_p = 1/c[j_c, \Phi_0]$ (j_c называется критической плотностью тока, определяющей величину силы пиннинга в жестких сверхпроводниках) равновесие вихревой решетки нарушается, сверхпроводник переходит в резистивное состояние, характеризующееся конечной проводимостью σ . Возникшее движение магнитного потока сопровождается выделением тепла за счет диссипации энергии вихрей. Известно, что в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) тепловые эффекты ответственны за так называемое термически стимулированное течение (или крип) потока [3]. Последнее выражается в термофлуктуационном преодолении абрикосовскими вихрями (или их связками) энергетических барьеров вблизи центров пиннинга. Локальный разогрев, вызванный развитием терромагнитных возмущений большой амплитуды, способен создать условия для надбарьерного течения вихрей, т.е. перевести сверхпроводник в режим вязкого течения магнитного потока. Такой процесс проникновения в образец магнитного потока может стать неустойчивым, т.е. реализоваться в виде нарастающих связанным образом возмущений температуры и электромагнитного поля (терромагнитная неустойчивость или скачок потока [4]).

Плотность тока в сверхпроводнике, находящемся в критическом состоянии, определяется следующим выражением:

$$j(T, E) = j_c(T) + \sigma E. \quad (1)$$

Типичная вольт-амперная характеристика (ВАХ 0) жесткого сверхпроводника изображена на рис.2, кривая 1.

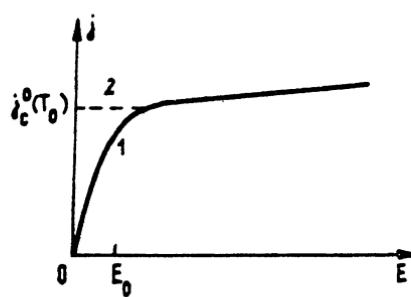


Рис. 2:

В области достаточно больших значений напряженности электрического поля ($E > E_0$, E_0 – поле выхода образца в режим вязкого течения)

чения магнитного потока) j и E линейно связаны между собой. Наличие нелинейного участка ВАХ в интервале $0 < E < E_0$ (крипа магнитного потока) обусловлено неоднородным характером пиннинга вихревых нитей. Для большинства жестких сверхпроводников в любых реальных условиях плотность критического тока ($j_c \sim 10^5 \text{ A/cm}^2$) много больше слагаемого $\sigma E_0 \sim 10 - 10^2 \text{ A/cm}^2$. Это обстоятельство позволило сформулировать так называемую концепцию критического состояния. Согласно этой концепции в жестком сверхпроводнике в ответ на любое возмущение, приводящее к появлению электрического поля (движение вихрей), устанавливается критическое состояние, при котором плотность тока (всюду, где она отлична от нуля) практически совпадает с плотностью критического тока j_c . Поэтому для исследования устойчивости критического состояния можно воспользоваться зависимостью $j(E)$ в простейшем кусочно-линейном виде (1) (см.рис.2, кривая 2).

2. ТЕРМОМАГНИТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Исследуем простейшую задачу об устойчивости сверхпроводящего состояния в плоском образце толщиной b ($0 < z < b$), помещенном во внешнее магнитное поле $H_e(t) = (0, 0, H_e(t))$. Настоящая задача может быть решена с помощью линейного анализа устойчивости решений уравнений теплопроводности и Максвелла по отношению к малым тепловым и электромагнитным возмущениям

$$\nu \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + jE, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}. \quad (3)$$

Здесь ν и χ – теплоемкость и теплопроводность соответственно. Как обычно, при линейном анализе устойчивости будем искать решение системы уравнений (1) – (3) в виде

$$\begin{aligned} T(z, t) &= T_0(z) + \delta T(z, t), \\ E(z, t) &= E_0(z) + \delta E(z, t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $T_0(z)$ и $E_0(z)$ – фон, на котором происходит развитие малых возмущений температуры $\delta T(z, t)$ и электрического поля $\delta E(z, t)$. Подставив соотношения (1) и (4) в систему уравнений (2),(3), находим после соответствующей линеаризации уравнения для δT и δE в виде

$$\nu \frac{\partial \delta T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \delta T}{\partial z^2} + j_c(T_0) \delta E, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \delta E}{\partial z^2} = \frac{4\pi}{c^2} \left[\left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right|_{T_0} \frac{\partial}{\partial t} (\delta T) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} (\delta E) \right]. \quad (6)$$

Здесь учтено, что $j(E_0, T_0) \cong j_c(T_0)$. Перепишем систему уравнений (5), (6) в безразмерном виде. Для этого введем безразмерное время $\tau = t/t_x$, где $t_x = \nu b^2/\chi$ – характерное тепловое время, безразмерную координату $\xi = z/b$ и безразмерные температуру и электрическое поле.

$$\Theta = \frac{\delta T}{T_c}, \quad \epsilon = j_c(T_0)b^2 \frac{\delta E}{\chi T_c}.$$

Подставив в уравнение (6) электрическое поле при помощи уравнения (5), мы получим следующее уравнение для $\Theta(\xi, \tau)$:

$$\frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^4} - (1 + \mu) \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \tau} - \beta \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} = 0, \quad (7)$$

где $\beta = 4\pi^2 b^2 j_c |\partial j_c / \partial T|_{T_0} / (c^2 \nu)$ – величина, характеризующая меру активности критического состояния, $\mu = D_t/D_m$ – параметр, характеризующий отношение коэффициентов тепловой $D_t = \chi/\nu$ и магнитной $D_m = c^2/(4\pi\sigma)$ диффузии материала.

Для решений вида $\Theta \sim \exp[i(k\xi - \omega\tau)]$ получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\mu(i\omega)^2 - [(1 + \mu)k^2 - \beta]i\omega + k^4 = 0,$$

откуда легко можно получить дисперсионные кривые $\omega(k)$ (см. рис. 3):

$$i\omega = \frac{(1 + \mu)k^2 - \beta + \{[(1 + \mu)k^2 - \beta]^2 - 4\mu k^4\}^{1/2}}{2\mu}. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что выражение (8) описывает три различные области спектра $\omega(k)$.

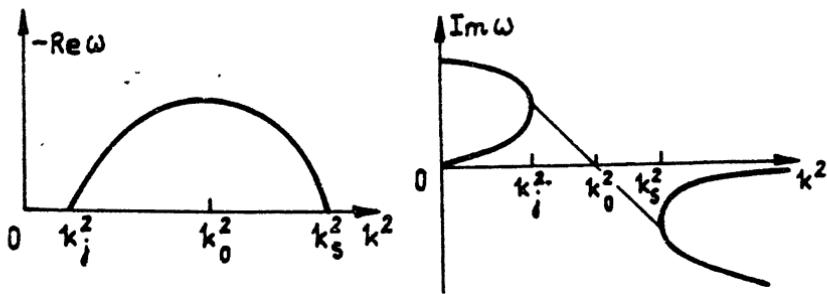


Рис. 3:

Так, при $k < k_j$, где $k_j = \beta/(1 + \mu + 2\mu^{1/2})$, термомагнитные возмущения неограниченно нарастают, т.е. $\text{Im } \omega > 0$, $\text{Re } \omega = 0$. Данная область получила название области абсолютной неустойчивости. Отметим появление осцилляционной части спектра в области $k_j < k < k_s$, где $k_s^2 = \beta/(1 + \mu - 2\mu^{1/2})$ (область ограниченной устойчивости), т.е. $\text{Re } \omega$ не равно нулю, а $\text{Im } \omega$ меняет знак при прохождении инкремента k через точку $k_0^2 = \beta/(1 + \mu)$. И, наконец, область абсолютной устойчивости ($\text{Im } \omega < 0$, $\text{Re } \omega = 0$) при $k_s < k$.

Дальнейшая часть настоящей работы посвящена исследованию нелинейной динамики критического состояния в сверхпроводниках 2-го рода. Излагаемые ниже результаты, по существу, представляют собой точные решения проблемы динамической самоорганизующейся критичности в сверхпроводниках. В частности, предсказывается возможность распространения нелинейных термомагнитных волн – ударной волны (УВ) и локализованной структуры (солитона (С)) – в сверхпроводнике с бездиссиативным транспортным током с плотностью меньшей критической j_c . Описаны структуры нелинейных волн, найдена зависимость амплитуды A от скорости для С и УВ. Проведен анализ устойчивости термомагнитных структур по отношению к малым нестационарным возмущениям их профиля.

3. МОДЕЛЬ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для описания эволюции одномерных тепловых и электромагнитных возмущений, развивающихся в плоском сверхпроводящем образце ширины L ($0 < z < L$), помещенном во внешнее магнитное поле $H = (0, 0, H_e)$, воспользуемся системой уравнений (2), (3). В качестве выражения, определяющего зависимость плотности тока j от температуры T и электрического поля E , примем следующее:

$$j = [j_c^0(T_0) - a(T - T_0)]\Psi(E) + \sigma E, \quad (9)$$

где j_c^0 – критическая плотность тока при равновесной температуре образца T_0 , a – коэффициент теплового ослабления пиннинга вихрей. Здесь в уравнение (9) введена функция $\Psi(E)$, учитывающая вид вольт-амперной характеристики в области крипа магнитного потока (кривая 1 на рис.2). На основании большого числа экспериментальных данных зависимость $\Psi(E)$ может быть представлена следующим образом:

$$\Psi(E) = \begin{cases} 1 & , \quad E > E_0 \\ \left[\frac{E}{E_0} \right]^m & , \quad E \ll E_0 \end{cases}$$

где $m \ll 1$ [5]. Здесь E_0 – характерное поле выхода на режим вязкого течения потока. Будем искать автомодельные решения типа $E = E(z)$, $T = T(z)$, $z = z - vt$. Для определенности ограничимся далее рассмотрением наиболее актуального случая сверхпроводников с большим параметром Гинзбурга – Ландау $\alpha \gg 1$ (жесткие или высокотемпературные сверхпроводники). Известно, что для этих материалов отношение тепловой и магнитной диффузий μ весьма мало: $\mu \approx \alpha^{-2} \ll 1$.

Исключая температуру T из уравнений (2) и (9) и воспользовавшись очевидным интегралом уравнения (3),

$$j = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} E_z' + j_{tp}, \quad (10)$$

приходим к уравнению для $E(\xi)$:

$$\mu \frac{d^3 E}{d\xi^3} + \frac{d^2 E}{d\xi^2} \left[1 + \mu \frac{d \ln(\Psi(E))}{dE} \left(\frac{j_{tp}}{\sigma} - E - 3 \frac{dE}{d\xi} \right) \right] -$$

$$\begin{aligned}
 & -\mu \left(\frac{dE}{d\xi} \right)^2 \left[2 \left(\frac{d \ln(\Psi(E))}{dE} \right)^2 - \frac{1}{\Psi(E)} \frac{d^2 \ln(\Psi(E))}{dE^2} \right] \left(\frac{j_{tp}}{\sigma} - E - \frac{dE}{d\xi} \right) - \\
 & - \frac{d \ln(\Psi(E))}{dE} \left(\frac{dE}{d\xi} \right)^2 + \frac{dE}{d\xi} \left[1 - \frac{d \ln(\Psi(E))}{dE} \left(\frac{j_{tp}}{\sigma} - E \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{a \Psi(E)}{\mu \nu^2 v^2} E \right] + \frac{a \chi \Psi(E) j_{tp}}{\mu \nu^2 v^2 \sigma} E = 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где $\xi = \mu(\nu v / \chi)z$ – безразмерная координата.

Уравнение (11) по своей структуре напоминает сравнительно мало изученное уравнение Кортевега – Де Вриза – Бюргерса с активностью. Как известно, [6], в случаях слабой активности (что эквивалентно обращению в нуль коэффициента при E , например, при j_{tp}) в системе могут существовать волны типа перепада (ударная волна). В случае, когда активность велика, в системе могут возбуждаться автосолитоны [7]. Нас будет интересовать возможность распространения магнитного потока вглубь образца в виде нелинейных стационарных волн. Поэтому мы рассмотрим два случая, различающихся между собой амплитудой токового возмущения волн по отношению к величине j_{tp} , а также характером граничных условий:

а) термомагнитный солитон – тепловое и электромагнитное фоновые поля предполагаются невозмущенными,

$$T(\pm\infty) = T_0, \quad E(\pm\infty) = 0, \tag{12}$$

а амплитуда возмущения A сравнима с величиной j_{tp}/σ ($A \leq j_{tp}/\sigma$);

б) термомагнитная ударная волна – в качестве тепловых граничных условий к уравнению (11) примем следующие:

$$T(\infty) = T_0, \quad T_z'(-\infty) = 0. \tag{13a}$$

Электродинамическими граничными условиями являются

$$E(\infty) = 0, \quad E(-\infty) = A, \tag{13b}$$

где A – амплитуда волны. Отметим также, что амплитуда токового возмущения j_{max} в данном случае значительно превышает величину транспортного тока j_{tp} , что позволяет в уравнении (11) формально занулить слагаемые $\sim j_{tp}/\sigma$.

4. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

В пренебрежении крилом магнитного потока ($E_0 = 0, \Psi(E) = 1$) ВАХ сверхпроводника имеет кусочно-линейный характер (кривая 2 на рис.2), что позволяет существенно упростить уравнение (11):

$$\mu \frac{d^3 E}{d\xi^3} + \frac{d^2 E}{d\xi^2} + \frac{dE}{d\xi} \left[1 - \frac{a}{\mu \nu^2 v^2} E \right] + \frac{a \chi j_{tp}}{\mu \nu^2 v^2 \sigma} E = 0. \tag{14}$$

Линеаризуя (14) вблизи точки $E = 0$, получаем

$$\mu \frac{d^3 E}{d\xi^3} + \frac{d^2 E}{d\xi^2} + \frac{dE}{d\xi} + \frac{a\chi j_{tp}}{\mu\nu^2 v^2 \sigma} E = 0. \quad (15)$$

Отыскивая решение (15) в виде $E(\xi) \sim \exp(p\xi)$, получаем характеристическое уравнение на инкремент p :

$$p^3 + \frac{p^2}{\mu} + \frac{p}{\mu} + \frac{a\chi j_{tp}}{\mu^2 \nu^2 v^2 \sigma} = 0. \quad (16)$$

Известно (см.[8]), что характер возможного решения p определяется знаком главных миноров матрицы G_n , составленной из коэффициентов уравнения (16):

$$G_n = \begin{pmatrix} 1/\mu & 1 & 0 \\ d/\mu^2 & 1/\mu & 1 \\ 0 & 0 & d/\mu^2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{\mu}, \quad \Delta_2 = \frac{(1-d)}{\mu^2},$$

где $d = (a\chi j_{tp})/(\nu^2 v^2 \sigma)$, а также знаком дискриминанта G уравнения (16):

$$G = -27 \left[d^2 + \frac{(4-18\mu)d}{(27\mu)} - \frac{(1-4\mu)}{27} \right].$$

Анализ, проведенный в пределе $\mu \ll 1$, показывает, что, в зависимости от величины V , возможны следующие значения характеристических чисел $p = p' + ip''$:

Область 1 ($V > V^*$, где $V^* = 2[a\chi j_{tp}/(\nu^2 \mu \sigma)]^{1/2}$; см. рис. 4а) –

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, G > 0 : \operatorname{Re} p_1 < \operatorname{Re} p_2 < \operatorname{Re} p_3 < 0, \\ \operatorname{Im} p_1 = \operatorname{Im} p_2 = \operatorname{Im} p_3 = 0.$$

Область 2 ($\mu^{1/2}V^*/2 < V < V^*$; см. рис. 4б) –

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, G < 0 : \operatorname{Re} p_1 < 0, \operatorname{Im} p_1 = 0; p_2 = p_3^*, \operatorname{Re} p_2 = \operatorname{Re} p_3 < 0.$$

Область 3 ($V < \mu^{1/2}V^*/2$; см. рис. 4в) –

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, G < 0 : \operatorname{Re} p_1 < 0, \operatorname{Im} p_1 = 0; \operatorname{Im} p_2 = -\operatorname{Im} p_3 = p'', \\ \operatorname{Re} p_2 = \operatorname{Re} p_3 = p' > 0.$$

Расположение характеристических чисел на комплексной плоскости изображено на рис.4 а,б,в.

Нас будет интересовать область параметров, в которой решения характеристического уравнения удовлетворяют граничным условиям (12).

Очевидно, что интересующие нас параметры лежат в области 3.

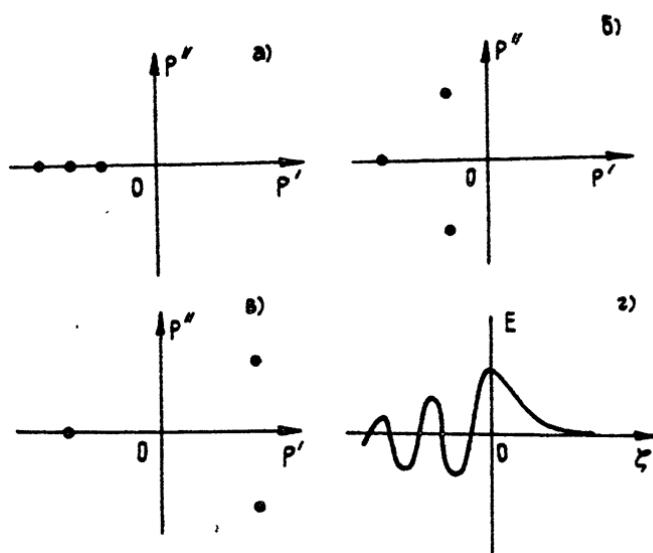


Рис. 4:

В соответствии с найденными характеристическими числами асимптотика решения уравнения (15) имеет следующий вид (см. рис. 4г):

$$E(\xi) = \begin{cases} A \exp[-p'(\xi - \xi_0)] & \text{при } \xi \rightarrow +\infty \\ B \exp[p'(\xi - \xi_0)] \cos[p''(\xi - \xi_0)] & \text{при } \xi \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Таким образом, линейный анализ уравнения (11) указывает на существование пространственно-ограниченного решения данного уравнения с экспоненциально-спадающим передним фронтом и осциллирующим задним. Осцилляции на заднем фронте обусловлены наличием мнимой части у соответствующего характеристического числа уравнения (15) и приводят к изменению знака функции $E(\xi)$. Однако следует иметь в виду, что в силу требования коллинеарности векторов j и E ($jE > 0$) решение с $E < 0$ невозможно. Поэтому в рамках линейного анализа пространственно-ограниченному решению будет соответствовать решение $E(\xi)$, обращающееся в нуль при $\xi = \xi_- = \text{const}$ и спадающим при $\xi \rightarrow +\infty$ (см. рис. 4г).

В случае ударной волны (см. (13а), (13б)) уравнение (14) приобретает вид хорошо известного уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса (КДВБ):

$$\mu \frac{d^3 E}{d\xi^3} + \frac{d^2 E}{d\xi^2} + \frac{dE}{d\xi} \left(1 - \frac{a}{\mu v^2 v^2} E \right) = 0,$$

имеющее для $E(\xi)$ первый интеграл следующего вида:

$$\mu \frac{d^2 E}{d\xi^3} + \frac{dE}{d\xi^2} + E \left(1 - \frac{a}{2 \mu v^2 v^2} E \right) = 0. \quad (17)$$

Проведем анализ особых точек (17). Отыскивая решения линеаризованного вблизи точки $E = 0$ уравнения (17) в виде $E(\xi) \sim \exp(p\xi)$, мы получаем следующее характеристическое уравнение: $\mu p^2 + p + 1 = 0$, решением которого будут корни

$$p_{1,2} = -1/2\mu \pm (1/4\mu^2 - 1/\mu)^{1/2} < 0.$$

Очевидно, что на фазовой плоскости уравнения (17) существует еще одна точка равновесия $E'_\xi = 0$, $E(-\infty) = A = 2\mu^2\nu^2v/(a\chi)$. Линеаризовав вблизи этой точки уравнение (17) и записав характеристическое уравнение $\mu p^2 + p - 1 = 0$, мы получим следующие выражения для инкремента p :

$$p_{1,2} = -1/2\mu \pm (1/4\mu^2 + 1/\mu)^{1/2} (p_1 \approx 1, p_2 \approx -1/\mu).$$

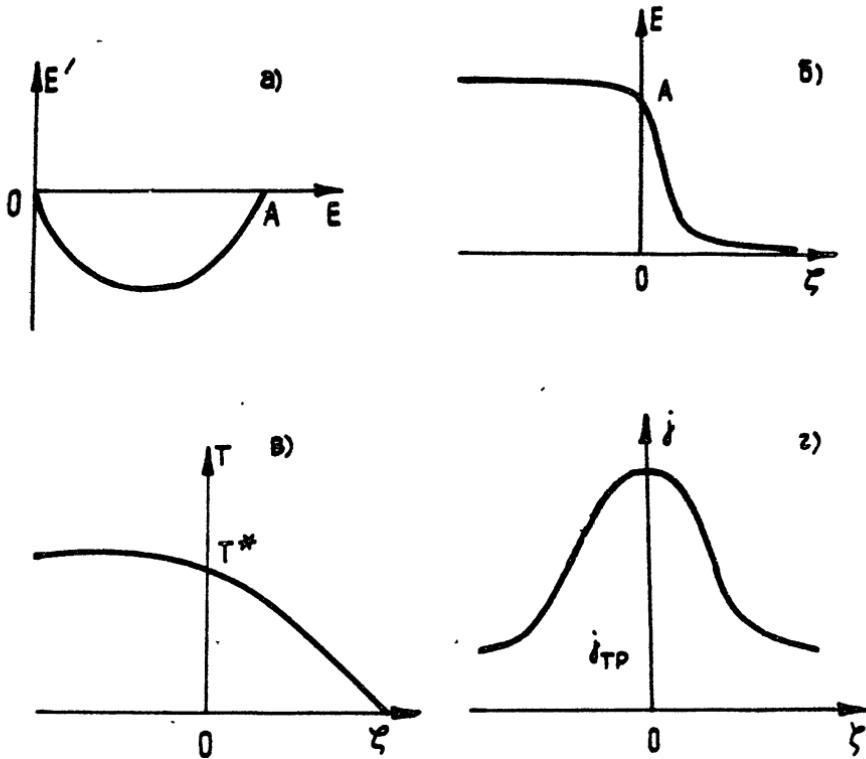


Рис. 5:

Таким образом, исследование фазовой плоскости уравнения (17) показывает, что на ней (также, как и в случае КДВБ) существуют две точки равновесия (рис.5а): а) $E = 0$, $E'_\xi = 0$ – устойчивый узел и б) $E'_\xi = 0$, $E(-\infty) = A = 2\mu^2\nu^2v/(a\chi)$ – седло. Сепаратриса A , соединяющая два эти положения равновесия, соответствует решению типа УВ (рис.5б), удовлетворяющему граничным условиям (13а),(13б).

Описание поведения решения уравнения (11) в случае нелинейной ВАХ требует специального обсуждения, которое возможно лишь в рамках нелинейного анализа уравнения (11).

5. ТЕРМОМАГНИТНЫЙ СОЛИТОН

Исследование асимптотики уравнения (11) в пределе $\mu \ll 1$ для граничных условий (12) показывает существование на его фазовой плоскости (E, E_z') замкнутой интегральной кривой (кривая N на рис.6а), что согласно теории нелинейных возмущений соответствует решению автосолитонного типа с амплитудой A . Нелинейность ВАХ приводит к тому, что данная интегральная кривая ведет себя по-разному в различных областях фазовой плоскости. Так, в области 1 ($E(z) \ll E_0$, $E(z_2) = E(z_4) = E_0$) в случае $E \rightarrow 0$ ($E_z' \rightarrow 0$)

$$E_z' = \begin{cases} -\mu \frac{\nu v}{\chi} \frac{4 j_{tp}}{\sigma} \ln^3 \left(\frac{1}{\delta} \right) \left(\frac{E}{E_0} \right)^{1+m}, & E' < 0 \\ \frac{\nu v}{\chi^m} E, & E' > 0. \end{cases}$$

Здесь введен безразмерный параметр $\delta \ll 1$, определяющий близость максимальной T^* и критической T_c температур:

$$\delta = \frac{a T_c}{j_{tp}} \left(\frac{T^* - T_c}{T_c} + \frac{\sigma E_0}{a T_c} \right).$$

Зависимость $E(z)$ в данной области представляется следующим образом:

$$E(z) = \begin{cases} E_0 \left[\left(2 \ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{3m}{1+m}} + \mu \frac{\nu v}{\chi} m \frac{4 j_{tp}}{\sigma E_0} \ln^3 \left(\frac{1}{\delta} \right) (z - z_5) \right]^{-\frac{1}{m}}, & z > z_5 \\ \mu m \frac{j_{tp}}{\sigma} (1 - \delta) \exp \left[\frac{\nu v}{\chi^m} (z - z_1) \right], & z < z_1. \end{cases}$$

Поведение фазовой траектории в области 2 ($E(z) \geq E_0$, т.е. $\Psi(E) = 1$) описывается следующим уравнением:

$$E_z' + \mu \frac{\nu v j_{tp}}{\chi} \ln \left| 1 - \frac{\chi \sigma}{\mu \nu v j_{tp}} E_z' \right| = -\frac{d \sigma}{2 j_{tp}} \frac{\nu v}{\chi} (A^2 - E^2),$$

решение которого в пределе $E \rightarrow A$ ($E_z' \rightarrow 0$) имеет вид

$$E = A \cos \left(\frac{z - z_3}{z_0} \right),$$

где $z_0^2 = [-c^2 \nu / (4 \pi a j_{tp})] 2 \ln(1/\delta)$ – полуширина области данного решения, z_3 – координата точки максимума $E(z)$ (см.рис.6б).

Зависимость скорости термомагнитного солитона v от его амплитуды A может быть найдена из спивки решений на границе областей 1 и 2 и определяется следующим выражением:

$$v^2 = \frac{a c^2}{8 \pi \nu j_{tp} \ln(1/\delta)} A^2.$$

Отметим, что ширина солитона в основном определяется пространственным масштабом решения в области 2: $\Delta z = 2z_0$.

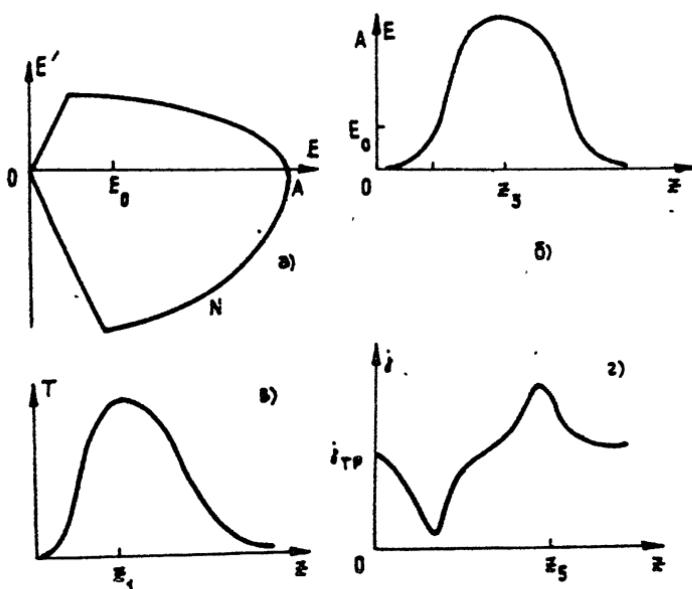


Рис. 6:

Таким образом, полученные результаты позволяют описать нелинейную динамику развития термомагнитных возмущений большой амплитуды, развивающихся на фоне бездиссипативного тока. На начальном этапе наблюдается резкий (степенной с показателем $\simeq 1/m \gg 1$) рост возмущений E и T вблизи некоторой заданной точки образца с координатой $z = z_0 = \text{const}$. А на некоторой стадии наблюдается экспоненциальный спад возмущения (см.рис.6б).

Приведем численные оценки для сверхпроводника с большим параметром Гинзбурга – Ландау $\varepsilon \simeq 10$. Подставляя типичные значения H_j , E_0 и j_c^0 (см.[4]) нетрудно получить следующие оценки:

$$v = \frac{\pi c E_0}{2H_j} \left(\frac{j_c^0}{j_{\text{тр}}} \right)^{1/2} \simeq 10^2 \text{ см}/c, \quad \Delta z = \frac{2H_j}{\pi H_e} \left(2 \frac{j_c^0}{j_{\text{тр}}} \ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{1/2}, \quad l_0 \simeq l_0,$$

где l_0 – глубина экранирования внешнего магнитного поля H_e , H_j – поле скачка потока [4].

Опишем теперь пространственное распределение температуры и плотности тока в области локализации солитона. Для определения зависимости $T(z)$ воспользуемся соотношением (3):

$$T(z) = T_c - \frac{j(z) - \sigma E(z)}{a\Psi(E)}, \quad (18)$$

где $j(z) = [-c^2/(4\pi\sigma)]E'_z + j_{\text{тр}}$. Подставив в (18) вышеописанные зависимости $E(z)$, получаем для различных областей фазовой плоскости следующие выражения для $j(z)$ и $T(z)$:

в области 1 -

$$j(z) = \begin{cases} j_{tp} \left\{ 1 + 4 \ln^3 \left(\frac{1}{\delta} \right) \left[\left(2 \ln \frac{1}{\delta} \right)^{\frac{3m}{1+m}} + \mu m \frac{\nu v 4 j_{tp}}{x \sigma E_0} \ln^3 \left(\frac{1}{\delta} \right) (z - z_s) \right]^{-\frac{1}{m}} \right\}, & z > z_s \\ j_{tp} \left[1 - (1 - \delta) \exp \left(-\frac{\nu v}{x^m} (z - z_1) \right) \right], & z < z_1 \end{cases}$$

и, соответственно, выражения для $T(z)$, определяющие характер поведения теплового фронта описываемой структуры, имеют вид

$$T(z) \simeq \begin{cases} T_c - \frac{j_{tp}}{a} \left\{ 1 + 4 \ln^3 \frac{1}{\delta} \left[\left(2 \ln \frac{1}{\delta} \right)^{\frac{3m}{1+m}} + \mu m \frac{\nu v 4 j_{tp}}{x \sigma E} \ln^3 \frac{1}{\delta} (z - z_s) \right]^{-\frac{1}{m}} \right\}, & z > z_s, \\ T_c - \frac{j_{tp}}{a} \left[\exp \left(-\frac{\nu v}{x} (z - z_1) \right) - (1 - \delta) \exp \left(\frac{\nu v}{x^m} (z - z_1) \right) \right], & z < z_1. \end{cases}$$

в области 2 -

$$j(z) = j_{tp} + \frac{c^2 A \sin[(z - z_s)/z_0]}{4 \pi v z_0},$$

а координатная зависимость $T(z)$ имеет следующий вид:

$$T(z) = T_c - \frac{j_{tp} \{ 1 + \sin[(z - z_s)/z_0] + \{ \sigma A \cos[(z - z_s)/z_0] / j_{tp} \} \}}{a \Psi(A) \cos^m[(z - z^3)/z_0]}.$$

Отметим, что координата максимума теплового поля $T^* = T(z_1) = T_c - j_{tp}(\delta - \sigma E_0/j_{tp})/a$ не совпадает с координатами максимумов электрического поля $z = z_3$ и тока $z = z_s$ ($j_{max} = j(z_s) \simeq 3j_{tp}/2$).

Ввиду того, что в задаче не рассматривается возможность перехода образца в нормальное состояние, необходимо наложить на температуру следующее условие: $T(z_1) = T^* < T_c$. Из соотношения (18) следует, что данному неравенству удовлетворяет семейство термомагнитных солитонов, определяемое свободным параметром задачи δ :

$$\delta > \sigma E_0 / j_{tp}.$$

Таким образом, диссипация энергии, осуществляемая в процессе резистивного магнитного потока, приводит к локальному разогреву вблизи точки $z = z_1$ (см.рис.6в) и соответственно к существенному понижению плотности тока в области $z \simeq z_1$ ($j_{min} = j(z_1) = j_{tp}\delta$, см.рис.6г) при сохранении полного тока, протекающего в образце:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} j dz = I_{tp} - c^2 \frac{E(\infty) - E(-\infty)}{4 \pi v} = I_{tp},$$

где I_{tp} – транспортный ток.

6. ТЕРМОМАГНИТНАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА

В случае, когда амплитуда токового возмущения значительно превышает величину j_{tp} , в уравнении (11) можно опустить последнее слагаемое, связанное с транспортным током j_{tp} и понизить его порядок на единицу:

$$\mu \left(\frac{E'}{E^m} \right)' + \frac{[1 + \mu(1-m)]E'_\xi}{E^m} + E^{1-m} - \frac{a\chi E^2}{2\nu^2 v^2 E_0^m} + \text{const} = 0. \quad (19)$$

В качестве граничных условий к уравнению (19) примем условия (13а), (13б). Для наглядности рассмотрим случай модельной ВАХ ($m = 1$). Для упрощения вида уравнения (19) представим $E(\xi)$ в виде

$$E = A \exp(-y), \quad 0 < y < \infty$$

и уравнение (19) примет следующий вид:

$$\mu y''_{\xi\xi} + y'_\xi - 1 + \frac{c^2 A^2 a \exp(-2y)}{8\pi v^2 \nu \sigma E_0} = 0, \quad (20)$$

где постоянную const в (19) определили из условия для y , y' , y'' ($y \rightarrow -\infty$) = 0. Условие $\mu \ll 1$ означает, что разогрев сверхпроводника происходит адиабатически, и в (2) можно пренебречь членом, ответственным за теплопроводность. Соответственно в (20) опускаем вторую производную и получаем

$$y'_\xi = \beta [1 - \exp(-2\mu y)], \quad (21)$$

где $\beta = (ac^2 A^2)/(8\pi v \nu \sigma E_0)$. Оценка показывает, что опущенное слагаемое является величиной первого порядка малости по отношению к y'_ξ :

$$\mu y''_{\xi\xi} / y'_\xi = 2\mu \exp(-2y).$$

Решая (21), получаем

$$y = \ln[1 + \exp(2\beta\xi)]/2$$

или

$$E^2(\xi) = \frac{A^2}{1 + \exp(2\beta\xi)} = \frac{A^2[1 - \tanh(\beta\xi)]}{2}.$$

Распределение температуры и тока находится с помощью (9), (10):

$$T(\xi) = T_c + \frac{\sigma E_0}{a[1 - \beta \exp(2\beta\xi)/[1 + \exp(2\beta\xi)]]} - \frac{j_{tp} E_0 [1 + \exp(2\beta\xi)]^{1/2}}{a A}.$$

$$j(\xi) = \frac{\beta \sigma A \exp(2\beta\xi)}{[1 + \exp(2\beta\xi)]^{3/2}}, \quad j_{\max}(\xi_*) \approx 0,4\beta\sigma A, \quad \xi_* = \frac{\ln 2}{2\beta}.$$

Используя граничные условия (13а), (13б), получаем выражения для β и, соответственно, для скорости волнового фронта:

$$\beta \approx \frac{j_c^0(T_0)}{\sigma E_0} \gg 1, \quad v^2 = \frac{ac^2 A^2}{8\pi \nu j_c^0(T_0)}.$$

Заметим, что ширина волнового фронта $\Delta\xi \sim 1/\beta$. Соответствующие профили тепловой и магнитной волн в случае $m = 1$ представлены на рис.6 б,в.

В случае $m \ll 1$ решение уравнения (19), описывающее распределение электромагнитного и теплового поля внутри сверхпроводящего образца выглядит следующим образом:

$$E(z) = \begin{cases} -A\text{th}\left[\frac{\mu}{(1+\mu)^2} \frac{j_c^0}{\sigma E_0} \frac{(z-z_0)\nu v}{x}\right], & z < z_0 \\ 0, & z > z_0 \end{cases}$$

и

$$T(z) \simeq \begin{cases} T_0 + \frac{j_c^0}{a} + \frac{\sigma E}{a} - \frac{j_{tp}}{aV(E)}, & z < z_0 \\ T_0, & z > z_0 \end{cases}$$

Конечность производных E'_z и T'_z в точке $z = z_0$ объясняется необходимостью обрезать решения из-за требования $(jE) > 0$ или $E > 0$. Ширина волнового фронта равна

$$\Delta z = \frac{(1+\mu)^2 \sigma E_0}{\mu} \frac{x}{j_c^0 \nu v} \simeq 10^{-1} \cdot 1l_0,$$

и зависимость скорости V ударной волны от ее амплитуды A задается следующим выражением:

$$V = \left(\frac{ac^2 A^2}{8\pi j_c^0 \nu} \right)^{1/2} = \frac{\pi c A}{2H_j} = 1 \text{ m/c},$$

где H_j – поле скачка потока.

Таким образом, в зависимости от поставленных граничных условий (адиабатические или изотермические) и величины амплитуды токовых возмущений (относительно j_{tp}) магнитный поток может проникать в образец в виде стационарных термомагнитных волн – ударной волны и солитона.

7. УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕРМОМАГНИТНЫХ СТРУКТУР

Безусловно, анализируя вышеописанные нелинейные термомагнитные структуры, необходимо обсудить проблему устойчивости найденных решений. Поэтому, в этой главе мы исследуем устойчивость нелинейных структур по отношению к малым возмущениям их профиля. Запишем искомые решения системы (2),(3),(9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} T(z,t) &= T_*(z) + \delta T(z,t) \exp(\lambda t), \\ E(z,t) &= E_*(z) + \delta E(z,t) \exp(\lambda t), \\ j(z,t) &= j_*(z) + \delta j(z,t) \exp(\lambda t), \end{aligned} \quad (22)$$

где T_* , E_* , j_* – есть выражения, определяющие термомагнитные структуры, а δT , δE , δj – амплитуды малых возмущений его профиля, развивающихся во времени связанным образом с инкрементом затухания λ . Подставляя выражения (22) в модифицированную систему уравнений (2), (3), (9) (в случае $\mu \ll 1$, как уже говорилось, эффекты теплоотвода пре-небрежимо малы и мы опускаем слагаемое в уравнении (2), ответственное за теплопроводность) и линеаризуя полученные выражения по малой амплитуде, мы получаем следующую систему уравнений на малые возмущения $\delta T(u)$, $\delta E(u)$ и $\delta j(u)$:

$$\delta T'_u - \frac{\lambda z_0 \delta T}{v} + \frac{z_0(j_* \delta E + E_* \delta j)}{\nu v} = 0,$$

$$\delta j = V(T_*, E_*) \sigma \delta E - \Psi(E_*) a \delta T, \quad (23)$$

$$\delta j'_u = -\frac{c^2 \delta E''_{uu}}{4 \pi v z_0} - \frac{\lambda z_0 \delta E'_u}{v},$$

где $u = z/z_0$ (см. z_0 в разд. 5), $V(T_*, E_*) = m j_*/\sigma E_* + 1 - m$.

Спектр возмущений критического состояния весьма широк. Возмущения, сопровождающие распространение нелинейной структуры, могут обладать различными временными масштабами. Будем называть медленными такие, время развития которых $\Delta t = 1/\lambda$ больше времени распространения нелинейной структуры $\Delta t_c = \Delta z/v$; $\lambda \Delta z/v \ll 1$. Для быстрых возмущений справедливо обратное неравенство $\lambda \Delta z/v \gg 1$. Анализ проблемы устойчивости в общем случае весьма затруднителен, поэтому мы ограничимся исследованием динамики медленных возмущений, как наиболее существенных [4].

Используя интеграл последнего уравнения системы (23),

$$\delta j = -\frac{c^2 \delta E'_u}{4 \pi v z_0} - \frac{\lambda c^2 \delta E}{4 \pi v^2},$$

найденный в рамках метода возмущений с точностью до первой поправки по параметру $\lambda \Delta z/v \ll 1$, а также исключая температуру T , систему уравнений (23) удается свести к дифференциальному уравнению второго порядка типа Шредингера на преобразованные возмущения $\Phi(u) = \delta E(u) \exp[-1/2 \int (f(u) du)]$:

$$\Phi''_{uu} + U(u) \Phi = 0, \quad (24)$$

описывающее движение квантовой частицы в эффективной потенциальной яме $-U(u)$, размеры и глубина которой определяются параметрами фоновой нелинейной структуры (также как и функция f).

A. Термомагнитный солитон. В случае термомагнитного солитона функции $U(\xi)$ и $f(\xi)$ выглядят следующим образом:

$$U(u) = \frac{m A E'_*}{2 E_*^2} - \frac{m^2 A^2}{4 E_*^2} + \Psi(E_*) - \frac{\Psi^2(E_*) E_*^2}{4 A^2} - \frac{\lambda z_0 m A}{E_* v},$$

$$f(u) = \frac{\sigma A V(T_*, E_*)}{j_{tr}}.$$
(25)

Зависимость $U(u)$ изображена на рис.7а.

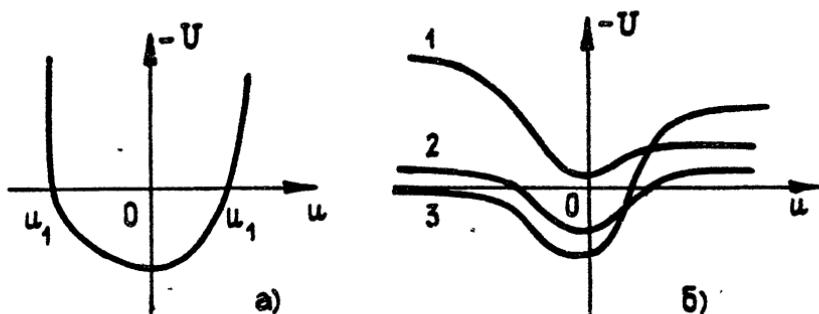


Рис. 7:

Заметим, что в случае термомагнитного солитона наиболее опасными будут возмущения, развивающиеся в областях, охватывающих центральную часть С (в силу большой величины фонового поля $A \gg E_0$ в этой области), а также области переднего фронта (область 1) - в силу его протяженности. Подставив в (25) решения уравнения (11), соответствующие переднему фронту солитона, и оставляя в выражении на $U(u)$ наиболее существенные слагаемые ($\sim 1/E_*$, $E_*(u) \rightarrow 0$), мы можем записать в пределе $m \ll 1$, равнение (24) в виде

$$zY''_{zz} + (1-z)Y'_z - \gamma Y = 0,$$

где $Y(z) = \Phi(z) \exp[z/2]$, $z = -m[1 + mA(u - u_1)/E_0]^{1/m}$, $\gamma = 1 - \Lambda E_0/A$, $\Lambda = \lambda z_0/v$, решение которого выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(a, b, z)$:

$$Y(-z) = C_1 \exp[z] F(1 - \gamma, 1, -z).$$

Соответственно функция $\delta E_+(u)$ имеет следующий вид:

$$\delta E_+(u) = C_1 \exp\left[-\frac{m}{2}\left(1 + \frac{mA(u - u_1)}{E_0}\right)^{\frac{1}{m}}\right] F\left[1 - \gamma, 1, m\left(1 + \frac{mA(u - u_1)}{E_0}\right)^{\frac{1}{m}}\right].$$

В области 2 ($-u_1 < u < u_1$, $m = 0$) уравнение (24) примет следующий вид:

$$\Phi''_{uu} + \left(1 - \frac{\cos(u - u_1)}{4}\right) F = 0 \quad (26)$$

Полагая модуляцию "частоты" в уравнении (26) малой ($\sim 25\%$), можно воспользоваться методом возмущений для отыскания решения. В итоге получаем следующее выражение для $\Phi(u)$:

$$\Phi(u) \simeq C_2 \cos(u - u_1 + \pi/2)$$

или

$$\delta E_-(u) = C_1 \exp\left[-\frac{\sigma A}{2j_{tp}(u - u_1)}\right] \cos(u - u_1 + \pi/2),$$

где фаза определяется из граничного условия $\delta E_-(-u_1) = 0$ (см.рис.7а). Нас будут интересовать пространственно-ограниченные решения $\delta E(u)$, удовлетворяющие граничным условиям (12) или решения, удовлетворяющие следующим условиям $\delta E_-(-u_1) = 0$, $\delta E_+(+\infty) = 0$, $\delta E_-(u_1) = \delta E_+(u_1)$. Как нетрудно убедиться, настоящее уравнение имеет лишь тривиальные решения ($C_{1,2} = 0$), что означает устойчивость C по отношению к медленным возмущениям.

В. Ударная волна. В случае УВ функции $U(u)$ и $f(u)$ имеют следующий вид:

$$f(u) = -\frac{2E'_*}{E_*} - \frac{az_0 E_*^2}{\nu v E_0}$$

$$U(u) = c_1 ch^{-2} ku - c_2 (\gamma - thku)^2,$$

где $\gamma = 2\Lambda/b + 1$, $b = az_0 A^2/(\nu v E_0)$, $k = v z_0 j_c^0/(D_m \sigma E_0)$, $c_1 = az_0 A^2 j_c^0/(\nu D_m \sigma E_0^2)$, $c_2 = a^2 z_0^2 A^4/(4\nu^2 v^2 E^4)$. Зависимость $U(u)$ для различных Λ (кривая 1 — $\Lambda_1 = 3/2b$, кривая 2 — $\Lambda_2 = -b$, кривая 3 — $\Lambda_3 = -2b$) представлена на рис.7б. После подстановки соответствующих выражений E_* , j_* и замены переменной $y = thku$ мы получим уравнение на $\Phi(y)$ в виде

$$[(1-y^2)\Phi_y']_y + \left[2 - \frac{(\gamma-y)^2}{4(1-y^2)} \right] \Phi = 0. \quad (27)$$

Решение (27) можно также выразить через гипергеометрическую функцию $\Phi(y) = (1+y)^p(1-y)^q F(k+1, k-1, 2q+1, (1-y)/2)$, где $k = p+q+1/2$. В случае $q = (1-\gamma)/4$, $p = (1+\gamma)/4$, $k = 1$ $\Phi(y)$ имеет вид

$$\Phi(u) = (1+y)^{\frac{1+\gamma}{4}}(1-y)^{\frac{1-\gamma}{4}}.$$

Окончательно, общие выражения для δE , δT суть

$$\delta E(y) = \delta E_0 (1+y)^{\frac{3+\gamma}{4}} (1-y)^{\frac{3-\gamma}{4}}, \quad \text{где } -2 < \frac{\Lambda}{b} < 1, \quad (28)$$

$$\delta T(y) = \delta T_0 (1+y)^{\frac{3+\gamma}{4}} (1-y)^{\frac{1-\gamma}{4}}, \quad \text{где } -2 < \frac{\Lambda}{b} < 0.$$

Здесь мы учли, что $\exp[-1/2 \int f(u)du] = 1/chku = (1-y)^{1/2}(1+y)^{1/2}$. Справа в (28) указаны границы изменения параметра Λ , в пределах которых возмущения удовлетворяют граничным условиям, т.е. остаются ограниченными при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Очевидно, что термомагнитная волна будет устойчива, так как верхняя граница значений Λ для локализованных тепловых возмущений равна нулю.

Анализ устойчивости найденных структур по отношению к быстрым термическим возбуждениям ($\Lambda \gg 1$) проводится аналогичным образом. Детальный анализ этой ситуации позволяет установить, что совместное развитие локализованных термомагнитных возмущений профиля нелинейных структур возможно лишь при $\lambda < 0$.

8. ОБСУЖДЕНИЕ

Обсудим теперь условие применимости нашего рассмотрения. Полученные здесь результаты справедливы, если

$$\lambda \ll \Delta z \ll L \quad (29)$$

где λ – среднее расстояние между вихрями (см. разд.1), L – характерный размер образца. Левая часть неравенства (29) определяет границу применимости континуального подхода при макроскопическом описании магнитного потока, правая часть неравенства характеризует корректность использованных нами граничных условий при описании реальной ситуации в образцах конечных размеров.

Таким образом, полученные результаты позволяют описать нелинейную стадию развития абсолютной термомагнитной неустойчивости. На начальном этапе наблюдается экспоненциальный рост возмущений, на более поздней стадии развития неустойчивости в глубь проводника распространяется стационарная ударная волна. В случае, когда в сверхпроводнике возбуждается ограниченная термомагнитная неустойчивость (в области спектра $k_j < k < k_s$, см.рис.3), магнитный поток может распространяться в виде термомагнитного автосолитона. Кроме того, термомагнитные структуры можно наблюдать, инициируя движение магнитного потока во внешнем магнитном поле либо механическим возбуждением (например, встряхиванием образца), либо с помощью теплового импульса конечной амплитуды, помещая сверхпроводящий образец либо в изотермические условия для наблюдения солитона, либо в адиабатические – для наблюдения ударной волны.

В работе предсказана возможность распространения в перпендикулярном току направлении одномерных волны переключения (кинка) и пространственно-локализованной структуры (солитона) в сверхпроводнике с транспортным током. Описана структура нелинейных волн, найдена зависимость скорости их распространения от амплитуды E_m (а именно, $V \approx E_m$). Показано, что структура термомагнитного солитона, будучи существенно асимметричной, характеризуется резким (экспоненциальным) ростом термомагнитных возмущений на заднем фронте и пологим (степенным) спаданием возмущений на переднем фронте форма волны переключения симметрична относительно точки перегиба. Доказана устойчивость вышеописанных нелинейных структур относительно малых возмущений их профиля. Обсуждена возможность экспериментального исследования нелинейных волн в сверхпроводниках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубецков Д.И., Рабинович М.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М.: Наука, 1984.
2. Тинкхам М. Введение в сверхпроводность. М., 1980.
3. Кембелл А., Иветс Дж. Критические токи в сверхпроводниках. - М.: Мир, 1975.
4. Минц Р.Г., Рахманов А.Л. Неустойчивости в сверхпроводниках, - М.:

- Наука, 1964. С.262.
5. Zeldov E., Amer N.M., Koren G., Gupta A., Gambino R.J., McEllfresh M.W. // Appl.Phys.Lett. ... V.56. P.680.
 6. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. - М.: Наука, 1973.
 7. Островский Л.А., Степанянц Ю.А., Цимлинг Л.Ш. // Труды 2 международной рабочей группы. Киев. 1985, ч.2. С.201.
 8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. -М.: Физматгиз, 1963.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
в декабре 1992 г.

UNDERWATER SOUND GENERATION AND SCATTERING FROM A BUBBLE COLUMN

S.W. Yoon L.A. Crum

1. INTRODUCTION

It is well known that ocean ambient noise levels in the frequency range from a few hundred hertz to several tens of kilohertz are well correlated with wind speed [1]. However the nature of the source of low frequency acoustic emissions is still pretty much unknown. In the ocean, it is well observed that bubbles abound in the surface layer down to several meters in depth. Such bubble clouds can be generated by various processes involving hydrodynamic interactions between air and water and be formed in the upper layers down to tens of meters by Langmuir circulation, turbulence and other mechanisms [2].

Since a bubble may roughly be regarded as a mechanical oscillator the resonance frequency f_0 of a bubble of radius a in water is given approximately by [3]

$$f_0 = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho}}, \quad (1)$$

where P_0 is the ambient external pressure, ρ the water density and γ the ratio of specific heats. For a frequency $f_0 = 500 \text{ Hz}$, the relation requires a radius $a \approx 0.7 \text{ cm}$ with $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 1.4$. It is rather unlikely that such large bubbles are created in significant numbers. This problem can be circumvented by the hypothesis of collective oscillation of bubbles as a system of coupled oscillators. Such coupling frequencies can be substantially lower than the resonance frequencies of individual bubbles. The same conclusion is met if one considers the fact that a mixture of air bubbles and liquid has a sound speed much lower than that of the pure liquid even at gas volume fractions as low as 1%.

The acoustic roles of such bubble clouds in water were investigated theoretically and experimentally to be a likely mechanism to generate ambient noise below 1 kHz in the ocean [4, 5]. If such a bubble cloud is a good noise source, it might also serve as a strong scatterer of sound in water. To simplify the experimental geometry for the analysis we have produced a bubble "cloud" in the form of a bubble column. This geometry is not of direct relevance to oceanic conditions, but, in a rough sense, it can represent a typical shape of bubble clouds at the ocean surface.

In the present paper we review an experimental confirmation of the collective oscillation hypothesis and show the agreements of the measurements with the theoretical predictions, and also present a preliminary experimental observation and compare it with the predictions from the averaged bubble dynamic theory [6] assuming that the pressure field driving the oscillations of the bubbles is the average pressure field in the liquid instead of the actual liquid pressure at the position occupied by the bubble.

2. EXPERIMENTAL PROCEDURE

It was not easy to reproduce the bubble clouds with a constant void fraction. To avoid this problem, we made bubble-filled columns which had a constant flux of air and thus also of bubbles. With these bubble columns we were able to maintain a constant void fraction within a fixed geometrical configuration. By adjusting the flow rate through the flowmeter into the bubble maker we could precisely vary the void fraction of the bubble column as well as the size of individual bubbles. A schematic diagram of the experimental apparatus for the passive noise and for the scattering measurements is shown in Fig.1.

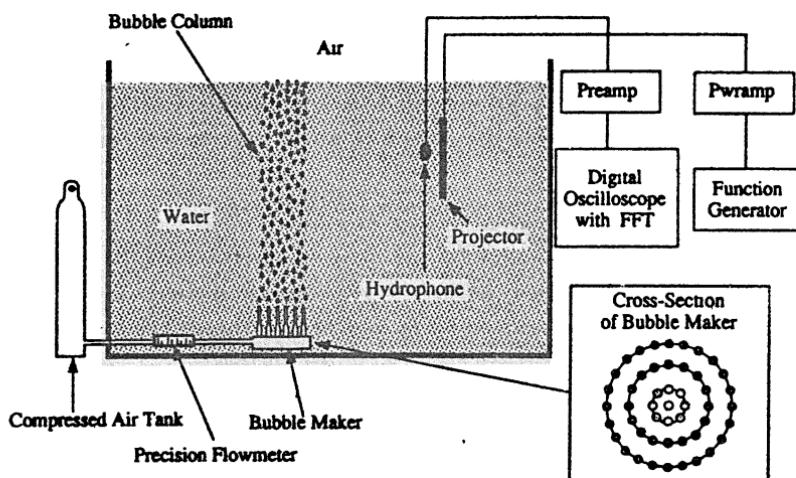


Figure 1: Diagram of experimental apparatus.

As shown in an inset of Fig.1, we designed a circular cross-sectional bubble maker which consisted of forty nine 22-gauge hypodermic needles with square-cut tips as nozzles. The individual nozzles are connected by separate tubings with a manifold to an air-supply system to provide the same air pressure at each nozzle. To eliminate any other mechanical noise sources, compressed air was used as the air supply system. Details about the bubble maker are described in the paper by Yoon et al. [5].

The bubble column resonance frequency was measured with a hydrophone (B&K 8103) plus a charge amplifier (B&K 2635) connected to a dual channel digital storage oscilloscope (LeCroy 9400). We carried out these measurements in a small water tank with dimensions of $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$. For noise analyses we used the FFT algorithm and power spectrum averaging capability of the LeCroy 9400 digital storage oscilloscope. The Nyquist frequency was 1.25 kHz and the transform size was 2500 points. Each data point corresponds to the peak resonance frequency obtained from an average of 50 power spectra with

an on-screen resolution of 4 Hz. The standard deviations of the bubble column resonance frequencies were less than 2% for 50 spectrum averages.

For the backscattering measurement from a bubble column, a sound projector (NRL:USRD Type F-33) was driven with a frequency range of 11 kHz to 50 kHz. The tone bursts of 250 μs width were fed to the power amplifier (ENI 1040 L) by a function generator (HP 3314 A) with the repetition rate of 1 s to avoid possible interference with the reflection from the walls of the water tank. A hydrophone (B&K 8103) with a charge amplifier (B&K 2635) was installed at the center of the projector to receive echo signals from scatterers. The bubble columns were generated as scatterers in water at a distance of 1.6 m from the projector. These measurements were carried out in a water tank with dimensions of 2.1 m \times 2.1 m \times 1.8 m. For gathering the backscattering data of pressure amplitudes from bubble columns, we manually averaged 50 measurements for each case. We did not use the waveform averaging function in the LeCroy 9400 digital storage oscilloscope because the backscattering from the bubble columns cannot always occur from the same location of the columns due to bubble motions. The standard deviations of the backscattering pressure amplitudes were around 25% for 50 measurements.

3. THEORY

A. Bubble column resonance. The theory used to analyze the data has been described in detail in references 5, 6 and 7 and only a brief description will be given here. Imposing the boundary conditions of continuity of pressure and normal particle velocity between the bubble column and the pure liquid and the boundary conditions of a pressure-release surface at both the water surface and the tip of the bubble maker (which were determined by direct measurements of the pressure field in the bubble column) we can get the following characteristic equation for the resonance frequencies within the column:

$$x \frac{J_{m-1}(X)}{J_m(X)} = s \frac{\frac{H_{m-1}^{(2)}(s)}{H_m^{(2)}(s)} - \tilde{H}_m \frac{H_{m-1}^{(1)}(s)}{H_m^{(1)}(s)}}{1 - \tilde{H}_m}, \quad (2)$$

where

$$x = R_c \sqrt{k^2 - \left(\frac{N\pi}{2h}\right)^2}, \quad s = R_c \sqrt{k^2 - \left(\frac{N\pi}{2h}\right)^2}, \quad (3)$$

and

$$\tilde{H}_m = \frac{\frac{H_{m-1}^{(2)}(y)}{H_m^{(2)}(y)} - \frac{m}{v}}{\frac{H_{m-1}^{(1)}(y)}{H_m^{(1)}(y)} - \frac{m}{v}} \left(\frac{H_{m-1}^{(1)}(s)}{H_m^{(2)}(s)} \right) \left(\frac{H_m^{(2)}(y)}{H_m^{(1)}(y)} \right), \quad (4)$$

with

$$y = R_E \sqrt{k^2 - \left(\frac{N\pi}{2h}\right)^2}. \quad (5)$$

where J_m is the Bessel function of order m , $H_m^{(1)}$ and $H_m^{(2)}$ are the Hankel functions of first and second kinds of order m , respectively, R_c is the bubble column radius, R_E is the water tank radius, k is the wave number, h is the

bubble column height and N is the mode number. The numerical solution of Eq. (2) is described in detail in reference 7.

B. Bubble column scattering. A scattering theory based on the averaged bubble dynamics theory was also described in detail in other papers [6, 7] and only a final formula for a backscattering pressure field will be given here for an infinite plane wave incident on a bubble column of radius R_c whose axis coincides with the axis:

$$P_s = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x, s) H_n^{(2)}(k_x r) e^{-ik_x z}, \quad (6)$$

where

$$T_n = \frac{s \frac{J_{n-1}(s)}{J_n(s)} - x \frac{J_{n-1}(x)}{J_n(x)}}{x \frac{J_{n-1}(x)}{J_n(x)} - s \frac{H_{n-1}^{(2)}(s)}{H_n^{(2)}(s)}} \frac{J_n(s)}{H_n^{(2)}(s)}, \quad (7)$$

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2, \quad s = k_x R_c, \quad z = \sqrt{k_m^2 - k_x^2} R_c,$$

and P_s is the backscattering pressure amplitude, P_0 is the incident pressure amplitude, k is the wave number, R_c is the bubble column radius, $H_n^{(2)}$ is the Hankel function of second kind and $T_n(x, s)$ is a function of x and s which can be determined by the boundary conditions of the scatterer; i.e., at the surface of bubble columns as in the case of bubble column resonance. As the argument of T_n , the wave numbers depend on the sound speeds in the medium of the scatterer and the ambient fluid. The backscattering pressure fields can be numerically simulated with the appropriate physical parameters such as density and sound speed within the bubble column [8]:

$$\rho_m = (1 - \beta)\rho_w + \beta\rho_b, \quad (8)$$

$$c_m^2 = c_w^2 / [1 + 4\pi c_w N_b / (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega)], \quad (9)$$

where the subscripts m , w and b represent the quantities in the bubbly mixture, water and air bubble, respectively. ρ is the density of the liquid, β is the void fraction of the bubble column, c is the sound speed, N_b is the number of bubbles per unit volume of the bubble column, a is the individual bubble radius, ω_0 is the angular resonance frequency of an individual bubble, ω is the incident angular frequency and δ is the damping constant of the bubbly mixture, which is composed of the viscous and thermal dissipation and the scattered sound field [9].

4. RESULTS AND DISCUSSIONS

A. Bubble column resonance. We investigated the dependence of the bubble column resonance frequency on the void fraction for various column radii. The physical radii of the bubble-makers are 6.0 cm, 4.0 cm and 2.0 cm, respectively. However, the effective radii are larger than the physical sizes of the bubble makers because of zigzag rising motions of individual bubbles. Effective bubble column radii of 7.0 cm, 5.4 cm and 4.6 cm were generated respectively and directly measured from photographs.

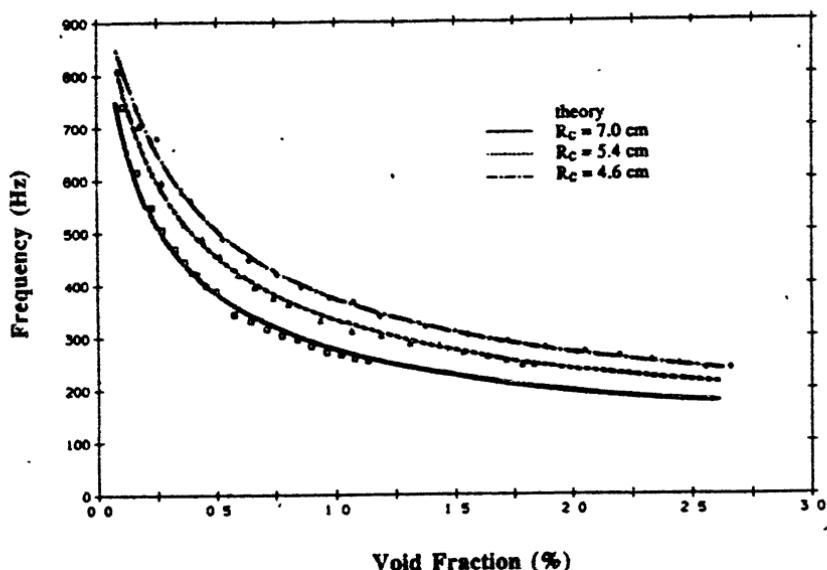


Figure 2: Variation of the measured (various symbols) and theoretical (various curves) values of the bubble column resonance frequency with void fraction for three different column radii.

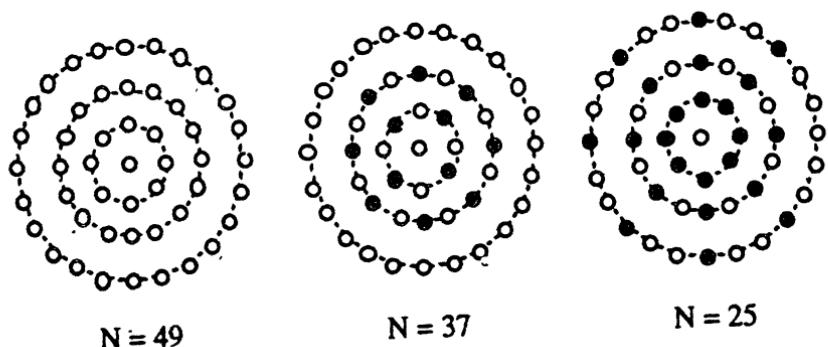


Figure 3: Cross-section of cylindrical bubble maker. N is the number of opened nozzles. The open and closed circles represent the opened and closed nozzles respectively.

Figure 2 shows the dependence of the bubble column resonance frequency

on the void fraction for various column radii. For case A, all forty nine hypodermic needles were open and the effective bubble column radius was 7.0 cm ; for case B, the outer ring was closed, twenty five needles were open with the effective radius of 5.4 cm ; for case C, both outer rings were closed, the remaining nine needles were open with the effective radius of 4.6 cm . For all cases the air flow rates varied from about 1 ml/s to near 80 ml/s with a precision of about 0.5 ml/s while the bubble column height was held constant at 85 cm . The measurements were performed in tap water in the small water tank. The measured data for case A, B and C are represented with the symbols of square, triangle and circle, respectively. Also shown with the lines in Fig. 2 are the theoretical predictions based on a numerical solution from the averaged effective wave equation [4]. The theoretical lines represent the frequency of the lowest mode as a function of void fraction for the three column radii examined in the experiment.

B. Bubble column scattering. To measure the dependence of the backscattering pressure amplitude on the void fraction, we varied the void fractions by keeping the same sizes of individual bubbles.

By changing the numbers of opened nozzles in the bubble maker as shown in Fig. 3 and by keeping the same flow rate into the individual nozzles, we were able to vary the void fractions with the same shapes of bubble columns. The mean effective radius of the bubble column was measured to be 15 cm and the individual bubble radius to be 2.4 mm . Both measurements were obtained from photographs.

Figure 4 shows the dependence of the backscattering pressure amplitude from the bubble column on the nondimensional column radius kR_c of the bubble column for three different void fractions. The range of kR_c is given as $7.0 \leq kR_c \leq 31.9$ for the projecting frequency range, $11\text{ kHz} \leq f \leq 50\text{ kHz}$. The peak backscattering amplitudes occurred at $kR_c \cong 10$. The relatively small amplitude peaks were also observed at $kR_c \cong 25$. As expected we observed that the higher the void fraction, the stronger the backscattering pressure amplitude.

The theoretical curve is given by Eq. (6) solved numerically from the averaged effective wave equation [7] for the void fraction of 0.17% . The theoretical curve fairly well agrees with the measurements.

5. CONCLUSIONS

By performing relatively simple experiments, we have been able to understand some details about how a bubble cloud acts as a source of low frequency ambient noise or an acoustic scatterer in water. The bubble column resonance experiment performed in a laboratory water tank demonstrates an important aspect of the oscillations of bubble clouds, *viz.*, that the individual bubbles can engage in collective oscillations that portray a gross feature of the cloud itself. The measurements for the resonance frequency of the bubble column give strong evidence for the possibility that a major source of ambient noise in the ocean in the few hundred hertz region is that due to the collective oscillations of bubble clouds. From the bubble column scattering experiment we observed that the backscattering pressure amplitude from the bubble column increased as the void fraction was raised.

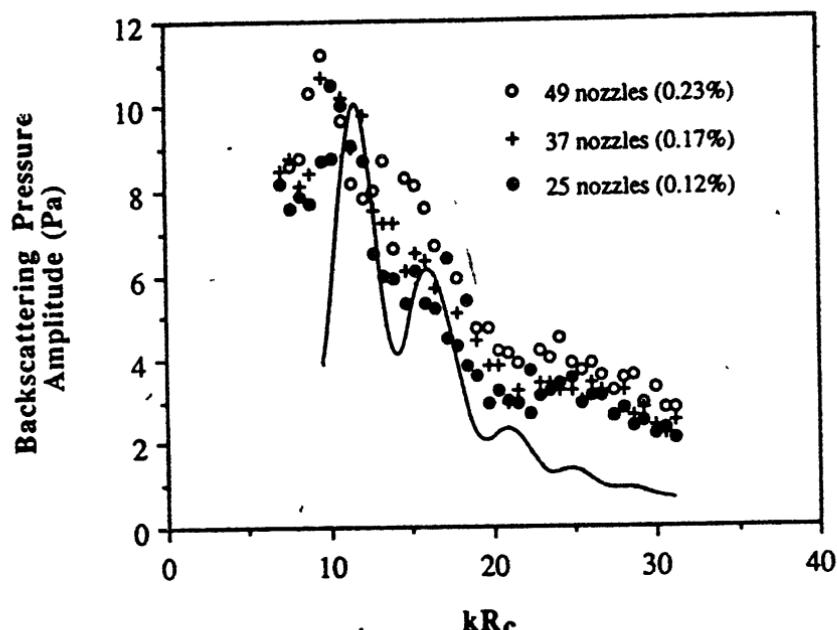


Figure 4: Backscattering pressure amplitude vs. nondimensional bubble column radius kR_c . The void fraction is varied with the number of the opened nozzles in the bubble maker. Shown on the figure are the void fractions observed for the same flow rate per each nozzle (*i.e.*, constant individual bubble size, $a = 2.4\text{mm}$). The solid line is the theoretical curve from the averaged effective wave equation with $b = 0.17\%$.

The theoretical results for the backscattering pressure amplitude based on the assumption of the averaged pressure fields gave reasonable agreement with the experimental data.

The authors are grateful to Professor A. Prosperetti of The Johns Hopkins University for his valuable comments. This work was supported by the U.S. Office of Naval Research and the David Taylor Research Center.

REFERENCES

1. Wenz G. Acoustic ambient noise in the ocean // J. Acoust. Soc. Am. 1962. V.34. P.1936–1956.
2. Thorpe S.A. The effect of Langmuir circulation on the distribution of submerged bubbles caused by breaking wind waves // J. Fluid Mech. 1984. V.142. P.151–170.
3. Minnaert M. On musical air-bubbles and the sounds of running water // Philos. Mag. 1933. V.16. P.235–248.
4. Lu N.Q., Prosperetti A. and Yoon S.W. Underwater noise emissions from

- bubble clouds // IEEE J.Ocean.Eng. 1990. V.15. P.275–281.
5. Yoon S.W., Crum L.A., Prosperetti A. and Lu N.Q. An investigation of the collective oscillations of a bubble cloud // J.Acoust.Soc.Am. 1991. V.89. P.700–706.
6. Prosperetti A. and Lezzi A. Bubble dynamics in a compressible liquid. Part 1, First-order theory // J.Fluid Mech. 1986. V.168. P.457–478.
7. Lu N.Q. Bubble clouds as Sources and Scatters of Underwater Sound. – Ph.D. dissertation, The Johns Hopkins University, 1991.
8. Commander K.W. and Prosperetti A. Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments // J.Acoust.Soc.Am. 1989. V.85. P.732–746.
9. Devin C. Survey of Thermal, Radiation, and Viscous Damping of Pulsating Air Bubbles in Water // J.Acoust.Soc.Am. 1959. V.31. P.1654–1667.

Sung Kyun Kwan University, Korea;
National Center for Physical Acoustics
The University of Mississippi, U.S.A.

Поступила в редакцию
2 сентября 1992 г.