

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

Ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том 36, № 6

Нижний Новгород

1993

Содержание

Безрученко Л.И., Денисов А.В., Яснов Л.В. О радиоизлучении петельных структур на Солнце на частотах, близких к критической	467
Кулижский А.В., Тинин М.В. Распространение сигнала в двухслойной среде со случайными крупномасштабными неоднородностями	475
Езерский А.Б. Временная перемежаемость хаоса параметрически возбуждаемой капиллярной ряби. II	484
Грибова Е.З., Саичев А.И. Корреляционная функция флюктуаций интенсивности в фрактальной случайно-неоднородной среде	493
Ванжа А.В., Мальцев А.А., Силаев А.М. Оптимальное оценивание в дискретном времени момента появления импульсного возмущения в случайном сигнале	498
Мальцев А.А., Серебряков Г.В. Эффективность обработки сигналов от пространственно-распределенных источников в адаптивных антенных решетках	512
Плятинов М.А. О гранично-контактных задачах электромагнитной теории дифракции	520
Запевалов В.Е., Малыгин С.А., Цимлинг Ш.Е. Мощные гиротроны на второй гармонике циклотронной частоты	543
Артеменко С.Н., Каминский В.Л., Самойленко Г.М. Формирование СВЧ импульсов в сверхпроводящей системе SLED	553

Краткие сообщения и письма в редакцию

Младенцев А.П., Якимов А.В. Оценка погрешности определения параметров фликерного спектра	559
Азаров А.А. Шумовые параметры источников сигнала ошибки в системах АПЧ СО ₂ лазеров с ВЧ накачкой	564
Клюенков В.М., Баранов И.А., Мещеряков А.В. Низкочастотный шум в полевых транзисторах с затвором Шоттки типа ЗП326	568

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора),
В. В. ЖЕЛЕЗНИКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ,
А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ,
А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН,
В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, С. А. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. МУРАШКИНА

Формат 70×108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать
Усл. печ. л. 88 Усл. кр.-отт. 7,42 Уч.-изд л 9,1
Тираж 730 экз Заказ //047 . Цена 25 р. 00 к.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,
ул. Большая Печерская, 25.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71

Отпечатано с готового набора

Межвузовская типография
при Нижегородском государственном университете

603600, Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37.

© "Известия высших учебных заведений. Радиофизика", 1993

УДК 52.77

**О РАДИОИЗЛУЧЕНИИ ПЕТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР НА СОЛНЦЕ
НА ЧАСТОТАХ, БЛИЗКИХ К КРИТИЧЕСКОЙ**

Л. И. Безрученко, А. В. Денисов, Л. В. Яснов

Получено точное выражение для оптической толщины неоднородного плазменного слоя (слой Эпштейна), моделирующего петельную структуру на Солнце, для случая волны TE поляризации при наклонном падении. Найдены ограничения на углы падения волны на токовый слой, при которых выражение для оптической толщины хорошо описывает также случай TM - поляризации. Рассматриваются простейшие модели корональной петли и показывается, что спектр интенсивности радиоизлучения без учета магнитного поля может иметь широкий максимум на частотах, близких к плазменной частоте в центре слоя. Проводится сопоставление с данными наблюдений.

Спектр интенсивности радиоизлучения локальных источников, связанных с флоккулами, может иметь немонотонный характер в дециметровом диапазоне волн [1]. В таких источниках трудно ожидать магнитных полей, напряженность которых была бы достаточна для эффективного действия магнито-тормозного механизма генерации радиоволн. Поэтому мы проведем рассмотрение, оставаясь в рамках теплового тормозного механизма излучения.

Возможность немонотонного характера спектра интенсивности при тепловом тормозном механизме генерации радиоволн связана с тем, что коэффициент поглощения μ зависит от показателя преломления n как [2]

$$\mu = \omega_p^2 v / (\omega^2 n c), \quad (1)$$

где ω_p - плазменная частота, ω - частота излучения, v - эффективная частота соударений электронов с протонами, c - скорость света. При $\omega \rightarrow \omega_p$ показатель преломления стремится к нулю, и тогда коэффициент

поглощения растет, растет и интенсивность излучения, если источник продолжает оставаться прозрачным. Расчеты оптической толщины τ токовых слоев плазмы, плазменная частота которой задана выражением

$$\omega_p^2 = \omega_{po}^2 / \text{ch}^2(z/2l), \quad (2)$$

где ω_{po} - плазменная частота в центре слоя, l - полутолщина слоя, z - координата, отсчитанная от центра слоя вдоль градиента концентрации электронов, были проведены в работах [3, 4]. В работе [3] обращено внимание на наличие максимума в функции $\mu\omega^2$ на частоте ω_{po} . В работе [4] указывается на возможность диагностирования подобных слоев в солнечной атмосфере по спектральным характеристикам их радиоизлучения. Эти результаты получены, однако, лишь для случая нормального падения волны на слой.

Волновое уравнение для электрического поля E_y плоской волны TE-поляризации, падающей под углом Q к градиенту электронной концентрации, имеет вид [5]

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k^2 [\epsilon(z) - \sin^2 \theta] E_y = 0, \quad \epsilon(z) = (n+i\mu)^2, \quad k = \omega/c. \quad (3)$$

В случае наклонного падения в формуле (1) нужно заменить h на $n_{\text{эфф}} = \sqrt{\cos^2 \theta - \omega_p^2/\omega^2}$. Тогда коэффициент поглощения запишется в виде

$$\mu = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/(\omega^2 \cos^2 \theta)}} \frac{\omega_p^2 v}{\omega^2 c}. \quad (4)$$

Рассмотрим слой, плазменная частота которого описывается выражением (2). Считаем также, что электронная температура T_e постоянна. В приближении ВКБ для решений уравнения (3) оптическая толщина слоя равна

$$\tau = \int \mu dz = \frac{\omega_{po}^2 v_0 l}{\omega^2 \cos \theta} f \left(\frac{v_0}{\cos^2 \theta} \right), \quad (5)$$

где v_0 - частота столкновений в центре слоя,

$$f \left(v' = \frac{v_0}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{1 + v'}{2(v')^{3/2}} \ln \frac{1 + \sqrt{v'}}{1 - \sqrt{v'}} - \frac{1}{v'}. \quad (6)$$

Функция $f(v')$ при $\theta = 0$, как и следовало ожидать, переходит в выражение, приведенное в [3]. Видно, что $f(v')$ неограниченно растет при $v' \rightarrow 1$. Как указано в работе [3], функция $f(v_0)$ может быть ограничена ее значением в точке $\omega = \omega_{\text{гр}}$, которая определяется из условия $|\omega_{\text{гр}} - \omega_{\text{po}}| = c/(2\pi l)$. Это условие вытекает из предела применимости приближения геометрической оптики. При наклонном падении имеем $|\omega'_{\text{гр}} - \frac{\omega_{\text{po}}}{\cos \theta}| = c/(2\pi l)$. Тогда граничное значение запишется в виде

$$f_{\text{гр}} = \ln \left(4\pi \frac{\omega_{\text{po}} l}{c} \right) - 1. \quad (7)$$

Обобщая метод определения τ , предложенный в [4], на случай наклонного падения, можно получить также следующее значение:

$$\tau = \frac{l v_0 \cos \theta}{c} \left[\ln \left(4\pi \frac{\omega_{\text{po}} l}{c} \right) - 1 \right]. \quad (8)$$

Таким образом, значения τ , полученные разными способами, отличаются друг от друга на множитель 2π под знаком логарифма. Поэтому возникает необходимость более строгого вычисления величины τ .

С этой целью воспользуемся строгим решением уравнения (3) для модели плазменной частоты (2). Тогда для коэффициентов прохождения D и отражения R в случае изотропной плазмы с потерями [6] при условии, что частота столкновений v постоянна внутри слоя и равна v_0 , имеем

$$D = \frac{\Gamma(1/2 + d_1 + i(d_2 - a)) \Gamma(1/2 - d_1 - i(d_2 + a))}{\Gamma(1 - ia) \Gamma(-ia)}; \quad (9)$$

$$R = D \cdot \frac{\cos \pi(d_1 + id_2)}{\sin(ina)}, \quad (10)$$

где

$$a = 2l \frac{\omega}{c} \cos \theta,$$

$$d = -\frac{i}{2} \left[\frac{(4\omega_{\text{po}} l/c)^2}{1 + (\nu_0/\omega)^2} - 1 - i \frac{\nu_0}{\omega} \frac{(4\omega_{\text{po}} l/c)^2}{1 + (\nu_0/\omega)^2} \right], \quad (11)$$

$$d_1 = \operatorname{Re} d, \quad d_2 = \operatorname{Im} d,$$

$\Gamma(x)$ - гамма-функция. Формулы (9), (10) позволяют строго рассмотреть просачивание через токовый слой, в частности, в области частот $|\omega_{\text{grp}} - \omega'_{p0}| \leq c/(2\pi l)$. Применяя асимптотику Стирлинга для $\Gamma(x)$ при $|x| \gg 1$ и полагая, что частота излучения ω близка к плазменной ω'_{p0} ($d_2 \approx a$), из соотношения $1 - e^{-t} = 1 - |R|^2 - |D|^2$ находим, что

$$t = d_1 \ln \left[\left(\frac{1}{2} - d_1 \right)^2 + \left(d_2 + a \right)^2 \right], \quad (12)$$

из которого, с учетом (9), получаем

$$\tau = \frac{\nu_0 l \cos \theta}{c} \ln \left(\frac{2\omega_{p0} l}{c} \right). \quad (13)$$

Это значение несущественно отличается от приближенных, приведенных выше (на 5 - 20% в зависимости от $\omega_{p0} l / c$).

При наклонном падении волны на слой необходимо, вообще говоря, учитывать волны как TE-, так и TM-поляризации. Уравнение для функции $V(z)$, связанной с TM-полем H_y -соотношением,

$$V = H_y / \sqrt{\epsilon(z)}, \quad (14)$$

имеет вид [5]

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + k^2 [\epsilon(z) - \sin^2 \theta + S(z)] V = 0, \quad (15)$$

где $S(z)$ - производная Шварца:

$$S(z) = \frac{1}{2k^2} \frac{d^2 \ln \epsilon(z)}{dz^2} - \frac{1}{4k^2} \frac{d \ln \epsilon(z)}{dz}. \quad (16)$$

В случае, когда $\omega_p^2(z)$ задана выражением (2), строго решить уравнение (11) не удается. Однако можно получить достаточные условия на углы падения θ , при которых различие между TM- и TE-поляризацией несущественно, т. е. производная Шварца $S(z)$ выступает в роли источника слабых "локальных" отражений [7]. Оценки параметров плазмы показывают, что в рассматриваемом нами случае петельных структур выполняются неравенства

$$kl(\nu_0/\omega) < 1, \quad kl\sqrt{\nu_0/\omega} \gg 1. \quad (17)$$

С учетом (17) можно показать, что при углах $\theta > 1/k\sqrt{\nu_0/\omega}$ функция $S(z)$ вносит малый вклад в коэффициент уравнения (15), поэтому в качестве нулевого приближения $V^0(z)$ для ТМ-поля можно взять решение уравнения (3), а поправка определится выражением [8]

$$\Delta V(z) = V_1(z) \int_{-\infty}^z \frac{1}{\Delta_0} V_2(z) V^0(z) S(z) dz + \quad (18)$$

$$+ V_2(z) \int_z^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} V_1(z) V^0(z) S(z) dz,$$

где V_1 и V_2 - решения, удовлетворяющие граничным условиям выше и ниже максимума слоя ($z = 0$), Δ_0 - их определитель Бронского. Из (18) с учетом нулевого приближения $V^0(z)$ получаем поправку к коэффициенту отражения за счет производной Шварца [7]:

$$|\Delta R| = \frac{1}{k l \cos \theta} \times \quad (19)$$

$$\times \left| \frac{D^2}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} + id; \frac{1}{2} - id; 1 - ia; (1 + e^u)^{-1} \right) S(u) e^{-iau} du \right|,$$

где $u = z/l$, ${}_2F_1$ - гипергеометрическая функция. Интеграл (17) может быть оценен, если вычислить вычет в ближайшем к вещественной оси полюсе функции $S(u)$. Для малости вклада производной Шварца необходимо выполнение неравенства $|\Delta R/R| \ll 1$, откуда вытекает ограничение сверху на угол падения волны на слой

$$\theta < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k l \sqrt{\nu_0/\omega}}. \quad (20)$$

Таким образом, достаточным критерием для использования выражения (13) для оптической толщины в случае ТМ-поляризации являются следующие ограничения на угол θ :

$$\frac{1}{k l \sqrt{\nu_0/\omega}} < \theta < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k l \sqrt{\nu_0/\omega}}, \quad k l \sqrt{\nu_0/\omega} > 1. \quad (21)$$

До сих пор мы полагали, что частота столкновений постоянна внутри слоя. Если учесть, что v пропорционально величине $\omega_p^2(z)$, то

для слоя (2) имеем следующее значение для диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon^*(\frac{z}{L}) = 1 - \frac{v_0}{\operatorname{ch}^2(z/2L)} - i \frac{v_0}{\omega} \frac{v_0}{\operatorname{ch}^4(z/2L)}. \quad (22)$$

Строгое решение для слоя (16) невозможно, однако рассматриваемые нами эффекты просачивания проявляются, главным образом, в области, где $\omega \sim \omega_{po}$. Тогда (22) с точностью до членов порядка $(z/2L)^2$ допускает аппроксимацию вида

$$\epsilon^*(\frac{z}{L}) \approx 1 - v_0^* + 2v_0^* \frac{(\frac{z}{L})^2}{2L} - \dots, \quad (23)$$

после чего можно воспользоваться приближенным выражением

$$\epsilon^*(\frac{z}{L}) = 1 - \frac{v_0^*}{\operatorname{ch}^2(z/2L)}, \quad (24)$$

где

$$v_0^* = v_0(1 + i\frac{v_0}{\omega}), \quad L^* = L(1 - i\frac{v_0}{\omega}). \quad (25)$$

Таким образом, и в случае (22) применимы формулы (9), (10), если учесть соотношение (17).

Рассмотрим теперь простейшую модель корональной петли. Ее форму зададим параболой $z(y) = \alpha y^2 + \beta$, где y - координата вдоль поверхности Солнца, z - высота петли (см. рис. 1). Будем также считать, что электронная концентрация n_e не зависит от другой координаты вдоль поверхности Солнца x , а электронная температура T_e постоянна в петле. Тогда поток излучения, приходящийся на единичный интервал по x , можно записать в виде

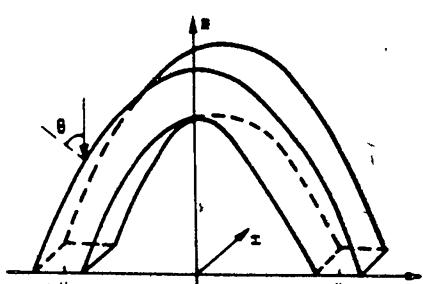


Рис. 1.

$$F = \frac{2\pi T_e}{\lambda^2} \int_{-y_0}^{y_0} (1 - e^{-\tau(\theta(y))}) dy, \quad (26)$$

где α - постоянная Больцмана, $\theta = \arccos(1 + 4\alpha^2 y^2)^{-1/2}$ - угол между нормалью к слою и лучом зрения, $2y_0$ - размер петли вдоль координаты y . В расчетах полагалось, что длина петли постоянна (т. е. не зависит от y_0). Постоянная длина петли определялась, исходя из условия $\alpha^2 = 6,5$ и $y_0 = 0,5$. Высота такой петли приблизительно равна y_0 . Если бы в такой петле $n = 1$, то поток теплового тормозного излучения не зависел бы от y_0 . В нашем случае ситуация изменяется. Оптическая толщина слоя τ вычислялась по формулам (5) и (10). Луч зрения пересекает вершину петли под углом $\theta = 0$. Для корональной петли типичны следующие значения n_e и T_e : $n_e \approx 6 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_e = (2 + 3) \cdot 10^6 \text{ K}$ [9].

В ряде работ приводятся доказательства того, что существенная часть плазмы солнечной атмосферы сосредоточена в неразрешимых мелкомасштабных структурах. Так, по данным работы [10] их размеры лежат в интервале $10^5 + 10^7 \text{ см}$.

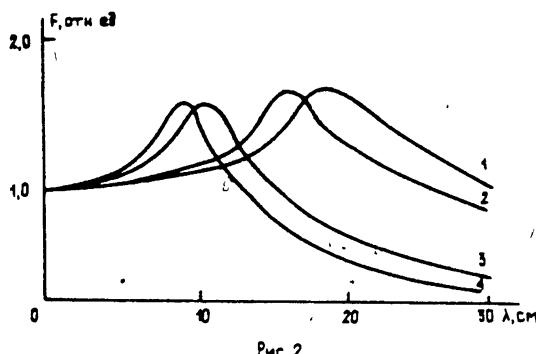


Рис. 2

На рис. 2 приведены спектры F для следующих параметров петли: $l = 10^6 \text{ см}$, $T_e = 2 \cdot 10^6 \text{ K}$, $\lambda_{po} = 40 \text{ см}$ (что соответствует электронной концентрации в центре петли $n_e^0 = 7 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$). Кривые 1 - 4 получены для значений $y_0 = 0,55; 0,50; 0,35$ и $0,30$ соответственно. Видно, что получаются спектры потоков с широким максимумом в области $\omega \leq \omega_{po}$. При этом для получения роста потока с длиной волны на коротких волнах нет необходимости задаваться слишком большой концентрацией n_e^0 , так как рост определяется в значительной мере формой петли. Максимум в спектре будет появляться лишь в том случае, если $\tau(\omega_{po}/\cos \theta) < 1$. Это означает, что должна быть не слишком велика n_e и не слишком мала T_e . Это приводит к заключению, что подобные

спектры должны наблюдаться у источников со сравнительно слабой интенсивностью, что в действительности и имеет место. У мощных активных областей при отсутствии магнитных полей достаточной напряженности указанные особенности могут появляться лишь в том случае, если они включают в себя множество тонкоструктурных образований. Интересно также отметить, что 10% изменения y_0 (см. кривые 1 и 2 на рис. 2) вызывают на отдельных участках спектра изменения в потоке до 30%. При этом спектр таких флюктуаций имеет достаточно сложный вид. На разных участках спектра изменения потока могут происходить с разным знаком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ипатова Л. П., Соснина Н. А., Яснов Л. В. //Солнечные данные. 1984. N 1. С.81.
2. Железняков В. В. Радиоизлучение Солнца и планет. -М.:Наука, 1964.
3. Железняков В. В., Злотник Е. Я. //Астрон. журн. 1980. Т.57. С.1038.
4. Кузнецов В. Д. //Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т.23. N 6. С.648.
5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. - М.: Наука, 1967.
6. Безрученко Л. И., Макаров Г. И. //Сб.: Проблемы дифракции и распространения волн. 1966. Вып. 5. С. 71.
7. Красильников В. Н. //Сб.: Проблемы дифракции и распространения волн. 1966. Вып. 6. С. 67.
8. Макаров Г. И. //Сб.: Проблемы дифракции и распространения волн. 1962. Вып. 1. С. 1.
9. McKenzie D.L. //Astrophys. J. 1987. V.320. P.426.
10. Гребинский А. С. //Письма в Астрон. журн. 1987. Т.13. N 8. С.710.

Санкт-Петербургский государственный
университет

Поступила в редакцию
25 января 1992 г.

RADIOEMISSION SPECTRUM OF LOOP STRUCTURES ON THE SUN AT THE PENETRATION FREQUENCY

L. I. Bezroutchenko, A. V. Denisov, L. V. Yasnov

The exact expression for optical thickness of inhomogeneous plasma layer (Epstein's layer) modelling a loop structure on the Sun is obtained. The horizontal and vertical polarisation of waves oblique incidence is discussed. It is found that the radioemission spectrum below the penetration frequency has the broad maximum.

УДК 538.574.8

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИГНАЛА В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ
СО СЛУЧАЙНЫМИ КРУПНОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Кулижский А. В., Тинин М. В.

В данной статье получено выражение для средней интенсивности сигнала, распространяющегося в среде с полупрозрачным слоем и крупномасштабными случайными неоднородностями. Решение получено методом интерферционного интеграла и результирующее выражение представляется в виде интеграла по синусам углов выхода парциальных волн. Для примера рассматривается случай, когда излученный импульс имеет гауссову форму. Приводятся результаты численного моделирования средней интенсивности сигнала и ширины полосы частот полупрозрачности.

Задаче об отражении и прохождении волн через детерминированный "потенциальный барьер" посвящено немало работ [1 - 3]. Но в реальной ситуации показатель преломления наряду с детерминированной составляющей имеет и случайную добавку, что приводит к новым интересным физическим эффектам. Например, при вертикальном зондировании ионосфера наблюдается полупрозрачность слоя, т. е. когда одновременно присутствует отражение от двух слоев, расположенных на разных высотах. Наиболее значителен этот эффект, когда полутолщина нижнего слоя может быть сравнима с вертикальными размерами неоднородностей. В этом случае часть парциальных волн из падающего на слой пучка будет отражаться от слоя, а часть преломляться через слой, и эта картина имеет случайный характер.

Рассмотрим распространение скалярной волны в среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\vec{r})$. В этом случае, как известно, искомое поле точечного источника удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 U + k^2 \epsilon(\vec{r}) U = \delta(\vec{r}), \quad (1)$$

k - волновое число для свободного пространства. $\delta(\vec{r})$ - дельта-функция Дирака.

Представим диэлектрическую проницаемость среды $\epsilon(\vec{r})$ в виде суммы детерминированной составляющей $\epsilon_0(\vec{r})$ и малого случайного возмущения $\nu(\vec{r})$:

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon_0(\vec{r}) + \nu(\vec{r}), \quad |\nu(\vec{r})| \ll 1. \quad (2)$$

Для простоты ограничимся случаем вертикального падения и плоскослоистого фона. Более общий случай наклонного распространения рассматривается совершенно аналогично. Пусть начало декартовой системы координат помещено в точку расположения источника и приемника.

В качестве функции $\epsilon_0(\vec{r}) = \epsilon_0(z)$ можно взять следующую:

$$\epsilon_0(z) = 1 - \left(\frac{f_E}{f} \right)^2 \exp \left\{ - \frac{(z-z_E)^2}{a_E^2} \right\} - \left(\frac{f_F}{f} \right)^2 \exp \left\{ - \frac{(z-z_F)^2}{a_F^2} \right\}. \quad (3)$$

Здесь f_E , f_F - критические частоты нижнего слоя E и верхнего слоя F соответственно, a_E , a_F - их полутолщины, z_E , z_F - высоты минимумов диэлектрической проницаемости слоев E и F , f - рабочая частота. Считаем, что f_F больше f_E , и что рабочая частота меньше чем f_F , так что слой F является полностью отражающим. Так как неоднородности крупномасштабные, то можно использовать обобщения геометрической оптики.

Для решения задачи применим метод интерференционного интеграла [4] и представим решение уравнения (1) в виде

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} U_p(\vec{s}) d^2s, \quad (4)$$

где $\vec{s} = (s_x, s_y)$ - синусы углов выхода парциальной волны $U_p(\vec{s})$. В интересующем нас случае, когда рабочая частота излученного сигнала близка к критической частоте нижнего слоя, падающая парциальная волна расщепится на две: первая отразится от нижнего слоя и вернется обратно, а вторая, пройдя нижний слой, отразится от верхнего слоя. Далее она снова расщепится на две: отраженную и преломленную слоем E и т. д. Мы рассмотрим случай однократного

отражения. Тогда поле парциальной волны можно записать в виде

$$U_p = R(b_1)A_1 \exp(ik\phi_1) + D(b_1)D(b_2)A_2 \exp(ik\phi_2). \quad (5)$$

Первое слагаемое соответствует волне, отраженной от нижнего слоя, а второе - отраженной волне от верхнего слоя. $R(b)$ и $D(b)$ - коэффициенты отражения и преломления через нижний слой E соответственно, которые с точностью до несущественного слагаемого в аргументе равны [1, 2]

$$R(b) = \frac{e^{-i\pi/2}}{(1+e^{-\pi b})^{1/2}}, \quad D(b) = \frac{1}{(1+e^{\pi b})^{1/2}}. \quad (6)$$

b_1 , b_2 - значения функции $b(x, y)$ в точках прохождения парциальной волной слоя E до и после отражения от верхнего слоя F . A_1 и A_2 , ϕ_1 и ϕ_2 - геометрические амплитуды и эйконал отраженной и преломленной парциальных волн соответственно. Формулы для A и ϕ имеют вид [4]

$$\phi = s_x x + s_y y + \int_0^\tau \epsilon_0(z(\tau')) d\tau'; \quad (7)$$

$$A = - \frac{ik}{8\pi^2 (1-s_x^2 - s_y^2)^{1/4} \sqrt{J(\tau)}}, \quad (8)$$

где $J(\tau) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\tau, s_x, s_y)}$ - Якобиан преобразования лучевых координат τ , s_x , s_y в декартовы x, y, z .

Функция b определяется по формуле [2]

$$b = \frac{2k}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 - \epsilon(\vec{r}) \right\}^{1/2} dz, \quad (9)$$

где z_1 , z_2 - точки поворота, z и η - локальные в окрестности каустики декартовы координаты, ψ - обобщенный эйконал. Учитывая (2) воспользуемся теорией возмущений:

$$\psi = \bar{\psi} + \tilde{\psi}, \quad (10)$$

где $\bar{\psi}$ - детерминированная часть ψ , а $\tilde{\psi}$ учитывает вклад

неоднородностей. Вследствие того, что фон плоскослоистый, а падение волны близко к вертикальному, $\partial\bar{\psi}/\partial\eta \approx 0$ [1, 2]. Подставляя разложения (2) и (10) в (9) и учитывая близость точек поворота к z_E , получим

$$b = \frac{k}{\pi} (\bar{\alpha} + \tilde{\alpha}); \quad (11)$$

$$\bar{\alpha} = -2\pi \frac{\varepsilon_0(z_E)}{\sqrt{2\varepsilon''_0(z_E)}}, \quad \tilde{\alpha} = -2\pi \frac{\nu(x, y; z_E)}{\sqrt{2\varepsilon''_0(z_E)}}, \quad (12)$$

$$\varepsilon''_0(z_E) = \left. \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial z^2} \right|_{z=z_E}.$$

Здесь $\bar{\alpha}$ -детерминированная часть, а $\tilde{\alpha}$ -случайная добавка в функции b , характеризующей ширину "потенциального барьера". Будем считать, что $\tilde{\alpha}(x, y)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma(x, y)$.

Аналогично для эйконала можно получить разложения

$$\phi = \bar{\phi} + \tilde{\phi}, \quad (13)$$

где $\bar{\phi}$ имеет вид (7), а

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{2} \int_0^\tau \nu(\vec{r}(\tau')) d\tau' \quad (14)$$

Здесь интегрирование выполняется вдоль невозмущенных траекторий.

Можно считать, что $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\phi}$ статистически независимы, а также что $\tilde{\phi}$ имеет нормальное распределение, так как волна проходит много неоднородностей на своем пути. Так как расстояние между экстремумами слоев E и F много больше характерных вертикальных размеров неоднородностей, то слагаемые в (5) будут некоррелированы между собой.

Для дальнейшего учтем, что при $k_p \gg 1$ можно положить

$$\frac{1}{1+e^{kp}} = \begin{cases} 1, & p < 0 \\ 0, & p > 0 \end{cases} \quad (15)$$

Рассмотрим для примера случай, когда импульс имеет гауссову

форму

$$Q(t) = \exp(-i\omega_0 t - t^2/T^2), \quad (16)$$

ω_0 - несущая циклическая частота, T - полуширина импульса и $T\omega_0 \gg 1$. Подставим разложения (5), (11), (13) в (4). Введем суммарно-разностные переменные:

$$\vec{s}_1 - \vec{s}_2 = \vec{s}_-, \quad \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = 2\vec{s}_+,$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_-, \quad \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_+.$$

Разложим в ряд Тейлора функции по степеням \vec{s}_- и ω_- и воспользуемся (15). Тогда для средней интенсивности сигнала $I(t)$ получим

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t), \quad (17)$$

где

$$I_1(t) = -\frac{T^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A_1|^2 \exp\left\{ik(p_1, \Delta) - \frac{k^2}{2}(D_1 p_1, p_1) - T^2(\omega_+ - \omega_0)^2\right\} \times \\ \times \int_0^{\infty} W_1(\alpha) d\alpha d\omega_+ d\omega_- d^2 s_+ d^2 s_-, \quad (18)$$

$$I_2(t) = -\frac{T^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A_2|^2 \exp\left\{ik(p_2, \Delta) - \frac{k^2}{2}(D_2 p_2, p_2) - T^2(\omega_+ - \omega_0)^2\right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_2(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\omega_+ d\omega_- d^2 s_+ d^2 s_-, \quad (19)$$

где

$$p_1 = \begin{pmatrix} \partial \bar{\phi}_1 / \partial s_x \\ \partial \bar{\phi}_1 / \partial s_y \\ \partial \bar{\phi}_1 / \partial \omega - t/k \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} s_{x-} \\ s_{y-} \\ \omega_- \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \langle (\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial s_x})^2 \rangle & \langle (\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial s_x} \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial s_y}) \rangle & \langle (\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial s_x} \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \omega}) \rangle \\ \langle (\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial s_x} \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial s_y}) \rangle & \langle (\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial s_y})^2 \rangle & \langle (\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial s_y} \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \omega}) \rangle \\ \langle (\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial s_x} \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \omega}) \rangle & \langle (\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial s_y} \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \omega}) \rangle & \langle (\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \omega})^2 \rangle + \frac{T^2}{2k^2} \end{pmatrix}.$$

P_2 и D_2 определяются аналогично, но с заменой $\bar{\phi}_1$ и $\tilde{\phi}_1$ на $\bar{\phi}_2$ и $\tilde{\phi}_2$:

$$w_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(\alpha - \bar{\alpha})^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$w_2(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)^2/\sigma_1^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\rho(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)(\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)/\sigma_1/\sigma_2 + (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)^2/\sigma_2^2 \right] \right\},$$

где $\bar{\alpha}$ подставляется из (12).

Угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю. Интеграл по α в (18) - интеграл ошибок, а интеграл по α_1, α_2 в (19) можно вычислить, используя метод, аналогичный [5]. Тогда, используя метод Лапласа [6] для вычисления интегралов по разностным переменным, получаем

$$I_1(t) = \frac{\sqrt{2\pi}T}{k^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_1|^2 F(\bar{\alpha}_1 / \sqrt{2} \sigma_1)}{\sqrt{\det D_1}} \exp\{-0, 5(D_1^{-1} p_1, p_1)\} d^2 s; \quad (20)$$

$$I_2(t) = \frac{\sqrt{2\pi}T}{k^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_2|^2 \{ \theta + V(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \}}{\sqrt{\det D_2}} \exp\{-0, 5(D_2^{-1} p_2, p_2)\} d^2 s; \quad (21)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2) dy$$

- интеграл ошибок. Функция e равна 1, если стационарная точка $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ принадлежит области интегрирования в (19), т.е. если в фоновой среде имеется преломленный луч, и равна нулю в противном случае:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= G \left[\left(\frac{1}{2h_{20}} \right)^{1/2} (h_{20}x + h_{11}y), \left(\frac{h_0}{2h_{20}} \right) y \right] + \\ &+ G \left[\left(\frac{1}{2h_{02}} \right)^{1/2} (h_{02}y + h_{11}x), \left(\frac{h_{0x}}{2h_{02}} \right) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$h_{20} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2}, \quad h_{11} = \frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2},$$

$$h_{02} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_2^2}, \quad h_0 = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty \frac{\exp(-t^2 - y^2)}{t^2 + y^2} dt$$

- обобщенный интеграл ошибок.

Слагаемое $I_1(t)$ можно условно назвать средней интенсивностью отраженного от нижнего слоя E сигнала, а $I_2(t)$ - средняя интенсивность сигнала, отраженного верхним слоем.

С использованием формул (17), (20), (21) проводились численные расчеты средней интенсивности сигнала в среде с полупрозрачным слоем. Для этого были выбраны следующие параметры фоновой среды, см. (3): $f_E = 4$ МГц, $f_F = 7$ МГц, $z_E = 100$ км, $z_F = 300$ км, $a_E = 3$ км, $a_F = 100$ км. Рабочая частота изменялась в пределах от 3 до 5 МГц. Неоднородности описывались гауссовой корреляционной функцией,

$$\begin{aligned} \langle v(\vec{r}_1) v(\vec{r}_2) \rangle &= \alpha_E^2 [1 - \epsilon_0(z)]^2 \times \\ &\times \exp \left\{ - \frac{(x_1 - x_2)^2}{q_x^2} - \frac{(y_1 - y_2)^2}{q_y^2} - \frac{(z_1 - z_2)^2}{q_z^2} \right\}, \end{aligned}$$

где α_c - интенсивность неоднородностей, a_x , a_y , a_z - радиусы корреляции.

В расчетах принималось, что $a_x = a_y = 30$ км, а $a_z = 2,5$ км. В табл. 1 приведены зависимости $J_1 = \max_t I_1(t)$, $J_2 = \max_t I_2(t)$ для $\alpha_c = 0,05$ в зависимости от рабочей частоты, причем величины J_1 и J_2 были нормированы на 1. Для этого случая диапазон частот полупрозрачности составил 1,2 МГц, который определялся по уровню 0,01 от максимального значения средней интенсивности. Аналогичные расчеты для $\alpha_c = 0,03$ показали, что для этого случая диапазон частот полупрозрачности равен 0,7 МГц.

Таблица 1

Зависимость J_1 и J_2 от рабочей частоты f при $\alpha_c = 0,05$

f , МГц	3, 0	3, 45	4, 0	4, 65	5, 0
J_1	1, 0	0, 989	0, 495	0, 01	0, 0
J_2	0, 0	0, 01	0, 493	0, 987	1, 0

Полученные результаты допускают следующую физическую интерпретацию. Когда парциальная волна падает на полупрозрачный слой, то она частично отражается, а частично проходит через него. Распределение энергии между этими компонентами определяется коэффициентами отражения и преломления, значения которых фактически равны 1 или 0. Использование метода интерференционного интеграла позволяет учесть суммарный эффект взаимодействия падающей волны с полупрозрачным слоем.

В заключение следует отметить, что полученные результаты могут быть использованы при интерпретации данных вертикального зондирования ионосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. - М.: Наука, 1989.
2. Кравцов Ю.А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1965. Т. 8. № 4. С.659.
3. Тинин М.В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 12.
4. Орлов Ю.И. //Труды МЭИ. 1972. Т. 119. С. 82.

5. Каратыгин В. А., Розов В. А. // ЖВМ МФ. 1972. Т. 12. № 6. С. 1391.
6. Федорюк М. В. Метод перевала. -М.: Наука, 1977.

Институт прикладной физики
при Иркутском государственном
университете

Поступила в редакцию
1 декабря 1992 г.

SIGNAL PROPAGATION IN DOUBLE LAYERED MEDIUM
WITH RANDOM LARGE SCALE INHOMOGENEITIES

Kulizhsky A.V., Tinin M.V.

In this paper the expression of average signal intensity in medium with semitransparent layer and random large-scale inhomogeneities is obtained. Interference integral method is used and resulting expression is given by double integral on sinus of the elevation angles of plane waves. For example we consider a case when radiation impulse has a Gaussian shape. The results of numerical investigation of the average signal intensity and the semitransparent frequency bandwidth are given.

УДК 537. 86/87: 530. 182

**ВРЕМЕННАЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ ХАОСА ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ
КАПИЛЛЯРНОЙ РЯБИ. II**

А. Б. Езерский

Обсуждаются результаты экспериментального изучения перемежаемости хаоса капиллярной ряби. Получены теоретические оценки условий реализуемости двух нелинейных волновых процессов, наблюдавшихся в этом режиме: возбуждение низкочастотных крупномасштабных движений - гравитационных волн на мелкой воде и субгармоник параметрически возбуждаемых волн. Высказывается гипотеза о взрывном характере перехода к хаосу.

Изучение хаоса параметрически возбуждаемой капиллярной ряби, проведенное в [1], показало, что пространственно-временная структура волновых полей существенным образом зависит от глубины слоя жидкости и надкритичности. В определенном диапазоне этих параметров наблюдается временная перемежаемость, когда регулярные и хаотические волновые поля квазипериодически сменяют друг друга во времени.

Следует подчеркнуть, что явление перемежаемости хаоса широко обсуждается сейчас в литературе в связи с исследованием термоконвекции [2], химических реакций [3], радиофизических устройств [4], однако при анализе экспериментальных данных обычно имеют дело с временными реализациями. При изучении капиллярной ряби мы регистрировали двумерные поля, что позволило изучить и пространственные структуры. Было установлено, что специфическими особенностями режима перемежаемости капиллярных волн являются генерация, во-первых, низкочастотных крупномасштабных колебаний, во-вторых, субгармоник с волновыми векторами кратными $k/3$, где k - волновой вектор волн с частотой, равной половине частоты накачки. Эти нелинейные волновые процессы были идентифицированы в режиме перемежаемости хаоса. Теоретический анализ именно этих нелинейных процессов и проводится в данной работе.

Остановимся сначала на объяснении генерации низкочастотных крупномасштабных движений. Собственно их возбуждение можно было бы предсказать для случая, когда глубина слоя жидкости H такая, что групповая скорость капиллярных волн v_{gr} равна скорости волн на мелкой воде C : $v_{gr} = C$, $C = (Hg)^{1/2}$. В эксперименте, однако, генерация низкочастотных волн наблюдается в несколько ином диапазоне глубин H . Как показали оценки, групповая скорость капиллярных волн, рассчитанная по линейной теории, с частотой 70 Гц составляет $\omega/ak = 36$ см/с, а диапазон скоростей гравитационных волн, в котором наблюдается генерация низкочастотных волн, составляет $v_{gr} = (15 \pm 5)$ см/с.

Для анализа условий генерации крупномасштабных движений получим систему уравнений, описывающую взаимодействие высокочастотных и низкочастотных волн.

Отклонение поверхности η для капиллярной ряби запишем в виде суперпозиции двух взаимоортогональных пар волн

$$\begin{aligned}\eta = & \frac{1}{2}[a_+ \exp(i(k_0 x - \omega_0 t)) + a_- \exp(i(k_0 x + \omega_0 t))] + \\ & + \frac{1}{2}[b_+ \exp(i(k_0 y - \omega_0 t)) + b_- \exp(i(k_0 y + \omega_0 t))].\end{aligned}\quad (1)$$

Такая система капиллярных волн возникает в эксперименте вне зависимости от того, какой использовался резонатор, поэтому для расчетов будем постулировать комбинацию волн (1).

Крупномасштабные движения будем изучать в приближении, что все горизонтальные масштабы значительно больше глубины H . В пренебрежении собственной нелинейностью крупномасштабных движений, представляющих потенциальное поле $\varphi = \varphi(x, y, t)$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - gH \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = & \omega_0/2g \times \\ \times \left[\frac{\partial(|a_-|^2 - |a_+|^2)}{\partial x} + \frac{\partial(|b_-|^2 - |b_+|^2)}{\partial y} \right].\end{aligned}\quad (2)$$

Уравнение (2) необходимо дополнить уравнениями для медленных амплитуд капиллярных волн, которые использовались, например, в [5]. Воздействие гравитационных волн, поле скоростей которых можно представить как $u = \partial\varphi/\partial x$, $v = \partial\varphi/\partial y$, сводится для капиллярных волн к доплеровским сдвигам частоты:

$$\omega_{a_{\pm}} = \mp k \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \omega_{b_{\pm}} = \mp k \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Амплитудные уравнения для модулированных капиллярных волн, включающие доплеровский сдвиг частоты, представляются в виде

$$\frac{\partial a_{\pm}}{\partial t} \pm v_g \frac{\partial a_{\pm}}{\partial x} + \gamma a_{\pm} = i(h + F b_+ b_-) a_{\pm}^* + i\Delta a_{\pm} \mp ik \frac{\partial\varphi}{\partial x} a_{\pm} + \quad (3)$$

$$+ ia_{\pm}(T|a_{\pm}|^2 + S|a_{\pm}|^2 + R(|b_+|^2 + |b_-|^2));$$

$$\frac{\partial b_{\pm}}{\partial t} \pm v_g \frac{\partial b_{\pm}}{\partial y} + \gamma b_{\pm} = i(h + F a_+ a_-) b_{\pm}^* + i\Delta b_{\pm} \mp ik \frac{\partial\varphi}{\partial y} b_{\pm} + \quad (4)$$

$$+ ib_{\pm}(T|b_{\pm}|^2 + S|b_{\pm}|^2 + R(|a_+|^2 + |a_-|^2)).$$

Здесь γ - затухание капиллярных волн, T, S, R, F - коэффициенты нелинейного взаимодействия, явный вид которых приведен в [5], Δ - расстройка $\Delta = \omega_p/2 - \omega_0$. Ограничимся случаем, когда амплитуда капиллярных волн в одной из пар зафиксирована: $b_{\pm} = B$. Изучаемая ситуация будет одномерной, а наличие пары с фиксированной амплитудой эквивалентно дополнительной расстройке $\Delta = \Delta + 2R|B|^2$ и эффективной накачке $h = h + FB^2$.

Рассмотрим возмущение амплитуды волн в виде

$$a_{\pm} = a_0 + \tilde{a}_{\pm} \exp[i(\Omega t - kx)], \quad \varphi = \tilde{\varphi} \exp[i(\Omega t - kx)]$$

на фоне стационарного состояния $a_{\pm} = a_0$, $\varphi = 0$. Для возмущений потенциала низкочастотных движений из уравнения (2) при условии $b_{\pm} = B_0$ будем иметь

$$\tilde{\varphi} = ik \frac{a_0 \tilde{a}_+ - a_0 \tilde{a}_-}{\Omega^2/g - k^2 H}. \quad (5)$$

Если сравнить теперь нелинейные поправки в (3), связанные с самовоздействием (члены порядка $a_0^2 \tilde{a}_+$, $\tilde{a}_0^2 \tilde{a}_-$) и с воздействием гравитационной волны (члены порядка $a_0 \tilde{\varphi}$), то при условии

$$\frac{k \omega k^2}{\Omega^2/g - k^2 H} \gg T, S \quad (6)$$

необходимо учитывать только взаимодействие с волнами на мелкой воде.

Будем считать условие (6) выполненным и рассчитаем дисперсионные уравнения для волн модуляции. Подобная процедура линеаризации уравнений (2) и (3) здесь опускается. Для возмущений на фоне стационарного состояния дисперсионное соотношение имеет вид

$$(\Omega^2 - v_0^2 k^2)((\Omega - i)^2 - (k + d)^2 + \varepsilon_0^2) \times \quad (7)$$

$$\times ((\Omega - i)^2 - (k - d)^2 + \varepsilon_0^2) = -dQk^3\Omega|\eta_0|^2.$$

Здесь введены безразмерные переменные: скорость $v_0 = c/v_{gr}$, надкритичность $\varepsilon_0 = h/\gamma$, добротность капиллярных волн $Q = 16\omega_0/\gamma$, амплитуда наклона капиллярной волны $\eta_0 = ka_0$, безразмерная расстройка $d = \Delta/\gamma$, частота $\Omega = \Omega/\gamma$ и волновое число $k = kv_{gr}/\gamma$.

Если $\eta_0 = 0$, то дисперсионное уравнение (5) распадается на три уравнения:

$$\Omega_{1-2} = \pm v_0 k, \quad \Omega_{3-4} = i \pm ((k + d)^2 - \varepsilon_0^2)^{1/2}, \quad (8)$$

$$\Omega_{5-6} = i \pm ((k - d)^2 - \varepsilon_0^2)^{1/2}.$$

Действительные части (8) изображены на рис. 1. Очевидно, что при $|k \pm d| < \varepsilon_0$ в системе есть апериодическая неустойчивость $\text{Im } \Omega = (\varepsilon_0^2 - (k^2 \pm d^2))^{1/2} - 1$, которая не исчезает и при $\eta_0 > 0$. Однако в этой области k и Ω уравнения (7) вообще не применимы в силу того,

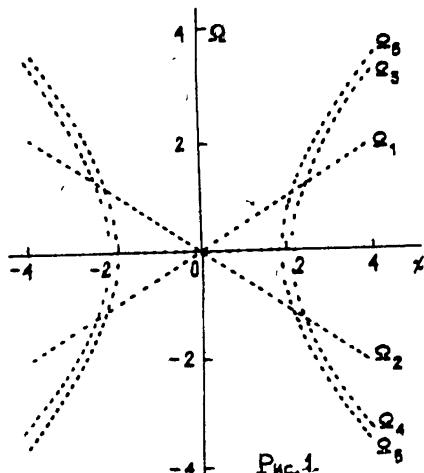


Рис. 1.

что условия (6) не выполняются. Условие (6) выполняется лишь там, где скорость волн модуляции Ω/k близка к скорости гравитационных волн на мелкой воде $v_0 = \sqrt{gH}$. Поэтому будем искать неустойчивость в области Ω и k , где $\Omega_1(k) \approx \text{Re}\Omega_3(k)$ и $\text{Re}(\Omega_1 - \Omega_3) \ll 1$, $\text{Re} \Omega_{1-6} \gg 1$. Для поправок $\tilde{\Omega}_1$ к дисперсионному уравнению $\Omega = \Omega_1$ находим из (7)

$$\text{Im}\tilde{\Omega}_1 = -\frac{d \text{Re}(\Omega_3 - \Omega_5) Q |v_0|^2 k^3}{8(1 + (\text{Re}(\Omega_3 - \Omega_5))^2) \Omega_1} < 0, \quad (9)$$

что указывает на неустойчивость моды $\Omega_1(k)$.

Вычисление дисперсионных соотношений для мод уравнения (7) показало следующие важные особенности.

1. Неустойчивость имеет место, если скорость порядка или меньше групповой скорости капиллярных волн v_{gr} .

2. Знак расстройки Δ не является определяющим для возникновения неустойчивости, важен лишь сам факт ее существования.

Как же сопоставить эти результаты с экспериментальными данными? Очевидно, что в эксперименте низкочастотные гравитационные волны должны быть модами резонатора. Частоты резонаторных мод легко оцениваются, а в эксперименте они определялись по временной зависимости усредненной яркости изображения (см. рис. 1б, кривая 2 [1]). Так для круглой кюветы диаметром $D = 16$ см $f = 0,95$ Гц эта частота близка к частоте моды, пространственная структура потенциала которой $\varphi(r, \theta)$ определяется как $\varphi(r, \theta) = J_2(kr) \cos(2\theta)$, где J_2 – функция Бесселя второго порядка, r – расстояние от центра кюветы, θ – азимутальный угол, $k = 2\pi f / (Hg)^{1/2}$. Из условия, что горизонтальная скорость равна нулю $\frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{r=D/2}=0$ на вертикальной стенке $r = D/2$ можно рассчитать частоту этой моды. В условиях нашего эксперимента $f = 0,95$ Гц, что довольно близко к измеренной в эксперименте частоте $f = 0,92$ Гц. В квадратной кювете в режиме перемежаемости хаоса возбуждались моды со структурой $\varphi(x, y) = (\cos kx + \cos ky)$, где $k = 2\pi/L$. Согласно оценкам частота этой моды $f = 2\pi/L\sqrt{gH}$ была $f = 1,55$ Гц, тогда как измеренная в эксперименте величина составляла $f = 1,55$ Гц.

Таким образом, наблюдающиеся в эксперименте гравитационные волны близки к низкочастотным резонаторным модам.

Кроме объяснения процесса возникновения низкочастотных колебаний в режиме перемежаемости хаоса представляется важным обсуждение возможного механизма генерации гармоник кратных $k/3$, зафиксированных при возбуждении капиллярной ряби в квадратной кювете и на колеблющейся мембране. Генерация таких гармоник может быть обусловлена распадом каждой из капиллярных волн с частотой $\omega_0 = \omega_p/2$ и волновым числом $k_0(\omega_p/2)$, образующих две взаимноортогональные пары на субгармоники типа $\omega_0/3$, $k_0/3$ и $2\omega_0/3$, $2k_0/3$. Для реализации таких процессов необходимо выполнение условий синхронизма, либо наличие начальных возмущений конечной амплитуды с волновыми векторами $k_0/3$ или $2k_0/3$.

Основываясь на экспериментальных данных, можно оценить величину расстройки $\Delta\omega_{1/3}$

$$\Delta\omega_{1/3} = \frac{\omega_0(k_0) - 3\omega_0(k_0/3)}{\omega_0} \sim 0.2,$$

где $\omega_0(k) = ((gk + \sigma/\rho k^3) \operatorname{th}(kH))^{1/2}$, σ - коэффициент поверхностного натяжения, ρ - плотность жидкости. Это указывает на отсутствие точного синхронизма.

Возмущения же конечной амплитуды могут возникнуть благодаря тому, что гравитационные волны генерируют гармоники и какая-либо из гармоник гравитационной волны (например, 15-я или 16-я для случая квадратной кюветы) может быть близка к частоте субгармоники $\omega_0(k_0/3)$.

Возникает вопрос, почему деление частоты ω_0 на три происходит, а, например, деление на два или четыре нет, тем более что величины расстроек

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{\omega_0(k_0) - 2\omega_0(k_0/2)}{\omega_0}, \quad \Delta\omega_{1/4} = \frac{\omega_0(k_0) - 4\omega_0(k_0/4)}{\omega_0}$$

существенно не отличаются от $\Delta\omega_{1/3}$. Дело в том, что кроме величины расстройки $\Delta\omega_{1/n}$ для субгармонических распадов необходимо принять во внимание два конкурирующих фактора. Во-первых, амплитуду начальных возмущений субгармоник с $k = k_0/n$, которая возрастает с ростом n , и порядок нелинейного процесса (степень нелинейности в уравнениях (2)

- (4)), который тоже, естественно, увеличивается. Оптимальные условия с учетом этих двух факторов реализуются, по-видимому, при $n = 3$. Для $n = 2$ малы начальные возмущения (23-я - 24-я гармоника НЧ волн), а для $n = 4$ необходимо учитывать в (2) - (4) нелинейные члены, пропорциональные A^4 , которые в используемом разложении ввиду малости амплитуды вообще отсутствуют.

Отметим, что возникновение субгармоники с $k_0/3$ наблюдалось в квадратной кювете при глубине жидкости $H = 2,5 - 3$ мм и скорости волн v_1 ($V = \sqrt{gH}V \approx 16 - 17$ см/с). Скорость субгармоник (если их оценивать по линейной теории) равна $v = \omega(k_0/3)/(k_0/3) = 18$ см/с. Таким образом, возмущения с частотой, близкой к $\omega_0/3$, могут генерироваться низкочастотными волнами.

Нетрудно показать, что медленно меняющиеся амплитуды субгармоник с частотами $\omega_0/3$ $A_{1/3}$ описываются уравнениями типа

$$\dot{A}_{1/3} = iA(A_{1/3})^2 \exp[i(\omega_0 - 3\omega_0(k_0/3))t] + \dots$$

Для таких систем, как выяснено (см., например, [6]) может наблюдаться явление "взрывной неустойчивости", когда за конечное время $t_{\text{вз}}$ амплитуда $A_{1/3}$ неограниченно нарастает:

$$A_{1/3} \sim 1/(t - t_{\text{вз}}).$$

Роста до бесконечности может, естественно, и не происходить. Становятся просто неприменимыми уравнения, которые необходимо дополнить нелинейными слагаемыми, ограничивающими взрывной рост, однако наблюдается нарастание амплитуды гармоник более быстрое, чем экспоненциальное. Подробно эти вопросы обсуждаются в [6].

В описанном здесь эксперименте раскачка низкочастотных колебаний происходит за время, значительно большее, чем дальнейшее разрушение регулярной структуры ряби, которому предшествует генерация субгармоник с волновыми числами $k_0/3$. В промежутках между пиками сложности (см. рис. 4б [1]) происходит нарастание амплитуды колебаний низкочастотных волн: увеличение сложности происходит после генерации субгармоник, кратных $k_0/3$, а релаксация сложности к малой величине возникает после заполнения спектра волновых масштабов и хаотизации капиллярной ряби. Определить в эксперименте закон, по которому нарастают амплитуды субгармоник, не представляется

возможным, однако можно утверждать, что это достаточно быстрый процесс трансформации волновой энергии (по сравнению с другими, наблюдающимися в системе).

Таким образом, в исследуемой нами параметрически возбуждаемой ряби есть несколько механизмов трансформации энергии по спектру волн. Первый - распад капиллярных волн с генерацией гравитационных волн, характерное время распада определяется надкритичностью, расстройкой, затуханием и т. д. (см. уравнение (5)). Второй - трансформация энергии гравитационных волн вверх по спектру, характерное время этого процесса определяется амплитудой и дисперсией гравитационных волн. Третий - нелинейный процесс типа "взрывной неустойчивости" волн, время которой определяется амплитудой высокочастотных гармоник гравитационных волн.

Перечисленные нелинейные процессы из-за того, что в системе есть диссиляция и дисперсия, являются пороговыми, т. е. вступают в действие тогда, когда амплитуда волн достигает определенного уровня. Наличие пороговых механизмов трансформации и энергии при условии того, что характерное время действия каждого из них определяется качественно различными параметрами и приводит, на наш взгляд, к квазипериодической перемежаемости хаоса при резонансе капиллярной ряби с гравитационными волнами.

Описание такого процесса на основе единой динамической модели представляет довольно сложную задачу и пока не разработано. Как было продемонстрировано выше, теоретическое описание развито лишь для отдельных нелинейных эффектов, сопровождающих временную перемежаемость хаоса.

В заключение отметим, что наиболее существенным моментом, ответственным за возникновение перемежаемости, является пространственно-временное взаимодействие сильно различающихся по масштабам гравитационных и капиллярных волн. В этом отличие описанного здесь явления от исследованных ранее [2, 4], где перемежаемость связана с динамикой системы (в ней возбуждено небольшое число пространственных мод с близкими масштабами), являющейся по существу сосредоточенной.

Автор благодарен М. И. Рабиновичу, В. П. Реутову за многочисленные и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Езерский А. Б. //Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т.36. № 5.
2. Berge P., Dobois M., Manneville P., Pomeau Y. //J.Phys.Lett. (Paris). 1980. P.41. L.345.
3. Herzl H., Plath P., Svensson P. //Physica D.1991. V.48. P.340.
4. Jeffries C., Perez J. //Phys.Rev. 1982. V.26A. P.2117.
5. Езерский А. Б., Рабинович М. И., Реутов В. П., Старобинец И. М. // ЖЭТФ. 1986. Т.64. Вып. 6. С. 2016.
6. Рабинович М. И., Реутов В. П. //Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т.16. № 6. С.815.

Институт прикладной физики

Поступила в редакцию
6 декабря 1991 г.

TEMPORAL INTERMITTENCY OF CHAOS IN PARAMETRICALLY EXCITED CAPILLARY RIPPLES. II

A. B. Ezersky

Results of the experimental investigation of the chaos of capillary ripples are discussed. The conditions under which nonlinear processes observed in this regime (the excitation of low-frequency large-scale motions - gravity waves on a liquid surface and the generation of subharmonics of parametrically excited waves) can be realized are estimated theoretically. The hypothesis on the "explosive" nature of the transition to the chaos is considered.

УДК 537. 876. 23

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ
В ФРАКТАЛЬНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Е. З. Грибова, А. И. Саичев

С помощью уравнения диффузии лучей найдено выражение для корреляционной функции флуктуаций интенсивности. Полученное решение является автомодельным, что означает отсутствие каустических особенностей поля в фрактальной случайно-неоднородной среде.

Известно [1], что уравнения диффузии лучей (УЭФ) можно использовать для описания флуктуаций интенсивности света в случайно-неоднородной среде. Здесь мы используем УЭФ для нахождения корреляционной функции флуктуаций интенсивности.

Ограничимся для простоты случаем двумерных неоднородностей среды, изменяющихся вдоль продольной t и одной поперечной координаты x . В малоугловом приближении уравнения лучей имеют вид [2]

$$\frac{dx}{dt} = v(t), \quad \frac{dv}{dt} = \xi(x, t), \quad (1)$$

где v — проекция на ось x единичного вектора касательной к траектории луча, $\xi(x, t) = v_{lnn}(x, t)$, n — показатель преломления. Мы считаем $lnn(x, t)$ гауссовым случайным полем с нулевым средним, а флуктуации показателя преломления δ — коррелированными вдоль оси t .

Рассмотрим два луча, начальное расстояние между которыми $x_1(t = 0) = x_2(t = 0) = s_0$, а $x_1(t) - x_2(t) = s(t)$ и $v_1 - v_2 = u$. Тогда из (1) получим

$$\frac{ds}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = \xi(x, t) - \xi(x + s, t) \quad (2)$$

и при сделанных предположениях относительно показателя преломления перейдем от динамических уравнений (2) к УЭФ для плотности вероятностей $W(s, u, t)$ относительной диффузии лучей [3]

$$\frac{dW}{dt} + u \frac{dW}{ds} = D(s) \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \quad (3)$$

с начальным условием

$$W(s, u, t=0) = \frac{1}{2} \delta(u) [\delta(s - s_0) + \delta(s + s_0)]. \quad (4)$$

Кроме (4), для $W(s, u, t; s_0)$ должно выполняться условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int du W(s, u, t; s_0) = 1. \quad (5)$$

В правой части (3) стоит $D(s)$ – структурная функция:

$$D(s) = \langle [\xi(x) - \xi(x + s)]^2 \rangle.$$

Как известно, структурная функция любого случайного поля при малых s может быть задана в виде

$$D(s) = D|s|^\nu, \quad (6)$$

где $D = \text{const}$, ν – произвольное положительное число.

В данной статье мы обсудим случай, когда рассеяние происходит на гауссовых случайных фракталях [4]: $0 < \nu < 2$. Показатель ν связан с фрактальной размерностью d соотношением [4]

$$\nu = 2(2 - d).$$

Особый интерес представляет случай $\nu = 1$ ($d = 1, 5$), так как при этом уравнение (3) с учетом (6) допускает аналитическое решение.

Корреляционная функция флуктуаций интенсивности $K_I(s, t)$ выражается через решение уравнения (3) в виде [5]

$$K_I(s, t) = \langle I(x, t) I(x + s, t) \rangle = \quad (7)$$

$$= \int ds_0 du K_0(s_0) W(s, u, t; s_0).$$

Здесь $K_0(s_0) = \langle I_0(y) I_0(y + s_0) \rangle = 1$, так как мы предположим, что начальная интенсивность $I_0 = 1$.

Будем решать уравнение (3) в полупространстве $t \geq 0$. Поскольку корреляционная функция $K_1(s, t)$ четна по s , рассмотрим только $s \geq 0$. В этом случае с учетом (6) уравнение (3) и условие (4) примут вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + u \frac{\partial W}{\partial s} = D(s) \frac{\partial^2 W}{\partial u^2}, \quad (8)$$

$$W(s, u, t=0) = \frac{1}{2}\delta(u)\delta(s - s_0). \quad (9)$$

Применим к (8), (9) и (5) преобразование Лапласа по s и по u , тогда для функции

$$\theta(\mu, \alpha, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-\alpha u} \int_0^{+\infty} ds e^{-\mu s} W(s, u, t) \quad (10)$$

получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \mu \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = -D\alpha^2 \frac{\partial \theta}{\partial \mu}, \quad (11)$$

$$\theta(\mu, \alpha, t = 0) = \frac{1}{2} \exp(-\mu s_0); \quad (12)$$

$$\theta(\mu = 0, \alpha = 0, t) = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Уравнение (11) в отличие от (8) имеет первый порядок и решается проще. Первый интеграл уравнения (11)

$$\psi_1 = 2D\alpha^3 + 3\mu^2,$$

а второй в общем случае выражается через \mathcal{P} -функцию Вейерштрасса [6]. Однако в соответствии с (7) нас интересует только случай $\alpha = 0$, поэтому с учетом разложения \mathcal{P} -функции вблизи нуля получим

$$\psi_2 = \sqrt{3} (2/D)^{1/3} (28/3\mu^2)^{1/6} + t.$$

При условиях (12) и (13) решение уравнения (11) имеет вид

$$\theta(\mu, \alpha = 0, t) = \frac{1}{2} \exp\{-s_0 [D_0^{-1}\mu^2(t + D_0\mu^{-1/3})]^{3/5}\}, \quad (14)$$

где

$$D_0 = \sqrt{3} 28^{1/6} (2/D)^{1/3}.$$

Введем функцию

$$\varphi(\mu, t) = \int_0^\infty ds s_0 \theta(\mu, t) = \frac{1}{2} A^{3/5} \frac{1}{\mu (\mu^{1/3} + A)^{3/5}}, \quad (15)$$

где $A = D_0/t$.

С другой стороны, из (7) и (10) получим

$$\varphi(\mu, t) = \int_0^\infty K_I(s, t) e^{-s\mu} ds.$$

Переходя к cos-преобразованию, найдем корреляционную функцию

$$K_I(s, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega \cos(\omega s) \operatorname{Re}[\varphi(i\omega, t)].$$

Подставляя сюда (15) и выбирая ту ветвь функции $(i\omega)^{1/3}$, которой соответствует дисперсия $\sigma_I^2 = K_I(s=0) - 1 > 0$, окончательно получим

$$K_I(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx \cos(\tau x) \frac{1}{x(1+x^{2/3})^{3/10}} \sin\left(\frac{3}{5} \operatorname{arctg} x^{1/3}\right). \quad (16)$$

Здесь введена новая переменная $\tau = sA^3$. Заметим, что решение (16) – автомодельное, что является следствием недифференцируемости (6) при $0 < \nu < 2$ [4]. Известно [4], что инвариантные относительно преобразования подобия недифференцируемые модели случайных сред и экранов приводят к флюктуациям интенсивности со свойствами, сильно отличающимися от статистических свойств флюктуаций, порождаемых

экранами с гладко изменяющейся фазой. Действительно, из (16) следует, что σ_1^2 является константой, не зависящей от продольной координаты. Это означает отсутствие эффектов геометрической оптики: поле не имеет каустических особенностей, которые наблюдаются при дифракции на экране с гауссовой корреляционной функцией флуктуаций фазы. В то же время, здесь остается справедливым инвариант

$$\int_0^\infty d\tau [K_1(\tau) - 1] = 0,$$

отражающий специфику флуктуаций интенсивности в любой неоднородной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубарева Н. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 2. С. 310.
2. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. - М.: Наука, 1976. Ч. 1. С. 242.
3. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. - М.: Наука, 1975. С. 109.
4. Джейкмен Э. Рассеяние на фракталах. // В сб.: Фракталы в физике. - Труды VI Междунар. симпозиума по фракталам в физике. - М.: Мир, 1988. С. 82.
5. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. - М.: Наука, 1990. С. 62.
6. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. - М.: Наука, 1979. С. 442.

Нижегородский архитектурно-строительный
институт

Поступила в редакцию
9 марта 1992 г.

THE CORRELATION FUNCTION OF THE INTENSITY FLUCTUATIONS IN FRACTAL RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

E. Z. Gribova, A. I. Saichev

The expression for the correlation function of the intensity fluctuations is found with the help of the ray diffusion equation. The obtained solution is automodel that means the absence of field caustics in fractal randomly inhomogeneous medium.

УДК 621.391:519.217

**ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ МОМЕНТА ПОЯВЛЕНИЯ
ИМПУЛЬСНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В СЛУЧАЙНОМ СИГНАЛЕ**

А. В. Ванжа, А. А. Мальцев, А. М. Силаев

Методами марковской теории нелинейной фильтрации решена задача оптимального оценивания в дискретном времени момента появления случайного импульсного возмущения сигнала, наблюдаемого на фоне белых шумов. Показано, что оптимальную в среднеквадратичном смысле оценку момента появления импульса можно представить в виде суммы двух условных оценок, которые вычисляются в текущем времени с помощью системы рекуррентных уравнений совместно с апостериорной вероятностью появления импульса и вспомогательными плотностями вероятностей. Получен упрощенный приближенный алгоритм оценивания с использованием гауссовой аппроксимации вспомогательных плотностей вероятностей.

В ряде задач радиотехники, радиосвязи, радио- и гидролокации для описания нестационарных сигналов и помех удобно использовать модели возмущений импульсного типа [1-4]. Резкие изменения параметров сигнально-помеховой обстановки, сбои нормального режима работы радиосистем, маневры объектов в задачах слежения за ними могут описываться импульсными возмущениями заранее известной формы, но со случайными амплитудами и моментами появления [5].

К настоящему времени разработаны различные методы решения задач оптимальной фильтрации сигналов при импульсных возмущениях и оптимального обнаружения изменений свойств случайных процессов [6-10]. Вопросы оценивания самих моментов появления импульсных возмущений исследованы в меньшей мере. В большинстве развитых подходов оценки моментов появления импульсов вырабатываются после окончания наблюдений в результате апостериорного анализа сразу всей

принятой реализации наблюдаемого процесса, что требует значительного объема вычислений [8, 11, 12]. В ряде простых случаев оценки моментов появления импульсных возмущений можно получить, применяя согласованную фильтрацию наблюдаемого процесса и исследуя положение максимумов выходного фильтрованного сигнала [13]. Однако при этом возникают трудности, связанные с анализом точности формируемых оценок.

В настоящей работе задача оптимального оценивания момента появления импульсного возмущения сигнала решается на основе методов марковской теории нелинейной фильтрации [14-16]. В отличие от работ [17-19], в которых рассматривались модели сигналов в непрерывном времени, в настоящей статье исследуется случай дискретно-временных сигналов. Выводятся уравнения, позволяющие в текущем времени вычислять оптимальную в среднеквадратичном смысле оценку и апостериорную дисперсию момента появления импульсного сигнала. В гауссовом приближении по вспомогательным условным плотностям вероятностей находится упрощенный алгоритм оптимального оценивания, который и рекомендуется для практического применения.

Постановка задачи. Пусть информационный векторный случайный сигнал \vec{z}_k описывается линейной моделью в дискретном времени:

$$\vec{z}_{k+1} = F_k \vec{z}_k + \vec{A} \delta_{k\tau} + G_k \vec{\xi}_k \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Здесь F_k, G_k - заданные матрицы; \vec{A} - вектор амплитуды импульсного возмущения, появляющегося в случайный момент времени τ ; $\delta_{k\tau}$ - символ Кронекера:

$$\delta_{k\tau} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = \tau \\ 0 & \text{при } k \neq \tau \end{cases};$$

$\{\vec{\xi}_k\}$ - последовательность независимых векторных случайных величин с плотностями вероятностей $P_{\vec{\xi}}(\vec{\xi}_k, k)$ - описывает аддитивное шумовое возмущение информационного сигнала. Будем считать, что при $k = 0$ заданы плотности вероятностей $P_{\vec{z}_0}(\vec{z}_0)$ начального значения сигнала \vec{z}_0

и случайной амплитуды $P_{\vec{A}}(\vec{A})$ импульсного возмущения \vec{A} , а также априорные вероятности $P_{\tau}(\tau)$, где $\tau \geq 0$, возможных дискретных значений случайного момента появления импульса τ . Будем

предполагать, что случайные величины \vec{z}_0 , \vec{A} и τ априорно статистически независимы.

Пусть наблюдаемый векторный процесс $\{\vec{y}_k\}$ описывается также линейной моделью:

$$\vec{y}_{k+1} = H_{k+1} \vec{z}_{k+1} + \vec{\eta}_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Здесь H_{k+1} - заданная матрица, $\vec{\eta}_{k+1}$ - аддитивный шум наблюдений. Последовательность $\{\vec{\eta}_{k+1}\}$ образована из взаимно независимых и независимых от \vec{A} , τ и $\{\vec{z}_k\}$ случайных векторных величин с плотностью вероятностей $\rho_\eta(\vec{\eta}_{k+1}, k+1)$.

Задача состоит в том, чтобы в момент времени k по принятой реализации $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k\} \equiv \vec{y}_1^k$ наблюдений найти оптимальную в среднеквадратичном смысле оценку $\hat{\tau}(k) = \langle \tau | \vec{y}_1^k \rangle$ момента появления импульсного возмущения и вычислить апостериорную дисперсию $D_\tau(k) = \langle [\tau - \hat{\tau}(k)]^2 | \vec{y}_1^k \rangle$ величины τ , которая характеризует точность оценивания.

Уравнения алгоритма. Выведем уравнения алгоритма для более общей задачи оптимального оценивания величины произвольной функции $f(\tau)$ момента появления импульса τ . При $f(\tau) = \tau$ эти уравнения дадут алгоритм оптимальной оценки самой величины τ , а при $f(\tau) = \tau^2$ - алгоритм оптимальной оценки $\hat{\tau}^2(k)$ квадрата величины τ . После этого апостериорная дисперсия $D_\tau(k)$ может быть определена по формуле:

$$D_\tau(k) = \hat{\tau}^2(k) - [\hat{\tau}(k)]^2.$$

Оптимальная в среднеквадратичном смысле оценка $\hat{f}_\tau(k)$ величины произвольной скалярной функции параметра τ находится путем усреднения данной функции по апостериорным вероятностям $P(\tau | \vec{y}_1^k)$ значений момента τ :

$$\hat{f}_\tau(k) = \sum_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) P(\tau | \vec{y}_1^k). \quad (3)$$

Поскольку в каждый момент времени реализуется одна из двух возможных ситуаций - импульсное возмущение к текущему моменту времени k еще не появилось ($k \leq \tau$) или уже появилось ($k > \tau$), то оптимальную оценку

$\hat{f}_\tau(k)$ можно представить в виде суммы

$$\hat{f}_\tau(k) = p_0(k)f_0(k) + p_1(k)f_1(k), \quad (4)$$

где $p_0(k) = P(k \leq \tau | \vec{y}_1^k)$ и $p_1(k) = 1 - p_0(k) = P(k > \tau | \vec{y}_1^k)$ имеют смысл апостериорных вероятностей соответственно непоявления и появления импульса к моменту времени k и введены условные оценки $f_0(k)$, $f_1(k)$:

$$f_0(k) = \sum_{\tau=k}^{\infty} f(\tau)P(\tau | \vec{y}_1^k, k \leq \tau),$$

$$f_1(k) = \sum_{\tau=0}^{k-1} f(\tau)P(\tau | \vec{y}_1^k, k > \tau).$$

Для вывода уравнения алгоритма оптимального оценивания величины функции $f(\tau)$ нам понадобится апостериорная плотность вероятностей $w(\vec{z}_k, k) = P(\vec{z}_k, k | \vec{y}_1^k)$ самого процесса \vec{z}_k , которая может быть представлена в следующем виде [17]:

$$w(\vec{z}_k, k) = p_0(k)w_0(\vec{z}_k, k) + p_1(k)w_1(\vec{z}_k, k),$$

где введены вспомогательные условные плотности вероятностей $w_0(\vec{z}_k, k) = P(\vec{z}_k, k | k \leq \tau, \vec{y}_1^k)$ и $w_1(\vec{z}_k, k) = P(\vec{z}_k, k | k > \tau, \vec{y}_1^k)$, имеющие смысл апостериорных плотностей вероятностей процесса \vec{z}_k при условии непоявления и появления скачка к моменту времени τ .

Применяя общие методы теории условных марковских процессов и следуя работам [17-19], можно показать, что

$$P(\tau | \vec{y}_1^k) = \begin{cases} P_\tau(\tau) / \sum_{\tau=k}^{\infty} P_\tau(\tau) & \text{при } k \leq \tau \\ 0 & \text{при } k > \tau \end{cases}$$

Поэтому условная оценка $f_0(k)$ определяется через функции $f(\tau)$, $P_\tau(\tau)$:

$$f_0(k) = \sum_{\tau=k}^{\infty} f(\tau)P_\tau(\tau) / \sum_{\tau=k}^{\infty} P_\tau(\tau), \quad (5)$$

ее можно найти заранее до проведения наблюдений.

Для функции $p_0(k)$ в [17] получено рекуррентное уравнение

$$p_0(k+1) = \Phi_0(\vec{y}_{k+1}, k)[1 - \nu(k)]p_0(k)/\Psi(\vec{y}_{k+1}, k), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{y}_{k+1}, k) &= \Phi_0(\vec{y}_{k+1}, k)[1 - \nu(k)]p_0(k) + \Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}, k)\nu(k)p_0(k) + \\ &\quad + \Phi_1(\vec{y}_{k+1}, k)p_1(k), \end{aligned}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$; $p_0(k)|_{k=0}=1$. Для условной оценки $f_1(k)$, пользуясь результатами работ [17-19], можно вывести рекуррентное уравнение вида

$$\begin{aligned} f_1(k+1) &= [\Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}, k)\nu(k)p_0(k)f(k) + \Phi_{1f}(\vec{y}_{k+1}, k)p_1(k)f_1(k)] \times \\ &\quad \times [\Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}, k)\nu(k)p_0(k) + \Phi_1(\vec{y}_{k+1}, k)p_1(k)]^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$; $f_1(k)|_{k=0}$ — начальное условие. Здесь $\nu(k)$ — коэффициент, зависящий только от априорной функции вероятности $P_\tau(\tau)$:

$$\nu(k) \equiv P_\tau(\tau)/\sum_{\tau=k}^{\infty} P_\tau(\tau). \quad (8)$$

В (6) и (7) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_{\substack{0 \\ \{1_f\}}}(\vec{y}_{k+1}, k) &= \\ &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\eta(\vec{y}_{k+1} - H_{k+1}\vec{z}_{k+1}, k+1)\pi(\vec{z}_{k+1}|\vec{z}_k)W_{\substack{0 \\ \{1_f\}}}(\vec{z}_k, k)d\vec{z}_k d\vec{z}_{k+1}, \\ \Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}, k) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} \rho_\eta(\vec{y}_{k+1} - H_{k+1}\vec{z}_{k+1}, k+1) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\vec{z}_{k+1} - \vec{A}|\vec{z}_k)P_A(\vec{A})W_0(\vec{z}_k, k)d\vec{A} d\vec{z}_k d\vec{z}_{k+1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где введены вспомогательные апостериорные плотности вероятностей $w_{01}(\vec{z}_k, k)$, $w_{1f}(\vec{z}_k, k)$. Переходные плотности вероятностей $\pi(\vec{z}_{k+1} | \vec{z}_k)$ соответствуют модельному уравнению информационного сигнала (1) без учета импульсного возмущения $\vec{z}_{k+1} = F_k \vec{z}_k + G_k \vec{\xi}_k$ ($k = 0, 1, \dots$) и выражаются через плотности вероятностей шумового возмущения $\rho_\xi(\vec{\xi}_k, k)$. Например, если $G_k = 1$ - единичная матрица, то $\pi(\vec{z}_{k+1} | \vec{z}_k) = \rho_\xi(\vec{z}_{k+1} - F_k \vec{z}_k, k)$.

Для вспомогательных плотностей вероятности $w_0(\vec{z}_k, k)$, $w_1(\vec{z}_k, k)$, $w_{1f}(\vec{z}_k, k)$ можно получить рекуррентные уравнения, связывающие их значения на $(k + 1)$ -м шаге со значениями на k -м шаге и новыми наблюдениями \vec{y}_{k+1} . Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} w_{\{1f\}}(\vec{z}_{k+1}, k + 1) &= w_{\{1f\}}(\vec{z}_{k+1}, k + 1) + \\ &+ \beta_{\{1f\}}(k + 1) [w_{01}(\vec{z}_{k+1}, k + 1) - w_{\{1f\}}(\vec{z}_{k+1}, k + 1)], \\ w_{01}(\vec{z}_{k+1}, k + 1) &= \Phi_{01}^{-1}(\vec{y}_{k+1}, k) \rho_\eta(\vec{y}_{k+1} - H_{k+1} \vec{z}_{k+1}, k + 1) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\vec{z}_{k+1} - \vec{A} | \vec{z}_k) P_A(\vec{A}) W_0(\vec{z}_k, k) d\vec{A} d\vec{z}_k, \\ w_{\{1f\}}(\vec{z}_{k+1}, k + 1) &= \Phi_{\{1f\}}^{-1}(\vec{y}_{k+1}, k) \times \\ &\times \rho_\eta(\vec{y}_{k+1} - H_{k+1} \vec{z}_{k+1}, k + 1) \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\vec{z}_{k+1} | \vec{z}_k) W_{\{1f\}}(\vec{z}_k, k) d\vec{z}_k, \end{aligned} \quad (10)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \quad w_i(\vec{z}_k, k) \Big|_{k=0} = P_{z_0}(\vec{z}_0); \quad i = 0, 1, 1f.$$

Здесь коэффициенты $\beta_1(k + 1)$, $\beta_{1f}(k + 1)$ выражаются через функции $p_0(k)$, $f(k)$ и $f_1(k)$ с помощью соотношений

$$\beta_1(k+1) = \frac{v(k)p_0(k)}{v(k)p_0(k) + p_1(k)\Phi_1(\vec{y}_{k+1}, k)\Phi_{01}^{-1}(\vec{y}_{k+1}, k)}, \quad (11)$$

$$\beta_{1f}(k+1) = \frac{v(k)p_0(k)f(k)}{v(k)p_0(k)f(k) + p_1(k)f_1(k)\Phi_{1f}(\vec{y}_{k+1}, k)\Phi_{01}^{-1}(\vec{y}_{k+1}, k)}.$$

Уравнения (4)-(11) образуют рекуррентный алгоритм оптимального оценивания величины произвольной функции $f(\tau)$ момента появления импульсного возмущения τ в модели сигнала (1) при наблюдениях (2). Можно отметить, что одновременно с оценкой функции $\hat{f}(\tau)$ находится оптимальная оценка \hat{z}_k самого процесса \vec{z}_k с помощью апостериорной плотности вероятности $w(\vec{z}_k, k)$, которая определяется в процессе решения уравнений (4)-(11).

Гауссово приближение по вспомогательным плотностям вероятностей. При практической реализации необходимо произвести упрощение оптимального алгоритма (4)-(11), исключив интегральные уравнения (9), (10). В ряде случаев можно применить, например, гауссову аппроксимацию вспомогательных плотностей вероятностей $w_0(\vec{z}_k, k)$, $w_1(\vec{z}_k, k)$, $w_{1f}(\vec{z}_k, k)$ на каждом шаге дискретного времени. При этом от точных уравнений (10) для плотностей вероятностей перейдем к приближенным, но более простым уравнениям для векторов математических ожиданий $\hat{z}_0(k)$, $\hat{z}_1(k)$, $\hat{z}_{1f}(k)$ и матриц ковариаций $\mathcal{R}_0(k)$, $\mathcal{R}_1(k)$, $\mathcal{R}_{1f}(k)$. В результате в силу линейности моделей сигналов и наблюдений (1), (2) получим

$$\hat{\vec{z}}_{\{1f\}}(k+1) = \hat{\vec{z}}_{\{11f\}}(k+1) + \quad (12)$$

$$+ \beta_{\{1f\}}(k+1)[\hat{\vec{z}}_{01}(k+1) - \hat{\vec{z}}_{\{11f\}}(k+1)],$$

$$\mathcal{R}_{\{1f\}}(k+1) = \mathcal{R}_{\{11f\}}(k+1) +$$

$$+ \beta_{\{1f\}}(k+1)\{\mathcal{R}_{01}(k+1) - \mathcal{R}_{\{11f\}}(k+1)[1 - \beta_{\{1f\}}(k+1)]\} \times$$

$$\times [\hat{\vec{z}}_{01}(k+1) - \hat{\vec{z}}_{\{11f\}}(k+1)] [\hat{\vec{z}}_{01}(k+1) - \hat{\vec{z}}_{\{11f\}}(k+1)]^T},$$

$$\hat{\vec{z}}_{\{11f\}}(k+1) = F_k \hat{\vec{z}}_{\{11f\}}(k) + B_{\{11f\}}(k+1) [\vec{y}_{k+1} - H_{k+1} F_k \hat{\vec{z}}_{\{11f\}}(k)],$$

$$\hat{\vec{z}}_{01}(\vec{z}_{k+1}, k+1) = F_k \hat{\vec{z}}_0(k) + \vec{A} + B_{01}(k+1) [\vec{y}_{k+1} - H_{k+1} [F_k \hat{\vec{z}}_0(k) + \vec{A}]],$$

$$B_1(k+1) = P_1(k+1) H_{k+1}^T [H_{k+1} P_1(k+1) H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1},$$

$$P_{\{11f\}}(k+1) = F_k \mathcal{R}_{\{11f\}}(k) F_k^T + G_k Q_k G_k^T,$$

$$P_{01}(k+1) = F_k \mathcal{R}_0(k) F_k^T + G_k Q_k G_k^T + K_A,$$

$$\mathcal{R}_1(k+1) = [I - B_1(k+1) H_{k+1}] P_1(k+1),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \hat{\vec{z}}_i(k)|_{k=0} = \vec{z}_{apr}, \quad \mathcal{R}_i(k) = \mathcal{R}_{apr}, \quad i = 0, 01, 1, 1f.$$

Здесь предположено, что шумовое возмущение сигнала $\vec{\xi}_k$ и аддитивный шум наблюдения $\vec{\eta}_{k+1}$ имеют нулевые средние значения и матрицы ковариаций, соответственно равные Q_k и R_{k+1} ; векторы \vec{A} , \vec{z}_{apr} и матрицы \mathcal{R}_{apr} являются соответственно средними значениями и матрицами ковариаций плотностей вероятностей $P_{\vec{A}}(\vec{A})$ и $P_{\vec{z}_0}(\vec{z}_0)$, I - единичная матрица, t - знак транспонирования, -1 - знак обращения матриц.

Если последовательности $\{\vec{\xi}_k\}$ и $\{\vec{\eta}_{k+1}\}$ в моделях сигнала и наблюдений (1), (2) имеют нормальные распределения, то с учетом гауссовой аппроксимации плотностей вероятностей $w_0(\vec{z}_k, k)$, $w_1(\vec{z}_k, k)$, $w_{1f}(\vec{z}_k, k)$ из (9) следует, что функции $\Phi_0(\vec{y}_{k+1}, k)$, $\Phi_1(\vec{y}_{k+1}, k)$, $\Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}, k)$, $\Phi_{1f}(\vec{y}_{k+1}, k)$ представляются в нормальной форме:

$$\Phi_i(\vec{y}_{k+1}, k) = (2\pi)^{-n/2} \det^{-1/2}(\Delta_i) \exp(-\frac{1}{2} \vec{U}^T \Delta_i^{-1} \vec{U}),$$

где

$$\vec{U} = \vec{y}_{k+1} - H_{k+1} F_k \hat{Z}_i(k), \quad i = 0, 1, 1f,$$

$$\Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}, k) = (2\pi)^{-n/2} \det^{-1/2}(\Delta_{01}) \exp(-\frac{1}{2} \vec{B}^T \Delta_i^{-1} \vec{B}), \quad (13)$$

где

$$\vec{B} = \vec{y}_{k+1} - H_{k+1} (F_k \hat{Z}_0(k) + \vec{A}).$$

Здесь n - размерность вектора наблюдений \vec{y}_{k+1} и введены матрицы

$$\Delta_i = H_{k+1} F_k R_i(k) F_k^T H_{k+1}^T + H_{k+1} G_k Q_k G_k^T H_{k+1}^T + R_{k+1}, \quad (14)$$

$$\Delta_{01} = \Delta_0 + H_{k+1} K_k H_{k+1}^T \quad (i = 0, 1, 1f).$$

В случае, когда распределения шумов $\{\vec{\xi}_k\}$ и $\{\vec{\eta}_{k+1}\}$ отличаются от нормального, выражения (14), (13) снова можно получить в приближении, что функции $\Phi_0(\vec{y}_{k+1}, k)$, $\Phi_1(\vec{y}_{k+1}, k)$, $\Phi_{01}(\vec{y}_{k+1}, k)$, $\Phi_{1f}(\vec{y}_{k+1}, k)$ имеют вид гауссовых плотностей вероятностей относительно вектора наблюдений \vec{y}_{k+1} .

Таким образом, уравнения (4) - (8), (11) - (14) составляют упрощенный алгоритм оптимального оценивания функции $f(\tau)$ с использованием гауссовой аппроксимации вспомогательных плотностей вероятностей.

Результаты моделирования на ЭВМ. В качестве примера рассматривался сигнал $\{z_k\}$, представляющий собой отклик дискретной линейной системы второго порядка на совместное воздействие импульсного и шумового возмущений при скалярных наблюдениях $\{y_{k+1}\}$, описываемых уравнениями

$$z_{k+2} = az_{k+1} + bz_k + A\delta_{kT} + \xi_k, \quad (15)$$

$$Y_{k+1} = z_{k+2} + \eta_{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots; z_0 = z_1 = 0),$$

где a , b - заданные коэффициенты, $\{\xi_k\}$ и $\{\eta_{k+1}\}$ - независимые последовательности гауссовых случайных величин с нулевыми средними значениями и дисперсиями Q и R , A - заданная амплитуда импульсного возмущения, τ - случайный момент времени.

В уравнениях оптимального алгоритма (4)-(14) для данного примера необходимо положить

$$\vec{z}_k = \begin{pmatrix} z_{k+1} \\ z_k \end{pmatrix}, \quad F_k = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{k+1} = G_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$K_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_k = Q, \quad R_k = R, \quad n = 1.$$

Моделирование работы алгоритма оптимального оценивания (4)-(8), (11)-(14) на ЭВМ проводилось для двух априорных распределений вероятности момента появления импульсного возмущения $P_\tau(\tau)$: 1) равномерного на интервале наблюдения $0 \leq \tau \leq 100$ и 2) геометрического $P_\tau(\tau) = \nu(1 - \nu)^\tau$ при $\tau \geq 0$. Параметр ν подбирался таким образом, чтобы интегральная вероятность появления импульса на интервале наблюдения $[0, 100]$ составляла $1/2$, т. е. $\nu = 1 - 2^{-1/101} \approx \approx 6,8 \cdot 10^{-3}$. На самом деле импульсное возмущение в наблюдаемой реализации $\{y_{k+1}\}$ начиналось в момент времени $\tau_0 = 25$. На всех рисунках 1а-г этот момент времени помечен штриховой линией. На рис. 1а представлена реализация наблюдаемого процесса $\{y_{k+1}\}$ при $0 \leq \tau \leq 100$, $a = 0,95$, $b = -0,65$, $Q = 1,0$, $R = 0,33$, $A = 5$. "Чистый" отклик системы на импульсное возмущение, представляющий собой затухающее колебание, показан на фоне реализации процесса $\{y_{k+1}\}$ пунктирной линией. На рис. 1б, в приведены графики оценки $\hat{\tau}(k)$, апостериорной дисперсии $D_\tau = \hat{\tau}^2(k) - [\hat{\tau}(k)]^2$ момента появления импульса, апостериорной вероятности появления импульсного возмущения $p_1(k)$ к текущему моменту времени k , вычисленные с помощью синтезированного алгоритма по реализации наблюдений y_i^k . Сплошные графики на этих рисунках соответствуют равномерному априорному распределению вероятности $P_\tau(\tau)$, пунктирные графики - геометрическому распределению $P_\tau(\tau)$.

Как видно из графиков, до появления импульсного возмущения (при $k \leq \tau_0$) апостериорная вероятность $p_1(k)$ близка к нулю. При этом $p_0(k) = 1 - p_1(k) \approx 1$ и основной вклад в оптимальную оценку $\hat{\tau}(k)$ в

силу (4) вносит линейно меняющаяся во времени условная оценка $\hat{t}_0(k)$, определяемая из априорного распределения

$$\hat{t}_0(k) = f_0(k) = \sum_{\tau=k}^{100} \tau P_\tau(\tau) / \sum_{\tau=k}^{100} P_\tau(\tau).$$

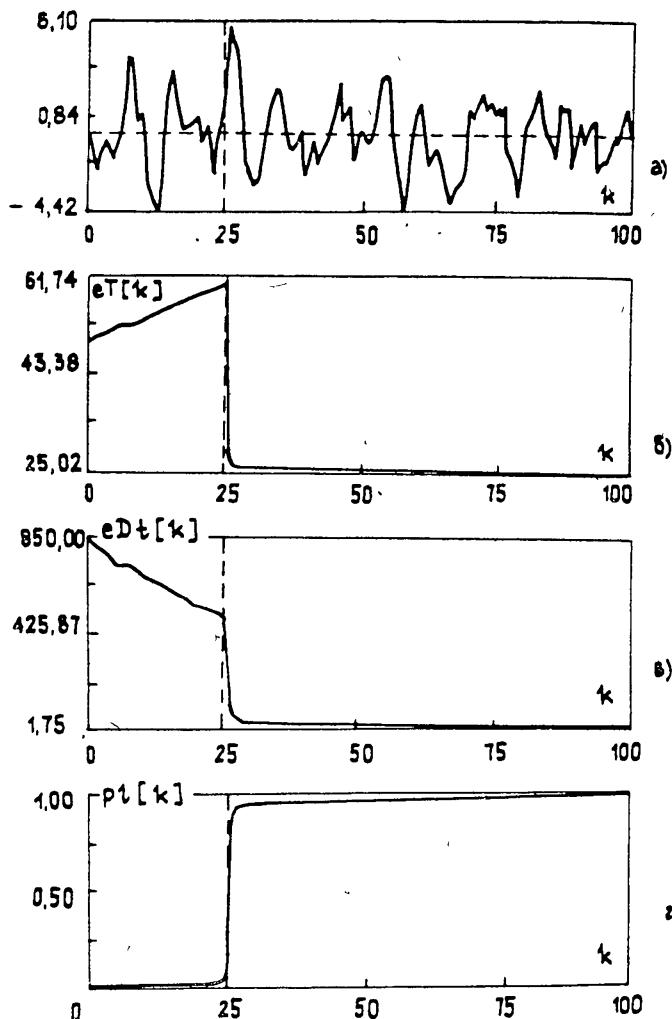


Рис 1.

Апостериорная дисперсия $D_\tau(k)$ до появления импульсного возмущения приближенно определяется также с помощью априорного распределения и равна

$$D_{\tau}(k) = \left[\sum_{\tau=k}^{100} \tau^2 P_{\tau}(\tau) / \sum_{\tau=k}^{100} P_{\tau}(\tau) \right] - [\hat{\tau}(k)]^2.$$

Другая условная оценка $\hat{\tau}_1(k) = f_1(k)$, для которой справедливо соотношение (7), при этом изменяется пропорционально текущему времени по закону $\hat{\tau}_1(k+1) \approx k$, так как $p_1(k) \approx 0$ и $p_0(k) \approx 1$.

С появлением импульсного возмущения (при $k > \tau$) срабатывает механизм обнаружения разладки, заложенный в алгоритм (4)-(14). Происходит резкая смена значений функции $p_1(k)$ от нуля до значения, близкого к единице, а условная оценка $\hat{\tau}_1(k)$ в соответствии с уравнением (7) перестает изменяться и фиксируется на уровне $\hat{\tau}_1(k+1) \approx \hat{\tau}_1(k) \approx \tau_0$. При этом в силу (4) оптимальная оценка $\hat{\tau}(k)$ начинает определяться как раз условной оценкой $\hat{\tau}_1(k)$ и, следовательно, становится приближенно равной истинному моменту появления импульса $\hat{\tau}(k) \approx \tau_0$ при $k > \tau_0$. Апостериорная дисперсия $D_{\tau}(k)$ после импульсного воздействия к концу интервала наблюдения принимает значение 0,24 для случая равномерного распределения вероятности $P_{\tau}(\tau)$ и 189 для случая геометрического распределения $P_{\tau}(\tau)$. Эта величина $D_{\tau}(k)$ характеризует апостериорную точность оценивания момента τ_0 для данной конкретной реализации наблюдений. Большое расхождение значений дисперсии $D_{\tau}(k)$ для двух рассмотренных распределений $P_{\tau}(\tau)$ объясняется существенным влиянием априорной информации, содержащейся в $P_{\tau}(\tau)$, на работу алгоритма обнаружения импульсного возмущения и оценки времени его появления τ_0 . При равномерном распределении вероятности $P_{\tau}(\tau)$ импульсное воздействие обязательно происходит на интервале наблюдений $[0, 100]$ ($\sum_{\tau=k}^{100} P_{\tau}(\tau) = 1$), что улучшает точность оценивания: $D_{\tau}(k)$ уменьшается к концу интервала наблюдений (рис. 1в). При геометрическом распределении $P_{\tau}(\tau)$ импульсное воздействие происходит на интервале наблюдений $[0, 100]$ с вероятностью $1/2$, что и обуславливает значительную по сравнению с первым случаем апостериорную дисперсию $D_{\tau}(k)$. В ходе оценивания момента τ_0 можно найти также оптимальную оценку \hat{z}_k самого сигнала z_k с помощью соотношения

$$\hat{z}_k = p_0(k) \hat{z}_0(k) + p_1(k) \hat{z}_1(k).$$

В настоящей работе получен рекуррентный алгоритм оценивания момента появления импульсного возмущения сигнала в дискретном времени. В отличие от известных алгоритмов [1, 8, 11] оптимальная оценка параметра τ находится в реальном масштабе времени. Результаты моделирования на ЭВМ подтверждают работоспособность и эффективность алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриценко Н. С., Кириченко А. А., Коломейцева Т. А. и др. //Зарубежная радиоэлектроника. 1983. N 4. С.3.
2. Тихонов В. И., Ершов Л. А. //Радиотехника и электроника. 1979. Т.24. N 3. С.551.
3. Тихонов В. И., Теплинский И. С. //Радиотехника и электроника. 1989. Т.34. N 4. С.792.
4. Жиглявский А. А., Красковский А. Е. Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники. -Л. :Гос. ун-т, 1988.
5. Джонсон С. Теория регуляторов, приспособливающихся к возмущениям. В кн. :Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах /Под ред. К. Т. Леондеса. - М. : Мир, 1980. С. 253.
6. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. - М. : Наука, 1976.
7. Никифоров И. В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. - М. : Наука, 1983.
8. Клигене Н., Телькснис Л. //Автоматика и телемеханика. 1983. N 10. С.5.
9. Willsky A.S., Jones H.L. //IEEE Trans. Automat. Control. 1976. V.21. N 1. P.108.
10. Сосулин Ю. Г., Фишман М. М //Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1977. N 3. С.149.
11. Торговицкий И. Ш. //Зарубежная радиоэлектроника. 1976. N 1. С.3.
12. Трифонов А. П., Бутейко В. К. //Радиотехника и электроника. 1989. Т.34. N 11. С.2323.
13. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. - М. : Радио и связь, 1983.
14. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. - М. : Гос. ун-т, 1966.
15. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). - М. : Наука, 1966.
16. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. - М. : Сов. радио, 1975.

17. Мальцев А. А., Силаев А. М //Изв. вузов. Радиофизика.
1986. Т.29. № 5. С.537.
18. Мальцев А. А., Силаев А. М //Изв. вузов. Радиофизика.
1989. Т.32. № 1. С.62.
19. Мальцев А. А., Силаев А. М //Радиотехника и электроника.
1989. Т.34. № 5. С.1023.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
25 февраля 1992 г.

OPTIMAL DISCRETE-TIME ESTIMATING THE TIME MOMENT
OF AN IMPULSE DISTURBANCE IN A RANDOM SIGNAL

A. V. Vanzha, A. A. Mal'tsev, A. M. Silaev

The task of optimal discrete-time estimating a sudden disturbance time instant is solved on the base of the Markov nonlinear filtering theory. The information signal suffering the disturbance is observed in Gaussian noise. It is shown that mean square error of the disturbance could be presented as a sum of two conditional estimates which are calculated in real time basing the system of the recurrent equations. A posterior probability of the disturbance appearance and other auxiliary probabilities are calculated simultaneously. Simplified quasioptimal algorithm of estimating is derived with the use of Gaussian approximating of the auxiliary probability densities.

УДК 621.396.21

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ ОТ ПРОСТРАНСТВЕННО- РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ В АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ

Мальцев А. А., Серебряков Г. В.

Проанализирована потенциальная эффективность обработки сигналов от пространственно распределенных источников помех в адаптивных антенных решетках. Исследовано поведение выходного отношения сигнал/шум в зависимости от радиуса поперечной пространственной корреляции, величины апертуры антенны и мощности помехи.

Как известно, использование адаптивных антенных решеток (AAP) позволяет существенно повысить эффективность пространственной обработки сигналов от дискретных источников. Однако в ряде задач радио- и гидролокации необходимо учитывать размеры пространственно некогерентных источников. Такой учет приводит к нарушению условия полной когерентности сигналов на апертуре антенны [1, 2]. Кроме того, к нарушению когерентных свойств сигналов приводит наличие различного рода флюктуаций в среде распространения, механических деформаций антенной системы и т. п. [3 - 5]. Математически наличие неполной пространственной когерентности сигнального и помехового полей на апертуре антенны означает то, что корреляционные матрицы полезного сигнала и отдельной внешней помехи не имеют диадную форму, а ранг каждой такой матрицы будет больше единицы. Влияние на характеристики AAP нарушения когерентных свойств полезного сигнала рассматривалось в [6, 7]. Показано, что такое нарушение приводит к резкому ухудшению выходного ОСШ, особенно для крупноапертурных AAP. В тоже время, малоизученным является случай падения на апертуру антенны неполностью когерентного помехового сигнала. В настоящей работе исследуется потенциальная эффективность обработки сигналов в AAP при наличии неполной пространственной когерентности внешней помехи.

Рассмотрим N -элементную, эквидистантную, линейную AAP. Предположим, что полезный сигнал когерентен на апертуре антенны.

Известно, что стационарное значение вектора весовых коэффициентов, максимизирующее выходное отношение сигнал/шум, определяется выражением

$$w_{ct}^* = \sigma_\eta^2 R_\Pi^{-1} S_o^*, \quad (1)$$

где R_Π - корреляционная матрица шумовых и помеховых напряжений в каналах системы, S_o - вектор-фазор полезного сигнала, σ_η^2 - мощность собственного шума в отдельном приемном элементе, знак $(*)$ означает комплексное сопряжение. Рассмотрим, для определенности, случай одного внешнего помехового сигнала. Корреляционную матрицу R_Π , в этом случае, можно записать в виде

$$R_\Pi = \sigma_\eta^2 I + \sigma_\Pi^2 Q, \quad (2)$$

где σ_Π^2 - мощность внешней помехи. Предположим, что элементы матрицы Q имеют экспоненциальную форму

$$q_{1k} = \exp\{j(l - k)u_\Pi\} \exp\{-d|l - k|/L\},$$

здесь $u_\Pi = 2\pi d \sin \vartheta_\Pi / \lambda$ - обобщенный угол прихода помехового сигнала, λ - длина волны, d - шаг решетки, L - поперечный радиус пространственной корреляции. Нетрудно показать, что в дальней зоне поперечный радиус пространственной корреляции будет обратно пропорционален размерам источника. При этом, матрицу Q из (2) можно записать в следующей форме:

$$Q = FPF^*, \quad (3)$$

где $F = \text{diag}\{1, \exp(ju_\Pi), \dots, \exp(j(N-1)u_\Pi)\}$, а матрица P имеет элементы

$$p_{1k} = p_0^{|l-k|}, \quad p_0 = \exp\{-d/L\}.$$

Предположим, что мощность помехи велика по сравнению с мощностью собственного шума ($\sigma_\eta^2 \ll \sigma_\Pi^2$). Тогда, можно представить R_Π^{-1} в виде [5, 8]

$$R_\Pi^{-1} = (1/\sigma_\eta^2) \{(1/\nu_\Pi) Q^{-1} + E\}, \quad E \cong -(1/\nu_\Pi)^2 (Q^{-1})^2,$$

а $\nu_\Pi = \sigma_\Pi^2/\sigma_\eta^2$ - относительная мощность помехи. Если выполняются следующие условия :

$$\sigma_{\pi}^2 \| Q \| \gg \sigma_{\eta}^2 \| I \|, \quad (1/\nu_{\pi}) \| Q^{-1} \| \gg \| E \|, \quad (4)$$

где знак $\| \cdot \|$ означает евклидову норму, то матрица R_{π}^{-1} будет равна

$$R_{\pi}^{-1} \approx (1/\sigma_{\eta}^2) (1/\nu_{\pi}) Q^{-1} \{ I - (1/\nu_{\pi}) Q^{-1} \}. \quad (5)$$

С учетом (3) нетрудно определить Q^{-1} :

$$Q^{-1} = FP^{-1}F^*,$$

где P^{-1} имеет вид [9]

$$P^{-1} = (1/(1-p_0^2)) \begin{bmatrix} 1 & p_0 & 0 \\ -p_0 & 1+p_0^2 & p_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Тогда для стационарного вектора весовых коэффициентов получим

$$w_{ct} = (1/\nu_{\pi}) [F^* P^{-1} F S_0^* - (1/\nu_{\pi}) F^* P^{-1} P^{-1} F S_0^*]. \quad (7)$$

Ограничаваясь первым членом разложения, с учетом (5), (6) из (7) несложно получить

$$w_{ct} = (1/\nu_{\pi}) F^* P^{-1} C, \quad (8)$$

где $C = \{1, \exp(j(u_{\pi} - u_c)), \dots, \exp(j(K - 1)(u_{\pi} - u_c))\}$, u_c — обобщенный угол прихода полезного сигнала. Из (8) получим следующие выражения для компонент стационарного весового вектора:

$$\begin{aligned} w_1 &= (1/\nu_{\pi}(1 - p_0^2)) \{1 - p_0 \exp(j(u_{\pi} - u_c))\}, \\ w_k &= (1/\nu_{\pi}(1 - p_0^2)) \{-p_0 \exp(j(K - 1)u_{\pi}) + (1 + p_0^2) \exp(j(K-1)u_c) - \\ &\quad - p_0 \exp(j(Ku_c - (K - 1)u_{\pi}))\}, \quad K \neq 1, N \\ w_N &= (1/\nu_{\pi}(1 - p_0^2)) \{1 - p_0 \exp(-j(u_{\pi} - u_c))\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если полезный сигнал приходит с нормали ($u_c = 0$), то из (9) для w_k нетрудно получить

$$w_1 = (1/\nu_{\Pi}(1 - p_0^2)) \{1 - \bar{p}_0 \exp(ju_{\Pi})\},$$

$$w_k = (1/\nu_{\Pi}(1 - p_0^2)) \{1 + p_0^2 - 2p_0 \cos u_{\Pi}\}, \quad K \neq 1, N \quad (10)$$

$$w_N = (1/\nu_{\Pi}(1 - p_0^2)) \{1 - p_0 \exp(-ju_{\Pi})\}.$$

Теперь из (9), (10) можно определить все основные характеристики ААР. В частности, если полезный сигнал приходит с нормали, значение садаптированной в направлении на помеху диаграммы направленности (ДН) будет равно

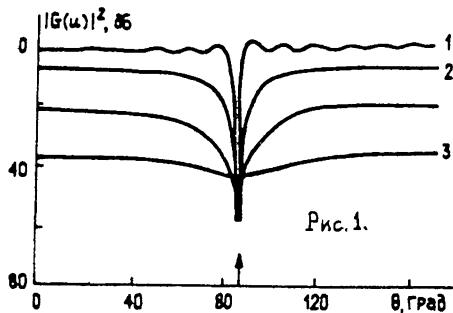
$$\begin{aligned} |G(u_{\Pi})|^2 &= \left| \sum_{k=1}^N w_k \exp(-j(K-1)u_{\Pi}) \right|^2 = (1/\nu_{\Pi}(1-p_0^2))^2 |f(u_{\Pi}) + \right. \\ &+ (p_0^2 - 2p_0 \cos u_{\Pi}) f_1(u_{\Pi}) - p_0^2 + 2p_0 \cos u_{\Pi} - p_0 (\exp(ju_{\Pi}) + \quad (11) \\ &\left. + \exp(-j(N-1)u_{\Pi})) \right|^2, \end{aligned}$$

где $f(u_{\Pi})$, $f_1(u_{\Pi})$ - значения ДН N - и $(N-1)$ -элементных антенных решеток, сфазированных на полезный сигнал в направлении на помеху. В частном случае изотропной по углу помехи ($p_0 \rightarrow 0$), значение садаптированной ДН будет равно

$$|G(u_{\Pi})|^2 \rightarrow (1/\nu_{\Pi})^2 |f(u_{\Pi})|^2. \quad (12)$$

Для более наглядной иллюстрации влияния на ДН неполной пространственной когерентности помехи был рассмотрен следующий алгоритм для определения стационарного вектора весовых коэффициентов

$$w_{ct}^* = R_{\Pi}^{-1} T,$$



где $T^T = \{1, 0, \dots, 0\}$ - определяет вид исходной ДН (в данном случае, исходная ДН - изотропна). На рис. 1 приведены стационарные ДН 10-элементной ААР при $\nu_{\Pi} = 20$ дБ и таких же значений радиуса пространственной корреляции, что и в (2). В данном случае все

отмеченные выше эффекты, наблюдаемые при уменьшении радиуса пространственной корреляции L , проявляются гораздо отчетливее. В частности, при $p_0 \rightarrow 0$ значение ДН в направлении на помеху стремится в соответствии с выражением (12) к величине -40 дБ.

Одной из основных характеристик ААР является выходное ОСШ, которое может быть записано в общем виде следующим образом:

$$\rho_{\text{out}} = \sigma_c^2 (S_0^T R_{\Pi}^{-1} S_0^*), \quad (13)$$

где σ_c^2 - мощность полезного сигнала. Тогда, с учетом (5), (6) из (13) для выходного ОСШ получим

$$\rho_{\text{out}} = (\nu_c / \nu_{\Pi}) [S_0^T F P^{-1} F^* S_0^* - (1/\nu_{\Pi}) S_0^T F P^{-1} P^{-1} F^* S_0^*], \quad (14)$$

где $\nu_c = \sigma_c^2 / \sigma_{\eta}^2$. Ограничивааясь первым членом разложения, с учетом (5), (6) из (14) несложно получить

$$\rho_{\text{out}} = \rho_0 (1/N \nu_{\Pi} (1-p_0^2)) [N + (N-2)p_0^2 - 2p_0 \cos u_{\Pi} (N-1)], \quad (15)$$

где $\rho_0 = N \nu_c$. Для антенных решеток большой размерности ($N \gg 1$) из (15) имеем

$$\rho_{\text{out}} = \rho_0 (1/N \nu_{\Pi} (1-p_0^2)) (1 - 2p_0 \cos u_{\Pi} + p_0^2). \quad (16)$$

Как следует из (16), выходное ОСШ для крупноапertureных адаптивных решеток не зависит от числа элементов и определяется лишь коэффициентом когерентности между соседними элементами p_0 . Если предположить, что поперечный радиус пространственной корреляции достаточно велик ($L \gg d$), то из (16) можно получить

$$\rho_{\text{out}} = \rho_0 (1/\nu_{\Pi}) (L/d) (1 - d/L) (1 - \cos u_{\Pi}). \quad (17)$$

Из (17) видно, что ОСШ на выходе прямо пропорционально радиусу корреляции помехового сигнала. Отметим, что выражения (15)-(17) справедливы при выполнении условий (4). Нетрудно показать, что с учетом (5), (6) условия (4) примут следующий вид:

$$\nu_{\Pi} \gg 1, \quad \nu_{\Pi} (1 - p_0^2) \gg 1. \quad (18)$$

Из (18) следует, что выражение (15) не справедливо в случае $p_0 = 1$.

(случай полной когерентности на апертуре), так как матрица становится вырожденной (имеет диадную форму). Для этого случая выходное ОСШ имеет вид [10]

$$\rho_{\text{out}} = \rho_0 [1 - (N\nu_{\pi}/(1 + N\nu_{\pi})) |\mathcal{F}(u_{\pi})|^2]. \quad (19)$$

На рис. 2 представлены зависимости выходного ОСШ 10-элементной ААР, нормированные на величину ρ_0 от величины p_0 для различных мощностей помехового сигнала в случае $\vartheta_{\pi} = 30^\circ$ (кривая 1 соответствует $\nu_{\pi} = 10$ дБ, 2 - $\nu_{\pi} = 15$ дБ, 3 - $\nu_{\pi} = 20$ дБ). На рисунке штрихованными линиями приведены зависимости, вычисленные по приближенной формуле (15), сплошными - точные решения, полученные путем прямого обращения матрицы R_{π} . Из рисунка видно, что при больших отношениях помеха/шум имеет место хорошее соответствие между точным и приближенным решениями почти для всех p_0 . На рис. 3 представлены зависимости выходного ОСШ от угла прихода помехового сигнала, вычисленные по (15) для $N = 10$, $\nu_{\pi} = 20$ дБ при различных значениях p_0 (кривая 1 соответствует $p_0 = 0.9$, 2 - $p_0 = 0.5$, 3 - $p_0 = 0.1$). Для сравнения, на этом же рисунке приведены известные зависимости выходного ОСШ от угла прихода ϑ_{π} в случаях полностью когерентной помехи, представляющей собой плоскую волну [10] (кривая 4) и изотропного шума (кривая 5). Из рисунка видно, что уменьшение коэффициента когерентности приводит к монотонному снижению уровня выходного ОСШ в диапазоне боковых лепестков стационарной диаграммы направленности за счет "расползания" помехи по углу. В районе же главного лепестка, наоборот, аналогичный эффект приводит к повышению ОСШ на выходе системы.

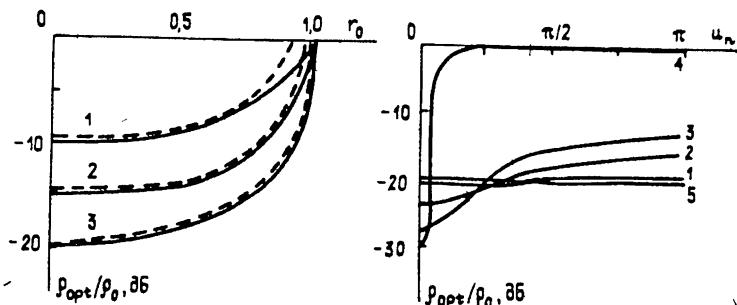


Рис 2,3.

В настоящем разделе мы проанализируем влияние на эффективность подавления помеховых сигналов в ААР вида функции пространственной корреляции. В качестве базовой модели рассмотрим так называемую обобщенную экспоненциальную модель

$$p(x) = \exp\{-(x/L)\},$$

где r - некоторый коэффициент, который определяет конкретный вид модели. Достоинство этой модели заключается в том, что выбором коэффициента r можно регулировать поведение функции пространственной корреляции. Наиболее типичными, например, для задач гидроакустики, являются коэффициенты, величина которых лежит в интервале между 1 (экспонента) и 2 (гауссово распределение) [11]. На рис. 4 приведены

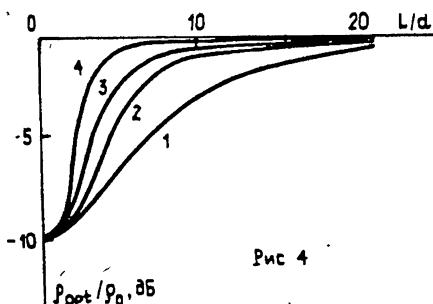


Рис. 4

зависимости выходного ОСШ 10-элементной ААР, нормированные на величину R_0 , от поперечного радиуса пространственной корреляции L , нормированного на межэлементное расстояние d для различных моделей при $\vartheta_p = 30^\circ$, $v_p = 20$ дБ (кривая 1 соответствует $r=1$, 2 - $r=1,5$, 3 - $r=2$, 4 - $r=5$). Из приведенных кривых

видно, что увеличение коэффициента приводит к повышению выходного ОСШ, особенно в случае, когда поперечный радиус пространственной корреляции порядка размеров апертуры антенны $L/d \approx N$. При достаточно малых и достаточно больших L различия в эффективности подавления помех в зависимости от модели незначительны.

ЛИТЕРАТУРА

- Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. - М.: Радио и связь. 1985.
- Караваев В. В., Сазонов В. В. Статистическая теория пассивной локации. - М.: Радио и связь. 1987.
- Гаммельсеттер О. В. В кн. "Подводная акустика и обработка сигналов" - М.: Мир, 1981. С. 271.
- Vural A. // IEEE Trans. 1979. AES-15. N1. p. 76.
- Мальцев А. А., Серебряков Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. N1. С. 52.
- Cox H. // JASA. 1973. v. 54. p. 1743.
- Morgan D.R., Smith T.M. // JASA. 1990. v. 87. N 2. P. 737.

8. Гершман А.Б., Ермолаев В.Т., Флаксман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 11. С. 1374.
9. Мальцев А.А., Патронис Е.Т. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 3. С. 326.
10. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. - М.: Радио и связь. 1981.
11. Carey W.M. // JASA. 1986. V.79. N 1. P.49.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 декабря 1991 г.

EFFICIENCY OF SIGNAL PROCESSING FROM
SPATIALLY DISTRIBUTED SOURCES IN ADAPTIVE ANTENNA ARRAY

A. A. Mal'tsev, G. V. Serebryakov

The main characteristics of adaptive antenna array for spatially distributed interference are analyzed. The behavior of output signal-to-noise ratio was examined.

УДК 519. 9, 534. 1

О ГРАНИЧНО-КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

М. А. Лялинов

В работе изучается новый класс задач электромагнитной теории дифракции, связанный с обобщенным импедансным граничным условием (ОБИГУ). Описаны способы получения ОБИГУ, условия применимости для произвольной цилиндрической поверхности. Исследованы способы моделирования дефектов в электромагнитном покрытии. Выделен класс задач, который может быть точно решен методом факторизации. Построены модели точечных дефектов в покрытии и установлены границы их применимости.

Идея использования импедансных граничных условий в электродинамике утвердилась в 30 - 40-х годах. Импедансное граничное условие позволяет с достаточной степенью точности моделировать рассеивающее тело, исключая изучение сложных процессов внутри рассеивателя. Подобные идеи успешно применялись в радиофизике, и соответствующие импедансные условия называют граничными условиями Щукина - Леоновича. Методы получения импедансных граничных условий восходят к работам Леоновича и Рытова [1, 2]. В последнее время в связи с развитием новых технологий и использованием новых композитных покрытий появилась необходимость получения более точных приближенных моделей рассеивающей поверхности. Соответствующее граничное условие было названо обобщенным импедансным граничным условием (ОБИГУ). Применение ОБИГУ мы связываем с двумя направлениями в теории дифракции: с дифракцией оптического (лазерного) излучения на металлических телах [3] и с рассеянием радиоволн на многослойных тонких покрытиях [4]. Использование ОБИГУ в асимптотической теории дифракции оптического излучения металлическими телами, в частности, позволяет исследовать диффузию поляризации, обусловленную градиентами диэлектрической и магнитной проницаемости и кривизной поверхности. Обобщенное граничное условие импедансного типа широко применяется для моделирования многослойных

тонких покрытий в радиофизике. Судя по нарастающему потоку публикаций (особенно в американской литературе [4 - 6]), интерес к применению ОБИГУ в практических задачах непрерывно возрастает. Однако, по нашему мнению, соответствующая тематика недостаточно отражена в отечественной литературе. Предлагаемая работа призвана отчасти восполнить этот пробел и изложить наше понимание этого вопроса.

Обобщенное импедансное граничное условие в скалярной задаче дифракции, кроме волнового поля и его нормальной производной, содержит касательные производные высокого порядка (четвертого порядка в нашем случае). Появление касательных производных в граничном условии требует анализа корректности постановки задачи. Постановка задачи усложняется, если коэффициенты ОБИГУ испытывают скачок в некоторой точке (для плоской задачи) или на линии (для трехмерной задачи). В данном случае в этих точках необходимо ставить дополнительные условия - контактные условия. Постоянные, входящие в контактные условия в точке, называют контактными импедансами. Контактные импедансы - это локальные характеристики точки контакта различных граничных условий. Правильный выбор моделей контакта является необходимым этапом постановки задачи. Использование ОБИГУ позволяет, в частности, моделировать точечный металлический дефект в однородном импедансном покрытии. Отметим связи предлагаемой техники с потенциалами нулевого радиуса в квантовой механике. Следует ожидать, что модель точечного дефекта в радиофизике найдет столь же широкое применение, как потенциалы нулевого радиуса в квантовой механике. Заметим, что граничное условие с касательными производными высокого порядка в акустической теории дифракции на пластинах и оболочках широко применяется с 60-х годов (уравнения Кирхгофа - Тимошенко, см., например, [7-9]). Хотя аналитический аппарат, предлагаемый в данной работе, близок к тому, что применяется в теории пластин и оболочек, существует ряд принципиальных физических отличий, в основе которых лежит факт, связанный с возможностью распространения электромагнитных волн в вакууме (отсутствие эфира).

В предлагаемой работе выводятся ОБИГУ для тонкого покрытия и для поглощающей поверхности рассеивателя. Устанавливаются условия применимости ОБИГУ. Мы получаем в наиболее общем виде контактные условия в точке разрыва коэффициентов ОБИГУ. Элементы матрицы контактных импедансов являются постоянными, которые зависят от выбираемой модели контакта покрытий. Во втором разделе рассматривается класс точно решаемых гранично-контактных (ГК) задач

электромагнитной теории дифракции. В третьем разделе обсуждаются модели дефектов покрытий. Исследованы условия применимости моделей и описаны перспективы применения ГК задач в радиофизике.

1. Постановка гранично-контактных задач

Рассмотрим плоскую задачу дифракции. Пусть волновое поле U , где $U = E_z$ для ТЕ-поляризации, $U = H_z$ для ТМ-поляризации, удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне поглощающей области Ω

$$\Delta U + k^2 \chi U = 0, \quad U = \begin{cases} U_0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \Omega \\ U_1, & (x, y) \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

и граничным условиям на границе S области Ω

$$U_0|_S = U_1|_S, \quad \frac{\partial U_0}{\partial n}|_S = \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial U_1}{\partial n}|_S, \quad (2)$$

где $k = \omega/c$ - волновое поле, $\chi = 1$ вне Ω ($\epsilon_0 = \mu_0 = 1$), $\chi = N^2$, $N = \sqrt{\epsilon\mu}$ в области Ω , $\omega_0 = \mu$ для ТЕ-поляризации, $\omega_0 = \epsilon$ для ТМ-поляризации и n - нормаль к поверхности. Диэлектрическая и магнитная проницаемости ϵ, μ в Ω постоянны, хотя предлагаемая техника легко переносится и на случай неоднородных сред. Волновое поле $U_0 = U_1 + U_s$ является суммой известного падающего и искомого рассеянного поля*. Решение задачи дифракции должно удовлетворять принципу предельного поглощения.

Задача дифракции на тонком диэлектрическом слое, лежащем на металлической подложке, ставится аналогичным образом. При этом на поверхности слоя сохраняются граничные условия (2), а при $n = -h$ (h - толщина слоя Ω , n положительно вне Ω) на поверхности контакта с подложкой выполнено граничное условие для идеального проводника

$$U|_{n=-h} = 0. \quad (3)$$

*Электромагнитная задача дифракции цилиндрической волны на цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси z , сводится к скалярным задачам для двух поляризаций, причем для ТЕ-поляризации $U = E_z$, $E_x = E_y = H_z = 0$, $H_x = (\partial U / \partial U)/(ik\mu)$, $H_y = -(\partial U / \partial x)/(ik\mu)$.

В случае многослойных покрытий добавляются граничные условия типа (2) на границе слоев. Важно отметить, что структура ОБИГУ одинакова для однослойного и многослойного покрытия. Отличие граничных условий лишь в коэффициентах при производных. В связи с этим для простоты и компактности мы ограничимся однослойным покрытием и рассмотрим лишь случай ТЕ-поляризации, когда $\mu = 1$.

Вывод приближенного граничного условия на поверхности тонкого диэлектрического слоя возможен, если выполнено условие $\delta \ll kh \ll 1$, т. е. толщина слоя мала по сравнению с длиной волны вне рассеивателя. Введем внутри слоя криволинейные ортогональные координаты (s, n) , s — длина дуги вдоль s , n — нормальная координата, $n = 0$ на S , $-h < n < 0$ в слое Ω . Введем безразмерные приведенные координаты $s \rightarrow ks$, $n \rightarrow n/h$, сохранив за ними те же обозначения. Запишем уравнение (1) в безразмерных координатах (s, n)

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[\left(1 + \delta \alpha n \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] + \delta^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(1 + \delta \alpha n \right) \frac{\partial U}{\partial s} \right] + \delta^2 \chi \left(1 + \delta \alpha n \right) U = 0, \quad (4)$$

где $\alpha(s) = 1/k\rho(s)$, ρ — радиус кривизны s , который предполагается достаточно гладкой функцией s . Отметим, что в приложениях часто выполнено условие $\alpha \ll \delta \ll 1$. Граничные условия (2), (3) запишем в виде

$$U_0 \Big|_{n=0} = U_1 \Big|_{n=0}, \quad \frac{\partial U_0}{\partial n} \Big|_{n=0} = \frac{1}{\alpha_0} \frac{\partial U_1}{\partial n} \Big|_{n=0}, \quad U_1 \Big|_{n=-1} = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) ищем в виде разложения

$$U_1(s, n, \delta) = U_1^0(s, n) + \delta U_1^1(s, n) + \delta^2 U_1^2(s, n) + \dots \quad (6)$$

Подставим разложение (6) в уравнение (4) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях δ . Получим рекуррентную систему для определения U_1^i , $i = 0, 1, 2, \dots$. Решение уравнения рекуррентной системы может быть построено в виде полиномов по степеням n . Учитывая граничное условие при $n = -1$ (5), в частности, имеем

$$U_1^0(s, n) = U_1^0 \Big|_s (n + 1), \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
U_1^1(s, n) &= U_1^1 \Big|_{s=0} (n+1) - \frac{\alpha}{2} U_1^0 \Big|_{s=0} [(n+1)^2 - (n+1)], \\
U_1^2(s, n) &= U_1^2 \Big|_{s=0} (n+1) - \frac{\alpha}{2} U_1^1 \Big|_{s=0} [(n+1)^2 - (n+1)] + \\
&+ \alpha^2 U_1^0 \Big|_{s=0} [(n+1)^3/3 - 3(n+1)^2/4 + 5(n+1)/12] - \\
&- (\chi + \frac{\delta^2}{\partial s^2}) U_1^0 \Big|_{s=0} [(n+1)^3/6 - (n+1)/6].
\end{aligned}$$

и так далее. Выражения для U_1^3 , U_1^4 имеют более громоздкий вид и здесь не приводятся. Подставим разложение (6) в граничное условие, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_0}{\partial n} \Big|_{s=0} &= \frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{\partial U_1^0}{\partial n} \Big|_{s=0} + \delta \frac{\partial U_1^1}{\partial n} \Big|_{s=0} + \delta^2 \frac{\partial U_1^2}{\partial n} \Big|_{s=0} + \delta^3 \frac{\partial U_1^3}{\partial n} \Big|_{s=0} + \dots \right) + (8) \\
&+ \delta^4 \frac{\partial U_1^4}{\partial n} \Big|_{s=0} + \dots
\end{aligned}$$

Подставим выражения (7) в (8) и воспользуемся равенством (6). В результате довольно громоздких вычислений, учитывая непрерывность волнового поля на s , получим ОБИГУ на поверхности тонкого слоя, лежащего на металлической подложке:

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} \Big|_s = [(\alpha(\delta, s) + \beta(\delta, s, \partial/\partial s)) U_0 \Big|_s + \gamma(\delta, s, \partial/\partial s) U_0 \Big|_s] + O(\delta), \quad (9a)$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha(\delta, s) &= \frac{1}{\alpha_0} \left[1 - \frac{\alpha \delta}{2} - \delta^2 \left(\frac{\chi}{3} + \frac{\alpha^2}{12} \right) + \frac{\delta^3 \alpha^3}{12} - \right. \\
&\left. - \delta^4 \left(\frac{\alpha^2}{45} + \frac{19\chi\alpha^2}{360} - \frac{701\alpha^4}{720} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(\delta, s, \frac{\partial}{\partial s}) = & \frac{1}{\alpha_0} \left[-\left(\frac{\delta^2}{3}\right) \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left(\frac{\delta^3}{12}\right) \frac{\partial}{\partial s} (\alpha(s) \frac{\partial}{\partial s}) - \left(\frac{\delta^3}{24}\right) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \alpha + \right. \\
& + \alpha(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \} + \left(\frac{3\delta^4}{40} \right) \alpha(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \alpha(s) + \left(\frac{4\delta^4}{5} \right) \frac{\partial}{\partial s} (\alpha^2(s) \frac{\partial}{\partial s}) - \\
& - \left(\frac{2\delta^4}{45} \right) \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left(\frac{13\delta^4}{720} \right) \{ \alpha^2(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \alpha^2(s) \} - \\
& \left. - \left(\frac{\delta^4}{60} \right) \{ \alpha(s) \frac{\partial}{\partial s} (\alpha(s) \frac{\partial}{\partial s}) + \frac{\partial}{\partial s} (\alpha(s) \frac{\partial}{\partial s} \alpha(s)) \} \right],
\end{aligned}$$

$$\gamma(\delta, s, \frac{\partial}{\partial s}) = \frac{1}{\alpha_0} \left(-\frac{\delta^4}{45} \frac{\partial^4}{\partial s^4} \right). \quad (10a)$$

Сумму операторов α , β , γ в правой части (9а) естественно называть обобщенным импедансом. В общем случае обобщенный импеданс представляет собой формальный асимптотический ряд операторов по касательным к границе направлениям. Мы ограничимся членами не выше четвертого порядка по δ . Это обеспечивает необходимую точность моделирования тонкого слоя. Для поглощающих сред нужно оставить члены, пропорциональные δ^4 , еще и для того, чтобы обеспечить корректную постановку задачи. Оператор в правой части (9а) должен быть диссипативен, что соответствует поглощению энергии. Отметим важное обстоятельство, которое состоит в том, что ОБИУ (9а), (10) содержит касательные производные с коэффициентами, зависящими от s , причем дифференциальные операторы формально симметричны. Из этого обстоятельства легко видеть, что, исходя из начальной корректной (самосопряженной) задачи, в результате асимптотической редукции мы получаем упрощенную корректную (самосопряженную) задачу. Это обстоятельство позволяет доказать теоремы существования и единственности.

Обобщенное импедансное граничное условие на поверхности хорошо поглощающего тела может быть получено похожими методами [10]. Предполагая, что глубина проникновения поля в Ω мала по сравнению с длиной волны вне Ω (проводимость достаточно велика, $N = \sqrt{\epsilon\mu}$, $|N| \gg 1$), получим ОБИГУ, которое также называют обобщенным условием Леоновича:

$$\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_s = [(\alpha(s, N) + \frac{\partial}{\partial s} \beta(s, N) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \gamma(s, N) \frac{\partial^2}{\partial s^2}) U] \Big|_s + O(N^{-4}), \quad (96)$$

где

$$\alpha(s, N) = \frac{k}{\alpha_0} \left[-iN - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{8iN} + \frac{\alpha^3}{8N^2} + \frac{1}{iN^3} \left(\frac{25\alpha^4}{128} + \frac{7\alpha\alpha''(s)}{16} + \frac{3(\alpha'(s))^2}{8} \right) \right],$$

$$\beta(s, N) = \frac{k}{\alpha_0} \left[\frac{1}{2iN} + \frac{\alpha}{2N^2} + \frac{13\alpha^2}{16(iN)^3} \right], \quad \gamma(s, N) = \frac{k}{\alpha_0} \left[\frac{1}{(2iN)^3} \right], \quad (106)$$

причем α - обычная размерная длина нормали, $s \rightarrow ks$ - безразмерная приведенная длина дуги.

Рассмотрим плоскую ограниченную область G (рис. 1). Пусть гладкая граница S области G состоит из двух частей S^+ и S^- . Предположим, что на части границы S^+ выполнено условие (9б) (или (9а)) с коэффициентами α_+ , β_+ , γ_+ , а на S^- то же условие с коэффициентами α_- , β_- , γ_- . В точках A и B контакта S^+ и S^- необходимо фиксировать волновой режим поставить специальные контактные условия. Для получения контактных условий учтем закон сохранения энергии. Воспользуемся уравнением (1), формулой

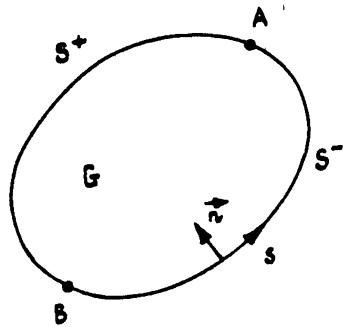


Рис. 1.

Грина и условием Мейкснера в точках A и B . В результате интегрирования по частям и несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} k^2 \int_G |U|^2 dv - \int_G |\nabla U|^2 dv - \int_S (\alpha_+(s) |U|^2 - \beta_+(s) \left| \frac{\partial U}{\partial s} \right|^2 + \\ + \gamma_+(s) \left| \frac{\partial U}{\partial s} \right|^2) ds - \int_{S^-} (\alpha_-(s) |U|^2 - \beta_-(s) \left| \frac{\partial U}{\partial s} \right|^2 + \\ + \gamma_-(s) \left| \frac{\partial U}{\partial s} \right|^2) ds - \beta_+(s) \bar{U} \left. \frac{\partial U}{\partial s} \right|_{A+}^{B+} - \bar{U} \left. \frac{\partial}{\partial s} (\gamma_-(s) \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}) \right|_{A-}^{B-} + \end{aligned}$$

$$+ \gamma_{\pm}(s) \frac{\partial}{\partial s}(\bar{U}) \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \Big|_{B-} = 0.$$

Перегруппируя внеинтегральные члены и вычисляя мнимую часть ($\operatorname{Im} k > 0$, $k = k' + ik''$, принцип предельного поглощения), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(k^2) \int_G |U|^2 dv - \operatorname{Im} \int_{S_{\mp}} (\alpha_{\mp}(s) |U|^2 - \beta_{\mp}(s) \left| \frac{\partial U}{\partial s} \right|^2 + \gamma_{\mp}(s) \left| \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \right|^2) ds + \\ + \operatorname{Im}\{([\beta_{\pm}(s) \frac{\partial U}{\partial s}] \Big|_{A\pm} + [\frac{\partial}{\partial s}(\gamma_{\pm}(s) \frac{\partial^2 U}{\partial s^2})] \Big|_{A\pm} \bar{U}(A) - \quad (11) \\ - [\gamma_{\pm}(s) \frac{\partial}{\partial s}(\bar{U}) \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}] \Big|_{A\pm} \} - \operatorname{Im}\{([\beta_{\pm}(s) \frac{\partial U}{\partial s}] \Big|_{B\pm} + \\ + [\frac{\partial}{\partial s}(\gamma_{\pm}(s) \frac{\partial^2 U}{\partial s^2})] \Big|_{B\pm} \bar{U}(A) - [\gamma_{\pm}(s) \frac{\partial}{\partial s}(U) \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}] \Big|_{B\pm} \} = 0, \end{aligned}$$

где $[f] \Big|_{A\pm} = f(A + 0) - f(A - 0)$, причем волновое поле U предполагается непрерывным. В рассматриваемой системе в силу поглощающих свойств границы S и принципа предельного поглощения каждое из слагаемых в (11) должно быть неотрицательным. Можно показать, пользуясь преобразованием Фурье в соответствующем Гильбертовом пространстве, что второе слагаемое в (11) неотрицательно. Условие положительности мнимой части второго слагаемого в (11) задает определенные ограничения на α , β , γ . В частности, необходимо, чтобы $\operatorname{Im}(-\alpha) > 0$. Можно показать, что условие неотрицательности второго слагаемого в (11) выполнено для металлов в радиодиапазоне. Исследование применимости (9б) для моделирования произвольных поглощающих сред проводится на основе анализа квадратичной формы оператора

$$I_{\pm}(s, \frac{\partial}{\partial s}) = \alpha_{\pm}(s) + \frac{\partial}{\partial s} \beta_{\pm}(s) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \gamma_{\pm}(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2}. \quad (12)$$

Исследование третьего и четвертого слагаемого в (11) проводится одинаково. Воспользуемся соотношением

$$[\gamma \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial s}]|_A = [\gamma \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}]|_A \langle \frac{\partial \bar{U}}{\partial s} \rangle|_A + \{\gamma \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\}|_A [\frac{\partial \bar{U}}{\partial s}]|_A,$$

где $\{f\} = (f(A+0) + f(A-0))/2$. Введем векторы \vec{q} и $\vec{h} \in \mathbb{C}^3$:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} [\beta \frac{\partial U}{\partial s}] + [\frac{\partial}{\partial s} (\gamma \frac{\partial U}{\partial s})] \\ [-\gamma \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}] \\ [-\gamma \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}] \end{pmatrix}|_{A,B}, \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} U \\ \{\frac{\partial U}{\partial s}\} \\ [\frac{\partial U}{\partial s}] \end{pmatrix}|_{A,B}. \quad (13)$$

Третье слагаемое в (11) может быть записано в виде $\text{Im} \langle \vec{q}, \vec{h} \rangle_{\mathbb{C}^3}$. Для того, чтобы фиксировать волновой режим в точках контакта, определить тип контакта импедансных границ s^\pm , мы должны задать связь между векторами \vec{q} и \vec{h} . Очевидно, что эта связь должна быть линейной:

$$\vec{q} = Z \vec{h}, \quad (14)$$

где $Z = \{z_{ik}\}$ матрица 3×3 с комплексными коэффициентами. Для самосопряженной задачи $Z = Z^*$. В общем случае для обеспечения положительной определенности $\text{Im} \langle Z \vec{h}, \vec{h} \rangle$ необходимо потребовать $\text{Im} Z \geq 0$. Оператор задачи оказывается диссипативным. Границное условие (13), (14) называют контактным условием, а постоянные z_{ik} контактными импедансами. Из соотношения (11) следует, что решение уравнения (1) с гранично-контактными условиями (9б), (14) единственno. Контактные условия, соответствующие ОБИГУ (9а), находятся аналогично (13), (14). Доказательство существования решения ГК задачи может быть проведено методами функционального анализа. Для простейших структур решение ГК задачи мы получим в следующем разделе методом факторизации.

2. Метод факторизации и гранично-контактные задачи электромагнитной теории дифракции

Рассмотрим дифракцию плоской волны $U^1 = \exp(ikx \cos\varphi - iky \sin\varphi)$ на прямой $y=0$, причем при $x > 0$ выполнено граничное условие $\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{s^-} = l_-(x, \frac{\partial}{\partial x})U \Big|_{s^-}$, а при $x > 0$ $\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{s^+} = l_+(x, \frac{\partial}{\partial x})U \Big|_{s^+}$, α, β, γ – постоянны. В точке контакта $(0, 0)$ волновой режим определяется контактным условием (14). Контактные импедансы z_{ik} считаем заданными. Представим волновое поле U в виде суммы трех слагаемых

$$U = U^1 + U^r + U^s, \quad (15)$$

где $U^r = R_m^- \exp(ikx \cos\varphi + iky \sin\varphi)$ – поле, отраженное от части границы s^- ,

$$R_m^\pm = \frac{ik \sin\varphi + \alpha_\pm - \beta_\pm \cos^2\varphi + \gamma_\pm \cos^4\varphi}{ik \sin\varphi - \alpha_\pm + \beta_\pm \cos^2\varphi - \gamma_\pm \cos^4\varphi},$$

U^s – рассеянное поле, которое необходимо найти. Будем считать, что U , а следовательно, и U^s непрерывно. Рассеянное поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца, граничным условиям

$$\frac{\partial U^s}{\partial y} \Big|_{s^-} = l_-(x, \frac{\partial}{\partial x})U^s \Big|_{s^-},$$

$$\frac{\partial U^s}{\partial y} \Big|_{s^+} = l_+(x, \frac{\partial}{\partial x})U^s \Big|_{s^+} + A \exp(ikx \cos\varphi), \quad (16)$$

а также контактным условиям. В (16) введено обозначение

$$A = (R_m^+ - R_m^-)(ik \sin\varphi - \alpha_+ + \beta_+ \cos^2\varphi - \gamma_+ \cos^4\varphi).$$

Рассеянное поле может быть найдено в виде интеграла

$$U^s(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \hat{U}^s(p) \exp(ipx + i\sqrt{k^2 - p^2} y) dp. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), получим систему интегральных уравнений

$$\frac{1}{2pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{U}^s(p) \varphi_1(p) \exp(ipx) dp = 0, \quad x < 0,$$

где

$$\frac{1}{2pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{U}^s(p) \varphi_2(p) \exp(ipx) dp = A \exp(ikx \cos\varphi), \quad x > 0, \quad (18)$$

где $\varphi_{1,2} = i\sqrt{k^2 - p^2} - \alpha_{\pm} + \beta_{\pm}(p/k)^2 - \gamma_{\pm}(p/k)^4$, $\operatorname{Im}\sqrt{k^2 - p^2} > 0$ при $\operatorname{Im}(p) = 0$. Интегралы (18) следует понимать, вообще говоря, в смысле обобщенного преобразования Фурье.

Для выполнения равенств (18) необходимо потребовать, чтобы функции

$$\Phi_{-}(p) = \hat{U}^s(p) \varphi_1(p) \quad \text{и} \quad \Phi_{+}(p)/\Phi_{-}(p) (k \cos\varphi) = (p - k \cos\varphi) \hat{U}^s(p) \varphi_2(p)/A$$

были аналитическими функциями соответственно при $\operatorname{Im} p < 0$ и $\operatorname{Im} p > 0$. Исключая $\hat{U}^s(p)$ из последних двух равенств, приходим к краевой задаче Римана

$$\Phi_{+}(p) = G(p) \Phi_{-}(p), \quad G(p) = \varphi_2(p)/\varphi_1(p) (p - k \cos\varphi) \Phi_{+}(k \cos\varphi)/A. \quad (19)$$

Решение задачи свелось к факторизации функции $G(p)$, которая осуществляется явно (см., например, [8]). Для этого необходимо факторизовать функции $\varphi_s(p)$, $s = 1, 2$, которые являются аналитическими на двулистной римановой поверхности. На римановой поверхности расположено восемь корней $\varphi_s(p) = 0$, попарно отличающихся знаком (рис. 2). Считая $\operatorname{Im} k > 0$, проведем разрезы комплексной

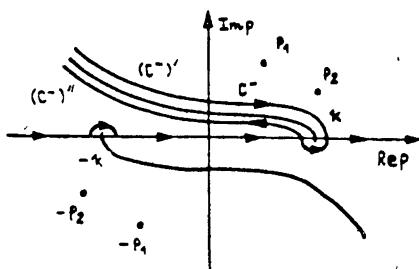


Рис. 2

плоскости из точек $\pm k$ на бесконечность симметричным образом так, что в плоскости правее разрезов находятся две пары корней уравнения $\varphi_s(p) = 0$: $\pm p_1^s/k, \pm p_2^s/k$, $s = 1, 2$. Можно показать, что $\varphi_s(p)$ может быть факторизовано следующим образом:

$$\varphi_s(p) = \varphi_s^+(p) \varphi_s^-(p), \quad \varphi_s^\pm(p) = \psi_s^\pm(p) (p \pm p_1^s) (p \pm p_2^s), \quad (20)$$

$$\psi_s^{\pm}(p) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{c^{\pm}} \ln\left(\frac{i\sqrt{k^2-t^2} - \alpha_s + \beta_s(t/k)^2 - \gamma_s(t/k)^4}{(-\gamma_s)((t/k)^2 - (p_1^s/k)^2)((t/k)^2 - (p_2^s/k)^2)}\right) \frac{dt}{t-p}\right\},$$

где C^{\pm} - контуры интегрирования в комплексной плоскости, охватывающие разрезы по берегам соответственно в нижней и в верхней полуплоскости и оставляющие разрезы справа при обходе. Используя (20), из (19) получаем

$$A \frac{\Phi_+(p)}{\Phi_+(k \cos \varphi)} \frac{\psi_1^+(p)(p+p_1^1)(p+p_2^1)}{\psi_2^+(p)(p+p_1^2)(p+p_2^2)} = (p - k \cos \varphi) \Phi_-(p) \times \\ \times \frac{\psi_2^-(p)(p-p_1^2)(p-p_2^2)}{\psi_1^-(p)(p-p_1^1)(p-p_2^1)}.$$

В последнем равенстве слева стоит функция аналитическая в верхней полуплоскости, а справа - в нижней полуплоскости. Они совпадают на вещественной оси, поэтому существует аналитическая функция $H(p)$ во всей комплексной плоскости. Из непрерывности U^s следует $U^s(p) \sim O(p^{-2})$, $p \rightarrow \infty$, тогда легко показать, что $H(p) = O(p^3)$. Из теоремы Лиувилля получаем

$$H(p) = i(-C_3 p^2 + iC_2 p + C_1)(p - k \cos \varphi) + B. \quad (21)$$

Константа B легко вычисляется: $B = A \varphi_1^+(k \cos \varphi) / \varphi_2^+(k \cos \varphi)$.

Выражения (19), (21), (17) и равенство $\Phi_-(p) = U^s(p) \varphi_1(p)$ позволяют записать решение в виде

$$U = U^1 + U^r + U^s, \quad U^s(x, y) = B \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(ipx + i\sqrt{k^2-p^2}y)}{(p-k \cos \varphi) \varphi_1^+(p) \varphi_2^-(p)} dp + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(ipx + i\sqrt{k^2-p^2}y)}{\varphi_1^+(p) \varphi_2^-(p)} (-C_3 p^2 + iC_2 p + C_1) dp. \quad (22)$$

В (22) полюс первого слагаемого обходится снизу, если $\operatorname{Im} k = 0$. Отметим важное обстоятельство: U^r и первое слагаемое в (22) трижды

непрерывно дифференцируемы, поэтому лишь второе слагаемое (22) несет в себе разрывы производных поля. Построенное решение удовлетворяет принципу предельного поглощения. Подставив (22) в (14), можно получить невырожденную линейную систему алгебраических уравнений для определения C_1 , C_2 , C_3 . Таким образом, вычислив C_j , мы получаем замкнутое решение простейшей ГК задачи. Совершенно очевидно, что метод факторизации применим и в других ГК задачах электродинамики. Классы точно решаемых ГК задач теории дифракции подробно изучены в работах Коузова и его коллег [8, 9].

3. Примеры моделей дефектов и границы их применимости

Рассмотрим тонкий однородный слой, описываемый ОБИГУ с

постоянными α , β , γ (см. (9)). Пусть в однородном тонком слое перпендикулярно подложке помещен идеальный проводник $U|_{x=0, -h < y < 0} = 0$ (рис. 3). Моделируя тонкий слой обобщенным импедансным условием, мы предполагаем, что волновое поле непрерывно. Следовательно, необходимо потребовать, чтобы $U(0, 0) = 0$. Для получения двух других контактных условий, моделирующих точечный идеальный проводник в импедансном покрытии, обратимся к выражениям (7) в разд. I. Из третьего равенства (7) вытекает, что $\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}|_{(0, 0)} = 0$. Аналогично имеем $\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}|_{(0, 0)} = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, два других контактных условия имеют вид

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 U(x, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 U(x, 0)}{\partial x^2} = 0.$$

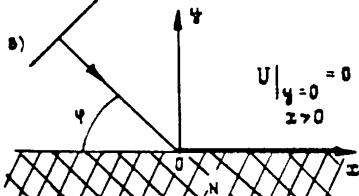


Рис. 3.

Контактные условия, описывающие тонкий идеальный проводник в импедансном покрытии, запишем в форме

При построении системы для C возникает необходимость регуляризации ГК интегралов, которая приводится стандартными методами [6].

$$U(0, 0) = 0, \quad \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right\}_{(0, 0)} = 0, \quad \left[\gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{(0, 0)} = 0. \quad (23a)$$

Совершенно аналогично, если металлический проводник разделяет два различных импедансных покрытия, контактные условия имеют вид

$$U(0, 0) = 0, \quad \left\{ \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right\}_{(0, 0)} = 0, \quad \left[\gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{(0, 0)} = 0. \quad (23b)$$

Используя (23a), получаем систему линейных уравнений для нахождения C_j , $j = 1, 2, 3, \dots$ в равенстве (22):

$$C_3 J_2 + C_1 J_0 = D_m(\varphi),$$

$$C_2 = 0, \quad (24)$$

$$C_3 J_4 + C_1 J_2 = k^2 \cos^2 \varphi D_m(\varphi),$$

где $D_m(\varphi) = -1(1 + R_m(\varphi))$, J_0, J_2, J_4 - гранично-контактные интегралы:

$$J_{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(ip)^{2m} (\exp(+ip\varphi) + \exp(-ip\varphi))}{2\varphi(p)} dp, \quad m=0, 1, 2,$$

$$\varphi(p) = ih\sqrt{k^2 - p^2} - \alpha + \beta(p/k)^2 - \gamma(p/k)^4,$$

$$R_m = \frac{i\delta \sin \varphi + \alpha - \beta \cos^2 \varphi - \gamma \cos^4 \varphi}{i\delta \sin \varphi - \alpha + \beta \cos^2 \varphi - \gamma \cos^4 \varphi}.$$

Заметим, что при $m = 2$ необходима регуляризация интеграла [8], которая описана в Приложении. Учитывая, что $B = 0$, получим

$$U(x, y) = U^1 + U^r + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(ipx + i\sqrt{k^2 - p^2}y)}{\varphi(p)} (-C_3 p^2 + iC_2 p + C_1) dp, \quad (25)$$

где C_j , $j=1, 2, 3$ находятся из системы (24). Легко показать, что последнее слагаемое описывает цилиндрическую волну при $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$, которая порождается дифракцией волны на точечном проводнике.

Импедансное покрытие с произвольным металлическим дефектом в точке $(0, 0)$ описывается граничным условием

$$h \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = (\alpha + \frac{\beta}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{k^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4}) U \Big|_{y=0} + \\ + C_1 \delta(x) + C_2 \delta'(x) + C_3 \delta''(x), \quad (26)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, и равенство (26) понимается в смысле обобщенных функций. Константы C_1, C_2, C_3 суть величины $(-\beta)[U_x]/k^4 + (-\gamma)[U_{xxx}]/k^4$, $(-\gamma)[U_{xx}]/k^4$, $(-\gamma)[U_x]/k^4$ соответственно. В силу локальности контактных условий (23а) их можно использовать и для криволинейных цилиндрических поверхностей, если только $\varepsilon \ll \delta \ll 1$. Легко видеть, что контактные условия (23а) являются частным случаем общих контактных условий (14), если положить $z_{11} \gg z_{12}, z_{11} \gg z_{13}, z_{11} \gg 1, z_{2i} = z_{3i} = 0, i = 1, 2, 3$.

Другой пример ГК условий связан с моделированием идеально проводящего отрезка, лежащего на границе поглощающей полуплоскости (рис. 2б). Для простоты будем считать $\varepsilon_0 = 1$ ($\mu = 1$ для TE-поляризации). В отсутствие проводника поглощающая полуплоскость моделируется ОБИГУ с постоянными $\alpha, \beta, \gamma, |N| \gg 1$. Для того, чтобы построить модель поглощающей полуплоскости с идеально проводящим дефектом типа малого отрезка, лежащего на границе $y = 0$, поступим следующим образом: рассмотрим решение при $x \neq 0, y = 0$ и контактными условиями (13) с произвольными импедансами z_{ik} (модельная задача). Используя граничное условие типа (26), построим точное решение модельной задачи. Вычислим диаграмму рассеяния плоской волны в модельной задаче и сравним ее с длинноволновой асимптотикой диаграммы рассеяния плоской волны на идеально проводящем отрезке длины $2a$ ($\varepsilon = ka \rightarrow 0$), лежащем на поглощающей полуплоскости. В результате такого сравнения мы найдем ГК импедансы в модельной задаче и установим границы применимости построенной модели.

Решение модельной задачи имеет вид (22), где $B = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 =$

$\varphi(p) = i\sqrt{k^2 - p^2} - \alpha + \beta(p/k)^2 - \gamma(p/k)^4$. Вычислим диаграмму рассеяния, определяемую равенством

$$U^s(x, y) = \frac{e^{ikr+i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi kr}} A(\varphi, \psi) (1 + O(r^{-1})),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi,$$

где φ - угол скольжения плоской волны, а ψ - угол скольжения плоской волны, а ψ - угол наблюдения. Проводя стандартные вычисления метода стационарной фазы, для диаграммы рассеяния модельной задачи получим

$$A_M(\varphi, \psi) = D_m(\psi) (-C_3(\varphi)k^2\cos^2\psi + iC_2(\varphi)k\cos\psi + C_1(\varphi)), \quad (27)$$

где

$$D_m(\psi) = \frac{-2ik\sin\psi}{ik\sin\psi - \alpha + \beta\cos^2\psi - \gamma\cos^4\psi} = -(1 + R_m(\psi)).$$

Величины C_1, C_2, C_3 зависят от волнового числа, угла скольжения падающей волны и от свойств дефекта. Контактные условия (14) запишем в несколько иной, более удобной для нас форме

$$\begin{bmatrix} (-\beta)\frac{[U_x]}{k^2} + (-\gamma)\frac{[U_{xxx}]}{k^4} \\ (-\gamma)\frac{[U_{xx}]}{k^4} \\ (-\gamma)\frac{[U_x]}{k^4} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_{(0,0)} \\ \{U_x\} \\ \{U_{xx}\} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где вектор, стоящий в левой части (28), суть вектор-столбец из компонент C_1, C_2, C_3 , а матрица $A = \{a_{ik}\}$ легко выражается через $\{z_{ik}\}$.

Обратимся теперь к задаче дифракции плоской волны на малом, но конечном идеально проводящем отрезке, лежащем в поглощающем

полупространстве. Постановка задачи и ее решение стандартно (рис. 2б). Волновое поле представляется в виде суммы

$$U(x, y) = U^1 + U^r + U,$$

где

$$U^r = R(\varphi) e^{ikx \cos \varphi + ikx \sin \varphi}, \quad R(\varphi) = \frac{\sin \varphi - \sqrt{N^2 - \cos^2 \varphi}}{\sin \varphi + \sqrt{N^2 - \cos^2 \varphi}},$$

$$U^s(x, y) = \int_{-a}^a G(x, y, s, \theta) \varphi_0(s) ds.$$

Здесь $G(z, y, x_0, y_0)$ – функция Грина для задачи без отрезка

$$G(z, y, x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi i} \int_R^{\infty} \frac{e^{ip(x-x_0)}}{\sqrt{k^2 - p^2}} \left[\exp(i|y - y_0| \sqrt{k^2 - p^2}) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{k^2 - p^2} - \sqrt{k^2 N^2 - p^2}}{\sqrt{k^2 + p^2} + \sqrt{k^2 N^2 - p^2}} \exp(i|y + y_0| \sqrt{k^2 - p^2}) \right] dp, \quad y > 0.$$

Функция тока $\varphi_0(s) = (-1) \left(\frac{\partial U^s}{\partial y} \Big|_{y=+0} - \frac{\partial U^s}{\partial y} \Big|_{y=-0} \right)$ является решением интегрального уравнения первого рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность

$$\int_{-a}^a G(x, 0, s, 0) \varphi_0(s) ds = D(\varphi) e^{ikx \cos \varphi}, \quad (29)$$

$D(\varphi) = (-1)(1 + R(\varphi))$. Несложные вычисления приводят в выражению для диаграммы рассеяния

$$A(\varphi, \psi) = D(\psi) \int_{-a}^a \varphi_0(s) e^{-ik s \cos \psi} ds. \quad (30)$$

Преобразуя интегральное уравнение (29), выделим логарифмическую особенность. Используя явную обратимость интегрального оператора с

логарифмическим ядром, методом возмущений построим коротковолновую асимптотику ($\varepsilon = ka \rightarrow 0$) решения интегрального уравнения (31), а значит и асимптотику диаграммы рассеяния (32). Опуская громоздкие и непростые вычисления, получим

$$A(\varphi, \psi) = D(\varphi)D(\psi) \left\{ \frac{2\pi}{P_0 - 2\pi\theta} + \varepsilon^2 \left[\frac{(\pi/2)p_0}{(p_0 - 2\pi\theta)^2} + \frac{(\pi/4)(p_0 + 1)(N^2 - 1)}{(p_0 - 2\pi\theta)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (-\pi) \cos\varphi \cos\psi + (-\pi/2) \frac{\cos^2\varphi + \cos^2\psi}{p_0 - 2\pi\theta} \right] + O(n^4\varepsilon^4 \ln\varepsilon) \right\}, \quad (31)$$

где $p_0 = \ln\left(\frac{\tilde{\gamma}\varepsilon}{4i}\right)$, $\ln\tilde{\gamma} = c$ – постоянная Эйлера,

$$\theta = \frac{(-1)}{2\pi i} \int_R \frac{T(p)}{\sqrt{l^2 - p^2}} dp, \quad D(p) = \frac{\sqrt{l^2 - p^2}}{\sqrt{l^2 - p^2} + \sqrt{N^2 - p^2}} - \frac{1}{2}.$$

Сравнивая коэффициенты при $(\cos\varphi)^0$, $(\cos\varphi)^1$, $(\cos\varphi)^2$ в (27) и (31) и учитывая, что $D_m(\psi) = D(\psi) + O(N^{-6})$, получим

$$C_1 = D_m(\varphi) \left\{ \frac{2\pi}{p_0 - 2\pi\theta} + \varepsilon^2 \left[\frac{(\pi/2)p_0}{(p_0 - 2\pi\theta)^2} + \frac{(\pi/4)(p_0 + 1)(N^2 - 1)}{(p_0 - 2\pi\theta)^2} + \frac{(-\pi/2)\cos^2\varphi}{p_0 - 2\pi\theta} \right] \right\},$$

$$C_2 = \varepsilon^2 \frac{D_m(\varphi)}{k} [(i\pi) \cos\varphi], \quad (32)$$

$$C_3 = \varepsilon^2 \frac{D_m(\varphi)}{(k)^2} \left(\frac{\pi/2}{p_0 - 2\pi\theta} \right).$$

С другой стороны, из контактного условия (28) имеем

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} -D_m(\varphi) \\ -ik \cos\varphi D_m(\varphi) \\ k^2 \cos^2\varphi D_m(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_0 & 0 & J_2 \\ 0 & J_2 & 0 \\ J_2 & 0 & J_4 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где J_m , $m = 0, 1, 2$ – гранично-контактные интегралы, введенные ранее,

причем $\varphi(p) = i\sqrt{k^2 - p^2} - \alpha + \beta(p/k)^2 - \gamma(p/k)^4$. Подставляя (32) в (33) и приравнивая коэффициенты при $(\cos \varphi)^0, \cos \varphi, \cos^2 \varphi$, получим систему линейных уравнений для нахождения элементов матрицы $\{a_{ik}\}$. В результате несложных вычислений имеем

$$a_{11} = \frac{\nu - w J_4 S}{\Delta}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = \frac{\nu(-1 + J_2 S)}{\Delta},$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = \frac{T}{J_2 T - 1}, \quad a_{23} = 0,$$

$$a_{31} = \frac{S(1 + J_2 \nu)}{\Delta}, \quad a_{23} = 0, \quad a_{33} = \frac{-J_0 \nu S}{\Delta},$$

где $\Delta = -1 + J_0 \nu + J_2(S - \nu) + w S(J_2^2 - J_0 J_4)$,

$$\nu = \frac{2\pi}{p_0 - 2\pi\theta} + \varepsilon^2 \frac{(\pi/2)p_0 + (\pi/4)(p_0 + 1)(N^2 - 1)}{(p_0 - 2\pi\theta)^2}, \quad w = \frac{\alpha^2(-\pi/2)}{p_0 - 2\pi\theta},$$

$$T = \pi a^2, \quad S = \frac{\pi a^2/2}{p_0 - 2\pi\theta}.$$

Упростим полученные выражения для $\{a_{ik}\}$, учитывая, что $a^2 J_2 = O(\varepsilon^2)$, $a^4 J_4^4 = O(\varepsilon^4)$, $2\pi\theta - p_0 + 2\pi J_0 = \ln 2 + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon, N^{-6})$. Последнее равенство выводится с использованием разложений

$$\frac{1}{2i} H_0^1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{1^2 - p^2}} dp = \frac{1}{\pi} \ln \frac{ix}{2i} - \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{4} \left(\ln \frac{ix}{2i} - 1 \right) + \dots$$

$i k \sqrt{N^2 - p^2} = -\alpha + \beta p^2 - \gamma p^4 + O(p^6/N^5)$. После упрощений получаем выражение для матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\ln 2} & 0 & \frac{\pi a^2/2}{\ln 2} \\ 0 & \pi a^2 & 0 \\ \frac{\pi a^2/2}{\ln 2} & 0 & \frac{J_0 \pi^2 a^4/4}{\ln 2 (\ln 2 - 2\pi J_0)} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Формула (34) выведена в предположении фиксированной связи между малыми параметрами ϵ и $1/N$. Контактные условия справедливы для произвольной поверхности, моделируемой ОБИГУ, если выполнены соотношения $\alpha \ll |N|^{-1} \ll 1$, $\epsilon \ll 1$, $\epsilon|N| \ll 1$, $|N| \gg 1$.

Последний пример контактных условий относится к моделированию ситуации, когда на части границы поглощающей полуплоскости лежит идеально проводящая полупрямая (рис. 2в). Рассматривается модельная задача с ОБИГУ (9б) при $x < 0$ и $U|_{y=0} = 0$ при $x > 0$ ($\mu = \alpha_0 = 1$). Сравнение диаграмм рассеяния этих задач позволяет получить контактные условия.

Решение первой задачи получается методом факторизации:

$$U(x, y) = U^1 + U^r + \frac{D(\varphi)}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{k+k \cos\varphi} \psi^+(k \cos\varphi) \exp(ipx + i\sqrt{k^2 - p^2}y)}{(p - k \cos\varphi)\sqrt{k + p} \psi^+(p)} dp$$

$$(y > 0), \quad (35)$$

где $\sqrt{k + p} \psi^+(p) \sqrt{k - p} \psi^-(p) = \sqrt{k^2 - p^2} + \sqrt{k^2 N^2 - p^2} = \psi(p) \sqrt{k^2 - p^2}$, $\psi^\pm(p)$ — функции, аналитические при $\operatorname{Im} p > 0$ соответственно,

$$U^r = R(r) \exp(ikx \cos\varphi + iky \sin\varphi), \quad D(\varphi) = (-1)[1 + R(\varphi)],$$

$$\ln \psi_{(p)}^\pm = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^\pm} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k^2 N^2 - t^2}}{\sqrt{k^2 - t^2}} \right) \frac{dt}{t - p},$$

контуры C^\pm охватывают соответственно разрезы в верхней и нижней полуплоскости t . Аналогично тому, как это было проведено в разд. 2, получим решение модельной задачи

$$U = U^1 + R_k(\varphi) \exp(ikx \cos\varphi + iky \sin\varphi) + \quad (36)$$

$$+ \frac{D_k(\varphi)}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi^+(k \cos\varphi) \exp(ipx + i\sqrt{k^2 - p^2}y)}{p - \cos\varphi} dp +$$

$$+ \frac{H}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(ipx + i\sqrt{k^2 - p^2}y)}{\psi^+(p)} dp,$$

где H - постоянная, которую необходимо найти, $\varphi(p) = i\sqrt{k^2 - p^2} - \alpha + \beta(p/k)^2 - \gamma(p/k)^4$. Заметим, что $D(\varphi) = D_H(\varphi) + O(N^{-6})$, $R = R_H + O(N^{-6})$. Контактные условия в точке $x = y = 0$ определим, сравнивая диаграммы рассеяния плоской волны в двух указанных задачах. Очевидно, что в силу непрерывности поля U одно контактное условие имеет вид $U(0, 0) = 0$. Сравнивая диаграммы рассеяния, видим, что в (36) необходимо положить $H = 0$. Учитывая, что $H = 0$, получаем из (36)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\partial U(x, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\partial U(x, 0)}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, контактные условия в этом случае имеют вид

$$U(0, 0) = 0, \quad [\frac{\partial U}{\partial x}]_{(0, 0)} = 0, \quad \{ \frac{\partial U}{\partial x} \}_{(0, 0)} = 0. \quad (37)$$

Совершенно ясно, что приведенные примеры контактных условий не исчерпывают всех интересных для приложений ситуаций. Интерес к гранично-контактным задачам в электродинамике обусловлен тем обстоятельством, что гранично-контактные условия, полученные в простой задаче, в силу их локальности переносятся на более сложные задачи с криволинейной границей и неоднородной средой. Важным и перспективным направлением развития гранично-контактных задач электромагнитной теории дифракции является построение геометрической теории дифракции Фока - Келлера, а также асимптотической теории дифракции в угловых областях. Для применимости асимптотических моделей необходимо выполнение иерархии малых параметров, например, $\varepsilon \ll \delta \ll \epsilon \ll 1$. В соответствующих работах по гранично-контактным задачам акустики пластин исследуется незеркальное локационное отражение. Аналогичное явление может быть исследовано и в электродинамике. Интерес представляет также проведение численных расчетов и сравнение решений модельных задач с решениями реальных задач и с экспериментом. Для ТМ-поляризации очень важно изучить возможность распространения поверхностной бегущей волны вдоль тонкого слоя, моделируемого ОБИГУ. Эти и другие вопросы мы предлагаем обсудить в следующих публикациях.

В заключение хочу поблагодарить В. С. Булдырева, Б. П. Белинского и И. В. Андронова за плодотворные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О регуляризации интеграла J_4^\pm

$$\text{Интеграл } J_4^\pm = \frac{1}{2\pi} \int p^4 \left[\frac{e^{\pm i p 0}}{ih\sqrt{k^2 - p^2 - \alpha + \beta(p/k)^2 - \gamma(p/k)^4}} \right] dp$$

необходимо регуляризовать. Регуляризация J_4^\pm проводится способом, предложенным в [8]. Сначала деформируем контур интегрирования в контур C^\mp . При этом пересекаются полюсы подынтегрального выражения. Интеграл по берегам разреза C^\mp разбиваем на сумму интегралов по $(C^\mp)'$ и $(C^\mp)''$. Пользуясь свойствами подынтегральной функции, сводим J_4^\pm к интегралу по $(C^\mp)'$ (рис. 3):

$$J_4^\pm = \frac{1}{2\pi} \int_{(C^\mp)'} p^4 \left[\frac{1}{ih\sqrt{k^2 - p^2 - \alpha + \beta(p/k)^2 - \gamma(p/k)^4}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{ih\sqrt{k^2 - p^2 - \alpha + \beta(p/k)^2 - \gamma(p/k)^4}} \right] dp + \sum_{s=1}^2 \text{ires}_s f(p_s),$$

где $f(p)$ – подынтегральная функция J_4^\pm . После элементарного преобразования подынтегрального выражения имеем регуляризованное значение интеграла

$$J_4^\pm = \frac{1}{2\pi} \int_{(C^\mp)'} \frac{p^4 (2ih\sqrt{k^2 - p^2})}{h^2(p^2 - 1) - (\alpha - \beta(p/k)^2 + \gamma(p/k)^4)^2} dp + \sum_{s=1}^2 \text{ires}_s f(p_s).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонович М. А. В кн. :Исследования по распространению радиоволн /Под ред. Б. А. Введенского. -М. :Изд. АН СССР. 1948. с.5.
2. Рытов С. М. //ЖЭТФ. 1938. Т.10. № 1. с.180.
3. Булдырев В. С., Лялинов М. А. и др. //ЖЭТФ. 1990. Т.96. № 3. с.733.
4. Senior T.B.A., Volakis J.L. //Radio Science (USA). 1989. V.22. P.1261.

5. Volakis J.L., Senior T.B.A. //Proc.IEEE. 1989. V.77. P.796.
6. Rojas R.G., Al-Hekail Z. //Radio Science. 1989. V.24.
7. Красильников В. Н. //ПММ. 1961. Т.25. № 4. С.121.
8. Коузов Д. П. //ПММ. 1963. Т.27. № 3. С.72.

Санкт-Петербургский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 сентября 1991 г.,
объединенная
3 марта 1992 г.

THE BOUNDARY CONTACT PROBLEMS OF ELECTROMAGNETIC
THEORY OF DIFFRACTION

Ljalinov M. A.

New class of the electromagnetic diffraction problems is investigated in the paper. This trend deals with the Generalized Impedance Boundary Conditions (GIBC). The new methods of obtaining of GIBC for an arbitrary cylindrical surfaces and the conditions of the GIBC's application are discussed. The procedure of simulating of the defects (small conductors) in the electromagnetic coatings is investigated. For the simplest cases the boundary-contact problems can be solved by means of the factorization method. The models of the point-defects are constructed. The conditions of their applications are made clear.

УДК 621.385.69

МОЩНЫЕ ГИРОТРОНЫ НА ВТОРОЙ ГАРМОНИКЕ ЦИКЛОТРОННОЙ ЧАСТОТЫ

В. Е. Залевалов, С. А. Малыгин, Ш. Е. Цимлинг

Рассмотрен экспериментальный гиротрон на второй гармонике циклотронной частоты с максимальной выходной мощностью 0,6 Мвт. Исследования показывают, что основными факторами, ограничивающими выходную мощность, являются конкуренция мод и влияние поля пространственного заряда. Приведены результаты экспериментов по электронной селекции с помощью дополнительного поглощающего пучка.

Введение. Гиротроны, работающие на второй гармонике циклотронной частоты (МЦР-2), по сравнению с МЦР-1 помимо двухкратного снижения требуемого магнитного поля в рабочем пространстве, характеризуются меньшей тепловой нагрузкой коллектора, меньшей критичностью параметров электронной пушки, а также большим значением оптимального по КПД тока пучка. Теория МЦР-2 с оптимизированным распределением высокочастотного поля в резонаторе и экспериментальные данные показали [1 - 3], что по максимальному КПД эти приборы близки к гиротронам на основном циклотронном резонансе (МЦР-1). Недостатком МЦР-2, затрудняющим получение больших средних мощностей, особенно в коротковолновой части миллиметрового диапазона, является необходимость использования по сравнению с МЦР-1 более добротных резонаторов, что приводит к росту омических потерь. Однако, наиболее серьезной проблемой при повышении мощности МЦР-2 является конкуренция со стороны мод, синхронных с пучком на основном циклотронном резонансе.

В гиротроне с рабочей модой H_{021} ($\lambda \approx 9$ мм) конкуренция паразитных мод приводила к неустойчивости рабочей моды (многочастотность, перескоки частоты, резкое снижение КПД, срыв

колебаний) уже при величине выходной мощности 35 кВт. Применение электронной и электродинамической селекции [4] способствовало ослаблению паразитной генерации и позволило повысить выходную мощность в том же макете до 160 кВт.

Эксперименты и теория устойчивости колебаний при наличии конкуренции мод [4, 5] позволяют дать следующие рекомендации:

1) длина участка однородного магнитного поля не должна превышать минимума, обеспечивающего приемлемый КПД;

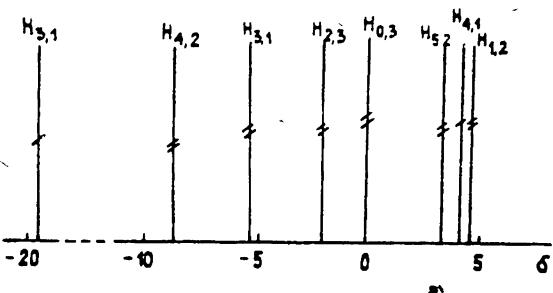
2) продольное распределение высокочастотного поля рабочей моды $f_1(\zeta)$ должно по сравнению с паразитными модами усиливать группировку электронного пучка на начальном участке резонатора;

3) функция $f_1(\zeta)$, добротность резонатора, а также средний радиус R_0 электронного пучка в резонаторе должны минимизировать фактор \hat{q} , характеризующий запас устойчивости рабочей моды [6]:

$$\hat{q} = \frac{1}{2\beta_1^2} \frac{G_2}{G_1} \frac{\int |f_1(\zeta)|^2 d\zeta}{\int |f_2(\zeta)|^2 d\zeta}. \quad (1)$$

Здесь ζ - безразмерная продольная координата. Индекс 1 относится к рабочей, 2 - к паразитной моде. Структурные факторы мод

$$G_s = \frac{J_{m-n}^2(2\pi R_0/\lambda_s)}{[(2\pi R/\lambda_s)^2 - m^2] J_m^2(2\pi R/\lambda_s)}; \quad (2)$$



а)

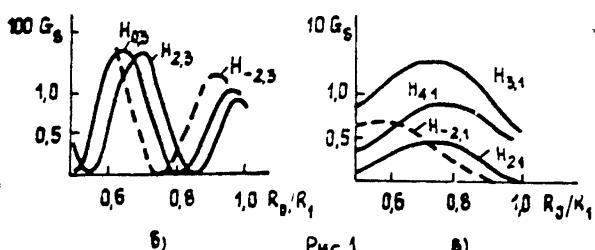


Рис.1.

4) при работе в импульсном режиме целесообразно применять схему питания гиротрона, способствующую первоначальному возбуждению рабочей моды [7].

Настоящая работа является продолжением исследований [4] и посвящена изучению роли паразитных мод и параметров пучка на более высоких мощностях.

1. Экспериментальный гиротрон.
Схема экспериментального

гиotrona разрабатывалась с учетом рекомендаций [1 - 4] ($\lambda \approx 1, 2 - 1, 3$ см). Электронно-оптическая и магнитная системы позволяли возбуждать на второй гармонике моды $H_{4,2,1}$, $H_{8,1,1}$, $H_{2,3,1}$, $H_{0,3,1}$. Спектр мод резонатора приведен на рис. 1а. Здесь число черточек на вертикальных линиях равно номеру гармоники гирочастоты. структурные факторы рабочих и паразитных мод показаны на рис. 1б и 1в соответственно. На них относительная расстройка собственных чисел мод относительно собственного числа рабочей моды $H_{0,3}$ $\delta = \left(\frac{2\nu_m}{\nu_{03}} - 1 \right) \%$, ν_m - нуль производной функции Бесселя J_m , m, n - азимутальный и радиальный индекс мод соответственно, R_0 - радиус пучка в рабочем пространстве, R_1 - радиус резонатора, n_s - номер гармоники гирочастоты s -й моды $H_{0,3,1}$, $H_{2,3,1}$.

В гиротроне использовалась магнетронно-инжекторная пушка с изолированным анодом. Коллектор совмещался с выходным волноводом.

2. Влияние паразитных мод на выходные характеристики гиротрона.

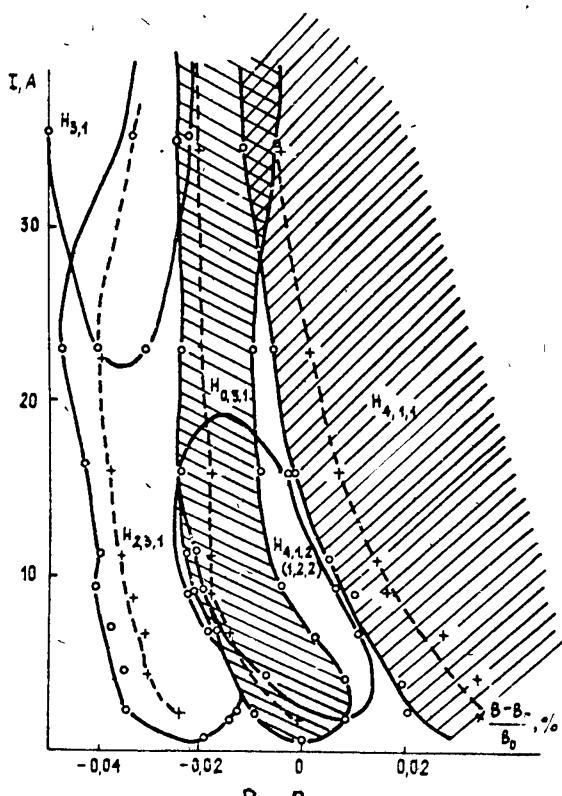


Рис. 2.

В используемом резонаторе для рабочей моды $H_{0,3,1}$ обеспечивалось оптимизированное продольное распределение высокочастотного поля с характерной длиной $L/\lambda \approx 5$ и добротностью $Q \approx 2 \cdot 10^3$.

Максимальная мощность составляла 500 кВт при токе $I = 32$ А ($t_s = I/I_L = 0, 23$)*, напряжении 54 кВ и КПД 30%. Максимальный КПД 46% достигался при $I = 7$ А (выходная мощность 170 кВт). При $I > 32$ А имел место резкий спад выходной мощности и КПД с одновременным возникновением генерации на основном циклотронном резонансе.

Идентификация паразитных мод и определения степени их влияния на устойчивость рабочей моды исследовалась путем изучения

* I_L - ленгмюровский ток эквивалентного безмагнитного диода.

области генерации гиротрона (рис. 2, $U_0 = 40$ кВ, $U_a = 28$ кВ). Анализ радиальной структуры производился по термическому действию СВЧ поля. Наличие единственного максимума по радиусу характеризует паразитную моду $H_{4,1,1}$.

Зоны генерации мод (рис. 2) снимались при токе катодной катушки, оптимальном для генерации рабочей моды $H_{0,3,1}$. Сплошными линиями на рис. 2 обозначены границы зон генерации мод, пунктиром — линии максимального КПД. Перекрытию зон соответствует двухчастотная генерация. Согласно рис. 2 рабочая зона частично перекрывается с зоной паразитной моды $H_{4,1,1}$. Линии максимального КПД рабочей и паразитной мод достаточно разнесены, что обеспечивает устойчивую генерацию рабочей моды при указанных напряжениях вплоть до предельных токов.

Перекрытие зон $H_{0,3,1}$ и $H_{4,1,1}$, рассчитанных по линейной теории, возрастает с увеличением питающих напряжений (при сохранении $g = v_1/v_n$). При напряжении $U_0 = 60$ кВ, $g = 1,7$ полное перекрытие имеет место уже при токе около 10 А. Это согласуется с наблюдавшейся в эксперименте тенденцией к увеличению перекрытия зон и уменьшению устойчивости с ростом питающих напряжений. Слева от рабочей зоны находится зона генерации моды $H_{2,3,1}$, резонансной со второй гармоникой гироочастоты.

В область генерации согласно рис. 2 входят еще две зоны. Первая из них начинается при токе пучка около 2,5 А и перекрывается частично с зоной $H_{0,3,1}$. Длина волны для этой зоны близка к критической для $H_{4,1}$ ($H_{1,2}$), хотя и несколько меньше чем для зоны справа. Расположение границ зоны и частота колебаний указывают на наличие генерации моды $H_{4,1,2}$ ($H_{1,2,2}$) на попутной волне. Крайне малая мощность и наличие сопутствующей мощной генерации на рабочей моде затрудняют определение поперечной структуры паразитной моды. Воздействие соседних мод и изменение качества пучка с током деформирует границы зоны $H_{4,1,2}$ ($H_{1,2,2}$) и при токе около 20 А паразитная генерация исчезает. Наличие моды $H_{4,1,2}$ не вызывает заметной деформации границ рабочей зоны или кривой максимального КПД. С повышением напряжения паразитная генерация становится еще слабее и практически не влияет на выходные характеристики гиротрона.

Возбуждение мод $H_{0,3,1}$ и $H_{4,1,2}$ ($H_{1,2,2}$) вблизи минимального стартового тока является мягким. При таких режимах двухчастотные колебания реализуются только при слабой межмодовой связи [8]. Причиной последней может быть значительный скоростной разброс, в

результате которого различные скоростные фракции взаимодействуют с разными модами.

При токе 22 А возникает зона генерации моды $H_{3,1}$, которая частично перекрывается с зонами $H_{0,3,1}$ и $H_{2,3,1}$. Измеренная длина волны меньше критической для $H_{3,1}$ и больше для $H_{4,1}$. Наиболее вероятной в данном случае является генерация на встречной волне на модах $H_{3,1}$ с большим числом вариаций ($q > 2$) по длине резонатора. Оценки показывают, что для взаимодействующей встречной волны продольный индекс $q \sim 3$. Деформация левой границы зоны $H_{2,3,1}$ связана с воздействием указанной паразитной моды. Перекрытие $H_{3,1}$ с зоной $H_{0,3,1}$ мало. Поэтому устойчивость рабочей моды не уменьшается.

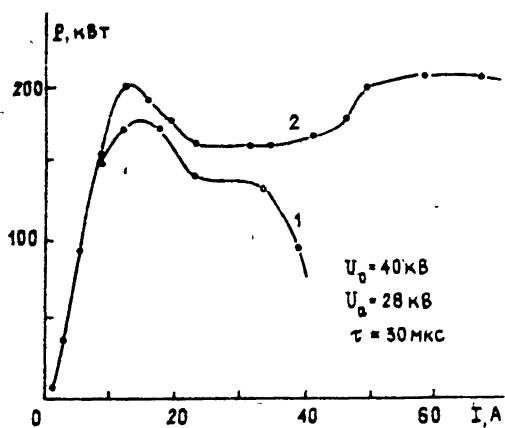
Таким образом, основным фактором, определяющим неустойчивость рабочей моды, является конкуренция со стороны моды $H_{4,1,1}$. Вследствие медленности спадания структурного фактора $H_{4,1,1}$ (см. рис. 1) в области максимума структурного фактора рабочей моды $H_{0,3,1}$ электронная селекция паразитной моды за счет изменения радиуса пучка в резонаторе малозэффективна. Продольное распределение высокочастотного поля $H_{4,1,1}$ практически совпадает с $H_{0,3,1}$. Это затрудняет использование для селекции мод коррекции длины области взаимодействия. Так, попытка применить резонатор с поглощающей вставкой, аналогичный использованному в [4], не дала положительных результатов.

Исследование области генерации гиротрона с другими резонаторами показало, что для более коротких резонаторов перекрытие рабочей зоны с зоной моды $H_{4,1,1}$ происходит уже при $U_0 = 40$ кВ. Применение резонаторов с увеличенной длиной поля приводит к перекрытию с зоной моды $H_{3,1}$, которая, расширяясь, принимает очертания, характерные для нефиксированной структуры поля [9] при синхронизме со встречной волной. Повышение питающих напряжений увеличивает влияние паразитной моды $H_{4,1,1}$, тогда как роль моды $H_{3,1}$ несколько снижается.

3. Выходные характеристики гиротрона при повышенных токах пучка. Уменьшение питающих напряжений, как отмечалось выше, снижает влияние паразитных колебаний на моду $H_{0,3,1}$. Для поддержания уровня выходной мощности уменьшение напряжения должно быть компенсировано увеличением тока пучка, что естественно приводит к возрастанию сил объемного заряда. На рис. 3 показана зависимость выходной мощности от тока пучка для моды $H_{0,3,1}$ ($U_0 = 40$ кВ, $U_a = 28$ кВ). При токе корректирующих резонаторных катушек $I_{\text{кор}} = 7$ А выходная мощность достигает максимума 170 кВт при токе пучка $I = 14$ А (рис. 3 кривая

1), а затем падает почти до нуля. При тех же параметрах пучка и $I_{\text{кор}} = 9 \text{ A}$ (рис. 3 кривая 2) выходная мощность почти не меняется и при $I = 50 \text{ A}$ ($t_j \approx 0,52$) близка к максимуму, соответствующему $I = 10 \text{ A}$. При токе $I = 67 \text{ A}$ отношение тока пучка к ленгмюровскому току эквивалентного безмагнитного диода $t_j = I/I_{\text{л}} \approx 0,7$.

Аналогичный характер имеет зависимость $P(I)$ и для соседней моды



$H_{2,3,1}$. В режимах, соответствующих данным рис. 3 ($I_{\text{кор}} = 7 \text{ A}$), для $I = 10 \text{ A}$ при небольшой отстройке от оптимального режима $H_{0,3,1}$ наблюдалась двухмодовая генерация $H_{0,3,1}$ и $H_{2,3,1}$ при суммарной выходной мощности 90 кВт и КПД = 23%. Из сопоставления кривых 1 и 2 (рис. 3) видно, что само по себе ухудшение качества пучка с током практически не влияет на устойчивость рабочих колебаний,

поскольку параметры потока не зависят от тонких деталей распределения магнитного поля в области взаимодействия. Причиной неустойчивости, по-видимому, является критичность эффектов конкуренции мод к малым изменениям магнитного поля в резонаторе.

Увеличение питающих напряжений уменьшает выходную мощность в области за первым максимумом практически до нуля. При напряжении $U_0 = 50 \text{ kV}$ в некоторых режимах генерация срывалась при токах 20 A. Однако она вновь возникала при $I \approx 80 \text{ A}$. Этот эффект не имеет однозначной интерпретации. Возможно, что он обусловлен различной реакцией эффективности взаимодействия с модами $H_{0,3,1}$ и $H_{4,1,1}$ на ухудшение качества пучка. Наличие в пучке электронов с малой осцилляторной энергией приводит к циклотронному поглощению моды $H_{4,1,1}$.

В табл. 1 приведены параметры некоторых рабочих режимов (мода $H_{0,3,1}$) с большим током пучка.

Таблица 1

	U_0, kV	U_a, kV	I, A	I_a, A	t_j	P, kWt	$\eta, \%$
1	40	28	67	0,7	0,7	210	8
2	52	32	100	4	0,85	460	9
3	47	28	102	2	1	350	7,4

Примечателен вариант з, который соответствует режиму полного пространственного заряда (ρ -режим). Наличие ρ -режима устанавливалось путем проверки закона "3/2":

$$I = p U_a^{3/2} \quad (3)$$

при условии, что потенциал резонатора и магнитное поле меняются по известным соотношениям подобия

$$U_0 = K_1 U_a, \quad B_0 = K_2 \sqrt{U_a} \quad (K_1, K_2 - \text{константы}), \quad (4)$$

которые обеспечивают неизменность электронных траекторий в статическом режиме. Мощность подогрева при измерении соответствовала максимальному току эмиссии.

Существенное влияние на выходные характеристики гиротрона оказывает изменение тока корректирующей катодной катушки. Это согласуется с теоретической зависимостью [11] $t_1 \sim \alpha^5$, где $\alpha = B_0/B_k$ (t_1 - отношение поперечной энергии электронов в резонаторе к их полной энергии). Для режима температурного ограничения эмиссии при $I < I_d$ $t_1 \sim \alpha^3$.

Следует отметить, что колебания в ρ -режиме отличались устойчивостью к малым изменениям регулирующих параметров и отсутствием электрических пробоев в пушке. Электронно-оптические изменения дали для ρ -режима $t_1 \approx 0,2$ и $\delta v_1 = 100\%$. Если использовать данные таблицы 1 и $t_1 = 0,2$ мы получим для электронного КПД величину $\approx 40\%$, что намного меньше теоретического максимума. Большой скоростной разброс в пучке вполне объясняет указанное расхождение. Оптимизация электронно-оптических систем в ρ -режиме по всей вероятности позволит улучшить параметры электронных пучков и повысить выходную мощность и КПД.

4. Эксперименты с дополнительным поглощающим пучком. Введение в рабочее пространство дополнительного неосциллирующего пучка приводит к поглощению мод на основном циклотронном резонансе и не должно оказывать влияния на моды, синхронные со второй гармоникой гирочастоты. Согласно [10] электронная добротность паразитной моды, вносимая поглощающим пучком,

$$Q_{2\text{эл}} = \frac{2,16 \cdot 10^3}{I^{(2)} G_2} \frac{\beta^{(2)2} \lambda_2}{L_2} \exp(\psi_2^{(2)2}/8), \quad (5)$$

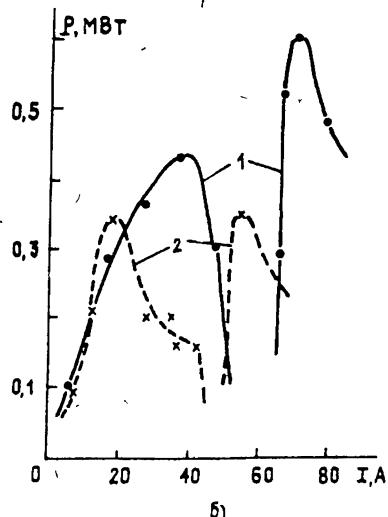
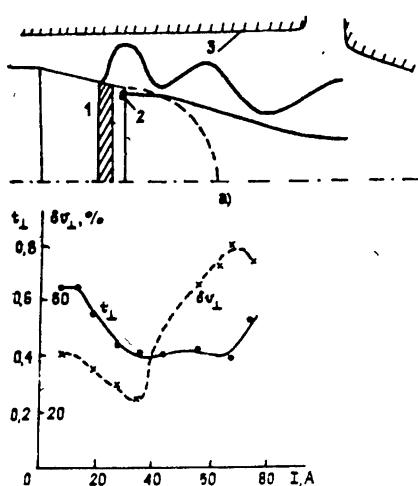
где $\psi_2^{(2)}$ - угол пролета электронов поглощающего пучка для паразитной моды, $I^{(2)}$ - ток поглощающего пучка.

Поняя добротность резонатора на паразитной моде

$$Q_2^* = \frac{Q_2 Q_{2\text{эл}}}{Q_2 + Q_{2\text{эл}}} . \quad (6)$$

Увеличение стартового тока мешающей моды определяется фактором Q_2/Q_2^* .

Для формирования дополнительного пучка передняя сферическая часть катода (пунктир на рис. 4а) была удалена, а на образовавшийся открытый торец камеры подогревателя основного эмиттера-1 был помещен дополнительный эмиттирующий поясок-2. Для увеличения расстояния между траекториями основного пучка и образовавшимся изломом катодной поверхности диаметр анода 3 был увеличен. Накал обоих эмиттеров осуществлялся общим подогревателем. Это, однако, препятствовало раздельному управлению токами пучков и усложняло измерение парциальных токов.



Зависимость выходной мощности от полного катодного тока двухлучевого гиротрона приведена на рис. 4б, кривая 1. Наибольшая выходная мощность достигала 600 кВт при токе 70 А ($U_0 = 47$ кВ, $U_a = 32$ кВ). При устранении дополнительного поглощающего пучка (путем ликвидации эмиттирующего пояска 2) максимальная мощность не превышала 360 кВт (зависимость P (1) на рис. 4б) кривая 2). Характерной особенностью кривых 1 и 2 являлось наличие двух максимумов P (1).

Электронно-оптические измерения показали, что дополнительный пучок является практически неосциллирующим ($t_1 \approx 0,1$; $\delta v_{||} \approx 7\%$). Зависимость поперечной энергии и скоростного разброса от тока для основного пучка приведена на рис. 4в (кривые 3 и 4). Наличие минимума δv_{\perp} (не типичное для традиционной геометрии) в некоторой мере объясняет провал кривой Р (1) на рис. 4б. Уменьшение скоростного разброса способствует лучшему взаимодействию основного пучка с паразитной модой $H_{3,1}$ (бегущая волна), которая и подавляет рабочую моду $H_{0,3,1}$. Применение поглощающего дополнительного пучка способствует подавлению моды $H_{4,1,1}$ и, по-видимому, слабо влияет на бегущую волну $H_{3,1}$ вследствие низкой эквивалентной добротности. Увеличение скоростного разброса при дальнейшем увеличении тока основного пучка приводит к повышению устойчивости рабочей моды, сохраняющейся вплоть до ленгмюровского тока ($I \approx 83$ А).

Таким образом, применение дополнительного пучка позволяет существенно повысить устойчивость рабочей моды по отношению к резонансным синхронным с первой гармоникой гирочастоты и поднять выходную мощность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев М. А., Рогачева Г. Г., Юлпатов В. К. //Тезисы докл. Всесоюзной научной сессии, посвященной Дню Радио. - М., 1968. С. 6.
2. Нусинович Г. С., Эрм Р. Э. //Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1972. Вып. 8. С. 55.
3. Кисель Д. В., Кораблев Г. С., Павельев В. Г. и др. //Радиотехника и электроника. 1974. Т. 19. № 4. С. 782.
4. Запевалов В. Е., Кораблев Г. С., Цимминг Ш. Е. //Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22. № 8. С. 1661.
5. Запевалов В. Е., Зарница И. Г., Нусинович Г. С. //Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 3. С. 367.
6. Зарница И. Г., Нусинович Г. С. //Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 3. С. 461.
7. Нусинович Г. С. //Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1974. № 3. С. 44.
8. Зарница И. Г., Нусинович Г. С. //Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 2. С. 303.
9. Братман В. Л., Моисеев М. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 2. С. 1045.
10. Запевалов В. Е., Цимминг Ш. Е. //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 32. № 11. С. 1288.

11. Цимринг Ш. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 10.
С. 1550.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
16 октября 1991 г.

POWERFUL GYROTRON ON SECOND HARMONIC
OF CYCLOTRON FREQUENCY

V. E. Zapevalov, S. A. Malygin, Sh. E. Tsimring

Experimental gyrotron on the second harmonic of cyclotron frequency with maximum output power 0.6 MW are described. The investigations show that main output power limiting factor are mode competition and charge influence. Results of electron mode selection with additional absorbing beam are given.

УДК 621.37

ФОРМИРОВАНИЕ СВЧ ИМПУЛЬСОВ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ SLED

С. Н. Артеменко, В. Л. Каминский, Г. И. Самойленко

Экспериментально показана возможность формирования в сверхпроводящей системе SLED радиоимпульсов микросекундной длительности с 8-9-кратным превышением мощности питающего генератора с огибающей, близкой к прямоугольной.

1. Как известно [1 - 3], одним из эффективных и относительно простых способов повышения импульсной мощности излучения СВЧ генераторов является способ системы SLED, заключающийся в накоплении и быстром выводе электромагнитной энергии из двух сильно связанных с питающими трактами и соединенных по гибридной схеме накопительных резонаторов, фаза питающей волны которых после завершения процесса накопления изменяется на 180° . Известно также [1], что такой способ теоретически может обеспечить девятикратное увеличение мощности генератора, если обеспечены значения коэффициента связи в резонаторах с ВЧ трактами по крайней мере не менее десяти, а постоянная переключения фазы τ_ϕ много меньше звучания нагруженного резонатора τ ($\tau_\phi \leq 10^{-3}\tau$). Однако очевидно, что на практике реализация таких значений β в используемых в настоящее время системах с медными накопительными резонаторами недопустима. Это связано с относительно низкими значениями собственной добротности Q_0 таких резонаторов ($Q_0 \approx 10^{-4} - 10^{-5}$) и относительно большими значениями постоянной переключения фазы, которые обычно составляют величину $\sim 10^{-8}$ с. Особенно это относится к системам, работающим в коротковолновой части диапазона СВЧ ($\lambda \leq 3$ см), где постоянная затухания ненагруженных резонаторов не превышает $10^{-7} - 10^{-6}$ с. Очевидно также, что в медных системах в силу низких значений нагруженной добротности резонаторов возможно формирование только относительно коротких

импульсов СВЧ с крутым спадом плато импульса. Как правило, длительность формируемых такими системами импульсов составляет 0,2 - 0,4 мкс, увеличение мощности не превышает шести-семикратного, а огибающая близка к треугольной [2, 3].

В связи с этим представляется целесообразным применение в системе сверхпроводящих накопительных резонаторов (СПР), собственная добротность которых достигает 10^9 - 10^{10} и более, а постоянная затухания составляет 10^{-3} - 1 с [4, 5]. Такой уровень добротности и постоянной затухания может позволить создать системы с $\beta \geq 10^3$ и, следовательно, обеспечить увеличение мощности, близкое к максимальному. Кроме того, очевидно, что сверхпроводящие системы могут позволить формировать относительно длинные ($\sim 10^0$ - 10^2 мкс) импульсы СВЧ с огибающей, близкой к прямоугольной, так как резонаторы таких систем могут иметь нагруженную добротность $\sim 10^5$ - 10^7 с постоянной затухания ~ 1 - 100 мкс. Нетрудно также показать, что при достигнутом уровне плотности запасаемой энергии в СПР ~ 1 - 10 Дж/л [4, 5] накопительный резонатор с объемом, например, в несколько литров и с $\beta = 10^3$ может стабильно работать в сантиметровом диапазоне длин волн при уровне входной мощности ~ 100 - 200 кВт и более и, следовательно, формировать в этом диапазоне сигналы мегаваттного уровня мощности. Это весьма важное обстоятельство, так как известно, что получение микросекундных СВЧ импульсов такого уровня мощности в сантиметровом диапазоне длин волн, даже при генерации излучения хорошо развитыми традиционными способами, сопряжено с серьезными техническими и технологическими трудностями. Следует также отметить, что особенно перспективной сверхпроводящая система SLED может оказаться в случае успешной разработки технологии изготовления высококачественных резонаторов из высокотемпературных сверхпроводников.

В настоящей работе изложены результаты экспериментального исследования сверхпроводящей системы SLED на низком уровне ВЧ мощности.

2. Эксперименты выполнены на двух практических идентичных цилиндрических ниобиевых СПР з-сантиметрового диапазона длин волн с объемом каждого около 4 л. Собственная добротность резонаторов после устранения влияния межвидовой связи на рабочий $H_{01(20)}$ вид колебаний составляла $1,5 \cdot 10^8$ при температуре 4,2 К. Резонаторы возбуждались по прямоугольным волноводам через отверстие связи в одной из торцевых крышек каждого из резонаторов. Эти же волноводы служили для вывода

энергии из резонаторов и подвода ее к мосту з дБ, где энергия суммировалась и подавалась в нагрузку. Взаимная подстройка рабочих частот резонаторов и устранение влияния межвидовой связи на рабочий вид колебаний осуществлялись с помощью подвижных плунжеров, расположенных в запредельных каналах по оси торцевых крышек резонаторов.

Инверсия фазы питающей систему волны осуществлялась быстродействующим фазовращателем на основе p-i-n диода, который располагался в резонансной диафрагме в закороченном отрезке волновода на расстоянии четверти длины волны от закоротки. Отрезок волновода подсоединялся к одному из плеч У циркулятора, который включался в тракт таким образом, чтобы отраженная от закоротки волна передавалась ко входному плечу моста системы. Постоянная переключения фазы такого фазовращателя составляла $\sim 10^{-8}$ с.

На основе результатов работы [6] было установлено, что при $Q_0 \approx 10^8$ и $\tau_\phi \approx 10^{-8}$ с оптимальные значения β составляют величину $\approx 10^3$. При этом максимальное усиление мощности достигает значений $\sim 8,5 - 8,6$, а постоянная затухания резонатора $\sim 1 - 10$ мкс и, следовательно, если переключение фазы осуществлять за время порядка постоянной затухания до момента окончания питающей систему СВЧ импульса, то система с использованными СПР и фазовращателем теоретически должна формировать почти прямоугольные радиоимпульсы микросекундной длительности с практически максимальным усилением и с постоянной спада плато импульса $\sim 1 - 10$ мкс.

Оценка требуемого радиуса r отверстия связи для обеспечения необходимого значения β проводилась по формуле, полученной из известного соотношения для β [8]:

$$\beta = P_{изл} / P_{рас}, \quad (1)$$

где $P_{изл}$, $P_{рас}$ – излучаемая из резонатора через отверстие связи и рассеиваемая в резонаторе ВЧ-мощность соответственно. При этом, если учесть, что согласно [7]

$$P_{изл} = \frac{8 H_0^2 \omega^4 r^6 \epsilon^2 \mu^2 Z_C e^{-2\alpha d}}{27\pi}; \quad (2)$$

$$P_{рас} = (1/2) R_s \int \vec{H}^2 ds, \quad (3)$$

то для определения r из (1), (2), (3) получаем следующее уравнение:

$$r^6 \exp\left(-\frac{3,682d}{r}\right) = \frac{27\pi\beta R_s \int \vec{H}^2 ds}{16 H_0^2 \omega^4 \epsilon^2 \mu^2 z_c}, \quad (4)$$

где H_0 - амплитуда магнитной компоненты ВЧ поля в области отверстия связи, $\epsilon = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{Ф/м}$, $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Гн/м}$, z_c - волновое сопротивление волновода, R_s - поверхностное сопротивление стенок резонатора, ω - циклическая рабочая частота d - толщина стенки резонатора, \vec{H} - вектор магнитной компоненты ВЧ-поля рабочего вида колебаний. В случае работы резонатора на $H_{01(p)}$, виде колебаний формула (4) приобретает вид

$$r^6 \exp\left(-\frac{3,682d}{r}\right) = \frac{27\beta G \lambda^4 RL [1 + (2p^2 \pi^2 R^3 / A_{01}^3 L^3)] j_0^2(A_{01})}{256 z_c Q_0}, \quad (5)$$

где R, L - радиус и длина резонатора соответственно, G - его геометрический фактор, Q_0 - собственная добротность резонатора, $A_{01} = 3,832$, $j_0(A_{01})$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка, λ - рабочая длина волны.

Как показали результаты экспериментов, оценка r по формуле (5) дает вполне удовлетворительную для практических нужд точность и избавляет от необходимости трудоемкого, особенно в случае сверхпроводящих резонаторов, подбора r экспериментальным путем либо от необходимости создания устройства регулируемого элемента связи, рассчитанного на высокий уровень мощности.

На рис. 1 приведена осциллограмма отраженного от резонаторов сигнала без инверсии фазы питающей волны при $\beta \approx 10^3$, $Q_0 \approx 10^8$ и при одинаковых рабочих частотах резонаторов. Как видно из рисунка при таком β $P_{изл}$ после окончания питающего систему импульса СВЧ практически в четыре раза превышает мощность, подводимую к резонатору, что согласуется с хорошо известным теоретическим выводом о соотношении между $P_{изл}$ и подводимой к резонатору мощности при больших β [8].

На рис. 2 приведена осциллограмма сформированного сверхпроводящей системой SLED радиоимпульса при инверсии фазы за время $\sim 1 \text{ мкс}$ до окончания питающего систему импульса СВЧ в случае,

когда резонаторы настроены на одну частоту и значения β одинаковы для обоих резонаторов. При этом пиковое значение усиления мощности в сформированном импульсе практически совпадало с расчетным.

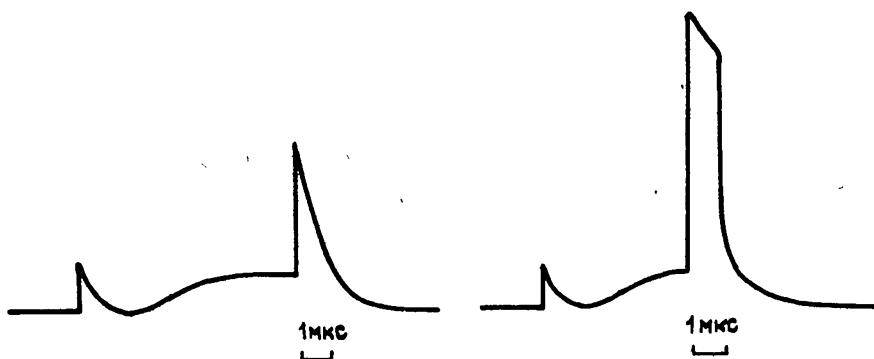


Рис. 1.2.

Вместе с тем, в процессе экспериментов была выявлена сильная зависимость коэффициента усиления и формы огибающей импульса от взаимной расстройки частот резонаторов и выбора их рабочей частоты. Взаимная расстройка частот приводила к уменьшению коэффициента усиления системы, а также к появлению осцилляций на плато импульса, период которых определялся величиной расстройки. "Неудачный" же выбор рабочей частоты системы приводил к существенному уменьшению коэффициента связи каждого-либо из резонаторов, иногда более чем на три порядка, что снижало коэффициент усиления системы до значений, равных 6. Как было установлено, такое снижение β и, соответственно, уменьшение усиления обусловливались сильным взаимодействием рабочего вида колебаний с вырожденным с ним колебанием вида $E_{11(20)}$, собственная добротность которого была на два порядка ниже добротности рабочего вида колебаний.

Таким образом, результаты экспериментального исследования сверхпроводящей системы SLED подтвердили возможность формирования с ее помощью радиоимпульсов микросекундной длительности с усилием, близким к максимальному и практически прямоугольной огибающей. Вместе с тем, эксперименты выявили достаточно сильное влияние межвидовой связи в резонаторах системы на параметры формируемых импульсов, что говорит о необходимости внимательного отношения к проблеме межвидовой связи при проектировании системы SLED со сверхпроводящими накопительными резонаторами.

Результаты детального экспериментального исследования межвидовой связи в сверхразмерном сверхпроводящем резонаторе для накопления и вывода СВЧ-энергии подробно изложены в [9].

В заключение авторы выражают благодарность Ю. Г. Юшкову за интерес к работе и помочь при ее выполнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Farkas Z.D., Hogg H.A., Loew G.A., Wilson P.W. // Proc of 9-th Int. Conf. on High Energy Accel. SLAC. Stanford. Calif. 1974. P. 576.
2. Hogg H.A., Loew G.A., Price V.G. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1983. V. 30. N 4. P. 3457.
3. Богданович Б. Ю., Игнатьев А. П., Сенюков В. А. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Техника физического эксперимента. 1985. Т. 3. N 24. С. 38.
4. Диденко А. Н., Севрюкова Л. М., Ятис А. А. Сверхпроводящие ускоряющие СВЧ-структуры. - М.: Энергоиздат, 1981.
5. Диденко А. Н., Артеменко С. Н. и др. Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. N 22. С. 1368.
6. Лавров Б. П., Лебедюк И. И., Левин В. И. // Изв. вузов. Радиофизика 1987. Т. 30. N 3. С. 444.
7. Никольский В. В. Теория электромагнитного поля. - М.: Высшая школа, 1961.
8. Менде Ф. Ф., Бондаренко И. Н., Трубицин А. В. Сверхпроводящие и охлаждаемые резонансные системы. - Киев: Наукова думка, 1976.
9. Артеменко С. Н., Каминский В. Л., Самойленко Г. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. N 7. С. 868.

Научно-исследовательский
институт ядерной физики

Поступила в редакцию
24 апреля 1991 г.

GENERATION OF RF-PULSES AT SUPERCONDUCTING SYSTEM SLED

Artemenko S.N., Kaminskij V.L., Samojlenko G.M

The possibility of receiving microsecond RF-pulses with power gain equal to 8-9 and almost rectangular envelope is experimentally demonstrated.

Краткие сообщения и письма в редакцию

УДК 621.391.82

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ
ФЛИКЕРНОГО СПЕКТРА

Младенцев А. Л., Якинов А. В.

Спектр флиkerного шума (относительных флиkerных флуктуаций параметров [1]) обычно аппроксимируется степенной зависимостью вида $S(f) = A/f^\gamma$, где f - частота в герцах. Нахождение тем или иным способом параметров A и γ представляет определенный интерес, поскольку их величины позволяют характеризовать данный случайный процесс. Так как при измерении спектра постоянно присутствует экспериментальная погрешность, возникает проблема - насколько точны найденные значения A и γ . Ситуация подобного рода может возникнуть, к примеру, при исследовании температурной эволюции параметров A и γ , где важно определить, случайно или закономерно изменение этих параметров при варьировании температуры (см., например, [2]).

Для решения вышеуказанной задачи представим спектр флиkerного шума в следующем виде:

$$S(f) = S_0 \cdot (f_0/f)^\gamma, \quad (1)$$

где $S_0 = S(f_0)$ - величина спектра в Гц⁻¹ на выбранной частоте f_0 . Такое представление дает возможность описать спектр, используя не только величину A , что означает $f = 1$ Гц, но и с помощью значения S_0 на любой другой частоте (например, в [2] было выбрано $f=20$ Гц).

В двойном логарифмическом масштабе спектр (1) описывается линейной зависимостью

$$y(x) = a - \gamma \cdot (x - x_0), \quad (2)$$

где $y = 10 \cdot \lg(S(f))$, $a = 10 \cdot \lg S_0$ [дБ/Гц]; $x = 10 \cdot \lg f$, $x = 10 \cdot \lg f_0$ [дБ/Гц]. Обозначим через N число экспериментальных отсчетов спектра

y_i на соответствующих частотах x_i (в двойном логарифмическом масштабе, $i = \overline{1, N}$). Допустим, что ошибка измерения спектра $\Delta y_i = y_i - \langle y \rangle$ имеет гауссово распределение с известным стандартом σ_{y_i} . Все отсчеты некоррелированы друг с другом, $\langle \Delta y_i \cdot \Delta y_j \rangle = \sigma_{y_i}^2 \cdot \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, угловые скобки означают статистическое усреднение. В этом случае параметры α и γ аппроксимирующего соотношения (2) находим по методу наименьших квадратов (см., например, [3]), минимизируя среднеквадратическую ошибку аппроксимации

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y(x_i))^2.$$

В результате получим

$$\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(1 + \frac{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_i)}{\sigma_x^2} \right) \cdot y_i,$$

$$\gamma = \frac{1}{N\sigma_x^2} \sum_{i=1}^N (\bar{x}-x_i) \cdot y_i.$$

Здесь и ниже черта над символом означает арифметическое усреднение; $\sigma_x^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2$ — дисперсия отсчетов частоты в логарифмическом масштабе.

Учитывая некоррелированность отсчетов y_i , получим следующие окончательные соотношения для погрешностей, возникающих при определении параметров α и γ :

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \left(1 + \frac{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_i)}{\sigma_x^2} \right)^2 \cdot \sigma_{y_i}^2, \quad (3)$$

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{1}{N^2 \sigma_x^2} \sum_{i=1}^N (\bar{x}-x_i)^2 \cdot \sigma_{y_i}^2.$$

Заметим, что при $x = 0$ погрешность σ_α описывает точность определения параметра A , характеризующего величину спектра на частоте 1 Гц.

Рассмотрим частный случай соотношений (3), допустив, что относительная погрешность измерения спектра постоянна на всех исследуемых частотах. Такая ситуация возможна, если шумы

экспериментальной установки пренебрежимо малы по сравнению с величиной процесса и если $\Delta\omega T = \text{const}$, где $\Delta\omega$ - полоса фильтра анализатора спектра, T - время усреднения отсчетов. При выполнении этих условий $\sigma_{y_i} = \sigma_y$, $i = \overline{1, N}$. В результате получим

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\sigma_y^2}{N} \frac{(x - x_0)^2}{\sigma_x^2}, \quad \sigma_\gamma^2 = \frac{\sigma_y^2}{N} \frac{1}{\sigma_x^2}. \quad (4)$$

Из соотношений (4) можно сразу отметить некоторые закономерности. К примеру, видно, что погрешность определения параметра γ зависит от дисперсии выбранных отсчетов по частоте и не зависит от величины частоты x_0 , на которой осуществляется линейное прогнозирование (2) измеряемого спектра. Зависимость $\sigma_\alpha^2 = \sigma_\alpha^2(x_0)$ представляет собой параболу с минимумом в точке x_0 . Таким образом, при планировании эксперимента для минимизации погрешности определения параметра формы спектра γ необходимо располагать частоты так, чтобы величина σ_x оказалась максимальной. С другой стороны, для достижения минимальной погрешности определения параметра α следует осуществлять аппроксимацию спектра на средней взвешенной (в логарифмическом масштабе) частоте, $x_0 = \bar{x}$. При этом σ_α становится равной $\sigma_{\min} = \sigma_y / \sqrt{N}$, что соответствует арифметическому усреднению некоррелированных отсчетов.

В качестве примера рассмотрим распространенный способ измерения спектра (имеющего степенную зависимость от частоты), при котором исследуемые частоты располагаются эквидистантно в логарифмическом масштабе. Такая процедура считается удобной при аналоговом (последовательном) измерении спектра фликерного типа. В этом случае соотношения (4) дают

$$\sigma_\alpha^2 = [1 + \frac{1}{b(N)} \frac{(x_B + x_H - 2x_0)^2}{2(x_B - x_H)}] \sigma_{\min}^2,$$

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{1}{(x_B - x_H)^2 b(N)} \sigma_{\min}^2, \quad (5)$$

где

$$b(N) = \frac{1}{12} \frac{N+1}{N-1},$$

x_B и x_H - верхняя и нижняя частоты анализа, выраженные в децибелах от частоты 1 Гц, то есть в дБ·Гц. При изменении N от 10 до бесконечности величина $b(N)$ меняется от 1/10 до 1/12, что вносит в определение σ_α и σ_γ погрешность не более 5%. Поэтому вполне логично в (5) положить $b(N)=1/12$, то есть использовать максимальное значение

$$\sigma_\alpha^2 = [1 + 12 \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right)^2] \cdot \sigma_{\min}^2, \quad \sigma_\gamma^2 = \frac{12}{(\Delta x)^2} \sigma_{\min}^2.$$

Здесь $\Delta x = x_B - x_H$ - ширина исследуемого диапазона.

Из полученных результатов следует, что при проведении интерполяции, $x_0 \in [x_H, x_B]$, можно гарантировать погрешность σ_α от σ_{\min} до $2\sigma_{\min}$. Причем, как уже было отмечено, предпочтительнее расположить диапазон измерений так, чтобы x_0 оказалась в середине этого диапазона. Экстраполяция как вверх, так и вниз ведет к увеличению погрешности. Погрешность определения параметра формы спектра γ зависит только от ширины исследуемого диапазона и σ_{\min} , определяемой количеством N некоррелированных отсчетов.

Используем полученные результаты для анализа некоторых известных экспериментальных данных. К примеру, Эберхардом и Хорном [2] при статистической обработке ансамбля измеренных спектров получена оценка погрешности $\sigma_\gamma = 0,06$. Эксперимент характеризовался следующими параметрами: $f_H = 0,25$ Гц, $f_B = 200$ Гц, $N = 35$. Оценка стандарта σ_γ , найденная из анализа представленных спектров, составляет $\hat{\sigma}_\gamma = 0,5$ дБ/Гц. Используя (5), получаем следующую оценку для точности определения параметра формы спектра: $\hat{\sigma}_\gamma = 0,01$, что гораздо меньше величины σ_γ , обнаруженной авторами. Этот факт может быть объяснен следующим образом. В измеренном спектре фликерного шума наряду со случайной погрешностью присутствует некая систематическая погрешность. Она, например, может быть обусловлена тем, что спектр вида $1/f$ есть суперпозиция спектров релаксационного типа, имеющих лоренцеву форму:

$$S(f) = \sum_{k=1}^M B_k \cdot \nu_k / (\nu_k^2 + f^2) \sim 1/f, \quad (6)$$

где M - число лоренцианов, B_k - амплитуда, ν_k - характерная (опорная) частота k -го лоренциана. На возможность того, что фликерный шум есть суперпозиция различных релаксационных процессов (например, генерационно - рекомбинационных шумов, либо шумов, связанных с движением дефектов внутри образца) указывали многие авторы (см.,

например, [2, 4, 5]). Превышение σ_y^* над $\hat{\sigma}_y$ может говорить о том, что аппроксимировать спектр фликерного шума степенной зависимостью (1), вообще, говоря, некорректно. В этом случае можно попытаться представить спектр суперпозицией лоренцианов (6) с определенным набором $\{B_k, \nu_k\}$, $k = \overline{1, M}$; то есть провести декомпозицию спектра на отдельные составляющие [6-8].

С другой стороны, если оценить погрешность определения параметра γ исходя из данных, опубликованных в работе [6] ($f_h = 0,5$ Гц, $f_B = 2000$ Гц, $\hat{\sigma}_y = 0,5$ дБ/Гц, $N = 800$), то можно получить $\hat{\sigma}_y = 0,002$, то есть величину равную той, которую обнаружили авторы. Здесь вполне логично предположить, что в данном случае декомпозиция спектра невозможна.

Приведенные примеры показывают, что необходимы эксперименты, направленные на установление связи между σ_y^* , найденной в результате усреднения по ансамблю спектров, и $\hat{\sigma}_y$, найденной из анализа погрешности экспериментальной установки. Превышение σ_y^* над $\hat{\sigma}_y$ возможно, происходит из-за отличия реального спектра от степенной зависимости (1) и может служить индикатором возможности осуществления декомпозиции фликерного спектра, например, на суперпозицию лоренцианов.

Таким образом, найдена погрешность определения аппроксимирующих параметров спектра фликерного шума при наличии экспериментальной погрешности. Указаны основные причины, влияющие на точность результатов. Показано, что задача нахождения погрешности определения параметров фликерного спектра связана с проблемой выяснения природы $1/f$ шума.

Авторы благодарны М. Е. Герценштейну за полезные замечания по обсуждаемой проблеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А. Н. //Радиотехника и электроника. 1959. Т 4. № 1. С. 54.
2. Eberhard J. W., Horn P. M. //Phys. Rev. B. 1978. V.18. N 12. P.6681.
3. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. -М.: Физматгиз, 1958. - 333 С.
4. Du Pre F. K. //Phys. Rev. 1950. V. 78. N 5. P. 615.

5. Van der Ziel A. // Physica. 1950. V.16. N 4. P.359.
6. Бакши И.С., Сальков Е.А., Хижняк Б.И. // ЖТФ. 1991. Т. 51. N 5. С. 85.
7. Орлов В.Б., Якимов А.В.//Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. N 2. С. 196.
8. Орлов В.Б., Якимов А.В. / В сб. "Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах". Горьковский госуниверситет. - Горький, 1989г., С. 153, Деп. в ВИНИТИ 12.11.90, н 5713-В90.
9. Андреев В. Н., Захарченя Б. П., Капшин Ю. С., Носкин В. А., Чудновский Ф. А.//ЖЭТФ. 1980. Т.79. Вып. 4(10). С. 1353.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 марта 1992 г.

УДК 621.391.822:621.375.826

ШУМОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛА ОШИБКИ В СИСТЕМАХ АПЧ CO₂ ЛАЗЕРОВ С ВЧ НАКАЧКОЙ*

А. А. Азаров

Для стабилизации частоты излучения газовых лазеров широко используется модуляционный метод, заключающийся в том, что при изменении длины оптического резонатора лазера по гармоническому закону вырабатывается сигнал ошибки, пропорциональный изменению мощности лазерного излучения, причем амплитуда и фаза сигнала содержат информацию соответственно о величине и направлении отстройки частоты излучения от центра контура усиления активной среды лазера [1].

Для систем автоподстройки частоты большое значение имеет уровень амплитудных шумов в сигнале ошибки, поскольку дисперсия частотной ошибки излучения лазера прямо пропорциональна спектральной плотности шумов.

* Доложено на Всесоюзно-координационном совещании "Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах" (поселок Черноголовка Московской области, июнь, 1981 г.).

В стабилизируемых газовых лазерах сигнал ошибки вводимый в систему АПЧ, обычно вырабатывается с помощью охлаждаемых фотоприемников. Последние имеют весьма низкий уровень собственных шумов, однако из-за необходимости применения криогенной техники могут быть использованы только в лабораторных условиях. Большие перспективы для выделения сигнала ошибки имеет оптогальванический эффект (ОГЭ), выражющийся в изменении проводимости плазмы активной среды в зависимости от уровня мощности когерентного оптического излучения внутри лазерного резонатора [2]. Для получения сигнала оптогальваническим методом в лазере с ВЧ возбуждением необходимо фиксировать уровень вкладываемой в разряд мощности накачки. Схема для получения сигнала ошибки в этом случае может быть построена следующим образом. Между высокочастотным генератором накачки и согласующим устройством устанавливается трансформатор тока. Высокочастотные напряжения, пропорциональные соответственно току в цепи накачки и напряжению на выходе генератора, подаются на фазовый детектор, формирующий сигнал ошибки. Однако в этом случае необходимо учитывать шумовые параметры самого источника ВЧ накачки, которые определяются собственными шумами ВЧ генератора и пульсациями напряжения источника питания ВЧ генератора. Уровень этих шумов соизмерим, а зачастую превышает уровень сигнала частотной ошибки за счет ОГЭ. Положение может быть улучшено, если принять во внимание, что электрические свойства высокочастотной лазерной плазмы с учетом режима работы выходного каскада генератора накачки обеспечивают постоянство напряжения на разряде, а изменение проводимости плазмы влияет только на уровень отраженной от разряда мощности. Следовательно, для извлечения сигнала ошибки имеет смысл применять циркулятор. При достаточно хорошем согласовании уровень шумов в такте сигнала ошибки за счет источника ВЧ накачки меньше во столько раз, во сколько уровень отраженной мощности накачки меньше уровня падающей мощности.

Улучшение шумовых параметров экспериментально наблюдалось при замене датчика, регистрирующего сигнал ошибки по общему уровню ВЧ напряжения датчиком, реагирующим на уровень отраженной мощности.

Известна схема датчика, в котором для получения сигнала ошибки производится амплитудное детектирование отраженной от согласующего устройства высокочастотной мощности [3]. Но при использовании такого датчика возникает ряд проблем. Во-первых, для нормальной работы

амплитудного детектора требуется присутствие некоторого уровня отраженной мощности, т.е. датчик оказывается неработоспособным в случае идеального согласования генератора накачки с нагрузкой. Во-вторых, характерная особенность газоразрядной плазмы, являющейся активной средой газового лазера, заключается в том, что она представляет собой нелинейную нагрузку (ее сопротивление изменяется в зависимости от вкладываемой в разряд ВЧ мощности). Из этого следует, что если Р-мощность, при которой согласование генератора накачки с нагрузкой оптимально, то фаза низкочастотного оптогальванического сигнала ошибки при мощности накачки, меньшей Р, противоположна фазе сигнала ошибки при мощности, большей Р. Это обстоятельство делает невозможным обеспечить устойчивую работу системы автоподстройки частоты при непостоянстве мощности высокочастотной накачки.

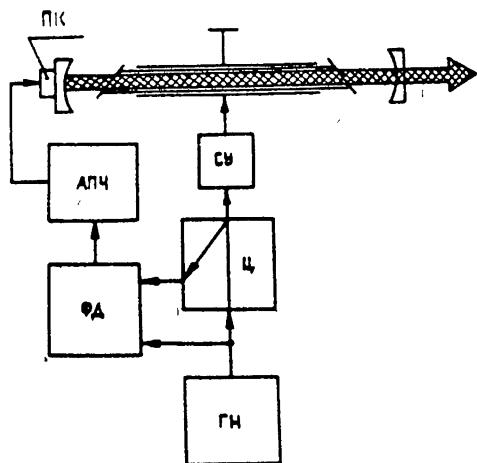


Рис.1.

Схема подключения датчика сигнала ошибки системы автоподстройки частоты излучения CO_2 -лазера с ВЧ накачкой:

АПЧ - система автоподстройки частоты излучения лазера;

ГН - генератор высокочастотной накачки;

СУ - согласующее устройство;

ФД - фазовый детектор;

Ц - циркулятор;

ПК - пьезоэлектрический корректор.

Избавиться от перечисленных недостатков можно, если применять фазовое детектирование отраженной ВЧ мощности, используя в качестве

опорного выходное напряжение генератора накачки. Схема такого датчика приведена на рис. 1. Проведенные измерения показали, что описанная схема дает отношение сигнал/шум в 20 раз выше, чем схема с трансформатором тока. Это позволяет во столько же раз увеличить долговременную стабильность частоты излучения лазера при той же глубине модуляции длины лазерного резонатора, или при той же долговременной стабильности уменьшить глубину модуляции, что равносильно улучшению кратковременной стабильности частоты лазерного излучения.

Становится ясным, что для дальнейшего улучшения шумовых параметров датчика сигнала ошибки следует улучшать согласование источника ВЧ накачки с разрядом. Кроме того, в качестве опорного ВЧ напряжения для фазового детектора, формирующего сигнал ошибки, можно применять не выходное напряжение генератора накачки, а напряжение с выхода маломощного возбудителя, входящего в состав генератора накачки и питающегося от хорошо стабилизированного источника. При идеальном согласовании возможно приближение оптогальванических источников сигнала ошибки по шумовым параметрам к охлаждаемым фотоприемникам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галутва Г. В., Рязанцев А. И. Селекция типов колебаний и стабилизация частоты оптических квантовых генераторов. - М. :Связь, 1972.
2. Очкин В. Н., Преображенский Н. Г. и др. //УФН. 1986. Т.148. Вып. 3. С. 473.
3. Ануфриев Э. В., Бирюлин В. П., Герасимчук А. Т. и др. //Квантовая электроника. 1988. Т.15. № 8. С.1664.

Опытное конструкторско-технологическое
бюро "Феррит"
при Воронежском политехническом институте

Поступила в редакцию
17 апреля 1992 г.

НИЗКОЧАСТОТНЫЙ ШУМ В ПОЛЕВЫХ ТРАНЗИСТОРАХ С ЗАТВОРОМ ШОТТКИ ТИПА ЗЛ326 *

Клюенков В. М., Баранов И. А., Мещеряков А. В.

Для создания малошумящих устройств СВЧ на полевых транзисторах с затвором Шоттки (ПТШ) требуется данные об интенсивностях, действующих в них первичных источников шума. Интенсивности источников шума наиболее простым образом связаны с флюктуациями тока стока транзистора, работающего в статическом режиме. Проведенный в [1] анализ выявил эту связь. В частности показано, что при малых напряжениях на стоке U_c и затворе U_g в шумы тока стока ПТШ могут давать вклад флюктуации концентрации в пассивных приконтактных областях канала. При напряжениях на стоке, соответствующих насыщению ВАХ, и малых напряжениях на затворе шумы тока почти полностью определяются флюктуациями концентрации в активной части канала. При больших напряжениях на стоке и на затворе шумы ПТШ вызываются флюктуациями числа заряженных центров в обедненной подзатворной области.

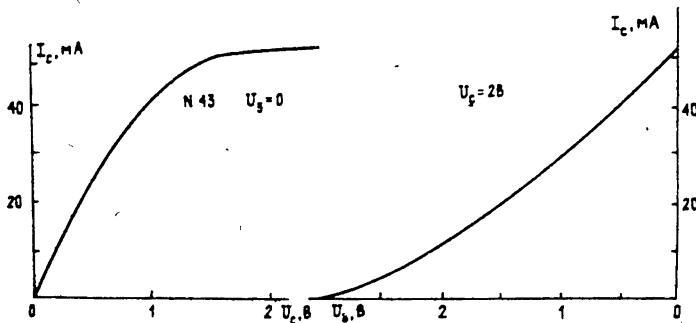


Рис 1

В настоящей работе с целью получения информации об источниках шума была обследована партия транзисторов типа ЗЛ326. На рис. 1 представлены типичные ВАХ транзистора. Энергетические спектры

* Деложено на Всесоюзно-координационном совещании "Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах" (поселок Черноголовка Московской области, июнь, 1991 г.).

относительных шумов тока стока $S_1(F)$ транзисторов при различных напряжениях на стоке и затворе приведены на рис. 2-4. Уровень чувствительности экспериментальной установки изображен на рисунках пунктиром. Относительная погрешность шумовых измерений не превышала 1,5 дБ. Уровни токовых шумов транзисторов, измеренные при малых напряжениях на стоке $U_c = 0,2 + 0,3$ В и $U_3 = 0$ различаются в исследованном диапазоне частот анализа $F = 0,3 + 2 \cdot 10^4$ Гц не более чем на 10 + 13 дБ (рис. 2). Вид спектра типичен. Он может рассматриваться как результат суперпозиции ГР-процессов с некоторым распределением времен релаксации τ и описывается выражением [2]:

$$S_1(F) = \frac{A}{F} [1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(2\pi F\tau_0)],$$

где минимальная постоянная времени в нашем случае составляет $\tau_0 = 1/F = 10^{-2} + 10^{-1}$ с. Небольшой разброс уровней шумов транзисторов в данном режиме свидетельствует о примерно одинаковом качестве исходного полупроводникового материала и контактов стока и истока.

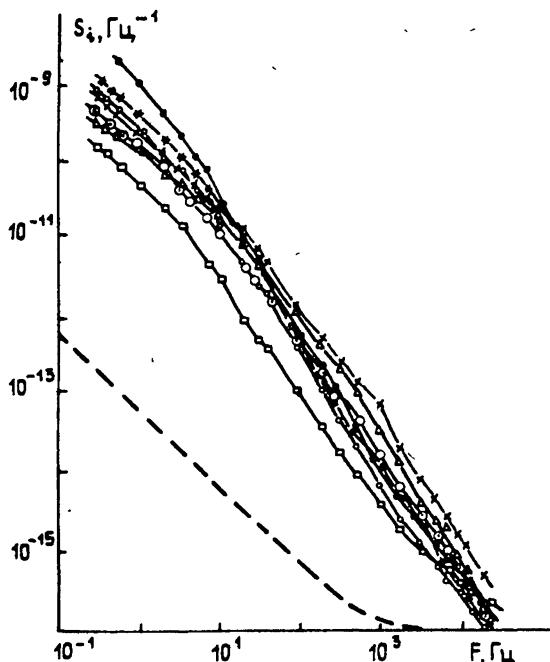


Рис 2

При увеличении напряжения на стоке до $1 + 1,5$ В относительный уровень увеличивается на $3 + 5$ дБ (рис. 3). Форма спектров в целом сохраняется. Исключением является ПТШ N 34, спектр которого принимает вид $S_1(F) \sim F$. Особенностью данного транзистора является наличие в нем повышенного тока утечки затвора, составляющего 1 мкА при $U_c = 1$ В, $U_3 = 0$. Увеличение напряжения на затворе до значения, соответствующего половине напряжения отсечки приводит к росту относительного уровня шума S_1 по сравнению со случаем $U_3 = 0$, в среднем на 10 дБ (рис. 4). При этом в малошумящем при $U_3 = 0$ ПТШ N 19 увеличение составляет 15-17 дБ, а в сильношумящем ПТШ N 43 - всего 3-10 дБ. Различие в уровне шумов обследованных транзисторов на частоте анализа $F = 100$ Гц достигает 23 дБ. Форма спектров $S_1(F)$ отличается от наблюдавшейся при $U_3 = 0$. В большинстве транзисторов проявляется ГР-составляющая на частоте $F \approx 10$ кГц и исчезает перегиб спектра на частотах $F = 10-100$ Гц. Уровень шума аномального ПТШ N 34 возрастает на 10 дБ без изменения формы спектра. Близкий к нему спектр приобретают флуктуации тока транзистора N 37, не выделявшегося при других U_c , U_3 своими характеристиками. Большой разброс уровней шумов тока ПТШ в данном режиме указывает на существенное различие качества затворных областей обследованных транзисторов.

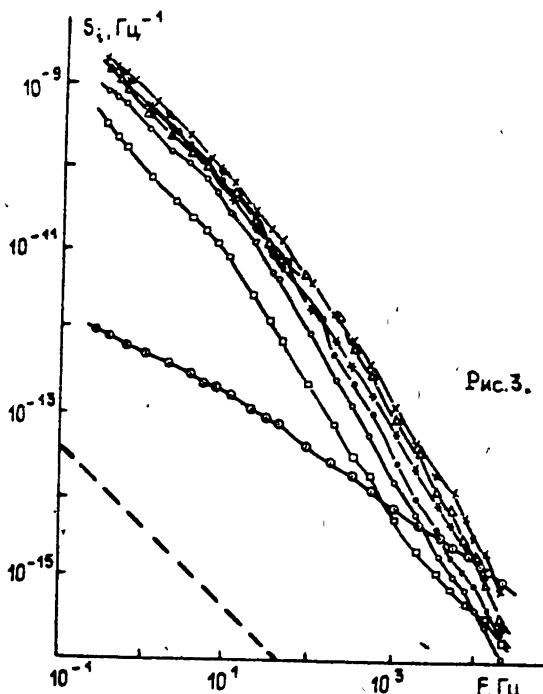


Рис.3.

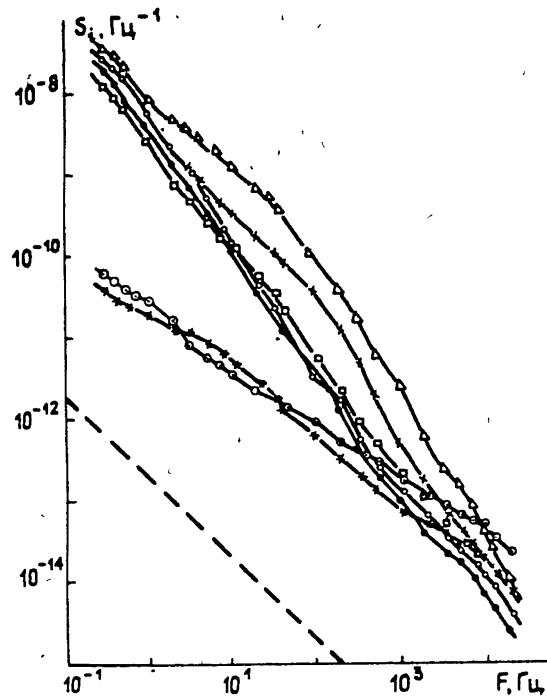


Рис. 4.

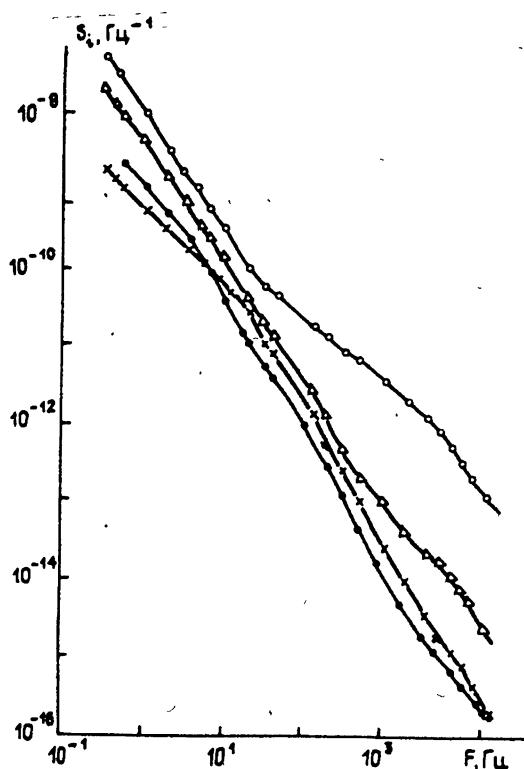


Рис. 5

На рис. 5 представлены шумовые характеристики ПТШ № 43. Кривые иллюстрируют изменения уровня шума и формы спектра при изменении в широком диапазоне напряжений на стоке и затворе.

ЛИТЕРАТУРА

- Лосев В. Л., Мещеряков А. В. Низкочастотные флуктуации в полевых транзисторах с затвором Шоттки// Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах// Горьк. ун-т. Горький. 1989. С. 90.

2. Suh C.H., van der Ziel A.A. noise spectrum described by
distribution in time constants// Appl.Phys.Lett. 1980
V. 37. N 6. P. 565.

Ленинградский государственный
технический университет

Поступила в редакц
17 апреля 1992