

## Известия высших учебных заведений

## РАДИОФИЗИКА

штампомесячный научно-технический журнал;

Издается с апреля 1958 г.

Том 36, № 3, 4Нижний Новгород1993

## Содержание

Павлов В. А., Пинегин А. Н., Смирновский И. Р. Эволюция плазменного возмущения в $F$ области и оценка параметров ионосферы по данным возвратного зондирования.....	203
Гайкович К. П., Резник А. Н., Троицкий Р. В. Радиометрия динамики профиля температуры водной среды при прохождении внутренних волн.....	216
Король М. А., Николаенко А. П. Измерение дистанции до близких грозовых разрядов.....	223
Строганов В. В. Корреляция ослаблений миллиметровых радиоволн в облачной и дождевой частях системы облако-дождь.....	231
Жук Н. П. Метод переноса граничных условий в задачах рассеяния электромагнитных волн на неровной импедансной поверхности.....	240
Андреев В. Ю. Поведение среднего значения КСВ при рассеянии на одномерных сильных случайных неоднородностях.....	258
Априесян Л. А. О распространении излучения в флюктуирующей среде с дискретными вкраплениями.....	275
Бирюков С. В., Полевой В. Г. Метод эффективных проницаемостей в задаче дифракции волн на частой диэлектрической решетке	286
Назарчук З. Т., Хмиль З. М. Дифракция $H$ -поляризованных электромагнитных волн на частично экранированном диэлектрическом цилиндре .....	295
Хачатуров В. Р., Булекбаев Д. А. Анализ влияния фазовых нестабильностей приемных каналов на точность оценки угловых координат цели в адаптивной антенной решетке .....	311

## Краткие сообщения и письма в редакцию

Инспекторов Э. М., Богданович В. И. Возбуждение коротковолновым излучателем поверхности волны над поверхностью моря...	323
Жаров А. А., Заборонкова Т. М., Кондратьев И. Г. Теория магнитной неустойчивости неоднородной плазмы в поле сильной электромагнитной волны.....	329

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора),  
В. В. ЖЕЛЕЗНИКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ,  
А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ,  
А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН,  
В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, С. А. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. МУРАШКИНА

Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.  
Усл. печ. л. 11, 55. Усл. кр. -отт. 11, 55. Уч.-изд. л. 13, 90  
Тираж 730 экз. Заказ 102 . Цена 50 р.

---

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,  
ул. Большая Печерская, 25,  
Научно-исследовательский радиофизический институт,  
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71

---

Отпечатано с готового набора

Межвузовская типография  
при Нижегородском государственном университете  
603600, Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37

© "Известия высших учебных заведений. Радиофизика", 1993

УДК 550. 388. 2: 533. 9

## ЭВОЛЮЦИЯ ПЛАЗМЕННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В F-ОБЛАСТИ И ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ИОНОСФЕРЫ ПО ДАННЫМ ВОЗВРАТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

*В. А. Павлов, А. Н. Пинегин, И. Р. Смирновский*

Рассматривается задача о возмущении плазмы, вызванном точечным выделением энергии порядка  $10^{14}$  эрг на высотах F-области. Возмущение наблюдается при возвратном радиочастотном зондировании в первые 15 с после взрыва. Предполагается однородная среда и сферическая симметрия заряда. Анализируются условия возникновения сильной ударной волны в F-области. В случае ударной волны с числом Маха меньше 10 найдена структура фронта возмущения плазмы всюду, кроме узкого "слоя" около плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю. Теоретическая модель сопоставляется с результатами эксперимента.

Зондирование искусственных плазменных образований в ионосфере, возникающих при выбросе концентрированных химических реагентов, позволяет получать данные о физических процессах в естественных условиях [1-3]. В работах [4, 5] рассматривается механизм образования ударной волны в результате сверхзвукового расширения границы газового облака. Такая волна наблюдалась авторами [6] при радиочастотном зондировании химических выбросов с выделившейся энергией порядка  $10^{13}$  -  $10^{16}$  эрг на высотах 90-140 км. Медленные диффузионные процессы, происходящие спустя примерно 100 с после выброса, являются предметом исследования в работах [2, 3, 7].

В данной статье приводятся оценки скорости звука, коэффициента диффузии, концентрации электронов в окрестности возмущения на основе представлений о "быстрых" процессах, связанных с распространением по нейтральному газу сильной неионизирующей ударной волны в F-области. Эти процессы изучались экспериментально путем радиочастотного зондирования в декаметровом диапазоне возмущений электронной компоненты ионосферы. Анализировалась амплитуда отраженной назад

волны и трехмерный динамический спектр доплеровского смещения частоты (сонограмма). Спектральный анализ проводился оптическими методами на аппаратуре НИРФИ [8, 9]. В качестве примера на рис. 1 приведена одна из сонограмм, по горизонтальной оси отложено время с момента образования возмущения, по вертикальной - частота. Плотность изображения пропорциональна спектральной плотности мощности сигнала. Из рис. 1 можно определить экспериментальную зависимость доплеровского смещения частоты от времени. В работе дается физическая интерпретация наблюденных закономерностей.

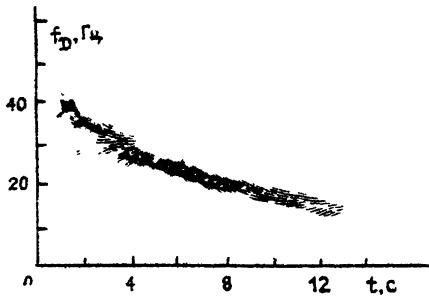


Рис.1

Для описания процессов в плазме используем уравнения газовой динамики трехкомпонентного газа электронов, ионов и нейтральных частиц во внешнем магнитном поле  $\vec{H}_0$ . Путем суммирования соотношений для отдельных компонент, используя известные приближения [10, 11], получим уравнения для среды в целом и для плазменной компоненты:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{H}] + \eta(\Delta + \frac{1}{3} \nabla \operatorname{div} \vec{v}) \vec{v}; \quad (1)$$

$$\partial p / \partial t + \operatorname{div}(\vec{v} p) = 0; \quad (2)$$

$$\rho (\operatorname{du} / dt) + p \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad (3)$$

$$\partial p_p / \partial t + \operatorname{div}(\vec{v}_p p_p) = 0; \quad (4)$$

$$\rho_p \vec{v}_p = \rho_p \vec{v} - \left( \frac{\hat{L}_e}{\nu_{en}} \nabla p_e + \frac{\hat{L}_i}{\nu_{in}} \nabla p_i \right) + \quad (5)$$

$$+ \frac{e}{M} \rho_i \left( \frac{\hat{L}_i}{\nu_{in}} - \frac{\hat{L}_e}{\nu_{en}} \right) \vec{E}' - \frac{\nu_{ei}}{e} \left( \frac{m}{\nu_{en}} \hat{L}_e - \frac{M}{\nu_{in}} \hat{L}_i \right) \vec{j};$$

$$\left[ 1 - \nu_{ei} \left( \frac{\hat{L}_i}{\nu_{in}} + \frac{\hat{L}_e}{\nu_{en}} \right) \right] \vec{j} = \frac{e^2}{m} \rho_e \left( \frac{\hat{L}_i}{M \nu_{in}} + \frac{\hat{L}_e}{m \nu_{en}} \right) \vec{E}' + \quad (6)$$

$$+ e \left( \frac{\hat{L}_e}{m v_{en}} \vec{v} p_e - \frac{\hat{L}_i}{m v_{in}} \vec{v} p_i \right),$$

где  $\rho = \rho_n + \rho_i + \rho_e$ ,  $p = p_n + p_i + p_e$ ,  $p_p = \rho_i + \rho_e$ ,  $p_p = p_i + p_e$ ,  $\vec{v} = (\rho_n \vec{v}_n + \rho_i \vec{v}_i + \rho_e \vec{v}_e) / \rho$ ,  $\vec{v}_p = (\rho_i \vec{v}_i + \rho_e \vec{v}_e) / \rho_p$ ,  $j = (e/m) \rho_e (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$  — плотность тока проводимости,  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости,  $u = (\rho_n u_n + \rho_i u_i + \rho_e u_e) / \rho = C_v T$  — внутренняя энергия газа,  $T$  — температура,  $C_v$  — теплоемкость,  $\vec{E}' = \vec{E} + c^{-1} [\vec{v}, \vec{H}]$ , причем пренебрежено отношением  $\rho_i / \rho_n$  по сравнению с единицей ( $\vec{v}_n \approx \vec{v}$ ),

$$\hat{L}_e \vec{s} = \frac{v_{en}^2}{\omega_H^2 + v_{en}^2} \left\{ \vec{s} + \frac{\omega_H}{v_{en}} [\vec{s} \vec{h}] + \left( \frac{\omega_H}{v_{en}} \right)^2 \vec{h} (\vec{s} \vec{h}) \right\}; \quad (7)$$

$$\hat{L}_i \vec{s} = \frac{v_{in}^2}{\Omega_H^2 + v_{in}^2} \left\{ \vec{s} + \frac{\Omega_H}{v_{in}} [\vec{s} \vec{h}] + \left( \frac{\Omega_H}{v_{in}} \right)^2 \vec{h} (\vec{s} \vec{h}) \right\}, \quad (8)$$

$\vec{s}$  — произвольный вектор,  $\vec{h} = \vec{H} / |\vec{H}|$ . Имеются также уравнения для внутренней энергии электронов и ионов, которые здесь не выписаны. Систему уравнений замыкают уравнения состояния  $p = k_B T \rho / M$ ,  $p_p = k_B (\rho_p (T_e + T_i) / (m + m))$  ( $k_B$  — постоянная Больцмана) и уравнения для полей

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (9)$$

плазма предполагается квазинейтральной:  $\rho_e / m \approx \rho_i / M$ , током смещения по сравнению с  $\vec{j}$  пренебрежено ( $\text{div} \vec{j} = 0$ ). Условия, при которых при выводе (5), (6) можно опустить слагаемые с  $\partial \vec{v}_e / \partial t$ ,  $\partial \vec{v}_i / \partial t$  и нелинейные члены  $(\vec{v}_e \nabla) \vec{v}_e$ ,  $(\vec{v}_i \nabla) \vec{v}_i$ , следующие [10]:

$$\frac{|\vec{v}_{i,e}|}{v_{T_{i,e}}} \frac{\tau}{l_{i,e}} < 1, \quad \tau^{-1} < v_{in}, v_{en}, \quad (10)$$

где  $\tau$  и  $\tau$  — характерные временные и пространственные масштабы течения,  $v_{T_{i,e}}$  и  $l_{i,e}$  — тепловые скорости и длины свободного пробега электронов или ионов.

Для оценки порядка величины вклада слагаемого  $c^{-1}[\vec{J}, \vec{H}]$  в (1) используем соотношения:  $|J| = |\hat{\theta}\vec{E}'| - \sigma_1 c^{-1}[\vec{v}, \vec{H}_0]$  ( $\hat{\theta}$  - тензор проводимости,  $\sigma_1$  - поперечная проводимость). Тогда число Хартмана на равное отношению магнитной силы  $c^{-1}[\vec{J}, \vec{H}]$  к вязкой силе  $\eta(\Delta + \frac{1}{3}v\operatorname{div}\vec{v})$  при  $\Omega_H \gg v_{in}$  и ортогональности векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{H}_0$  равно  $\text{На} = (\rho_p/\rho) \times (\nu_{in} \omega^2 / \eta \rho^{-1})$ . Если характерные для высоты 200 км  $\rho/\rho_p = 10^4$  и значение молекулярной кинетической вязкости  $\eta \rho^{-1} = 1, 3 \cdot 10^9 \text{ см}^2/\text{с}$  [12], то при  $\omega < 50 \text{ км}$   $\text{На} < 1$ . Следовательно, при указанных масштабах течения влиянием на среду как целого магнитной силы можно пренебречь. В то же время воздействие слагаемого  $c^{-1}[\vec{v}, \vec{H}]$  на плазменную компоненту значительно превосходит влияние электронной и ионной вязостей, поэтому при записи (5), (6) последняя не была учтена.

Приведенные для  $F$ -слоя оценки говорят о том, что можно использовать результаты [5] для среды в целом, если она представляет собой разреженный нейтральный газ.

Рассмотрим условия образования ударной волны на высотах  $F$ -области ионосферы при расширении нейтрального газового облака. Грубая оценка скорости движения границы облака в свободномолекулярной стадии разлета  $\sqrt{2E_0/M_0} \sqrt{2\gamma_0/(\gamma_0 - 1)}$ , где  $E$  - выделившаяся энергия,  $M_0$  - масса облака,  $\gamma_0$  - показатель адиабаты газа в облаке. Сильная ударная волна с начальной скоростью, большей, чем  $10a_1$  ( $a_1$  - скорость звука в невозмущенном газе), возникнет, если, как это следует из [5], плотность окружающего газа удовлетворяет неравенству

$$\rho_1 > \frac{6\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\gamma + 1}} \left( \frac{1,5A}{\gamma - 1} \right)^{3/2} \frac{10a_1}{\sqrt{E_0}}, \quad (11)$$

где  $A = 1\rho_1 = \text{const} = 7,8 \cdot 10^{-9} \text{ г/см}^2$  (для воздуха),  $1$  - длина свободного пробега. Пользуясь моделью стандартной атмосферы [13], можно сделать вывод, что сильная ударная волна возникает на высоте 200 км при  $E_0 = 10^{15}$  эрг в условиях дневной атмосферы ( $\rho_1 = 10^{-13} \text{ г/см}^3$ ). В момент образования ударной волны радиус границы облака равен [5]

$$R \approx 6A / [\rho_1(\gamma - 1)] \quad (12)$$

и число Кнудсена оценивается [5] как  $Kn = (\gamma - 1)/4$ . При умеренной плотности атмосферы [13]  $R \approx 3 \text{ км}$ . Последнее обстоятельство

позволяет в первом приближении пользоваться представлениями сплошной среды при описании возникающего нестационарного движения газа.

Согласно теории размерности при мгновенном точечном выделении энергии  $E_0$  в нейтральном газе плотностью  $\rho_1$  и давлением  $p_1$  положение сильного ( $p_2 \gg p_1$ ) скачка уплотнения  $r_2(t)$  в случае сферической симметрии оценивается промежуточной асимптотикой [14] ( $R < r_2(t) < r_0$ ):

$$r_2(t) = \left( \frac{E_0}{\alpha(\gamma) \rho_1} \right)^{1/5} t^{2/5} = \frac{r_0}{[\alpha(\gamma) \gamma]^{1/3}} \left( \frac{2}{5} \right)^{2/3} q^{1/3}, \quad (13)$$

где  $q = a_1^2 (dr_2/dt)^{-2}$ ,  $r_0 = (E_0/p_1)^{1/3}$  - характерный масштаб, при котором условие  $p_2 \gg p_1$  нарушается,  $\alpha(\gamma)$  - множитель порядка единицы. Скорость нейтрального газа на фронте волны, определяемая законами сохранения без учета вязкости и теплопроводности, равна

$$v_2 = \frac{2a_1}{\gamma + 1} \frac{1 - q}{\sqrt{q}}. \quad (14)$$

Оценим по порядку величины число Рейнольдса для газа в волне на высоте 200 км, равное  $Re = q^{1/3} r_0 a_1 / \eta p^{-1}$ . Получим при  $\eta p^{-1} = 1, 3 \cdot 10^9 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $p_1 = 10^{-3} \text{ дин}/\text{см}^2$ ,  $a_1 = 8 \cdot 10^4 \text{ см}/\text{с}$ :  $Re = 62q^{1/3}$ . В наблюдавшемся экспериментально диапазоне чисел Маха, меньших 10, или  $q > 0,01$  число  $Re > 10$ . Отметим, что столь малые числа  $Re$  не достаточны для корректного пренебрежения молекулярно-кинетическими эффектами в задаче сверхзвукового обтекания осесимметричных тел [15] и, следовательно, на основании закона плоских сечений на начальной стадии развития ударной волны возможно лишь кинетическое описание.

Таким образом, характерные значения таких параметров как плотность, давление, вязкость и высота выпуска химических реагентов в F-области являются критическими в смысле образования сильных ударных волн при точечном выделении энергии, типичной для подобных экспериментов [6]. Далее будем считать эти значения достаточными для возникновения сильной неионизирующей ударной волны. При  $Re \gg 1$ ,  $\eta a \ll 1$ ,  $q \ll 1$  эволюция слабоионизированного нейтрального газа приближенно описывается решением Седова задачи о сильном точечном взрыве [14].

Рассмотрим движение плазменной компоненты при наличии сферически-симметричной ударной волны в нейтральном газе. Перед фронтом волны из-за электронной теплопроводности формируется

прогревный слой с характерным пространственным масштабом  $\sim \sqrt{M/m} l$ , в котором  $T_e > T_i$ , и тогда при описании эволюции плазменной компоненты в этой области структурой фронта ударной волны в нейтральном газе можно пренебречь [16, 17]. В [18] рассматривается аналогичная задача для плоской стационарной волны в слабоионизированной неизотермической плазме без магнитного поля. Ударная волна становится источником ионно-звуковых волн, которые из-за неизотермичности электронно-ионной плазмы будут возмущать плазменную компоненту далеко перед фронтом волны в нейтральной компоненте. Таким образом формируется фронт волны уплотнения в плазме.

Из (5), (6) получим выражение для потока плазмы  $\vec{W}_p = \rho_p \vec{v}_p$ :

$$\vec{W}_p = \rho_p \vec{v}_p - \frac{1 + m/M}{(1 + \delta) \nu_{in}} \left[ \nabla p_p - \frac{m}{e} \frac{\nu_{en}}{c} \begin{pmatrix} d & h_z & -h_y \\ -h_z & d & h_x \\ h_y & -h_x & d \end{pmatrix} \vec{j} \right], \quad (15)$$

где  $h_x, h_y, h_z$  - направляющие косинусы вектора  $\vec{H}$  относительно осей декартовой системы координат,  $\alpha = \nu_{en}/\omega_n$ ,  $\beta = \nu_{in}/\Omega_n$ ,  $\delta = \alpha/\beta$ ,

$d = \frac{\alpha}{\nu_{en}} \left[ \nu_{in} \frac{\nu_{en}/\nu_{in} - 1}{1 + m/M} + \nu_{en} \left( \frac{M}{m} - 1 \right) \right]$ . Требование квазистационарности и одномерности движения приводит к условию на радиальную составляющую тока:  $j_r = 0$  [17]. Кроме того, имеется осевая симметрия относительно направления вдоль постоянного магнитного поля  $\vec{H}_0$ , т. е. поля не зависят от азимутального угла  $\varphi$  ( $\partial/\partial\varphi = 0$ ) в системе координат с осью  $oz$ , направленной вдоль  $\vec{H}_0$ . Из уравнения  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  следует  $j_\theta = 0$  ( $\theta$  - полярный угол, отсчитываемый от оси  $oz$ ), откуда и из (9)  $H_\theta = 0$  и  $E_\theta = 0$ . Тогда оказывается, что выражение (6) можно рассматривать как систему алгебраических уравнений для неизвестных  $j_\varphi, E_r, \nabla_\theta \rho_p$ . Разрешая ее, можно найти выражения для  $j_\varphi, E_r, \nabla_\theta \rho_p$  через величины  $c^{-1}[\vec{v}, \vec{H}]$ ,  $E_\varphi, \nabla_r \rho_p$ . Причем на этом шаге существенно пренебрежение температурными градиентами:

$$\nabla p_e = \frac{k_B T_e}{M + m} \nabla \rho_p, \quad \nabla p_i = \frac{k_B T_i}{M + m}, \quad \nabla p_p = \frac{k_B (T_e + T_i)}{M + m} \nabla \rho_p. \quad (16)$$

В этом случае в выражении (15) при  $\nabla \rho_p$  появится коэффициент  $D = k_B (T_e + T_i) / [(1 + \delta) M \nu_{in}]$ , равный коэффициенту диффузии в изотроп-

ной плазме [11]. Таким образом, из (6) с учетом сделанных замечаний и очевидного тождества  $\delta = \text{const}$  находим представления

$$j_\varphi = \frac{e}{m^2 \omega_H} \frac{(1 + \delta) \beta \rho_e e E'_\varphi + m/(M + m) k_B (T_e + T_i) \sin \theta \nabla_r \rho_p}{F(\theta)} ; \quad (17)$$

$$\nabla_\theta \rho_p = -h_r \frac{m \omega_H (M + m)}{e k_B (T_e - T_i \delta)} \left[ \frac{\nu_{ei}}{\nu_{in}} \left( 1 - \frac{m}{M} \right) - 1 + \delta \right] j_\varphi ; \quad (18)$$

$$E_r = - \frac{k_B (T_e - T_i \delta)}{e (1 + \delta)^2} \frac{\nabla_r \rho_p}{\rho_p} + h_\theta \left( \frac{m}{e} \right)^2 \times \quad (19)$$

$$\times \frac{\nu_{en} \rho_e^{-1}}{1 + \delta} \left[ \frac{\nu_{en}}{\nu_{in}} \left( 1 - \frac{m}{M} \right) - 1 + \delta \right] j_\varphi ,$$

где

$$F(\theta) = h_r^2 \frac{1 + T_i T_e^{-1}}{1 - T_i T_e^{-1} \delta} \left[ \frac{\nu_{ei}}{\nu_{in}} \left( 1 - \frac{m}{M} \right) - 1 + \delta \right] + 1 + \alpha \beta \left[ 1 - \frac{\nu_{ei}}{\nu_{en}} \left( \frac{\nu_{en}}{\nu_{in}} + 1 \right) \right] ,$$

$h_r = h_z = \cos \theta + h_\perp \sin \theta$ ,  $h_\theta = -h_z \sin \theta + h_\perp \cos \theta$ ,  $h_\perp$  – модуль составляющей, поперечной к направлению постоянного магнитного поля  $\vec{H}_0$ . Ток  $j$  в плазме создает возмущение магнитного поля. Будем считать это возмущение малым, т.е.  $h_r \approx \cos \theta$ ,  $h_\theta \approx -\sin \theta$ ,  $E'_\varphi = E_\varphi + c^{-1} [\vec{v}, \vec{H}]_\varphi \approx c^{-1} [\vec{v}, \vec{H}_0]_\varphi$ .

На основе (4), (15), (18) и (16), учитывая  $\vec{w}_p = \vec{v}_p \rho_p$ , получим

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{F(\theta)} \right] r^2 \left( \rho_p v - D \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \right) \right\} - \quad (20)$$

$$- D (1 - K) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \rho_p}{\partial \theta} \right) = 0 ,$$

$$\text{где } K = \left[ 1 - \delta - \frac{\nu_{ei}}{\nu_{en}} \left( \frac{\nu_{en}}{\nu_{in}} - \delta \right) \right]^{-1} \frac{1 - T_i T_e^{-1} \delta}{1 + T_i T_e^{-1}} .$$

Если положить  $\vec{H}_0 = 0$ , откуда  $\alpha, \beta \rightarrow \infty$ , то уравнение (20) будет

описывать возмущение плотности в изотропной плазме. В другом случае, при условии

$$\operatorname{tg}^2 \theta \ll v_{ei}/v_{in} \quad (21)$$

коэффициент в фигурных скобках уравнения (20) слабо зависит от угла  $\theta$ , поэтому приближенно будем считать, что решение (20) есть функция  $r$  и  $t$ . Тогда

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \left( \rho_p v - D \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \right) \right] = 0, \quad (22)$$

где  $v(r, t)$  – известная функция. Если  $v_{ei}/v_{in} \gg 1$ , что выполняется со значительным запасом в  $F$ -слое, то неравенство (22) нарушается в узком слое около  $\theta = \pi/2$ . Физически  $v_{ei}/v_{in} \gg 1$  означает, что за время сжатия плазмы вязком скачке уплотнения электроны и ионы испытывают большое число столкновений и успевают обменяться энергиями и импульсами. В результате возникающее встречное азимутальное движение электронов и ионов затухает и не оказывает сильного влияния на эволюцию плазменного возмущения.

Перейдем к безразмерным переменным  $\lambda = r/r_2(t)$ ,  $q$  и функциям

$$g(\lambda, q) = \rho_p / \rho_{p1}, \quad \mu = q^{1/6} D(\lambda) (\alpha \gamma 2/5)^{1/3} (a_1 r_0)^{-1}, \quad v_0(\lambda) = v t / r,$$

$v_0(\lambda)$  – известная беरазмерная функция скорости задачи о сильном взрыве [14]. Численные значения коэффициента  $\alpha(\gamma)$  приведены в [14] (для  $\gamma = 1,4$   $\alpha = 0,851$ ). Тогда, используя (13), уравнение неразрывности (22) запишем в виде

$$\frac{2}{5} \left( 3q \frac{\partial g}{\partial q} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} [\lambda^3 v_0(\lambda) g] = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \mu \lambda^2 \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right). \quad (23)$$

Рассмотрим приближенное решение уравнения (23) при  $q \rightarrow 0$ . Тогда, пренебрегая в уравнении членом  $\sim q$  по сравнению со слагаемым  $\sim q^{1/6}$ , решение задачи аппроксимируем решением обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, зависящим от параметра  $\mu \sim q^{1/6}$ :

$$\lambda [v_0(\lambda) - 2/5] \frac{dg}{d\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} g \frac{d}{d\lambda} [\lambda^3 v_0(\lambda)] = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d}{d\lambda} \left( \mu \lambda^2 \frac{dg}{d\lambda} \right). \quad (24)$$

Это линейное уравнение содержит в коэффициентах известные функции  $v_0(\lambda)$  и  $\mu(\lambda)$ , имеющие разрыв при  $\lambda = 1$ .

Исследуем эволюцию переднего фронта возмущения плазменной компоненты. Построим решение (24) в области  $\lambda > 1$ , где  $v_0 = 0$ ,  $\mu$  — не зависящий от  $\lambda$  параметр с граничными условиями  $g(1) = G$ ,  $g(\lambda) \rightarrow 1$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ . Запишем асимптотическое по параметру  $\mu < 1$  представление решения

$$g(\lambda) = G + (G - 1) \left\{ \lambda^{-5} \left[ \frac{\lambda^2 - 3\mu}{1 - 3\mu} + O(\mu^2) \right] \exp \left( \frac{1 - \lambda^2}{5\mu} \right) - 1 \right\}. \quad (25)$$

Следовательно, ширина фронта характеризуется масштабом  $\Delta_f$ , равным

$$\Delta_f = (5/2)\mu r_2 = \sqrt{q} D/a_1 = \sqrt{q}(v_s/a_1)^2 l_1 = (v_s/c)^2 l_1 / \sqrt{q}, \quad (26)$$

где  $v_s^2 = k_B(T_e + T_i)/M$  — скорость ионного звука. Этот масштаб с точностью до множителя  $1/\sqrt{q}$  совпадает с найденным в работе [18]. Как и в [18], выполнение неравенства  $T_e \gg T_i$  и, следовательно,  $v_s^2 \gg a_1^2$  при описании возмущения плазменной компоненты оправдывает пренебрежение структурой фронта ударной волны в нейтральном газе. Как известно, ширина фронта последней имеет пространственный масштаб порядка  $l \approx l_1$ .

Неизвестную амплитуду волны  $G$  можно найти, используя следующий прием. Запишем уравнение неразрывности (22) в системе отсчета, связанной с фронтом волны в нейтральной компоненте:

$$t' = t, \quad r' = r - \int_0^t U(\tau) d\tau, \quad U(t) = dr_2/dt.$$

В окрестности фронта приближенно имеем  $(\partial/\partial r)[r^2(v_p - v)\rho_p] \approx 0$ , откуда с учетом  $v_p(r_2) \approx v_2$  и (14)

$$\rho_p \approx G \frac{\gamma - 1 + 2q}{\gamma + 1} \frac{U}{U - v_p(r, t)} \left( \frac{r_2}{r} \right)^2. \quad (27)$$

Если положить, что при  $r < r_2$   $v_p \approx v$ , то приближенное решение  $\rho_p(r)$  при  $r < r_2$ , таким образом, найдено. Неизвестную амплитуду  $G$  найдем, пользуясь условием сохранения энергии без учета потерь в вязком скачке уплотнения:

$$4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left( \frac{\rho_p - \rho_{p_1}}{\gamma - 1} + \rho_p \frac{v^2}{2} \right) \approx E_p, \quad (28)$$

где  $E_p$  - часть полной выделившейся энергии  $E_0$ , переданной плазменной компоненте, индексом 1 здесь по-прежнему пометим поля  $\rho_p$ ,  $v_p$ ,  $p_p$  при  $r > r_2$ . Предположим, что выделившаяся энергия  $E_0$  равномерно распределяется по компонентам, т.е.  $E_0/p_1 \approx E_p/p_{p_1}$ ; а также учтем приближенные равенства

$$p_p \approx p_{p_2} P(\lambda), \quad p_{p_2} = RG(T_{e_2} + T_{i_2}) \approx 2RG T_2, \quad (29)$$

$P(\lambda) = p/p_2$  приведена в [14]. Тогда, используя оценку для интегралов (заменив функции  $f(\lambda)$  и  $P(\lambda)$  их значениями на фронте),

$$\int_0^1 d\lambda \frac{f^2(\lambda)}{1 - 2f(\lambda)/(y+1)} \approx \frac{y+1}{y-1}, \quad \int_0^1 d\lambda \lambda^2 P(\lambda) \approx \frac{1}{3}, \quad (30)$$

приближенно получим

$$G \approx p_{p_1} (y+1)/(y-1+2q). \quad (31)$$

Используем эту модель для обработки результатов экспериментов по возвратному зондированию "быстрых" плазменных возмущений, существующих в первые секунды после выброса химических реагентов, в  $F$ -области ионосфера. По измерениям доплеровской частоты можно найти кажущуюся, или эффективную, скорость движения переднего фронта возмущения:

$$U_{\text{эфф}} = \frac{\Omega_D}{2\omega_0} c [1 - g^{-1}(\lambda^*)]^{1/2}, \quad (32)$$

где  $\Omega_D(t) = 2\omega_0 c^{-1} \int_{-\infty}^r (\partial n_p / \partial t) dr$ ,  $n_p = [1 - g/g(\lambda^*)]^{1/2}$  - показатель преломления,  $\lambda^* = r^*/r_2$ ,  $r^*$  - координата точки отражения, отсчитанная от центра выпущенного облака,  $g(\lambda^*)$  - величина, постоянная в условиях конкретного эксперимента, поскольку  $g(\lambda^*) = (\omega_0/\omega_p)^2$ ,  $\omega_0$  и  $\omega_p$  - рабочая и плазменная частоты при отсутствии возмущения, а размеры отражающей радиоволны неоднородности позволяют не учитывать высотную зависимость  $\omega_p(r)$ . Кажущаяся скорость  $U_{\text{эфф}}$  определяется скоростью движения ударной волны  $U = a_1/\sqrt{q}$  и изменением во времени формы переднего фронта

неоднородности, а именно, уменьшением амплитуды волны в соответствии с (31) и утолщением переднего фронта, ширина которого пропорциональна  $\mu$ .

Подставляя решение (25) в выражение для доплеровской частоты

$$\Omega_D(t) = \frac{2\omega_0}{c} \left( -U \int_{-\infty}^{\lambda^*} \lambda \frac{\partial n_p}{\partial \lambda} d\lambda + r_2 \frac{dq}{dt} \int_{-\infty}^{\lambda^*} \frac{\partial n_p}{\partial q} d\lambda \right) \quad (33)$$

и учитывая, что  $r_2(dq/dt) = 3a_1\sqrt{q}$ , на основе (31), (32) получим алгебраическое уравнение для определения  $q = (a_1/U)^2$  по значению измеряемой скорости  $U_{\text{ЭФФ}}$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{q} = \frac{a_1}{U_{\text{ЭФФ}}} & \frac{\lambda^{*2}}{(\lambda^{*2} - y)^2} \left\{ \frac{\lambda^{*2}}{\sqrt{1-y}} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^{*2}-1}{4\lambda^*} \frac{\lambda^{*2}-y}{1-y} \right) \lambda^{*2} - y \left( 2 - \frac{S}{6} \right) \right] - \right. \\ & \left. - yq(y+1) \frac{\lambda^{*2}}{(1-q)(y-1+2q)} \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\lambda^{*2} = 1 + 2\mu \left[ \ln \frac{2}{g(\lambda^*) - 1} + \ln \frac{1-q}{y-1+2q} + \ln \frac{\lambda^{*2}-y}{\lambda^{*5}(1-y)} \right],$$

$$y=3\mu \equiv q^{1/6}\xi, \quad \xi=3\left(\frac{2}{5}\pi\gamma\right)^{1/3}(a_1r_0)^{-1}D, \quad S=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!n} \approx 0,613,$$

$$r_0 = a_1 t_0 / \sqrt{y}.$$

Для фиксированных значений  $a_1$  и  $\xi$  параметр  $q$  можно найти численно методом итераций. Экспериментальные точки на плоскости  $(q, t)$  согласно (13) аппроксимируются функцией

$$t = (2/5)^{5/3} [\pi(y)\gamma]^{-1/3} t_0 q^{5/6}, \quad (35)$$

где время отсчитывается от момента выброса. Метод наименьших квадратов дает два уравнения, которые вместе с (34) образуют замкнутую систему алгебраических уравнений для определения трех неизвестных величин  $a_1$ ,  $\xi$ ,  $t_0$ .

Обработка описанным способом результатов сеанса, приведенных на рис. 1, дает следующие значения:  $a_1 = 5 \cdot 10^4$  см/с,  $\xi = 0,15$ ,  $t_0 =$

= 131 с,  $D = 1,8 \cdot 10^{10}$  см<sup>2</sup>/с при  $\gamma = 1,4$ . Коэффициент диффузии связан с концентрацией нейтральных молекул  $N_m$  соотношением [19]

$$D = b/N_m, \quad (36)$$

где  $b \approx 10^{19}$  см<sup>-1</sup>с<sup>-1</sup>. Отсюда получим  $N_m \approx 5,7 \cdot 10^8$  см<sup>-3</sup>, при средней молекулярной массе  $M = 40 \cdot 10^{-24}$  г [13] плотность равна  $\rho_1 = 7 \cdot 10^{-16}$  г/см<sup>3</sup>. Тогда выделившуюся энергию можно оценить по формуле [14]

$$E_0 = \alpha(\gamma) t_0^3 p_1^{5/2} \rho^{-3/2} \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ эрг}, \quad (37)$$

что имеет порядок ее характерных значений [6].

Таким образом, модель (25), (31) способна удовлетворительно объяснить экспериментально обнаруженные закономерности зависимости  $U_{\text{эфф}}(t)$ : 1) соответствие с законом  $U \sim t^{-3/5}$  при "малых"  $t$  и 2) отклонение до порядка 10% величины  $U_{\text{эфф}}$  при "больших"  $t$ . Отклонение от закона  $t^{-3/5}$  ведет себя в соответствии с предложенной моделью и не удовлетворяет описанию, при котором ширина фронта волны  $\Delta_f$  определяется вязким скачком уплотнения в плазменной компоненте [16]:  $\Delta_f = 4\eta\gamma\sqrt{q} [3\rho_1(1-q)a_1]^{-1}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Райт Дж. У. В кн.: Электронная концентрация в ионосфере и экзосфере. -М.: Мир, 1966.
2. Брускин Л. Г. //Геомагнетизм и аэрономия. 1989. Т. 29. N 6. С. 824.
3. Власов М. Н., Похунков С. А. //Геомагнетизм и аэрономия. 1989. Т. 29. N 6. С. 960.
4. Groves G. U. //J. Geophys. Res. 1963. V. 68. N 10. P. 3033.
5. Медведев Ю. А., Хохлов В. Д. //Сб. статей: Физические процессы при горении и взрыве. -М.: Атомиздат, 1980. С. 105.
6. Resenberg N. M. //J. Geophys. Res. 1963. V. 68. N 10. P. 3057.
7. Филипп Н. Д. Эволюция искусственных плазменных неоднородностей в ионосфере Земли. -Кишинев, 1986.
8. Зверев В. А., Орлов Е. Ф. //Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. N 9-10. С. 1305.
9. Зверев В. А., Орлов Е. Ф. //Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. N 10. С. 1555.
10. Гершман Б. Н. Динамика ионосферной плазмы. -М.: Наука, 1974.
11. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. //УФН. 1967. Т. 91. Вып. 4. С. 609.

12. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. -М.: Мир, 1978.
13. Околоземное космическое пространство/Под ред. Ф. С. Джонсона. -М.: Мир, 1966.
14. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. -М.: Наука, 1987.
15. Герм В.Э., Прозорова Э.В. //Сб. трудов: Численные методы механики сплошной среды. -Новосибирск, 1986. Т. 17. № 1. С. 47.
16. Зельдович Я.Б., Райзэр Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. -М.: Физматгиз, 1963.
17. Великович А.Л., Либерман М.А. Физика ударных волн в газах и плазме. -М.: Наука, 1987.
18. Авраменко Р.Ф., Рухадзе А.А., Теселкин С.Ф. //Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 34. Вып. 9. С. 485.
19. Хантадзе А.Г., Гвелесиани А.И. К теории диффузии ионосферной плазмы в области F. -М.: Наука, 1979.

Санкт-Петербургский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
23 июля 1991 г.

THE PLASMA PERTURBATION EVOLUTION ON F-REGION AND THE ESTIMATION  
OF IONOSPHERIC PARAMETERS BY THE RADIO WAVE BACK SOUNDING DATA

*V. A. Pavlov, A. N. Pinegin, I. R. Smirnovskij*

The problem of plasma perturbation, caused by the point emission of energy of value  $10^{14}$  erg at altitudes of F-region, is considered. The perturbation is observed at radio wave back sounding at first 15 s after explosion. The homogeneous medium and the spherical symmetry of charge are considered. Conditions of appearance of the strong shock wave at F-region are analysed. With Mach number of the shock wave less than 10, the structure of front of plasma perturbation is found. The exception is the narrow layer near the plane which is perpendicular to the constant magnetic field. The theoretic model is tested by the experimental data.

УДК 621.371 :532.5

**РАДИОМЕТРИЯ ДИНАМИКИ ПРОФИЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОДНОЙ СРЕДЫ  
ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН**

К. П. Гайкович, А. Н. Резник, Р. В. Троицкий

По измерениям теплового радиоизлучения на длинах волн 3, 9 и 30 см определяются вариации температурного распределения в поверхностном слое водной среды при возбуждении в ней внутренних волн.

Многочастотные радиометрические измерения позволяют определять подповерхностный профиль температуры  $T(z)$  различных сред [1-7]. Возможности радиометрического контроля температурной стратификации водной среды исследованы в [3]. Показано, в частности, что в пресной воде возможно восстановление распределения температуры в слое с глубиной до 5 - 10 см по яркостным температурам радиоизлучения, наблюдаемого в сантиметровом и дециметровом диапазонах. Для простых распределений  $T(z)$  хорошее качество восстановления (погрешность не более 10 - 20% от общего перепада температур) получается при использовании 3 - 4 длин волн, выбранных таким образом, чтобы соответствующие толщины скин-слоя перекрывали интервал восстановления по глубине. Эффективность метода исследована как в численных экспериментах, так и на основе реальных измерений путем сравнения восстановленных профилей  $T(z)$  с данными контактных измерений. Выполнены измерения динамики температуры в поверхностном слое искусственно стратифицированной водной среды на глубине до нескольких сантиметров: кроме того, измерены перепады температуры величиной 0,5 - 1 К естественных термических пленок, возникающих в нетурбулизированном слое толщиной несколько миллиметров на границе вода - воздух, а также зависимость их параметров от состояния поверхности (наличие или отсутствие ветра).

Одним из процессов, приводящих к вариациям профиля температуры в поверхностном слое водной среды, может быть, в частности, распространение внутренних волн. Неоднородный температурный профиль

в водной среде приводит к неоднородному распределению ее плотности, что создает условие для возбуждения и распространения внутренних волн. Внутренняя волна приводит к периодическим вариациям исходного температурного распределения, эти вариации и могут быть определены радиометрическим методом. Достоинством метода является его неинвазивность, т. е. отсутствие влияния измерительного устройства на наблюдаемый процесс.

Возможность мониторинга внутренних волн важна для лабораторных исследований распространения внутренних волн в температурно-стратифицированной среде, в частности в океане. Для успешной реализации метода в лабораторных условиях (в отличие от естественных условий) имеется возможность создать значительный перепад температур на масштабе скин-слоя. Толщина скин-слоя в пресной воде существенно больше, чем в соленой, поэтому в лабораторном эксперименте целесообразно использовать пресную воду.

1. Методика измерений и решение обратной задачи. Измерения выполнялись в лабораторных условиях для искусственно стратифицированного поверхностного слоя воды толщиной 1 - 3 см при перепаде температур 10 - 40 К (горячая вода поверх холодной). Измерения проводились на длинах волн 3, 9 и 30 см, что обеспечивало глубину зондирования порядка 5 см. Для исключения влияния отражения от поверхности и достижения необходимого пространственного разрешения использовалась система контактных антенн [4, 8] с общим линейным размером ~ 5 см. На глубине 1 см выполнялись контрольные

измерения температуры с помощью контактного датчика. Схема измерений приведена на рис. 1 (1 - кювета с водой, 2 - антенная система, 3 - контактный датчик температуры). Первые результаты наблюдения периодических измерений яркостных температур при возбуждении внутренних волн представлены в [9].

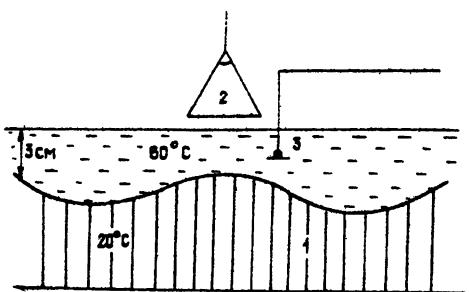


Рис. 1.

Флуктуационный порог чувствительности радиометров был не хуже 0,1 К при постоянной времени 1 с. В процессе измерений в качестве калибровочного эталона использовалась сама исследуемая водная среда, что позволило практически устранить основные источники погрешностей, обычно сопутствующие абсолютным радиометрическим измерениям. При

калибровке использовались измерения яркостных температур для двух значений температуры равномерно прогретой воды в кювете. Одно из этих калибровочных измерений проводилось до создания горячего поверхностного слоя при температуре воды 20° С, а второе проводилось после измерения волнового процесса, когда горячая и холодная вода перемешивалась. Разница температуры двух калибровочных измерений составляла при этом  $\Delta T \approx 2$  К. В диапазоне яркостных температур 20 - 22° С точность их измерения с учетом чувствительности радиометров составляет  $\delta T_{я_0} \approx 0.1 - 0.15$  К. Однако значения измеряемых яркостных температур существенно выходят за интервал калибровки, поэтому погрешность в этом случае возрастает пропорционально величине отклонения и может быть оценена как  $\delta T_я = \frac{T_я - 20}{\Delta T} \delta T_{я_0}$ , что составляет 2 - 3 К для  $\lambda = 3$  см, 1,5 - 2 К для  $\lambda = 9$  см и около 1 К для  $\lambda = 30$  см в начальные моменты времени. В конце измерений, когда амплитуда колебаний  $T_я$  и сами значения  $T_я$  уменьшаются, погрешность измерения пропорционально уменьшается.

Яркостная температура  $T_я(\lambda)$  теплового радиоизлучения на длине волн  $\lambda$  выражается через глубинный профиль  $T(z)$  как

$$T_я(\lambda) = \int_{-\infty}^0 T(z) \gamma(\lambda, T(z)) \exp \left[ - \int_z^0 \gamma(\lambda, T(z')) dz' \right] dz, \quad (1)$$

$\gamma(\lambda)$  - коэффициент поглощения.

Уравнение (1) является уравнением первого рода, и для его решения необходимо использовать дополнительную информацию об искомой функции  $T(z)$ . В данной работе применялась методика, основанная на принципе обобщенной невязки Тихонова [10] с использованием информации о квадратичной суммируемости или гладкости  $T(z)$ , а также положительной определенности последней. Подробное исследование метода для случая зондирования водной среды содержится в [3].

Специфика рассматриваемого случая состоит в том, что перепады температур велики и приводят через температурную зависимость  $\gamma(T)$  к нелинейности уравнения (1).

Поэтому для решения (1) применялся итерационный алгоритм

$$T_я(\lambda) = \int_{-\infty}^0 T^1(z) \gamma(\lambda, T^{1-1}(z)) \exp \left[ - \int_z^0 \gamma(\lambda, T^{1-1}(z')) dz' \right] dz, \quad (2)$$

где при вычислении первого приближения  $T^1(z)$  в ядро уравнения (2) подставлялось значение глубинной температуры, т.е.  $T^0(z) = T_{я_0}$ .

Решение искалось в виде отклонения  $T^1(z)$  от  $T(-\infty)$  с использованием априорной информации о положительной определенности этой величины [10].

Эффективность алгоритма исследовалась путем численного эксперимента по замкнутой схеме. Задавался исходный профиль  $T(z)$ , вычислялись значения  $T_y(\lambda)$ , добавлялась случайная погрешность со стандартным отклонением  $\delta T_y$ , решалась обратная задача (2), и восстановленный профиль сравнивался с исходным. Установлено, что для рассматриваемого класса распределений  $T(z)$  достаточно второго приближения в итерационном процессе. При реализованной точности измерений погрешность восстановления составляет ~ 20% от перепада температур (по сравнению с глубинной).

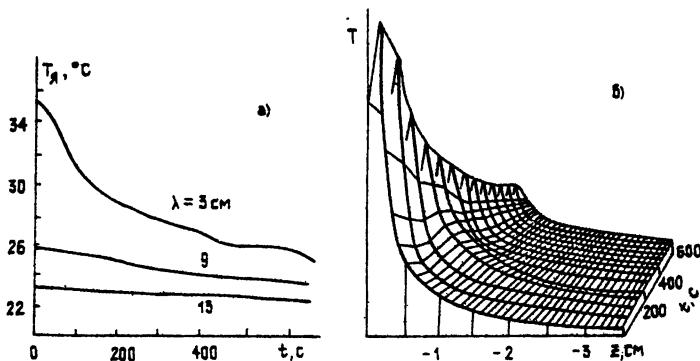


Рис.2.

**2. Восстановление температурной структуры внутренней волны.** Следует отметить, что колебания температуры, обусловленные прохождением внутренней волны, не являются единственным процессом в слое с резкой искусственной температурной стратификацией. Этот процесс протекает на фоне охлаждения нагретого поверхностного слоя и диффузии тепла в более глубокие слои. Динамика температуры этих процессов исследовалась в [3]. Полученные экспериментальные данные использованы нами для построения трехмерной структуры этого процесса. На рис. 2а представлена динамика  $T_y(t)$  на трех длинах волн, и на рис. 2б - соответствующая динамика восстановленного профиля температуры  $T(z, t)$  за период времени 10 мин. Благодаря большей по сравнению с [3] размерностью сетки по временной переменной можно видеть, что этот процесс не является совершенно монотонным, что, по-видимому, связано с опусканием термика с

охлаждающейся поверхности при  $t \approx 200$  с.

Приведенный пример показывает, что процессы, связанные с охлаждением стратифицированного слоя, являются существенно более медленными по сравнению с волновыми. На рис. 3а представлен пример квазипериодических вариаций  $T_A(t)$  после движения волнопродуктора в момент  $t = 0$  в стратифицированном слое толщиной  $\sim 3$  см. Период вариаций составляет  $\tau = 10-15$  с, а их амплитуда меняется от  $\sim 10$  К ( $\sim 3$  К на  $\lambda = 30$  см), постепенно затухая с характерным временным масштабом  $\tau_s \approx 30-40$  с.

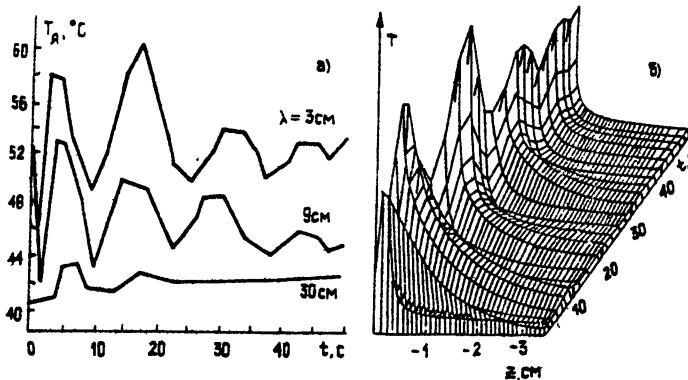


Рис.3.

Известно, что период внутренних волн должен удовлетворять условию  $\tau \geq \tau_B$ , где  $\tau_B$  — период, соответствующий частоте Брента-Вяйсяля

$$\omega_B = \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{dp}{dz}}, \quad (3)$$

$g$  — ускорение свободного падения,  $\rho$  — плотность среды. Оценки показывают, что  $\tau_B = 3-5$  с, т. е. наблюдаемый процесс удовлетворяет необходимому условию. Можно видеть, что период колебаний постепенно возрастает, что объясняется постепенным уменьшением градиента плотности при выравнивании температуры.

На рис. 3б представлена восстановленная из решения (2) по данным рис. 3а динамика температурного профиля  $T(z, t)$  при прохождении внутренней волны. Структура температурной волны такова, что максимум амплитуды достигается на глубине  $z \approx -0.2$  см. Это можно объяснить влиянием поверхности, но нельзя исключить и артифакта. Для более детального исследования структуры волны на толщинах, характерных для естественных термических пленок, и уверенной регистрации соответствующих особенностей целесообразно использовать в наборе длин волн  $\lambda = 0.5-1$  см.

В процессе измерений  $T_a$  одновременно выполнялись также измерения температуры на глубине  $z = -1$  см с помощью контактного датчика. На рис. 4 представлены для сравнения данные восстановленной

из решения (2) (кривая 1) и измеренной датчиком (кривая 2) температуры  $T$  ( $z = -1$  см). Точность контактных измерений  $\pm 0,1$  К. Можно сделать вывод, что глубинная структура волн восстанавливается достаточно хорошо. Наибольшие расхождения имеют место вблизи начального момента, что может объясняться как погрешностями измерения

$T_a$ , так и некоторой инерционностью контактного датчика. Глубина слоя, захваченного волновым процессом, на рис. 3б соответствует глубине стратифицированного слоя (3 см). Восстановление температурной структуры внутренней волны позволяет определять и структуру волновых возмущений плотности водной среды.

Таким образом, показана возможность радиометрического контроля температурной структуры стратифицированной водной среды при прохождении внутренних волн. Этот неинвазивный метод открывает новые возможности исследований в гидрофизических приложениях. В частности, перспективным представляется исследование конвекции и других динамических процессов в термически неоднородной жидкости, приводящих к вариациям температуры поверхностного слоя.

Следует отметить, что в естественных средах, особенно в морской воде, регистрация внутренних волн весьма проблематична из-за малого градиента температур и трудностей измерения при наличии волнения, модулирующего коэффициент отражения. Представляют, однако, интерес попытки радиометрического обнаружения влияния внутренних волн на параметры термической пленки в тонком нетурбулизованном поверхностном слое воды, где градиент температуры резко возрастает. Вместе с тем, учитывая, что возможный эффект не может превышать долей градуса, эту задачу на первом этапе также целесообразно решать в лабораторных условиях, где уже отработана методика радиометрического контроля профиля температуры в термических пленках [3].

- ЛИТЕРАТУРА
1. Тихонова Т. В., Троицкий В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 9. С. 1273.

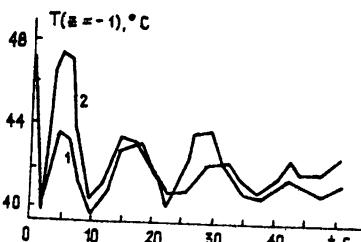


Рис. 4.

2. Кондратьев К. Я., Шульгина В. М. //ДАН СССР. 1971. Т. 200. № 1. С. 88.
3. Гайкович К. П., Резник А. Н., Сумин М. И., Троицкий Р. В. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1987. Т. 23. № 7. С. 761.
4. Гайкович К. П., Сумин М. И., Троицкий Р. В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 9. С. 1104.
5. Гайкович К. П., Резник А. Н. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 11. С. 1343.
6. Гайкович К. П., Резник А. Н., Троицкий Р. В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 12. С. 1467.
7. Гайкович К. П. //Исследование Земли из космоса. 1990. № 6. С. 71.
8. Троицкий В. С., Аранжереев В. А., Густов А. В. и др. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 1. С. 62.
9. Гайкович К. П., Резник А. Н., Троицкий Р. В. //Тезисы докл. З Всесоюзн. школы-семинара "Методы гидрофизических исследований". - Калининград, 1989. Ч. 2. С. 27.
10. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. - М.: Наука, 1983.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
8 августа 1991 г.

RADIOMETRY OF DYNAMICS OF WATER MEDIUM TEMPERATURE PROFILE  
AT INTERNAL WAVE TRANSIT

K. P. Gaikovich, A. N. Reznik, R. V. Troitsky

By measurements of the thermal radio emission at wavelengths of 3.9 and 30 cm the variations of the temperature distribution are defined in the surface layer of water medium at excitation of internal waves in it.

УДК 551. 508. 86

## ИЗМЕРЕНИЕ ДИСТАНЦИЙ ДО БЛИЗКИХ ГРОЗОВЫХ РАЗРЯДОВ

М. А. Король, А. П. Николаенко

Обсуждается один из способов измерения расстояния до близких грозовых разрядов в промежутке Земля - ионосфера, основанный на использовании различий частотных зависимостей статической индукционной и радиационной компонент электромагнитного поля. Отражение радиоволн от стенок волновода описано рядом мнимых источников убывающей амплитуды, что позволило оценить размер ближней зоны, оказавшийся равным около 50 км. Для исключения влияния спектра источника предложено измерять волновой импеданс поля. Получены простые аналитические выражения, связывающие характерные точки спектра волнового импеданса с искомой дистанцией до вертикального грозового разряда облако - Земля.

При радиофизических исследованиях грозовой активности возникает задача определения координат источника зарегистрированного импульсного радиоизлучения. Если задача пеленгации в настоящее время решается более или менее удовлетворительно [1-3], то определение дистанции до источника, особенно в случае близких разрядов, выполняется со значительно большими относительными погрешностями. В данной работе предлагается способ измерения малого расстояния источник - приемник, основанный на использовании различий частотных зависимостей электростатической, индукционной и радиационной компонент поля.

Использование этих различий широко обсуждалось в литературе. По-видимому, впервые такой подход к изучению грозовых разрядов был сформулирован в книге [4]. Применение различных способов обработки записей электрического и магнитного полей для локации источников обсуждается до настоящего времени [5, 6]. Особое внимание при этом уделяется разработке алгоритмов, которые не чувствительны к временной форме тока разряда, особенно при многократных пробоях. Как будет ясно из дальнейшего изложения, наиболее близким к настоящей работе является способ Е-, Н-измерений, когда для определения

дистанции до разряда используется разность фаз между вертикальным электрическим и горизонтальным магнитным полями (см., например, [7, 8]). Фактически здесь при определении дистанции используют зависимость фазы волнового импеданса поля  $\text{Arg } W(\omega) = \arctg [E_z(\omega)/H_\phi(\omega)]$  от частоты, последняя измеряется на нескольких дискретных частотах. В отличие от алгоритма [9] такие решения оказываются устойчивыми относительно вариаций временной формы тока пробоя. Недостатком упомянутого подхода является применение измерений на малом числе дискретных частот (что оправдывается использованием аналоговой техники). В результате исходная информация о сигнале обедняется, что не может не сказаться на точности выходных данных.

В предлагаемом ниже способе измерения дистанции источник - приемник используется частотная зависимость модуля волнового импеданса, не зависящая от спектра тока молнии. Измерения предлагается проводить в области СНЧ - СДВ диапазонов, чтобы выделить наиболее информативные участки и получить простые аналитические соотношения для оценки дистанции от наблюдателя до разряда. Существенным при этом оказывается выполнение широкополосных измерений, сопровождающихся спектральным анализом, что при использовании современных вычислительных средств не представляет собой проблемы. Важно подчеркнуть, что получаемые ниже соотношения справедливы, если применима модель короткого (по сравнению с остальными параметрами задачи) вертикального электрического разряда, не обязательно однократного.

Рассмотрим следующую модельную задачу. Электромагнитное поле наблюдается в плоском промежутке Земля - ионосфера, нижняя граница которого является идеально проводящей, а верхняя характеризуется эффективным коэффициентом отражения  $R$ . Источником поля служит вертикальный электрический диполь. В пункте наблюдения регистрируются вертикальная электрическая и горизонтальная магнитная компоненты электромагнитной волны  $E_z$  и  $H_\phi$ . Если принять высоту источника поля над поверхностью Земли равной нулю ( $H = 0$ ), т. е. рассмотреть пробой облако - Земля, то для вертикальной электрической составляющей поля на частоте  $\omega$  легко записать:

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{2P_1} E_z = \alpha \cos kD - \beta \sin kD - i(\beta \cos kD + \alpha \sin kD) + \quad (1)$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{d_n^3} (\gamma_n \cos kd_n + \delta_n \sin kd_n) -$$

$$- 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{d_n^3} (\gamma_n \sin kd_n + \delta_n \cos kd_n).$$

Здесь  $\epsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость вакуума,  $P_1$  - дипольный момент источника,  $k = \omega/c$ ,  $\omega = 2\pi F$  - круговая частота,  $c$  - скорость света,  $D$  - горизонтальная дистанция источник - приемник,  $R$  - эффективный коэффициент отражения от ионосферы,  $h$  - высота промежутка Земля - ионосфера,  $n$  - номер отражения,  $\alpha = (k^2 D^2 - 1)/D^3$ ,  $\beta = k/D^2$ ,  $\gamma_n = k^2 D^2 + C_n/d_n^2$ ,  $C_n = 2(2nh)^2 - D^2$ ,  $\delta_n = kC_n/d_n^2$ ,  $d_n = ((2nh)^2 + D^2)^{1/2}$ .

Выражение (1) представляет собой хорошо известное разложение в ряд по мнимым источникам [10, 11], а коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_n$ ,  $C_n$ ,  $\delta_n$ ,  $d_n$  учитывают все три составляющие поля, создаваемые не только истинным диполем, но и его изображениями в системе плоских зеркал, одно из которых (Земля) является идеальным, а другое (ионосфера) имеет коэффициент отражения  $|R| < 1$ .

В той же модели нетрудно получить аналогичное разложение по мнимым источникам для горизонтальной компоненты магнитного поля  $H_\phi$ . Однако коэффициенты  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  при тригонометрических функциях изменяется, что связано с отсутствием в магнитном поле электростатической составляющей. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{H_\phi}{iP_1} = & \hat{\alpha} \cos kD + \beta \sin kD + i(\beta \cos kD - \hat{\alpha} \sin kD) + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n (\hat{\gamma}_n \cos kd_n + \hat{\delta}_n \sin kd_n) + \\ & + 2i \sum_{n=1}^{\infty} R^n (\hat{\delta}_n \cos kd_n - \hat{\gamma}_n \sin kd_n), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\hat{\alpha} = k^2/D$ ,  $\hat{\gamma}_n = k^2 D/d_n^2$ ,  $\hat{\delta}_n = kD/d_n^2$ .

Приведенные выражения были использованы для расчетов амплитуд спектральных составляющих электрического  $|E_z(F)|$  и магнитного  $|H_\phi(F)|$  полей, создаваемых вертикальным электрическим диполем на различных дистанциях. Полученные результаты показаны на рис. 1. Здесь по горизонтальным осям в логарифмическом масштабе отложена частота  $F$ , а по вертикальным осям - модуль вертикальной электрической составляющей  $|E_z(F)|$  (верхний ряд рисунков) и модуль горизонтальной

магнитной составляющей  $|H_\phi(F)|$  (средний ряд). измеренных в децибелах. В левой колонке изображены графики, при расчете которых использовались следующие параметры задачи:  $h = 60$  км,  $R = 0,6$  и  $n \leq 10$ , что моделирует дневные условия распространения. В правой - графики, полученные в рамках ночной модели распространения, для которой было принято  $h = 90$  км,  $R = 0,9$  и  $n \leq 50$ . Частотные зависимости полей построены для дистанций источник - приемник  $D = 10, 20, 30, 40, 50, 80$  и  $100$  км. В расчетах предполагалось также, что электрический дипольный момент источника не зависит от частоты  $P_1(F) = \text{const} = 1$ .

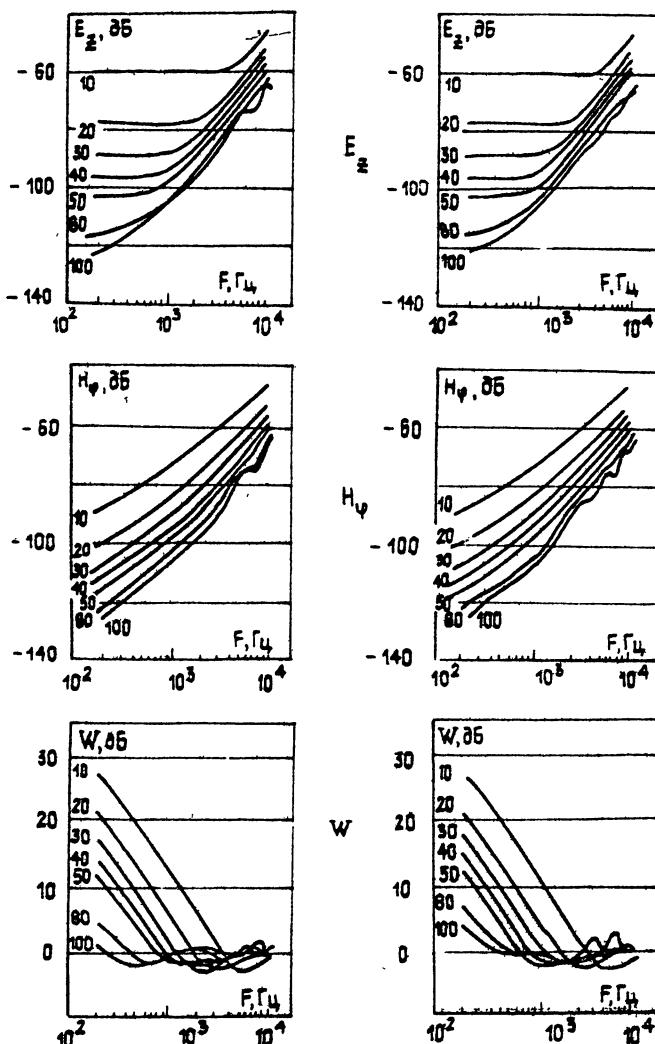


Рис. 1.

Как видно из рис. 1, графики модуля горизонтальной магнитной составляющей поля  $|H_\phi(F)|$  монотонно растут с увеличением частоты сначала пропорционально  $F$ , а затем  $F^2$ . Модуль вертикальной электрической компоненты сначала не зависит от частоты (поле электростатики), а затем изменяется пропорционально  $F$  (поле индукции), а в области излучения выходит на асимптоту  $F^2$ . Область перехода расчетной зависимости от участка  $|E_z(F)| \approx \text{const}$  к асимптоте  $|E_z(F)| \approx F^2$  определяется дистанцией  $D$ . При этом с увеличением расстояния источник - приемник радиационная и индукционная компоненты поля начинают играть основную роль на все более низких частотах. В отсутствие отражающих границ переходная частота  $F_1$ , контролируемая дистанцией  $D$ , на которой влияние электростатического поля ослабевает и начинают доминировать индукционная и радиационная компоненты поля, легко определяется из условия  $kD \approx 1$ . Так, для источника, удаленного на 50 км,  $F \approx 1$  кГц. При наличии отражающих границ необходимо учитывать дополнительные источники, у которых  $d_n > D$ , и, как результат, процедура определения  $F_1$  усложнится.

Графики вертикальной электрической и горизонтальной магнитной компонент, изображенные на рис. 1, использовать для сопоставления с экспериментальными данными затруднительно, поскольку в расчетах было сделано "сильное" предположение  $P_1 = \text{const}$ . В простейших моделях грозового пробоя необходимо положить  $P_1 \propto F^{-1}$ , однако, как будет ясно из дальнейшего, это не существенно.

Для исключения влияния формы спектра источника на результаты оценки дистанций перейдем к измерению модуля волнового импеданса поля  $|W(F)| = |E_z(F)| / |H_\phi(F)|$ , аналогичному тому как это делается при глобальной СНЧ локации молний [6]. Расчетные графики для тех же станций представлены в нижнем ряду рис. 1.

Главное преимущество волнового импеданса состоит в его независимости от спектра излучения источника  $P_1(F)$ . Как видно, на низких частотах волновой импеданс велик и убывает с ростом частоты пропорционально  $F^{-1}$ . В радиационной области  $|W(F)| \approx 1$ . Между ними находится упомянутая ранее промежуточная область частот, зависящая от дистанции  $D$ , где модуль волнового импеданса становится равным своему значению в вакууме, т. е.

$$\log |W(F_1)/120\pi| = 0. \quad (3)$$

На рис. 2 показаны зависимости "промежуточной" частоты", т. е.

первого корня  $F_1$  уравнения (3) от дистанции  $D$  между источником и приемником как в дневных, так и в ночных условиях. Как видно, на расстояниях  $D \leq 50$  км эти зависимости совпадают между собой и в двойном логарифмическом масштабе близки к прямой. По расчетным данным с помощью метода линейной регрессии легко получить следующую связь:

$$D[\text{дБ}] = 96 - 1,1F_1[\text{дБ}], \quad (4)$$

где дистанция  $D$  измеряется в децибелах относительно 1 км, а частота  $F_1$  — в децибеллах относительно 1 Гц.

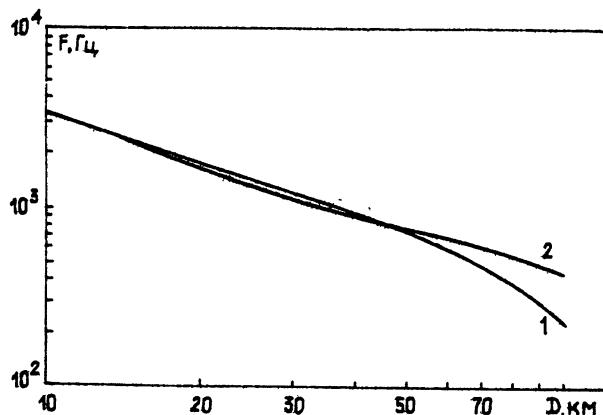


Рис. 2.

Таким образом, вне зависимости от дневных или ночных условий наблюдения в ближней зоне ( $D \leq 50$  км) вертикального грозового разряда главную роль играет электростатическая составляющая поля.

Точность оценки дистанции до источника определяется прежде всего погрешностью измерения волнового импеданса. При относительной погрешности измерения абсолютного значения  $|W| \approx 10\%$  или  $\pm 1$  дБ дистанция будет найдена с той же точностью.

Описанный способ позволяет и не проводить абсолютные измерения. Незначительное изменение в алгоритме — замена промежуточной частоты  $F_1$  на  $F_m$ , последняя соответствует первому минимуму зависимости  $|W(F)|$ , — дает новое уравнение

$$D[\text{дБ}] = 107 - 1,2F_m[\text{дБ}] \quad (5)$$

для величин, измеренных в децибелах.

В заключение необходимо прокомментировать приведенные результаты. Возможно, использованное представление полей в промежутке Земля — ионосфера покажется некоторым читателям слишком

упрощенным. Действительно, в качестве источников поля рассмотрены только вертикальные молнии, ионосфера описана лишь двумя параметрами - высотой и коэффициентом отражения, не зависящими от частоты, гиротропия ночной ионосферы, превращающая коэффициент отражения в тензор, игнорируется и т. д. Тем не менее конечный результат показывает достаточность использованной модели.

Несмотря на то, что большая часть молний состоит из наклонных пробоев, в рассматриваемом диапазоне частот (сотни герц - единицы килогерц) поле возбуждается вертикальным током разряда. Иными словами, источник содержит как вертикальную, так и горизонтальную компоненты, но только первая способна создать заметное электромагнитное поле. Поскольку случай, когда источник находится прямо над головой наблюдателя, нами не рассматривался, горизонтальная часть тока пробоя компенсируется отражением в идеально проводящей земле. Кроме того, для грозозащиты основной интерес представляют разряды облако - Земля.

Главная характеристика поля - размер ближней зоны, как удалось показать, остается постоянной при изменениях высоты и коэффициента отражения ионосферы. Физически это означает, что для дистанций, меньших 50 км, отражениями от ионосферы можно пренебречь. В этой зоне выполняется условие  $(D/2h)^3 \ll 1$ , что обеспечивает не только быстрое убывание полей отдельных отраженных источников, но и малость суммы этих составляющих по сравнению со вкладом истинного диполя. Угловые зависимости полей усиливают этот эффект.

В результате, при расстоянии молния-наблюдатель, меньшем высоты ионосферы, отражения можно не рассматривать. Окончательные формулы можно было бы получить непосредственно из решения задачи в свободном пространстве, но без условия применимости в виде  $D < 50$  км.

Следовательно, нет смысла применять точные, но громоздкие формулы при расчете ближних полей в промежутке Земля - ионосфера. Для дистанций, больших 50 км, где необходим учет отражений от ионосферной поверхности, решение задачи усложнится, а сами результаты станут зависеть от параметров волновода, т. е. от времени суток.

Напомним основные результаты и выводы. Отражение радиоволн от стенок волновода описывалось с помощью линейной решетки мнимых источников убывающей амплитуды. Оказалось, что размер зоны, в которой отражения от ионосферы не играют заметной роли в создании регистрируемых полей, составляет величину, чуть меньшую высоты волновода, что хорошо согласуется с известными данными [4]. Для

определения дистанции источника - приемник необходимо провести измерение спектра принятых сигналов в широкой полосе частот (от десятков до тысяч герц), по полученным  $|E_z(F)|$  и  $|H_\phi(F)|$  построить спектр волнового импеданса  $|W(F)|$ , затем найти частоту  $F_1$  или  $F_2$ , а по ним с помощью формул (4) и (5) оценить дистанцию источник - приемник.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Флуктуации электромагнитного поля Земли в диапазоне СЧЧ /Под ред. М. С. Александрова. - М.: Наука, 1972. - 195 с.
2. Бару Н. В., Кононов И. И., Соломоник М. Е. Радиопеленгаторы- дальномеры ближних гроз. - Л.: Гидрометеоиздат, 1976. - 143 с.
3. Александров А. И., Краснитский Ю. А. //Радиотехника и электроника. 1985. Т. 25. № 3. С. 411.
4. Watt A.D. VLF radio engineering. - New York: Perg. Pr., 1967. - 701 p.
5. Труды ГГО. Вып. 401 Атмосферное электричество/Под ред. В. П. Колоколова и Л. Г. Махоткина. - Л.: Гидрометеоиздат, 1980. - 167 с.
6. Кононов И. И., Петренко И. А., Снегуров В. С. Радиотехнические методы местоопределения грозовых очагов. - Л.: Гидрометеоиздат, 1986. - 224 с.
7. Снегуров В. С., Семагин Б. В. Результаты исследования фазовых соотношений между электрической и магнитной компонентами поля молниевого разряда. //Труды ГГО. 1980. Вып. 401. С. 66.
8. Махоткин Л. Г., Иньков Б. К., Лещенко Г. П. О возможности использования узкополосного варианта электромагнитного метода оценки расстояния до грозовых очагов. //Труды ГГО. 1980. Вып. 401. С. 62.
9. Файзуллин Н. А., Семагин Б. В., Снегуров В. С. Алгоритмы определения дальности до грозовых очагов. //Труды ГГО. 1980. Вып. 401. С. 53.
10. Galejs J. Terrestrial propagation of long electromagnetic wave. - Oxford: Perg. Pr., 1972. - 362 p.
- /1. Wait J.R. Electromagnetic Waves in Stratified Media. - New York: Perg. Pr., 1962. - 372 p.
- /2. Kemp D.T., D.Llanwyn Jones. //JATP. 1971. V. 33. P. 567.

Радиоастрономический институт  
АН Украины

Поступила в редакцию  
12 августа 1991 г.

## A TECHNIQUE TO DERIVE THE DISTANCE UP TO NEAR BY THUNDERSTORM DISCHARGES

M. A. Korol', A. P. Nikolaenko

A technique to derive the distance up to near by thunderstorm vertical discharges in the Earth - ionosphere waveguide is described, utilizing the differences in the spatial and frequency dependencies of static, inductive and radiation field components. To avoid the unfluence of the source spectrum, the wave impedance measurements are proposed. The role of waveguide interfaces was described by the linear array of image sources. The size of near by zone in the Earth - ionosphere duct appeared to be of about 50 km. The measurements of the wave impedance amplitude spectrum provide the evaluation of the frequency position of intermediate region, where the static component becomes minor. That latter yields the distance in question. The validity of the derived formula for determination of short source-observer separations regardless of the ambient day or night propagation conditions was demonstrated.

УДК 621. 321. 24

## КОРРЕЛЯЦИЯ ОСЛАБЛЕНИЯ МИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН В ОБЛАЧНОЙ И ДОЖДЕВОЙ ЧАСТЯХ СИСТЕМЫ ОБЛАКО - ДОЖДЬ

*В. В. Строганов*

Рассматривается обнаруженное экспериментальным путем различие в два и более раза времен автокорреляции ослаблений миллиметровых радиоволн в дождевой и облачной частях системы облако - дождь. В случаях среднего - сильного дождя измеренное время автокорреляции ослабления миллиметровых радиоволн в облачной части системы облако - дождь в два раза больше времени автокорреляции ослабления в выпадающем из данной облачности дожде. В случаях моросящих дождей измеренное соотношение обратное: время автокорреляции ослаблений в дождевой части гидрометеообразования в два раза превышает время автокорреляции ослабления в облачной части.

Использовались конкретные реализации; задача оценки усредненных соотношений времен корреляции, требующая привлечения экспериментальных данных за длительные периоды измерений, не ставилась; тем не менее, необходимость ее постановки следует из рассматриваемых в данной работе результатов.

Физический смысл обсуждаемых результатов заключается в том, что горизонтальные пространственные неоднородности среднего - сильного дождя меньше, а моросящего дождя - больше, чем пространственные неоднородности облачности, из которой выпадает данный дождь.

В ряде публикаций, связанных с вопросами разработки модели дождя и метода прогнозирования ослаблений миллиметровых радиоволн на зенитных и наклонных трассах "Земля-Космос", сообщались данные по временам корреляции интенсивности дождей и отмечалось отсутствие связи между ними и типом дождя. Эти данные переносились на ослабление миллиметровых радиоволн в предположении, что в этом диапазоне вклад облака в ослабление мал по сравнению с ослаблением в выпадающем из этого облака дожде; на основании этих данных проводилось построение той или иной модели ослабления миллиметровых

радиоволны тропосферой в условиях выпадания осадков [1, 2].

Вместе с тем, в работах [3, 4] показано, что в условиях моросящих дождей ослабление миллиметровых волн (4 и 8 мм) в облаке может превышать ослабление в дожде в два-три раза при интенсивностях выше 1 мм/ч; в среднем, поскольку интенсивность меняется в пределах 0,1-2 мм/ч, они имеют близкие значения. В случаях средних-сильных дождей с интенсивностью 5-40 мм/ч ослабления в облаке и ослабления в дожде на волнах 4 и 8 мм также имеют близкие значения (отношение составляет 0,4-0,6).

Цель настоящей работы - не разделяя ослаблений в облаке и в дожде, выпадающем из данного облака, качественно показать, что их времена автокорреляции могут существенно различаться (до двух раз и более) в большую или меньшую сторону в зависимости от типа дождя. При этом использовано то обстоятельство, что времена автокорреляции  $\tau_\gamma$  суммы функций  $\gamma = \alpha + k\beta$  в случае неравенства времен автокорреляции функций  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\tau_\alpha < \tau_\beta$  лежит в пределах  $\tau_\alpha < \tau_\gamma < \tau_\beta$  и зависит от  $k$ . Рассматриваемые далее случаи моросящего дождя (0, 1-2 мм/ч) и среднего дождя (5-40 мм/ч) позволяют использовать такой подход в силу сказанного выше.

Для решения поставленной задачи были использованы экспериментальные данные, накопленные в процессе измерений зенитных ослаблений миллиметровых и сантиметровых волн за летне-осенние периоды 1980-1984 гг. в Нижегородской области.

Измерения с одновременной регистрацией интенсивности дождя были выполнены методом синхронного многоволнового дистанционного радиозондирования тропосферы [3 - 6] из разнесенных на расстояние 600 м наземных пунктов. В измерительных пунктах располагались радиометрические приемные устройства на волны 3, 8; 4, 0; 8, 0; 13, 5 и 30 мм, дождемеры членочного типа и доплеровский радиолокатор, сопряженный с микроЭВМ, для измерения интенсивности моросящего дождя.

Чувствительность радиометров лежала в пределах 0,3-0,5° К. Диаграммы направленности параболических антенн составляли 1-3 градуса. Данные регистрировались непрерывно в течение 3-12 часов и синхронизировались метками времени. Приемные устройства находились в укрытии, снаружи которого располагались зеркала, обеспечивающие прием излучения тропосферы в надир. Зеркало радиотелескопа на волну 8 мм, входящего в эту группу, поддерживалось во время дождя сухим посредством воздушного наддува. Измеряемые ослабления с помощью

данного радиометра и расположенного рядом радиометра на волну 4 мм с зеркалом, смачиваемым дождем, коррелировали с максимальным коэффициентом корреляции (0, 95), это позволяет утверждать, что при корреляционной обработке измеряемых ослаблений в условиях дождей влиянием пленки воды на поверхности зеркал можно пренебречь.

Полное зенитное ослабление радиоволн в облачной с осадками тропосфере складывается из молекулярного ослабления в кислороде и водяном паре, аэрозольного ослабления в облаке и ослабления в дожде [7]. Для того, чтобы выделить из полного ослабления ослабление в системе облако-дождь  $A_{\text{тд}}$ , равное сумме ослаблений в облаке  $A_0$  и дожде  $A_d$  ( $A_{\text{тд}} = A_0 + A_d$ ), измерялась яркостная температура безоблачных участков тропосферы (в "разрывах" облачности). Ослабление в облаке с дождем вычислялось по измеренным яркостным температурам по формуле [7]

$$A = A_0 + A_d = 4,34 \ln[(T_{\text{эфф}} - T_1)/(T_{\text{эфф}} - T_2)],$$

где  $T_2$  и  $T_1$  – яркостные температуры чистой атмосферы и облачной с осадками атмосферы,  $T_{\text{эфф}}$  – эффективная температура, близкая к температуре окружающей среды (в градусах Кельвина). При расчетах учитывались изменения температуры, относительной влажности, оценивалось рассеяние радиоволн на каплях дождя [8].

Яркостные температуры и интенсивность дождя регистрировались непрерывно и оцифровывались. Для дальнейшей обработки использовались квазистационарные участки; участки массивов данных, соответствующие началу и концу дождя, исключались.

Проведенные измерения в разнесенных пунктах зенитных ослаблений в тропосфере в различных метеорологических условиях позволили найти времена и расстояния корреляции ослаблений миллиметровых (4 и 8 мм) и сантиметровых волн (30 мм). Времена корреляции лежат в интервале от 3 до 35 минут, а расстояния корреляции в пределах от 2 до 20 км как для случаев кучево-дождевой облачности без осадков, так и в случаях выпадения дождей разной интенсивности. Например, наблюдались расстояния корреляции и автокорреляции 2,5 и 2 км для ослабления волны 4 мм в кучево-дождевой облачности с грозой (интенсивность осадков – до 35 мм/ч, максимальное ослабление волны 4 мм – 15 дБ, скорость перемещения гидрометеообразования 8 м/с) и 3,3 км и 3,5 км в кучево-дождевой неразрывной облачности без осадков (максимальное ослабление волны 4 мм – 3,3 дБ, скорость перемещения облаков 13 м/с). Этот пример показывает, что корреляционные и

автокорреляционные кривые полных ослаблений в гидрометеообразованиях не дают информации о роли дождя и связи интенсивности дождя с временем корреляции ослаблений миллиметровых радиоволн. Полученные данные показали также, что времена автокорреляции в десятки минут имели место как в случаях облачности без осадков, так и в случаях сильных дождей.

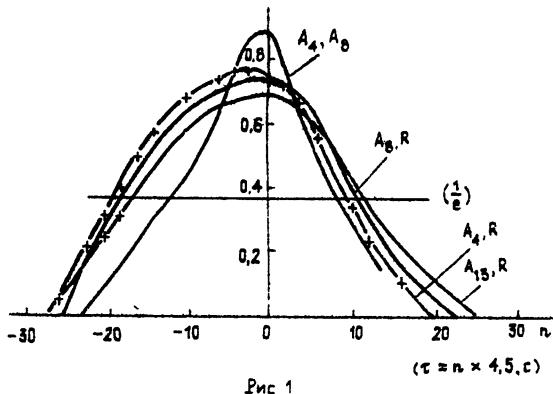


Рис. 1

Более результативным оказывается представление ослабления радиоволн в гидрометеообразовании в виде суммы облачного  $A_o$  и дождевого  $A_d$  вкладов. Используя [9, 10], легко показать, что роль дождя в ослаблении радиоволн 3 – 30 мм относительно облака растет с ростом длины волны в случаях средних – ливневых дождей, но падает в случаях моросящих дождей.

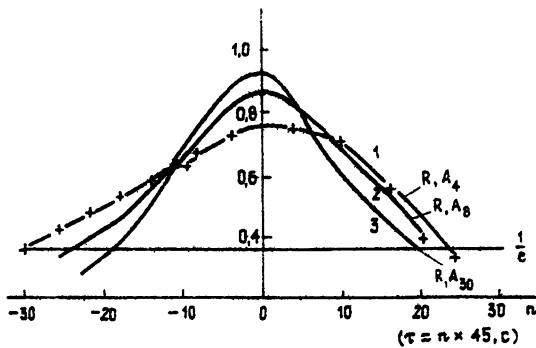


Рис. 2.

Для примера на рис. 1, 2 приведены кривые корреляции ослаблений  $A(L)$  волн  $L = 4; 8; 13, 5$  и  $30$  мм с интенсивностью дождя  $R$ , построенные по экспериментальным данным для случаев моросящего дождя интенсивностью 0,1 – 2,3 мм/ч (24 сентября 1984 г.; давление 710 мм рт. ст., относительная влажность 90%, температура 15°C, время

регистрации 0 ч 45 мин - 3 ч 13 мин; давление 23 сентября днем - 735 мм рт. ст.) и среднего - сильного дождя интенсивностью 3-70 мм/ч (11 июля 1984 г.; атмосферное давление 727 мм рт. ст., относительная влажность 90%, температура 17°C; время регистрации 4 часа) соответственно.

Из рисунка видно, что с ростом длины волн коэффициент корреляции ослабления с интенсивностью дождя падает в случае моросящего дождя и, наоборот, растет в случае дождя большой интенсивности. Далее, время корреляции интенсивности дождя  $R$  с ослаблениями волн 4-13 мм заметно превышает время корреляции ослаблений волн 4 и 8 мм, из чего следует ожидать, что время автокорреляции в дождевой части ослабления больше, чем время автокорреляции ослабления волн в облачной части. Более наглядны в этом отношении приведенные на рис. 3 и 4 кривые, которые позволяют оценить время автокорреляции ослаблений в облаке и ослаблений в выпадающем из него дожде. В данном случае, учитывая сказанное в начале статьи, рассматриваются два крайних случая - среднего - сильного дождя (рис. 3; 11 июля 1984 г.) и моросящего дождя (рис. 4; 24 сентября 1984 г.). Рис. 3 представляет корреляционную функцию ослаблений волн 4 и 8 мм (кривая 1), идентичные автокорреляционные функции ослаблений волн 4 и 8 мм (кривая 2; крестики-значения одной из указанных функций) и автокорреляционные функции ослабления волны 30 мм и интенсивности дождя (кривые 3 и 4 соответственно).

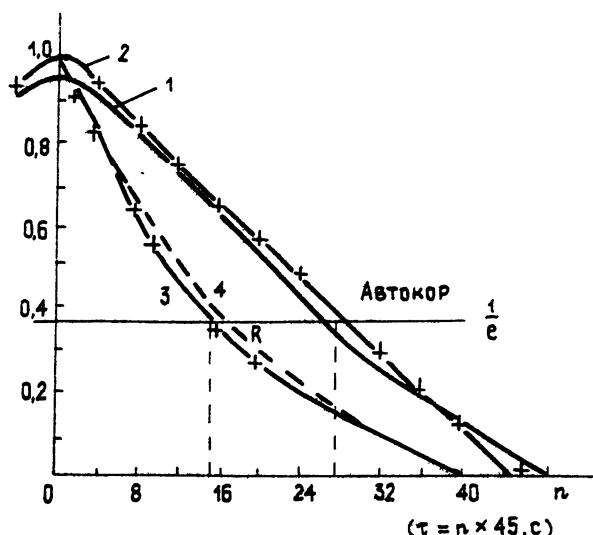


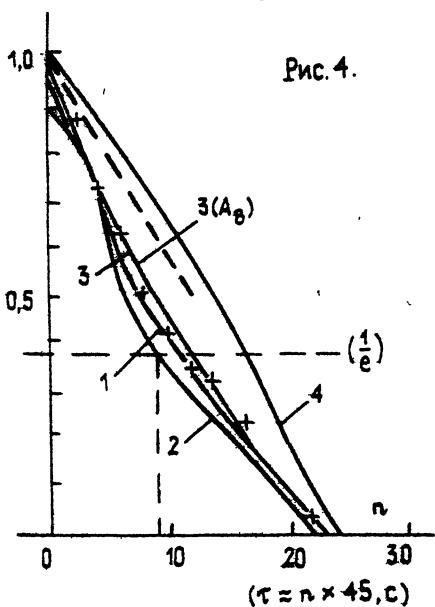
Рис 3.

Из рассмотрения приведенных кривых следует, что времена автокорреляции ослабления волн 30 мм и интенсивности дождя совпадают и имеют значения в два раза меньшие, чем времена автокорреляции ослаблений волн 4 и 8 мм (близкие времена корреляции ослаблений волн 4 и 8 мм). Учитывая, что на волнах 4 и 8 мм вклады облака и дождя в ослабление имеют близкие значения, а на волне 30 мм вклад облака составляет 10-20% от вклада дождя, т. е. ослабление обусловлено дождем, можно считать, что время автокорреляции ослаблений в облаке по крайней мере не менее времени автокорреляции полного ослабления волны 4 или 8 мм и превышает время автокорреляции ослаблений в дождевой части данного гидрометеообразования более, чем в два раза. В случае моросящего дождя мы имеем противоположную ситуацию.

На рис. 4 представлены корреляционная функция ослаблений волн 4 и 8 мм (кривая 1), автокорреляционные

функции ослаблений волн 4 и 8 мм (кривые 2 и 3 соответственно) и автокорреляционная функция интенсивности дождя (кривая 4). В данном случае время автокорреляции интенсивности дождя почти в два раза превышает время автокорреляции ослаблений волн 4 и 8 мм в системе облако - дождь. Поэтому можно сделать вывод, что время автокорреляции ослабления волн 4 и 8 мм в облачной части гидрометеообразования не менее, чем в два раза меньше времени автокорреляции ослабления в дождевой части.

Рис. 4.



Разностью времен корреляции ослаблений в облаке и ослаблений в выпадающем из него дожде можно объяснить наличие двух частков насыщения структурных функций ослаблений волн 4 и 8 мм в случаях моросящих дождей. На рис. 5 приведены структурные функции для нескольких случаев моросящих дождей интенсивностью до 2 мм/час, построенные по синхронно измеренным значениям пары структурных функций ослаблений волн 4 и 8 мм (соответственно кривые 1, 2 - 23 сентября 1984 г., атмосферное давление 720 мм рт. ст., относительная влажность 80%, температура 15°C, время регистрации 19 ч 40мин - 23 ч 09мин); кривые 3, 4 - 24 сентября 1984 г. (атмосферное давление 236

/10 мм рт. ст., относительная влажность 90%, температура 15°C); кривые 5, 6 - 14 сентября 1984 г. (атмосферное давление 730 мм рт. ст., относительная влажность 90%, температура 7°C); кривые 7, 8 - 1 октября 1984 г. Учитывая сказанное выше, можно утверждать, что первое насыщение (8 - 12 мин) обусловлено облачностью, второе (20 - 30 мин) - дождем. Кривая 9 - отношение структурных функций 4 и 8 мм, кривая 10 - структурная функция интенсивности дождя.

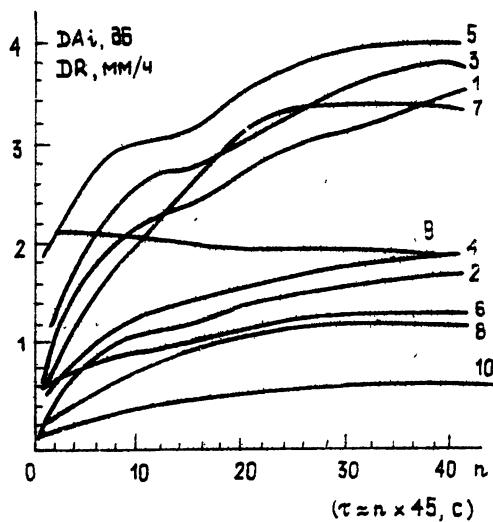


Рис. 5.

Итак, основной вывод из рассмотренного материала заключается в том, что времена автокорреляции ослаблений миллиметровых радиоволн в дождевой и облачной частях системы облако - дождь различны и могут отличаться более чем в два раза в ту или другую сторону в зависимости от типа дождя: в моросящем дожде время автокорреляции ослаблений больше, а в среднем - сильном дожде меньше времени автокорреляции ослаблений в облачности, из которой выпадает данный дождь.

Вывод: средние горизонтальные размеры неоднородностей дождя меньше, чем средние горизонтальные размеры неоднородностей облачности в случае средних сильных дождей, но больше в случае моросящих дождей. Скорее всего это связано с тем, что высоты моросящих дождей, как правило, заметно больше высот дождей большой интенсивности, тогда как время падения капель в моросящем дожде превышает в среднем в несколько раз скорость падения капель в среднем - сильном дожде, составляя 10 и более минут [11]. Изменения направления и величины скорости ветра по мере падения капель

приводят к тому, что на трассе в данный момент времени находятся капли, выпавшие из разных участков облачности, что сглаживает неоднородности дождя, увеличивает их протяженность и время автокорреляции ослаблений. Это приводит к тому, что мелкие вариации ослабления миллиметровых радиоволн, т. е. начальная часть структурной функции и первое насыщение, преимущественно обусловлены неоднородностями облачности. Этим же объясняется и большее значение отношения структурных функций ослаблений волн 4 и 8 мм до точки А (кривая 9, например, представляет отношение структурных функций, представленных кривыми 1 и 2).

В заключение автор благодарит сотрудников ИРЭ АН Ю. С. Бабкина, Е. В. Сухонина и сотрудников ЦАО А. В. Колдаева, Н. Ф. Буранбаева, А. С. Азарова, А. Ф. Миронова, участвовавших в измерениях, а также сотрудников НИРФИ С. А. Жевакина и А. В. Троицкого за обсуждение настоящей работы и полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сухонин Е. В., Бабкин Ю. С., Рукмна А. П. В кн.: Электромагнитные волны в атмосфере и космическом пространстве. - М.: Наука, 1986. С. 102.
2. Manabe T., Thada T., Awaka I. // IEEE Trans. Ant. Prop. 1987. V. AP-35. N 11. P. 1326.
3. Азаров А. С., Бабкин Ю. С., Буранбаев Н. Ф. и др. // Радиотехника. 1987. N 7. С. 73.
4. Строганов В. В. Тезисы докл. з-й школы по распространению мм и субмм волн в атмосфере. - Харьков, 1989.
5. Строганов В. В. Труды 7-го Всесоюзного совещания. - Л.: Гидрометеоиздат, 1984. С. 46.
6. Строганов В. В. Труды 6-го Всесоюзного совещания. - Л.: Гидрометеоиздат, 1984. С. 252.
7. Андреев Г. А., Зражевский А. Ю., Кутузов Б. Г. и др. В кн.: Проблемы современной радиотехники и электроники. - М.: Наука, 1980. С. 139.
8. Zavadsky A.M. // Proc. IEEE. 1974. V. 191. P. 257.
9. Кутузов Б. Г. // Труды з-го Всесоюзного совещания по радиолокационной метеорологии. - Л.: Гидрометеоиздат, 1968. С. 107.
10. Olsen R.L., Rogers D.V., Hodge D.B. // IEEE Trans. Ant. Prop. 1987. V. AP-35. N 11. P. 318.
11. Medhurst R.G. // IEEE Trans. Ant. Prop. 1965. V. AP-13. N 4. P. 550.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
21 июня 1991 г.,  
после переработки  
27 августа 1992 г.

CORRELATION OF MM RADIO WAVE ATTENUATION IN CLOUDINESS  
AND RAIN PARTS OF CLOUD-RAIN SYSTEM

V.V. Stroganov

Times of autocorrelation of mm radio wave attenuation in rain and cloudiness parts of cloud-rain system are experimentally detected to be different by two and more times. In cases of moderate - strong rain the measured time of autocorrelation of mm radio wave attenuation in cloudiness part of cloud-rain system by two and more times larger than the time of autocorrelation of attenuation in rain falling from the given region. In cases of mizzly rains the measured relation is inverse: time of autocorrelation of attenuations in the rain part of hydrometeorological formations twice exceeds the time of autocorrelation of attenuations in cloudiness part. Concrete realizations have been used: the problem of estimation of averaged relations between times of autocorrelation, which requires the experimental data for a large period of measurements has not been set, yet, its solution is necessary from the results obtained and considered in the given paper. The physical sense of the difference detected between times of autocorrelation of attenuation in cloudiness and rain parts of the coud-rain system is in the fact, that mean horizontal dimensions of spatial irregularities of moderate-strong rain are smaller, and muzzle rain - are larger than that of irregularities of the corresponding cloudiness from which rain falls.

УДК 537.874

**МЕТОД ПЕРЕНОСА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧАХ  
РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
НА НЕРОВНОЙ ИМПЕДАНСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Н. П. Жук

Развит строгий метод перехода от краевой задачи электродинамики в области с неровной границей к эквивалентной задаче в области с новой формой границы. Предложена методика замены возникающей нелокальной задачи граничным интегральным уравнением. Найдено решение последнего в виде разложения по степеням малого параметра, определяющегося в случае шероховатой границы высотой неровностей. Для подстилающей поверхности произвольной формы в неоднородной среде найдены поправки к импедансу за счет шероховатостей - как детерминированных, так и случайных.

Предметом исследования в данной работе служит электродинамическая краевая задача общего вида в области сложной формы. Трудности ее решения, обусловленные некоординатной формой границы, хорошо известны [1, 2]. Здесь излагается общий метод, который позволяет преобразовать ее к эквивалентной задаче в новой области с границей желаемой формы. Он использует связь между значениями векторов поля в разнесенных точках пространства. Существование этой связи позволяет заменить импедансное условие для поля на исходной, неровной границе равносильным соотношением на новой границе. Если новая область содержит участок, не входивший в состав исходной области, то перенос граничного условия предполагает выполнение аналога гипотезы Рэлея в пределах нового участка. Когда новая область располагается внутри исходной, принципиальных ограничений для переноса нет.

В идейном плане предполагаемый метод восходит к работам [3, 4], где перенос граничных условий выполнен строго с помощью операторной техники. Развитый там подход принципиально ограничен частной ситуацией, когда новая граница является плоскостью, точки неровной

границы однозначно проектируются на эту плоскость, а среда между новой и исходной границами - однородная и изотропная. Этот подход оперирует не с векторами поля, а с матрицей-столбцом, объединяющим  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Поэтому граничные операторы из перенесенных граничных условий в [3, 4] имеют сложную математическую природу и недоступны в "осязаемом" виде. Наш метод развит в терминах полевых величин и не связан с конкретными моделями среды и границ.

Иной строгий способ перехода к задаче в области с ровной границей развит в [5-7]. Он использует во всей рассматриваемой области преобразование координат, которое переводит прежнюю границу в новую. Это преобразование затрагивает и дифференциальные уравнения для поля, что усложняет их решение. Наш подход выгодно отличается тем, что уравнения сохраняются. Изменяется лишь граничное условие - в результате переноса оно становится нелокальным.

### 1. Постановка проблемы

Рассмотрим исходную задачу для комплексных амплитуд  $\vec{E}(\vec{R})$ ,  $\vec{H}(\vec{R})$  монохроматического ( $\sim e^{-i\omega t}$ ) электромагнитного поля в некоторой трехмерной области  $V^{in}$ . Запишем систему уравнений Максвелла

$$\nabla \times \vec{E} - ik_0 \hat{\mu} \cdot \vec{H} = -(4\pi/c) \vec{M}, \quad \nabla \times \vec{H} + ik_0 \hat{\epsilon} \cdot \vec{E} = (4\pi/c) \vec{J} \quad (1)$$

с граничным условием импедансного типа на ограничивающей поверхности  $\Sigma$ :

$$\vec{N}_\Sigma \times (\vec{E} - \hat{\zeta} \cdot \vec{N}_\Sigma \times \vec{H}) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{R} = (x, y, z)$ ,  $k_0 = \omega/c$ ,  $c$  - скорость света в вакууме,  $\vec{M}(\vec{R})$  и  $\vec{J}(\vec{R})$  - сторонние источники магнитного и электрического типов,  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\epsilon}$  - материальные параметры неоднородной анизотропной среды в объеме  $V^{in}$ , описываемые кусочно-гладкими диодными функциями переменного  $\vec{R}$ ,  $\vec{N}_\Sigma(\vec{R}_\Sigma)$  - единичный вектор нормали к поверхности  $\Sigma$  в точке  $\vec{R}_\Sigma$  этой поверхности, направленный внутрь  $V^{in}$ ,  $\hat{\zeta}(\vec{R}_\Sigma)$  - поверхностный импеданс, представляющий в общем случае диадную функцию точки на  $\Sigma$  и обладающий свойством  $\vec{N}_\Sigma \cdot \hat{\zeta} = 0$ . Диадный характер импеданса и зависимость его от  $\vec{R}_\Sigma$  свойственны, в

частности, хорошо проводящей поверхности, главные радиусы кривизны которой не слишком велики по сравнению с глубиной скрин-слоя [11]. В бесконечности поле должно изображать уходящую волну, а на поверхностях разрыва функций  $\hat{u}$ ,  $\hat{e}$  тангенциальные компоненты поля должны сохранять непрерывность. Последнее требование считаем встроенным в определение оператора  $\nabla \times \hat{i}$  из уравнений (1) и последующих ( $\hat{i}$  - единичная диада) и далее не упоминаем. Для простоты изложения примем также, что непроницаемых для поля участков внутри  $V^{in}$  нет.

Проведенная общая постановка позволяет охватить широкий круг практически важных задач электродинамики - как внешних, так и внутренних. Конкретные их формулировки и приложения описаны, к примеру, в [1, 2, 14, 15] и здесь не обсуждаются.

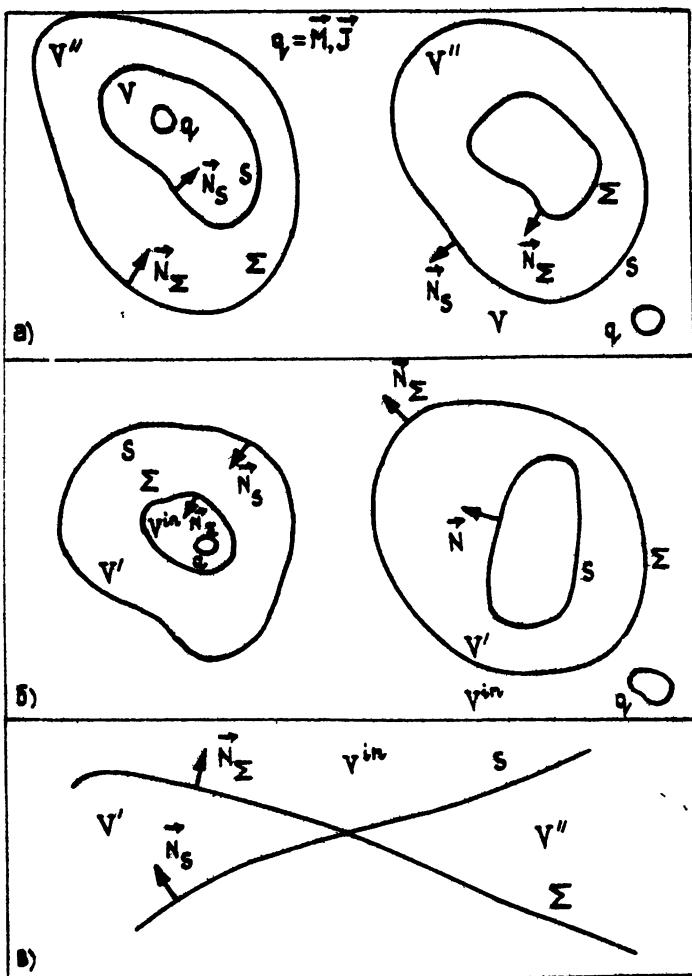


Рис. 1.

Введем в обращение некоторую вспомогательную поверхность  $S$ , которая может иметь общие точки с  $\Sigma$ , например, совпадать с ней на отдельных участках. Считаем, что область  $V$ , ограниченная поверхностью  $S$ , получается из первоначальной области  $V^{in}$  удалением области  $V''$  и (или) присоединением области  $V'$ , не пересекающейся с  $V''$ :  $V = V^{in} - V'' + V'$ . Для определенности будем иметь в виду ситуации, изображенные на рис. 1. Обозначим через  $\vec{R}_s$  и  $\vec{N}_s$  радиус-вектор точки на  $S$  и единичный вектор нормали к  $S$ , направленный внутрь  $V$ . Примем, что между точками  $\Sigma$  и  $S$  существует взаимно однозначное соответствие, так что, в частности,  $\vec{R}_\Sigma \equiv \vec{R}_S(\vec{R}_s)$ .

Вид функции  $\vec{R}_\Sigma(\vec{R}_s)$  мы не уточняем.

Поставим перед собой цель - заменить исходную задачу (1), (2) в области  $V^{in}$  с границей  $\Sigma$  равносильной задачей в области  $V$  с границей  $S$ .

## 2. Преобразование задачи к новой области

Применительно к ситуациям, в которых фигурирует присоединяемая область  $V'$  (рис. 1б, в), будем считать, что выполняются следующие условия: I - величины  $\hat{\mu}(\vec{R})$ ,  $\hat{\epsilon}(\vec{R})$  допускают продолжение на участок  $V'$ , где они являются кусочно-гладкими функциями переменного  $\vec{R}$ ; II - "расширенные" функции  $\hat{\mu}(\vec{R})$ ,  $\hat{\epsilon}(\vec{R})$  непрерывны при переходе через  $\tilde{\Sigma}$  - участок поверхности  $\Sigma$ , который попадает внутрь новой области  $V$ .

В связи с этим удобно полагать, что кусочно-гладкие функции  $\hat{\mu}(\vec{R})$ ,  $\hat{\epsilon}(\vec{R})$ , непрерывные на  $\tilde{\Sigma}$ , изначально заданы в области  $V^{in} + V'$  (или даже в некоторой большей области, вмещающей названную, например, во всем трехмерном пространстве), а в исходных уравнениях (1) фигурирует их сужение на множество  $V^{in}$ . Мы не детализируем способ продолжения упомянутых функций, считая его заданным: в конкретных задачах он определяется естественным образом\*.

III - для облегчения рассуждений потребуем, чтобы сторонник источников поля в отбрасываемой области  $V''$  (если таковая существует) не было:  $\hat{M}(\vec{R}) = \hat{J}(\vec{R}) \equiv 0$  ( $\vec{R} \in V''$ ).

Введем в обращение четыре диадные функции  $\hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}'_s)$  переменного  $\vec{R}$  ( $\alpha, \beta = e, m$ ), которые зависят от параметра  $\vec{R}'_s$  и заданы

\*К примеру, если среда в области  $V^{in}$  однородна, функции  $\hat{\mu}(\vec{R})$ ,  $\hat{\epsilon}(\vec{R})$  в  $V'$  естественно взять постоянными и равными значению соответствующих материальных параметров в области  $V^{in}$ .

в области  $V' + V''$  как решение задачи Коши для системы уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \hat{C}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}'_s) - ik_0 \hat{\mu}(\vec{R}) \cdot \hat{C}_{me}(\vec{R}, \vec{R}'_s) = 0,$$

$$\nabla \times \hat{C}_{me}(\vec{R}, \vec{R}'_s) + ik_0 \hat{\epsilon}(\vec{R}) \cdot \hat{C}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}'_s) = 0;$$

$$\nabla \times \hat{C}_{em}(\vec{R}, \vec{R}'_s) - ik_0 \hat{\mu}(\vec{R}) \cdot \hat{C}_{mm}(\vec{R}, \vec{R}'_s) = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \hat{C}_{mm}(\vec{R}, \vec{R}'_s) + ik_0 \hat{\epsilon}(\vec{R}) \cdot \hat{C}_{em}(\vec{R}, \vec{R}'_s) = 0,$$

$$(\vec{R} \in V' + V'');$$

$$\lim_{\vec{R} \rightarrow \vec{R}_s} \hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}'_s) = \hat{I}_\tau(\vec{R}_s) \delta_{\alpha\beta} \delta_s(\vec{R}_s, \vec{R}'_s). \quad (4)$$

Здесь функции  $\hat{\mu}(\vec{R})$ ,  $\hat{\epsilon}(\vec{R})$  продолжены на область  $V''$  в согласии с первыми двумя требованиями;  $\hat{I}_\tau(\vec{R}_s) = \hat{I} - \hat{N}_s(\vec{R}_s)\hat{N}_s(\vec{R}_s)$ ; символ  $\delta_{\alpha\beta}$  обозначает единицу или нуль при  $\alpha = \beta$  или  $\alpha \neq \beta$  соответственно;  $\delta_s$  – поверхностная дельта-функция, определенная тождеством относительно произвольной пробной функции  $\varphi(\vec{R}_s)$ :

$$\int_S dS' \delta_s(\vec{R}_s, \vec{R}'_s) \varphi(\vec{R}'_s) \equiv \varphi(\vec{R}_s). \quad (5)$$

IV – предположим, что решение задачи Коши (3), (4) существует, и оно единственno. Далее функции  $\hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}_s, \vec{R}'_s)$  считаются известными в явном виде.

Рассмотрим вначале случай, изображенный на рис. 1а. Он характеризуется тем, что область постановки новой задачи  $V$  входит в область постановки исходной задачи  $V^{in}$ . Тогда векторы  $\vec{E}(\vec{R})$ ,  $\vec{H}(\vec{R})$  в любой точке области  $V$  можно восстановить по значению их касательных компонент  $\vec{E}_\tau(\vec{R}_s)$ ,  $\vec{H}_\tau(\vec{R}_s)$  на поверхности  $S$  при помощи следующих формул связи:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \hat{C}_{ee} \cdot \vec{E}_\tau(\vec{R}_s) + \hat{C}_{em} \cdot \vec{H}_\tau(\vec{R}_s), \quad (6)$$

$$\hat{H}(\vec{R}) = \hat{C}_e \cdot \vec{E}_\tau(\vec{R}_s) + \hat{C}_m \cdot \vec{H}_\tau(\vec{R}_s).$$

Они легко доказываются с учетом определения операторов связи  $\hat{C}_{\alpha\beta}$

$$\hat{C}_{\alpha\beta} \cdot \vec{F}_\tau(\vec{R}_s) = \int_s dS' \hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}'_s) \cdot \vec{F}_\tau(\vec{R}'_s) \quad (7)$$

и единственности решения задачи Коши (3), (4). Здесь  $\vec{F}_\tau(\vec{R}_s)$  – произвольная пробная вектор-функция на поверхности  $S$ , касательная к ней в каждой точке. Устремив в (6) точку наблюдения  $\vec{R}$  на поверхности  $\Sigma$ , подставим результирующие выражения для предельных (изнутри  $V^{in}$ ) значений векторов поля на  $\Sigma$  в условие (2). В итоге получаем следующее соотношение для исходных данных на  $S$ :

$$\hat{B}_e \cdot \vec{E}_\tau(\vec{R}_s) + \hat{B}_m \cdot \vec{H}_\tau(\vec{R}_s) = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\hat{B}_\alpha = \int_s dS' \hat{B}_\alpha(\vec{R}_s, \vec{R}'_s)$  – линейные граничные операторы, характеризуемые диадными ядрами  $\hat{B}_\alpha(\vec{R}_s, \vec{R}'_s)$  вида

$$\begin{aligned} \hat{B}_\alpha(\vec{R}_s, \vec{R}'_s) &= \hat{Q}(\vec{R}_\Sigma, \vec{R}_s) \cdot [\hat{C}_{e\alpha}(\vec{R}_\Sigma, \vec{R}'_s) - \\ &- \hat{\zeta}(\vec{R}_\Sigma) \cdot \vec{N}_\Sigma(\vec{R}_\Sigma) \times \hat{C}_{m\alpha}(\vec{R}_\Sigma, \vec{R}'_s)] \quad (\alpha, \beta = e, m); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\hat{Q}(\vec{R}_\Sigma, \vec{R}_s) = \vec{N}_\Sigma(\vec{R}_\Sigma) \cdot \vec{N}_s(\vec{R}_s) \hat{I}_\tau - \vec{N}_\Sigma(\vec{R}_\Sigma) \vec{N}_s(\vec{R}_s). \quad (10)$$

В этих формулах подразумевается, что  $\vec{R}_\Sigma = \vec{R}_\Sigma(\vec{R}_s)$ . Диадная функция  $\hat{Q}(\vec{R}_\Sigma, \vec{R}_s)$ , как нетрудно проверить, обладает свойством  $\vec{N}_s(\vec{R}_s) \cdot \hat{Q}(\vec{R}_\Sigma, \vec{R}_s) = 0$ , благодаря которому область значений операторов  $\hat{B}_\alpha$  состоит из вектор-функций переменного  $\vec{R}_s$ , касательных к поверхности  $S$  в каждой точке.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда область постановки  $V$  новой задачи содержит участок  $V'$ , не входивший в состав первоначальной области  $V^{in}$  (см. рис. 1б, в). Основное предположение в данном случае

заключается в том, что ( $\bar{V}$ ) решение  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  исходной задачи продолжается непрерывным образом через участок  $\tilde{\Sigma}$  границы  $\Sigma$  в область  $V'$ , где оно подчиняется однородным (с нулевой правой частью) уравнениям Максвелла (1). Напомним, что функции  $\hat{U}(\vec{R})$ ,  $\hat{E}(\vec{R})$  в области  $V'$  считаются заданными. Их вид влияет, разумеется, на возможность реализации сделанного допущения, однако в данной работе это обстоятельство не обсуждается. Сохраним за продолженным полем прежнее обозначение  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ . Тогда внутри области  $V'$  сохраняют свою силу формулы связи (6), а изложенные вслед за ними рассуждения приводят к соотношению (8) и выражениям (9), (10).

Уравнения Максвелла (1) в области  $V$  вместе с уравнением (8) на поверхности  $S$  и условиями излучения в бесконечности образуют замкнутую задачу для векторов поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ . В пересечении областей  $V$  и  $V^{in}$  ее решение совпадает с решением исходной задачи (1), (3); в остальных точках множества  $V^{in}$  последнее восстанавливается по формулам связи (6). В этом смысле обе задачи можно считать равносильными. Состоиние (8) играет роль краевого условия для касательных компонент поля на границе  $S$  новой области  $V$ . Его можно трактовать как результат переноса первоначального условия (2) на поверхность  $S$ . В отличие от (2) условие (8) является нелокальным, так как входящие в него полевые величины подвергаются действию операторов  $\hat{B}_{em}$ . Вид дифференциальных уравнений, описывающих поле в пространстве, для обеих задач одинаков.

Нелокальное условие (8) удается преобразовать к каноническому-импедансному - виду

$$\vec{E}_T(\vec{R}_S) - \hat{L} \cdot \vec{N}_S \times \vec{H}_T(\vec{R}_S) = 0, \quad (11)$$

если привлечь оператор  $\hat{L}$  входного импеданса поверхности  $S$  [14]. Его можно найти из решения операторного уравнения, следующего из (8), (11):

$$\hat{B}_e \cdot \hat{L} - \hat{B}_m \times \vec{N}_S = 0. \quad (12)$$

Оператор  $\hat{B}_m \times \vec{N}_S$  определен тождеством  $\hat{B}_m \times \vec{N}_S \cdot \vec{F}_T(\vec{R}_S) = \hat{B}_m \cdot \vec{N}_S \times \vec{F}_T(\vec{R}_S)$ .

Обсудим условия реализуемости методики переноса граничных условий. Требования (I) - (III) относятся к внешнему виду исходной задачи и для большого класса задач заведомо выполняются. Справедливость допущения (IV) на физическом уровне строгости

достаточно очевидна. Математически строгое обоснование этого факта требует доказательства существования и единственности начальной (а не краевой, как обычно [15]) задачи для уравнения Максвелла относительно комплексных амплитуд.

Принципиальное ограничение возникает в связи с требованием (v). Оно выдвигается только в случае, когда  $V' \neq 0$ , и заключается в том, чтобы источники продолженного поля в прибавляемой области  $V'$  отсутствовали. Его можно трактовать как гипотезу Рэлея, модифицированную на случай неоднородных сред. В классической формулировке, относящейся к задаче рассеяния волн на неровностях границы однородной среды, эта гипотеза предполагает возможность представления поля в любой точке среды в виде суперпозиции уходящих волн. Как известно, она выполняется не всегда [16]. Таким образом, если область постановки новой задачи содержит участок  $V'$ , отсутствовавший в составе первоначальной области  $V'^{in}$ , для переноса граничного условия необходимо выполнение в пределах добавляемого участка  $V'$  (модифицированной) гипотезы Рэлея. В случае, когда новая область  $V$  лежит целиком внутри  $V'^{in}$  (т.е. когда  $V' = 0$ ), перенос граничного условия не встречает принципиальных затруднений.

Для практической реализации методики переноса нужно располагать операторами связи  $\hat{C}_{\alpha\beta}$  или диадными функциями  $\hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}_s)$ . Рассмотрим уравнения (3) в любой области, которая содержит  $V' + V''$  и входит, разумеется, в область определения функций  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\epsilon}$ . Их решение, удовлетворяющее условию (4) на поверхности  $S$ , совпадает в пределах области  $V' + V''$  с искомыми функциями. Отмеченный факт позволяет расширить область задания уравнений (3). С учетом этого ясно, что функции  $\hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}_s)$  можно найти в явном виде во всех случаях, когда уравнения (3) в соответствующей области допускают разделение переменных, и форма поверхности  $S$  не препятствует этому разделению. Перечень таких ситуаций, включающий широкий класс функций  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\epsilon}$  и поверхностей  $S$ , в электродинамике хорошо известен [17]. Для них (с целью отыскания диадных функций Грина краевых задач) развиты стандартные математические средства [15], которые полностью применимы и для построения величин  $\hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}_s)$ . В случае, когда  $S$  - плоскость, а среда - плоскослоистая и одноосная, операторы связи найдены в [18]. Для сферической поверхности  $S$ , заданной в сферических координатах  $R, \theta, \phi$  уравнением  $R = R' (= \text{const} > 0)$  однородной изотропной среды  $\hat{\mu} = \mu \hat{I}$ ,  $\hat{\epsilon} = \epsilon \hat{I}$  ( $\mu, \epsilon = \text{const}$ ), операторы связи приведены в Приложении 1. В задаче дифракции волн на трехмерном непроницаемом теле конечных размеров с

его помощью можно перенести граничное условие с поверхности тела на сферу, объемлющую это тело или же целиком лежащую внутри него. Один из возможных подходов к решению возникающей задачи с нелокальным условием изложен в последующем разделе.

### 3. Метод граничного интегрального уравнения и теория возмущений

Разобьем каждый из граничных операторов  $\hat{B}_\alpha$  на главную ("невозмущенную") часть  $\hat{A}_\alpha$  и оператор возмущения  $\hat{V}_\alpha$ :  $\hat{B}_\alpha = \hat{A}_\alpha - \hat{V}_\alpha$ . Тогда нелокальное условие (8) запишется следующим образом:

$$\hat{A}_e \cdot \vec{E}_\tau(\vec{R}_s) + \hat{A}_m \cdot \vec{H}_\tau(\vec{R}_s) = \hat{V}_e \cdot \vec{E}_\tau(\vec{R}_s) + \hat{V}_m \cdot \vec{H}_\tau(\vec{R}_s). \quad (13)$$

Разбиение должно быть таким, чтобы краевые задачи для первичного поля  $\vec{E}^{(0)}(\vec{R})$ ,  $\vec{H}^{(0)}(\vec{R})$  и диадных функций Грина второго рода  $\hat{G}_{em}(\vec{R}, \vec{R}_s')$  поддавались решению в явном виде. Первичное поле задано как решение неоднородных уравнений Максвелла (1) в области  $V$ , которое удовлетворяет однородному условию на поверхности  $S$ :

$$\hat{A}_e \cdot \vec{E}_\tau^{(0)}(\vec{R}_s) + \hat{A}_m \cdot \vec{H}_\tau^{(0)}(\vec{R}_s) = 0. \quad (14)$$

Диадные функции  $\hat{G}_\alpha(\vec{R}, \vec{R}_s')$  подчиняются однородным уравнениям в области  $V$ :

$$\nabla \times \hat{G}_e(\vec{R}, \vec{R}_s') - ik_0 \hat{\mu}(\vec{R}) \cdot \hat{G}_m(\vec{R}, \vec{R}_s') = 0, \quad (15)$$

$$\nabla \times \hat{G}_m(\vec{R}, \vec{R}_s') + ik_0 \hat{\epsilon}(\vec{R}) \cdot \hat{G}_e(\vec{R}, \vec{R}_s') = 0$$

и неоднородному условию на  $S$

$$\hat{A}_e \cdot \hat{G}_e^{(S)}(\vec{R}_s, \vec{R}_s') + \hat{A}_m \cdot \hat{G}_m^{(S)}(\vec{R}_s, \vec{R}_s') = \hat{I}_\tau(\vec{R}_s) \delta_s(\vec{R}_s, \vec{R}_s'). \quad (16)$$

Здесь  $\hat{G}_\alpha^{(S)}(\vec{R}_s, \vec{R}_s')$  – предельное (изнутри  $V$ ) значение функции  $\hat{G}_\alpha(\vec{R}_s, \vec{R}_s')$  при  $\vec{R} \rightarrow \vec{R}_s$ . Кроме того, в бесконечности на функции  $\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{(0)}, \hat{G}_\alpha$  налагаются условия излучения. Отметим, что при

выборе операторов  $\hat{A}_e$  в виде  $\hat{A}_e = \hat{I}_\tau$ ,  $\hat{A}_m = 0$  либо  $\hat{A}_e = 0$ ,  $\hat{A}_m = \hat{I}_\tau$  функции  $\hat{G}_\alpha$  выражаются элементарным образом через диадные функции Грина уравнений Максвелла для поверхностных источников магнитного либо электрического типов соответственно. Применительно к широкому классу сред и координатных поверхностей  $S$  упомянутые функции Грина построены в замкнутой форме, к примеру, в [15]. Для тех же ситуаций в явном виде находится и первичное поле.

Постулируем для искомого решения задачи (1), (12) следующее интегральное представление:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \vec{E}^{(0)}(\vec{R}) + \hat{G}_e \cdot \vec{K}(\vec{R}_S). \quad (17)$$

$$\vec{H}(\vec{R}) = \vec{H}^{(0)}(\vec{R}) + \hat{G}_m \cdot \vec{K}(\vec{R}_S).$$

В этих формулах  $\hat{G}_\alpha$  - оператор, определение которого получается из (7) формальной заменой символа  $\hat{c}_{\alpha\beta}$  на  $\hat{G}_\alpha$ ,  $\vec{K}$  - неизвестная вектор-функция на поверхности  $S$ , касательная к ней в каждой точке. Ее смысл проясняет равенство  $\vec{K} = \hat{A}_e \cdot \vec{E}_\tau + \hat{A}_m \cdot \vec{H}_\tau$ , которое связывает эту функцию с касательными компонентами искомого поля на  $S$ . При достаточно произвольной функции  $\vec{K}$  представление (17) удовлетворяет всем условиям задачи для величины  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , кроме граничного условия (12). Последнее налагает требование

$$\vec{K}(\vec{R}_S) - \vec{Q}(\vec{R}_S) = \hat{W} \cdot \vec{K}(\vec{R}_S) \equiv \int_S dS' \hat{W}(\vec{R}_S, \vec{R}'_S) \cdot \vec{K}(\vec{R}'_S). \quad (18)$$

Здесь  $\vec{Q}(\vec{R}_S)$  - известная функция,  $\hat{W}$  - заданный оператор, действующий по  $\vec{R}_S$ ,  $\hat{W}(\vec{R}_S, \vec{R}'_S)$  - его ядро:

$$\vec{Q}(\vec{R}_S) = \hat{V}_e \cdot \vec{E}_\tau(\vec{R}_S) + \hat{V}_m \cdot \vec{H}_\tau(\vec{R}_S), \quad (19)$$

$$\hat{W} = \hat{V}_e \cdot \hat{G}_e^{(S)} + \hat{V}_m \cdot \hat{G}_m^{(S)},$$

$\hat{W}(\vec{R}_S, \vec{R}'_S) = \hat{W}\delta_S(\vec{R}_S, \vec{R}'_S)$ . Оператор  $\hat{G}_\alpha^{(S)}$  определен тождеством

$$\hat{G}_\alpha^{(S)} \cdot \vec{F}_\tau(\vec{R}_S) \equiv \int_S dS' \hat{G}_\alpha^{(S)}(\vec{R}_S, \vec{R}'_S) \cdot \vec{F}_\tau(\vec{R}'_S). \quad (20)$$

Таким образом, мы свели трехмерную задачу (1), (8) к двумерному интегральному уравнению на поверхности  $S$ . Его решение можно найти с помощью проекционных методов [19].

Мы сосредоточим внимание на практически важном случае, когда уравнение (18) допускает аналитическое решение. Он характеризуется тем, что операторы возмущения  $\hat{V}_{\alpha}$  являются малыми и разлагаются в ряды вида

$$\hat{V}_{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{V}_{\alpha}^{(n)} \quad (\alpha = e, m). \quad (21)$$

Здесь  $\hat{V}_{\alpha}^{(n)}$  - слагаемое (оператор)  $n$ -го порядка малости по некоторому малому параметру, который пока не конкретизируем. Считаем, что в "невозмущенную" задачу он не входит и, в частности, операторы  $\hat{A}_{\alpha}$  и функции  $\vec{E}^{(0)}$ ,  $\vec{H}^{(0)}$ ,  $\hat{G}_{\alpha}$  от него не зависят. Разложим искомую величину по степеням малого параметра  $\hat{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}^{(n)}$  и подставим это разложение в уравнение (18). Приравняв величины одинакового порядка малости, получаем для  $\hat{K}^{(n)}$  прямые формулы рекуррентного типа:

$$\hat{K}^{(p)}(\vec{R}_S) = \hat{V}_e^{(p)} \cdot \vec{E}_{\tau}^{(0)}(\vec{R}_S) + \hat{V}_m^{(p)} \cdot \vec{H}_{\tau}^{(0)}(\vec{R}_S) + . \quad (22)$$

$$+ \sum_{q=1}^{p-1} \hat{W}^{(q)} \cdot \hat{K}^{(p-q)}(\vec{R}_S).$$

Операторы  $\hat{W}^{(q)}$  получаются из выражения (19) для  $\hat{W}$  заменой  $\hat{V}_{\alpha}$  на  $\hat{V}_{\alpha}^{(q)}$ . С учетом этого результата поле в объеме  $V$  дается следующими разложениями:

$$\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}^{(n)}, \quad \vec{H} = \vec{H}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{H}^{(n)}, \quad (23)$$

где  $\vec{E}^{(n)}$ ,  $\vec{H}^{(n)}$  - величины  $n$ -го порядка малости:

$$\vec{E}^{(n)} = \hat{G}_e \cdot \hat{K}^{(n)}, \quad \vec{H}^{(n)} = \hat{G}_m \cdot \hat{K}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (24)$$

Приведем в заключение для ситуации, характеризуемой разложением (21), решение уравнения (12) относительно оператора импеданса:

$$\hat{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{L}^{(n)}; \quad (25)$$

$$\hat{L}^{(0)} = \hat{A}_e^{-1} \cdot \hat{A}_m \cdot \hat{N}_s \times \hat{I}_\tau, \quad (26)$$

$$\hat{L}^{(p)} = \hat{A}_e^{-1} \cdot \left[ \sum_{q=1}^p \hat{V}_e^{(q)} \cdot \hat{L}^{(p-q)} - \hat{V}_m \cdot \hat{N}_s \times \hat{I}_\tau \right] \quad (p = 1, 2, \dots).$$

#### 4. Случай слaboшероховатой границы

Изложенная выше схема теории возмущений пригодна, в частности, для классической модели слaboшероховатой поверхности [1]. Построим на развитой основе конкретные выражения, которые нужны для описания рассеяния на такой поверхности применительно к границе произвольной невозмущенной формы в неоднородной среде.

Считаем, что невозмущенная (подстилающая) поверхность  $S$  параметризована системой криволинейных (и неортогональных в общем случае) координат  $u, v$ :  $\vec{R}_S = \vec{R}_S(u, v)$ . Примем, что векторы  $\vec{r}_u = \partial_u \vec{R}_S$ ,  $\vec{r}_v = \partial_v \vec{R}_S$  и  $\vec{N}_S$  образуют правую тройку. Отнесем все трехмерное пространство к системе криволинейных координат  $u, v, \nu$  по формулам  $\vec{R} = \vec{R}(u, v, \nu) = \vec{R}_S(u, v) + \nu \vec{n}_S(u, v)$ . Для точек  $S$  имеем, очевидно,  $\nu = 0$ . Неровную поверхность  $\Sigma$  зададим уравнением  $\nu = \nu_\Sigma(\vec{R}_S)$ . Функция  $\nu_\Sigma$  характеризует отклонения неровной границы от подстилающей. Условимся для простоты, что диадные функции  $\zeta, \hat{\mu}, \hat{\epsilon}$  сводятся соответственно к числовой постоянной  $\zeta$  и скалярным функциям  $\mu(\vec{R})$ ,  $\epsilon(\vec{R})$ .

Для слaboшероховатой поверхности функция  $\nu_\Sigma$  и ее первые производные по  $u, v$ , которые определяют вектор наклона  $\vec{\delta}$  и вектор  $\vec{\delta}$  (см. Приложение 2), считаются достаточно малыми величинами. Вычислим по стандартной схеме [20] вектор нормали  $\vec{M}_\Sigma = \partial_u \vec{R}_\Sigma \times \partial_v \vec{R}_\Sigma$  к неровной поверхности, затем - единичный вектор  $\vec{N}_\Sigma = \vec{M}_\Sigma / |\vec{M}_\Sigma|$  и разложим последний по степеням функции  $\nu_\Sigma$  и ее первых производных. Для сходимости этого разложения достаточна малость величин  $\nu_\Sigma^H$ ,  $|\vec{\delta}|$  и  $\nu_\Sigma^2 K$ ,  $\nu_\Sigma |\vec{\delta}|$  в сравнении с единицей ( $K$  и  $H$  - полная и средняя кривизна поверхности  $S$  [20]).

Далее предположим, что каждая из величин  $\hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}'_S)$  ( $\alpha, \beta = e, m$ )

допускает разложение в степенной ряд по  $\nu$  с центром  $\nu = 0$ . Для справедливости этого допущения необходимо, в частности, чтобы функции  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{e}$  были регулярными в области  $\nu' + \nu''$  между неровной поверхностью  $\Sigma$  и подстилающей  $S$ , а также на поверхности  $S$ . Положим в этом разложении  $\nu = \nu_\Sigma(\vec{R}_S)$ ; в итоге получим разложение величины  $\hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}_\Sigma, \vec{R}_S')$  по степеням  $\nu_\Sigma(\vec{R}_S)$ . Коэффициенты  $a_\nu^m \hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}_S')$  при  $\nu=0$  упомянутых разложений находим в явном виде из уравнений (3), (4) применением операции  $a_\nu^{n-1}$  к соотношению (3).

Положим в нелокальном условии (13)  $\hat{A}_e = \hat{I}_\tau$ ,  $\hat{A}_m = -\zeta \hat{N}_S \times \hat{I}_\tau$ . Подставим в выражения для функций  $\hat{B}_\alpha(\vec{R}_S, \vec{R}_S')$  (9), определяющих в конечном итоге операторы  $\hat{V}_\alpha = \hat{A}_\alpha - \hat{B}_\alpha$ , построенные выше разложения для  $\hat{C}_{\alpha\beta}(\vec{R}_\Sigma, \vec{R}_S')$  и  $\hat{N}_\Sigma(\vec{R}_S)$ . Считая параметры  $\nu_\Sigma$ ,  $\hat{\tau}$  и  $\delta$  величинами одного порядка малости, приходим в результате к представлению операторов в требуемом виде (21).

Важное отличие нашей схемы рассуждений от классического подхода [1, 8, 9] заключается в том, что мы разлагаем по малому параметру не полевые величины, а действующие на них операторы  $\hat{V}_\alpha$ ,  $\hat{L}$ . Обрыв этих разложений на конечном числе слагаемых требует малости отбрасываемых операторных членов, но не накладывает прямых ограничений на величину искажений поля под действием шероховатостей. Отметим также, что параметр  $\zeta$  малым здесь не считается.

Приведем результирующие формулы для низших (включая квадратичные) членов разложения (25) оператора входного импеданса  $\hat{L}$ :

$$\hat{L}^{(0)} = \zeta \hat{I}_\tau, \quad \hat{L}^{(1)} = \hat{h}_e + \zeta \hat{h}_\mu, \quad \hat{L}^{(2)} = \hat{g} + \hat{h}_\mu \cdot (\hat{h}_e + \zeta \hat{h}_\mu). \quad (27)$$

Диадные дифференциальные операторы  $\hat{h}_e$ ,  $\hat{h}_\mu$  и  $\hat{g}$ , действующие по  $\vec{R}_S$ , определены в Приложении 2. Таким образом, наличие малых по высоте и пологих неровностей можно учесть, если приписать подстилающей (ровной) поверхности эффективный импеданс  $\hat{L}$ , отличающийся от реального ( $\zeta$ ) на операторную добавку  $\delta\hat{L} = \hat{L}^{(1)} + \hat{L}^{(2)}$ . Импедансное граничное условие (11) для этого случая совместно с выражениями (27) выступает обобщением классических формул Щукина - Леонтьевича, относящихся к ровной поверхности, плоской [10] или криволинейной [11]. Располагая выражениями для операторов  $\hat{L}^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), мы получаем возможность рассчитать векторы поля с учетом членов  $N$ -го порядка малости. Для этого алгоритм (22) - (24) следует приме-

нить к нелокальному условию, полученному заменой в правой части (13)  $\vec{E}_\tau$  на  $\hat{L} \cdot \vec{N}_S \times \vec{H}_\tau$ . Результирующее условие формально следует из (13), если там положить  $\hat{V}_e = 0$ ; для перенормированного оператора  $\hat{V}$  сохраняет свою силу представление (21) с  $\hat{V}_m^{(n)} = \hat{L}^{(n)} \cdot \vec{N}_S \times \hat{I}_\tau$ . Проделанные автором выкладки доказывают, что в общем случае  $n$ -й член разложения (24) совпадает с таковым, найденным по классической схеме [1, 8, 9]. Для доказательства известный вариант этой схемы нужно пополнить новым звеном: выразить производные  $\partial_\nu^n \hat{A}(\vec{R})|_{\nu=0}$ , возникающие при переносе вектора  $\hat{A}(\vec{R}_\Sigma)$  ( $\hat{A} = \vec{E}, \vec{H}$ ), через производные от касательных компонент поля на  $S$  по переменным  $u, v$ . С этой целью следует применить оператор  $\partial_\nu^{n-1}$  к уравнениям Максвелла (1) и положить затем  $\nu = 0$ .

Рассмотрим в заключение статистическую модель шероховатостей, для которой  $\nu_\Sigma$  - случайная функция, а  $\Sigma$  - случайная поверхность [1]. Известно [12, 13], что векторы среднего поля  $\langle \vec{E} \rangle, \langle \vec{H} \rangle$  подчиняются на подстилающей поверхности нелокальному условию

$$\langle \vec{E}_\tau(\vec{R}_S) \rangle - \hat{L}_3 \cdot \vec{N}_S(\vec{R}_S) \times \langle \vec{H}_\tau(\vec{R}_S) \rangle = 0 \quad (28)$$

с детерминированным оператором эквивалентного импеданса  $\hat{L}_3$ . Конкретизируя формулы (11) - (14) работы [18], находим  $\hat{L}_3$  в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\hat{L}_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{L}_3^{(n)}; \quad (29)$$

$$\hat{L}_3^{(0)} = \zeta \hat{I}_\tau, \quad \hat{L}_3^{(1)} = \langle \hat{L}^{(1)} \rangle, \quad (30)$$

$$\hat{L}_3^{(n)} = \langle \hat{L}^{(n)} + \sum_{p=1}^{n-1} \hat{X}^{(p)} \cdot \vec{N}_S \times \hat{G}_m^{(S)} \cdot \hat{L}^{(n-p)} \rangle, \quad n = 2, 3, \dots;$$

$$\hat{X}^{(1)} = \hat{L}^{(1)}, \quad \hat{X}^{(p)} = \hat{L}^{(p)} + \sum_{q=1}^{p-1} \hat{X}^{(q)} \cdot \vec{N}_S \times \hat{G}_m^{(S)} \cdot \hat{L}^{(p-q)},$$

$$p = 2, 3, \dots$$

Здесь  $L_3^{(n)}$  - величина  $n$ -го порядка малости,  $\tilde{f} = f - \langle f \rangle$ . Этот

результат обобщает известные соотношения [12, 13], полученные в низшем приближении для плоской в среднем границы и однородной прилегающей среде.

Автор признателен анонимному рецензенту совместной с О. А. Третьяковым работы (Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 9. С. 1091) за совет обратиться к работам [3, 4], а также О. А. Третьякову за многочисленные полезные обсуждения.

### Приложение 1

Будем трактовать величины  $\hat{C}_{\alpha\beta}$  как оператор-функции, которые зависят от параметров  $R, R'$  и действуют по переменной  $\Omega = (\theta, \phi)$ . Методика скаляризации ([15], гл. 2, § 6, 7) позволяет найти решение одноточечной задачи для  $\hat{C}_{\alpha\beta}(R, R')$  в виде

$$\hat{C}_{ee} = \hat{C}_{mm} = \nabla \times \nabla \times \vec{R}_0 \frac{R' G}{\Delta_\Omega} \nabla_\Omega + \nabla \times \vec{R}_0 \frac{R' \Gamma}{\Delta_\Omega} \nabla_\Omega \times \vec{R}_0,$$

$$\hat{C}_{em}(R, R') = \nabla \times \vec{R}_0 \frac{ik_0 \mu R' G}{\Delta_\Omega} \nabla_\Omega - \nabla \times \nabla \times \vec{R}_0 \frac{R' \Gamma}{ik_0 \Delta_\Omega \varepsilon} \nabla_\Omega \times \vec{R}_0,$$

$$\hat{C}_{em}(R, R') \leftrightarrow -\hat{C}_{me}(R, R') \quad (\varepsilon \leftrightarrow \mu),$$

$$\sin\theta \nabla_\Omega = \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\theta}_0 \sin\theta + \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{\phi}_0.$$

Здесь  $\vec{R}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\phi}_0$  - орты сферической системы координат,  $\Gamma(R, R') = -\partial G(R, R')/\partial R'$  и  $G(R, R')$  - скалярные оператор-функции, действующие по  $\Omega$ . Применительно к функциональному базису  $\{Y_{lm}(\Omega)\}$  из сферических гармоник [15] действие операторов  $G(R, R')$  и  $1/\Delta_\Omega$  на элементах с  $L \neq 0$  характеризуется выражениями

$$kG(R, R') Y_{lm}(\Omega) = Y_{lm}(\Omega) [n_l(kR) j_l(kR') - n_l(kR') j_l(kR)],$$

$$(1/\Delta_\Omega) Y_{lm}(\Omega) = -Y_{lm}(\Omega)/l(l+1),$$

а на элементе  $Y_{00}(\Omega) = (4\pi)^{-1/2}$  эти операторы не определены. Мы обозначили  $k = k_0 \sqrt{\epsilon_s}$ ,  $n_1$  и  $j_1$  - сферические функции Неймана и Бесселя из [15].

## Приложение 2

$$ik_0 \hat{h}_\varepsilon = \nu_\Sigma ik_0 \zeta (\hat{s} - 4H\hat{t}_\tau) - (\nu_\Sigma \mu_s k_0^2 \hat{t}_\tau + \nabla_s \nu_\Sigma \epsilon_s^{-1} \nabla_s),$$

$$ik_0 \hat{h}_\mu = \nu_\Sigma ik_0 (4H\hat{t}_\tau + \hat{t}) + \zeta (\nu_\Sigma \epsilon_s k_0^2 \hat{t}_\tau + \vec{N}_s \times \nabla_s \nu_\Sigma \mu_s^{-1} \vec{N}_s \times \nabla_s),$$

$$2\hat{g} = \zeta (2\vec{\gamma}\vec{\gamma} - \vec{\gamma}^2 \hat{t}_\tau) + \nu_\Sigma^2 \zeta [\hat{s} \cdot \hat{s} - \hat{t} \cdot \hat{t} - 6H(\hat{s} + \hat{t})] +$$

$$+ \zeta (\nabla_s \nu_\Sigma^2 \epsilon_s^{-1} \nabla_s \epsilon_s - \vec{N}_s \times \nabla_s \nu_\Sigma^2 \mu_s^{-1} \vec{N}_s \times \nabla_s \mu_s) +$$

$$+ \zeta^2 \hat{d}_\mu - \hat{d}_\varepsilon - \nu_\Sigma^2 \epsilon_s \zeta (\mu_s k_0^2 \hat{t}_\tau + \nabla_s \epsilon_s^{-1} \nabla_s) +$$

$$+ \nu_\Sigma^2 \zeta \mu_s (\epsilon_s k_0^2 \hat{t}_\tau + \vec{N}_s \times \nabla_s \mu_s^{-1} \vec{N}_s \times \nabla_s).$$

Диадные дифференциальные операторы  $\hat{d}_\varepsilon$ ,  $\hat{d}_\mu$  имеют вид:

$$ik_0 \hat{d}_\varepsilon = \nabla_s \nu_\Sigma^2 \epsilon_s^{-1} (\nabla_s \cdot \hat{s} + \vec{D}) - \nu_\Sigma^{4H} (\nu_\Sigma \mu_s k_0^2 \hat{t}_\tau + \nabla_s \nu_\Sigma \epsilon_s^{-1} \nabla_s) -$$

$$- \nu_\Sigma^2 (\hat{t} + 4H\hat{t}_\tau) \cdot (\mu_s k_0^2 \hat{t}_\tau + \nabla_s \epsilon_s^{-1} \nabla_s) + \nu_\Sigma^2 k_0^2 (\dot{\mu}_s + \hat{s} \mu_s) +$$

$$+ (2\nu_\Sigma^2 H \nabla_s + \vec{D} \nu_\Sigma^2) \epsilon_s^{-1} \nabla_s + \nabla_s \nu_\Sigma^2 \epsilon_s^{-1} (2H - \dot{\epsilon}_s / \epsilon_s) \nabla_s;$$

$$\hat{d}_\varepsilon \rightarrow \hat{d}_\mu \quad (\varepsilon \leftrightarrow \mu, \quad \hat{t} \rightarrow -\hat{s}, \quad \nabla_s \rightarrow \vec{N}_s \times \nabla_s, \quad \vec{D} \rightarrow \vec{N}_s \times \vec{D}).$$

Далее  $\hat{s}$  и  $\hat{t}$  - диадные, а  $\vec{\gamma}$ ,  $\vec{\delta}$  - векторные функции переменного  $\vec{R}_s$ ;  $\epsilon_s^{-1} = 1/\epsilon_s$ ,  $\epsilon_s = \epsilon(R_s)$ ,  $\dot{\epsilon}_s = \partial_\nu \epsilon(\vec{R})|_{\nu=0}$ ; смысл обозначений с участием символа  $\mu$  аналогичен,  $\nabla_s$  - поверхностный оператор "набла",

$\tilde{D}$  - инвариантный векторный дифференциальный оператор:

$$\hat{\mathbf{t}} = \tilde{\nabla}_S \tilde{\mathbf{N}}_S, \quad \hat{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{N}}_S \times \hat{\mathbf{t}} \times \tilde{\mathbf{N}}_S, \quad \hat{\mathbf{r}} = \tilde{\nabla}_S \tilde{\nu}_{\Sigma}, \quad \hat{\delta} = \tilde{D} \tilde{\nu}_{\Sigma},$$

$$\nabla_S = (1/\Delta) [(\mathbf{E}\tilde{r}_v - \mathbf{F}\tilde{r}_u)\partial_v + (\mathbf{G}\tilde{r}_u - \mathbf{F}\tilde{r}_v)\partial_u],$$

$$\tilde{D} = (1/\Delta) [(\mathbf{M}\tilde{r}_u - \mathbf{L}\tilde{r}_v)\partial_v + (\mathbf{M}\tilde{r}_v - \mathbf{N}\tilde{r}_u)\partial_u],$$

$\Delta = GE - F^2$ ,  $G, E, F$  и  $L, M, N$  - коэффициенты соответственно первой и второй основной квадратичной формы поверхности  $S$  [20].

Добавим для большей ясности, что действие операторов  $\nabla_S$  и  $\tilde{D}$  в определении величин  $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\delta}$  распространяется только на функции  $\tilde{\mathbf{N}}_S$  и  $\tilde{\nu}_{\Sigma}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. -М.: Наука, 1972.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. -М.: Мир, 1987.
3. Furutsu K. //J. Opt. Soc. Am. A. 1985. V. 2. N 12. P. 2244.
4. Furutsu K. //J. Opt. Soc. Am. A. 1985. V. 2. N 12. P. 2260.
5. Свешников А. Г. //ЖВМФ. 1963. Т. 3. N 2. С. 314.
6. Орлов В. П. //Радиотехника и электроника. 1964, Т. 9. N 3. С. 553.
7. Исерс А. Б., Пузенко А. А., Фукс И. М. //ДАН УССР. Сер. А. 1989. N 9. С. 62.
8. Рэлей Дж. В. Теория звука. -М.: Гостехиздат, 1955. Т. 2.
9. Андронов А. А. Собрание трудов. -М.: Изд. АН СССР, 1956.
10. Щукин А. Н. Распространение радиоволн. -М.: Связьиздат, 1940.
11. Леонтович М. А. //Исследования по распространению радиоволн. - М.-Л.: Изд. АН СССР. Вып. 2. С. 5.
12. Фейнберг Е. Л. //Исследования по распространению радиоволн. - М.-Л.: Изд. АН СССР. Вып. 2. С. 97.
13. Басс Ф. Г. //Изв. вузов. Радиофизика. 1960. Т. 3. N 1. С. 72.
14. Курушин Е. П., Нефедов Е. И. Электродинамика анизотропных волноведущих структур. -М.: Наука, 1983.
15. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. -М.: Мир, 1978.
16. Petit R., Cadilhac M. //C. R. Acad. Sci. Ser. B. 1966. V. 262. P. 468.

17. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. -М.: ИЛ, 1960.
18. Жук Н.П. //Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. № 11.
19. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М.: Наука, 1980.
20. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. -М.: Наука, 1976.

Харьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
18 сентября 1990 г.,  
после переработки  
2 марта 1992 г.

TRANSITION OF BOUNDARY CONDITIONS METHOD IN THE DIFFRACTION  
PROBLEMS FOR ELECTROMAGNETIC WAVES ON UNEVEN IMPEDANCE BOUNDARY

N. P. Zhuck

Strict method of replacing boundary problem in the domain with uneven boundary by equivalent problem in new domain with new boundary is developed. The appearing non-local problem is reduced to a boundary integral equation. The latter is solved via perturbation method, characteristic height of roughness being a small parameter. For the case of arbitrary boundary in the inhomogeneous medium corrections to roughness, deterministic or random, are obtained.

УДК 621.371

**ПОВЕДЕНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ КСВ ПРИ РАССЕЯНИИ  
НА ОДНОМЕРНЫХ СИЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ**

В. Ю. Андреев

Показано, что наиболее удобной характеристикой для теоретического изучения рассеяния на одномерных сильных случайных неоднородностях является коэффициент стоячих волн (КСВ). Аналитически и численно для различных типов неоднородностей изучено поведение среднего значения КСВ при изменении характерных параметров задачи. Сделаны выводы о практическом использовании полученных результатов и оценена их реальная область применимости.

При теоретическом изучении рассеяния волн на случайных неоднородностях диэлектрической проницаемости, когда параметры задачи (ширина апертуры, длина волны  $\lambda$  и т. д.) много меньше поперечного радиуса корреляции, в первом приближении неоднородности можно считать одномерными. Однако даже в этой относительно простой ситуации возникают такие затруднения (например, отсутствие в задаче "динамической причинности", нелинейность уравнения Рикатти и т. д.), что точное аналитическое решение задачи удается получить лишь в нескольких частных случаях [1 - 4]. В результате на практике используются в основном феноменологические подходы и приближенные методы, учитывающие, например, только рассеяние вперед, однократное рассеяние и т. д. [2 - 3]. Одним из распространенных подходов для расчета интенсивности рассеянных волн является феноменологическая линейная теория переноса [5]. Однако в ряде работ [5, 6] показана ограниченность этой теории и возможность ее применения лишь при слабых неоднородностях диэлектрической проницаемости или достаточно сильном поглощении в среде. В противном случае амплитуды встречных волн становятся статистически зависимыми и теория не может быть записана в виде двух отдельных уравнений. В то же время, для выявления особенностей рассеяния волн на действительных случайных

неоднородностях диэлектрической проницаемости, когда имеет место выход энергии из объема взаимодействия, этот последний случай представляет наибольший интерес. При этом могут проявляться такие специфические эффекты, как стохастический параметрический резонанс внутри случайно-неоднородного слоя, полное отражение энергии волн от случайно-неоднородного полупространства и т. д. [4, 6].

В настоящей работе рассматривается одномерная случайно-неоднородная среда, когда уровень флуктуаций диэлектрической проницаемости может достигать больших величин, сравнимых с ее средним значением. При этом, чтобы максимально учесть эффекты рассеяния волн на неоднородностях, среда полагалась также непоглощающей. Решение задачи о падении плоской волны на одномерный слой со случайными неоднородностями производилось двумя методами. Первый из них - аналитический - был основан на одновременном изучении поведения в среде интенсивности прямых и обратных волн [7]. Во втором методе поле волн рассчитывалось численно с использованием идей инвариантного погружения [8]. Цель двойного подхода состояла в том, чтобы на основе точного численного расчета изучить реальную область применимости предложенного аналитического метода и полученных на его основе результатов.

### 1. Анализ исходных уравнений

Известно, что стационарный процесс распространения плоских волн в случайно-неоднородных средах можно описать с помощью уравнения Гельмгольца [3]:

$$U''(x) + k_0^2(\epsilon_0 + \epsilon_1(x))U(x) = 0, \quad (1)$$

где  $k_0 = 2\pi/\lambda$  - волновое число в вакууме, а  $U(x)$  - комплексная амплитуда одной из компонент поля, например электрического. При этом среда характеризуется постоянной величиной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_0$ , соответствующей однородному пространству, и функцией, описывающей ее неоднородную структуру  $\epsilon_1(x)$ . Среду будем считать непоглощающей ( $\text{Im}(\epsilon_0 + \epsilon_1(x)) = 0$ ), так как именно в этом случае эффекты рассеяния проявляются наилучшим образом. Не нарушая общности задачи, предположим, что неоднородности находятся в слое толщиной  $L$  ( $\epsilon(x) = \epsilon_1(x)/\epsilon_0 = 0$  при  $x < 0, x > L$ ). Пусть справа на него падает плоская волна  $U_{\text{пад}}(x) = e^{-ikx}$  с волновым числом  $k = k_0\sqrt{\epsilon_0}$ , тогда поле  $U(x)$  внутри слоя можно искать в виде [4, 7]

$$U(x) = T(x)e^{-ikx} + R(x)e^{ikx}, \quad (2)$$

где функции  $T(x)$  и  $R(x)$  описывают амплитуды встречных волн, если удовлетворяют следующему условию:

$$T'(x)e^{-ikx} + R'(x)e^{ikx} = 0. \quad (3)$$

Физический смысл они приобретают лишь вне неоднородного слоя и характеризуют соответственно величину прохождения  $T$  и отражения  $R$  волн от этого слоя. При этом должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} R(x) &= R, & T(x) &= 1, & \text{при } x \geq L, \\ R(x) &= 0, & T(x) &= T, & \text{при } x \leq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В общем случае  $R(x)$  и  $T(x)$  комплексны, в то время как на практике больший интерес представляет изучение их действительных аналогов, например,

$$\begin{aligned} T(x) &= |T(x)|^2 + |R(x)|^2, & J(x) &= |T(x)|^2 - |R(x)|^2, \\ K(x) &= 2\operatorname{Re}(R^*(x)T(x)e^{-2ikx}). \end{aligned} \quad (5)$$

Смысл введенных функций достаточно нагляден, так как они однозначно определяют не только интенсивности встречных волн  $|T(x)|^2$  и  $|R(x)|^2$ , но и полную интенсивность волнового поля

$$|U(x)|^2 = I(x) + K(x). \quad (6)$$

В работе [7] показано, что для функций  $I(x)$ ,  $J(x)$  и  $K(x)$  можно записать замкнутую систему уравнений, которая в отсутствие поглощения в среде существенно упрощается,

$$J(x) = |T(x)|^2 - |R(x)|^2 = |T|^2 = 1 - |R|^2; \quad (7)$$

$$I(x) = |T|^2, \quad (8a)$$

$$K(x) = 0 \quad \text{при } x \leq 0; \quad (8b)$$

$$I(x) = k^2 \varepsilon(x) \int_0^x \varepsilon(t) \cos(\vartheta(x,t)) I(t) dt, \quad (9a)$$

$$K(x) = -k \int_0^x \varepsilon(t) \sin(\vartheta(x,t)) I(t) dt \quad \text{при } 0 \leq x \leq L; \quad (9b)$$

$$I(x) = 1 + |R|^2, \quad (10a)$$

$$K(x) = -k \int_0^x \varepsilon(t) \sin(\vartheta(L,t) + 2k(x-L)) I(t) dt \quad \text{при } x \geq L, \quad (10b)$$

где для аргумента осциллирующих функций введено следующее обозначение:

$$\vartheta(x,t) = k \int_t^x (2 + \varepsilon(m)) dm. \quad (11)$$

Из (7) следует, что для поля  $U(x)$  выполняется закон сохранения энергии, и внутри неоднородного слоя амплитуды встречных волн  $|T(x)|^2$  и  $|R(x)|^2$  становятся зависимыми друг от друга. Это приводит к тому, что в задаче со случайными неоднородностями зависимость между  $|T(x)|^2$  и  $|R(x)|^2$  приобретает статистический характер и теория

по расчету их статистических моментов может стать существенно нелинейной. Поэтому целесообразно изучать поведение  $|T(x)|^2$  и  $|R(x)|^2$  одновременно, т. е. на основе функции  $I(x)$ . Кроме того, проанализировав уравнения (8) – (10), можно заметить, что интенсивность поля (6) в основном

характеризуется величиной  $I(x)$ ,

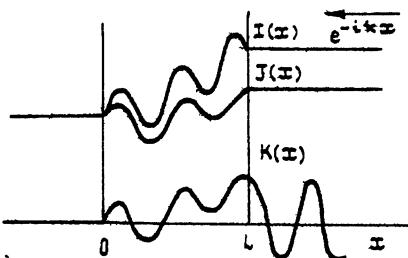


Рис. 1

так как вне неоднородного слоя ( $x < 0$ ,  $x > L$ ) она определяет постоянную составляющую, не зависящую от координаты  $x$ . При этом осциллирующие члены полностью содержатся в функции  $K(x)$ . Математически это получается при усреднении общего решения для  $K(x)$  (10б) по пространственным осцилляциям с периодом  $\lambda/2\sqrt{\varepsilon_0}$ . Что касается внутренней области  $0 \leq x \leq L$ , то здесь функция  $I(x)$  описывает не только плавное поведение интенсивности (6), но и

содержит также осциллирующие члены (см. рис. 1). Физический смысл в этой области имеет только полная интенсивность (6). В результате можно сделать вывод, что для изучения прохождения волн через неоднородный слой достаточно знать  $I(x)$  как функцию толщины слоя  $L$ , для чего требуется решить из приведенной системы лишь уравнение (9а). Однако это уравнение требует задания начального условия при  $x = 0$ , которое само зависит от решения в области  $x > 0$ , т. е. в задаче отсутствует "динамическая причинность" [6]. В результате удобно перейти к нормированной величине [7]

$$\tilde{I}(x) = I(x) / |T|^2, \quad (12)$$

которая также подчиняется уравнению (9а) и имеет фиксированное начальное условие

$$\tilde{I}(0) = 1, \quad (13)$$

не зависящее от различного вида реализаций  $\varepsilon(x)$ . Кроме того, эта функция имеет конкретный физический смысл, так как на границе  $x = L$  обращается в экспериментально измеряемую величину - коэффициент стоячей волны (КСВ):

$$\tilde{I}(L) = \frac{1+|R|^2}{1-|R|^2}. \quad (14)$$

Таким образом, поставленная задача для  $\tilde{I}(x)$  является линейной и обладает свойством "динамической причинности". Нелинейные эффекты проявляются лишь при переходе к традиционным характеристикам  $|R|^2$  или  $|T|^2$ . Однако в задачах по рассеянию волн на случайных неоднородностях это делать нецелесообразно, так как для определения хотя бы одной статистической характеристики коэффициента отражения или прохождения необходимо знать все без исключения статистические характеристики функции  $\tilde{I}(L)$ , а ясность в понимании происходящих процессов при этом не улучшается.

## 2. Методика решения. Статистическое усреднение

Одним из способов решения интегрального уравнения Вольтерра (9а) является запись  $\tilde{I}(x)$  в виде бесконечного ряда [7]. Однако для

статистических задач в дальнейшем приходится использовать диаграммные методы, когда в конечном решении присутствуют лишь выборочные подпоследовательности диаграмм Фейнмана [1]. Более эффективным способом получения результатов оказалось приближенное решение стохастических уравнений и в последствии их статистическое усреднение с помощью функциональных методов (например, так получено малоугловое приближение для среднего поля при рассеянии волн на случайных неоднородностях [4]). Именно такой подход использовался в рассматриваемом случае.

На практике КСВ  $\tilde{I}(L)$  обычно измеряют в децибелах, поэтому целесообразно ввести в рассмотрение величину

$$Z(L) = 20 \lg(\tilde{I}(L)) = 20 \lg(e) \ln(\tilde{I}(L)). \quad (15)$$

Она подчиняется нелинейному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} Z(L) = 20 \lg(e) k^2 & \int_0^L \varepsilon(m) \int_0^m \varepsilon(t) \cos(\vartheta(m, t)) \times \\ & \times \exp[(Z(t) - Z(m))/20 \lg(e)] dm dt, \end{aligned} \quad (16)$$

но может быть сразу приближенно записана в аналитическом виде. Для этого используем итеративную процедуру решения уравнения (16) и в правую его часть подставим "нулевое приближение"  $Z^{(0)}(x) = 0$ , соответствующее однородному слово с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_0$ . В результате в левой части уравнения (16) получится "первое приближение"

$$Z^{(1)}(L) = 20 \lg(e) k^2 \int_0^L \varepsilon(m) \int_0^m \varepsilon(t) \cos(\vartheta(m, t)) dm dt. \quad (17)$$

Таким же образом нетрудно получить приближения более высокого порядка. Несмотря на то, что данный подход является приближенным, он должен быть достаточно эффективен, так как функция  $Z(x)$  учитывает эффекты прямого и обратного рассеяния одновременно. Вопрос о сходимости данной процедуры оставим открытым, так как подобные теоретические оценки области применимости дают, как правило, лишь асимптотические неравенства [1 - 4]. Чтобы получить пригодные для

использования количественные соотношения, в дальнейшем проведем сравнительный анализ аналитических результатов с точными численными расчетами.

Перейдем теперь непосредственно к изучению случайно-неоднородных сред, когда для получения среднего значения КСВ необходимо функцию  $Z^{(1)}(L)$  усреднить по ансамблю реализаций диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(x)$ . Для этого сделаем еще одно предположение, упрощающее понимание происходящих процессов. Если случайные флуктуации  $\varepsilon(x)$  отсутствуют, то все эффекты прямого и обратного рассеяния волн определяются скачком диэлектрической проницаемости от величины  $\varepsilon_0$  до  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0(1 + \langle \varepsilon(x) \rangle)$  на границах неоднородного слоя и свободного пространства ( $x = 0$  и  $x = L$ ). (Здесь и в дальнейшем скобки  $\langle \dots \rangle$  будут означать усреднение по ансамблю случайных реализаций диэлектрической проницаемости). Данная ситуация не описывает эффекты рассеяния волн на случайных неоднородностях и лишь усложняет общую интерференционную картину. Поэтому заранее положим, что в отсутствие случайных неоднородностей в среде отсутствует скачок диэлектрической проницаемости и она становится "оптически прозрачной". Это означает, что среднее значение диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(x)$  равно нулю

$$\langle \varepsilon(x) \rangle = 0. \quad (18)$$

Кроме того, предположим, что процесс  $\varepsilon(x)$  статистически однороден. Это предположение не является существенным и может быть опущено, но оно также помогает выявить эффекты, обусловленные лишь случайным характером неоднородностей.

В результате нетрудно показать, что после усреднения выражения (17) по ансамблю реализаций  $\varepsilon(x)$  значение КСВ можно записать в следующем виде:

$$\langle Z^{(1)}(L) \rangle = 20 \lg(e) \int_0^L \int_0^m \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \Phi_{m,t}[k]}{\partial m \partial t} e^{2ik(m-t)} \right] dm dt, \quad (19)$$

где

$$\Phi_{m,t}[v] = \langle \exp[i \int_t^m \varepsilon(\tau)v(\tau)d\tau] \rangle \quad (20)$$

является характеристическим функционалом для процесса  $\varepsilon(x)$ , и используется в выражении (19) при подстановке вместо функции  $v(x)$

волнового числа  $k$ . Известно, что значение характеристического функционала (20) определяет поведение квадрата модуля среднего поля воли, распространяющихся в случайно-неоднородной среде [4]. Эта функция плавно убывает на масштабе порядка радиуса экстинкции  $x_3$  и характеризует степень когерентности волн по мере их рассеяния на случайных неоднородностях. В данной работе от характеристического функционала также зависит искомый результат — среднее значение КСВ, что говорит о некоторой его универсальности для вопросов распространения. Теория вычисления характеристических функционалов для различного вида случайных процессов достаточно хорошо развита и можно рассмотреть теперь конкретное поведение среднего значения КСВ при различных флуктуациях диэлектрической проницаемости.

*Гауссовые неоднородности.* В этом случае плотность вероятности флуктуаций  $\varepsilon(x)$  имеет нормальный вид [4] и флуктуации полностью определяются поведением своей функции корреляции:

$$B(x, x') = B(x-x') = \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x') \rangle. \quad (21)$$

Наиболее простыми моделями для этой функции являются экспоненциальная (модель Букера — Гордона [2])

$$B(x-x') = \sigma^2 \exp[-|x-x'|/l] \quad (22)$$

и гауссова

$$B(x-x') = \sigma^2 \exp[-(x-x')^2/l^2], \quad (23)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия флуктуаций  $\varepsilon(x)$ , а  $l$  — их радиус корреляции, т. е. характерный масштаб. Основное отличие этих двух моделей состоит в разной скорости убывания корреляционных функций, что может быть существенным фактором, влияющим на рассеяние волн в случае крупномасштабных неоднородностей ( $k_l \gg 1$ ). После применения точных функциональных методов [4] можно получить аналитическое выражение для характеристического функционала (20), используемое в дальнейшем:

$$\Phi_{t,0}[k] = \exp\left[-\frac{k^2}{2} \int_0^t \int_0^t B(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right]. \quad (24)$$

В результате среднее значение КСВ представится в виде трех слагаемых:

$$\langle Z^{(1)}(L) \rangle = 20g(e)(E(L) + C + 2DL), \quad (25)$$

где

$$E(L) = - \int_L^\infty t \cos(2kt) \frac{\partial^2 \Phi_{t,0}[k]}{\partial t^2} dt$$

- осциллирующий член, несущий информацию об интерференционном взаимодействии прямых и обратных волн. Заметим, что с ростом толщины слоя функция  $E(L)$  убывает и, когда  $L$  существенно превышает характерный масштаб изменения подынтегральной функции, этим членом можно пренебречь. Из выражения (24) нетрудно получить, что масштаб убывания функции  $\frac{\partial^2 \Phi_{t,0}[k]}{\partial t^2}$  в основном определяется радиусом экстинкции  $x_3$  квадрата модуля среднего поля и характерным масштабом неоднородностей  $l$ . При этом условие, когда в выражении (25) можно не учитывать первое слагаемое, запишется следующим образом:

$$L \geq \min(x_3, l). \quad (26)$$

Оно характеризует область, которая находится за пределами масштаба одной неоднородности или когда когерентная составляющая поля практически полностью переходит в случайную. В результате для описания поведения среднего значения КСВ достаточно знать лишь параметры линейной аппроксимации  $C$  и  $D$ ,

$$C = \int_0^\infty t \cos(2kt) \frac{\partial^2 \Phi_{t,0}[k]}{\partial t^2} dt \quad (27)$$

- константа, определяющая начальное смещение линейной аппроксимации при  $L = 0$ . Она характеризует нарастание эффектов рассеяния волн в переходном неоднородном слое при изменении его толщины от нуля до масштаба, определяемого соотношением (26), т. е. в пределах одной неоднородности.

$$D = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \cos(2kt) \frac{\partial^2 \Phi_{t,0}[k]}{\partial t^2} dt \quad (28)$$

- коэффициент, характеризующий увеличение среднего значения КСВ с ростом толщины, когда количество неоднородностей на пути

распространения достаточно велико. Очевидно, что эта величина должна иметь некоторую связь с известным коэффициентом диффузии [4-6]. Действительно, если потребовать выполнения следующих двух условий,

$$\left| \int_0^{\infty} \cos(2kt) \Phi_{t,0}[k] (k \int_0^t B(\tau) d\tau)^2 dt \right| \ll \left| \int_0^{\infty} \cos(2kt) \Phi_{t,0}[k] B(t) dt \right|; \quad (29)$$

$$x_3 \gg 1, \quad (30)$$

то выражение (26) можно упростить и перейти к известному определению коэффициента диффузии поля волн в случайно-неоднородной среде

$$D = \frac{k^2}{2} \int_0^{\infty} \cos(2kt) B(t) dt. \quad (31)$$

В таком приближении константа  $C$  будет иметь следующий вид:

$$C = -k^2 \int_0^{\infty} t \cos(2kt) B(t) dt. \quad (32)$$

Количественно область применимости такого приближения можно оценить графическим способом. Для этого заметим, что в выражениях (32), (33) константы  $C$  и  $D$  прямо пропорциональны дисперсии флуктуаций  $\sigma^2$ , вследствие чего после соответствующей нормировки они будут зависеть только от безразмерного масштаба неоднородностей  $k_1$ .

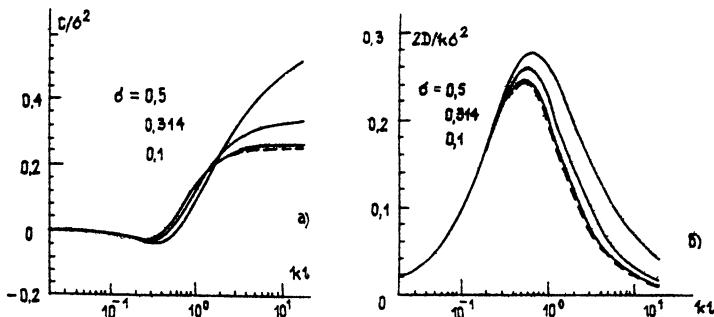


Рис 2

Это означает, что аналогичные зависимости, но рассчитанные по формулам (27), (28), будут слабо меняться при различном уровне флуктуаций. Эти изменения являются мерой отличия приближенных выражений (31), (32) от более точных (27), (28). На рис. 2а, б показано

поведение нормированных констант  $C$  и  $D$  от масштаба неоднородностей  $k_1$  для экспоненциальной модели функции корреляции (22). Из рисунков следует, что область применимости приближений (31) и (32) (пунктирная линия) ограничивается случаями, когда в среде присутствуют лишь слабые ( $\delta < 0,1$ ) или мелкомасштабные ( $k_1 < 0,3$ ) неоднородности диэлектрической проницаемости. Для рассматриваемого случая сильных неоднородностей приближения, известного ранее, недостаточно, и константы  $C$  и  $D$  необходимо рассчитывать по формулам (27) и (28) (сплошная кривая) соответственно.

*Негауссовые неоднородности.* Одном из примеров, где встречаются неоднородности  $\varepsilon(x)$  негауссова типа является случайный телеграфный процесс [4]. Этот процесс имеет функцию корреляции экспоненциального вида (22) (т.е. одну из рассмотренных ранее), а его плотность вероятности существенно отличается от нормальной. Таким образом, на этом примере можно оценить влияние на распространение радиоволн лишь плотности вероятности при условии, что остальные параметры неоднородностей остаются неизменными. Из теории случайных процессов также известен вид характеристического функционала для телеграфного процесса [4]:

$$\Phi_{t,0}[k] = e^{-t/2l} (\text{ch}(\sqrt{(4l^2)^{-1}-k^2\sigma^2} t) + \dots) \quad (33)$$

$$+ \text{sh}(\sqrt{(4l^2)^{-1}-k^2\sigma^2} t)/\sqrt{1-4k^2l^2\sigma^2}.$$

Далее, поступая аналогично предыдущему пункту, среднее значение КСВ также можно записать в виде линейной аппроксимации. Правда, в этом случае все интегралы можно досчитать до конца и представить константы  $C$  и  $D$  в виде алгебраических выражений:

$$C = \sigma^2 k^2 l^2 (1 + \frac{\sigma^2}{4}) (4k^2 l^2 (1 - \frac{\sigma^2}{4})^2 - 1) / (4k^2 l^2 (1 - \frac{\sigma^2}{4})^2 + 1)^2; \quad (34)$$

$$D = k^2 l \sigma^2 / (2(1 + 4k^2 l^2 (1 - \frac{\sigma^2}{4})^2)). \quad (35)$$

При наложении достаточно слабого условия

$$\sigma^2 \ll 4 \quad (36)$$

выражения (34), (35) упрощаются и будут полностью соответствовать

расчету для случая гауссовых неоднородностей (31), (32) с экспоненциальной функцией корреляции (22). Таким образом, можно сделать вывод, что при наличии в среде слабых или мелкомасштабных неоднородностей вид плотности вероятности флуктуаций  $\epsilon(x)$  не изменяет конечные результаты и поэтому должен слабо влиять на распространение и рассеяние волн.

### 3. Численное моделирование. Анализ полученных результатов

Для анализа полученных результатов и количественной оценки области их применимости производилось численное моделирование процесса распространения волн через одномерную случайно-неоднородную среду. Для этого весь неоднородный слой разбивался на  $N$  подслоев, в которых диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_n$  при  $n = 0, \dots, N$  считалась кусочно-постоянной. Моделирование дискретного процесса  $\epsilon_n$  производилось методами математической статистики. Так, гауссовые флуктуации создавались на основе белого шума и задаваемой предварительно спектральной плотности случайного процесса [9]. Для моделирования телеграфного случайного процесса со скачками диэлектрической проницаемости использовалось то свойство, что интервал между этими скачками является случайной величиной и распределен по логарифмическому закону [4]. Поле волн, распространяющихся в такой среде, записывалось в виде набора плоских волн и после сшивания на границах подслоев  $x_n$  получалась система разностных линейных уравнений (см., например, [3]). С помощью эффективного метода погружения [8] можно было записать коэффициент отражения от случайно-неоднородного слоя  $R_N$  в виде рекуррентной процедуры

$$R_{n+1} = \exp(2ik_0\sqrt{\epsilon_{n+1}}(x_{n+1} - x_n)) \times \quad (37)$$

$$\times \left( R_n + \frac{\sqrt{\epsilon_{n+1}} - \sqrt{\epsilon_n}}{\sqrt{\epsilon_{n+1}} + \sqrt{\epsilon_n}} \right) / \left( R_n \frac{\sqrt{\epsilon_{n+1}} - \sqrt{\epsilon_n}}{\sqrt{\epsilon_{n+1}} + \sqrt{\epsilon_n}} + 1 \right) \quad (n=0, 1, \dots, N-1)$$

с условием, что отражение от слоя с нулевой толщиной отсутствует:

$$R_0 = 0. \quad (38)$$

В дальнейшем необходимые статистические характеристики рассчитывались по формулам (14), (15) на основе статистического

усреднения по ансамблю реализаций  $\epsilon(x)$ . Для расчета величин  $C$  и  $D$  использовалась линейная интерполяция зависимости  $\langle Z(L) \rangle$  по методу наименьших квадратов. Кроме этого было практически оценено, что получаемые результаты приобретали статистическую устойчивость с точностью ~10% уже при использовании 100 случайных реализаций (см., например, рис. 3). В рассматриваемых случаях статистика  $M$  была выбрана значительно больше — 200.

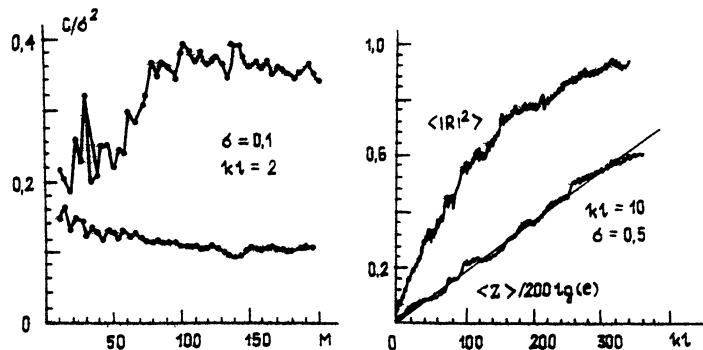


Рис. 3.4.

Изучение эффектов рассеяния было начато с анализа поведения среднего значения КСВ от толщины неоднородного слоя. Действительно, во всех случаях, рассматриваемых в дальнейшем, такая зависимость хорошо аппроксимировалась линейной функцией. Для наглядности на рис. 4 показано поведение среднего коэффициента отражения и среднего КСВ в одном из случаев, когда толщина неоднородного слоя была достаточно велика и нелинейность  $\langle |R|^2 \rangle$  проявлялась наиболее существенно. При этом функция  $\langle Z(L) \rangle$  по-прежнему оставалась линейной. Таким образом, чтобы изучить физические аспекты рассеяния, достаточно было рассмотреть поведение констант  $C$  и  $D$  при изменении вида и параметров неоднородностей среды, а именно их дисперсии  $\sigma^2$  и безразмерного характерного масштаба  $k_1$ .

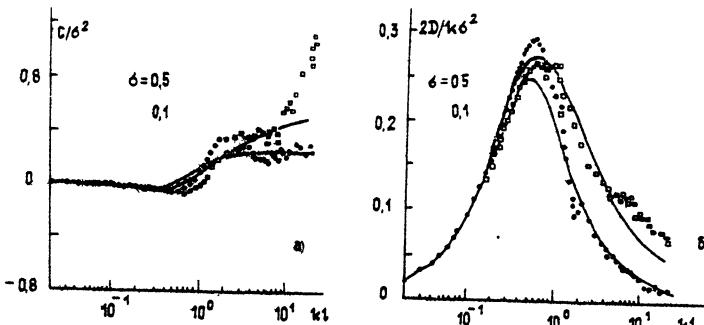


Рис. 5

На рис. 5, 6 для гауссовых неоднородностей с функциями корреляции (22), (23) соответственно показано теоретическое и численное поведение нормированных констант  $C$  и  $D$  в зависимости от  $k_1$  при разных уровнях флуктуаций  $\sigma$ . Из рисунков видно, что коэффициент диффузии носит резонансный характер и максимален в некоторой области, когда характерный масштаб неоднородностей соизмерим с длиной волны  $k_1 \sim 0,5$ . В случае мелкомасштабных неоднородностей ( $k_1 \ll 0,5$ ) их влияние уменьшается, и в пределе  $k_1 \rightarrow 0$  среда становится однородной ( $D \rightarrow 0$ ). Практически этот предел наступает при  $k_1 \leq 0,1$ .

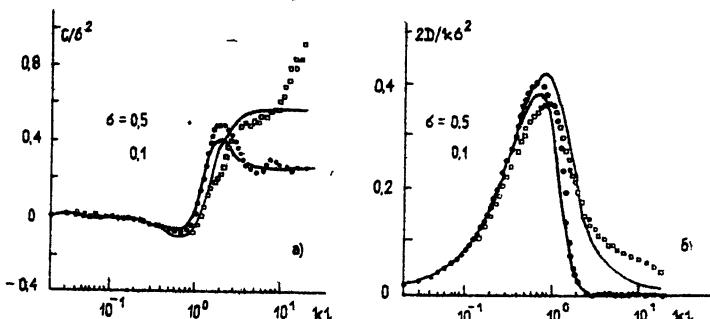


Рис 6

В коротковолновом случае ( $k_1 \gg 0,5$ ) рассеяние волн перестает зависеть от безразмерного масштаба неоднородностей  $k_1$  и среда становится близкой по своим свойствам к модели мгновенно-однородной, флуктуирующей как целое - МОФЦ [10]. При этом влияние неоднородностей также уменьшается и слой становится "оптически прозрачен" ( $D \rightarrow 0$ ). В пределе  $k_1 \rightarrow \infty$  КСВ зависит только от значения константы  $C$ , характеризующей рассеяние волн в пределах одной неоднородности. Практически это наступает уже при  $k_1 \geq 10$ . Вид функции корреляции неоднородностей оказывает основное влияние на рассеяние волн лишь в коротковолновой области ( $k_1 \leq 0,5$ ). При этом более быстрое спадание гауссовой функции (23) по сравнению с экспоненциальной (22) (т. е. неоднородности имеют как бы более "резкие" границы) скорее приводит к наступлению предела МОФЦ. Такое улучшение резонаторных свойств среды с гауссовой функцией корреляции также сказывается на относительном увеличении амплитуды резонансного пика у коэффициента диффузии  $D$  и появлению аналогичного резонанса у константы  $C$ . Видно, что этот резонанс наступает в случае, когда в слое, состоящем из одной неоднородности, укладывается четверть длины волны ( $k_1 \sim \pi/2$ ). Для экспоненциальной функции корреляции этот эффект более сглажен. Увеличение дисперсии флуктуаций приводит не только к абсолютному увеличению рассеяния (так как константы  $C$  и  $D$

пропорциональны  $\sigma^2$ ), но и к уширению резонансных кривых. В основном это происходит в коротковолновой области ( $k_1 \geq 0,5$ ), когда резонаторные эффекты в электродинамике наиболее существенны. Кроме того, для сильных флуктуаций ( $\sigma \sim 0,5$ ) наблюдается некоторое повышение уровня, на который выходит нормированная константа  $C$  при  $k_1 \rightarrow \infty$ . По-видимому, это связано с тем, что в коротковолновой области особую роль играют неоднородности с отрицательной диэлектрической проницаемостью. Даже небольшое их число способно существенно повлиять на величину КСВ. При сильных гауссовых флуктуациях доля таких неоднородностей возрастает, что приводит к увеличению как константы  $C$ , так и  $D$ .

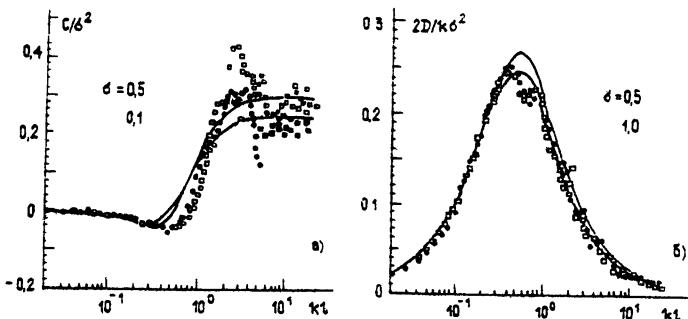


Рис 7

В случае негауссовых неоднородностей поведение нормированных констант  $C$  и  $D$  в основном не изменилось (см. рис. 7). Однако в отличие от предыдущего случая их зависимость от дисперсии флуктуаций  $\sigma^2$  менее выражена. Это связано с тем, что внутри слоя даже при  $\sigma \sim 0,5$  неоднородности с отрицательной диэлектрической проницаемостью отсутствуют ( $0,5 \leq \epsilon \leq 1,5$ ) и не оказывают такого влияния на рассеяние волн, как в гауссовом случае. Эта особенность также проявляется в соответствии результатов приближенного теоретического расчета и численного моделирования. Действительно, из рис. 5, 6 можно видеть, что при наличии в среде гауссовых сильных ( $\sigma = 0,5$ ) крупномасштабных ( $k_1 \gg 1$ ) неоднородностей это расхождение становится заметным, а в рассматриваемом случае (рис. 7) практически отсутствует. На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы.

Во-первых, данные численного расчета достаточно хорошо описываются теоретическими кривыми, поэтому для решения задач по рассеянию волн на случайных неоднородностях сделанные при аналитическом подходе предположения можно считать достаточно

эффективными. Их применимость возможна даже при наличии сильных неоднородностей в среде, когда уровень флюктуаций диэлектрической проницаемости достигает 50%. Лишь в тех задачах, когда крупномасштабные неоднородности с отрицательной диэлектрической проницаемостью играют существенную роль (например, при распространении коротких волн в низкотемпературной плазме с частотой вблизи ленгмировской), аналитический подход следует усложнить и при проведении итеративной процедуры (17) использовать приближение более высокого порядка.

Во-вторых, для изучения рассеяния волн на случайных неоднородностях удобной характеристикой является среднее значение коэффициента стоячей волны. Эта величина линейно зависит от толщины неоднородного слоя и вся информация о происходящих физических процессах содержится в константах  $C$  и  $D$ . При изменении вида функции корреляции и типа неоднородностей зависимости нормированных констант  $C$  и  $D$  от масштаба неоднородностей меняются относительно слабо и поэтому могут быть использованы на практике. Полученные в результате анализа резонансные кривые можно использовать при дистанционном зондировании таких случайно-неоднородных сред, которые по своим свойствам можно считать близкими к одномерным.

В третьих, модель мгновенно-однородного слоя, флюктуирующего как целое, достаточно проста, но может быть использована для сложных расчетов в коротковолновой области уже при  $k_1 \geq 10$ .

В заключение заметим, что предлагаемый теоретический подход без особых трудностей может быть развит как с учетом поглощения, так и для случайно-неоднородных слоев со скачками средней диэлектрической проницаемости на границах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. - М.:Наука, 1978. Ч. 2.
2. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. - М.:Мир, 1981. Т. 1, 2.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. - М.:Наука, 1973.
4. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. - М.:Наука, 1980.
5. Апресян Л. А., Кравцов Ю. А. Теория переноса излучения. Статистические и волновые аспекты. - М.:Наука, 1983.
6. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. М.:Наука, 1986.

7. Андреев В. Ю. //Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. № 6. С. 1164.
8. Касти Дж., Калаба Р. Методы инвариантного погружения в прикладной математике. - М.:Мир, 1976.
9. Ермаков С.М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. - М.:Наука, 1982.
10. Секистов В. Н. //Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 7. С. 1262.

Институт радиотехники и электроники  
РАН

Поступила в редакцию  
2 сентября 1991 г.

THE BEHAVIOR OF THE SWR MEAN VALUE FOR THE SCATTERING  
BY ONE-DIMENSIONAL STRONG RANDOM INHOMOGENEITIES

V.Yu. Andreyev

It is shown that the standing wave ratio (SWR) is a more convenient characteristic for the theoretical investigation of scattering by one-dimensional strong random inhomogeneities. For the different types of inhomogeneities the dependence of the SWR mean value is analytically and numerically investigated from the parameters of the problem. Conclusions are made on practical utilization results as well as estimations on the real application fields.

УДК 535.2

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ВО ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ  
С ДИСКРЕТНЫМИ ВКРАПЛЕНИЯМИ**

Л. А. Апресян

Рассмотрены структура и решения уравнений марковского приближения для первых двух моментов излучения, распространяющегося в среде с непрерывными флуктуациями и дискретными вкраплениями. Описаны поправки, связанные с учетом вторых корреляций рассеивателей. Оценены условия применимости модели черных экранов для описания дискретных вкраплений.

При описании распространения излучения в случайно-неоднородных средах непрерывные флуктуации и дискретные вкрапления традиционно рассматриваются независимо с использованием специфических математических подходов. Исключением является малоугловое распространение пучков в крупномасштабных средах, когда произвольные моменты излучения для сред с непрерывными флуктуациями и дискретными вкраплениями можно рассматривать единообразно. Такое описание было впервые построено в [1] для модели некоррелированных черных экранов и затем обобщено в [2] на случай произвольных корреляций рассеивателей. Модель черных экранов отвечает учету затеняющего действия рассеивателей (т. е. дифракции на контурах частиц) при полном пренебрежении преломленным рассеивателями полем. Уравнения марковского приближения, учитывающие как корреляции положений рассеивателей, так и преломленное ими поле, были получены в [3]. Такие уравнения имеют широкую область применимости и позволяют описывать разнообразные задачи оптики и акустики, в том числе распространение пучков излучения в турбулентных средах с осадками, в содержащих примеси водах морей и океанов, а также различные лабораторные эксперименты, включая случаи плотноупакованных сред, для которых существен учет корреляции рассеивателей.

В данной работе рассматриваются некоторые простые следствия уравнений марковского приближения [3] для первых двух моментов поля, когда указанные уравнения решаются в явном виде. На примере этих моментов прослежен предельный переход к модели черных экранов [1, 2], который осуществляется как в тривиальном случае сильно поглощающих частиц, так и в отсутствие поглощения, для частиц, вносящих большие фазовые набеги. Для непоглощающих частиц с умеренными фазовыми набегами модель черных экранов оказывается непригодной. Показано, что для некоррелированных рассеивателей марковское приближение полностью согласуется с приближением аномальной дифракции Хюлста [4] и, таким образом, может рассматриваться как обобщение приближения Хюлста на высшие моменты поля с учетом корреляции рассеивателей.

1. Исходные уравнения. Рассмотрим распространение излучения в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1 + \tilde{\epsilon}$ , где среднее значение  $\langle \epsilon \rangle$  для простоты считается равным единице,  $\langle \epsilon \rangle = 1$ , а флуктуация  $\tilde{\epsilon}$  предполагается слабой,  $|\tilde{\epsilon}| \ll 1$ , и слагается из непрерывной части  $\epsilon^{(\mu)}$  и вклада от случайного числа  $N$  дискретных вкраплений (частиц):

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon^{(\mu)} + \sum_{s=1}^N \epsilon_s. \quad (1)$$

Здесь  $\epsilon_s = \epsilon_s(\vec{r} - \vec{r}_s)$  описывает  $s$ -ю частицу, причем  $\vec{r}_s$  - случайный радиус-вектор положения этой частицы. В малоугловом приближении амплитуда поля описывается параболическим уравнением [5]

$$\left[ 2ik \frac{\partial}{\partial z} + \Delta_j + k^2 \tilde{\epsilon}(j) \right] u(j) = 0, \quad (2)$$

где  $k$  - волновое число,  $\Delta_j$  - "поперечный" лапласиан,  $\tilde{\epsilon}(j) = \tilde{\epsilon}(\vec{r}_j)$ ,  $u(j) = u(\vec{r}_j)$ ,  $\vec{r}_j = \{\rho_j, z\}$ . Здесь и далее индекс  $s$  нумерует частицы, а прочие индексы ( $j, n, m$ ) - аргументы моментов поля.

Считая  $\epsilon^{(\mu)}$  и  $\epsilon_s$  статистически независимыми и учитывая лишь корреляции положений  $\vec{r}_s$ , но не внутренних параметров частиц, в марковском приближении из (2) можно получить уравнения для моментов  $\Gamma_{nm} = \langle u(1)u^*(2)\dots u(n)u^*(n+1)u^*(n+2)\dots u^*(n+m) \rangle$ , имеющие вид [3]

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2ik} \left( \sum_{j=1}^n \Delta_j - \sum_{j=n+1}^{n+m} \Delta_j \right) + \alpha_{nm} \right] \Gamma_{nm} = 0, \quad (3)$$

и совпадающие по форме с аналогичными уравнениями для непрерывной среды [5]. Отличие состоит в том, что из-за наличия частиц коэффициенты  $\alpha_{nm}$  представляются в виде суммы

$$\alpha_{nm} = \alpha_{nm}^{(u)} + \alpha_{nm}^{(p)}, \quad (4)$$

где  $\alpha_{nm}^{(u)}$  отвечает непрерывным флуктуациям (в обозначениях [5]  $\alpha_{nm}^{(u)} = (k^2/8)Q_{nm}$ ), а  $\alpha_{nm}^{(p)}$  описывает частицы и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{nm}^{(p)} = & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int \dots \int \langle h_1 - 1 \rangle \langle h_2 - 1 \rangle \dots \langle h_s - 1 \rangle \times \\ & \times \tilde{q}_{1,2,\dots,s} d^2 p_1 d^2 p_2 \dots d^2 p_s, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$h_s = \prod_{j=1}^{n+m} e^{i \theta_s^{(j)}}, \quad (6)$$

$$l_{sj} = \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^{(sj)} (\vec{p}_j - \vec{p}_s, z) dz - \quad (7)$$

связанные с частицами набеги комплексных фаз вдоль прямых лучей,

$$\epsilon_s^{(sj)} (\vec{r}) = \begin{cases} \epsilon_1 \theta_s (\vec{r}), & j \leq n \\ -\epsilon_1 \theta_s (\vec{r}), & j > n \end{cases}, \quad (8)$$

$\theta_s (\vec{r})$  - характеристическая функция формы  $s$ -й частицы, равная единице внутри и нулю вне ее (для простоты мы ограничились в (8) случаем частиц с однородным заполнением). Входящие в (5) угловые скобки означают статистическое усреднение по внутренним параметрам частиц, а интегральные корреляционные функции  $\tilde{q}_{1,2,\dots,s} = \tilde{q}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_s; z_s)$  связаны с обычными корреляционными функциями положений частиц  $q_{1,2,\dots,s} = q(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_s)$  соотношениями

$$\tilde{q}_1 = q_1, \quad (9)$$

$$\tilde{q}_{1,2,\dots,s} = \int \dots \int q_{1,2,\dots,s} dz_1 dz_2 \dots dz_{s-1}, \quad s \geq 2$$

и для однородной системы частиц не зависят от продольной координаты  $z_s$ . При этом величины  $q_{1,2,\dots,s}$  определяются из условия

$$\langle \prod_{s=1}^N (1 + v_s) \rangle = \quad (10)$$

$$= \exp \left( \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int \dots \int v_1 v_2 \dots v_s q_{1,2,\dots,s} d^3 r_1 d^3 r_2 \dots d^3 r_s \right).$$

где  $v_s = v(\vec{r}_s)$  - пробная функция,  $\vec{r}_s$  - случайный радиус-вектор  $s$ -й частицы. Из (10) в частности следует, что  $q_1 = f_1 = c$  - концентрация частиц,  $q_{12} = f_{12} = f_1 f_2$ , где  $f_1$  и  $f_{12}$  - одно- и двухчастичная функции распределения  $\vec{r}_s$ , нормированные условиями

$$\int f_1 d^3 r_1 = \bar{N}, \quad \int f_{12} d^3 r_1 d^3 r_2 = \overline{N(N-1)}.$$

Для независимых частиц  $q_{1,2,\dots,s} = 0$  при  $s \geq 2$ , тогда как для коррелированных частиц  $q_{1,2,\dots,s}$  при  $s > 1$ , вообще говоря, отличны от нуля.

Если  $\eta(\vec{r})$  - характеристическая функция тени частицы, помещенной в начало координат, так что  $\eta(\vec{r}) = 1$  в области тени и  $\eta(\vec{r}) = 0$  вне ее, то выполняются соотношения

$$\exp(i l_{sj}) = \tilde{\eta}_{sj} + \eta_{sj} \exp(i l_{sj}), \quad \tilde{\eta}_{sj} = 1 - \eta_{sj} = 1 - \eta(\vec{r}_j - \vec{r}_s) \quad (11)$$

(для простоты здесь и ниже мы ограничиваемся случаем одинаковых частиц без внутренних флюктуирующих параметров, когда  $\eta_{sj} = \eta(\vec{r}_j - \vec{r}_s)$ ).

Из (11) следует, что для сильно поглощающих частиц с  $|l| l_{sj} \gg 1$  можно положить в (6)

$$\exp(i l_{sj}) \approx \tilde{\eta}_{sj} \quad (12)$$

и тогда  $h_s$  перейдет в результат, полученный в [2] для модели черных экранов:

$$h_s = \prod_{j=1}^{n+m} \tilde{\eta}(\vec{r}_j - \vec{r}_s). \quad (13)$$

В отличие от этой модели в общем случае (5) учитывает не только

затенение частицами, но и преломленное поле, которому отвечает второе слагаемое в правой части (11). В результате  $h_s$  и  $\alpha_{\text{ext}}$  оказываются зависящими не только от формы теней, но и от внутренней структуры частиц.

2. Среднее поле. Полагая в (3)  $n = 1$ ,  $m = 0$  и опуская индексы, для среднего поля  $\vec{u} = \Gamma_{10}$  имеем уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\Delta}{2ik} + \alpha^{(\mu)} + \alpha^{(p)} \right) \vec{u} = 0. \quad (14)$$

Здесь

$$\alpha^{(\mu)} = \alpha_{10}^{(\mu)} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \varepsilon^{(\mu)}(\vec{r}, z) \varepsilon^{(\mu)}(\vec{r}, 0) \rangle dz = \quad (15)$$

вклад от непрерывных флюктуаций, вклад от частиц  $\alpha^{(p)}$  имеет вид ряда (5)

$$\begin{aligned} \alpha^{(p)} = \alpha_{10}^{(p)} &= c \int \langle 1 - h_1 \rangle d^2 \rho_1 - \frac{1}{2} \int \int \langle 1 - h_1 \rangle \langle 1 - h_2 \rangle \tilde{q}_{1,2} d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 + \dots = \\ &\equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\alpha_s \sim \tilde{q}_{1,2,\dots,s}$ , а точками обозначены вклады от высших корреляций. При этом

$$h_s = \exp(i l_{s1}) = \tilde{\eta}_{s1} + \eta_{s1} \exp(i l_{s1}); \quad (17)$$

$$l_{s1} = \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1 \theta_s (\vec{r}_1 - \vec{r}_s) dz_1 \equiv l_s (\vec{r}_1 - \vec{r}_s) \quad (18)$$

- комплексный фазовый набег для луча, пронизывающего  $s$ -ю частицу в точке  $\vec{r}_1$ .

Рассмотрим случай плоской волны, падающей при  $z = 0$  на статистически однородное полупространство  $z > 0$ . Тогда решение уравнения (14) сводится к простой экспоненте, причем

$$|\vec{u}|^2 = \exp[-2 \operatorname{Re}(\alpha^{(\mu)} + \alpha^{(p)}) z] \equiv \exp[-(\sigma_{\text{ext}}^{(\mu)} + \sigma_{\text{ext}}^{(p)}) z], \quad (19)$$

где  $\sigma_{ext}^{(\mu, p)} = 2 \operatorname{Re}\alpha^{(\mu, p)}$  – сечение экстинкции. Для непрерывных флуктуаций сечение  $\sigma_{ext}^{(\mu)}$ , зависящее от корреляции  $\varepsilon^{(\mu)}$ , подробно обсуждается в [5]. Рассмотрим вклад от частиц  $\sigma_{ext}^{(p)}$ .

В разложении (16) первое слагаемое  $\alpha_1$ , отвечающее независимым частицам, имеет вид

$$\alpha_1 = c \int \eta_{S1} (1 - e^{-\frac{1}{2} S1}) d^2 \rho_S = c \left( \Sigma - \int \eta_{S1} e^{-\frac{1}{2} S1} d^2 \rho_S \right). \quad (20)$$

Здесь  $\Sigma$  – площадь тени частицы на плоскости  $z = \text{const}$ , причем первое слагаемое в круглых скобках описывает затенение, а интеграл учитывает преломленное поле.

В случае сферических частиц радиуса  $a$  интеграл в (20) легко вычисляется, что дает

$$\alpha_1 = c \Sigma \left( 1 - 2 \frac{e^{-\frac{1}{2} \beta}}{\beta} + 2 \frac{e^{-\frac{1}{2} \beta} - 1}{\beta^2} \right), \quad (21)$$

где параметр  $\beta = k a \varepsilon_1$ , так что  $2\beta$  есть дополнительный фазовый набег для пронизывающего рассеиватель центрального луча. Соответствующий (21) вклад в сечение рассеяния  $\sigma_{ext}$  имеет вид

$$\sigma_{ext, 1} = 2 \operatorname{Re}\alpha_1 = 2c \Sigma \left[ 1 - 2 \frac{\sin \beta}{\beta} + 2 \frac{\cos \beta - 1}{\beta^2} \right]. \quad (22)$$

Этот результат совпадает с сечением экстинкции, полученным в приближении аномальной дифракции Хюлста [4].

Прямое сравнение (22) с результатами расчетов экстинкции по теории Ми проводилось в ряде работ и показало хорошую точность указанного приближения для одиночной частицы в довольно широком диапазоне параметров. Так, в [6] приведены зависимости фактора эффективности  $Q_{ext, 1} = \sigma_{ext, 1} / \Sigma$  от параметра  $\beta$  при  $\varepsilon_1 = 0, 21, 1, 25$  и 3. Хотя формально марковское приближение для дискретных рассеивателей отвечает оптически мягким частицам, т. е. предельному переходу  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ , из результатов [6] следует, что приближение (22) дает неплохую точность (~ 25%) при  $\varepsilon_1 = 1, 25$  и остается качественно справедливым даже при  $\varepsilon_1 = 3$ .

Из (22) видно, что выход  $Q_{ext, 1}$  на асимптотическое значение  $Q_{ext, 1} = 2$ , отвечающее модели черных экранов, происходит при  $\beta \gg 1$  со скоростью  $\sim 1/\beta$ . При умеренных значениях  $\beta \leq 1$  точность модели

черных экранов становится неудовлетворительной. Физически это вполне очевидно, поскольку при таких  $\beta$  частицы выступают как слабые фазовые, а не амплитудные экраны.

Рассмотрим теперь поправку  $\alpha_2$  от вторых корреляций положений частиц. Эта поправка зависит как от формы частиц, так и от поведения корреляции  $\tilde{q}_{12}$ , и в явном виде не вычисляется даже для простейшей модели непоглощающих твердых сфер. Для оценки роли корреляций рассмотрим последний случай, полагая  $q_{12} = -c^2\Theta(2a - \rho)$ , где  $a$  — радиус сферы,  $\Theta(x)$  — функция Хевисайда. При этом ограничимся случаем малых отличий от модели черных экранов, когда  $\beta \gg 1$ . Для этой модели из (9) имеем  $\tilde{q}_{12} = -c^2 2a \sqrt{1 - (\rho/2a)^2} \Theta(2a - \rho)$ , и  $\alpha_2$  можно представить в виде асимптотического разложения

$$\alpha_2 = c^2 a^5 \left[ p_1 - p_2 \frac{e^{i\beta}}{i\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \right]. \quad (23)$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  — числовые множители, причем слагаемое с  $p_1$  отвечает модели черных экранов, а слагаемое с  $p_2$  — основному члену поправки, связанной с учетом преломленного поля. Как и в случае некоррелированных частиц (21), эта поправка имеет порядок  $1/\beta$  и при  $\beta \gg 1$  оказывается малой. Из (23) и (21) также видно, что по порядку величины  $|\alpha_2/\alpha_1| \sim ca^3$ , что с точностью до множителя совпадает с объемной долей рассеивающих частиц. Хотя для сильно разреженных сред  $ca^3 \ll 1$  и высшими корреляциями можно пренебречь; с ростом  $c$  поправка  $\alpha_2$  становится существенной. (При этом, однако, нельзя забывать, что рассмотренная здесь простейшая модель не охватывает сред с дальними корреляциями, для которых масштабы корреляции могут существенно превосходить размеры частиц; кроме того, при больших плотностях упаковки статистики непрерывных флуктуаций  $\epsilon^{(\mu)}$  и частиц становятся зависимыми и исходное соотношение (1) уже не выполняется, см. [3].)

**3. Функция когерентности.** Для функции когерентности  $\Gamma = \Gamma_{11} = = \langle u(1)u^*(2) \rangle$ , как и для среднего поля  $\bar{u}$ , уравнение (3) решается в общем виде [5]. Запишем это решение для простейшего случая плоской падающей волны единичной интенсивности

$$\Gamma = \exp\{-[\alpha^{(\mu)}(\vec{\rho}) + \alpha^{(P)}(\vec{\rho})]z\}. \quad (24)$$

В отличие от параметров среднего поля  $\alpha^{(\mu, P)} = \alpha_{10}^{(\mu, P)}$  ((15), (16)), здесь уже  $\alpha^{(\mu, P)}(\vec{\rho}) = \alpha_{11}^{(\mu, P)}$  — функции  $\vec{\rho} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2$ . При этом средняя интенсивность из-за поглощения экспоненциально спадает с ростом

длины трассы:

$$\langle |u|^2 \rangle = \Gamma|_{\rho=0} = \exp\{-[\alpha^{(M)}(0) + \alpha^{(P)}(0)]z\}. \quad (25)$$

Характеризующий скорость спада корреляций радиус когерентности  $\rho_k$  при больших трассах  $z$  в общем случае поглощающей среды можно определить из условия

$$|\Gamma(\rho_k)/\Gamma(0)| = 1. \quad (26)$$

В отсутствие поглощения  $|\Gamma(0)| = 1$  и (26) переходит в обычное определение  $\rho_k$  [5].

Связанная с непрерывными флуктуациями величина  $\alpha^{(M)}(\vec{\rho})$  описана в [5], где использовались несколько иные обозначения. Остановимся подробней на аналогичной характеристике дискретных рассеивателей  $\alpha^{(P)}(\vec{\rho})$ .

Как и в случае среднего поля, величина  $\alpha^{(P)}(\vec{\rho})$  снова представляется в виде разложения (16), где теперь уже

$$h_s = \exp[i(l_{s1} + l_{s2})] = (1 - \Delta_{s1})(1 - \Delta_{s2}), \quad (27)$$

$$\Delta_{sj} = 1 - \exp(il_{sj}), \quad j = 1, 2$$

(последнее представление  $h_s$  удобно для сравнения с моделью черных экранов). В соответствии с (27) для первого члена  $\alpha_1(\vec{\rho})$  указанного разложения, отвечающего независимым частицам, имеем

$$\alpha_1(\vec{\rho}) = c \int \langle 1 - e^{i(l_{s1} + l_{s2})} \rangle d^2\rho_s = c(2\operatorname{Re}\alpha_1 - \int \Delta_{s1} \Delta_{s2} d^2\rho_s), \quad (28)$$

где параметр  $\alpha_1$  определяется соотношением (20).

В случае непоглощающих частиц  $l_{sj} = l_{sj}^*$ , так что  $\alpha^{(P)}(0) = 0$ . Это соотношение выражает хорошо известную в теории переноса излучения оптическую теорему [7]. Аналогичные соотношения выполняются для каждого члена  $\alpha_n(\vec{\rho})$  разложения  $\alpha^{(P)}(\vec{\rho})$  в ряд по корреляционным функциям (16). Из условия  $\alpha_1(0) = 0$  следует, что входящий в (28) интеграл при  $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_2$  в отсутствие поглощения равен

$2 \operatorname{Re} \alpha_1$ . При  $\rho_1 = \rho_2$  интеграл из (28) не выражается в элементарных функциях даже для простейшей модели сферических рассеивателей.

В случае больших фазовых набегов  $\beta \gg 1$  можно пренебречь преломленным полем и перейти к модели черных экранов, которой соответствует замена  $\Delta_{Sj} \approx \eta_{Sj}$ . При этом интеграл из правой части (28) равен площади пересечения теней частиц с центрами в  $\vec{\rho}_1$  и  $\vec{\rho}_2$ . Для сферических частиц имеем

$$S(\vec{\rho}) = \int \eta_{S1} \eta_{S2} d^2 \rho_S = 2a^2 \left[ \arcsin \frac{\rho}{2a} - \frac{\rho}{2a} \sqrt{1 - \left( \frac{\rho}{2a} \right)^2} \right] \Theta(2a - \rho), \quad (29)$$

где  $\Theta(x)$  — функция Хевисайда.

Согласно (29)  $S(0) = \pi a^2 = \Sigma$ . Поскольку  $\alpha_1(\vec{\rho}) = \sigma_{ext,1} - cS(\vec{\rho})$ , где  $\sigma_{ext,1} = 2c\Sigma$  (это соответствует пренебрежению в (21) слагаемыми с  $\beta$ ), вместо оптической теоремы  $\alpha_1(0) = 0$  здесь имеем

$$\alpha_1(0) = c\Sigma, \quad (30)$$

что отвечает полному поглощению поля, падающего на черные экраны.

Связанная с корреляциями поправка  $\alpha_2(\vec{\rho})$  имеет вид второго интеграла в правой части (16) с  $h_S$  (27). Как и в случае среднего поля (23),  $\alpha_2(\vec{\rho})$  при больших  $\beta$  можно представить в виде асимптотического разложения, главный член которого соответствует модели черных экранов. Даже для простейшей модели твердых сфер этот член представляется довольно громоздким интегралом, который в явном виде не вычисляется. Мы не станем далее подробно рассматривать  $\alpha_2(\vec{\rho})$ , поскольку численный расчет этой величины при заданной корреляции рассеивателей  $q_{12}$  не представляет трудности.

Остановимся теперь на поведении радиуса когерентности. Если непрерывные флуктуации отсутствуют, то в среде с некоррелированными сферическими рассеивателями при больших  $\beta \gg 1$  из (26) и (29) для радиуса когерентности плоской падающей волны нетрудно получить оценку

$$\rho_K \sim 1/2ca\beta = \rho_p, \quad (31)$$

справедливую в области  $\rho_K < a$ .

С другой стороны, в отсутствие частиц при наличии в среде

турбулентных флуктуаций радиус когерентности  $\rho_k \sim (kc^2 z)^{-3/5} = \rho_\mu$  [5]. В случае турбулентной среды с частицами  $\rho_k$  можно найти непосредственно из (26), однако грубую оценку  $\rho_k$  можно получить из физических соображений:  $\rho_k \sim \min(\rho_p, \rho_\mu)$ . Поскольку  $\rho_p$  (см. (31)) спадает с ростом трассы  $z$  быстрее, чем  $\rho_\mu$ , при больших трассах  $\rho_k$  определяется в основном рассеянием на частицах и мало зависит от турбулентных флуктуаций.

Как известно, угловые свойства излучения удобней описывать, перейдя от  $\Gamma(\vec{R}, \vec{\rho})$  к обобщенной яркости  $I = I(\vec{R}, \vec{n})$ , т. е. осуществив преобразование Фурье по  $\vec{\rho}$  [7]. При этом уравнение (3) для  $\Gamma$  переходит в малоугловое уравнение переноса для  $I$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \vec{n} \nabla + \sigma_{ext} \right) I = \int \sigma(\vec{n} - \vec{n}') I(\vec{R}, \vec{n}') d^2 n', \quad (32)$$

где  $\sigma_{ext}$  – сечение экстинкции, а сечение рассеяния  $\sigma(\vec{n} - \vec{n}')$  слагается из сечения рассеяния для непрерывных флуктуаций  $\sigma_\mu$  [5] и сечения для частиц  $\sigma_p$ . В модели некоррелированных частиц для  $\sigma_p$  имеем выражение

$$\sigma_p(\vec{n} - \vec{n}') = c \left| \frac{k}{2\pi} \int (1 - e^{i k \vec{n}_S}) e^{i k (\vec{n} - \vec{n}') \vec{\rho}_S} d^2 \rho_S \right|^2, \quad (33)$$

совпадающее с приближением Хюлста [4] и отвечающее первому члену ряда (5) для второго момента поля. Следующие слагаемые этого ряда непосредственно приводят к разложению сечения  $\sigma(\vec{n} - \vec{n}')$  по корреляционным функциям положений частиц.

## ЛИТЕРАТУРА

- Боровой А. Г. //Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 4. С. 391.
- Барабаненков Ю. Н., Калинин М. И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 8. С. 913.
- Апресян Л. А. //Опт. и спектр. 1991. Т. 71. № 4. С. 643.
- Ван де Хулст Г.. Рассеяние света малыми частицами. -М.: ИЛ, 1961. - 536 с.
- Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. -М.: Наука, 1978. Ч. 2.
- Sharma S. K., Somerford D. J. //J. Mod. Opt. 1989. V. 36. N 11. P. 1411.

7. Априсян Л. А., Кравцов Ю. А. Теория переноса излучения. -М.: Наука, 1983.

Радиотехнический институт  
АН Российской

Поступила в редакцию  
23 июля 1991 г.

ON THE PROPAGATION OF RADIATION IN FLUCTUATING MEDIUM WITH  
DISCRETE INCLUSIONS

*L. A. Apresyan*

The structure and solutions of Marcoff approximation for the first two moments of the field propagating in the medium with continuous fluctuations and discrete inclusions are considered. The corrections associated with the second order correlations of inclusions are discussed and conditions of the applicability of the black screens model are estimated too.

УДК 537. 874

**МЕТОД ЭФФЕКТИВНЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ  
ВОЛН НА ЧАСТОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ**

*С. В. Бирюков, В. Г. Полевой*

Предложен простой метод определения эффективных диэлектрических проницаемостей, позволяющий заменить частый двумерно-периодический диэлектрический слой с ячейками прямоугольной формы на однородный и анизотропный слой той же толщины. Метод позволяет избежать решения сложной задачи определения полей внутри ячеек при вычислении коэффициентов отражения и прохождения плоской волны в длинноволновом приближении, что значительно упрощает расчеты.

Сравнение с известными решениями, полученными строгими методами для одномерно-периодических решеток, дает точное совпадение результатов. Метод легко обобщается на магнитодиэлектрические среды, а также на многокомпонентные среды, в том числе с проницаемостями, зависящими от перпендикулярной слою координаты.

Дифракции волн на слое в виде частой по сравнению с длиной волны периодической решетки посвящено большое число работ, в том числе ряд монографий [1 - 3]. Интерес к проблеме связан, с одной стороны, с широким использованием решетчатых структур в элементах конструкций различных радиофизических устройств, а с другой - с чрезвычайно сложной процедурой получения выражений для рассеянных полей, ограничивающей класс поддающихся решению задач. В основном это задачи дифракции на одномерных периодических структурах с ячейками в виде прямоугольных брусьев [2; 4] и круговых цилиндров [5] в случае диэлектриков или более сложных форм в случае металлов [1, 2]. Что же касается двумерно-периодических структур, то за исключением частного случая сеток из тонких металлических проводников [3] дифракция волн на таких структурах детально

практически не изучена.

При исследовании дифракции волн на частом периодическом неоднородном слое важнейшим результатом является вывод выражений для коэффициентов отражения и прохождения плоской волны, что при строгом подходе возможно только после решения соответствующих статических задач внутри ячеек структуры. При этом для упрощения расчетов можно ввести однородные вдоль слоя приближенные граничные условия, обладающие в общем случае анизотропными свойствами, которые при расчете полей эквивалентны действию реальной периодической структуры, начиная с некоторых небольших расстояний от слоя порядка периода [1, 3]. Однако несмотря на такое упрощение, задача остается достаточно сложной, особенно для проведения инженерных расчетов. Поэтому весьма актуальным является дальнейший поиск облегченных процедур анализа, позволяющих за счет снижения строгости изложения значительно его упростить и, возможно, расширить класс рассматриваемых структур.

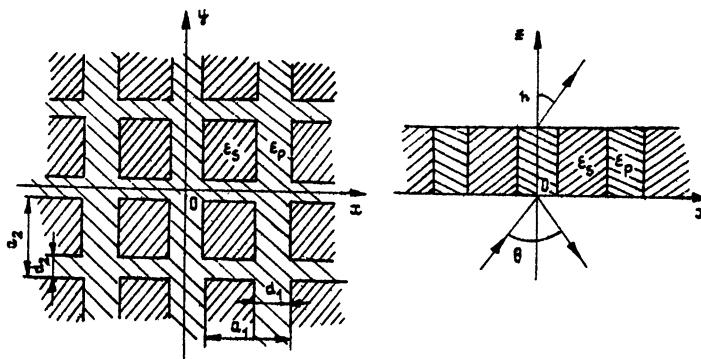


Рис. 1

В данной работе на примере частого двумерно-периодического диэлектрического слоя с ячейками прямоугольной формы (рис. 1) предложена опирающаяся на качественные соображения простая процедура, позволяющая избежать решения статической задачи и заменить неоднородный слой на эквивалентный ему при расчете рассеянных полей однородный и анизотропный слой с диэлектрическими проницаемостями, зависящими от коэффициентов заполнения ячеек.

Пусть на двумерно-периодическую решетку в виде слоя толщины  $h$  в пустом пространстве падает под углом  $\theta$  плоская волна частоты  $\omega$  (рис. 1). Обозначим периоды структуры вдоль осей  $x = x_1$  и  $y = y_1$  через  $a_1$  и  $a_2$  и соответствующие толщины перегородок через  $d_1$  и  $d_2$ . Будем для простоты считать, что диэлектрическая проницаемость  $\epsilon =$

$\varepsilon(x, y)$  в слое не зависит от координаты  $z = x_3$  и имеет постоянные значения  $\varepsilon_p$  в материале перегородок и  $\varepsilon_s$  в промежутках между ними. Предполагается, что выполнены условия  $(a_1/\lambda), (a_2/\lambda) \ll 1$ , где  $\lambda = 2\pi/k$ ,  $k = \omega/c$ ,  $c$  - скорость света в вакууме.

Очевидно, что вблизи и внутри решетки поля существенно меняются на периодах структуры. Поскольку решетка частая периодическая, то для описания ее свойств как целого воспользуемся усредненными (сглаженными) по периодам структуры полями, полагая, например, для электрического поля

$$\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{a_1 a_2} \int_{-a_1/2}^{a_1/2} \int_{-a_2/2}^{a_2/2} dx' dy' \vec{E}(x + x', y + y', z). \quad (1)$$

Усреднение (1) можно представить в виде последовательности двух усреднений, производимых вдоль осей  $x$  и  $y$ . Обозначим

$$\langle \vec{E} \rangle_x = \frac{1}{a_1} \int_{-a_1/2}^{a_1/2} dx' \vec{E}(x + x', y, z), \quad \langle \vec{E} \rangle_y = \frac{1}{a_2} \int_{-a_2/2}^{a_2/2} dy' \vec{E}(x, y + y', z).$$

При этом полное усреднение можно записать в виде

$$\langle \vec{E} \rangle = \langle \langle \vec{E} \rangle_x \rangle_y = \langle \langle \vec{E} \rangle_y \rangle_x. \quad (2)$$

Заметим, что на превышающих периоды расстояниях от решетки характерный масштаб изменения полей определяется длиной волны, а не периодами структуры [1], т. е. здесь средние значения полей (1) должны совпадать с истинными их значениями. Поэтому для описания полей вне решетки достаточно установить связь между компонентами усредненных полей внутри решетки.

Рассмотрим материальное уравнение  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  ( $\vec{D}$  - вектор электрической индукции), справедливое в каждой точке неоднородного слоя. Возьмем проекцию этого уравнения на ось  $x$ , усреднив ее по периоду вдоль оси  $y$ :

$$\langle D_1(x, y, z) \rangle_y = \langle \varepsilon(x, y) E_1(x, y, z) \rangle_y. \quad (3)$$

Здесь мы сделаем основное качественное предположение, состоящее в том, что если имеется произведение двух функций, одна из которых непрерывна по какой-либо оси, а другая претерпевает резкие изменения, то усредненное по периоду вдоль этой оси произведение можно записать в виде произведения усредненных значений самих функций. Такое предположение достаточно оправдано, так как непрерывная функция представляется имеющей более плавный характер изменений вдоль периода структуры, чем другая.

В (3)  $E_1(x, y, z)$  при фиксированных  $x$  и  $z$  будет непрерывной функцией  $y$  как тангенциальная компонента поля к пересекаемым при изменении  $y$  плоским границам сред. Равенство (3) можно тогда переписать в виде

$$\langle D_1(x, y, z) \rangle_y = \langle \epsilon(x, y) \rangle_y \langle E_1(x, y, z) \rangle_y. \quad (4)$$

Поскольку  $\epsilon(x, y)$  периодическая функция  $y$ , то после усреднения ее по периоду вдоль  $y$  она от  $y$  уже зависеть не будет. Усредним теперь (4) по оси  $x$ . Заметим, что  $\langle D_1 \rangle_y$  представляет нормальную компоненту индукции к слоям, пересекаемым при изменении  $x$ . Поэтому  $\langle D_1 \rangle_y$  непрерывная функция  $x$ , а так как  $\langle \epsilon(x, y) \rangle_y$  разрывная функция, то в соответствии с предложенной процедурой усреднения перепишем (4) предварительно в виде

$$\frac{1}{\langle \epsilon(x, y) \rangle_y} \langle D_1(x, y, z) \rangle_y = \langle E_1(x, y, z) \rangle_y. \quad (5)$$

После усреднения (5) по  $x$  с учетом обозначений (2) имеем связь

$$\langle \frac{1}{\langle \epsilon \rangle} \rangle_x \langle D_1 \rangle_y = \langle E_1 \rangle_y,$$

которая позволяет ввести не зависящую от координат эффективную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1$  по оси  $x$  как коэффициент пропорциональности между усредненными полями:

$$\langle D_1 \rangle = \epsilon_1 \langle E_1 \rangle, \quad (6)$$

где

$$\frac{1}{\epsilon_1} = \langle \frac{1}{\langle \epsilon \rangle} \rangle_x. \quad (7)$$

Совершенно аналогичным образом вводится и эффективная диэлектрическая проницаемость вдоль оси  $y$ :

$$\langle D_2 \rangle = \varepsilon_2 \langle E_2 \rangle, \quad (8)$$

где

$$\frac{1}{\varepsilon_2} = \langle \frac{1}{\varepsilon} \rangle_x. \quad (9)$$

Осталось еще найти эффективную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_3$  вдоль оси  $z$ , связывающую компоненты  $\langle D_3 \rangle$  и  $\langle E_3 \rangle$ :

$$\langle D_3 \rangle = \varepsilon_3 \langle E_3 \rangle. \quad (10)$$

Это легко сделать усреднением равенства

$$D_3(x, y, z) = \varepsilon(x, y) E_3(x, y, z)$$

по осям  $x$  и  $y$ , замечая, что  $E_3(x, y, z)$  - непрерывная функция координат как тангенциальная компонента поля к слоям диэлектрика, пересекаемым при изменении  $x$  и  $y$ . Из нашего предположения об усреднении произведения тогда следует, что

$$\varepsilon_3 = \langle \varepsilon(x, y) \rangle. \quad (11)$$

Этим заканчивается вычисление эффективных проницаемостей среды. В тензорном виде имеем

$$\langle D_i \rangle = \varepsilon_{ij} \langle E_j \rangle \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

причем тензор  $\varepsilon_{ij}$  при принятом направлении координатных осей оказывается диагональным:

$$\| \varepsilon_{ij} \| = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Таким образом, в длинноволновом приближении для расчета полей вне неоднородного слоя толщины  $h$  рассматриваемая двумерно-периодическая структура заменяется сплошным однородным анизотропным диэлектрическим слоем той же толщины с тензором проницаемостей вида (12), где плавные значения  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  определяются выражениями (7), (9) и (11). Их легко можно выписать в явном виде, вводя коэффициенты заполнения ячеек,

$$\gamma_1 = \frac{d_1}{a_1}, \quad \gamma_2 = \frac{d_2}{a_2},$$

по осям  $x$  и  $y$  соответственно (рис. 1):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_p \frac{\varepsilon_s + \gamma_2(\varepsilon_p - \varepsilon_s)}{\varepsilon_p - \gamma_1(1 - \gamma_2)(\varepsilon_p - \varepsilon_s)}; \quad (13)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_p \frac{\varepsilon_s + \gamma_1(\varepsilon_p - \varepsilon_s)}{\varepsilon_p - \gamma_2(1 - \gamma_1)(\varepsilon_p - \varepsilon_s)}; \quad (14)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_s + (\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2)(\varepsilon_p - \varepsilon_s). \quad (15)$$

Отметим, что выражения (13) – (15) для однородной структуры, т. е. при предельных значениях  $\gamma_1 = 1$  (или  $\gamma_2 = 1$ ) переходят в  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_p$ , а при  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  в  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_s$ , как это и должно быть.

Задача отражения и пропускания волн однородным анизотропным слоем с известными проницаемостями не представляет принципиальных трудностей и может быть решена как стандартным методом сшивки полей на плоских границах слоя, так и с использованием импедансных [6, 7] или матричных [8] методов. В данной работе нет необходимости подробно на этом останавливаться, однако поскольку предлагаемый метод опирается на качественное предположение, то его применимость может быть установлена только сравнением со строгим методом расчета или с экспериментальными измерениями. К сожалению, для двумерно-периодических диэлектрических структур такие результаты нам неизвестны. Поэтому проведем сравнение с хорошо известным строгим решением задачи рассеяния на одномерной периодической структуре в виде прямоугольных брусьев [2, 4]. В нашем подходе этот случай соответствует значению  $\gamma_2 = 0$  ( $d_2 = 0$ , брусья направлены вдоль оси  $y$ ), для которого из (13) – (15) легко получить

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_s}{\varepsilon_p - \gamma_1(\varepsilon_p - \varepsilon_s)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_s + (\varepsilon_p - \varepsilon_s)\gamma_1. \quad (16)$$

Пусть, как и в [4], плоскость падения волны на слой (рис. 1) совпадает с плоскостью  $xz$ , ее волновой вектор составляет угол  $\theta$  с осью  $z$ , а зависимость всех полей от времени дается множителем  $e^{-i\omega t}$ . Обозначим соответственно через  $E_1$  и  $E_t$  тангенциальные составляющие электрического поля падающей волны при  $z = 0$  в случаях поляризаций в

плоскости падения и перпендикулярно к ней, через  $E_1^R$  и  $E_t^R$  - в отраженных волнах при  $z = 0$  и через  $E_1(h)$  и  $E_t(h)$  - в прошедших волнах при  $z = h$ . Поскольку плоскость падения перпендикулярна образующим брусьев, то трансформация волн одной поляризации в другую отсутствует и амплитудные коэффициенты отражения  $R_{1,t}$  и прохождения  $T_{1,t}$  для волн различных поляризаций можно ввести соотношениями

$$E_{1,t}^R = R_{1,t} E_{1,t}, \quad E_{1,t}(h) = T_{1,t} E_{1,t}. \quad (17)$$

Несложное рассмотрение рассеяния волны анизотропным слоем с проницаемостями (16) приводит к следующим результатам:

$$R_t = \frac{i(\epsilon_2 - 1)\sin\varphi_2}{2pp_2\cos\varphi_2 - i(p^2 + p_2^2)\sin\varphi_2}; \quad (18)$$

$$T_t = \frac{2pp_2}{2pp_2\cos\varphi_2 - i(p^2 + p_2^2)\sin\varphi_2}; \quad (19)$$

$$R_1 = \frac{i(p^2\epsilon_1\epsilon_3 - p_3^2)\sin\varphi_3}{2pp_3\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\cos\varphi_3 - i(p^2\epsilon_1\epsilon_3 + p_3^2)\sin\varphi_3}; \quad (20)$$

$$T_1 = \frac{2pp_3\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}}{2pp_3\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\cos\varphi_3 - i(p^2\epsilon_1\epsilon_3 + p_3^2)\sin\varphi_3}, \quad (21)$$

где

$$p = \cos\theta, \quad p_2 = \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2\theta}, \quad p_3 = \sqrt{\epsilon_3 - \sin^2\theta},$$

$$\varphi_2 = khp_2, \quad \varphi_3 = khp_3\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_3}. \quad (22)$$

Напомним, что здесь согласно (16) имеет место равенство  $\epsilon_2 = \epsilon_3$ , однако для дальнейшего удобно сохранить различие в обозначениях.

Оказывается, что полученные предложенным простым методом результаты (18) - (21) в точности совпадают с соответствующими

строгими результатами работы [4] в случае диэлектрических брусьев, отличаясь от них лишь обозначениями диэлектрических проницаемостей. Эти обозначения здесь нам кажутся более удобными, так как в соответствии с определениями (6), (8) и (10) имеют простой физический смысл. В частности, эффект полного проникновения поляризованной в плоскости падения волны через систему брусьев – эффект Малюжинца (см., например, [2, 4]) можно трактовать тогда как проявление эффекта Брюстера для эквивалентного однородного анизотропного слоя, при котором имеют место равенства  $R_e = 0$  и  $|T_1| = 1$ , осуществляющиеся (см. (20) и (21)) при угле падения  $\theta$ , удовлетворяющем соотношению

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \epsilon_3 \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_3 - 1}. \quad (23)$$

Таким образом, проведенное сравнение показывает, что предложенная процедура замены в длинноволновом приближении периодического неоднородного слоя однородным приводит в случае брусьев к строгим результатам для рассеянных полей без громоздкой и сложной процедуры учета статических полей внутри ячеек структуры.

В качестве примера приведем результаты для рассеянных полей в случае изображенной на рис. 1 двумерно-периодической структуры при одинаковых коэффициентах заполнения  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ . Из общих выражений (13) – (15) получаем

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_p \frac{\epsilon_s + \gamma(\epsilon_p - \epsilon_s)}{\epsilon_p - \gamma(1 - \gamma)(\epsilon_p - \epsilon_s)}, \quad \epsilon_3 = \epsilon_s + \gamma(2 - \gamma)(\epsilon_p - \epsilon_s), \quad (24)$$

т. е. эквивалентный слой представляет собой одноосный кристалл с осью вдоль оси  $z$  или, другими словами, поперечно-изотропный однородный слой. При рассеянии падающей волны на таком слое также не происходит трансформации волн различных поляризаций, процедура расчета достаточно проста и нет смысла на ней останавливаться.

Оказывается, что в этом случае для коэффициентов отражения и прохождения в определении (17) справедливы прежние выражения (18) – (21) с учетом обозначений (22), однако для других значений эффективных диэлектрических проницаемостей, определяемых (24), а не (16). В частности, сохраняется выражение для угла падения (23), при котором осуществляется полное прохождение волны через ячеистую структуру.

В заключение сделаем следующее замечание. Чтобы не усложнять

изложение предложенного метода, выше мы ограничились случаем чисто диэлектрических двухкомпонентных структур. Однако из самого изложения ясно, что включение в рассмотрение и многокомпонентных, в том числе магнитодиэлектрических двумерно-периодических структур с ячейками прямоугольной формы, не требует специального рассмотрения. При этом для эффективных проницаемостей как диэлектрических, так и магнитных будут иметь место соотношения типа (7), (9) и (11). Более того, исходные проницаемости в структуре могут быть функциями и координаты  $z$ , что после выполнения описанных процедур усреднения приведет к задаче рассеяния волны на слоистой структуре с эффективными проницаемостями, зависящими от этой координаты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нефедов Е. И., Сивов А. Н. Электродинамика периодических структур. - М.: Наука, 1977.
2. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки. - Киев: Наукова думка, 1986.
3. Конторович М. И., Астрахан М. И., Акимов В. П., Ферсман Г. А. Электродинамика сетчатых структур. - М.: Радио и связь, 1987.
4. Боровский И. В., Гамуля О. Г., Хижняк Н. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33. N 8. С.943.
5. Богданов Ф. Г., Кеванишвили Г. Ш., Чихладзе М. Н. //Радиотехника и электроника. 1987. Т.32. N 3. С.473.
6. Полевой В. Г. //Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т.27. N 10. С.1316.
7. Бирюков С. В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т.28. N 9. С.1175.
8. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. - М.: Мир, 1981.

Радиотехнический институт имени  
академика А. Л. Минца

Поступила в редакцию  
13 августа 1991 г.

THE EFFECTIVE PERMITTIVITY METHOD IN THE PROBLEM  
OF WAVE DIFFRACTION BY THE OFT-RECURRING DIELECTRIC GRATING

S.V.Biryukov, V.G.Polevoy

The simple method for determination of effective permittivities for oft-recurring two-dimensional periodical dielectric layer with rectangular form elements are proposed. The solution of the complex problem for internal field determination to calculate the reflection and transmission coefficients of plane wave is not used. The comparison with the known results for one-dimensional periodical gratings gives a full correspondence.

УДК 537. 874. 6

## ДИФРАКЦИЯ Н-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЧАСТИЧНО ЭКРАНИРОВАННОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

*З. Т. Назарчук, З. М. Хмиль*

Методом потенциала и на основе теоремы Грина построены различные системы гиперсингулярных интегральных уравнений двумерной задачи дифракции *Н*-поляризованных электромагнитных волн на диэлектрическом цилиндре произвольного поперечного сечения с продольно-щелевым металлическим покрытием. Их численное решение найдено методом механических квадратур с использованием специальных квадратурных формул интерполяционного типа. Дано сравнение полученных результатов и вычислены диаграммы направленности цилиндра эллиптического и прямоугольного сечения для различных размеров щели в покрытии и углов падения дифрагирующей плоской волны.

В современной радиофизике актуальной проблемой является теоретическое исследование взаимодействия электромагнитного поля с металлодиэлектрическими цилиндрами, которые находят широкое применение при создании эффективных трактов миллиметровых и субмиллиметровых волн [3]. Дифракционные свойства таких заполненных зеркальных щелевых линий в представляющем для практики интерес промежуточном волновом диапазоне изучаются в настоящее время на основе строгих численно-аналитических методов, принципиально применимых лишь в случае сечений постоянной кривизны и реализованных пока для круговых цилиндров [6, 7]. Универсальные алгоритмы численного исследования рассеяния волн резонансного диапазона на частично металлизированном диэлектрическом цилиндре произвольного кусочно-гладкого профиля практически отсутствуют несмотря на то, что различные интегральные уравнения, моделирующие задачу дифракции на диэлектрическом стержне [1, 9], системе экранов [8] и многослойном теле [2], давно известны. Ниже такое построение и необходимая апробация выполнены на основе сингулярных интегральных уравнений для более сложного в реализации случая *Н*-поляризованного возбуждения структуры.

**Постановка задачи.** Пусть в свободном пространстве содержится бесконечно длинный диэлектрический цилиндр с продольно-щелевым металлическим покрытием. Окружающая среда и цилиндр характеризуются разными волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$ . Декартову систему координат  $xoy$  выберем так, чтобы ось  $oz$  была направлена вдоль образующей рассматриваемой структуры. Поперечное сечение цилиндра – двумерная область  $S_2$ , ограниченная контуром  $L_0$  с положительным обходом против часовой стрелки. Пусть  $S_1$  – внешняя по отношению к  $S_2$  часть плоскости  $xoy$ . Направляющую идеально проводящего бесконечно тонкого слоя обозначим через  $L_e$ . Дуга  $L_d$  соответствует остатку направляющей диэлектрического цилиндра, свободному от металлического покрытия ( $L_d = L_0 - L_e$ ). Условимся положительными считать нормали  $\vec{n}$ , направленные влево от  $L_0$ . Первичное поле  $H_0(z, \bar{z})$  ( $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ ) распространяется параллельно плоскости  $xoy$ . Ставится задача определения суммарного поля дифракции  $H_{1,2}(z, \bar{z})$  в области  $S_{1,2}$ , удовлетворяющего уравнению Гельмгольца с волновым числом  $k_{1,2}$  условиям Неймана на дуге  $L_e$

$$\frac{\partial H_1}{\partial n} \Big|_{L_e} = \frac{\partial H_2}{\partial n} \Big|_{L_e} = 0 \quad (1)$$

и условиям сопряжения на  $L_d$

$$H_1 \Big|_{L_d} = H_2 \Big|_{L_d}, \quad k_1^{-2} \frac{\partial H_1}{\partial n} \Big|_{L_d} = k_2^{-2} \frac{\partial H_2}{\partial n} \Big|_{L_d}. \quad (2)$$

Для обеспечения единственности решения требуется также выполнение условий конечности энергии в окрестностях ребер и условий излучения Зоммерфельда для поля рассеяния.

**Интегральные уравнения задачи.** Рассмотрим два подхода к построению интегральных уравнений. Первый способ основан на использовании в областях  $S_1$  и  $S_2$  формулы Грина

$$\int \int_S (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_L \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (3)$$

(дифференцирование производится по внешней нормали к области  $S$ ) и аналогичен применявшемуся ранее для диэлектрических цилиндров [2, 9]. Интегральные представления для общих решений задачи при этом имеют вид

$$H_1(z, \bar{z}) = H_0(z, \bar{z}) - \frac{1}{2\pi} \int_{L_e} H_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{L_d} \left( \frac{\partial H_1}{\partial n} G_1 - H_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right) ds,$$

$$z \in S_1, \quad (4)$$

$$H_2(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_e} H_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{L_d} \left( \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial n} G_2 - H_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} \right) ds, \quad z \in S_2,$$

где  $G_{1,2} = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k_{1,2} r)$  - фундаментальные решения уравнения Гельмгольца;  $\vec{n}$  - внутренняя нормаль к  $S_2$ ;  $s$  - дуговая абсцисса, соответствующая точке  $M(x, y)$  на контуре  $L_0$ . Для сокращения записи аргументы в ядрах опущены.

Введем обозначения

$$m_{1,2}(s) = \frac{1}{2\pi} H_{1,2} \Big|_{L_e}, \quad s \in L_e; \quad m_{1,2}(s) \equiv 0, \quad s \in L_d;$$

$$m(s) = \frac{1}{2\pi} H_1 \Big|_{L_d}, \quad \eta(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial H_1}{\partial n} \Big|_{L_d}, \quad s \in L_d; \quad (5)$$

$$m(s) \equiv \eta(s) \equiv 0, \quad s \in L_e$$

и параметрические уравнения  $T_{e,d} = T_{e,d}(\tau)$ ,  $-1 \leq \tau \leq 1$  контуров  $L_{e,d}$  соответственно. Опустим точку  $z$  на границу  $L_0$ , используем свойства потенциалов простого и двойного слоя, а также, в отличие от работ [2, 9], повторно условия (1), (2). В результате приходим к следующей системе интегральных уравнений первого рода:

$$\begin{aligned} & - \int_{L_e} m_1(s) \frac{\partial}{\partial n_{0e}} \frac{\partial}{\partial n} G_1 ds + \int_{L_d} \left[ \eta(s) \frac{\partial}{\partial n_{0e}} G_1 - m(s) \frac{\partial}{\partial n_{0e}} \frac{\partial}{\partial n} G_1 \right] ds = \\ & = - \frac{\partial}{\partial n_{0e}} H_0(T_0), \quad T_0 \in L_e; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{L_e} m_2(s) \frac{\partial}{\partial n_{0e}} \frac{\partial}{\partial n} G_2 ds - \int_{L_d} \left[ \frac{k_2^2}{k_1^2} \eta(s) \frac{\partial}{\partial n_{0e}} G_2 - m(s) \frac{\partial}{\partial n_{0e}} \frac{\partial}{\partial n} G_2 \right] ds = 0; \\
& - \int_{L_e} m_1(s) \frac{\partial G_1}{\partial n} ds - \int_{L_e} m_2(s) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds + \int_{L_d} \eta(s) \left( G_1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} G_2 \right) ds - \\
& - \int_{L_d} m(s) \left( \frac{\partial G_1}{\partial n} + \frac{\partial G_2}{\partial n} \right) ds = -H_0(T_0), \quad T_0 \in L_d; \\
& - \frac{1}{k_1^2} \int_{L_e} m_1(s) \frac{\partial}{\partial n_{0d}} \frac{\partial}{\partial n} G_1 ds - \frac{1}{k_2^2} \int_{L_e} m_2(s) \frac{\partial}{\partial n_{0d}} \frac{\partial}{\partial n} G_2 ds + \\
& + \frac{1}{k_1^2} \int_{L_d} \eta(s) \left( \frac{\partial G_1}{\partial n_{0d}} + \frac{\partial}{\partial n_{0d}} G_2 \right) ds - \int_{L_d} m(s) \left( \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial n_{0d}} \frac{\partial}{\partial n} G_1 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial n_{0d}} \frac{\partial}{\partial n} G_2 \right) ds = - \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial H_0(T_0)}{\partial n_{0d}}, \quad T_0 \in L_d.
\end{aligned}$$

Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) = -\frac{k}{|T'|} H_1^{(1)}(kr) \operatorname{Im}\left(\frac{T - T_0}{r} \bar{T}'\right), \quad r = |T - T_0|,$$

$$\frac{\partial}{\partial n_0} H_1^{(1)}(kr) = -\frac{k}{2|T'_0|} [H_0^{(1)}(kr) - H_2^{(1)}(kr)] \operatorname{Im}\left(\frac{T - T_0}{r} \bar{T}'_0\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial n_0} \left[ \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \right] = \frac{k^2}{2|T'| |T'_0|} \left[ H_0^{(1)}(kr) \operatorname{Re}(T' \cdot \bar{T}'_0) + \right.$$

$$\left. + H_2^{(1)}(kr) \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{T} - \bar{T}'_0}{\bar{T} - T'_0} T' T'_0\right) \right]$$

и выделяя сильные, логарифмические и стационарные особенности в ядрах, уравнения (6) запишем в нормализованной форме

$$-\int_{-1}^1 \frac{m_\nu(\tau)}{(\tau - \tau_0)^2} d\tau + \int_{-1}^1 m_\nu(\tau) P_\nu^e(\tau, \tau_0) \ln|\tau - \tau_0| d\tau = \quad (7)$$

$$-\int_{-1}^1 m_\nu(\tau) L_\nu^e(\tau, \tau_0) d\tau + \int_{-1}^1 \eta^*(\tau) M_\nu^{d*}(\tau, \tau_0) d\tau - \int_{-1}^1 m(\tau) K_\nu^{d*}(\tau, \tau_0) d\tau =$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dz^d}{d\tau_0} \int_{-1}^1 \frac{m(\tau)}{(\tau - z^d)^2} d\tau - \frac{1}{2} \frac{d\bar{z}^d}{d\tau_0} \int_{-1}^1 \frac{m(\tau)}{(\tau - \bar{z}^d)^2} d\tau = F_\nu(\tau_0), \quad \nu = 1, 2;$$

$$F_\nu(\tau_0) = \begin{cases} -|T'_{e0}| \frac{\partial H_0(T_{e0})}{\partial n_{0e}}, & \nu = 1 \\ 0, & \nu = 2 \end{cases};$$

$$\int_{-1}^1 m_1(\tau) S_1^e(\tau, \tau_0) d\tau + \int_{-1}^1 m_2(\tau) S_2^e(\tau, \tau_0) d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^1 \eta^*(\tau) \left[ Q_1^d(\tau, \tau_0) + \frac{k_2^2}{k_1^2} Q_2^d(\tau, \tau_0) \right] d\tau -$$

$$- \left( 1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} \right) \int_{-1}^1 \eta^*(\tau) \ln|\tau - \tau_0| d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^1 m(\tau) [S_1^d(\tau, \tau_0) + S_2^d(\tau, \tau_0)] d\tau = -H_0(T_{d0});$$

$$- \sum_{\nu=2}^2 \frac{1}{k_\nu^2} \left[ \int_{-1}^1 m_\nu(\tau) K_\nu^{e*}(\tau, \tau_0) d\tau + \frac{1}{2} \frac{dz^e}{d\tau_0} \int_{-1}^1 \frac{m_\nu(\tau)}{(\tau - z^e)^2} d\tau \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{d\bar{z}^e}{d\tau_0} \int_{-1}^1 \frac{m_v(\tau)}{(\tau - \bar{z}^e)^2} d\tau \Big] + \frac{1}{k_1^2} \int_{-1}^1 \eta^*(\tau) [R_1^d(\tau, \tau_0) + R_2^d(\tau, \tau_0)] d\tau - \\
& - \left( \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) \int_{-1}^1 \frac{m(\tau)}{(\tau - \tau_0)^2} d\tau + \int_{-1}^1 m(\tau) \left[ \frac{1}{k_1^2} P_1^d(\tau, \tau_0) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{k_2^2} P_2^d(\tau, \tau_0) \right] \ln|\tau - \tau_0| d\tau - \\
& - \int_{-1}^1 m(\tau) \left[ \frac{1}{k_1^2} L_1^d(\tau, \tau_0) + \frac{1}{k_2^2} L_2^d(\tau, \tau_0) \right] d\tau = - \frac{1}{k_1^2} |T'_{d0}| \frac{\partial H_0(T_{d0})}{\partial n_{0d}}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\eta^*(\tau) = \eta(\tau) |T'_d|; \quad P_{1,2}^{e,d}(\tau, \tau_0) = \frac{k_1^2}{2} \operatorname{Re}(T'_{e,d} \bar{T}'_{e0,d0}); \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
L_{1,2}^{e,d}(\tau, \tau_0) &= \frac{k_1^2}{2} \left\{ \operatorname{Re}(T'_{e,d} \bar{T}'_{e0,d0}) \left[ \ln|\tau - \tau_0| + \right. \right. \\
&+ \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k_{1,2} |T_{e,d} - T_{e0,d0}|) \Big] + \frac{\pi i}{2} H_2^{(1)}(k_{1,2} |T_{e,d} - T_{e0,d0}|) \times \\
&\times \left. \operatorname{Re} \left( \frac{\frac{T_{e,d} - T_{e0,d0}}{|T_{e,d} - T_{e0,d0}|}}{T'_{e,d} - T'_{e0,d0}} T'_{e,d} - T'_{e0,d0} \right) \right\} - \frac{1}{(\tau - \tau_0)^2};
\end{aligned}$$

$$M_{1,2}^d(\tau, \tau_0) = \frac{\pi i}{2} k_{1,2} H_1^{(1)}(k_{1,2} |T_d - T_{e0}|) \operatorname{Im} \left( \frac{T_d - T_{e0}}{|T_d - T_{e0}|} \bar{T}'_{e0} \right);$$

$$M_1^{d*}(\tau, \tau_0) = M_1^d(\tau, \tau_0); \quad M_2^{d*}(\tau, \tau_0) = \frac{k_2^2}{k_1^2} M_2^d(\tau, \tau_0);$$

$$K_{1,2}^{e,d}(\tau, \tau_0) = \frac{\pi i}{4} k_{1,2}^2 \left[ H_0^{(1)}(k_{1,2}|T_{e,d} - T_{d0,e0}|) \operatorname{Re}(T'_{e,d} \bar{T}'_{d0,e0}) + \right.$$

$$\left. + H_2^{(1)}(k_{1,2}|T_{e,d} - T_{d0,e0}|) \operatorname{Re}\left(\frac{\frac{T_{e,d}}{T_{e,d}} - \frac{T_{d0,e0}}{T_{d0,e0}}}{\frac{T_{e,d}}{T_{e,d}} - \frac{T_{d0,e0}}{T_{d0,e0}}} T'_{e,d} T'_{d0,e0}\right)\right];$$

$$K_{1,2}^{e*,d*}(\tau, \tau_0) = K_{1,2}^{e,d}(\tau, \tau_0) - \operatorname{Re}\left[\frac{dz^{e,d}}{d\tau_0} \frac{1}{(\tau - z^{e,d})^2}\right];$$

$$z^{e,d} = \tau_0 - \frac{T_{e0,d0} - T_{d0,e0}}{T'_{e0,d0}};$$

$$Q_{1,2}^a(\tau, \tau_0) = \ln|\tau - \tau_0| + \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k_{1,2}|T_d - T_{d0}|);$$

$$S_{1,2}^{e,d}(\tau, \tau_0) = \frac{\pi i}{2} k_{1,2} H_1^{(1)}(k_{1,2}|T_{e,d} - T_{d0}|) \operatorname{Im}\left(\frac{T_{e,d} - T_{d0}}{|T_{e,d} - T_{d0}|} \bar{T}'_{e,d}\right);$$

$$R_{1,2}^d(\tau, \tau_0) = \frac{\pi i}{2} k_{1,2} H_1^{(1)}(k_{1,2}|T_d - T_{d0}|) \operatorname{Im}\left(\frac{T_d - T_{d0}}{|T_d - T_{d0}|} \bar{T}'_{d0}\right);$$

$T_{e0,d0} = T_{e,d}(\tau_0)$ ; штрих и черта над символом обозначают производную по аргументу и комплексное сопряжение.

Неизвестные функции, имеющие смысл тангенциальных компонент суммарного поля на экране и диэлектрике, ищем в классе Гельдера  $H$  с ненулевыми значениями на концах отрезков интегрирования.

Во втором подходе интегральные уравнения дифракционной задачи получим методом потенциала. При этом результирующее поле рассматриваем как суперпозицию первичной волны и полей рассеяния на экране и диэлектрике:

$$H_1(z, \bar{z}) = H_0(z, \bar{z}) + \int_{L_e} m_1(s) \frac{\partial G_1}{\partial n} ds + \int_{L_d} \eta_1(s) G_1 ds, \quad z \in S_1; \quad (9)$$

$$H_2(z, \bar{z}) = \int_{L_e} m_2(s) \frac{\partial G_2}{\partial n} ds + \int_{L_d} \eta_2(s) G_2 ds, \quad z \in S_2.$$

Здесь неизвестные функции  $m_{1,2}(s)$  имеют смысл плотностей токов, наводимых на экране первичным полем; плотности потенциала простого слоя  $\eta_{1,2}(s)$  физического смысла не имеют.

Удовлетворяя условиям (1) и (2) и учитывая свойства непрерывности потенциала простого слоя и разрыв его нормальной производной при переходе через границу  $L_d$ , получим систему гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода. Опуская очевидную ее запись в естественных обозначениях, выделяя сильные стационарные особенности в ядрах и переходя к нормализованной форме, будем иметь

$$\cdot \int_{-1}^1 \frac{m_\nu(\tau)}{(\tau - \tau_0)^2} d\tau - \int_{-1}^1 m_\nu(\tau) P_\nu^e(\tau, \tau_0) \ln|\tau - \tau_0| d\tau + \quad (10)$$

$$+ \int_{-1}^1 m_\nu(\tau) L_\nu^e(\tau, \tau_0) d\tau + \int_{-1}^1 \eta_\nu^*(\tau) M_\nu^d(\tau, \tau_0) d\tau = F_\nu(\tau_0), \quad \nu = 1, 2;$$

$$F_\nu(\tau_0) = \begin{cases} -|T'_{e0}| \frac{\partial H_0(T_{e0})}{\partial n_{0e}}, & \nu = 1 \\ 0, & \nu = 2 \end{cases};$$

$$- \int_{-1}^1 m_1(\tau) S_1^e(\tau, \tau_0) d\tau + \int_{-1}^1 m_2(\tau) S_2^e(\tau, \tau_0) d\tau + \int_{-1}^1 \eta_1^*(\tau) Q_1^d(\tau, \tau_0) d\tau -$$

$$- \int_{-1}^1 \eta_2^*(\tau) Q_2^d(\tau, \tau_0) d\tau - \int_{-1}^1 \eta_1^*(\tau) \ln|\tau - \tau_0| d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^1 \eta_2^*(\tau) \ln|\tau - \tau_0| d\tau = -H_0(T_{d0});$$

$$\frac{1}{k_1^2} \int_{-1}^1 m_1(\tau) K_1^{e*}(\tau, \tau_0) d\tau + \frac{1}{2k_1^2} \left[ \frac{dz^e}{d\tau_0} \right] \int_{-1}^1 \frac{m_1(\tau)}{(\tau - z^e)^2} d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d\bar{z}^e}{d\tau_0} \int_{-1}^1 \frac{m_1(\tau)}{(\tau - \bar{z}^e)^2} d\tau \Big] - \frac{1}{k_2^2} \int_{-1}^1 m_2(\tau) K_2^{e*}(\tau, \tau_0) d\tau - \\
& - \frac{1}{2k_2^2} \left[ \frac{dz^e}{d\tau_0} \int_{-1}^1 \frac{m_2(\tau)}{(\tau - z^e)^2} d\tau + \frac{d\bar{z}^e}{d\tau_0} \int_{-1}^1 \frac{m_2(\tau)}{(\tau - \bar{z}^e)^2} d\tau \right] + \\
& + \pi \frac{1}{k_1^2} \eta_1^*(\tau_0) + \frac{1}{k_1^2} \int_{-1}^1 \eta_1^*(\tau) R_1^d(\tau, \tau_0) d\tau + \pi \frac{1}{k_2^2} \eta_2^*(\tau_0) - \\
& - \frac{1}{k_2^2} \int_{-1}^1 \eta_2^*(\tau) R_2^d(\tau, \tau_0) d\tau = - \frac{1}{k_1^2} |T'_{d0}| \frac{\partial H_0(T_{d0})}{\partial n_{od}}.
\end{aligned}$$

Здесь все обозначения даются формулами (8). Неизвестные  $\eta_{1,2}^*(\tau)$ , не имеющие физического смысла, будем искать в классе непрерывных по Гельдеру функций без особенностей на концах отрезка интегрирования. По аналогии с задачей дифракции на экране в однородном пространстве [8] в функциях  $m_{1,2}(\tau)$  выделим корневую особенность:

$$m_{1,2}(\tau) = \sqrt{1 - \tau^2} \varphi_{1,2}(\tau), \quad \varphi_{1,2}(\tau) \in H.$$

При наличии на контуре  $L_e$  точек излома исходный экран рассматриваем как электродинамическую систему из  $n$  гладких звеньев, концевые точки которых совпадают с геометрическими сингулярностями. Тогда общее решение дифракционной задачи будем искать в виде

$$H_1(z, \bar{z}) = H_0(z, \bar{z}) + \sum_{\nu=1}^n \int_{L_{e\nu}} m_{1\nu}(s) \frac{\partial G_1 \nu}{\partial n} ds_\nu + \int_{L_d} \eta_1(s) G_1 ds, \quad (11)$$

$$H_2(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=1}^n \int_{L_{e\nu}} m_{2\nu}(s) \frac{\partial G_2 \nu}{\partial n} ds_\nu + \int_{L_d} \eta_2(s) G_2 ds.$$

Отметим, что в этом случае при получении аналога системы (10) необходимо выделить слагаемые с неподвижными особенностями на каждой из дуг  $L_{eV}$ .

Таким образом, для решения задачи предложены разные по структуре системы интегральных уравнений. Уравнения второго рода (10) более просты с точки зрения численной реализации, однако содержат неизвестные функции на  $L_d$ , которые не имеют физического смысла. Более трудоемкое решение системы (7), содержащей сильные особенности на контурах  $L_e$  и  $L_d$ , позволяет непосредственно определить тангенциальные компоненты суммарного поля на контуре поперечного сечения цилиндра. Выделенные в каждой из полученных систем слагаемые с сильными неподвижными особенностями позволяют корректно учитывать поведение подынтегральных функций в окрестностях точек стыка дуг  $L_e$  и  $L_d$ . Общей же особенностью сингулярных уравнений является наличие в соответствующих им алгебраических системах преобладающих диагоналей, позволяющих получить устойчивые численные решения.

**Численное решение интегральных уравнений.** Схему решения систем (7) и (10) построим на основе метода механических квадратур. Для вычисления слагаемых полученных уравнений строим квадратурные формулы интерполяционного типа по системе узлов - нулей полиномов, ортогональных на отрезке  $[-1, 1]$  с соответствующим весом. Для интегралов с единичной весовой функцией в качестве ортогональных многочленов выбираем полиномы Лежандра  $P_N(\tau)$ . Регулярные интегралы найдем согласно Гауссова правила

$$\int_{-1}^1 f(x)L(x, \tau_0)dx = \sum_{l=1}^N A_l^N f(\tau_l) L(\tau_l, \tau_0), \quad (12)$$

где  $A_l^N$  - весовые коэффициенты;  $\tau_l$ ,  $l = \overline{1, N}$  - нули полинома Лежандра  $P_N(\tau)$ .

Согласно методике получения квадратурных правил для логарифмического и гиперсингулярного интегралов, описанной в [4], будем иметь

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - \tau_0)^2} d\tau = - \sum_{l=1}^N A_l^N f(\tau_l) \left[ Q'_0(\tau_0) + \sum_{m=1}^{N-1} (2m+1) P_m(\tau_l) Q'_m(\tau_0) \right]; \quad (13)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi(\tau) \ln|\tau - \tau_0| d\tau = \sum_{l=1}^N A_l^N f(\tau_l) \left\{ \ln(1 - \tau_0^2)^{1/2} + \right. \quad (14)$$

$$+ Q_1(\tau_0) + \sum_{m=1}^{N-1} P_m(\tau_1) [Q_{m+1}(\tau_0) - Q_{m-1}(\tau_0)] \Big\} .$$

Здесь  $Q_m(\tau_0)$  - функция Лежандра второго рода. Многочлены и функции Лежандра удовлетворяют одинаковым рекуррентным формулам

$$(j+1)Q_{j+1}(\tau) = (2j+1)\tau Q_j(\tau) - jQ_{j-1}(\tau).$$

Для вычисления в системе (10) слагаемых с весом  $(1-\tau^2)^{1/2}$  используем квадратурные формулы из работы [8]:

$$\int_{-1}^1 \frac{m_{1,2}(\tau)}{(\tau - \tau_0)^2} d\tau = - \frac{\pi}{N+1} \frac{1}{\sin \theta_0} \sum_{l=1}^N m_{1,2}(t_l) \times \quad (15)$$

$$\times 2 \sum_{m=1}^N m \sin(m\theta_1) \sin(m\theta_0);$$

$$\int_{-1}^1 m_{1,2}(\tau) \ln|\tau - \tau_0| d\tau = - \frac{\pi}{N+1} \sum_{l=1}^N m_{1,2}(t_l) \left\{ \sin \theta_1 \left[ \ln 2 - \frac{\cos(2\theta_0)}{2} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=2}^N \sin(m\theta_1) \left[ \frac{\cos(m-1)\theta_0}{m-1} - \frac{\cos(m+1)\theta_0}{m+1} \right] \right\}, \quad (16)$$

$$\int_{-1}^1 m_{1,2}(\tau) F(\tau, \tau_0) d\tau = \frac{\pi}{N+1} \sum_{l=1}^N \sin \theta_1 m_{1,2}(t_l) F(t_l, \tau_0). \quad (17)$$

Здесь в качестве узлов выбраны нули полинома Чебышева второго рода:  $t_l = \cos \theta_l = \cos[\pi l / (N+1)]$ ,  $l = \overline{1, N}$ .

Для вычисления интегралов с неподвижными особенностями используем результаты работы [5], которые подытожим следующими формулами:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_{1,2}(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau = \sum_{l=1}^N \frac{\varphi_{1,2}(\tau_l)}{\tau_l - z} \left\{ \frac{1}{\tau_l - z} \left[ A_l^N + 2 \frac{Q_N(z)}{P'_N(\tau_l)} \right] + 2 \frac{Q'_N(z)}{P'_N(\tau_l)} \right\}, \quad (18)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{m_{1,2}(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau = \int_{-1}^1 \frac{(1 - \tau^2)^{1/2} \varphi_{1,2}(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau = \quad (19)$$

$$= \frac{\pi}{N+1} \sum_{l=1}^N \sin \theta_l m_{1,2}(t_l) \left\{ \frac{1}{(t_l - z)^2} - \frac{(-1)^l}{[z \pm (z^2 - 1)^{1/2}]^{N+1} (t_l - z)} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{t_l - z} - \frac{N+1}{(z^2 - 1)^{1/2}} \right] \right\},$$

где  $z \in (-1, 1)$ ;  $Q_N(z)$  удовлетворяет известному рекуррентному соотношению, причем  $Q_0(z) = (1/2) \ln[(z+1)/(z-1)]$ ,  $Q_1(z) = zQ_0(z) - 1$ ; знак в (19) выбирается так, чтобы  $|z \pm (z^2 - 1)^{1/2}| > 1$ . Используя квадратурные правила (12)-(19), приходим к алгебраическим системам линейных уравнений для определения соответствующих неизвестных функций. После решения таких систем определяем продольную компоненту дифрагированного поля и его диаграмму направленности (ДН). На основании интегральной формулы (3) имеем следующие расчетные соотношения:

$$H_z(z, \bar{z}) = H_0(z, \bar{z}) + \frac{\pi i}{2} \sum_{l=1}^N A_l^N \left[ k_1 m_1(\tau_l) H_1^{(1)}(k_1 |T_{e1} - z|) \operatorname{Im} \left( \frac{T_{e1} - z}{|T_{e1} - z|} \bar{T}'_{e1} \right) + \right. \\ \left. + \eta^*(\tau_l) H_0^{(1)}(k_1 |T_{d1} - z|) + k_1 m(\tau_l) H_1^{(1)}(k_1 |T_{d1} - z|) \operatorname{Im} \left( \frac{T_{d1} - z}{|T_{d1} - z|} \bar{T}'_{d1} \right) \right]; \\ D(\varphi) = \frac{\pi k_1}{2} \sum_{l=1}^N A_l^N \left\{ m_1(\tau_l) \operatorname{Im}(T'_{e1} e^{-i\varphi}) \exp[-ik_1 \operatorname{Re}(T_{e1} e^{-i\varphi})] + \right. \\ \left. + \frac{i}{k_1} \eta^*(\tau_l) \exp[-ik_1 \operatorname{Re}(T_{d1} e^{-i\varphi})] + \right. \\ \left. + m(\tau_l) \operatorname{Im}(T'_{d1} e^{-i\varphi}) \exp[-ik_1 \operatorname{Re}(T_{d1} e^{-i\varphi})] \right\};$$

$$T_{e1} = T_e(\tau_l); \quad T_{d1} = T_d(\tau_l).$$

При решении уравнений (10) поле в ближней и дальней зонах находим из формул

$$H_z(z, \bar{z}) = H_0(z, \bar{z}) - \frac{\pi^2 i}{2(N+1)} k_1 \sum_{l=1}^N \sin \theta_l m_l(t_l) H_1^{(1)}(k_1 |T_e(t_l) - z|) \times$$

$$\times \operatorname{Im} \left[ \frac{T_e(t_l) - z}{|T_e(t_l) - z|} T'_e(t_l) \right] + \frac{\pi i}{2} \sum_{l=1}^N A_l^N \eta_l^*(\tau_l) H_0^{(1)}(k_1 |T_{d1}(t_l) - z|);$$

$$D(\varphi) = - \frac{\pi^2 k_1}{2(N+1)} \sum_{l=1}^N \sin \theta_l m_l(t_l) \operatorname{Im}[T'_e(t_l) e^{-i\varphi}] \times$$

$$\times \exp\{-ik_1 \operatorname{Re}[T_e(t_l) e^{-i\varphi}]\} + \frac{\pi i}{2} \sum_{l=1}^N A_l^N \eta_l^*(\tau_l) \exp[-ik_1 \operatorname{Re}(T_{d1} e^{-i\varphi})],$$

где  $\varphi$  – полярный угол.

В качестве примера рассмотрим дифракцию плоской электромагнитной волны единичной амплитуды  $H_0(z, \bar{z}) = \exp[-ik_1 \operatorname{Re}(ze^{-i\beta})]$  на эллиптическом и прямоугольном металлокомплектных цилиндрах с продольной щелью углового размера  $\theta$ . Положение центра щели относительно оси  $Ox$  определяется углом  $\alpha$ . Параметрические уравнения дуг  $L_e$  и  $L_d$  в системе координат  $xOy$  задаются формулами  $T_{e, d}(\tau) = a(\cos \delta_{1, 2} + i \sin \delta_{1, 2})$ ;  $\delta_{1, 2} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \gamma_{1, 2} / \varepsilon)$ ;  $\gamma_1 = \tau(2\pi - \theta)/2 + \pi + \alpha$ ;  $\gamma_2 = -\tau\theta/2 + \alpha$ . Для сравнения предложенных подходов к алгоритмизации дифракционной задачи в табл. 1 приведены результаты расчета ДН на структуре с параметрами  $a = 0,25\lambda$ ;  $\varepsilon = 1$ ;  $\theta = 2\pi/3$ ;  $\alpha = \pi/2$ ;  $k_2/k_1 = 1,7$  при распространении первичной волны в направлении  $\beta = \pi/4$  ( $\lambda$  – длина волны). Цифрой I отмечены данные, полученные при решении системы (7), значения II соответствуют решениям системы (10). Однопроцентная погрешность решения обеспечивается при  $N = 20$ . Отметим, что выделение слагаемых с неподвижными особенностями в ядрах уравнений (7) и (10) существенно улучшает сходимость вычислительного процесса. Как следует из таблицы, имеется хорошее согласование данных, полученных на основе двух различных систем интегральных уравнений. Это свидетельствует о достоверности получаемых результатов и о применимости построенных алгоритмов для расчета полей дифракции промежуточной частоты на металлокомплектном цилиндре. Приведенные ниже в качестве

илюстрации универсальности предложенных вычислительных схем относительно формы профиля структуры расчеты ДН выполнены на основе решения системы (10).

Таблица 1

$\varphi$	I	II	$\varphi$	I	II
0	0, 6811	0, 6816	$\pi$	0, 9826	0, 9807
$\pi/18$	0, 7809	0, 7800	$19\pi/18$	1, 1778	1, 1771
$\pi/9$	0, 8939	0, 8947	$10\pi/9$	1, 3155	1, 3140
$5\pi/36$	0, 9493	0, 9499	$11\pi/9$	1, 3699	1, 3675
$\pi/6$	1, 0023	1, 0027	$25\pi/18$	1, 2011	1, 1998
$\pi/4$	1, 1472	1, 1471	$13\pi/9$	1, 2525	1, 2521
$\pi/3$	1, 2720	1, 2716	$3\pi/2$	1, 3500	1, 3505
$\pi/2$	1, 3325	1, 3310	$5\pi/3$	1, 3890	1, 3892
$5\pi/9$	1, 2387	1, 2380	$16\pi/9$	1, 0589	1, 0591
$2\pi/3$	0, 8605	0, 8600	$35\pi/18$	0, 6413	0, 6410

Так, ДН эллиптического цилиндра ( $a = 0,25\lambda$ ;  $\epsilon = 0,5$ ;  $\alpha = \pi/2$ ), облучаемого плоской волной, вычислены при  $N = 20$  и приведены на рис. 1 в зависимости от полярного угла  $\varphi$ . Кривые на рисунке построены при  $k_2/k_1 = 1,5$  и соответствуют параметру  $\theta$ , равному  $\pi/6$  (сплошная линия);  $\pi/3$  (штриховая);  $\pi/2$  (точки). Видно, что с уменьшением ширины щели в металлическом покрытии цилиндра растет уровень основного и обратного лепестков диаграммы, что объясняется увеличением отражательной поверхности структуры и нерезонансной частотой возбуждения.

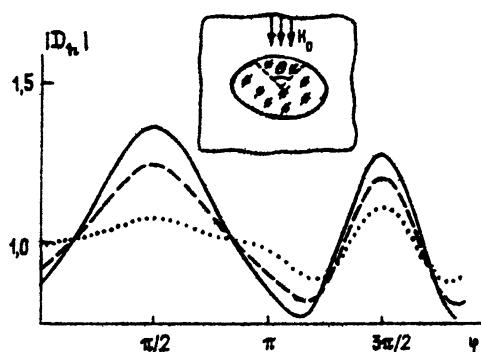


Рис. 1

На рис. 2 построены диаграммы направленности поля, рассеянного

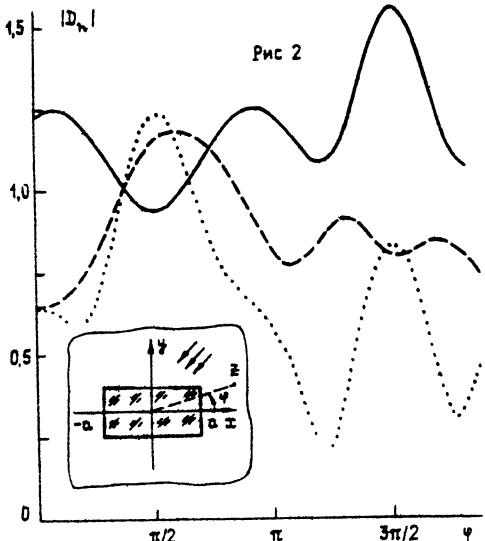


Рис 2

экранированным цилиндром ( $k_2/k_1 = 1,5$ ) прямоугольного (ширина -  $0,5\lambda$ , высота -  $0,25\lambda$ ) сечения с угловой шириной щели, равной  $\pi/2$ . Плошная линия на графиках соответствует углу падения в плоской волне, равному  $\pi/2$ ; штриховая -  $\beta = \pi/4$ ; точками приведены зависимости для  $\beta = 0$ . Для получения устойчивого результата использовали представление (11) при  $n = 5$ . На каждой из дуг  $L_{ev}$  и  $L_d$  число узлов применяемых квадратурных формул брали равным  $N = 8$  и  $N = 10$ .

Найденные при этом значения ДН сохраняли неизменными 2-3 знака мантиссы.

Таким образом, на основании проведенных численных экспериментов и сравнения двух различных вычислительных схем заключаем, что аппарат сингулярных интегральных уравнений позволяет строго решить задачу дифракции  $H$ -поляризованного электромагнитного поля на частично экранированном диэлектрическом цилиндре произвольного (некоординатного) сечения в наиболее трудном для исследования промежуточном волновом диапазоне. Надежность и достоверность получаемых при этом результатов гарантируется корректным учетом геометрических нерегулярностей исследуемой кусочно-неоднородной структуры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Е. Н. Воздушение тел вращения. -м.: Радио и связь, 1987. -272 с.
2. Захаров Е. В., Котик И. П., Сивов А. Н. //Вычислительные методы и программирование. 1969. Т. 13. С. 177.
3. Комарь Г. И., Шестопалов В. П. //Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. N 7. С. 1345.
4. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. -Киев: Наукова думка, 1989. -256 с.
5. Назарчук З. Т., Хмиль З. М. //Тезисы докл. IV Всесоюзного симпозиума. -Харьков: 1989. Ч. 2. С. 182.

6. Носич А. И., Свеженцев А. Е. //Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. N 8. С. 1633.
7. Носич А. И., Свеженцев А. Е., Шестопалов В. П. //Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. N 11. С. 2262.
8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. -Киев: Наукова думка, 1984. -344 с.
9. Сивов А. Н. //Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13. N 8. С. 1494.

Физико-механический институт  
АН Украины

Поступила в редакцию  
18 июня 1991 г.

## H-POLARIZATE ELECTROMAGNETIC SCATTERING BY PARTLY SCREENED DIELECTRIC CYLINDER

Z. T. Nazarchuk, Z. M. Khmil

Using potential method and basing on Green theorem different systems of hypersingular integral equations have been created. The systems deals with two-dimension problem of H-polarizate electromagnetic scattering by the dielectric cylinder covered by metal screen with a longitudinal aperture. Numeric solution have been received by the quadratures method and by using special interpolation formulas. Far scattered field diagrams have been computed for elliptic - and rectangleshape cylinder. The results have been compared for different aperture size and different plane wave incidence.

УДК 621.396.969.001

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ФАЗОВЫХ НЕСТАБИЛЬНОСТЕЙ ПРИЕМНЫХ КАНАЛОВ  
НА ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ УГЛОВЫХ КООРДИНАТ ЦЕЛИ  
В АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКЕ**

В. Р. Хачатуров, Д. А. Булекбаев

Приводятся результаты исследований статистических характеристик максимально правдоподобной оценки угловой координаты цели при наличии случайных фазовых ошибок приемных каналов адаптивной антенной решетки (AAP).

В большинстве работ, посвященных задаче пространственной обработки сигналов, принимаются допущения об идентичности каналов приемной антенны, однако в реальных системах имеют место искажения, которые способны в значительной мере снизить эффективность обработки.

Известны работы [1-4], в которых исследуется влияние случайных фазовых ошибок приемных каналов на качество обнаружения и разрешение сигналов. Вместе с тем, остается открытым вопрос оценки влияния фазовых ошибок на точность измерения угловой координаты цели в присутствии мешающих источников излучения. Анализу этого вопроса и посвящена данная статья.

Рассмотрим уравнение правдоподобия, полученное в работе [5] путем дифференцирования функции правдоподобия и являющееся инвариантным по отношению к различным моделям сигналов:

$$\frac{\operatorname{Re} \left( \sum_{i=1}^n d\vec{S}^* \vec{\Phi}_n^{-1} \vec{X}_i \vec{X}_i^* \vec{\Phi}_n^{-1} \vec{S} \right)}{\sum_{i=1}^n \vec{S}^* \vec{\Phi}_n^{-1} \vec{X}_i \vec{X}_i^* \vec{\Phi}_n^{-1} \vec{S}} - \frac{\operatorname{Re} (d\vec{S}^* \vec{\Phi}_n^{-1} \vec{S})}{\vec{S}^* \vec{\Phi}_n^{-1} \vec{S}} = 0, \quad (1)$$

где  $\vec{X}_i$  - вектор размерности  $N$  выборочных значений смеси полезного и мешающих сигналов в  $i$ -й момент времени;  $\vec{\Phi}_n^{-1}$  - обратная корреляцион-

ная матрица мешающих колебаний;  $\vec{s}$  - вектор ожидаемого направления на источник полезного сигнала,  $p$ -я компонента которого  $s_p = \exp\{j[p - (N + 1)/2]u\}$ ;  $d\vec{s}$  - произвольная вектора  $\vec{s}$  по измеряемому параметру;  $N$  - число элементов антенной решетки (AP);  $u = 2\pi d_1 \lambda^{-1} \sin\theta$  - обобщенный угол;  $\lambda$  - длина волны;  $d_1$  - расстояние между элементами AP;  $\theta$  - угол, отсчитываемый от нормали к раскрыву и задающий направление фазирования AP;  $n$  - число выборок;  $*$  - знак эрмитового сопряжения.

Левая часть выражения (1), которую обозначим  $\mu$ , представляет собой пеленгационную характеристику (функция от углового рассогласования между истинным и ожидаемым направлениями прихода полезного сигнала), причем первое слагаемое соответствует выходному эффекту пеленгатора без учета возможного смещения при наличии помех, а второе характеризует это смещение. Влияние случайных фазовых ошибок (СФО) можно учесть вводом в каналы приема блока с матричным коэффициентом передачи  $\tilde{\Lambda}$  [6]. Матрица  $\tilde{\Lambda}$  - диагональная с элементами  $\Lambda_k = \exp(j\varphi_k)$ , где  $\varphi_k$  - случайные фазовые сдвиги в каналах приема ( $k = 1, \dots, N$ ). Аналогично [7] будем полагать, что СФО между каналами не коррелированы, распределены по нормальному закону с нулевым средним  $M(\varphi_k) = 0$ , а каналы статистически однородны  $M(\varphi_k^2) = \sigma_\varphi^2 = \sigma^2$ .

Проведенные экспериментальные исследования характера изменения во времени СФО приемных каналов AP показали, что изменения  $\varphi_k$  достаточно медленные (рис. 1), и интервал корреляции СФО составляет единицы часов.

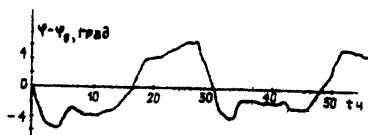


Рис. 1.

Тогда после временного усреднения на интервале, значительно превышающем интервал корреляции входных колебаний и много меньшим интервала корреляции СФО, выборочная корреляционная матрица может быть заменена на точную корреляционную матрицу. И левая часть выражения (1) с учетом того, что  $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_c + \tilde{\Phi}_n$  и  $\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda}^* = \tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda}^{-1} = I$ , где  $I$  - единичная матрица, преобразуется к виду

$$\mu = \frac{\operatorname{Re}(d\vec{s}^* \tilde{\Lambda} \tilde{\Phi}_n^{-1} \tilde{\Lambda}^* \vec{s} + d\vec{s}^* \tilde{\Lambda} \tilde{\Phi}_n^{-1} \tilde{\Phi}_c \tilde{\Phi}_n^{-1} \tilde{\Lambda}^* \vec{s})}{\vec{s}^* \tilde{\Lambda} \tilde{\Phi}_n^{-1} \tilde{\Lambda}^* \vec{s} + \vec{s}^* \tilde{\Lambda} \tilde{\Phi}_n^{-1} \tilde{\Phi}_c \tilde{\Phi}_n^{-1} \tilde{\Lambda}^* \vec{s}} - \frac{\operatorname{Re}(d\vec{s}^* \tilde{\Lambda} \tilde{\Phi}_n^{-1} \tilde{\Lambda}^* \vec{s})}{\vec{s}^* \tilde{\Lambda} \tilde{\Phi}_n^{-1} \tilde{\Lambda}^* \vec{s}}, \quad (2)$$

где  $\hat{\Phi}_c$  - корреляционная матрица полезного сигнала. Обозначим первое слагаемое через  $\alpha_1 = \xi_1/\xi_2$ , второе  $\alpha_2 = \xi_3/\xi_4$ , а  $\hat{\Phi}_{\pi}^{-1}\hat{\Phi}_c\hat{\Phi}_{\pi}^{-1} = \hat{B}$ . Получим статистические характеристики величины  $\mu$ . Для вычисления математического ожидания  $\mu$  воспользуемся следующей формулой линеаризации функции от нескольких переменных  $y = \psi(x_1, \dots, x_k)$  [8]:

$$M\psi(x_1, x_2, \dots, x_k) = \psi(Mx_1, Mx_2, \dots, Mx_k) + \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right)_m Dx_i + \sum_{i < t} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_t} \right)_m \text{cov}(x_i, x_t),$$

где  $Dx_i$  - дисперсия величины  $x_i$ ;  $\text{cov}(x_i, x_t)$  - ковариация между  $x_i$  и  $x_t$ ;  $m$  - индекс, означающий, что в выражения частных производных вместо аргументов  $x_i$  подставлены их средние.

Математическое ожидание суммы слагаемых равно сумме математических ожидаемых слагаемых. Поэтому вычислим в отдельности среднее каждого из слагаемых  $M\alpha_1$  и  $M\alpha_2$ :

$$M\alpha_1 = M\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) = \frac{M\xi_1}{M\xi_2} + \frac{M\xi_1}{(M\xi_2)^3} Dx_2 - \frac{1}{(M\xi_2)^2} \text{cov}(\xi_1, \xi_2). \quad (4)$$

Найдем раздельно значения всех величин, входящих в формулу (4). Преобразуем величину  $\xi_1$  с учетом вида матрицы  $\hat{A}$  и принятых выше предположений о статистике фазовых ошибок. Диагональные элементы матриц  $\hat{A}\hat{\Phi}_{\pi}^{-1}\hat{A}^*$  и  $\hat{A}\hat{B}\hat{A}^*$  не зависят от СФО приемных трактов, поэтому случайную величину  $\xi_1$  представим в виде сумм билинейных форм:

$$\xi_1 = \text{Re}[d\hat{S}^*(\hat{\Phi}_{\pi}^{-1})_d \hat{S} + d\hat{S}^*\hat{A}\hat{S} + d\hat{S}^*\hat{B}_d \hat{S} + d\hat{S}^*\hat{C}\hat{S}], \quad (5)$$

где  $\hat{A}$  и  $\hat{C}$  - случайные эрмитовы матрицы с элементами

$$a_{it} = \begin{cases} r_{it} \exp[j(\varphi_i - \varphi_t)], & i \neq t \\ 0, & i = t \end{cases}; \quad c_{it} = \begin{cases} b_{it} \exp[j(\varphi_i - \varphi_t)], & i \neq t \\ 0, & i = t \end{cases}, \quad (6)$$

$r_{it}$ ,  $b_{it}$  - соответственно элементы матриц  $\hat{\Phi}_{\pi}^{-1}$  и  $\hat{B}$ ;  $d$  - операция обнуления недиагональных элементов матрицы.

Тогда, используя распределение фазовых ошибок и табличный интеграл

$$F = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = 1, \quad (7)$$

получим математическое ожидание величины

$$M\xi_1 = \text{Re}\{d\vec{S}^* [(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_d + e^{-\sigma^2} (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d}] \vec{S}\}, \quad (8)$$

где  $H_d$  - операция обнуления диагональных элементов матрицы.

Аналогично вычисляется математическое ожидание знаменателя первого слагаемого:

$$M\xi_2 = \vec{S}^* [(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_d + e^{-\sigma^2} (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d}] \vec{S}. \quad (9)$$

Более сложную задачу представляет собой определение дисперсии  $D\xi_2$ . Представляя дисперсию через второй начальный момент, запишем

$$D\xi_2 = M(\xi_2 - M\xi_2)^2 = M\xi_2^2 - (M\xi_2)^2, \quad (10)$$

где

$$M\xi_2^2 = M[(\vec{S}^* \vec{\Lambda} \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} \vec{\Lambda}^* \vec{S})^2] + 2M(\vec{S}^* \vec{\Lambda} \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} \vec{\Lambda}^* \vec{S} \vec{S}^* \vec{\Lambda} \vec{B} \vec{\Lambda}^* \vec{S}) + M(\vec{S}^* \vec{\Lambda} \vec{B} \vec{\Lambda}^* \vec{S})^2. \quad (11)$$

Представляя матрицу  $\vec{\Lambda} \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} \vec{\Lambda}^*$  в виде суммы двух матриц и группируя соответствующие случайные квадратичные формы, получаем первое слагаемое выражения (11):

$$M(\vec{S}^* \vec{\Lambda} \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} \vec{\Lambda}^* \vec{S} \vec{S}^* \vec{\Lambda} \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} \vec{\Lambda}^* \vec{S}) = [\vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_d \vec{S}]^2 + \quad (12)$$

$$+ 2e^{-\sigma^2} \vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_d \vec{S} \vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{S} + M[\vec{S}^* \vec{\Lambda} (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{\Lambda}^* \vec{S} \vec{S}^* \vec{\Lambda} (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{\Lambda}^* \vec{S}].$$

Вычисление математического ожидания случайной квадратичной формы можно упростить, представляя ее как сумму случайных чисел, каждое из которых определяется разностью фазовых ошибок каналов приема следующего вида:  $\exp[j(\varphi_i - \varphi_k + \varphi_l - \varphi_t)]$ , где  $i, k, l, t$  - номера

элементов АР. Причем максимальное число независимых случайных величин в показателе степени экспоненты равно четырем. Поэтому можно использовать четырехмерный закон распределения случайных фазовых ошибок, который с учетом независимости случайных величин  $(\varphi_1, \varphi_k, \varphi_i, \varphi_t)$  имеет вид

$$\omega_4(\varphi_1, \varphi_k, \varphi_i, \varphi_t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2} \exp\left(-\frac{\varphi_1^2 + \varphi_k^2 + \varphi_i^2 + \varphi_t^2}{2\sigma^2}\right). \quad (13)$$

Подставляя результаты интегрирования выражения (11) в (10) с учетом (9), после преобразований получим выражение для дисперсии случайной величины  $\xi_2$  при наличии фазовых ошибок:

$$D\xi_2 = f(\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{S}\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi'}^{-1} + \vec{B}, \vec{T}_2, \vec{S}) - e^{-2\sigma^2} [\vec{S}^*(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d} \vec{S}]^2, \quad (14)$$

где в общем случае  $f$  - функция от векторов  $\vec{Z}_1, \vec{Z}_2$  и матриц  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{T}$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(\vec{Z}_1, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{T}, \vec{Z}_2) &= \vec{Z}_1^* [(\vec{P}_1)_{H_d} (\vec{P}_2)_d (\vec{P}_3)_{H_d}]_d \vec{Z}_2 + \\ &+ e^{-\sigma^2} \{ \vec{Z}_1^* [(\vec{P}_1)_{H_d} (\vec{P}_2)_d (\vec{P}_3)_{H_d}]_{H_d} \vec{Z}_2 + \vec{Z}_1^* [(\vec{P}_1)_{H_d} (\vec{P}_2)_d (\vec{P}_3)_{H_d}]_d \vec{Z}_2 \} + \\ &+ e^{-2\sigma^2} \{ \vec{Z}_1^* [ [(\vec{P}_1)_{H_d} (\vec{P}_2)_{H_d}]_{H_d} (\vec{P}_3)_{H_d}]_{H_d} \vec{Z}_2 - \vec{Z}_1^* [(\vec{P}_1)_{H_d} [(\vec{P}_2)_{H_d} (\vec{P}_3)_{H_d}]_d]_d \vec{Z}_2 + \\ &+ \vec{Z}_1^* \vec{T} \vec{Z}_2 \} + e^{-3\sigma^2} \{ \vec{Z}_1^* (\vec{P}_1)_{H_d} [(\vec{P}_2)_{H_d} (\vec{P}_3)_{H_d}]_d \vec{Z}_2 + \\ &+ \vec{Z}_1^* [(\vec{P}_1)_{H_d} (\vec{P}_2)_{H_d}]_d (\vec{P}_3)_{H_d} \vec{Z}_2 - 2 \vec{Z}_1^* \vec{T} \vec{Z}_2 \} + e^{-4\sigma^2} \vec{Z}_1^* \vec{T} \vec{Z}_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Матрица  $\vec{T}_2$ , входящая в формулу (14), выражается следующим образом:

$\vec{T}_2 = (r_{ik} s_k s_i^* r_{ik})$  ( $i, k = 1, \dots, N$ ;  $i \neq k$ ). Диагональные элементы матрицы  $\vec{T}_2$  - нулевые. Аналогичные рассуждения используются при вычислении ковариации между величинами  $\xi_1$  и  $\xi_2$ :

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1 \xi_2) - M\xi_1 M\xi_2 = \text{Re}[f(d\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{S}\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{T}_2, \vec{S}) - e^{-2\sigma^2} d\vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d} \vec{S} \vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d} \vec{S}]. \quad (16)$$

Таким образом, подставляя выражения (16), (14), (9), (8) в формулу (4), получим окончательное выражение для  $M\alpha_1$ .

Проводя аналогичные выкладки для определения математического ожидания второго слагаемого  $M\alpha_2$ , имеем

$$M\alpha_2 = \frac{M\xi_3}{M\xi_4} + \frac{M\xi_3}{(M\xi_4)^3} D\xi_4 - \frac{1}{(M\xi_4)^2} \text{cov}(\xi_3, \xi_4); \quad (17)$$

$$M\xi_3 = \text{Re}[d\vec{S}^* [(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_d + e^{-\sigma^2} (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d}] \vec{S}]; \quad (18)$$

$$M\xi_4 = \vec{S}^* [(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_d + e^{-\sigma^2} (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d}] \vec{S}; \quad (19)$$

$$D\xi_4 = f(\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{S}\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{T}_2, \vec{S}) - e^{-2\sigma^2} [\vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{S}]^2; \quad (20)$$

$$\text{cov}(\xi_3, \xi_4) = \text{Re}[f(d\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{S}\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{T}_2, \vec{S}) - e^{-2\sigma^2} d\vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{S} \vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{S}]. \quad (21)$$

Результаты расчетов математического ожидания  $M\mu$  при  $N = 8$  для различных значений СКО фазовых ошибок приведены на рис. 2. По оси абсцисс отложено угловое рассогласование  $\delta\theta$  между источником полезного сигнала и мешающим источником в долях полуширины диаграммы направленности АР (ДН АР) по нулевому уровню, по оси ординат - модульное значение смещения  $|M\mu|$ . Рис. 2 характеризует смещение в ПХ, которое обусловлено наличием фазовых ошибок. При этом сплошной линией показаны средние, полученные по формулам (4), (17), а штрихпунктирной линией - средние, которые могут быть получены, если использовать, например, согласно [9], линеаризацию без учета слагаемых более высших порядков, какими являются второе и третье слагаемые в формулах (4), (17). Действительно, последние являются величинами, обратно пропорциональными отношению сигнал/(помеха+шум), и при больших значениях отношения сигнал/(помеха+шум), что часто

имеет место при измерении, ими можно пренебречь. Этим и объясняется незначительное отличие между средними, получаемыми при различных аппроксимациях. Таким образом, для оценки математического ожидания величины  $\mu$  может быть использована следующая формула:

$$M\mu = \frac{\operatorname{Re}\{d\vec{S}^* [(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_d + e^{-\sigma^2} (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d}] \vec{S}\}}{\vec{S}^* [(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_d + e^{-\sigma^2} (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d}] \vec{S}} - \frac{\operatorname{Re}\{d\vec{S}^* [(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_d + e^{-\sigma^2} (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d}] \vec{S}\}}{\vec{S}^* [(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_d + e^{-\sigma^2} (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d}] \vec{S}}. \quad (22)$$

Если математическое ожидание  $M\mu$  характеризует систематическую ошибку, вносимую в ПХ фазовыми ошибками, то дисперсия позволяет оценить флуктуацию оценки величины  $\mu$ . Для определения дисперсии используем формулу [8]

$$D\mu = D\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) + D\left(\frac{\xi_3}{\xi_4}\right) - 2 \operatorname{cov}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\xi_3}{\xi_4}\right). \quad (23)$$

Вычислим слагаемые в (23), применяя представление дисперсии (ковариации) через второй начальный (смешанный) момент и формулы (3), (4), (17), и исключим, как и выше, члены более высоких порядков малости. Тогда, подставляя полученные выражения в (23), запишем дисперсию случайной величины  $\mu$  в виде

$$\begin{aligned} D\mu = & \frac{1}{(M\xi_2)^2} D\xi_1 + \frac{(M\xi_1)^2}{(M\xi_2)^4} D\xi_2 - 2 \frac{M\xi_1}{(M\xi_2)^3} \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) + \\ & + \frac{1}{(M\xi_4)^2} D\xi_3 + \frac{(M\xi_3)^2}{(M\xi_4)^4} D\xi_4 - 2 \frac{M\xi_3}{(M\xi_4)^3} \operatorname{cov}(\xi_3, \xi_4) + \\ & + 2 \frac{1}{M\xi_2 M\xi_4} \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_3) - 2 \frac{M\xi_3}{M\xi_2 (M\xi_4)^2} \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_4) - \end{aligned} \quad (24)$$

$$= 2 \frac{M\xi_1}{M\xi_4(M\xi_2)^2} \text{cov}(\xi_2, \xi_3) + 2 \frac{M\xi_1 M\xi_3}{(M\xi_2)^2 (M\xi_4)^2} \text{cov}(\xi_2, \xi_4),$$

где величины  $M\xi_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ),  $D\xi_2, D\xi_4$ ,  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$  и  $\text{cov}(\xi_3, \xi_4)$  были получены выше. Дисперсии  $D\xi_1, D\xi_3$  вычисляются тем же путем, что и дисперсии  $D\xi_2, D\xi_4$ , однако при этом необходимо учитывать, что при определении вторых начальных моментов придется вычислять математическое ожидание от произведения реальных частей. В данном случае операции усреднения и взятие реальной части от комплексных величин не перестановочны, поэтому воспользуемся равенством

$$M(\text{Re}\eta_1, \text{Re}\eta_2) = 0,5 \text{Re}[M(\eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_2^*)]. \quad (25)$$

С учетом (25) вычисляются дисперсии  $D\xi_1, D\xi_3$ , ковариация  $\text{cov}(\xi_1, \xi_3)$ :

$$D\xi_1 = 0,5 \text{Re}[f(d\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{S}d\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{T}_1, \vec{S})] + \quad (26)$$

$$+ f(d\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{S}\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{T}_2, d\vec{S})] - e^{-2\sigma^2} \{\text{Re}[d\vec{S}^*(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d} \vec{S}]\}^2;$$

$$D\xi_3 = 0,5 \text{Re}[f(d\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{S}d\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{T}_1, \vec{S})] + \quad (27)$$

$$+ f(d\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{S}\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{T}_2, d\vec{S})] - e^{-2\sigma^2} \{\text{Re}[d\vec{S}^*(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{S}]\}^2;$$

$$\text{cov}(\xi_4, \xi_3) = 0,5 \text{Re}[f(d\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{S}d\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{T}_1, \vec{S})] + \quad (28)$$

$$+ f(d\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{S}\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{T}_2, d\vec{S})] -$$

$$- e^{-2\sigma^2} \text{Re}[d\vec{S}^*(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d} \vec{S}] \text{Re}[d\vec{S}^*(\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{S}].$$

Остальные величины, входящие в (24), определяются, как и ковариация  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$ :

$$\text{cov}(\xi_2, \xi_3) = \text{Re}[f(d\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{S}\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{T}_2, \vec{S}) -$$
(29)

$$- e^{-2\sigma^2} d\vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{S}\vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d} \vec{S}];$$

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_4) = \text{Re}[f(d\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{S}\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{T}_2, \vec{S}) -$$
(30)

$$- e^{-2\sigma^2} d\vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d} \vec{S}\vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{S}];$$

$$\text{cov}(\xi_2, \xi_4) = f(\vec{S}, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B}, \vec{S}\vec{S}^*, \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1}, \vec{T}_2, \vec{S}) -$$
(31)

$$- e^{-2\sigma^2} \vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} + \vec{B})_{H_d} \vec{S}\vec{S}^* (\vec{\Phi}_{\Pi}^{-1})_{H_d} \vec{S}.$$

Матрица  $\vec{T}_1$ , входящая в функцию  $f$ , имеет следующий вид:  $\vec{T}_1 = (r_{ik} s_k s_{11}^* r_{1k})$  ( $i, k = 1, \dots, N$ ;  $i \neq k$ ), где  $s_{11}$  - элементы вектора  $d\vec{S}$ . Диагональные элементы матрицы  $\vec{T}_1$  - нулевые.

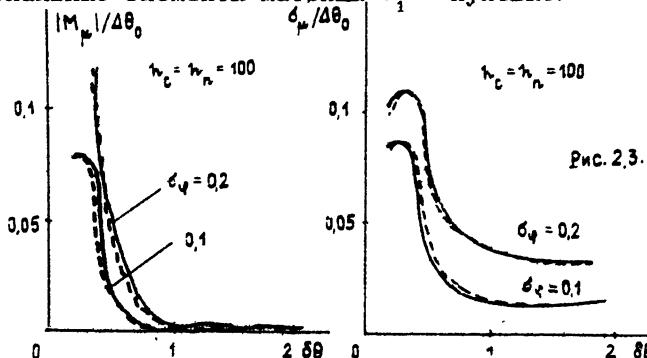


Рис. 2.3.

Результаты расчетов в соответствии с (22) и (24) математического ожидания и СКО случайной величины  $\mu$  для различных значений фазовых ошибок при  $N = 8$ , мощности сигнала и помехи в элементе АР  $h_c = h_n = 100$  приведены на рис. 2, 3. Анализ полученных результатов показывает, что с увеличением СКО фазовых ошибок возрастает систематическая ошибка, вносимая в ПХ фазовыми ошибками. Это объясняется тем, что при наличии случайных фазовых ошибок кискажениям ДН АР за счет воздействия помех (смещение основного лепестка ДН относительно нормали к АР), добавляется смещение ДН, вносимое фазовыми ошибками. И если второе слагаемое в выражении (1),

характеризующее смещение из-за влияния помех, компенсирует его, то смещение из-за фазовых ошибок остается нескомпенсированным.

Особый интерес представляет анализ флуктуационной составляющей оценки величины  $\mu$ . Она существенна при малом рассогласовании  $\delta\theta$  между направлениями полезного сигнала и мешающего источника, когда они пространственно не различаются и, соответственно, не происходит хорошего подавления мешающего источника. При увеличении углового расстояния между ними СКО величины снижается, связанное с тем, что источники становятся пространственно разрешенными, и коэффициент подавления помехи начинает возрастать.

Для проверки полученных выше результатов было проведено статистическое моделирование на ЭВМ. При этом предполагалось, что в результате временного усреднения при фиксированных значениях фазовых ошибок оценка величины  $\mu$  определяется соотношением (2). Число элементов АР принималось равным восьми, количество реализаций фазовых ошибок  $N_p = 200$ , мощности сигнала и помехи в элементе АР  $h_c = h_p = 100$ . Результаты моделирования (на рис. 2, 3 изображены пунктирной линией) подтвердили правильность полученных выражений для оценки первых двух моментов случайной величины  $\mu$ .

Из анализа результатов можно предъявить требования к допустимому уровню искажений в приемных каналах, исходя из того, что СКО оценки  $\mu$ , полученное согласно (24), характеризует ту часть флуктуационной составляющей оценки измеряемого параметра, которая появляется только из-за действия фазовых ошибок и должна быть добавлена к ошибке, получаемой без учета фазовых ошибок из предельно достижимой точности. Для предъявления требования к допустимому уровню величины фазовых ошибок запишем отношение

$$\eta = \sigma_\mu / \sigma_{\text{пред}} , \quad (32)$$

где  $\sigma_\mu$  - СКО оценки  $\mu$ , вызванное только наличием фазовых ошибок;  $\sigma_{\text{пред}}$  - СКО оценки  $\mu$  без учета фазовых ошибок.

Величина  $\sigma_{\text{пред}}$  может быть вычислена по формуле [6]

$$\sigma_{\text{пред}}^2 = - \left( \frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \Big|_{\theta = \theta_{\text{ист}}} \quad (33)$$

где  $P$  - функция правдоподобия оценки измеряемого параметра.

Тогда, дифференцируя по параметру выражение (1), являющееся первой производной функции правдоподобия, получим следующую формулу для определения  $\sigma_{\text{пред}}$ :

$$\sigma_{\text{пред}}^2 = \frac{1 + h_c \vec{V}^* \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} \vec{V}}{h_c^2 (\vec{V}^* \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} \vec{V} d\vec{V}^* \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} d\vec{V} - |\vec{V}^* \vec{\Phi}_{\Pi}^{-1} d\vec{V}|^2)}, \quad (34)$$

где  $h_c$  - мощность полезного сигнала,  $\vec{V}$  - вектор амплитудно-фазового распределения полезного сигнала,  $d\vec{V}$  - производная вектора  $\vec{V}$  по измеряемому параметру.

График зависимости величины  $\sigma_{\text{пред}}$  от углового рассогласования в соответствии с формулой (34) при  $N = 8$ , мощности сигнала и помехи в элементе решетки  $h_c = h_{\Pi} = 100$  показан на рис. 4.

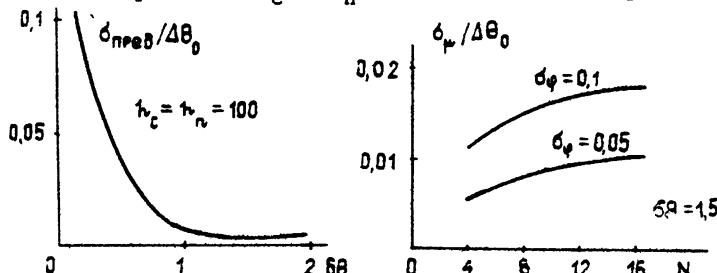


Рис. 4.5.

В табл. 1 приведены вычисленные согласно (32) допустимые значения СКО фазовых ошибок приемных трактов для различного углового расположения источника полезного сигнала и мешающего источника и различных значений  $\eta$ . Анализ результатов показал, что для соизмеримости ошибок оценки  $\mu$ , вносимых чисто фазовыми ошибками, и предельных ошибок без учета фазовых ошибок (т. е.  $\eta \approx 1$ ) необходимо, чтобы  $\sigma_{\phi}$  лежало в пределах  $1 - 5^\circ$ .

Таблица 1

$\eta$	0, 33	0, 5	0, 66	0, 83	1	1, 16	1, 13	1, 5
0, 5	0, 07	0, 072	0, 045	0, 028	0, 016	0, 013	0, 012	0, 011
1	0, 1	0, 114	0, 1	0, 06	0, 03	0, 024	0, 021	0, 02
2	0, 15	0, 17	0, 17	0, 12	0, 065	0, 05	0, 044	0, 042

В заключение отметим, что математические ожидания  $M\xi_i$  являются пропорциональными числу элементов решетки  $N$ . В силу этого математическое ожидание и дисперсия величины  $\mu$ , как видно из формул (22) и (24), при  $N \gg 1$  не зависят от размерности решетки. Зависимость СКО оценки величины  $\mu$  (в долях полуширины ДН) от числа элементов АР  $N$  представлена на рис. 5.

1. Наличие случайных фазовых ошибок приемных каналов приводит к

появление систематической ошибки угловой координаты источников излучения и возрастанию флюктуационной составляющей оценки.

2. Флюктуации оценки при угловом рассогласовании между источником полезного сигнала и мешающим источником более половины ширины диаграммы направленности определяются лишь первым слагаемым выражения (2), систематическая же ошибка измерения при любом рассогласовании зависит от обоих слагаемых.

3. Точность оценки угловой координаты при наличии случайных фазовых ошибок существенно ухудшается в сравнении с предельной точностью измерения без учета фазовых ошибок даже при небольшой величине СКО при угловых рассогласованиях между источником полезного сигнала и мешающим источником менее половины ДН АР.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. -М.: Сов. радио, 1970. -384 с.
2. Свердлик М. Б., Селиванов И. А., Свиридов В. И. //Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 8. С. 1642.
3. Решетов Л. А., Пухова Т. Н. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 5093-85. Деп. от 21 июня 1985 г.
4. Хачатуров В. Р., Федоркин Ю. А. и др. Статья депонирована в ВЧ 11520, рег. № 1393-89.
5. Журавлев А. К., Лукошкин А. П., Поддубный С. С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. -Л.: Гос. ун-т, 1983. -240 с.
6. Караваев В. В., Газонов В. В. Статистическая теория пассивной локации. -М.: Радио и связь, 1987. -240 с.
7. Попов А. С., Забродин А. Н., Щекотихин В. М. //Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 11. С. 1475.
8. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. -М.: ГИФМЛ, 1958. -464 с.
9. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. -М.: Мир, 1972. Вып. 1. -316 с.

Поступила в редакцию  
16 мая 1991 г.,  
после доработки  
20 февраля 1992 г.

## THE INFLUENCE ANALYSIS OF RECEIVER CHANNEL PHASE INSTABILITIES ON THE EVALUATION ACCURACY OF TARGET ANGLE COORDINATES IN THE ADAPTIVE PHASED ARRAY ANTENNA

V. R. Khachaturov, D. A. Bulecbayev

Some study results are cited of static characteristics of the maximum verisimilar evaluation of a target angle coordinate in the presence of casual phase errors of the adaptive phased array antenna receiver channels.

## Краткие сообщения и письма в редакцию

УДК 621.396.67

## ВОЗБУЖДЕНИЕ КОРОТКОВОЛНОВЫМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ МОРЯ

Э.М. Инспекторов, В.И. Богданович

При расположении излучателя над поверхностью моря последняя, особенно при наличии волн, может оказывать сильное влияние на характеристики излучения. Ниже исследовано влияние волн конечной проводимости поверхности моря на поле излучателя с вертикальной поляризацией и, в частности, на возбуждение поверхностной волны. Волны представлены в виде неровностей на поверхности моря, величина и период которых в диапазоне коротких волн соизмеримы с длиной волны. При анализе применен алгоритм с использованием метода интегральных уравнений [1], рассматривается двумерная задача и случай  $H$ -поляризации.

Излучателем является логопериодическая антенна (рис. 1а),

состоящая из 20 симметричных вертикальных вибраторов. Коэффициент подобия  $\tau = 0,935$ , угол наклона  $\alpha = 15^\circ$ , высота подвеса  $\Delta = 0,15\lambda$ . Возбуждаемая поверхность (контур  $l_T$ ) условно показана гладкой. Профиль поверхности при наличии неровностей приведен на рис. 1б. В случае регулярных отклонений поверхность описывается синусоидой с

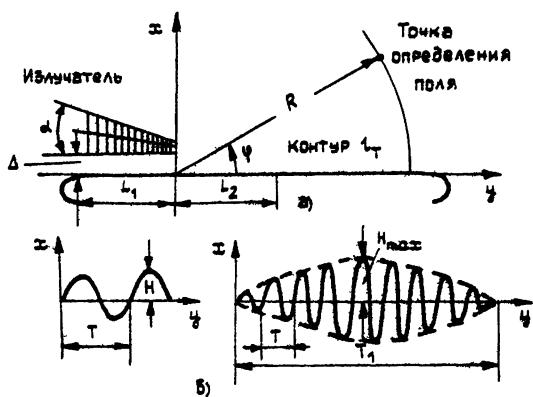


Рис. 1.

периодом  $T$  и амплитудой  $H$ . В случае модулированных по амплитуде

отклонений поверхность описывается синусоидой с постоянным периодом  $T$  и амплитудой  $H$ , изменяющейся по синусоидальному закону с периодом  $T_1 = 9T$ ;  $H_{\max}$  - максимальная амплитуда отклонения за период  $T_1$ . Распределение токов на клеммах вибраторов определено методом наведенных ЭДС, распределение тока по плечам вибраторов полагалось синусоидальным. Токи на поверхности моря (контур  $l_T$ ) определялись из решения интегрального уравнения Фредгольма II рода:

$$I_{u_2}^3(u_2) - 2 \oint_{l_T} I_{u_2}^3(u'_2) \left[ -i\omega \epsilon G Z(u'_2) + \frac{\partial G}{\partial u_1} \right] dl = \\ = 2 \int_{l_{\text{ст}}} j_{u_2}^{\text{э. ст}} \frac{\partial G}{\partial u_1} dl. \quad (1)$$

Компонента  $H_z$  полного поля определялась следующим соотношением:

$$H_z = - \oint_{l_T} I_{u_2}^3(u'_2) \left[ -i\omega \epsilon G Z(u'_2) + \frac{\partial G}{\partial u_1} \right] dl - \\ - \int_{l_{\text{ст}}} j_{u_2}^{\text{э. ст}} \frac{\partial G}{\partial u_1} dl. \quad (2)$$

В (1) и (2) координаты  $u_1$  и  $u_2$  отсчитываются по нормали и касательной к контурам  $l_T$  и  $l_{\text{ст}}$  (плечи вибраторов),  $G$  - двумерная функция Грина для свободного пространства,  $Z$  - поверхностный импеданс на контуре  $l_T$ . При определении  $Z$  для морской воды справедливы граничные условия Леонтиевича и  $Z$  определяется только параметрами среды:

$$Z = W \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}. \quad (3)$$

При этом полагаем  $\mu_r = 1$ ,  $\dot{\epsilon}_r = \epsilon_r - i60\lambda\sigma$ , где  $\epsilon_r$  и  $\sigma$  - параметры морской воды ( $\epsilon_r = 80$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\lambda = 50$  м),  $W$  - волновое сопротивление свободного пространства.

Исследовано распределение тока на контуре  $l_T$  и распределение амплитуды и фазы компоненты  $H_z$  полного поля на дуге окружности радиуса  $R = 12\lambda$  (рис. 1а). Максимум амплитуды поверхностного тока получается в области  $y \approx 0,1\lambda$ , при  $y < 0$  ток спадает очень резко, при  $y > 0$  он спадает более плавно. Это связано с распределением

ближнего поля излучателя. Поле над поверхностью моря в общем случае можно рассматривать как сумму пространственной и поверхностной волны, где пространственная волна образуется за счет прямого излучения излучателя и дифракции на неровностях поверхности. В случае преобладания поверхностной волны поле "прижимается" к плоскости  $x = 0$ .

Известно [2], что над двумерной структурой типа гребенки с расстоянием между ребрами равным постоянной величине  $a$  поверхностная волна может существовать при  $a < 0,5\lambda'$  ( $\lambda'$  - длина поверхностной волны), при этом в канавке возбуждается волна ТЕМ. При  $a > 0,5\lambda'$  в канавке могут возбуждаться типы волн, имеющие вариации поля по координате  $y$ . Рассматриваемый нами профиль поверхности при наличии отклонений (рис. 1б) существенно отличается от гребенки. Ширина канавки является переменной, ее максимальное значение равно  $T$ , а глубина канавки мала. Это вызывает заметные отличия от гребенки в распределении поля в канавке. Распределение тока по периоду  $T$  для регулярных отклонений при  $H = 0,1\lambda$  приведено на рис. 2.

Расстояние  $l$  отсчитывается вдоль контура  $l_T$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют  $T = 0,5\lambda$ ,  $\lambda$  и  $2\lambda$ . При  $T = 0,5\lambda$ , видимо, возбуждаются ТЕМ и  $E_{01}$

при  $T = \lambda$  и  $T = 2\lambda$  - дополнительные высшие типы волн. Для гладкой поверхности ( $H = 0$ ) распределение тока практически совпадает с приближением физической оптики ( $2H_{tg}^{пад}$ ). С увеличением  $H$  амплитуда тока резко уменьшается, так при  $H = 0,15\lambda$  она в 7 - 8 раз меньше  $2H_{tg}^{пад}$ . При наличии поверхностной волны амплитуда тока возрастает и достигает значений (1, 3 - 1, 5)  $2H_{tg}^{пад}$ . Закон распределения тока по периоду  $T$  постоянен вдоль контура  $l_T$  и при исследованных значениях  $H \leq 0,15\lambda$  не зависит от  $H$ .

На рис. 3 приведено распределение  $|H_z|$  для  $T = 0,5\lambda$ . Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют  $H = 0; 0,03\lambda; 0,04\lambda$  и  $0,15\lambda$ . При  $H = (0,03 - 0,05)\pi$  в секторе углов  $\varphi = 0 - 5^\circ$  существует поверхностная волна, амплитуда ее спадает по закону, близкому к  $e^{-px}$ . Поле представляет сумму пространственной и поверхностной волн с преобладанием

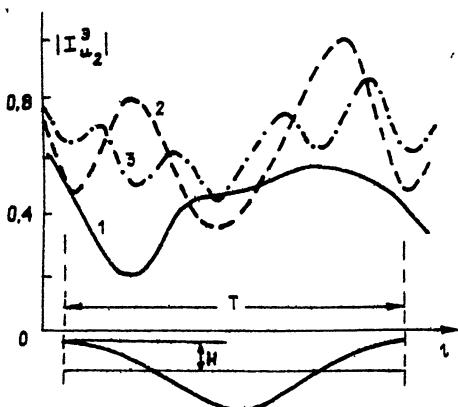


Рис.2.

последней. С увеличением  $H$  существует только пространственная волна,

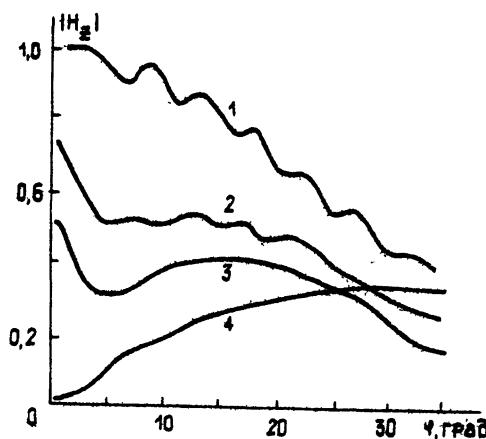


Рис. 3.

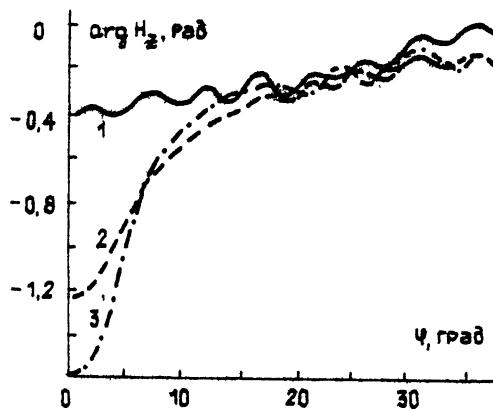


Рис. 4.

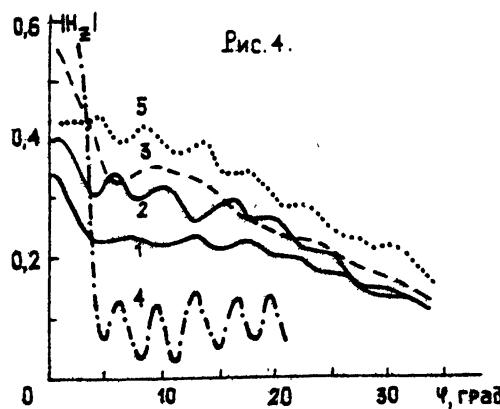


Рис. 5.

амплитуда уменьшается, максимум отклоняется от плоскости  $x = 0$ . На рис. 4 приведено распределение  $\arg H_z$  для  $T = 0,5\lambda$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют  $H = 0,03\lambda$  и  $0,04\lambda$ . В области  $\phi = 0 - 5^\circ$ , где преобладает поле поверхности волны, имеются различия в сдвиге фазы поверхности и пространственной волны, увеличивающиеся с ростом  $H$ . При  $\phi > 8 - 10^\circ$  преобладает поле пространственной волны.

Анализ распределения тока и компоненты  $H_z$  показал, что при  $T \leq 0,5\lambda$  и  $H = (0,03 - 0,05)\lambda$  существует поверхность волны, компоненты поля которой изменяются по закону  $e^{-px} e^{-ipy}$ . Для данной поляризации поверхность волна существует при индуктивном импедансе  $Z$ , который связан с параметрами поверхности волны следующими соотношениями [3]:

$$Z = ip/\omega\epsilon, \quad p = \sqrt{h^2 - k^2}. \quad (4)$$

Коэффициент замедления  $\zeta = h/k$  можно определить двумя способами:

1) аппроксимируя функцией  $e^{-px}$  распределение  $H_z$  по координате  $x$  и определяя отсюда  $p$ ;

2) учитывая разность фаз полей поверхности и пространственной волн, набегающую на расстоянии  $R = 12\lambda$ .

Расчет двумя способами дает одинаковый результат: при  $T = 0,5\lambda$  и  $H = (0,03 - 0,05)\lambda$   $\zeta = 1,015 - 1,025$ .

Для проверки просчитан вариант, когда весь контур  $l_t$  является гладкой поверхностью с импедансом  $Z = i 108 \Omega$ , что соответствует  $p = 0,285 \text{ км}$  и  $\zeta = 1,04$ . Значения  $p$  и  $\zeta$ , полученные описанными выше способами исходя из распределения  $H_z$ , совпадали с выбранными при задании  $Z$ .

Конечная проводимость поверхности моря не оказывает заметного влияния на закон распределения тока и излучаемого поля, поскольку импеданс  $Z$ , определяемый по формуле (3) при выбранных  $\epsilon_r$ ,  $\sigma$  и  $\pi$  близок к нулю.

Исследовано влияние модуляции отклонений поверхности моря и установки на части контура  $l_t$  ( $L_1$  и  $L_2$ ) гладкой импедансной поверхности. На рис. 5 приведено распределение  $|H_z|$  для следующих вариантов:

1) весь контур  $l_t$  — поверхность моря с регулярными отклонениями ( $T = 0,5\lambda$ ,  $H = 0,03\lambda$ );

- 2) весь контур  $L_T$  - поверхность моря с модулированными отклонениями ( $T = 0,5\lambda$ ,  $T_1 = 9T$ ,  $H_{\max} = 0,03\lambda$ );
- 3) участки  $L_1 = \lambda$  и  $L_2 = 1,5\lambda$  - импедансная поверхность с  $Z = i108$  Ом, остальное - как в варианте 2);
- 4) весь контур  $L_T$  - гладкая поверхность с  $Z = i108$  Ом.
- 5) весь контур  $L_T$  - гладкая поверхность моря.

Все значения  $|H_z|$  нормированы к значению для варианта 4) при  $\varphi = 1^\circ$ .

Модуляция отклонений поверхности моря практически не изменяет условий возникновения поверхностной волны, амплитуда ее несколько увеличивается. Установка на участках  $L_1$  и  $L_2$  импедансной поверхности способствует более эффективному возбуждению поверхностной волны. Последнее справедливо в широком интервале значений  $Z$ , а также когда  $Z$ , являясь комплексным, содержит вещественную часть. Такой импеданс может быть реализован в виде системы проводников, расположенной над поверхностью земли. Метод приближенного определения  $Z$  для такой системы рассмотрен в [4].

При выбранных  $\epsilon$ ,  $\sigma$  и  $\lambda$  поверхность моря близка по свойствам к идеально проводящей и может рассматриваться как отражательная решетка. Представляет интерес сравнить полученные результаты с приведенными в [5] для периодических решеток отражательного типа. Из рассмотренных в [5] наиболее близки к нашей задаче решетки типа эшелетт и решетка, образованная системой полуцилиндров, расположенных на плоскости. Отметим, что при падении плоской волны на такие решетки при определенных условиях амплитуды гармоник, распространяющихся вдоль, сравнимы с амплитудой нулевой гармоники (соответствующей зеркально отраженной волне) и даже могут превосходить ее. Так, для эшелетта это наблюдается в широком интервале значений периода  $T$  и углах падения от 0 до  $70 - 75^\circ$  относительно нормали к решетке (даные приведены для  $T \geq \lambda$ ). При падении под углами  $75 - 90^\circ$ , что соответствует нашей задаче, амплитуды распространяющихся вдоль решетки гармоник значительно меньше, чем нулевой. Это совпадает с нашими данными, когда при  $T = \lambda$  и  $T = 2\lambda$  концентрация поля вблизи поверхности моря не наблюдается. В целом данные, приведенные в [5] качественно совпадают с нашими результатами; различия в задании падающего поля и геометрии поверхности не дают возможности провести количественное сравнение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Инспекторов Э. М. //Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1984. Т.27. № 11. С.103.
2. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. - М.:Сов. радио, 1957.
3. Марков Г. Т., Сазонов Д. М. Антенны. - М.:Энергия, 1975.
4. Инспекторов Э. М. //Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1984. Т.27. № 7. С. 82.
5. Шестопалов В. П. и др. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Гос. ун-т, 1973.

Гомельский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
26 декабря 1991 г.,  
после доработки  
28 сентября 1992 г.

УДК 533. 95

## К ТЕОРИИ МАГНИТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ В ПОЛЕ СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

А. А. Жаров, Т. М. Зaborоякова, И. Г. Кондратьев

1. В работе исследуется кинетическая стадия магнитной неустойчивости (по отношению к генерации квазистационарного магнитного поля (КМП)) неоднородной бесстолкновительной плазмы в поле сильной электромагнитной волны. Возбуждение КМП связано с резонансной раскачкой ленгмюровских колебаний, что в свою очередь приводит к намагниченности плазмы, обусловленной появлением усредненного магнитного момента у отдельных электронов. Как следует из анализа гидродинамической стадии неустойчивости в неоднородной плазме [1], нарастание КМП происходит в сравнительно малой окрестности точки плазменного резонанса, причем в процессе развития неустойчивости масштаб генерируемого КМП -  $\lambda_b$  непрерывно уменьшается. Начиная с масштабов  $\lambda_b \sim v_{te}/\max\{\Gamma, v_{eff}\}$ , где  $v_{te}$  - тепловая скорость электронов,  $\Gamma$  - инкремент неустойчивости,  $v_{eff}$  -

эффективная частота соударений, гидродинамическое описание неприемлемо и требуется более адекватная кинетическая теория. Последняя рассматривалась в работе авторов [2], где, к сожалению, была допущена неточность. Здесь эта неточность устранена. Вместе с тем, как показали дальнейшие исследования, весьма существенным оказывается учет выноса энергии из области взаимодействия плазменными волнами. Поскольку, как отмечалось, размер области взаимодействия мал, можно пренебречь неоднородностью плазмы и поля волны накачки на масштабе  $\lambda_B$ . Поэтому ниже мы рассмотрим более простую модельную задачу, несколько отличающуюся от исходной, однако качественно правильно описывающую характер магнитной неустойчивости. Плазму мы будем предполагать однородной, с концентрацией  $n = n_c = m\omega^2/4\pi e^2$ , близкой к критической ( $\omega$  - частота поля накачки,  $e, m$  - заряд и масса электрона), а поле накачки - локализованным в ограниченной области пространства.

2. Уравнения, описывающие эволюцию КМП в кинетическом приближении, имеют вид [2, 3]

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{B} = - \frac{4\pi en}{c} \operatorname{rot} \left( \vec{v}_d + \frac{\omega_p^3}{8\pi n m \omega^3} \operatorname{Im} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E}^*) \right).$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}_d = \frac{i}{\omega_p} \operatorname{rot} \vec{B} + \frac{e}{mcV_{Te}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{B}(r', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dr', \quad (1)$$

$$\vec{D} = (\vec{v}_d^* \cdot \nabla) \vec{v}_d - \text{к. с.}, \quad \vec{v}_d = \frac{e\vec{E}}{i\omega m}.$$

Электрическое поле волны накачки задается в виде

$$\vec{E}^{(0)} = \begin{cases} E_0 \exp(i\omega t) & \text{при } |z| < D \\ 0 & \text{при } |z| > D \end{cases}. \quad (2)$$

Будем интересоваться возмущениями КМП, ориентированными ортогонально  $\vec{E}^{(0)}$ ;  $\vec{B} = B(z, t)\hat{y}^{(0)*}$ . Дополним уравнения (1), (2) уравнением для медленной амплитуды  $z$ -составляющей электрического ВЧ поля, возникающего в процессе генерации КМП. В результате приходим к следующей замкнутой системе уравнений:

\*Как показывают оценки, максимальный инкремент неустойчивости достигается именно для такой ориентации КМП.

$$\frac{\partial^2 b}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 b}{\partial \zeta^2} - \frac{2^{-3/2}}{\beta_{Te} \pi^{1/2}} \int \frac{\partial b(\zeta', \tau)}{\partial \tau} \frac{d\zeta'}{|\zeta - \zeta'|} = \frac{i}{4} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \varepsilon_0 \varepsilon_p^*,$$

$$2i \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \tau} - 2\Omega \varepsilon_p - 3\beta_{Te}^2 \frac{\partial \varepsilon_p^2}{\partial \zeta^2} = i \varepsilon_p b. \quad (3)$$

где введены обозначения  $\tau = \omega t$ ,  $\zeta = k_0 z$ ,  $\Omega = \frac{\omega - \omega_p}{\omega}$ ,  $b = |e|B/m\omega$ ,  $\varepsilon_0 = eE_0/m\omega c$ ,  $\varepsilon_p = eE_z/m\omega c$ ,  $\beta_{Te} = v_{Te}/c$ . Считая, что КМП и поле плазменной волны  $\varepsilon_p$  нарастают экспоненциально ( $\sim \exp(\Gamma t)$ ), а также, что при  $|z| > D$  решение для  $\varepsilon_p$  представляет собой убегающие от области взаимодействия плазменные волны, получаем следующее дисперсионное уравнение, позволяющее определить инкремент нарастания  $\Gamma$ :

$$atg(ak_0 D) = \Gamma,$$

где  $a$  связано неявно с  $\Gamma$  уравнением

$$2(\Gamma^2 + a^2 - i(\pi/2)^{1/2}\Gamma/a\beta_{Te})((3a^2\beta_{Te}^2 - 2\Omega)^2 + 4\Gamma^2) = \\ = a^2 |\varepsilon_0|^2 (3\beta_{Te}^2 a^2 - 2\Omega) \quad (5)$$

Зависимость инкремента неустойчивости  $\Gamma$  от размера области взаимодействия качественно представлена на рис. 1, где величина  $\Gamma_m \sim |e_0|/(6)^{1/2}\beta_{Te}$ . При  $D \rightarrow \infty$  инкременту  $\Gamma_m$  (см. рис. 1) отвечает оптимальный масштаб  $a_{opt} \sim (c/v_{Te})^{1/2}$ . При уменьшении  $D$  масштаб КМП изменяется. Характер изменения инкремента в зависимости от масштаба возбуждаемого КМП определяется уравнением (5) и имеет вид, изображенный на рис. 2. Учитывая теперь, что в случае неоднородной плазмы величина  $D$  имеет смысл ширины области плазменного резонанса  $D \sim l(\beta_{Te}/k_0)^{2/3}$  ( $l$  — масштаб неоднородности плазмы), получаем оценку на масштаб неоднородности плазмы  $l_c$ , при котором достигается максимальный инкремент неустойчивости  $k_0 l_c > |\varepsilon_0|^3/\beta_{Te}^2$ .

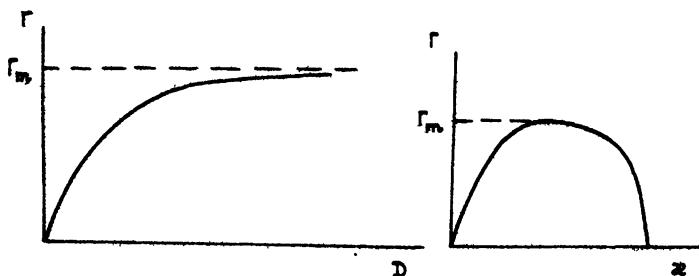


Рис. 1,2.

3. Таким образом, кинетическая магнитная неустойчивость в неоднородной бесстолкновительной плазме имеет беспороговый характер. Величина инкремента существенно зависит от масштаба неоднородности плазмы и величины поля накачки. Учет малых столкновений приводит к появлению порога по амплитуде падающей волны  $(|v_1|/v_{te}) \sim v_{eff}/\omega$  аналогично результатам, полученным в [2]. Магнитной неустойчивостью можно объяснить эффект аномально быстрого возбуждения магнитного поля в лазерной плазме, возникающей при взаимодействии излучения с твердыми мишенями в экспериментах по ЛТС. Так, например, в случае неодимового лазера ( $\lambda \sim 1\mu_m$ ) при плотности потока излучения  $S \sim 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup> и температуре плазмы  $T_e \sim 1$  КэВ ( $K_0 l = 50$ ), максимальный инкремент неустойчивости  $\Gamma_m \sim 0,1 \omega_p$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Альбер А.И., Жаров А.А., Заборонкова Т.М., Кондратьев И.Г., Кротова З.И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 2. С.170.
2. Zharov A.A., Zaboronkova T.M., Kondrat'ev I.G./Proc. Int. Conf. of Plasma Theory, Kiev. 1987. Cont. Paper. P.121.
3. Бережиани В.И., Цхакая Д.Д., Ачвар Г.//Препринт ФН-1, ИФ АН ГССР. Тбилиси, 1984.

Институт прикладной физики  
АН России

Поступила в редакцию  
24 мая 1991 г.

## **Международная школа-семинар**

### **«ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ»**

В июне 1992 года в Нижегородском университете проходила школа-семинар «Динамические и стохастические волновые явления». Основной задачей школы по замыслу программного оргкомитета (Гурбатов С. Н., Степанов Н. С., Тамойкин В. В., Островский Л. А.) была попытка хотя бы частично отразить основные направления нижегородской школы радиофизиков в области теории волн. В связи с этим практически все лекторы школы были из Нижегородского университета, института прикладной физики РАН и научно-исследовательского радиофизического института. В числе лекторов из России были представители только Нижнего Новгорода, международная ее часть была представлена университетами Англии (Кембридж), Швеции (Стокгольм, Упсалла), Южной Кореи (Сеул), Италии (Болонья).

Все лекции, доклады на школе были прочитаны на английском языке, но в специализированном выпуске журнала «Радиофизика» (№ 7, 1993 г.) большая часть докладов будет опубликована на русском.

Из докладов, прочитанных на школе, особое место занимает лекция Михаила Адольфовича Миллера «Волны, волны, волны...». В ней содержится всего четыре формулы, самая сложная из которых — представление плоской волны в комплексном виде. Но тем не менее, перефразируя название раздела 7 «Одни движения «волновее» других», можно сказать, что лекция «волновее» всех остальных лекций и докладов школы.

Материалы школы-семинара готовятся к публикации в № 7 1993 года.