

## С о д е р ж а н и е

Кириллов В.В., Копейкин В.Н., Штенников Ю.В. Особенности многодогового распространения радиоволн ДВ- и СВ-диапазона в волноводном канале Земля-ионосфера .....	107
Моисеев С.Н. Точность прогноза частоты экранирования слоя $E_s$ .....	121
Королев В.Н., Маругин А.В., Харчев А.В., Цареградский В.Б. Исследование устойчивости одночастотной генерации инжекционного лазера с внешним резонатором .....	126
Кучеров А.Н., Макашев Н.К., Устинов Е.В. Тепловое самовоздействие пучков переменного радиуса в приближении теории малых возмущений .....	135
Берестнев Д.П., Зайцев В.В. Численный анализ дисперсионных характеристик плоских диэлектрических волноводов .....	143
Агудов Н.В., Малахов А.Н. Нестационарная диффузия через произвольный кусочно-линейный потенциальный профиль. Точное решение и временные характеристики .....	148
Мальшев В.М., Усыченко В.Г. Модель низкочастотного шума диода с барьером Шоттки .....	167
Крутинь Ю.И., Сиренко Ю.К., Шестопалов В.П. Расчет сечений рассеяния произвольных детерминированных и случайных идеально проводящих поверхностей .....	179
Ростов В.В., Тотьменинов Е.М. Волноводно-квазиоптический резонатор для коротковолновых релятивистских генераторов .....	192

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИЗБУРГ (главный редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора), В. В. ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ, А. Н. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ, А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН, В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, С. А. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции    К. Б. МУРАШКИНА

Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.  
Усл. печ. л. 8,40. Усл. кр.-отт. 8,40. Уч.-изд. л. 10,10  
Тираж 725 экз. Заказ                      Цена 25 р.

---

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25,  
Научно-исследовательский радиофизический институт,  
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71

---

Отпечатано с готового набора  
Межвузовская типография  
При Нижегородском государственном университете,  
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37.

© "Известия высших учебных заведений. Радиофизика", 1993

УДК 538.566

**ОСОБЕННОСТИ МНОГОМОДОВОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН  
ДВ- И СВ-ДИАПАЗОНА В ВОЛНОВОДНОМ КАНАЛЕ ЗЕМЛЯ - ИОНОСФЕРА***В. В. Кириллов, В. Н. Копейкин, Ю. В. Штенников*

Для изотропной сферически слоистой ионосферы получено характеристическое уравнение с учетом отражения от Земли. Приводится аналитическая модель для описания отражательных характеристик ионосферы. Даются простые формулы, связывающие различные характеристические высоты ионосферы. Показано, что электромагнитное поле, рассчитанное по нормальным волнам, сшивается с полем плоской задачи Зоммерфельда в ближней зоне и что на расстояниях свыше 1 мм некогерентное поле описывает среднее поле.

В ДВ- и СВ-диапазонах вычисление электромагнитного поля по нормальным волнам не является традиционным, обычно используется метод многократных отражений [1]. В работе [2] на основе точного решения задачи отражения от анизотропной ионосферы в СДВ- и ДВ-диапазонах получено разложение электромагнитного поля по нормальным волнам и, в частности, показано, что изотропная модель ионосферы в ДВ-диапазоне в основном правильно описывает в среднем электромагнитное поле на земной поверхности.

На частотах ДВ-диапазона и выше характерный масштаб изменения свойств ионосферы много меньше длины волны, что открывает возможность использования лучевого представления электромагнитного поля в ионосфере. Наличие поглощения приводит к комплексным точкам поворота и комплексным лучам.

В сферически слоистой среде лучевая картина распространения радиоволн в волноводном канале Земля - ионосфера определяется изменением сферической диэлектрической проницаемости  $\epsilon_s(r)$  в зависимости от высоты  $r$ , отсчитываемой от центра Земли радиуса  $a$ . Тогда

$$\epsilon_s(r) = (r/a)^2 \epsilon(r),$$

где  $\epsilon(r)$  - относительная диэлектрическая проницаемость ионосферы.

Отличие в характере поведения этих двух диэлектрических проницаемостей в зависимости от высоты приводит к тому, что при монотонном ходе функции  $\varepsilon(r)$  с высотой сферическая диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_s(r)$  имеет максимум на высоте  $r_a$ . Реальную часть  $r_a$  назовем высотой оси волноводного канала Земля - ионосфера.

Для проведения численных оценок воспользуемся экспоненциальными аппроксимациями профилей электронной концентрации  $N_e^{(1)}(r)$ ,  $N_e^{(2)}(r)$  для дня и ночи, и частоты соударений  $\nu_e(r)$ :

$$N_e^{(1)}(r) = 90 \exp[0,21 \text{ км}^{-1}(r - a - 65 \text{ км})] \text{ см}^{-3},$$

$$N_e^{(2)}(r) = 183 \exp[0,35 \text{ км}^{-1}(r - a - 90 \text{ км})] \text{ см}^{-3}, \quad (1)$$

$$\nu_e(r) = 2,49 \cdot 10^5 \exp[-0,15 \text{ км}^{-1}(r - a - 90 \text{ км})] \text{ с}^{-1}.$$

Тогда можно показать, что высота оси волноводного канала Земля - ионосфера увеличивается с ростом частоты приблизительно по логарифмическому закону с коэффициентом, зависящим от масштаба профиля  $N_e/\nu_e$ . На частоте 30 кГц значение  $\text{Re}(r_a - a)$  изменяется от 50 до 70 км при переходе от дня к ночи; на частоте 3 МГц эти высоты возрастают приблизительно на 10 и 15 км соответственно.

Верхняя точка поворота  $r_{\text{и}}$  располагается выше оси волновода и определяется уравнением

$$1 - \varepsilon(r_{\text{и}}) = c_{\text{и}}^2.$$

Превышение значения верхней точки поворота относительно оси волновода зависит от величины косинуса угла падения на ионосферу  $c_{\text{и}}$  на уровне  $r_{\text{и}}$  и, тем самым, зависит от номера нормальной волны. Чем больше номер, тем больше это превышение. Для нормальной волны номера  $m_0$ , угол падения которой на Землю приблизительно скользкий, это превышение на частоте 30 кГц составляет 15 км днем и ночью; на частоте 3 МГц для дня оно составляет 15 км, для ночи увеличивается до 20 км.

Будем отсчитывать высоты  $H$  относительно поверхности Земли. Тогда  $H_{\text{и}} = r_{\text{и}} - a$ ,  $H_a = r_a - a$ .

На рис. 1 приведены зависимости реальных частей комплексных высот  $H_{\text{и}}$  (кривые 1 и 3 для ночи и дня соответственно) и  $H_a$  (кривые 2 и 4) как функции логарифма частоты при  $f_0 = 10$  кГц для скользкого угла падения ( $c = 0$ ). Видно, что зависимости близки к линейным.

Отклонения от линейности в высокочастотной области указывают на соизмеримость  $\nu_e$  и  $\omega$  в существенной области. На рис. 2 приведены соответствующие зависимости для мнимых частей высот порядка нескольких километров в ДВ-диапазоне, уменьшаются с ростом частоты, что указывает на уменьшение значений частоты соударений в существенной области.

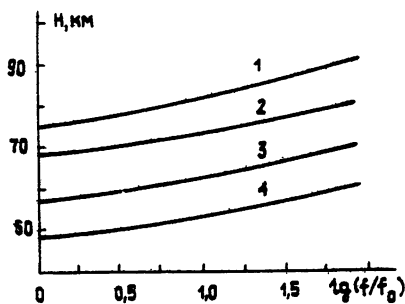


Рис. 1.

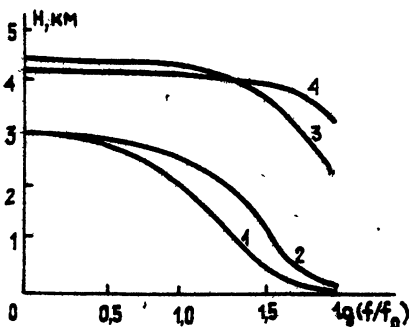


Рис. 2.

Нижняя точка поворота  $r_d$  для начальных номеров нормальных волн располагается в промежутке между земной поверхностью и осью волновода  $r_a$ . Для номеров, превышающих номер скользящей нормальной волны  $m > m_0$ , т.е. таких мод, угол падения которых на земную поверхность близок к скользящему, нижняя точка поворота уходит под Землю, теряя тем самым физический смысл.

При лучевом описании отражения электромагнитных волн от ионосферы особое значение имеет фазовый интеграл  $\Phi$  и его производная по параметру  $c^2$  - квадрату косинуса угла падения на земную поверхность,

$$\Phi = k \int_h^{h_H} \sqrt{\epsilon_s(r) - s^2} dz, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c^2} = \frac{k}{2} \int_h^{h_H} \frac{dz}{\sqrt{\epsilon_s(r) - s^2}} \quad (2)$$

$$z = a \ln(r/a), \quad h_H = a \ln(r_H/a), \quad h_d = a \ln(r_d/a),$$

$$s^2 + c^2 = 1, \quad \epsilon_s(h_H) = s^2.$$

Нижний предел интегрирования в (2) либо совпадает для начальных номеров с высотой  $h_d$ , определяемой из уравнения  $\epsilon_s(h_d) = s^2$ , либо с

$h = 0$  (земная поверхность для нормальных волн, когда нижняя точка поворота уходит под Землю). В работе используется аналитическая модель фазового интеграла и его производной. Введем обозначения  $\epsilon_s - s^2 = f - g$ ,  $f = (r/a)^2 - 1 + c^2$ ,  $g = (r/a)^2(1 - \epsilon)$ . Функция  $f(z)$  описывает диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_s$ , соответствующую воздуху;  $g(z)$  учитывает наличие плазмы. Они имеют различные масштабы изменения. Масштаб изменения  $f(z)$  - радиус Земли; изменение  $g(z)$  практически определяется текущим масштабом изменения  $\alpha^{-1}$  - функции  $1 - \epsilon$

$$\alpha = \frac{d}{dr} \ln(1 - \epsilon) = \frac{d}{dr} \ln(N_o) - \frac{iv_o}{\omega + iv_o} \frac{d}{dr} \ln(v_o). \quad (3)$$

Для реальной ионосферы в пределах  $z < 100$  км  $\alpha$  меняется слабо в существенной области и  $|\alpha\alpha| \sim 10^3$ . Более быстро меняющаяся квазиэкспоненциальная функция  $g(z)$  равна функции  $f(z)$  на верхнем пределе интегрирования. Нижний предел интегрирования находится либо в окрестности нуля  $f(z)$ , либо при  $z = 0$  (поверхность Земли, у которой  $|g| < |f|$ ). Аналитическая модель учитывает эти особенности формирования фазового интеграла и его производной.

В нулевом приближении этой модели фазовый интеграл  $\Phi_0$  равен интегралу от  $\sqrt{f}$  в пределах либо от  $h_d^0$  ( $f(h_d^0) = 0$ ), либо от 0 (поверхность Земли) до  $h_u$  - верхней точки поворота ( $f(h_u) = g(h_u)$ )

$$\Phi_0 = k \int_h^{h_u} f^{1/2} ds, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial c^2}\right)_0 = 0,5 k \int_h^{h_u} f^{-1/2} dz. \quad (4)$$

Вычисления выражений (4) приводят к следующим соотношениям:

$$\underline{h = h_d}$$

$$\Phi_0 = kr_u c_u \left(1 - \frac{1}{2i\sqrt{x}} \ln \frac{1 + i\sqrt{x}}{1 - i\sqrt{x}}\right) = \frac{kr_u c_u x}{3} \left(1 - \frac{3}{5} x + \frac{3}{7} x^2 - \dots\right), \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial c^2}\right)_0 = \frac{kr_u c_u}{4is^2\sqrt{x}} \ln \frac{1 + i\sqrt{x}}{1 - i\sqrt{x}} = \frac{kr_u c_u}{2s^2} \left(1 - \frac{1}{3} x + \frac{1}{5} x^2 - \dots\right),$$

$$\kappa = c_{\text{н}}^2 / s_{\text{н}}^2,$$

$$s_{\text{н}} r_{\text{н}} = sa;$$

$$\underline{h = 0}$$

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= k\eta \left[ r_{\text{н}} - a + ac^2 - as^2 \left( \frac{\arcsin(y)}{y} - 1 \right) \right] = \\ &= k\eta \left[ r_{\text{н}} - a + ac^2 - \frac{1}{6} as^2 y^2 \left( 1 - \frac{9}{20} y^2 + \dots \right) \right], \end{aligned}$$

(6)

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial c^2} \right)_0 = \frac{ka}{2s} \arcsin(y) = \frac{ka\eta}{2} \left( 1 + \frac{1}{6} y^2 + \frac{3}{40} y^4 + \dots \right),$$

$$\eta = \frac{(r_{\text{н}} - a)(r_{\text{н}} + a)}{r_{\text{н}}^2 \left( c_{\text{н}} + \frac{a}{r_{\text{н}}} - c \right)}, \quad y = s\eta.$$

Представления (5), (6) для  $\Phi_0$  и  $(\partial\Phi/\partial c^2)_0$ , в которых специальные функции аппроксимируются соответствующими отрезками рядов Тейлора, обеспечивают необходимую точность вычислений, которая для  $\Phi$  не хуже  $10^{-2}|c_{\text{н}}|$ . Это вытекает из требования, чтобы абсолютная погрешность продольного собственного числа, описывающего изменение поля на расстоянии, равном радиусу Земли вдоль земной поверхности, была бы в пределах  $10^{-2}$ .

Идея получения следующих приближений изложим для фазового интеграла, так как для производной фазового интеграла действия аналогичны. Корень  $\sqrt{f-g}$  раскладывается в ряд Тейлора:

$$\sqrt{f-g} = \sqrt{f} - \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{f}} - \dots - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \dots (m - \frac{3}{2})}{m!} \frac{g^m}{f^{m-1/2}} - \dots$$

Фазовый интеграл  $\Phi$  (2) представляется в виде ряда

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n, \quad (7)$$

где

$$\Phi_n = A_n k \int_r^{r_{\text{н}}} \frac{g^n}{f^{n-1/2}} \frac{a}{r} dr, \quad (8)$$

$$-A_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 1 \\ \frac{1/2, 1/2, \dots, (m-3/2)}{m!}, & m > 1 \end{cases}$$

$\Phi_0$  определяется по формулам (5) и (6). В интегралах (8) выделим явно быстропеременную функцию

$$\Phi_n = A_n c_n k \int_r^{r_H} \left(\frac{r}{r_H}\right)^{2n-1} \left(\frac{f}{f_H}\right)^{-n+1/2} \left(\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon_H}\right)^n dr. \quad (9)$$

Поскольку функция  $1-\varepsilon$  близка к экспоненциальной, удобно ввести новую независимую переменную  $\xi$  по формуле

$$\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon_H} = \exp \xi.$$

Выражение (9) для  $\Phi_n$  переписывается в виде

$$\Phi_n = A_n \frac{c_n k}{\alpha_n} \int_{\xi(r)}^0 \left(\frac{r}{r_H}\right)^{2n-1} \left(\frac{f}{f_H}\right)^{-n+1/2} \frac{\alpha_n}{\alpha} \exp(m\xi) d\xi. \quad (10)$$

Функция  $\alpha$  является логарифмической производной от функции  $1-\varepsilon$  и определена по формуле (3) ( $\alpha_n$  - значение  $\alpha$  на верхнем пределе интегрирования). Главная часть интегралов (10) сосредоточена в некоторой окрестности верхнего предела. Следуя методу асимптотического интегрирования, функцию, стоящую перед экспонентой, раскладываем в ряд Тейлора относительно верхнего предела и интегрируем почленно, что приводит к разным порядкам точности аналитической модели. В каждом из полученных таким образом интегралов нижний предел интегрирования считается  $-\infty$ .

Каждому  $\Phi_n$  соответствует ряд

$$\Phi_n^{(1)} = A_n \frac{c_n k}{\alpha_n} \int_{-\infty}^0 \exp(m\xi) d\xi, \quad \Phi_n^{(2)} = A_n^{(2)} \frac{c_n k}{\alpha_n} \int_{-\infty}^0 \xi \exp(m\xi) d\xi$$

и т. д.,

$$B_n^{(2)} = \frac{d}{d\xi} \left[ \left(\frac{r}{r_H}\right)^{2n-1} \left(\frac{f}{f_H}\right)^{-n+1/2} \frac{\alpha_n}{\alpha} \right] \text{ при } \xi = 0.$$



В рассматриваемом приближении аналитической модели первое и последующие приближения не зависят явно от нижнего предела интегрирования. Все  $\Phi_n^{(k)}$  одного и того же порядка ( $k$ ) имеют один и тот же порядок малости, что приводит к необходимости суммирования их по  $n$ . В итоге для фазового интеграла и его производной получаются следующие представления:

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{k c_{II}}{\alpha_{II}} \Phi_{ph}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c^2} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial c^2} \right)_0 + \frac{k \alpha^2}{\alpha_{II} c_{II} r_{II}^2} \Phi_{tr}, \quad (12)$$

$$\Phi_{ph} = \alpha_0 + \alpha_1 \beta_1 + b_1 A + \alpha_2 (3\beta_1^2 - \beta_2) + \dots,$$

$$\Phi_{tr} = b_0 + b_1 \left( \frac{2}{\alpha_{II} r_{II}} + \beta_1 \right) + c_1 A + b_2 \left( \frac{6}{\alpha_{II}^2 r_{II}^2} + \frac{6\beta_1}{\alpha_{II} r_{II}} + 3\beta_1^2 - \beta_2 \right) + \dots,$$

где

$$A \equiv \frac{2s_{II}^2}{\alpha_{II} r_{II} c_{II}^2}; \quad (13)$$

$$\beta_1 \equiv \left( \frac{\alpha'_{rr}}{\alpha^2} \right)_{II}, \quad (14)$$

$$\beta_2 \equiv \left( \frac{\alpha'_{rrr}}{\alpha^3} \right)_{II}.$$

Числа  $\alpha_n$ ,  $b_n$  и  $c_n$  определяются интегралами

$$\alpha_n \equiv \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \left[ 1 - \left( 1 - \exp(-\xi) \right)^{1/2} \right] \xi^n d\xi,$$

$$b_n \equiv \frac{1}{2n!} \int_0^{\infty} \left[ \left( 1 - \exp(-\xi) \right)^{-1/2} - 1 \right] \xi^n d\xi,$$

$$c_n \equiv \frac{1}{4n!} \int_0^{\infty} \left[ \left( 1 - \exp(-\xi) \right)^{-3/2} - 1 \right] \xi^n d\xi,$$

$$\alpha_0 = 2 - 2b_0 = 2 - 2\ln(2) = 0,613705679,$$

$$b_1 = \pi^2/12 - \ln^2(2) = 0,34201402, \quad b_2 = 0,283891925.$$

Остальные коэффициенты вычисляются по рекуррентным соотношениям

$$a_{n+1} = 2a_n - 2b_{n+1},$$

$$c_{n+1} = b_n + 0,5b_{n+1}.$$

Первое приближение в полученных формулах совпадает с аналогичной поправкой в плоской модели ионосферного слоя с экспоненциальным профилем для функции  $1 - \epsilon$  с параметрами, получаемыми из реального профиля в верхней точке поворота. Чем диффузнее ионосферный слой в существенной области, тем меньше  $\alpha_n$  и тем больше роль первого приближения. Второе приближение имеет дополнительные параметры  $\lambda$  (13) и  $\beta_1$  (14). Параметр  $\lambda$  описывает сферичность области отражения; его влияние тем больше, чем более скользким является падение волны в верхней точке поворота. Углы скольжения ограничены условием  $c_n \sim 2H_n/\alpha$ , что приводит к требованию  $|\alpha H_n| \ll 1$  - первому условию применимости аналитической модели. Удержание первой степени параметра  $\lambda$  достаточно во всем ДВ- и СВ-диапазонах. Параметр  $\beta_1$  описывает отклонение профиля  $1 - \epsilon$  в существенной области от экспоненты. Вторым условием применимости аналитической модели является выполнение неравенства  $|\beta_1| \ll 1$ . Для модели ионосферы, когда профили электронной концентрации  $N_e$  и частоты соударений  $\nu_e$  аппроксимируются экспонентами, роль параметра  $\beta_1$  наиболее существенна при  $\omega \sim \nu$  в окрестности верхней точки поворота. Из рис. 1 видно, что для ночных условий  $\omega \sim \nu$  в существенной области на частотах 250 - 300 кГц; днем эта область приходится на нижнюю часть КВ-диапазона. Параметры  $\beta_1$  и  $\beta_2$  описывают отклонение профиля  $1 - \epsilon$  от экспоненты в следующем порядке малости.

Аналитическая модель (1) позволяет естественным образом дать выражения для фазовой высоты  $H_{ph}$  и триангуляционной высоты  $H_{tr}$ . Под фазовой высотой понимается такая высота, при которой фазовый интеграл в пределах от  $r = a$  до  $r = r_{ph}$  в воздухе при заданном угле падения к земной поверхности совпадает с фазовым интегралом в присутствии ионосферы. Формально для этой высоты имеем

$$\int_{r_{ph}}^{r_H} \sqrt{f} \frac{a}{r} dr = \frac{c_H}{\alpha_H} \Phi_{ph}.$$

Под триангуляционной высотой понимается такая высота, при которой производная от фазового интеграла по углу падения у земной поверхности в пределах от  $r = a$  до  $r = r_{tr}$  в воздухе в предположении, что  $r_{tr}$  не зависит от угла падения, совпадает с аналогичной производной при наличии ионосферы. Формально для этой высоты имеем

$$\int_{r_{и}}^{r_{tr}} (f)^{-1/2} \frac{a}{r} dr = \frac{a^2}{\alpha_{и} c_{и} r_{и}^2} \Phi_{tr}.$$

В первом порядке аналитической модели получаем

$$H_{и} - H_{ph} \sim 0,614/\alpha_{и}, \quad (15)$$

$$H_{tr} - H_{и} \sim 1,386/\alpha_{и}.$$

Реальная часть фазовой высоты  $H_{ph}$ , как это и должно быть для плазмы, оказывается меньше реальной части высоты верхней точки поворота  $H_{и}$ . Реальная часть триангуляционной высоты  $H_{tr}$  больше реальной части  $H_{и}$ . Это различие тем заметнее, чем более диффузным оказывается профиль  $N_e/v_e$  на низких частотах и профиль  $N_e$  на верхнем крае СВ-диапазона, и составляет единицы километров для реальной ионосферы. Параметр  $\alpha_{и}$  имеет слабую комплексность на частотах между СВ- и ДВ-диапазонами, что приводит к примерному равенству мнимых частей всех обсуждаемых высот.

Физические условия формирования нормальных волн положены в основу составления характеристического уравнения. Для первых номеров сказывается эффект прилипания. В силу этого обстоятельства собственные числа этих номеров не зависят от электрических свойств земной поверхности, и характеристическое уравнение имеет вид

$$\Phi = (m + 0,5)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Разность между фазовой высотой и высотой нижней точки поворота приближенно равна

$$H_{ph} - H_d \sim \frac{a}{2} \left[ \frac{3\pi(m+0,5)}{ka} \right]^{2/3},$$

т.е. эта разность не зависит от свойств ионосферы и определяется по номеру нормальной волны и частоте.

С учетом формулы (15), для квадрата косинуса угла падения у верхней точки поворота  $c_{и}^2$  имеем

$$c_n^2 - \frac{2}{\alpha}(H_n - H_d) - \frac{1,227}{\alpha_n \alpha} + \left[ \frac{3\pi(m+0,5)}{ka} \right]^{2/3}. \quad (16)$$

По  $c_n^2$  находится верхняя точка поворота  $H_n$ , а затем нижняя  $H_d$ , которая определяет зависимость нормальной волны от горизонтального расстояния. Формула (16) позволяет оценить номер скользящей нормальной волны  $m_0$ , положив  $H_d=0$ . На частоте 300 кГц в ночных условиях  $m_0=17$ . В дневных условиях  $m_0=11$ . Если пренебречь зависимостью  $H_n^0$  от частоты, то  $m_0$  примерно линейно зависит от частоты. Зависимость  $m_0$  от высоты  $H_n^0$  степенная с показателем  $3/2$ .

С увеличением номеров нормальных волн, но в пределах  $m_0$ , по мере опускания нижней точки поворота земная поверхность попадает в область высот, затрагиваемых нормальной волной. В этом случае характеристическое уравнение зависит от электрических свойств земной поверхности через функции Эйри  $u(t)$ ,  $v(t)$ , их производные  $u'(t)$ ,  $v'(t)$  [3] и имеет вид

$$\Phi + \frac{1}{2i} \ln \left[ \frac{u' - qu - i(v' - qv)}{u' - qu + i(v' - qv)} \right] = (m + 0,5)\pi,$$

$$q = iM(\delta_g - \frac{i}{2ka}), \quad t = \frac{2h_d M^2}{a} = -Mc^2, \quad M^3 = \frac{ka}{2},$$

аргумент логарифма фиксирован в пределах  $[-\pi, +\pi]$ .

Нормировочный интеграл  $N$  вычисляется по формуле

$$kMN = [(u' - qu)^2 + (v' - qv)^2] \frac{\partial \Phi}{\partial c^2} + M^2(t - q^2).$$

Второе слагаемое соответствует нормировочному множителю открытой сферы; первое слагаемое является определяющим и учитывает свойства ионосферы. Электромагнитное поле рассчитывается по формуле

$$E_r = \frac{iP_0 k^2}{4\epsilon_0} \left( \frac{\theta}{\sin(\theta)} \right)^{1/2} \sum_n s_n^2 N_n^{-1} H_0^{(1)}(ks_n D), \quad (17)$$

$D = a\theta$  - расстояние между передатчиком - вертикальным электрическим диполем с моментом  $P_0$  и приемником, расположенным на земной поверхности;  $k$  - волновое число;  $H_0^{(1)}$  - функция Ханкеля.

Для нормальных волн с  $m > m_0$  нижняя точка поворота уходит под

Землю и нижний предел фазового интеграла равняется радиусу Земли. Характеристическое уравнение преобразуется к виду

$$\Phi + \frac{1}{2i} \ln(R_g) = (m + 0,25)\pi,$$

$$R_g = \frac{w'_2 - qw'_2}{w'_1 - qw'_1} \exp[-i\pi/2 + i4/3(-t)^{3/2}],$$

$$w_{1/2} = u \pm iv.$$

Новые функции Эйри  $w_{1,2}$  замечательны тем, что они имеют одноэкспоненциальные асимптотики в некотором секторе относительно отрицательной части вещественной оси. Экспоненциальный множитель в коэффициенте отражения  $R_g$  обеспечивает переход его в обычный коэффициент отражения Френеля. Нормировочный интеграл  $N$  в этом случае рассчитывается по формуле

$$kMN = (w'_1 - qw'_1)(w'_2 - qw'_2) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial c^2} + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial c^2} \ln(R_g) \right],$$

$$\frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial c^2} \ln(R_g) = M^2 \left[ \sqrt{-t} + \frac{t - q^2}{(w'_1 - qw'_1)(w'_2 - qw'_2)} \right].$$

С дальнейшим повышением номеров для функций Эйри используются асимптотические выражения:

$$R_g = \frac{(B - iB_1)\sqrt{-t} + i(A + iA_1)q}{(B + iB_1)\sqrt{-t} - i(A - iA_1)q} = \frac{C}{D},$$

$$\frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial c^2} \ln(R_g) = M^2 \sqrt{-t} \frac{E_1(-t) - 2E_2q\sqrt{-t} + E_3}{CD},$$

$$E_1 = (B-1)(B+1) + B_1^2, \quad E_2 = AB_1 + A_1B, \quad E_3 = (A-1)(A+1) + A_1^2,$$

$$A - 1 = -\frac{a_2}{x^2} + \frac{a_4}{x^4} - \dots, \quad A_1 = \frac{a_1}{x} - \frac{a_3}{x^3} + \dots, \quad x = \frac{2}{3}(-t)^{3/2},$$

$$B - 1 = \frac{b_2}{x^2} - \frac{b_4}{x^4} + \dots, \quad B_1 = \frac{b_1}{x} - \frac{b_3}{x^3} + \dots,$$

$$a_1 = \frac{5}{72}, \quad a_n = \frac{5 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (6n-1) \cdot 7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (6n-5)}{n! (72)^n},$$

$$b_1 = \frac{7}{72}, \quad b_n = \frac{7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (6n+1) \cdot 5 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (6n-7)}{n! (72)^n}.$$

Первые члены асимптотических соотношений дают обычные отражательные формулы.

Начальные данные для собственных чисел последовательно определяются из уже найденных собственных чисел. Фиксация ветви логарифмов обеспечивает единственность корней для каждого номера  $m$ . Это правило имеет исключение в ночных условиях на частотах, больших 50 кГц, и земной поверхностью со свойствами суши. В этом случае для некоторого номера корень не находится и появляется волна, выходящая из ряда нормальных волн. Ее собственное значение слабо зависит от свойств ионосферы и находится вблизи равенства нулю коэффициента отражения от земной поверхности ( $c = \delta_g$ ).

В дневных условиях также имеются исключения на частотах, больших 300 кГц для морских трасс, когда имеется изолированная мода, выделяющаяся в сторону меньших затуханий и имеющая собственное значение, близкое к первому собственному значению открытой сферы. Названные особенности учитываются при численных реализациях.

В нижней части ДВ-диапазона ( $f < 150$  кГц) лучевое описание отражения от ионосферы приводит к значительным погрешностям. На этих частотах используется волновое описание отражения в рамках экспоненциальной аппроксимации профиля  $N_e/\nu_e$  путем добавления в фазовый интеграл  $\Phi$  соответствующих членов, получаемых из точного аналитического решения задачи.

По полученным формулам была составлена программа расчета вертикальной компоненты электрического поля в волноводе Земля - ионосфера для ДВ- и СВ-диапазонов. По заданной точности вычисления полей определяется номер наименьшей учитываемой моды ионосферного канала (16). Номер максимальной моды вычисляется с учетом минимального заданного расстояния от источника. Собственные значения нормальных волн канала Земля - ионосфера находятся путем решения характеристического уравнения итерационным методом. Вычисления полей проводятся по формулам (17) с учетом необходимого числа мод. Для оценки точности работы программы было проведено сравнение значения вертикальной компоненты электрического поля над плоской землей с учетом электростатического и индукционного членов на расстоянии 250

метров с результатами вычислений по программе на частоте 3 МГц с учетом 2500 мод; данные совпали с точностью до одного процента. Вычисление 1000 мод на РС-АТ/286/287 занимает 75 секунд.

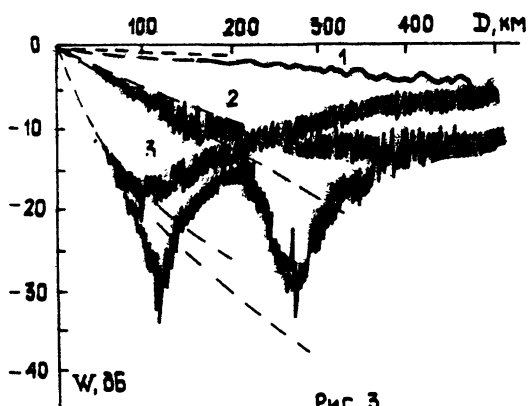


Рис. 3.

На рис. 3 приведен модуль функции ослабления вертикальной компоненты электрического поля в децибелах на расстояниях  $1 \div 500$  км от источника вдоль поверхности Земли для ночной модели волновода и при проводимости  $\sigma = 10^{-2}$  См/м и  $\epsilon = 10$  для земной поверхности. Частоты на рисунке указаны цифрами: 1 - 100 кГц, 2 - 500 кГц, 3 - 1 МГц. Точками на графике нанесены результаты расчетов функции ослабления, полученные по модели плоской Земли без ионосферы; пунктирные линии изображают результаты расчетов для открытой сферы; сплошные осциллирующие линии показывают поведение функции ослабления в присутствии ионосферы. На малых расстояниях (до 100 км) все кривые совпадают, что свидетельствует о надежности вычислений поля по нормальным волнам даже для таких малых расстояний.

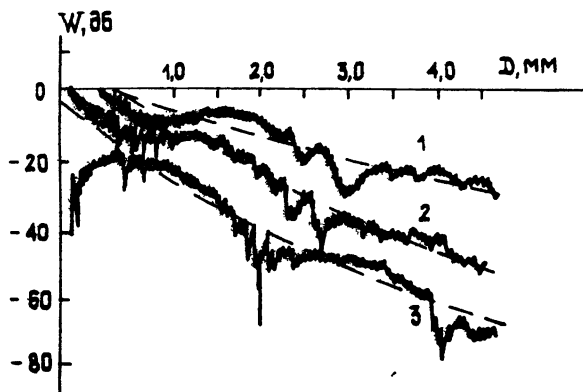


Рис. 4.

На рис. 4 показано поведение модуля функции ослабления для вертикальной компоненты  $E_r$  в децибелах как функции расстояния по земной поверхности на частоте 300 кГц в ночных условиях на однородных трассах с различной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и проводимостью  $\sigma$  ( $\epsilon = 80$ ,  $\sigma = 4$  См/м;  $\epsilon = 10$ ,  $\sigma = 10^{-2}$  См/м;  $\epsilon = 5$ ,  $\sigma = 10^{-3}$  См/м для кривых 1 - 3 соответственно). Поведение поля характеризуется значительной изменчивостью, что свидетельствует об интерференции нормальных волн. Пунктирные линии на графике изображают некогерентную функцию ослабления, полученную по ряду нормальных волн (3) путем сложения квадратов модулей отдельных нормальных волн и извлечения квадратного корня из полученной суммы. Из рис. 4 видно, что на расстояниях, превышающих 1 км, некогерентная функция ослабления описывает среднее поведение модуля функции ослабления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Грининен Э. М., Забавина И. И. //Проблемы дифракции и распространения волн - Л.: Гос. ун-т, 1966. Вып. 5. С. 5.
2. Пронин А. Е. //Проблемы дифракции и распространения волн - Л.: Гос. ун-т, 1986. Вып. 20. С. 40.
3. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных радиоволн. - М.: Сов. радио, 1970. - 517 с.

Санкт-Петербургский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
12 ноября 1991 г.

#### MULTIMODE LF AND MF PROPAGATION IN THE EARTH-IONOSPHERE WAVEGUIDE

*V. V. Kirillov, V. N. Kopeikin, Yu. V. Shtennikov*

The characteristic equation is obtained for the model of isotropic spherically layered ionosphere taking into account reflections from the ground. An analytical model for reflection properties of the ionosphere is presented. Simple formulas are given relating the various definitions of ionospheric reflection height. It is shown that the electromagnetic field calculated as a mode sum matches the Sommerfeld plane case field in the near-field zone, and that at ranges above 1 km the incoherent field describes well the mean field.



УДК 621.371

ТОЧНОСТЬ ПРОГНОЗА ЧАСТОТЫ ЭКРАНИРОВАНИЯ СЛОЯ E<sub>s</sub>

С. Н. Мусеев

Проведен анализ точности прогнозов частоты экранирования среднеширотного спорадического слоя E-ионосферы. Показано, что точность прогнозов частоты экранирования зависит от времени суток и априори известных значений частоты экранирования, используемых в прогнозе.

При прогнозировании условий ионосферной УКВ радиосвязи с учетом слоя E<sub>s</sub> большое практическое значение имеет прогноз частоты экранирования  $f_b(t)$ , так как она наиболее тесно связана с максимальной плазменной частотой слоя E<sub>s</sub> [1]. Точность прогнозирования  $f_b(t)$  может сложным образом зависеть от времени суток, упреждения прогноза, априорных знаний и т.п., поскольку процесс  $f_b(t)$  является негауссовым нестационарным процессом [2]. Анализ этих зависимостей представляется необходимым при практическом использовании прогнозов  $f_b(t)$ .

Статистическая модель частоты экранирования среднеширотного слоя E<sub>s</sub>, полученная в работе [3] с использованием теории ветрового сдвига [4], имеет вид

$$z_t - (\beta_1 + \beta_2)z_{t-1} + \beta_1\beta_2z_{t-2} = \xi_t, \quad (1)$$

где  $z_t = \ln[f_b(t)] - m(t)$ ,  $\xi_t$  - белый гауссов шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ , отсчеты  $z_t$  и  $z_{t-1}$  разнесены на 15 минут,  $m(t)$  - детерминированный периодический тренд с основным периодом в сутки, аппроксимированный двумя членами ряда Фурье:

$$m(t) = a_0/2 + \sum_{i=1}^2 \{a_i \cos(2\pi it/96) + b_i \sin(2\pi it/96)\}. \quad (2)$$

Модель содержит 8 параметров, оценки которых, полученные методом максимального правдоподобия по экспериментальным данным  $f_b$  станции вертикального зондирования г. Москвы за июнь-июль 1976 г., были равны  $\beta_1 = 0.81$ ,  $\beta_2 = -0.14$ ,  $\sigma^2 = 0.07$ ,  $a_0 = 1.75$ ,  $a_1 = -0.42$ ,  $a_2 = -0.1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -0.21$ . Все численные расчеты проводились для этих значений параметров.

Прогноз с минимальной среднеквадратической ошибкой (СКО) процесса  $z_t$  с момента времени  $t$  на момент времени  $t + l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , т. е. с упреждением  $l$ , будет определяться, в силу марковских свойств процесса  $z_t$ , только двумя известными отсчетами процесса  $z_t$  в моменты времени  $t$  и  $t - k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , наиболее близко отстоящими от момента времени, на который дается прогноз

$$\hat{z}_t(l) = \frac{1}{1-r_k^2} \left[ (r_1 - r_k r_{k+1}) z_t + (r_{k+1} - r_k r_1) z_{t-k} \right], \quad (3)$$

где  $r_1$  - нормированная автокорреляционная функция процесса  $z_t$ ,

$$r_1 = \frac{(1 - \beta_2^2) \beta_1^{1+1} - (1 - \beta_1^2) \beta_2^{1+1}}{(\beta_1 - \beta_2) (1 + \beta_1 \beta_2)}.$$

Дисперсия ошибки прогноза (3) имеет вид

$$d_z(l) = \sigma_z^2 \left[ 1 - \frac{r_1^2 + r_{1+k}^2 - 2r_1 r_k r_{1+k}}{1 - r_k^2} \right],$$

где  $\sigma_z^2 = \sigma^2 / [1 - (\beta_1 + \beta_2) r_1 + \beta_1 \beta_2 r_2]$  - дисперсия процесса  $z_t$ .

От прогноза процесса  $z_t$  (3) перейдем к прогнозу частоты экранирования. Прогноз  $f_b(t)$  с упреждением  $l$  с минимальной СКО имеет вид

$$\hat{f}_{b,t}(l) = \exp \left\{ \hat{z}_t(l) + m(t+1) + d_z(l)/2 \right\}, \quad (4)$$

Дисперсия ошибки прогноза (4) будет зависеть от  $l, k, t, z_t$  и  $z_{t-k}$ :

$$D(l, t) = \exp \left\{ 2 \left[ \hat{z}_t(l) + m(t+1) \right] + d_z(l) \right\} \left[ \exp \left\{ d_z(l) \right\} - 1 \right]. \quad (5)$$

Для простоты анализа выражения (5) перейдем к безусловной дисперсии ошибки прогноза  $D_0(l, t)$ , усредняя (5) по  $z_t$  и  $z_{t-k}$ :

$$D_0(l, t) = \exp\left\{2\sigma_z^2(\mu_{1k}^2 + \nu_{1k}^2 + 2\mu_{1k}\nu_{1k}r_k) + 2m(t+1) + d_z(l)\right\} \times \quad (6)$$

$$\times \left[\exp\{d_z(l)\} - 1\right],$$

где  $\mu_{1k} = (r_1 - r_k r_{k+1}) / (1 - r_k^2)$ ,  $\nu_{1k} = (r_{k+1} - r_k r_1) / (1 - r_k^2)$ . Поскольку  $D_0(l, t)$  является периодической функцией времени с периодом в сутки (96 отсчетов через 15 минут), то выражение (6) можно усреднить по времени суток:

$$D_s(l) = \frac{1}{96} \sum_{t=1}^{96} D_0(l, t). \quad (7)$$

Анализ выражений (5)-(7) показал, что дисперсия ошибки прогноза  $f_b(t)$  слабо зависит от  $k$  для рассматриваемых численных значений параметров модели (1). Поэтому дальше весь анализ формул (5) - (7) проводился при  $k = 1$ . На рис. 1 изображена СКО прогноза  $S_s(l) = \sqrt{D_s(l)}$  в зависимости от упреждения  $l$ . При  $l \rightarrow \infty$  СКО прогноза стремится к среднему за сутки среднеквадратическому отклонению процесса  $f_b(t)$ .

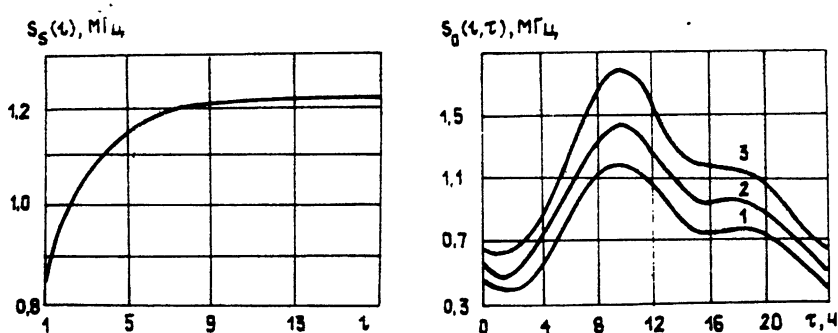


Рис. 1,2.

Более детальную информацию о точности прогноза  $f_b(t)$  дает дисперсия ошибки (6). Безусловная СКО прогноза  $S_0(l, t) = \sqrt{D_0(l, t)}$  изображена на рис. 2 в зависимости от времени суток  $\tau = (t + 1)0,25$  часов, на которое дается прогноз. Кривая 1 соответствует упреждению  $l = 1$ , кривая 2 -  $l = 3$ , кривая 3 -  $l = 20$ . Из рис. 1 видно, что точность

прогноза частоты экранирования на разное время суток может отличаться в 3 раза и по абсолютной величине составлять разность в 1, 3 МГц. При этом меньшим средним значениям частоты экранирования соответствуют меньшие ошибки прогноза, а большим - большие.

Для потребителя наибольший интерес представляет дисперсия ошибки прогноза (5), так как она характеризует точность конкретного прогноза. Посмотрим, как ведет себя дисперсия (5) в среднем по времени суток. Для этого перейдем от  $D(l, t)$  (5) к характеристике

$$S(l) = \left[ \frac{1}{96} \sum_{t=1}^{96} D(l, t) \right]^{1/2}$$

и положим для известных отсчетов  $f_b(t) = f_b(t - 1)$ . Графики СКО прогноза  $S(l)$  изображены на рис. 3 в зависимости от упреждения  $l$  и для разных априори известных значений  $f_b(t)$ . Для кривой 1  $f_b(t) = 0,01$  МГц, 2 -  $f_b(t) = 1$  МГц, 3 -  $f_b(t) = 4$  МГц, 4 -  $f_b(t) = 10$  МГц, 5 -  $f_b(t) = 16$  МГц. В поведении кривых рис. 3 можно отметить несколько интересных особенностей. Во-первых, СКО прогноза увеличивается с увеличением известных значений  $f_b(t)$  и может превосходить среднеквадратическое отклонение процесса  $f_b(t)$ . Это следствие того, что процесс  $f_b(t)$  - логарифмически нормальный с

положительным коэффициентом асимметрии. Во-вторых, ход СКО прогноза с ростом  $l$  при умеренно больших известных значениях  $f_b(t)$  может быть немонотонным, т. е. существует упреждение  $l$ , для которого прогноз имеет самую низкую точность. Немонотонный ход  $S(l)$  вызван противоборством двух тенденций в поведении точности прогноза. С одной стороны, существует общая тенденция

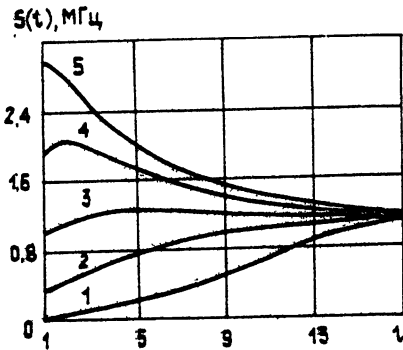


Рис. 3.

ухудшения точности прогноза с ростом упреждения  $l$  (рис. 1), а с другой, при достаточно больших известных значениях  $f_b(t)$ , когда точность прогноза низкая, увеличение упреждения  $l$  ослабляет влияние известного отсчета  $f_b(t)$  на прогноз из-за уменьшения корреляционных связей, что приводит к улучшению точности прогнозирования с ростом  $l$  (рис. 3, кривая 5).

Таким образом, из проведенного анализа следует, что при прогнозировании частоты экранирования среднеширотного слоя  $E_s$  возникает

ряд особенностей, которые необходимо учитывать при практическом использовании прогнозов  $f_b(t)$  в расчетах ионосферных линий радиосвязи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чавдаров С. С., Часовитин Ю. К., Чернышева С. П., Шефтель В. Н. Среднеширотный спорадический слой E-ионосферы. - М.: Наука. 1975. - 120 с.
2. Овезгельдыев О., Михайлова Г. В. // Изв. АН ТССР. Сер. Физ.-техн., хим. и геолог. наук. 1976. № 3. С. 65.
3. Лукин А. Н., Моисеев С. Н. // Тезисы докл. 16 Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. - Харьков. 1990. С. 101.
4. Лукин А. Н., Моисеев С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 6. С. 872.

Воронежский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
25 февраля 1992 г.

#### ACCURACY OF E<sub>s</sub> LAYER SCREENING FREQUENCY PROGNOSIS

*S. N. Moiseev*

Accuracy of screening frequency of middle latitude ionospheric E<sub>s</sub> layer has been analyzed. It has been shown, that screening frequency prognosis accuracy depends on the day time and on a priori known values of screening frequency.

УДК 621.373.826

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЧАСТОТНОЙ ГЕНЕРАЦИИ ИНЖЕКЦИОННОГО ЛАЗЕРА С ВНЕШНИМ РЕЗОНАТОРОМ

*В. Н. Королев, А. В. Маругин, А. В. Харчев, В. Б. Цареградский*

Проведен анализ устойчивости одночастотного режима генерации инжекционного лазера с внешним резонатором в случае слабой оптической обратной связи. Показано, что увеличение фактора сужения линии в такой системе вызывает уменьшение частотного диапазона, обеспечивающего стабильный одномодовый режим. Экспериментальные исследования показали хорошее соответствие с полученными соотношениями.

Инжекционные лазеры с узкой линией генерации необходимы для когерентной оптической связи, лазерной диодной спектроскопии и ряда других применений [1 - 3]. Достичь необходимого сужения естественной ширины линии излучения инжекционного лазера (ИЛ) позволяет использование оптической связи активного слоя лазера с длинным внешним резонатором [4 - 6]. Однако в такой схеме ИЛ обладает склонностью к многочастотной генерации на частотах, соответствующих модам внешнего резонатора. В зависимости от соотношения внутренних параметров лазерного кристалла и фазовых условий для оптического поля во внешнем резонаторе в лазере могут развиваться процессы, приводящие к срыву одночастотной генерации и резкому уширению линии излучения, что значительно ухудшает когерентные свойства излучателя [7]. В связи с этим особый интерес представляет анализ условий возникновения неустойчивости модового состава излучения ИЛ с внешним резонатором и определение диапазона значений параметров излучателя, в котором одновременно достигается стабильная одночастотная генерация и максимальное сужение линии излучения. В данной работе теоретически и экспериментально исследованы условия, приводящие к неустойчивости генерации ИЛ, работающего в одночастотном режиме со слабой оптической обратной связью от внешнего резонатора.

Условия генерации ИЛ с внешним резонатором определяются совместным влиянием собственного лазерного резонатора с активной

усиливающей средой и внешнего пассивного плеча. Известно, что непосредственно в лазерной среде существует определенная взаимосвязь между изменениями амплитуды и частоты оптического поля, описываемая параметром ширины линии  $\alpha$  [8]. Внешний резонатор за счет фазовых условий вносит сдвиг для собственных частот системы, а также модуляцию уровня оптических потерь и, соответственно, амплитуды светового поля. Нестабильность генерации одночастотного ИЛ возникает из-за нарушения динамического равновесия для плотности инжектированных носителей и плотности фотонов в активном слое лазерного диода под влиянием дестабилизирующих факторов, связанных с наличием оптической связи от внешнего резонатора. В результате срыва одночастотности в оптическом спектре появляется несколько мод внешнего резонатора, после чего генерация становится устойчивой, причем такой режим характеризуется повышенным уровнем частотных и амплитудных шумов [9], приводящих в итоге к значительному ухудшению когерентных свойств излучателя.

Для численного анализа условий неустойчивости одночастотной генерации ИЛ воспользуемся моделью [10], в соответствии с которой в приближении слабой обратной связи ИЛ с внешней частью резонатора амплитуда поля  $\beta(t)$  описывается следующим уравнением:

$$\dot{\beta}(t) = [i\omega_0 + \frac{\Delta G}{2}(1-i\alpha)]\beta(t) + k\beta(t-\tau_0). \quad (1)$$

Здесь

$$\beta(t) = E(t) \exp[i(\omega t + \phi(t))] \quad (2)$$

- комплексная амплитуда лазерного поля,  $\omega_0$  - резонансная частота собственного резонатора лазера,  $\alpha$  - упомянутый выше параметр ширины линии [8],  $\Delta G$  - изменение усиления, вызванное оптической обратной связью от внешнего элемента,  $\tau_0$  - время облета внешнего резонатора. Параметр  $k$  характеризует величину обратной связи и определяется как

$$k = \frac{1-R_0}{\tau_s} \sqrt{\frac{R_1}{R_0}}, \quad (3)$$

$R_0$  и  $R_1$  - коэффициенты отражения по мощности грани лазерного диода и, соответственно, внешнего элемента с учетом потерь излучения во внешнем плече,  $\tau_s$  - время облета собственного резонатора лазера.

При подстановке (2) в уравнение (1), разделяя Re- и Im-части, получим

$$\dot{E} = \frac{\Delta G}{2} E + kE \cos(\phi_0 + \Delta\phi), \quad (4)$$

$$\dot{\phi} = \omega_0 - \omega - \frac{\Delta G}{2} \alpha - k \sin(\phi_0 + \Delta\phi).$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\phi_0 = \omega\tau_0$  и  $\Delta\phi = \phi(t) - \phi(t-\tau_0)$ . Для проведения анализа динамической устойчивости системы ИЛ с внешним резонатором потребуется дополнить систему уравнений (4) уравнением для плотности числа носителей  $N(t)$ :

$$\dot{N}(t) = -\gamma N + J - G|E|^2, \quad (5)$$

$\gamma$  - скорость межзонной релаксации, обусловленная спонтанным излучением,  $J$  - плотность тока накачки,  $G$  - суммарное усиление в активном слое.

Проведем линейризацию системы (4) и (5):

$$\Delta G = \Delta G_0 + G'_N n(t), \quad E = E_0 + e(t), \quad (6)$$

$$G = G_0 + G'_N n(t), \quad N = N_0 + n(t).$$

$e(t)$  и  $n(t)$  - медленно изменяющиеся компоненты оптического поля моды и числа носителей. Будем считать, что  $\Delta\phi \ll 1$  за время облета резонатора, т.е. рассмотрим диапазон частот  $\omega < 2\pi/\tau_0$ . Этот диапазон частот учитывает влияние практически всех возможных технических источников неустойчивости ИЛ и не учитывает лишь влияния спонтанного излучения и резонансных пролетных эффектов. Следует заметить, что характерные для систем оптической связи частоты модуляции имеют значения  $f \leq 1/\tau_0$ , поэтому интерес представляет анализ именно медленных по отношению к пролетному времени процессов. Тогда после перехода к системе уравнений для нестационарных компонент имеем

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \left(\frac{\Delta G_0}{2} + k \cos\phi_0\right)e + \frac{G'_N E_0}{2} n - k E_0 \tau_0 \dot{\phi} \sin\phi_0, \\ \dot{\phi} &= \frac{G'_N \alpha}{2} n - k \tau_0 \dot{\phi} \cos\phi_0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\dot{n} = -\gamma n - G'_N E_0^2 n - 2G_0 E_0 e.$$

После преобразования получим систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка



$$\dot{\epsilon} = \lambda \epsilon + B \eta, \quad \dot{\eta} = -S \eta - Y \epsilon, \quad (8)$$

где введены следующие обозначения коэффициентов:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\Delta G_0}{2} + k \cos \Phi_0, & S &= \gamma + G'_N E_0^2, \\ B &= \frac{G'_N E_0}{2} \left[ 1 - \frac{k \tau_0 \alpha \sin \Phi_0}{1 + k \tau_0 \cos \Phi_0} \right], & Y &= 2G'_0 E_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для исследования устойчивости решений приравняем  $\det$  системы к нулю, в результате чего получим два критерия устойчивости (отрицательные характеристические корни):

$$\gamma + G'_N E_0^2 > \frac{\Delta G_0}{2} + k \cos \Phi_0 \quad (10)$$

и более жесткое условие

$$G'_N G'_0 E_0^2 \left[ 1 - \frac{k \tau_0 \alpha \sin \Phi_0}{1 + k \tau_0 \cos \Phi_0} \right] > (\gamma + G'_N E_0^2) \left( \frac{\Delta G_0}{2} + k \cos \Phi_0 \right). \quad (11)$$

Если отклонения параметров от стационарных условий генерации лазера с внешним резонатором невелики, то условия на  $\Delta G$  не отличаются от стационарного (вытекающего из первого уравнения системы (4)):

$$\frac{\Delta G}{2} + k \cos \Phi_0 \approx 0. \quad (12)$$

Поэтому первое условие  $\gamma + G'_N E_0^2 > 0$  выполняется практически при любом режиме генерации ( $G'_N > 0$ ). Что касается условия (11), то, если пренебречь спонтанным членом, получим

$$Z = \frac{\alpha k \tau_0 \sin \Phi_0}{1 + k \tau_0 \cos \Phi_0} < 1. \quad (13)$$

Последнее соотношение отражает тот факт, что внешний резонатор вносит в систему неустойчивость ( $Z > 1$ ) только в том случае, когда его действие на эффективный уровень усиления противоположно по знаку (с учетом знака, скрытого в  $\alpha$ ) с влиянием внутренних стабилизирующих процессов в активном слое и превосходит его по величине. В случае совпадения знаков (при  $\sin \Phi_0 < 0$ ) отклик лазерного излучателя на внешнюю обратную связь аналогичен по своему влиянию внутренним стабилизирующим факторам, приводящим за счет самосогласованной

зависимости параметров лазерной среды к восстановлению их стационарных значений. Для случая слабой обратной связи ( $k\tau_0 < 1$ ) из (13) получается упрощенное соотношение

$$\alpha k \tau_0 \sin(2\pi \tau_0 \delta\nu) < 1, \quad (14)$$

где  $\delta\nu = \nu - \nu_0$  - разность между резонансной частотой собственного резонатора лазерного диода и частотой генерации ИЛ во внешнем резонаторе. Таким образом, при отстройке моды внешнего резонатора в сторону КВ возможен срыв одночастотной генерации.

Заметим, что произведение  $k\tau_0$  представляет собой характерный параметр  $X$ , описывающий сужение линии излучения инжекционного лазера внешним резонатором [11]. Известно, что в приближении слабой обратной связи ширина линии излучения одночастотного лазера с внешним резонатором  $\Delta\nu_{\text{вр}}$  может быть представлена в виде [11]

$$\Delta\nu_{\text{вр}} = \Delta\nu_0 \left[ 1 + X \sqrt{1 + \alpha^2} \cos(\omega \tau_0 + \arctg \alpha) \right]^{-2}, \quad (15)$$

$\Delta\nu_0$  - изначальная ширина линии ИЛ. Следовательно, для данного значения  $X$  одномодовая генерация лазера является устойчивой для отстройки частоты внешнего резонатора в КВ сторону не более, чем на

$$\delta\nu^* \leq (2\pi \alpha X \tau_0)^{-1}. \quad (16)$$

Эта величина характеризует предельный диапазон плавной перестройки частоты лазера (например, при управлении длиной внешнего резонатора). Соответственно величина  $\delta\nu^*$  определяет и модуляционные возможности такого излучателя, ограничивая индекс модуляции и возможную девиацию частоты, поскольку с изменением тока накачки происходит смещение резонансных частот диода с коэффициентом  $\sim 1 + 3$  ГГц/мА. Таким образом, при  $X \sim 0,1$  и длине внешнего резонатора  $\sim 10$  см возможно осуществление прямой модуляции излучения только малым сигналом с амплитудой, не превышающей долей миллиампера. Следует отметить, что в реальном лазере существует ряд технических причин, приводящих к нарушению частотного согласования, например тепловые изменения длины оптических элементов, акустические вибрации во внешнем плече резонатора и т.д. Все это говорит о том, что ИЛ с внешним резонатором обладает практически неустраняемым рассогласованием частот активной и внешней части. Поэтому в соответствии с (16) для обеспечения устойчивости одночастотной генерации лазера необходимо вводить ограничения на верхнее значение параметра  $X$ , что соответственно ограничит и возможность сужения

ширины линии излучения. Очевидно, что необходимость такого рода ограничений вступает в противоречие с требованиями эффективной модуляции при сохранении высокой степени когерентности, предъявляемыми к лазерным излучателям на практике.

Соотношение (13) было проверено на эксперименте. Исследовались одномодовые инжекционные излучатели, согласованные с внешним волоконным резонатором. Оптическая длина многомодового световолокна варьировалась от 4 до 8 см, коэффициент ввода излучения в световод по мощности составлял 0,05. Внешний торец световода состыковывался с зеркалами с различным коэффициентом отражения. Управление частотной расстройкой собственного и внешнего резонаторов осуществлялось путем перестройки оптической длины лазерного диода при вариации тока накачки. Спектральный состав излучения контролировался с помощью дифракционного спектрометра ( $\delta\nu \sim 10$  ГГц) и сканирующего интерферометра Фабри - Перо ( $\delta\nu \sim 500$  МГц). Одновременно измерялся уровень флуктуаций мощности излучения лазера в СЧ радиодиапазоне. Учитывая тот факт, что уровень амплитудного шума ИЛ с внешним резонатором резко зависит от спектрального состава генерации (при одночастотном режиме шум подавлен) [12], флуктуационные характеристики лазера можно использовать как дополнительный способ контроля одномодовости излучения.

Экспериментально было измерено значение частотной расстройки  $\delta\nu^*$ , при которой происходил срыв одночастотной генерации. Первоначально за счет подбора соотношения длин резонаторов создавались оптимальные условия одночастотной генерации, соответствующие совпадению собственной частоты одной из мод с минимумом в периодической зависимости оптических потерь. Затем в цепь питания излучателя подавалась модуляционная компонента тока  $\Delta I$ . С увеличением амплитуды модуляции при определенной глубине  $\Delta I/I$  и соответствующей расстройке  $\Delta\nu/\nu_0$  наблюдается срыв одночастотного режима. При этом искажается интерференционная картина и резко увеличивается усредненный по времени уровень амплитудных флуктуаций. Исходя из этих данных с учетом характерного для ИЛ коэффициента  $\Delta\nu/\Delta I$ , можно определить граничное значение  $\delta\nu^*$ . Следует отметить, что на процесс формирования спектра излучения оказывает влияние также и нелинейные эффекты, связанные с автостабилизацией генерирующих мод. В этом случае рассмотренной выше линейной модели недостаточно для объяснения возникающих эффектов, требуется учет зависимости усиления в активном слое от интенсивности излучаемых мод. Однако этот механизм проявляет себя только при значительном превышении порога генерации и при рассмотрении обычных режимов

работы излучателя (с превышением порога на 10 - 50%) может быть опущен. Кроме того, проявление нелинейного взаимодействия между модами наблюдается при значительных уровнях обратной связи от внешнего элемента резонатора ( $R_1 \approx 0,1$ ), а в большинстве случаев, в том числе и в рассматриваемом в работе волоконном внешнем резонаторе, уровень оптической обратной связи существенно ниже.

Пороговое условие генерации ИЛ носит асимптотический характер [13], что обусловлено наличием спонтанного излучения в моды. С учетом этого при достаточно высоких значениях  $X$  ( $X \geq 3\pi/2$ ) [11] в случае малой разницы потерь на соседних модах внешнего резонатора может возникнуть многомодовая генерация. Такая ситуация имеет место, например, при величине частотной расстройки, сравнимой с межмодовым интервалом внешнего резонатора, или в случае малой добротности собственного резонатора (просветленный лазерный диод). Тем не менее в рассматриваемом случае частотные расстройки, при которых одночастотная генерация становится неустойчивой, существенно меньше межмодового интервала, составляющего  $\sim 2 + 4$  ГГц для исследованных модификаций внешнего резонатора, и срыв одночастотности может быть обусловлен только нарушением фазового соотношения (16).

Экспериментальные зависимости частотной расстройки  $\delta\nu^*$  от параметра  $X$  (отмечены точками)

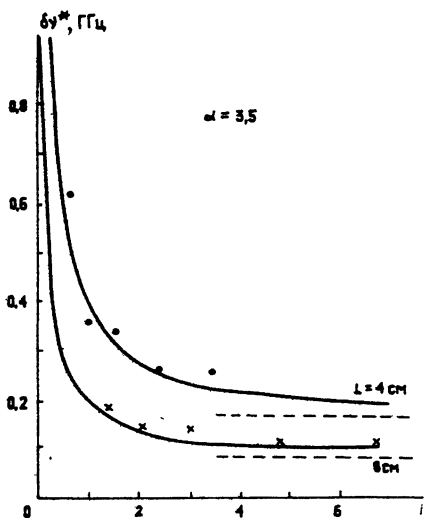


Рис 1

для двух значений длины внешнего резонатора и соответствующие теоретические кривые (13) представлены на рис. 1. Как следует из полученных результатов, лазер с внешним резонатором, характеризуемый определенным значением параметра  $X$ , является более устойчивым по отношению к частотным расстройкам в случае меньшей длины внешнего резонатора и большего значения коэффициента отражения  $R_1$ , чем для более длинного резонатора с соответственно меньшим значением обратной связи. Будем иметь в

виду, что возможность реализации устойчивого одночастотного режима в короткой конфигурации внешнего резонатора с соответствующим увеличением параметра  $X$  дает этому типу излучателей существенные преимущества при необходимости учета степени когерентности

излучения.

Эффективность практического применения ИЛ с внешним резонатором обусловлена возможностью достаточно широкого диапазона перестройки частоты в условиях сохранения узкой оптической несущей. Конечное значение диапазона устойчивости системы ( $\delta\nu^*$ ) приводит к необходимости ограничения параметра  $\chi$ , что, в свою очередь, препятствует достижению узкой линии генерации (см. (15)). С этой точки зрения более выгодным становится использование короткого внешнего резонатора, позволяющего добиться большего сужения при фиксированном значении  $\delta\nu^*$ .

Этот результат иллюстрируется рис. 2, где представлены расчетные зависимости коэффициента сужения линии излучения ИЛ от длины внешнего плеча резонатора для трех значений параметра  $\delta\nu^*$ . Отметим, что особенностью рассматриваемой системы ИЛ с внешним резонатором является наличие ограничения снизу на длину внешнего плеча. Это ограничение связано с тем, что при изменении длины внешнего плеча для поддержания требуемого значения  $\chi$  необходимо увеличивать величину обратной связи пропорционально  $\sim L^{-2}$ . В лабораторных условиях с учетом потерь на ввод излучения в волновод лазерного диода коэффициент  $R_1$  ограничивается величиной  $\sim 0,1 + 0,2$ . Соответствующая граница технически достижимых значений сужения ширины линии для  $R_1 = 0,2$  показана на рис. 2 (кривая 4). Волоконные внешние резонаторы работают в режиме слабой обратной связи ( $R_1 \leq 0,01$ ). Соответствующая этому типу внешних резонаторов расчетная граница рабочей области представлена на рис. 2 кривой 5.

Итак, в данной работе проанализирована модель ИЛ с внешним резонатором для случая слабой оптической обратной связи. Исследование режимов динамической устойчивости системы позволило определить характерные диапазоны параметров лазера, обеспечивающие стабильную одночастотную генерацию. Конечное значение допустимого частотного рассогласования собственного и внешнего резонаторов ИЛ ограничивает возможности сужения ширины линии лазерного излучения оптической обратной связью. С целью расширения указанного диапазона предлагается использование укороченного внешнего резонатора с

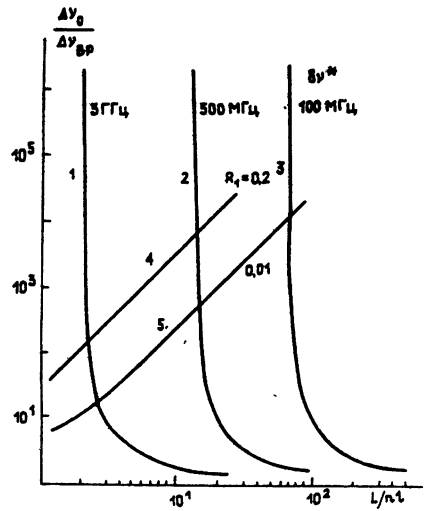


Рис 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Моршнев С. К., Францессон А. В. //Квантовая электроника. 1985. Т. 12. С. 1986.
2. Hariharan P. //Prog. Opt. 1987. V.24. P.103.
3. Chen H.L. Laser Spectroscopy and Applications. - N.-Y.: Basel, 1987. P.261.
4. Kasarinov R.F., Henry C.H. //IEEE J. Quant. Electron. 1987. V.23. P.1401.
5. Sato H., Ohya J. //IEEE J. Quant. Electron. 1986. V.22. P.1060.
6. Harrison J., Mooradian A. Adv. Laser Science. Proc.1. Int. Laser Sci.Cont.-N.-Y., 1986. P.183.
7. Lenstra D., Verbeek B.H., Den Boef A.J. //IEEE J. Quant. Electron. 1985. V.21. P.674.
8. Osinski M. //IEEE J. Quant. Electron. 1987. V.23. P.9.
9. Fujita T., Ohya J. et al. //J. Appl. Phys. 1985. V. 57. P.1753.
10. Lang R., Kobayashi K. //IEEE J. Quant. Electron. 1980. V.16. P.347.
11. Nielsen C.J., Osmundsen J.H. //J. Opt. Commun. 1984. V.5. P.42.
12. Богатов А. П., Елисеев П. Г. и др. //Квантовая электроника. 1986. Т. 13. С. 2414.
13. Ривлин Л. А. //Квантовая электроника. 1974. Т. 1. С. 94.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
23 июля 1991 г.

INVESTIGATION OF SINGLE-FREQUENCY GENERATION STABILITY  
OF THE EXTERNAL CAVITY INJECTION LASERS

*V.N.Korolev, A.V.Marugin, A.V.Kharchev, V.B.Tsaregradskii*

The stability of single-frequency generation of the semiconductor laser with a weak optical feedback with the external cavity has been investigated. An increase of line narrowing factor has been shown to cause the reduction of the frequency range in which stable single-mode operation is provided. Experimental results are in a good agreement with theoretical predictions.

УДК 535.211 + 533.6

ТЕПЛОВОЕ САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ ПЕРЕМЕННОГО РАДИУСА В ПРИБЛИЖЕНИИ ТЕОРИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯ

А. Н. Кучеров, Н. К. Макашев, Е. В. Устинов

Получено общее решение уравнений геометрической оптики, описывающее слабое тепловое самовоздействие оптических пучков, радиус которых в отсутствии самовоздействия изменяется по известному закону (в частности, это сфокусированные или расфокусированные пучки).

При исследовании эффекта теплового самовоздействия интенсивных оптических пучков широкое распространение получило линейризованное решение уравнений параксиальной оптики [1, 2], выписанное первоначально для коллимированных пучков. В случае сфокусированных пучков в линейризованном решении допущены неточности [3, 4]. Покажем, что в рамках теории малых возмущений можно получить решение для пучков с переменным по трассе радиусом  $r = r_{\text{физ}}/r_0 = \Phi(z)$ , где  $\Phi(z)$  - известная функция; в частности  $\Phi(z) = 1 \mp z/z_f$  для пучков, сфокусированных (дефокусированных) на расстояние  $z_f$ .

Рассмотрим распространение пучка вдоль оси  $z$  в среде с показателем преломления  $n$ , линейно зависящим от плотности (газы, жидкости):  $n = n_0 + (n_0 - 1)\Delta\rho/\rho_0$ ,  $\Delta\rho/\rho_0 = \epsilon\rho_1$ ,  $\epsilon = \alpha I_0 t_0 / (\rho_0 h_0)$ ,  $t_0 = r_0/V_0$ . Здесь  $n_0$ ,  $\rho_0$ ,  $h_0$ ,  $V_0$  - показатель преломления, плотность, энтальпия и поперечная к лучу компонента скорости невозмущенной среды,  $t_0$  - характерное время задачи,  $\epsilon$  - масштаб возмущения гидродинамических величин,  $\alpha$  - коэффициент поглощения излучения средой,  $I_0$  - характерная интенсивность,  $r_0$  - начальный радиус пучка. Уравнения геометрической оптики относительно обезразмеренной к  $I_0$  интенсивности  $I = EE^*$  и поперечных компонент  $\vec{\theta} = \vec{\nabla}_\perp \varphi$  лучевого вектора  $\vec{\nabla}S$  (где  $S = z + \varphi r^2/L^2$ ,  $FS$  - фаза электромагнитного поля  $E = Ae^{iFS}$ ;  $A = \sqrt{I}$  - амплитуда;  $F = 2\pi n_0 r_0^2 / \lambda L \gg 1$  - число Френеля;  $L$  - характерная длина трассы;  $\vec{\nabla}_\perp = \vec{e}_x(\partial/\partial x) + \vec{e}_y(\partial/\partial y)$ ) можно записать [1]:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + (\vec{\theta}, \vec{v}_1) \right] \vec{\theta} = N \vec{v}_1 \rho_1(x, y, z, t), \quad N = (L/L_T)^2, \quad L_T = \frac{r_0}{\sqrt{\epsilon(n_0 - 1)/n_0}}; \quad (1)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + (\vec{\theta}, \vec{v}_1) \right] \ln I + (\vec{v}_1, \vec{\theta}) \ln I = -N_\alpha, \quad N_\alpha = \alpha L. \quad (2)$$

Координаты  $x, y$ , а также вектор  $\vec{r} = (x, y)$  отнесены к  $r_0$ , координата  $z$  - к  $L_T$ ,  $N, N_\alpha$  - безразмерные параметры самовоздействия и поглощения,  $L_T$  - длина теплового самовоздействия.

Предположим, что в начальном сечении задано распределение интенсивности  $I|_{z=0} = I^0(\vec{r}, t)$ , и радиус пучка в отсутствии теплового самовоздействия ( $N = 0$ ) изменяется по закону  $r = \Phi(z)$ . Невозмущенное решение уравнений эйконала (1) и сохранения энергии (2) есть, как нетрудно убедиться:  $\vec{\theta} = \vec{\theta}_A(\vec{r}, z, t) = \vec{r}(d\Phi/dz)/\Phi(z)$ ,  $I = I_A(\vec{r}, z, t) = I^0(\vec{r}/\Phi(z), t) e^{-N\alpha z/\Phi^2(z)}$ . Для получения этого решения необходимо перейти к новым независимым переменным типа переменных Таланова [5]:  $\vec{r} = r/\Phi(z)$ ,  $\vec{z} = z$ ,  $\vec{t} = t$ , в которых радиус пучка не меняется, полная производная  $\partial/\partial z + (\vec{\theta}, \vec{v}_1)$  от искомым функций переходит в частную  $\partial/\partial \vec{z}$ , и уравнения (1), (2) легко интегрируются [6].

Пусть самовоздействие мало,  $N \ll 1$ . Возмущенное решение будем искать в следующем виде:  $\vec{\theta} = \vec{\theta}_A + N\vec{\theta}_1$ ;  $I = I_A e^{-N\Gamma(x, y, z, t)}$ . Такую структуру решения для возмущенной интенсивности подсказывает процедура формального интегрирования уравнения сохранения энергии (2) по  $z$  и линеаризация подынтегрального выражения с помощью невозмущенного решения  $I_A$ . Подстановка в (1), (2) дает следующую систему:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + (\vec{\theta}_A, \vec{v}_1) \right] \vec{\theta}_1 + (\vec{\theta}_1, \vec{v}_1) \vec{\theta}_A = \vec{v}_1 \rho_1(x, y, z, t); \quad (3)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + (\vec{\theta}_A, \vec{v}_1) \right] \Gamma = (\vec{v}_1, \vec{\theta}_1) - (\vec{\theta}_1, \vec{v}_1 \ln I_A). \quad (4)$$

В работе [3] ошибочно опущен порядковый член уравнения эйконала  $(\vec{\theta}_1, \vec{v}_1) \vec{\theta}_A$ .

Переходя к новым независимым переменным  $\vec{x} = x/\Phi(z)$ ,  $\vec{y} = y/\Phi(z)$ ,  $\vec{z} = z$ , получим следующие решения:



$$\dot{\theta}_1(x, y, z, t) = \frac{1}{\Phi(z)} \int_0^z \bar{v}_1 \rho_1(\bar{x}, \bar{y}, z', t) dz'; \quad (5)$$

$$f(x, y, z, t) = \int_0^z \frac{dz'}{\Phi(z')} \left[ (\bar{v}_1, \dot{\theta}_1(\bar{x}, \bar{y}, z', t)) - \right. \\ \left. - (\dot{\theta}_1(\bar{x}, \bar{y}, z', t), \bar{v}_1 \ln I^0(\bar{x}, \bar{y}, t)) \right]. \quad (6)$$

В [4] предпринята попытка построения решения для сфокусированных пучков путем интегрирования вдоль траектории лучей. В приведенных выражениях для угла отклонения и интенсивности итерация уравнений первого порядка, в которой функция возмущения температуры (плотности) в подынтегральном выражении правой части берется вдоль невозмущенной траектории сфокусированных лучей, не дает полного возмущенного решения типа (5), (6). Последующие итерации решений работы [4], по-видимому, должны полностью совпасть с (5), (6).

Дальнейшая конкретизация возмущенных решений (5), (6) связана с определением функции  $\rho_1$  из уравнений гидродинамики, в которых в качестве тепловых источников надо взять функцию невозмущенной интенсивности  $I_A$ , в которую входят амплитудные множители:  $e^{-N\alpha^2 z}$ , отвечающий за поглощение, и  $1/\phi^2(z)$ , отвечающий за "поджатие" (сфокусировку или дефокусировку) пучка. Функция  $I^0(\bar{r}, t)$  задает форму распределения интенсивности в пучке. Оказывается, для целого ряда задач функцию возмущения плотности  $\rho_1$  можно представить в виде

$$\rho_1(x, y, z, t) = \frac{e^{-N\alpha^2 z}}{\Phi^n(z)} \rho_{10}(\bar{x}, \bar{y}, t), \quad \bar{x} = \frac{x}{\Phi(z)}, \quad (7)$$

$$\bar{y} = \frac{y}{\Phi(z)}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\Phi(z)}.$$

Здесь множители  $(e^{-N\alpha^2 z})^m$  и  $\Phi^{-n}(z)$  дают амплитуду изменения возмущений плотности вследствие поглощения и фокусировки (дефокусировки) на расстоянии  $z$ , а функция  $\rho_{10}$  описывает изменение плотности в поперечном направлении в плоскости  $z = \text{const}$ . Применение преобразования подобия (7) к уравнениям гидродинамики (или их решениям) приводит к задаче (решению) для функции  $\rho_{10}$ , в которой

тепловые источники заданы функцией  $I^0(\vec{r}, t)$ . Анализ показал, что форма (7) для функции  $\rho_1$  справедлива как в случае линейных, так и в случае нелинейных уравнений (системы уравнений) гидродинамики, как в случае стационарных, так и в случае нестационарных задач. Выражение вида (7) использовалось для получения возмущений в пучке в работе [6] на примере конвективного и сверхзвукового стационарных газодинамических режимов теплового самовоздействия [7]. Пусть  $I^0(r, t) = I^{00}(r)$ , хотя, в принципе, преобразование (7) справедливо и для нестационарных тепловых источников. Приведем конкретные примеры для самовоздействия в однородном потоке газа для неустановившегося самовоздействия в случае короткого и длинного импульсов и для самовоздействия в условиях развитой гравитационной конвекции.

1. Однородный поток слабопоглощающего газа, движущийся со скоростью  $V_0$  вдоль оси  $x$ . Характерное время  $t_0 = r_0/V_0$

1.1. Стационарные конвективный, дозвуковой и сверхзвуковой режимы самовоздействия [7] описываются уравнением [4]

$$\left[ (1 - M^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -\vec{v}_1^2 I_A(r, z) \equiv -\vec{v}_1^2 I^0(\vec{r}) \frac{e^{-N\alpha z}}{\Phi^4(z)}. \quad (8)$$

Здесь  $M = V_0/c$  - число Маха,  $c$  - скорость звука в среде. Подстановка выражения  $\rho_1$  в виде (7) в это уравнение дает:  $m = 1$ ,  $n = 1$ .

1.2. Нестационарные (неустановившиеся) конвективный, дозвуковой и сверхзвуковой гидродинамические режимы описываются волновым уравнением

$$\left[ M^2 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - v_1^2 \right] \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho_1 = \vec{v}_1^2 I_A(r, z). \quad (9)$$

В этом случае также получим  $m = 1$ ,  $n = 1$ . Дополнительно необходимо преобразование времени  $\tilde{t} = t/\Phi(z)$ . Решение для функции  $\rho_{10}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ , отвечающей за распределение возмущений плотности  $\rho_1$  в поперечной к пучку плоскости, получено в виде квадратур в [8].

1.3. Для теплопроводного режима [7, 9] будем также иметь  $m = 1$ ,  $n = 1$ , но в уравнении теплопроводности для функции  $\rho_{10}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}, \tilde{Pe})$  преобразованное число Пекле есть  $\tilde{Pe} = Pe \Phi(z)$ , где  $Pe = r_0 V_0 / \chi_0$  - обычное физическое число Пекле,  $\chi_0$  - температуропроводность среды.

1.4. На стационарном трансзвуковом режиме теплового самовоздействия [7] исходя из выведенной в [9] нелинейной системы уравнений можно определить, что  $m = 1/2$ ,  $n = 2/3$ . В уравнения для функции  $\rho_{10}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  войдут преобразованные величины: трансзвуковой параметр подобия  $\bar{K} = K(e^{\alpha \bar{x}})^{1/2} \Phi^{2/3}(z)$  (где  $K = (1 - M^2)/\varepsilon^{2/3}$  - физический трансзвуковой параметр) и внешняя поперечная координата  $\bar{Y} = Y/\Phi^{4/3}(z)$  (где  $Y = ye^{1/3}$  - физическая внешняя координата).

1.5. Для гиперзвукового режима [7] на основе соответствующего решения [9] нетрудно установить, что  $m = 1$ ,  $n = 1$ .

Таким образом, выражение вида (7) для функции  $\rho_1$  получается для всех шести газодинамических режимов при распространении оптического пучка в поперечном к нему потоке газа.

## 2. Нестационарное самовоздействие в покоящейся среде

Возможны два предельных варианта: длинные импульсы (в частности, непрерывное излучение,  $t_n \gg t_c = r_0/c$ ) и короткие ( $t_n \ll t_c$ ). Масштаб возмущения плотности равен, соответственно,  $\varepsilon_1 = \alpha I_0 t_n / \rho_0 h_0$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 (t_n / t_c)^2$ , где  $t_n$  - характерная длительность импульса.

2.1. Для длинных импульсов функция возмущения плотности есть

$$\rho_1(x, y, z, t) = - \int_0^t I_A dt' = \frac{e^{-N\alpha z}}{\Phi^2(z)} I^0(\bar{r}) t. \quad (10)$$

Следовательно,  $m = 1$ ,  $n = 2$ .

2.2. Короткие импульсы вызывают в среде возмущения плотности, пропорциональные кубу от времени:

$$\rho_1(x, y, z, t) = \int_0^t \int_0^{t'} \int_0^{t''} \nabla_1^2 I_A(r, z) dt'' dt' dt = \frac{t^3}{6} \frac{e^{-N\alpha z}}{\Phi^4(z)} \bar{\nabla}_1^2 I^{00}(\bar{r}). \quad (11)$$

Таким образом, согласно общему выражению (7) имеем  $m = 1$ ,  $n = 4$ ,

$$\rho_{10}(\bar{r}, t) = \bar{\nabla}_1^2 I^{00}(\bar{r}) t^3 / 6.$$

### 3. Самовоздействие в условиях развитой гравитационной конвекции, вызванной поглощаемой энергией луча

При достаточно длительной работе оптического генератора на временах  $t > t_0 = [\rho_0 h_0 r_0 / (\alpha I_0 g)]^{1/3}$  в газе (жидкости) развивается конвективное движение со скоростью порядка  $V_0 = (\alpha I_0 r_0^2 g / \rho_0 h_0)^{1/3}$ , где  $g$  - ускорение свободного падения. Уравнения свободной конвекции см., например, в [10]. Используя преобразования подобия вида (7) для функций возмущения плотности, давления и скорости, находим, что  $m = -2/3, 2/3, 1/3$  и  $n = 1, 0, 0$  (для плотности, давления и скорости соответственно). Функция  $\rho_{10}$  в условиях гравитационной конвекции, как и для упоминавшегося в п. 2 нелинейного трансзвукового режима, может быть найдена численно.

Таким образом, для широкого круга задач функция возмущения плотности  $\rho_1$  в случае пучков переменного радиуса представляется в виде (7). Подстановка этого выражения в (5), (6) дает следующие общие решения для возмущенного угла отклонения и интенсивности:

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_\Lambda + N\vec{\theta}_1, \quad \vec{\theta}_\Lambda(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{\Phi(z)} \frac{d\Phi}{dz}, \quad (12)$$

$$\vec{\theta}_1(x, y, z, t) = B_1(z) \vec{D}_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{t}), \quad \vec{x} = \frac{x}{\Phi(z)}, \quad \vec{y} = \frac{y}{\Phi(z)}, \quad \vec{t} = \frac{t}{\Phi(z)},$$

$$B_1(z) = \frac{1}{\Phi(z)} \int_0^z \frac{e^{-N\alpha z'^m}}{\Phi^n(z')} dz', \quad \vec{D}_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{t}) = \vec{v}_1 \rho_{10}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{t}),$$

$$I = I_\Lambda e^{-Nt}, \quad I_\Lambda(x, y, z, t) = \frac{e^{-N\alpha z}}{\Phi^2(z)} I^{00}(\vec{r}), \quad \vec{r} = \frac{\vec{r}}{\Phi(z)};$$

$$f(x, y, z, t) = B_2(z) D_2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{t}), \quad (13)$$

$$B_2(z) = \int_0^z \frac{B_1(z')}{\Phi(z')} dz' = \int_0^z \frac{dz'}{\Phi^2(z')} \int_0^{z'} \frac{e^{-N\alpha z''^m}}{\Phi^n(z'')} dz'',$$

$$D_2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{t}) = \vec{\Delta}_1 \rho_{10}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{t}) - (\vec{v}_1 \ln(I^{00}(\vec{r})), \vec{v}_1 \rho_{10}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{t})).$$

Структура приведенных решений показывает, что функции  $NB_1(z)$ ,

$NB_2(z)$  описывают амплитуды возмущений угла и интенсивности соответственно. Функции  $D_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ ,  $D_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$  описывают пространственные изменения возмущений угла отклонения и интенсивности излучения в фиксированном сечении  $z = \text{const}$ .

На рис. 1 представлено изменение амплитудных функций возмущения угла отклонения  $B_1$  (штриховые линии) и интенсивности излучения в пучке  $B_2$  (сплошные линии), вычисленных в контрольном сечении  $z = 1$  в зависимости от "степени поджатия"  $\gamma = 1 \mp 1/z_f$  сфокусированного (расфокусированного) пучка. Расчеты выполнены для трех различных ситуаций: а) самовоздействие в однородном газовом потоке (включая случай естественной гравитационной конвекции)  $n = 1$ , б) самовоздействие длинных импульсов в неподвижной среде  $n = 2$ , в)  $t^3$  - самовоздействие коротких импульсов -  $n = 4$ . Во всех случаях предполагалось отсутствие ослабления излучения за счет поглощения ( $N_\alpha = 0$ ). Наиболее быстрое нарастание возмущений при фокусировке пучка происходит в случае  $t^3$  - самовоздействия коротких импульсов.

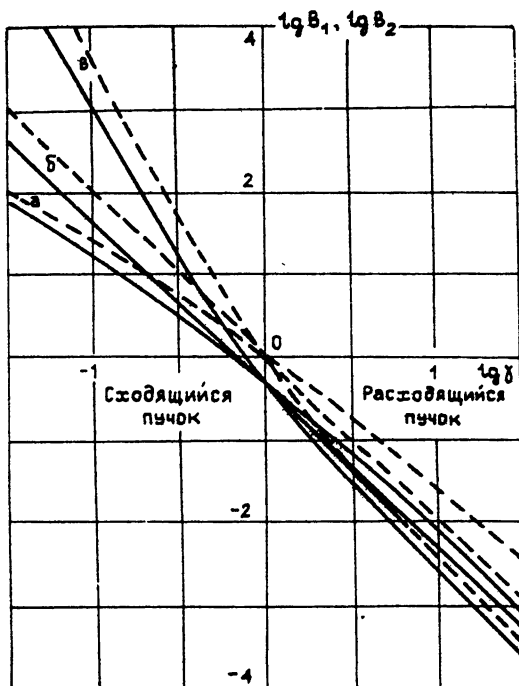


Рис 1

В заключение отметим, что в рамках теории малых возмущений получено общее решение (12), (13) уравнений геометрической оптики (1), (2) для пучков переменного радиуса  $r_{\text{физ}} = \Phi(z)r_0$  (заданного в невозмущенной среде) при наличии слабого эффекта теплового самовоздействия. Ключевыми моментами процесса построения решения является преобразование подобия (7) для функции возмущения плотности среды и использование переменных Таланова в уравнениях оптики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gebhardt F.G., Smith D.C. //IEEE J.Quant.Electron. 1971. V.QE-7. N 2. P.63.
2. Livingstone P.M. //Appl.Opt. 1971. V.10. N 2. P.426.

3. Smith D.C. //Proc. IEEE. 1977. V.65. N 12. P.1679.
4. Воробьев В.В. Тепловое самовоздействие лазерного излучения в атмосфере. - М.:Наука, 1987.
5. Таланов В.И. //Письма в ЖЭТФ. 1970. Т.11. Вып. 6. С. 303.
6. Кучеров А.Н., Макашев Н.К., Устинов Е.В. //Изв.вузов. Радиофизика. 1991. Т.34. N 5. С.528.
7. Коган М.Н., Кучеров А.Н. //ДАН СССР. 1980. Т.241. N 3. С.575; Изв.вузов. Физика. 1983. N 2. С.103.
8. Ellinwood I.W., Mirels H. //Appl.Opt. 1975. V.14. N 9. P.2238.
9. Коган М.Н., Кучеров А.Н., Михайлов В.В., Фонарев А.С. //Изв. АН СССР. ММТ. 1978. N 5. С.95.
10. Bissonnette L.R. //Appl.Opt. 1973. V.12. N 4. P.719.

Поступила в редакцию  
19 июня 1991 г.

THERMAL BLOOMING OF A VARIABLE RADIUS BEAMS IN THE APPROXIMATION  
OF THE SMALL PERTURBATION THEORY

*A.N.KucheroV, N.K.Makashev, E.V.Ustinov*

A general solution of the geometrical optic equations which govern weak thermal blooming of optical beams which radius in the absence of the thermal blooming varies according to the known law (in particular focused or defocused beams) is obtained.

УДК 621.372.85

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

*Д. П. Берестнев, В. В. Зайцев*

Предложен метод расчета дисперсионных характеристик плоских градиентных диэлектрических волноводов. Метод основан на численном интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной путем дифференцирования решений исходной граничной задачи по параметру.

Плоский тонкопленочный волновод является одной из основных моделей интегральной электроники, интегральной оптики [1] и теории полупроводниковых лазеров [2]. Как правило, для такого рода волноводов характерно непрерывное изменение показателя преломления в поперечном направлении.

Точные аналитические результаты для простых градиентных волноводов получены лишь для ряда модельных профилей показателя преломления [1]. В большинстве случаев расчет возможен лишь приближенными численными методами: вариационным, разложением в ряд, методом стратификации. Подробный обзор численных методов исследования градиентных волноводов дан в [1]. Вариант метода стратификации описан в работе [3].

В настоящей работе для расчета дисперсионных характеристик и полей в плоском диэлектрическом волноводе предложен метод численного интегрирования задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим плоский волновод, образованный слоем диэлектрика (толщиной  $a$  с показателем преломления  $n(x)$ ), расположенным между двумя полубесконечными диэлектрическими слоями с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Будем считать, что  $n_2 \geq n_1$ . Систему декартовых координат выберем так, как показано на рис. 1. Процедуры расчета характеристик направляемых ТЕ-и ТН-мод в общих чертах сходны, поэтому остановимся на расчете ТЕ-мод.

Компоненту напряженности электрического поля  $\epsilon_y$  на частоте  $\omega$

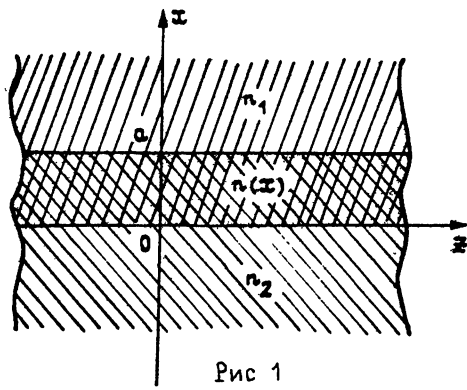


Рис 1

представим в виде

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \frac{1}{2} E(x) \exp[j(\omega t - \gamma z)] + \text{к. с.},$$

где  $\gamma$  - постоянная распространения в направлении оси  $z$ . Функция  $E(x)$  в волноводном слое диэлектрика удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$dE/dx = F, \quad dF/dx = - [k^2(n^2(x) - n_2^2) - \alpha_2^2]E, \quad (1)$$

а в областях однородных диэлектриков у направляемых мод

$$E(x) = E_0 \exp[\alpha_2 x], \quad x \leq 0, \quad (2)$$

$$E(x) = E_a \exp[-\alpha_1(x-a)], \quad x \geq a.$$

Здесь  $k = \omega/c$  - волновое число в вакууме,  $\alpha_i^2 = \gamma^2 - k^2 n_i^2$ ,  $i = 1, 2$ .

Непрерывность тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей позволяет записать граничные условия для уравнения (1) в точке 0:

$$E(0) = E_0, \quad F(0) = \alpha_2 E_0. \quad (3)$$

При этом величина постоянной  $E_0$  определяется условиями возбуждения моды и при расчете дисперсионной характеристики может выбираться произвольной.

Обозначим через  $E(x; \alpha_2, k)$ ,  $F(x; \alpha_2, k)$  решение задачи Коши (1), (3) и введем в рассмотрение функцию



$$n(\alpha_2, k) = \alpha_1 E(x; \alpha_2, k) + F(x; \alpha_2, k). \quad (4)$$

Тогда в силу непрерывности поля  $\epsilon_y$  и его пространственной производной в точке  $x = a$  и первого из выражений (2) для истинных значений постоянной распространения  $\gamma$  должно выполняться равенство нулю  $D(\alpha_2, k)$ . Таким образом,

$$D(\alpha_2, k) = 0 \quad (5)$$

представляет собой дисперсионное уравнение, левая часть которого вычисляется на каждом шаге поиска корня путем численного интегрирования уравнений (1) с начальными условиями (3).

Весьма эффективным способом расчета дисперсионных кривых является метод сведения дисперсионного уравнения к дифференциальному путем дифференцирования по параметру. Нетрудно показать, что при непрерывном изменении волнового числа  $k$  функция  $\alpha_2 = \alpha_2(k)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению [4]

$$\frac{d\alpha_2}{dk} = - \frac{\partial D}{\partial k} / \frac{\partial D}{\partial \alpha_2},$$

т. е., с учетом (4), уравнению

$$\frac{d\alpha_2}{dk} = - \frac{(k/\alpha_1)(n_2^2 - n_1^2)E + \alpha_1 E'_k + F'_k}{(\alpha_2/\alpha_1)E + \alpha_1 E'_\alpha + F'_\alpha}, \quad (6)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_2^2 - k^2(n_1^2 - n_2^2)}, \quad E = E(a; \alpha_2, k),$$

а через  $E'_k$ ,  $E'_\alpha$ ,  $F'_k$  и  $F'_\alpha$  обозначены производные функций  $E = E(x; \alpha_2, k)$  и  $F = F(x; \alpha_2, k)$  по параметрам  $k$  и  $\alpha_2$  в точке  $x = a$ . Дифференцируя уравнение (1) и граничные условия (3) по  $k$  и  $\alpha_2$ , получим систему уравнений:

$$\frac{dE'_\alpha}{dx} = F'_\alpha, \quad \frac{dF'_\alpha}{dx} = 2\alpha_2 E - [k^2(n^2(x) - n_2^2) - \alpha_2^2]E'_\alpha, \quad (7)$$

$$\frac{dE'_k}{dx} = F'_k, \quad \frac{dF'_k}{dx} = -2k(n^2(x) - n_2^2)E - [k^2(n^2(x) - n_2^2) - \alpha_2^2]E'_k$$

и граничные условия в точке  $x = 0$

$$E'_\alpha(0; \alpha_2, k) = 0, \quad E'_k(0; \alpha_2, k) = 0, \quad F'_\alpha(0; \alpha_2, k) = E_0, \quad F'_k(0; \alpha_2, k) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, расчет дисперсионной характеристики направляемой моды сводится к численному интегрированию дифференциального уравнения (6), правая часть которого на каждом шаге интегрирования вычисляется путем решения задачи Коши для объединенной системы уравнений (1), (7) с начальными условиями (3), (8). Отметим, что в результате интегрирования уравнений (1) для каждой точки на дисперсионной кривой автоматически вычисляется распределение электрического поля в поперечном сечении волновода.

Интегрирование уравнения (6) удобнее всего начинать со значения  $k_c$ , соответствующего частоте отсечки моды, так как при  $k = k_c$  в силу условия отсечки [1]  $\alpha_2 = 0$ . В то же время, положив в (5)  $\alpha_2 = 0$ , получим уравнение для расчета  $k_c$ :

$$D(0, k_c) = F(\alpha; 0, k_c) = 0.$$

Оно легко решается любым из стандартных численных методов, например методом половинного деления. При этом для вычисления значений  $F(\alpha; 0, k_c)$  система (1) интегрируется с начальными условиями  $E(0; 0, k_c) = E_0, F(0; 0, k_c) = 0$ .

Для иллюстрации описанного выше метода приведем результаты расчета на ПК "Электроника-85" диэлектрического волновода с ограниченным параболическим профилем показателя преломления. При анализе дисперсии в диэлектрических волноводах широко используется нормированная частота  $v = (ka/2)\sqrt{n_m^2 - n_2^2}$  и постоянная  $b = (\alpha_2 a)^2 / 4v^2$ , где  $n_m$  - максимальное значение показателя преломления волноводного слоя. Рассчитанные значения  $v_c$  для первых шести мод равны  $v_c = 0, 0; 2, 2631; 4, 2872; 6, 2977; 8, 3088; 10, 3078$ . С точностью до трех десятичных знаков после запятой они совпадают со значениями, полученными в [1] методом разложения решений уравнения (1) в степенной ряд при учете 20 - 30 членов. Время расчета одной критической частоты порядка 30 с.

На рис. 2 приведены дисперсионные кривые  $TN_n$ -мод для  $n = 0, 1, 2$  (сплошные линии) и частотные зависимости коэффициентов локализации излучения  $\Gamma$  (пунктирные линии). Зависимости  $b = b(v)$  практически совпадают с полученными в [1] вариационным методом. Время расчета одной дисперсионной кривой по 20 точкам около 3 минут, что говорит о

достаточно высокой вычислительной эффективности метода.

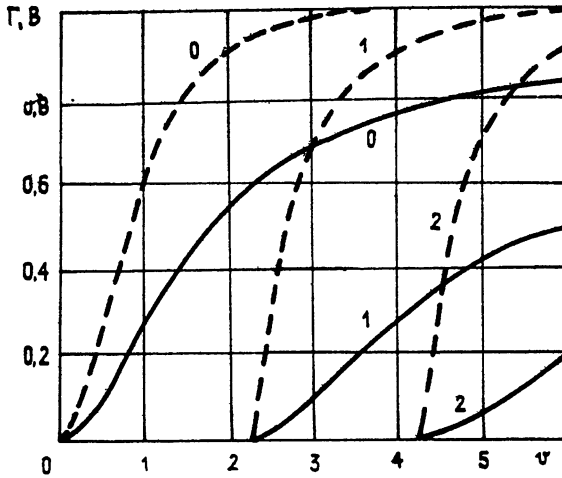


Рис. 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Адамс Н. Введение в теорию оптических волноводов. :Пер. с англ. - М. :Мир, 1984.
2. Полупроводниковые инжекционные лазеры/Под ред. У.Тсанги: Пер. с англ. - М. :Радио и связь, 1990.
3. Марков С. Б., Евсеенко А. Н., Терещенко С. В. //Радиотехника и электроника. 1990. Т.35. N 6. С.1170.
4. Зайцев В. В., Занин В. И., Тяпухин П. В. //Электронная техника. Сер.3. Электроника СВЧ. 1987. Вып.3. С. 27.
5. Касти Дж., Калиба Р. Методы погружения в прикладной математике: Пер. с англ. - М. :Мир, 1976.

Самарский государственный университет

Поступила в редакцию  
3 июля 1991 г.

#### NUMERICAL ANALYSIS OF DISPERSIVE CHAOTIC PLANE DIELECTRIC WAVEGUIDES

*D. P. Berestnev, V. V. Zaitsev*

A method is suggested for calculation of dispersive characteristics of plane gradient dielectric waveguides. The method is based on numerical integration of the system of ordinary differential equations obtained by differentiation of solutions of the initial boundary problem over the parameter.

УДК 539.219.3:621.382

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФФУЗИЯ ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОЛЬНЫЙ  
КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ.  
ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Н. В. Азудов, А. Н. Малахов

Для произвольного кусочно-линейного потенциального профиля предложен метод получения точных значений времен релаксации стационарных распределений, частот переходов диффундирующих частиц через потенциальные барьеры и времен жизни метастабильных состояний, справедливый для любых соотношений высот потенциальных барьеров или глубин потенциальных ям с тепловой энергией частиц. Рассмотрен ряд конкретных примеров.

1. Проблема скоростей диффузии через потенциальные барьеры, разделяющие устойчивые или метастабильные состояния системы, возникает в широком круге физических задач и привлекает в настоящее время большое внимание (см., например, [1 - 6]).

Основная трудность этой проблемы заключается в получении точных аналитических результатов для барьеров произвольной формы и высоты, поэтому приходится ограничиваться случаями "решаемых" моделей потенциальных барьеров (см., например, [2 - 6]). К таким моделям относятся и кусочно-линейные потенциальные профили, некоторые частные случаи которых рассматривались в работах [3 - 5].

В работах [7, 8] найдено точное решение и временные характеристики диффузии через произвольную последовательность ступенчатых потенциальных барьеров. В настоящей работе эта задача решается для произвольного кусочно-линейного профиля.

1. Постановка задачи. Точное решение

2. Как известно, процесс одномерной нестационарной диффузии в потенциальном поле  $U(x)$  описывается броуновским движением диффундирующих частиц, подчиняющихся уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \frac{dU(x)}{dx} + \eta(t), \quad (1)$$

где  $x$  - координата броуновской частицы,  $h$  - коэффициент вязкости,  $\eta(t)$  - стационарный белый гауссов шум с нулевым средним значением и корреляционной функцией  $\langle \eta(t)\eta(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau)$ ,  $D = 2kT/h$ . Уравнению (1) соответствует уравнение Фоккера - Планка для плотности вероятности переходов

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \hat{L}(x)W(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{h} \frac{dU(x)}{dx} W(x, t) \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \quad (2)$$

при начальном и граничных условиях  $W(x, 0) = \delta(x)$ ,  $W(\pm\infty, t) = 0$ .

Для изображения по Лапласу,

$$Y(x, s) \equiv Y(x) = \int_0^{\infty} W(x, t) e^{-st} dt,$$

уравнение (2) переходит в уравнение в обыкновенных производных:

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[ \frac{du(x)}{dx} Y(x) \right] - \gamma^2 Y(x) = -B\delta(x), \quad (3)$$

где  $B = 2/D$ ,  $\gamma^2 = sB$ ,  $u(x) = 2U(x)/hD = U(x)/kT$  - безразмерный потенциал с граничными условиями  $Y(\pm\infty) = 0$ .

3. Рассмотрим кусочно-линейный профиль потенциала  $u(x)$ , изображенный на рис. 1, где  $2\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ;  $2\bar{\alpha}_k$ ,  $\bar{\beta}_k$  - наклон прямых линий и скачки потенциала для областей  $x > 0$  и  $x < 0$  соответственно. В точке  $x = 0$  принимаем  $u(x) = 0$ .

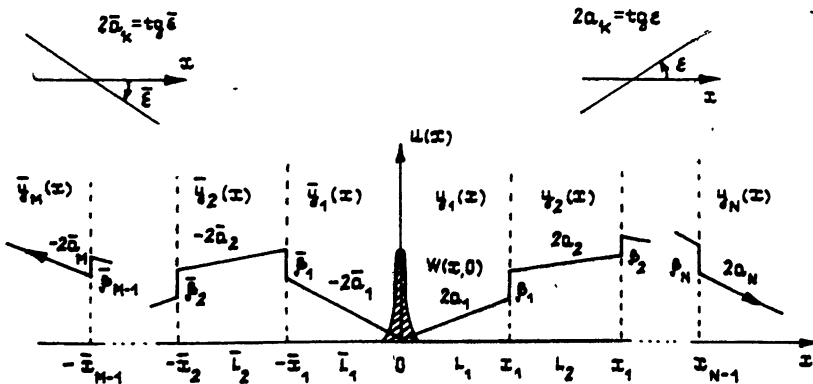


Рис. 1.

Если  $N$  и  $M$  - число линейных участков потенциального профиля для

$x > 0$  и  $x < 0$  соответственно, то решение уравнения (3) имеет следующую структуру (см. рис. 1):

$$Y(x) = \begin{cases} Y_1(x), & 0 < x < x_1 \\ Y_2(x), & x_1 < x < x_2 \\ \dots \dots \dots \\ Y_{N-1}(x), & x_{N-2} < x < x_{N-1} \\ Y_N(x), & x > x_{N-1} \end{cases}, \quad Y(x) = \begin{cases} \bar{Y}_1(x), & -\bar{x}_1 < x < 0 \\ \bar{Y}_2(x), & -\bar{x}_2 < x < -\bar{x}_1 \\ \dots \dots \dots \\ \bar{Y}_{N-1}(x), & -\bar{x}_{N-1} < x < -\bar{x}_{N-2} \\ \bar{Y}_N(x), & x < -\bar{x}_{N-1} \end{cases} \quad (4)$$

Каждому интервалу разбиения оси  $x$  соответствует свое общее решение уравнения (3):

$$Y_k(x) = A_k e^{\lambda_k x} + B_k e^{-\mu_k x}, \quad \bar{Y}_k(x) = \bar{A}_k e^{-\bar{\lambda}_k x} + \bar{B}_k e^{\bar{\mu}_k x}, \quad (5)$$

где  $A_k, B_k, \bar{A}_k, \bar{B}_k$  - произвольные постоянные,  $\lambda_k = b_k - a_k, \mu_k = b_k + a_k, \bar{b}_k = \sqrt{a_k^2 + \gamma^2}, \bar{\lambda}_k = \bar{B}_k - \bar{a}_k, \bar{\mu}_k = \bar{B}_k + \bar{a}_k, \bar{B}_k = \sqrt{\bar{a}_k^2 + \gamma^2}$ . Черта сверху здесь и всюду далее соответствует области  $x < 0$ .

Из граничных условий  $Y(\pm\infty) = 0$  следует, что  $A_N = \bar{A}_N = 0$ . Тем самым, остается  $2(N + M - 1)$  неизвестных произвольных постоянных, которые определяются из условий сшивки  $Y(x)$  и  $dY(x)/dx$  в  $M - 1$  точках слева и  $N - 1$  точках справа от начала координат и в точке  $x = 0$ . Условия сшивки (см., например, [3, 7]) имеют вид ( $x_k, \bar{x}_k \neq 0$ ):

$$Y_{k+1}(x_k) = Y_k(x_k) e^{-\beta_k}, \quad \bar{Y}_{k+1}(-\bar{x}_k) = \bar{Y}_k(-\bar{x}_k) e^{-\bar{\beta}_k},$$

$$Y'_{k+1}(x_k) - Y'_k(x_k) = 2Y_k(x_k) [a_k - a_{k+1} e^{-\beta_k}], \quad (6)$$

$$\bar{Y}'_{k+1}(-\bar{x}_k) - \bar{Y}'_k(-\bar{x}_k) = 2\bar{Y}_k(-\bar{x}_k) [\bar{a}_k - \bar{a}_{k+1} e^{-\bar{\beta}_k}].$$

В точке  $x = 0$ , где находится начальное распределение  $W(x, 0) = \delta(x)$ ,

$$Y_1(0) = \bar{Y}_1(0), \quad \bar{Y}'_1(0) - Y'_1(0) = 2Y_1(0) [a_1 + \bar{a}_1] + B. \quad (7)$$

4. Используя (6), (7), можно определить все произвольные постоянные и получить следующие значения  $Y_k(x), \bar{Y}_k(x)$ , входящие в (4):

для  $x > 0$

$$y_1(x) = \frac{B}{2b_1} \frac{\bar{d}}{\Delta} \left[ d_1^\lambda e^{\lambda_1 x} + d_1^\mu e^{-\mu_1 x} \right],$$

$$y_2(x) = \frac{B}{2b_2} \frac{\bar{d}}{\Delta} \Pi_1 \left[ d_2^\lambda e^{\lambda_2(x-x_1)} + d_2^\mu e^{-\mu_2(x-x_1)} \right],$$

..... (8)

$$y_{N-1}(x) = \frac{B}{2b_{N-1}} \frac{\bar{d}}{\Delta} \Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{N-2} \left[ d_{N-1}^\lambda e^{\lambda_{N-1}(x-x_{N-2})} + d_{N-1}^\mu e^{-\mu_{N-1}(x-x_{N-2})} \right],$$

$$y_N(x) = \frac{B}{2b_N} \frac{\bar{d}}{\Delta} \Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{N-1} e^{-\mu_N(x-x_{N-1})},$$

при  $x < 0$ :

$$\bar{y}_1(x) = \frac{B}{2\bar{b}_1} \frac{d}{\Delta} \left[ \bar{d}_1^\lambda e^{-\bar{\lambda}_1 x} + \bar{d}_1^\mu e^{\bar{\mu}_1 x} \right],$$

$$\bar{y}_2(x) = \frac{B}{2\bar{b}_2} \frac{d}{\Delta} \bar{\Pi}_1 \left[ \bar{d}_2^\lambda e^{-\bar{\lambda}_2(x+\bar{x}_1)} + \bar{d}_2^\mu e^{\bar{\mu}_2(x+\bar{x}_1)} \right],$$

..... (9)

$$\begin{aligned} \bar{y}_{N-1}(x) = \frac{B}{2\bar{b}_{N-1}} \frac{d}{\Delta} \bar{\Pi}_1 \bar{\Pi}_2 \dots \bar{\Pi}_{N-2} \left[ \bar{d}_{N-1}^\lambda e^{-\bar{\lambda}_{N-1}(x+\bar{x}_{N-2})} + \right. \\ \left. + \bar{d}_{N-1}^\mu e^{\bar{\mu}_{N-1}(x+\bar{x}_{N-2})} \right], \end{aligned}$$

$$\bar{y}_N(x) = \frac{B}{2\bar{b}_N} \frac{d}{\Delta} \bar{\Pi}_1 \bar{\Pi}_2 \dots \bar{\Pi}_{N-1} e^{\bar{\mu}_N(x+\bar{x}_{N-1})}.$$

Здесь введены обозначения:

$$d = \frac{\gamma}{b_1} (d_1^\mu + d_1^\lambda), \quad \bar{d} = \frac{\gamma}{\bar{b}_1} (\bar{d}_1^\mu + \bar{d}_1^\lambda), \quad (10)$$

$$\Delta = \frac{\gamma}{2b_1 \bar{b}_1} \left[ (\alpha_1^\mu + \alpha_1^\lambda)(\bar{\lambda}_1 \bar{\alpha}_1^\mu - \bar{\mu}_1 \bar{\alpha}_1^\lambda) + (\alpha_1^\mu + \alpha_1^\lambda)(\lambda_1 \alpha_1^\mu - \mu_1 \alpha_1^\lambda) \right].$$

Величины  $\alpha_k^\lambda$ ,  $\alpha_k^\mu$  определяются из матричных соотношений исходя из заданного значения  $N$ :  $\alpha_N^\lambda = 0$ ,  $\alpha_N^\mu = 1$ ,

$$(\alpha_{N-1}^\lambda, \alpha_{N-1}^\mu) = (0, 1) \begin{pmatrix} \alpha_{N-1}^\lambda & r_{N-1}^\mu \\ r_{N-1}^\lambda & \alpha_{N-1}^\mu \end{pmatrix} = (r_{N-1}^\lambda, \alpha_{N-1}^\mu),$$

$$(\alpha_{N-2}^\lambda, \alpha_{N-2}^\mu) = (\alpha_{N-1}^\lambda, \alpha_{N-1}^\mu) \begin{pmatrix} \alpha_{N-2}^\lambda & r_{N-2}^\mu \\ r_{N-2}^\lambda & \alpha_{N-2}^\mu \end{pmatrix},$$

..... (11)

$$(\alpha_1^\lambda, \alpha_1^\mu) = (\alpha_2^\lambda, \alpha_2^\mu) \begin{pmatrix} \alpha_1^\lambda & r_1^\mu \\ r_1^\lambda & \alpha_1^\mu \end{pmatrix}.$$

Следующие величины определяются из характеристик потенциального профиля ( $k = 1, 2, \dots, N - 1$ ;  $L_k = x_k - x_{k-1}$ ):

$$q_k^\mu = e^{\mu_k L_k}, \quad q_k^\lambda = e^{-\lambda_k L_k R_k}, \quad r_k^\mu = e^{\mu_k L_k R_k}, \quad r_k^\lambda = e^{-\lambda_k L_k R_k}.$$

$$R_k^\lambda = \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1} e^{-\beta_k}}{\mu_k + \lambda_{k+1} e^{-\beta_k}}, \quad R_k^\mu = \frac{\mu_k - \mu_{k+1} e^{-\beta_k}}{\mu_k + \lambda_{k+1} e^{-\beta_k}}, \quad (12)$$

$$\Pi_k = \frac{2b_{k+1} e^{-\beta_k}}{\mu_k + \lambda_{k+1} e^{-\beta_k}}, \quad R_k = \frac{\lambda_k + \mu_{k+1} e^{-\beta_k}}{\mu_k + \lambda_{k+1} e^{-\beta_k}}.$$



Величины  $\bar{\alpha}_k^\lambda$ ,  $\bar{\alpha}_k^\mu$  получаются аналогично (11) из  $\bar{\alpha}_k^\mu$ ,  $\bar{\alpha}_k^\lambda$ ,  $\bar{\Gamma}_k^\mu$ ,  $\bar{\Gamma}_k^\lambda$ , которые, в свою очередь, находятся с помощью (12) при замене  $\lambda_k$ ,  $\mu_k$ ,  $b_k$ ,  $x_k$ ,  $\beta_k$  и, следовательно,  $\Pi_k$ ,  $R_k$ ,  $R_k^\lambda$ ,  $R_k^\mu$ ,  $L_k$  на те же величины с чертой сверху. При этом  $N$  заменяется на  $M$ .

Если в точке  $x_{N-1}$  находится отражающая или поглощающая граница, то следует положить  $\alpha_n = 0$ ,  $\beta_{N-1} = \infty$  или  $\alpha_n = 0$ ,  $\beta_{N-1} = -\infty$  соответственно. Аналогично следует поступать и для области  $x < 0$ .

Заметим, наконец, что полученное решение (8), (9), как и должно быть, удовлетворяет условиям нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(x) dx = \frac{1}{S}.$$

## 2. Временные характеристики диффузии

5. Рассмотрим, например, бистабильную систему, потенциальный профиль которой изображен на рис. 2а, с дельтаобразным начальным распределением вероятности в точке  $x = 0$ :  $W(x, 0) = \delta(x)$ . С течением времени  $W(x, t)$  будет расплываться. Частицы будут диффундировать через потенциальный барьер высотой  $a$ , расположенный в точке  $x = L$ , и, в конце концов, установится стационарное бимодальное распределение  $W(x, \infty) \sim e^{-u(x)}$ , показанное на рис. 2б. Поставим задачу отыскания времени установления этого стационарного распределения - времени релаксации  $\theta$ .

Можно по-разному определять время релаксации. Можно, например, разлагать  $W(x, t)$  по собственным функциям оператора Фоккера - Планка  $\hat{L}(x)$  и искать минимальное собственное число  $\lambda_{\min}$  и полагать, что  $\theta = -\lambda_{\min}^{-1}$  (см., например, [5, 9]). Трудности этого подхода связаны или с вычислением собственных функций оператора Фоккера - Планка, что для более или менее сложного потенциального профиля является практически безнадежным делом, или, непосредственно, с поиском минимального собственного числа, что, само по себе, является сложной самостоятельной проблемой (см., например, [6, 9]).

Предлагаемый подход к отысканию времени релаксации основан на определении времени установления некоторой функции  $Q(t)$ , отражающей процесс установления стационарного распределения  $W(x, t) \rightarrow W(x, \infty)$ , для которой известно изображение  $\hat{Q}(s) = \int_0^{\infty} Q(t) e^{-st} dt$ . Пусть  $Q(t)$

монотонно изменяется от  $Q(0)$  до  $Q(\infty)$ . За время релаксации примем

$$\theta = \int_0^{\infty} [Q(\infty) - Q(t)] dt / [Q(\infty) - Q(0)]. \quad (13)$$

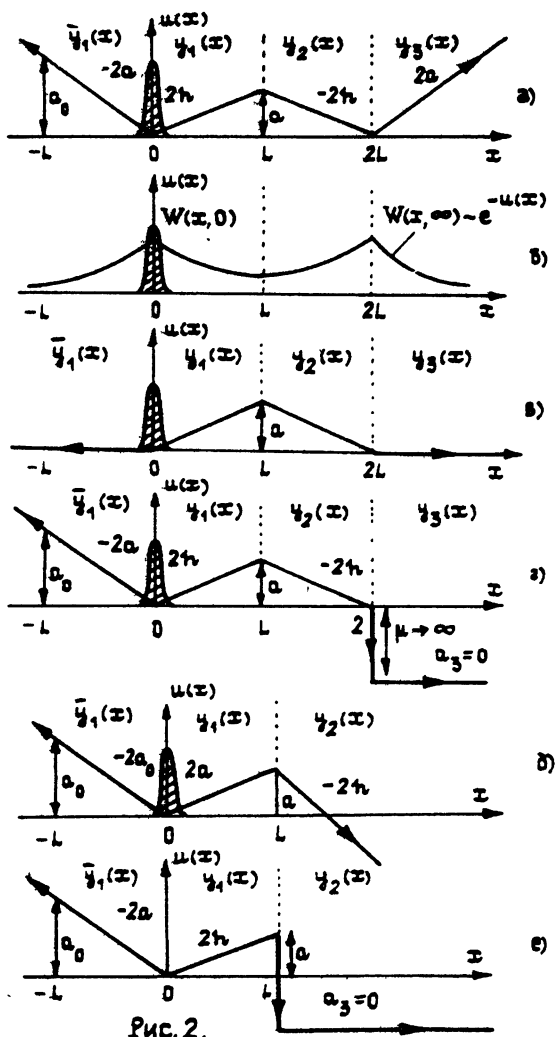


Рис. 2.

Нетрудно показать, что в терминах изображения

$$\theta = \lim_{s \rightarrow 0} [Q(\infty) - s\hat{Q}(s)] / s[Q(\infty) - Q(0)]. \quad (14)$$

Так, для бистабильной системы (рис. 2а) за функцию  $Q(t)$  удобно принять вероятность пребывания диффундирующих частиц справа от

вершины барьера

$$Q(t) = \int_L^{\infty} W(x, t) dx. \quad (15)$$

В этом случае

$$Q(0) = 0, \quad Q(\infty) = 1/2, \quad \hat{Q}(s) = \int_L^{2L} y_2(x) dx + \int_{2L}^{\infty} y_3(x) dx. \quad (16)$$

Интегральное определение времени релаксации, согласно (13), имеет смысл только в том случае, если эволюция функции  $Q(t)$  протекает достаточно быстро и интеграл в (13) сходится.

Если  $Q(t)$  изменяется медленно, так что (13) приводит к  $\theta = \infty$ , время релаксации можно определить как такое время  $\theta^*$ , при котором

$$Q(\theta^*) = (Q(0) + Q(\infty))/2. \quad (17)$$

Подобная ситуация появится, например, в рассматриваемой бистабильной системе, если принять  $\alpha = 0$  ( $\alpha_0 = 0$ ). Бистабильная система при этом как таковая пропадет, и мы придем к диффузии частиц из точки  $x = 0$  через треугольный барьер (рис. 2в). В этом случае  $\theta^*$  имеет скорее смысл времени выхода частиц за барьер, если  $Q(t)$  определено формулой (15).

Определение времени релаксации согласно (17) справедливо и тогда, когда интеграл в (13) сходится. В этом случае значения  $\theta$  и  $\theta^*$ , разумеется, будут несколько отличаться численно. Заметим, что определенное согласно (17) время выхода частиц за барьеры также удастся вычислить через изображение  $\hat{Q}(s)$  [8].

6. Формула (14) позволяет также вычислять и время жизни метастабильных состояний, показанных, например, на рис. 2г, д, где они локализованы вблизи  $x = 0$ . В этих случаях  $Q(t)$  также можно определить формулой (15) и тогда вероятность  $Q(t)$  будет изменяться от  $Q(0) = 0$  до  $Q(\infty) = 1$  и, следовательно, время жизни этих метастабильных состояний будет равно

$$\theta = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - s\hat{Q}(s))/s. \quad (18)$$

7. Рассмотрим еще одно характерное время, связанное с диффузией - это среднее время первого достижения (MFPT - mean first passage time) (см., например, [10, 11]), которое будем обозначать через  $T(x_0, x_{FP})$ . Оно определяется как среднее время достижения броуновской частицей, стартующей из точки  $x_0$ , некоторого граничного значения  $x_{FP}$  (пусть для определенности  $x_{FP} > x_0$ ). Обратная величина  $\nu = (T)^{-1}$

представляет частоту переходов частиц из точки  $x_0$  в точку  $x_{гр}$  - весьма важную физическую характеристику.

Отличие времени релаксации и времени выхода от МФРТ заключается в том, что в процессе установления стационарного распределения, как и в процессе выхода частиц за барьер диффундирующие частицы имеют возможность сколь угодно раз возвращаться обратно в исходную (добарьерную) область, в то время как  $T(x_0, x_{гр})$  определяется по ансамблю частиц, первый раз достигших точки  $x_{гр}$  и уже не возвращающихся обратно в область  $x < x_{гр}$ . Поэтому для вычисления МФРТ в точке  $x = x_{гр}$  помещают поглощающую границу. Тем самым, для нахождения  $T(x_0, x_{гр})$  в точке  $x_0$  необходимо располагать начальной дельта-образную плотность вероятности  $W(x, 0) = \delta(x - x_0)$ , а в точке  $x_{гр}$  - бесконечно глубокую потенциальную яму и при этих условиях находить  $W(x, t; x_0, x_{гр})$  - решение уравнения (2).

Среднее время первого достижения равно [11]

$$T(x_0, x_{гр}) = \int_0^{\infty} P(t, x_0, x_{гр}) dt = \int_0^{\infty} [1 - Q(t, x_0, x_{гр})] dt$$

где

$$P(t, x_0, x_{гр}) = \int_{-\infty}^{x_{гр}} W(x, t; x_0, x_{гр}) dx, \quad Q(t, x_0, x_{гр}) = \int_{x_{гр}}^{\infty} W(x, t; x_0, x_{гр}) dx,$$

$$Q(0, x_0, x_{гр}) = 0, \quad Q(\infty, x_0, x_{гр}) = 1,$$

$$\hat{Q}(s, x_0, x_{гр}) = \int_{x_{гр}}^{\infty} Y(x) dx, \quad \hat{P}(s, x_0, x_{гр}) = \int_{-\infty}^{x_{гр}} Y(x) dx.$$

Таким образом МФРТ определяется, фактически, формулой (13). Следовательно,

$$T(x_0, x_{гр}) = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - s\hat{Q}(s, x_0, x_{гр})) / s. \quad (19)$$

Обращаясь к рассматриваемой бистабильной системе, где  $x_0 = 0$ , для нахождения  $T(0, 2L)$  необходимо расположить в точке  $x = 2L$  бесконечно глубокую потенциальную яму. Тем самым, получим потенциальный профиль, изображенный на рис. 2д. В формуле (19) полагаем

$$\hat{Q}(s, 0, 2L) = \int_{2L}^{\infty} y_3(x) dx. \quad (20)$$

Входящая сюда функция  $y_3(x)$  должна быть найдена именно для указанного профиля. Она дает изображение плотности вероятности внутри бесконечно глубокой потенциальной ямы.

8. Можно показать, что для любого потенциального профиля  $u(x)$  и любой последовательности точек  $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n$ , в которых нет скачков потенциала, среднее время первого достижения  $T(x_0, x_n)$  равно сумме

$$T(x_0, x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(x_i, x_{i+1}).$$

При вычислении слагаемого  $T(x_i, x_{i+1})$  начальная дельта-образная плотность вероятности ставится в точке  $x_i$ , а бесконечно глубокая потенциальная яма в точке  $x_{i+1}$ . При этом потенциальный профиль для  $x < x_{i+1}$  должен совпадать с  $u(x)$ .

9. В заключении раздела отметим, что знание изображения  $\hat{P}(s, x_0, x_{\text{ГР}})$  позволяет без труда найти не только среднее время первого достижения  $T(x_0, x_{\text{ГР}}) = \langle t \rangle$ , но и средние значения любых степеней времени первого достижения с помощью ряда

$$P(s, x_0, x_{\text{ГР}}) = \langle t \rangle - \frac{s}{2!} \langle t^2 \rangle + \frac{s^2}{3!} \langle t^3 \rangle - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-s)^i}{(i+1)!} \langle t^{i+1} \rangle,$$

где  $\langle t^n \rangle \equiv \int_0^{\infty} t^n w(t, x_0, x_{\text{ГР}}) dt$ ,  $w(t, x_0, x_{\text{ГР}})$  - плотность вероятности времени первого достижения. Моменты  $\langle t^n \rangle$  дают определенную информацию о самой плотности вероятности  $w(t, x_0, x_{\text{ГР}})$ , непосредственное вычисление которой наталкивается на известные трудности, связанные с решением уравнения Понтрягина [10].

Если исходить из изображения  $\hat{Q}(s, x_0, x_{\text{ГР}})$ , то

$$\langle t^{n+1} \rangle = \lim_{s \rightarrow 0} (n+1) \left[ n! + (-s)^{n+1} \hat{Q}_s^{(n)}(s, x_0, x_{\text{ГР}}) \right] / s^{n+1}.$$

Вместе с этим изображение плотности вероятности времени первого достижения равно

$$\hat{v}(s, x_0, x_{\text{ГР}}) = s \hat{Q}(s, x_0, x_{\text{ГР}}).$$

### 3. Примеры

10. Вернемся к бистабильной системе (рис. 2а) и найдем конкретное значение времени релаксации этой системы и частоту переходов через потенциальный барьер. Заметим, что для частного случая одинаковых наклонов потенциального профиля ( $\alpha_0 = \alpha$ ) эта задача уже рассматривалась в литературе [3 - 5]. Возможность произвольного соотношения между  $\alpha_0$  и  $\alpha$  позволяет проследить зависимость искомых характеристик непосредственно от высоты потенциального барьера при неизменной крутизне внешних стенок.

Для рассматриваемого потенциального профиля (ср. с рис. 1)  $M=1$ ,  $N=3$ ,  $a_1=h$ ,  $a_2=-h$ ,  $a_3=a$ ,  $\bar{a}_1=a$ ,  $\beta_1=\beta_2=0$ ,  $x_1=L$ ,  $x_2=2L$ . Формулы (8)-(12) приводят к следующим значениям  $y_k(x)$ :

$$y_2(x) = \frac{B}{F} b e^{-\lambda_2 L} [(\lambda_2 - \lambda_3) e^{-\delta + \lambda_2(x-L)} + (\lambda_1 + \lambda_3) e^{-\lambda_1(x-L)}],$$

$$y_3(x) = \frac{B}{F} 2b^2 e^{-\delta - \mu_3(x-2L)},$$

где

$$F = [\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3) - \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3) e^{-\delta}] [\lambda_1 + \lambda_3 + (\lambda_2 - \lambda_3) e^{-\delta}], \quad b = \sqrt{h^2 + \gamma^2},$$

$$b_a = \sqrt{a^2 + \gamma^2}, \quad \lambda_1 = b - h, \quad \lambda_2 = b + h, \quad \lambda_3 = b_a - a, \quad \mu_3 = b_a + a, \quad \delta = 2bL.$$

Отсюда, согласно (16), получим

$$s\hat{Q}(s) = s \int_L^{\infty} Y(x) dx = b e^{\lambda_1 L} / [\lambda_2 - \lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_3) e^{\delta}].$$

Формула (14) дает следующее значение времени релаксации равновесного состояния в бистабильной системе при дельтаобразном начальном распределении в одном из потенциальных минимумов:

$$\theta = 2\theta_L [(e^\alpha - 1 - \alpha) / \alpha^2 + (e^\alpha - 1) / \alpha \alpha_0], \quad (21)$$

где  $\alpha = 2hL$ ,  $\alpha_0 = 2aL$ ,  $\theta_L = L^2/D$  - характерное время диффузионного расплывания на расстояние  $L$ .

Если крутизна внешних стенок потенциального профиля достаточно велика ( $\alpha_0 \gg 1, \alpha$ ), то (21) приводит к времени релаксаций

$$\theta = 2\theta_L (e^\alpha - 1 - \alpha) / \alpha^2, \quad (22)$$

соответствующему потенциальному профилю, показанному на рис. 3, при дельтаобразном начальном распределении вблизи одной из стенок. Этот потенциальный профиль рассматривался в литературе [4], и для него было найдено минимальное ненулевое собственное значение  $\lambda_{\min}$ . Его обратная величина для  $\alpha \gg 1$  оказалась равной  $\lambda_{\min}^{-1} = 2\theta_L e^\alpha / \alpha^2$ , что полностью совпадает с (22) при  $e^\alpha \gg \alpha$ . При низком потенциальном барьере ( $\alpha \ll 1$ ) из (22) следует  $\theta = \theta_L$ , а из [4] -  $\lambda_{\min}^{-1} = 8\theta_L / \pi^2$ . Отличие в коэффициенте связано с различным начальным распределением. В нашем случае  $W(x, 0) = \delta(x)$ . В работе [4] в качестве начального распределения бралась фактически нечетная собственная функция наименьшего порядка, уже как-то "размазанная" по потенциальной яме, что и привело к несколько меньшему значению времени релаксации. Отметим, что при высоком потенциальном барьере вид начального распределения  $W(x, 0)$  практически мало сказывается на времени релаксации  $\theta$ , он влияет лишь на время установления квазиравновесного распределения  $\theta_{уст}$  внутри левого потенциального минимума, которое при высоком барьере много меньше собственно времени релаксации.

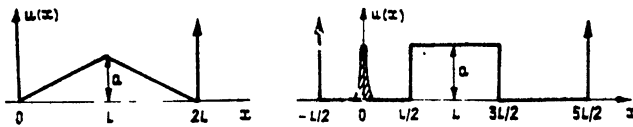


Рис 3.4

Таким образом, второе слагаемое в (21) отражает добавочный вклад в значение времени релаксации, обусловленный влиянием крутизны внешних стенок потенциальной ямы. Он равен нулю для вертикальных стенок ( $\alpha_0 = \infty$ ) и становится преобладающим для пологих стенок ( $\alpha_0 \ll \alpha$ ). Последнее связано с тем, что диффундирующие частицы при  $\alpha_0 \ll \alpha$  "не торопятся" переходить через барьер, и вначале устанавливается квазиравновесное распределение в левой части потенциальной ямы, а затем начинается собственно диффузия через барьер. Можно показать, что время этого установления равно  $\theta_{уст} = 4\theta_L / \alpha \alpha_0 = 1/Dah$ .

Для высокого потенциального барьера при фиксированной крутизне внешних стенок формула (21) приводит к следующему значению времени релаксации:  $\theta = 2\theta_L e^\alpha / \alpha^2 + \theta_{уст} e^\alpha / 2$ , и если при этом  $\alpha \gg \alpha_0$ , то  $\theta = \theta_{уст} e^\alpha / 2$ . Тем самым, появилось два резко различных масштаба времени релаксации: время релаксации внутри левого потенциального

минимума  $\theta_{уст}$  и время релаксации в бистабильной системе  $\theta$ .

Если наклоны потенциального профиля бистабильной системы принять равными ( $\alpha = h$ ), то  $\alpha_0 = \alpha$  и время релаксации согласно (21) будет равно  $\theta = 2\theta_L(2e^\alpha - 2 - \alpha)/\alpha^2$ . Для высокого потенциального барьера  $\theta = 4\theta_L e^\alpha/\alpha^2$ , что совпадает с результатом, полученным в [3, 4], причем для этого достаточно более слабое условие  $e^\alpha \gg \alpha$  ( $\alpha \geq 3, 6$ ), а не  $\alpha \gg 1$ , как это предполагалось в [3, 4]. Если потенциальный барьер низкий ( $\alpha \ll 1$ ), то формула (21) приводит к  $\theta = \theta_L(1 + 2/\alpha_0)$ , и если стенки достаточно крутые ( $\alpha_0 \gg 2$ ), то  $\theta = \theta_L$  - время релаксации практически совпадает с временем свободной диффузии в прямоугольной потенциальной яме.

11. Обратимся теперь к частоте переходов диффундирующих частиц через потенциальный барьер. Согласно п. 7 среднее время первого достижения  $T(0, 2L)$  для бистабильной системы определяется формулами (19), (20), где  $y_3(x)$  находится для потенциального профиля, изображенного на рис. 2г. Сравнивая его с рис. 1, видим, что  $M=1$ ,  $N=3$ ,  $\alpha_1 = h$ ,  $\alpha_2 = -h$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $\bar{\alpha}_1 = \alpha$ ,  $\beta_1=0$ ,  $\beta_2 = -\mu = -\infty$ ,  $x_1=L$ ,  $x_2 = 2L$ . С помощью формул (8) - (12) можно найти

$$y_3(x) = \frac{2B}{\gamma F} 2b^2 \exp[-\delta - \gamma(x-2L)], \quad (23)$$

где  $F = \lambda_2(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1) + 2h(h - \bar{\lambda}_1)e^{-\delta} + \lambda_1(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1)e^{-2\delta}$ ,  $\delta = 2bL$ ,  $\lambda = b - h$ ,  $\lambda_2 = b + h$ ,  $\bar{\lambda}_1 = b_\alpha - a$ ,  $b = \sqrt{h^2 + \gamma^2}$ ,  $b_\alpha = \sqrt{a^2 + \gamma^2}$ . Тем самым, формула (20) приводит нас к  $s\hat{Q}(s, 0, 2L) = 2b^2 e^{-\delta}/F$ . Используя (19), находим следующее точное значение МФРТ:

$$T(0, 2L) = 4\theta_L \left[ 2(\operatorname{ch}\alpha - 1)/\alpha^2 + (e^\alpha - 1)/\alpha\alpha_0 \right], \quad \theta_L = L^2/D. \quad (24)$$

Обратная величина  $(T)^{-1}$  дает значение частоты переходов через потенциальный барьер высотой  $\alpha$ :

$$\nu(\alpha) = \nu(0) \frac{(1+\alpha_0)\alpha^2 e^{-\alpha}}{\alpha + \alpha_0 - (\alpha + 2\alpha_0)e^{-\alpha + \alpha_0 - 2\alpha}}, \quad (25)$$

где  $\nu(0) = \theta_L^{-1}\alpha_0/4(1 + \alpha_0)$  - частота переходов в отсутствие потенциального барьера. Если потенциальный барьер достаточно высок ( $e^\alpha \gg \alpha$ ), то из (25) следует



$$\nu(\alpha) = \frac{D}{4L^2} \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha/\alpha_0)} e^{-\alpha} - \frac{1}{kT} \exp[-U(L)/kT]. \quad (26)$$

Если рассмотреть частоту перехода от точки  $x = 0$  до точки  $x = 2L$  через прямоугольный потенциальный барьер (рис. 4), то согласно [8]

$$\nu(\alpha) = \nu(0) \frac{3e^{-\alpha}}{1 + \frac{3}{2} e^{-\alpha} + \frac{1}{2} e^{-2\alpha}}, \quad (25a)$$

где  $\nu(0) = I/6\theta_L$ . Для высокого барьера соответственно

$$\nu(\alpha) = \frac{D}{2L^2} e^{-\alpha} - kT \exp[-U(L)/kT]. \quad (26a)$$

Основное отличие в частотах перехода через треугольный и прямоугольный потенциальные барьеры - наличие множителя  $\alpha^2$  в формулах (25), (26) по сравнению с формулами (25a), (26a) и, следовательно, в температурной зависимости предэкспоненциального множителя - связано с тем, что частота переходов через треугольный потенциальный барьер больше, чем через прямоугольный барьер, и тем больше, чем больше  $\alpha = U(L)/kT$ . Диффундирующим частицам при той же величине потенциального барьера "легче плавно забираться на барьер", нежели "сразу прыгать наверх".

Если рассматривать частоту переходов из параболической потенциальной ямы через параболический же барьер, то, согласно Крамерсу [12], для высокого потенциального барьера ( $\alpha \gg 1$ )

$$\nu(\alpha) \sim \exp[-U(L)/kT], \text{ т. е. } \sim \frac{\alpha}{\theta_L} e^{-\alpha}. \quad (27)$$

Таким образом, для параболических потенциальных профилей температурная зависимость предэкспоненциального множителя при высоком барьере пропадает. Это связано с локальной линейностью исходного уравнения (1) в области потенциального минимума и в области вершины барьера. Нелинейность в этих областях приводит к температурной зависимости предэкспоненциального множителя.

12. Рассмотрим теперь бистабильную систему, потенциальные минимумы которой расположены на разных уровнях (рис. 5), ограничившись для простоты расчетов равными наклонами прямых линий. Общие формулы (8) - (12) приводят к следующим значениям  $y_k(x)$ :

$$y_2(x) = \frac{Bb}{2\lambda\Delta} \left[ \alpha e^{-\delta\rho + \mu(x-L)} + \lambda e^{-\lambda(x-L)} \right] e^{-\mu L},$$

$$y_3(x) = \frac{Bb^2}{2\lambda\Delta} e^{-\mu L - \lambda\rho L} e^{-\mu(x-L(\rho+1))},$$

где  $b = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$ ,  $\lambda = b - \alpha$ ,  $\mu = b + \alpha$ ,  $\delta = 2bL$ ,  $\Delta = \alpha^2 [e^{-\delta} + e^{-\delta\rho} - e^{-\delta(\rho+1)}] + \gamma^2$ .

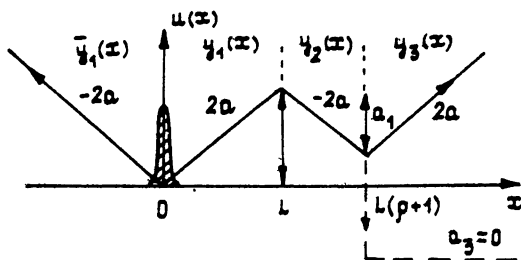


Рис.5.

Отсюда нетрудно найти

$$s\hat{Q}(s) = s \int_L^{L(1+\rho)} y_2(x) dx + s \int_{L(1+\rho)}^{\infty} y_3(x) dx = be^{-\mu L} (\mu - \alpha e^{-\delta\rho}) / 2\Delta.$$

Тем самым, вероятность  $Q(t) = \int_L^{\infty} W(x, t) dt$  изменяется от  $Q(0) = 0$  до

$Q(\infty) = (2e^{\alpha_1\rho} - 1) / 2(e^{\alpha_1\rho} + e^{\alpha} - 1)$ . Обращаясь к формуле (14), находим

$$\theta = \frac{\sqrt{\theta} \theta_{\rho L}}{\alpha \alpha_1} \times \quad (28)$$

$$\times \left[ \frac{2e^{\alpha+\alpha_1} + \alpha + \alpha_1 - \alpha e^{\alpha_1} - \alpha_1 e^{\alpha}}{e^{\alpha_1} + e^{\alpha} - 1} - \frac{e^{\alpha_1} + \alpha_1}{2e^{\alpha_1} - 1} + \frac{\alpha}{2} + 1 \right],$$

где  $\theta_{\rho L} = \rho^2 L^2 / D$ ,  $\alpha = 2\alpha L$ ,  $\alpha_1 = \alpha\rho$ .

Полученное выражение определяет время релаксации равновесного распределения в потенциальном профиле, указанном на рис. 5, если первоначально все диффундирующие частицы находились в левом потенциальном минимуме. Легко видеть, что замена  $\alpha_1 \rightleftharpoons \alpha$  в (28) дает нам время релаксации в случае, если первоначально все частицы находились в правом потенциальном минимуме. Поскольку в (28)  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  входят несимметрично, то в общем случае эти значения времен релаксации различны. Если, однако, высоты барьеров достаточно велики, ( $e^{\alpha_1} \gg \alpha_1$ ,  $e^\alpha \gg \alpha$ ), то вместо (28) получим время релаксации  $\theta =$

$= 8 \sqrt{\theta_L \theta_{\rho L}} e^\alpha e^{\alpha_1} / \alpha \alpha_1 (e^\alpha + e^{\alpha_1})$ , симметричное по отношению к  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , следовательно, получим совпадение времен релаксации установившегося распределения при диффузии из левого или правого потенциальных минимумов. Мы пришли к результату, полностью аналогичному тому, который был получен в [8] для прямоугольных профилей потенциальных минимумов, расположенных на разных уровнях.

13. Рассмотрим частоту переходов частиц из левого минимума в правый. Помещая в правом минимуме бесконечно глубокую потенциальную яму (рис. 5, пунктир), из общих формул (8) - (12) можно найти

$$\hat{s}\hat{Q}(s, 0, L(1 + \rho)) = s \int_{L(1+\rho)}^{\infty} Y_3(x) dx = b^2 e^{-\mu L - \lambda \rho L} / \Delta,$$

где  $\Delta = a e^{-\delta} (a + \lambda e^{-\rho \delta}) + \lambda (\mu - a e^{-\rho \delta})$ ,  $b = \sqrt{a^2 + \gamma^2}$ ,  $\lambda = b - a$ ,  $\mu = b + a$ ,  $\delta = 2bL$ . С помощью (19) получаем среднее время первого достижения

$$T(0, L(1 + \rho)) = \frac{\sqrt{\theta_L \theta_{\rho L}}}{\alpha \alpha_1} \left[ 4e^\alpha + 2e^{-\alpha_1} - 2e^{\alpha - \alpha_1} + \alpha_1 - \alpha - 4 \right].$$

Следовательно, частота переходов равна

$$\nu = \frac{1}{4} \theta_L^{-1} \frac{\alpha^2 e^{-\alpha}}{2e^{-\alpha_1} - (2 + (\alpha - \alpha_1)/2)e^{-\alpha} + e^{-(\alpha + \alpha_1)}}.$$

Если уровень, на котором расположен правый минимум, достаточно высок ( $e^\alpha \gg \alpha$ ), то  $\nu = 1/4 \theta_L^{-1} \alpha^2 e^{-\alpha} / (2 - e^{-\alpha_1})$ . Глубина правого минимума  $\alpha_1$  слабо влияет на частоту переходов, которая определяется, в основном, высотой потенциального барьера левого минимума  $\alpha$ . Если к

тому же, глубина правого минимума достаточно велика ( $e^{\alpha_1} \gg 1$ ), то частота переходов определяется только высотой барьера  $\nu = (1/8) \theta_L^{-1} \alpha^2 e^{-\alpha}$ . Это связано с тем, что диффундирующие частицы, попавшие в достаточно глубокую потенциальную яму, обратно практически не возвращаются.

14. Обратимся теперь к временам жизни метастабильных состояний. Рассмотрим потенциальный профиль, изображенный на рис. 2д, и найдем время жизни метастабильного состояния, существующего в точке  $x = 0$ . Сравнивая рис. 2д с рис. 1 видим, что  $M = 1$ ,  $N = 2$ ,  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = -h$ ,  $\bar{\alpha}_1 = \alpha_0$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $x_1 = L$ . Используя формулы (8) - (12), можно получить

$$\hat{s}Q(s) = s \int_L^\infty y_2(x) dx = \frac{2\mu_2 b_1}{(\bar{\lambda}_1 + \lambda_1)(\mu_1 + \mu_2) e^{\mu_1 L} + (\mu_2 - \lambda_1)(\mu_1 - \bar{\lambda}_1) e^{-\lambda_1 L}}$$

где  $\lambda_1 = b_1 - a$ ,  $\bar{\lambda}_1 = b_0 - a_0$ ,  $\mu_1 = b_1 + a$ ,  $\mu_2 = b_2 + h$ ,  $b_1 = \sqrt{a^2 + \gamma^2}$ ,  $b_2 = \sqrt{h^2 + \gamma^2}$ ,  $b_0 = \sqrt{a_0^2 + \gamma^2}$ .

Обращаясь к формуле (18), находим время жизни рассматриваемого метастабильного состояния ( $\alpha_0 = 2a_0L$ ,  $\alpha = 2aL$ ,  $\alpha_1 = 2hL$ ):

$$\tau = 2\theta_L \left[ (e^{\alpha} - 1)/\alpha^2 + (e^{\alpha} - 1 - \alpha_1)/\alpha\alpha_1 + (e^{\alpha} - 1)/\alpha\alpha_0 + e^{\alpha}/\alpha_0\alpha_1 \right]. \quad (29)$$

Если положить  $\alpha_1 \rightarrow \infty$ , то (29) перейдет в

$$\tau = 2\theta_L \left[ (e^{\alpha} - \alpha - 1)/\alpha^2 + (e^{\alpha} - 1)/\alpha\alpha_0 \right] \quad (30)$$

и будет описывать время жизни метастабильного состояния, потенциальный профиль которого представлен на рис. 2е.

15. Рассмотрим теперь значение времени жизни метастабильного состояния, существующего в потенциальном профиле, изображенном на рис. 2г, для которого мы уже нашли среднее время первого достижения  $T(0, 2L)$ . Чтобы найти время жизни метастабильного состояния, необходимо включить в рассмотрение изображение вероятности пребывания частиц в интервале  $(L, 2L)$ :

$$\hat{Q}_2(s) = \int_L^{2L} y_2(x) dx. \quad (31)$$

Нетрудно обнаружить, что  $Q_2(0) = 0$ ,  $Q_2(\infty) = 0$  - диффундирующие частицы при  $t \rightarrow \infty$  уходят с соответствующего участка потенциального профиля в бесконечно глубокую потенциальную яму. Это дает простой рецепт нахождения времени жизни метастабильного состояния, если известно значение среднего времени первого достижения

$$\tau = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1 - s(\hat{Q}_2(s) + \hat{Q}(s, x_0, x_{\text{ГР}})) \right] / s = T(x_0, x_{\text{ГР}}) - \hat{Q}_2(0), \quad (32)$$

где  $\hat{Q}_2(s)$  задано формулой (31).

Для рис. 2г можно найти

$$\hat{Q}(s) = \frac{Bb}{F\gamma^2} \left[ \lambda_2 + \lambda_1 e^{-\delta} - 2be^{-\lambda_1 L} \right].$$

Входящие сюда параметры приведены в формуле (23). Полагая  $s \rightarrow 0$ , получим

$$\hat{Q}_2(0) = 2\theta_L (e^\alpha + \alpha - 1) / \alpha^2.$$

Подставляя это значение, а также (24) в (32), приходим к следующему значению времени жизни метастабильного состояния, представленного на рис. 2г:

$$\tau = 2\theta_L \left[ (2e^\alpha + e^{-\alpha} - \alpha - 3) / \alpha^2 + 2(e^\alpha - 1) / \alpha\alpha_0 \right]. \quad (33)$$

16. Проанализируем полученные результаты для времен жизни метастабильных состояний, представленных на рис. 2г, д, е и соответственно формулами (33), (29), (30). Если потенциальные барьеры достаточно велики,  $e^\alpha \gg \alpha$ , при фиксированной крутизне  $\alpha_0$  левой стенки потенциального минимума, то время жизни метастабильных состояний  $\tau \sim \theta_L e^\alpha / \alpha_0$ , слабо зависит от забарьерного поведения потенциального профиля, поскольку при высоком барьере диффундирующие частицы обратно не возвращаются.

Для низких барьеров ( $\alpha \ll 1$ ) время жизни  $\tau \sim \theta_L [n + m/\alpha_0]$ , где величины  $n$  и  $m$  имеют порядок единицы. Таким образом, и в этом случае конкретная форма забарьерного потенциального профиля влияет слабо. Гораздо большую роль играет крутизна левой стенки потенциального минимума. Если она достаточно велика, то время жизни метастабильного состояния близко к времени диффузионного расплывания. Если же  $\alpha$  и  $e^\alpha$  имеют одинаковый порядок, то время жизни метастабильного

состояния существенно зависит от конкретного вида потенциального профиля.

17. Тем самым, форма потенциального барьера и его относительная высота  $\alpha = U_{\max}/kT$  существенно определяют зависимость временных характеристик от  $\alpha$  и, следовательно, характер влияния температуры броуновских частиц на скорость их диффузии через потенциальные барьеры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hanggi P., Talkner P., Borkovek M. // Rev. Mod. Phys. 1990. V. 62. P. 251.
2. Risken H., Leiber Th. // Phys Rev. A. 1989. V. 40. P. 1582.
3. Fresch H., Privman V., Nicolis C., Nicolis G. // J. Phys. A: Math. Gen. 1990. V. 23. P. 1147.
4. Morch M., Risken H., Vollmer H. // Z. Phys. B. 1979. V. 32. P. 245.
5. Risken H. The Fokker-Plank Equation. - Berlin: Springer-Verlag. 1989.
6. Marchesoni F., Sodano P., Zannetti M. // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. P. 1143.
7. Малахов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. N 5. С. 536.
8. Малахов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. N 6. С. 681.
9. Bernstein M., Brown L. S. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1933.
10. Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А. // ЖЭТФ. 1933. Т. 3. Вып. 3. С. 165.
11. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. - М: Сов. радио, 1961.
12. Kramers H. // Physica. 1940. V. 7. P. 284.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
15 июня 1992 г.

## NONSTATIONARY DIFFUSION ACROSS AN ARBITRARY PIECEWISE-LINEAR POTENTIAL PROFILE - THE EXACT SOLUTION AND TIME CHARACTERISTICS

*N. V. Agudov, A. N. Malakhov*

For an arbitrary piecewise-linear potential profile the method provided for finding the exact expressions for the stationary distribution relaxation time, transition frequency of diffusing particles across potential barriers and life-time of metastable states. This method is valid for any relation between particles, thermal energy and potential barrier height or the potential well depth. A set of different examples is considered.

УДК 621.382.026.64

## МОДЕЛЬ НИЗКОЧАСТОТНОГО ШУМА ДИОДА С БАРЬЕРОМ ШОТТКИ

В. М. Малышев, В. Г. Усыченко

Планарный ДБШ представлен двумя параллельно включенными диодами, описывающими процессы в центральной области и в области утечки. Источниками  $1/F$ -шума являются независимые флуктуации параметров в переходах и сопротивлений баз. Разработанная на этой основе и экспериментально проверенная шумовая модель объясняет разнообразие токовых и температурных зависимостей шума ДБШ, наблюдаемых на практике.

Диоды с барьером Шоттки (ДБШ) демонстрируют разнообразие шумовых характеристик. Например, в зависимости спектральной интенсивности  $1/F$ -шума от тока смещения, описываемой соотношением  $S_1(F) \sim i^\beta$ , при изменении прямого тока  $i$  в диапазоне примерно двух декад у одних диодов может сохраняться фиксированное значение  $\beta$ , обычно лежащее в интервале  $1 \leq \beta \leq 2$  [1-7], у других диодов показатель  $\beta$  является функцией тока и может менять свою величину в пределах  $0 < \beta \leq 2$  [1]. Весьма разнообразны также экспериментальные зависимости, описывающие поведение  $1/F$ -шума при изменении температуры [1, 3, 8]. Разными авторами высказывались предположения, что особенности такого шумового поведения можно объяснить неоднородным распределением источников шума в объеме диода [1, 3, 4, 5, 9]. В настоящей работе на основе этих представлений развивается шумовая модель планарных ДБШ с преимущественно термоэмиссионным механизмом токопереноса. К таковым относится большинство диодов СВЧ диапазона, выпускаемых промышленностью.

1. Вывод основных уравнений. На рис. 1а изображены линии электрического поля в плоскости осевого сечения планарного диода [10, 11]. У края анода, в области так называемой утечки (заштрихованная область на рис. 1а), вблизи плоскости раздела металл - полупроводник сосредоточено повышенное по сравнению с центральной областью электрическое поле (рис. 1б). Оно приводит к снижению и сужению барьера в этой части диода. В результате

плотность тока, протекающего через краевую область, будет больше, чем в центральной области. Изменение формы барьера скажется на взаимодействии носителей тока с ловушками, что отразится на уровне шумов краевого тока [4 - 6]. Концентрация же ловушечных дефектов в краевой области может быть значительно больше, чем в центральной, из-за повышенных механических напряжений [12]. Кроме того, краевая область расположена вблизи защитного слоя  $\text{SiO}_2$  и носители тока, содержащиеся в ней, взаимодействуя с ловушками в оксиде [5], вызовут дополнительные флуктуации тока утечки. Отмеченное различие центральной и краевой областей дает основание для отдельного их учета в эквивалентной схеме ДБШ, представленной на рис. 1в.

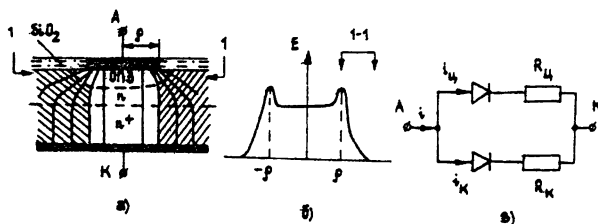


Рис 1.

На схеме  $R_{ц}, R_{к}$  - сопротивления базы центральной и краевой областей, через которые протекают нелинейные токи  $i_{ц}, i_{к}$  соответствующих переходов. Здесь и в дальнейшем индексы "ц", "к" относятся к центральной и краевой областям. Поскольку диапазон изменения прикладываемых к диоду напряжений  $u$  обычно невелик, будем считать в первом приближении, что размеры выделенных областей, а также  $R_{ц}$  и  $R_{к}$ , постоянны. Тогда, используя известную аппроксимацию ВАХ ДБШ [10] при напряжениях  $u > 3kT/q$ , прямой ток диода можно записать следующим образом:

$$i = i_{ц} + i_{к}, \quad (1)$$

$$i_{ц} = I_{ц} \exp[\alpha_{ц}(u - i_{ц}R_{ц})], \quad i_{к} = I_{к} \exp[\alpha_{к}(u - i_{к}R_{к})].$$

Здесь  $I_{ц,к}$  - токи насыщения,  $\alpha_{ц,к} = q/n_{ц,к}kT$ ,  $n_{ц,к}$  - коэффициенты идеальности,  $q$  - заряд электрона,  $T$  - температура. Поскольку в области утечки барьер ниже и уже, то  $\alpha_{к} < \alpha_{ц}$  [10]. ДБШ сантиметрового и среднего миллиметрового диапазонов волн имеют диаметр порядка 10 мкм. При ширине обедненной области порядка 100 Å площадь ее краевой поверхности, к которой примыкает пассивная часть области утечки (рис. 1а), значительно меньше площади центральной части диода, поэтому обычно  $R_{к} \gg R_{ц}$ . Ток центральной области при комнатной температуре обусловлен в основном



термоэмиссией с коэффициентом идеальности  $n_{\text{ц}} \approx 1$  и током насыщения [10]

$$I_{\text{ц}} = S_{\text{ц}} \lambda^* T^2 \exp(-q\varphi_{\text{ц}}/kT). \quad (2)$$

где  $S_{\text{ц}}$ ,  $\varphi_{\text{ц}}$  - площадь перехода и высота барьера,  $\lambda^*$  - эффективная постоянная Ричардсона. В области утечки из-за сильного сужения барьера преобладает туннельная компонента, для тока насыщения которой воспользуемся приближенным выражением [10]

$$I_{\text{к}} \approx S_{\text{к}} A^* T^2 \exp(-q\varphi_{\text{к}}/kT^*). \quad (3)$$

Здесь

$$T^* = (E_{00}/k) \operatorname{cth}(E_{00}/kT) \quad (4)$$

- эффективная температура, через которую в первом приближении можно выразить и коэффициент идеальности  $n_{\text{к}} = T^*/T$  [10];  $E_{00}$  - параметр, зависящий от свойств полупроводника и определяющий вид эмиссии. При  $E_{00} \ll kT$  наблюдается термоэмиссия и  $T^* \rightarrow T$ ,  $n_{\text{к}} \rightarrow 1$ . При  $E_{00} \approx kT$  наблюдается термополевая эмиссия и  $T^* > T$ ,  $n_{\text{к}} > 1$ . При  $E_{00} \gg kT$  имеет место полевая эмиссия.

На рис. 2а в полулогарифмическом масштабе представлен качественный вид ВАХ (1), параметры которых удовлетворяют соотношениям:  $I_{\text{к}} > I_{\text{ц}}$ ,  $R_{\text{к}} \gg R_{\text{ц}}$ ,  $\alpha_{\text{к}} < \alpha_{\text{ц}}$ . Зависимости (1), экспоненциальные при малых токах, переходят в линейные ( $i = u/R$ )<sub>ц,к</sub> при  $(qiR > \ln(i/I))_{\text{ц,к}}$ . Если положить  $I_{\text{к}} < I_{\text{ц}}$ , а соотношения между остальными параметрами оставить прежними, то при любых положительных смещениях  $i_{\text{ц}} > i_{\text{к}}$  и ВАХ диода будет описываться функцией  $i_{\text{ц}}(u)$ .

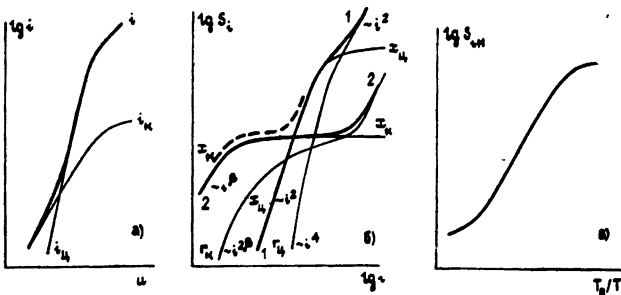


Рис. 2.

Полагаем, что источниками 1/F-шума являются флуктуации  $\delta R(t)$  базовых сопротивлений, а также флуктуации  $\delta x(t)$  некоторых

физических параметров  $x$  в переходе (например, концентрации электронов), которые опосредованно через коэффициенты идеальности и (или) токи насыщения вызывают флуктуации токов

$$\delta i_{\text{ц, к}} = \left( x \frac{\partial i}{\partial x} \frac{\delta x}{x} \right)_{\text{ц, к}} + \left( R \frac{\partial i}{\partial R} \frac{\delta R}{R} \right)_{\text{ц, к}} \quad (5)$$

Полагая, что источники шума переходов и сопротивлений базы статистически независимы, а относительные флуктуации  $\frac{\delta x}{x}$ ,  $\frac{\delta R}{R}$  не зависят от тока, представим спектральную плотность флуктуаций тока диода в режиме с короткозамкнутой нагрузкой [7] в виде

$$S_i(F) = \frac{i_{\text{ц}}^2 C_{\text{ц}}^2(i)}{(1 + \alpha_{\text{ц}} i_{\text{ц}} R_{\text{ц}})^2} S_{x\text{ц}}(F) + \frac{i_{\text{ц}}^4 \alpha_{\text{ц}}^2 R_{\text{ц}}^2}{(1 + \alpha_{\text{ц}} i_{\text{ц}} R_{\text{ц}})^2} S_{r\text{ц}}(F) + \quad (6)$$

$$+ \frac{i_{\text{к}}^2 C_{\text{к}}(i)}{(1 + \alpha_{\text{к}} i_{\text{к}} R_{\text{к}})^2} S_{x\text{к}}(F) + \frac{i_{\text{к}}^4 \alpha_{\text{к}}^2 R_{\text{к}}^2}{(1 + \alpha_{\text{к}} i_{\text{к}} R_{\text{к}})^2} S_{r\text{к}}(F)$$

Здесь  $S_r, S_x$  - спектральные интенсивности относительных флуктуаций сопротивлений базы и параметров  $x$  в переходах,  $C_{\text{ц, к}}$  - коэффициенты модуляционного воздействия барьерных источников шума на ток.

2. Зависимость шумов от тока. Приступая к анализу выражения (6), считаем, что коэффициенты  $C_{\text{ц, к}}$  слабо зависят от тока и в первом приближении их можно считать постоянными. (Например, это условие выполняется при механизме  $1/F$ -шума, описанном в [13].) Как следует из (6), зависимости шума диода от парциальных токов однотипны. При увеличении  $i_{\text{ц, к}}$  вклад барьерных источников, пропорциональный  $i_{\text{ц, к}}^2$ , при  $(i\alpha R)_{\text{ц, к}} > 1$  переходит в насыщение. Вклад флуктуаций сопротивлений базы сначала  $\sim i_{\text{ц, к}}^4$ , а при  $(i\alpha R > 1)_{\text{ц, к}}$  становится пропорционален  $i_{\text{ц, к}}^2$ . На практике важнее зависимость шума от полного тока  $i = i_{\text{ц}} + i_{\text{к}}$ . Для перехода к ней достаточно, разрешив систему (1), найти функции  $i_{\text{ц}}(i)$ ,  $i_{\text{к}}(i)$  и подставить их в (6). Однако в общем случае в явном виде сделать это невозможно.

Дальнейший анализ ограничим приближениями  $i_{\text{ц}} \gg i_{\text{к}}$ ,  $i = i_{\text{ц}}$ , которые обычно выполняются в области токов, в которой изучаются шумы [1 - 8]. На рис. 2б кривые 1, 2 качественно представляют шумы центральной и краевой областей как функции полного тока. При построении кривых использовались соотношения:  $S_{x\text{ц}} \approx S_{r\text{ц}} \ll S_{x\text{к}} \approx$

$\approx S_{rк}, C_{ц,к} > 1$ . Выражение  $S_1(i)$  в явном виде удается получить для экспоненциальных участков ВАХ, обычно используемых на практике. Определив из системы (1)  $i_{ц} = i$ ,  $i_{к}^2 = (I_{к}^2/I_{ц}^{\beta})i^{\beta}$  и подставив эти функции в (6), при малых токах ( $i a_{ц} R_{ц} < 1$ ,  $i_{к} a_{к} R_{к} < 1$ ) получим

$$S_1(F) = i^2 C_{ц}^2 S_{цц} + i^4 a_{ц}^2 R_{ц}^2 S_{rц} + i^{\beta} \frac{I_{к}^2}{I_{ц}^{\beta}} C_{к}^2 S_{кк} + \\ + i^{2\beta} \frac{I_{к}^4}{I_{ц}^{2\beta}} a_{к}^2 R_{к}^2 S_{rк}(F). \quad (7)$$

Здесь  $\beta = 2a_{к}/a_{ц} < 2$ , поскольку  $a_{к} < a_{ц}$ . Как следует из (7) и видно из рис. 2б, в зависимости от соотношения параметров, с помощью которых описываются ВАХ (1), и интенсивностей источников шума функция  $S_1(i)$  может быть пропорциональна  $i^{\beta}$ ,  $i^2$ ,  $i^{2\beta}$ ,  $i^4$ . Возможны и более сложные зависимости, возникающие при суммировании близких по уровню шумов центральной и краевой областей. Одна из них изображена пунктиром на рис. 2б.

3. Зависимость шума от температуры. Температурный анализ полного выражения (6) сложен. Поэтому ограничимся формулой (7), полагая превалирующим вклад шумов краевого перехода, который приводит к часто наблюдаемым в эксперименте [1-7] зависимостям  $S_1 \sim i^{\beta}$ .

Предполагая источник шума и коэффициент  $C_{к}$  независимыми от температуры (например,  $1/F$ -шум ловушечного происхождения [13]), рассмотрим поведение третьего слагаемого в (7) при  $i = \text{const}$ . Перейдем к безразмерной нормированной спектральной плотности

$$S_{1н} = \frac{S_1(F)}{(S_{кA} T_0^2)^2 C_{к}^2 S_{кк}} = \left( \frac{i}{S_{цA} T_0} \right)^{\beta} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{2\beta-4}, \quad (8)$$

где  $T_0$  - исходная температура, с которой начинается охлаждение. Допустим, что при  $T = T_0$   $E_{00} \approx kT_0$  и в области утечки наблюдается термополевая эмиссия. Тогда при снижении температуры, как следует из (2), (4), показатель  $\beta = 2(n_{к}/n_{ц}) \approx 2(T/T_0) \text{th}(T_0/T)$  уменьшается примерно пропорционально  $T/T_0$ . Выражая в (8) ток  $i$  с помощью формул (1), (3), логарифмируя и полагая в силу сказанного  $\beta \approx 2T/T_0$ , получим

$$\ln S_{1н} = \frac{2q}{kT_0} \left( \frac{u_0 - \varphi_{ц}}{T_0/T} + \varphi_{ц} - \varphi_{к} \right) + 4 \left( \frac{1}{T_0/T} - 1 \right) \ln \frac{T_0}{T}, \quad (9)$$

где  $u_0 < \varphi_{\text{ц}}$  - напряжение, обеспечивающее ток  $i_0$  при  $T = T_0$ . Функция  $\ln S_{\text{ин}}$  при увеличении  $T_0/T$  сначала растет благодаря первому слагаемому, достигает экстремума при значении  $T_{\text{м}}$ , которое находится из уравнения  $[2 - (q/kT_0)(u_0 - \varphi_{\text{ц}}) - \ln(T_0/T_{\text{м}}) - 2(T_0/T_{\text{м}})] = 0$  (например, при  $T_0 = 300^\circ\text{K}$ ,  $u_0 - \varphi_{\text{ц}} = 0,2$  В,  $T_0/T_{\text{м}} = 2,4$ ), а затем снижается под влиянием второго слагаемого. Но экстремум может быть недостижим. Дело в том, что по мере снижения температуры механизм термополевой эмиссии может стать преобладающим и в центральной области перехода. Это приведет к значению  $\beta \approx 2$  и изменит характер зависимости. Она будет описываться не выражением (9), а функцией  $\ln S_{\text{ин}} = (2q/kT_0)[u_0 - \varphi_{\text{к}} + (T_0/T)(\varphi_{\text{ц}} - \varphi_{\text{к}})]$ , которая будет расти или уменьшаться  $\sim T/T_0$  в зависимости от знака  $(\varphi_{\text{ц}} - \varphi_{\text{к}})$ . Эта же функция станет определяющей и при достаточно больших температурах, когда в обеих частях перехода будут преобладающими термоэмиссионные токи. Из сказанного следует, что в широком диапазоне температур при определяющем вкладе шумов краевого перехода зависимость  $\ln S_{\text{ин}}(T_0/T)$  будет иметь вид, качественно представленный на рис. 2в и обычно наблюдающийся в эксперименте [1, 8].

Формула (7) позволяет построить температурные зависимости флуктуаций, порождаемых и другими источниками шума. Например, полагая интенсивность  $S_{\text{зд}}$  неизменной, легко видеть, что ее вклад не зависит от  $T$ . Вклад флуктуаций сопротивления центральной базы при уменьшении  $T$  снижается пропорционально  $R_{\text{ц}}^2(T) \sim \mu^{-2} \sim T^{2p}$ , где  $\mu$  - подвижность носителей. При низких температурах  $\mu \sim T^{-p}$ , где  $p \approx 3$  [14] вплоть до  $T \approx 80^\circ\text{K}$ . Логарифм нормированного на величину  $(S_{\text{к}} A^* T_0^2)^4 \alpha_{\text{к}}^2(T_0) R_{\text{к}}^2(T_0) S_{\text{рк}}$  последнего слагаемого в (7) отражает температурную зависимость флуктуаций сопротивления базы утечки в виде  $2[-(1+p) \ln(T_0/T) + \ln S_{\text{ин}}]$ , где  $S_{\text{ин}}$  определяется формулой (9). Отсюда следует, что характер зависимости примерно такой же, как у шумов краевого перехода, изображенных на рис. 2в.

4. Постановка эксперимента. Основу модели составляет неоднородное распределение независимых источников шума в ДБШ. Проверка этого положения и входила в задачи эксперимента, в котором использовалась импульсная методика [15].

Перепишем формулу (6) в обобщенном виде

$$S_1(i, F) = \sum A_n^2(i) S_{2n}(F). \quad (10)$$

Здесь  $S_{2n}(F)$  - спектр  $n$ -го источника  $1/F$ -шума,  $A_n^2(i)$  - весовой коэффициент, являющийся функцией тока (и температуры). Поскольку

1/F-шум порождается медленными случайными процессами, динамика которых не зависит от того, протекает через прибор ток или нет (экспериментально это положение проверено, например, в [16]), то, как показано в работе [17] и в Приложении, практически совпадающие спектры 1/F-шума можно получить как на постоянном токе, так и в импульсном режиме при частоте следования импульсов  $f \gg F$ . Если сформировать импульсную последовательность таким образом, что все нечетные импульсы тока имеют одну амплитуду, а все четные другую, то, направив коммутатором нечетные импульсы по одному измерительному каналу, а четные по другому, можно одновременно измерять спектры (10) флуктуаций при двух различных токах:  $S_1(i_1, F)$ ,  $S_1(i_2, F)$ . Можно измерить и коэффициент взаимной корреляции между флуктуациями этих токов

$$R(i_1, i_2, F) = \frac{S_1(i_1, i_2, F)}{\sqrt{S_1(i_1, F) S_1(i_2, F)}} = \quad (11)$$

$$= \frac{\sum_n A_n(i_1) A_n(i_2) S_{\Sigma n}(F)}{\sqrt{\sum_n A_n^2(i_1) S_{\Sigma n}(F) \sum_n A_n^2(i_2) S_{\Sigma n}(F)}}$$

Здесь  $S_1(i_1, i_2, F)$  - взаимный энергетический спектр флуктуаций токов  $i_1$  и  $i_2$ . Из (11) следует, что коэффициент корреляции обладает следующими свойствами: 1)  $R(i_1, i_2, F) = R(i_2, i_1, F)$ , 2)  $R(i_1, i_1, F) = R(i_2, i_2, F) = 1$ . 3) Если источник шума один, то  $R(i_1, i_2, F) = 1$  при любых  $i_1, i_2$ . 4) Если источников шума несколько, а функции  $A_n(i)$  пропорциональны одна другой, т.е.  $A_n(i) = m_n A_1(i)$ , где  $m_n$  - коэффициент пропорциональности, то  $R(i_1, i_2) = 1$  при любых  $i_1, i_2$ . Фактически это свидетельствует о неразличимости источников, и поэтому можно считать, что физическая система с такими свойствами обладает одним источником шума. 5) Если источников шума несколько, а функции  $A_n(i)$  меняются от  $i$  различным образом, то  $R(i_1, i_2, F)$  будет спадать с ростом  $\Delta i = |i_1 - i_2|$ , переходя в плато в области, где преимущественный вклад дает другой источник шума. Качественный вид такой зависимости, построенной при изменении  $i_2$  относительно  $i_1 = \max(i) = \text{const}$ , изображен на рис. 3а. Таким образом, измерив  $R(i_1, i_2, F)$ , можно выделить области превалирующего действия различных источников шума и по измеренным в них спектрам  $S_1(i, F)$  оценить интенсивности источников шума

$$S_{\Sigma n}(F) \approx S_1(i, F) / A_n^2(i). \quad (12)$$

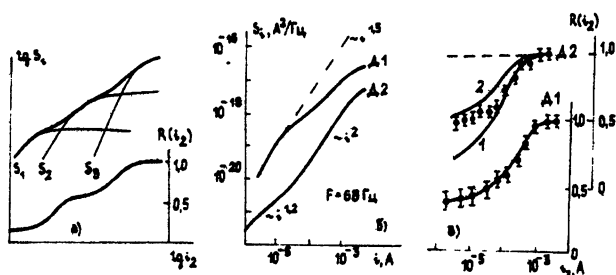


Рис. 3.

Полагая эти интенсивности неизменными, рассчитав коэффициенты  $A_n(i)$  для всей области токов, можно построить зависимости (10), (11), необходимые для сравнения с экспериментом. Обоснование методики импульсных измерений функции  $S(i_1, i_2, F)$ , необходимой для расчета коэффициента корреляции, приведено в Приложении. Созданная нами экспериментальная установка могла работать как в непрерывном режиме с погрешностью измерения шумовых спектров  $\pm 1$  дБ, так и в импульсном режиме, выполняя рассмотренные выше операции.

5. Результаты измерений и их обсуждение. Обследовались ДБШ типа АА-121-А (на рисунках Д2) и точечные диоды Д405 (на рисунках Д1). По методике, изложенной в [7], измерялись ВАХ и изображенные на рис. 3б зависимости токовых шумов  $S_1(i)$  во фликерной области спектров  $S_1(F)$ . Зависимости коэффициента корреляции  $R(i_1, i_2, F)$  от  $i_2$  при  $i_1 = \text{const} = \max(i_2)$ , рассчитанные при подстановке в (11) измеренных спектров  $S_1(i_1, i_2, F)$ ,  $S_1(i_1, F)$ ,  $S_1(i_2, F)$ , изображены на рис. 3в точками. Указан также интервал ошибки  $R(i_1, i_2, F)$ , рассчитанный на основании формул (11), (12) при доверительной вероятности  $P = 68\%$ . Погрешность измерения энергетических спектров не превышала  $\pm 1$  дБ.

В табл. 1 представлены параметры аппроксимации измеренных ВАХ функциями (1). ВАХ диода АА-121-А во всем диапазоне измеренных токов хорошо аппроксимируется одной экспонентой  $i = i_{ц}$  (1) и выделить параметры краевой области не удастся. В табл. 1 им соответствует прочерк.

Таблица 1

Вид диода	$I_{ц}, A$	$\alpha_{ц}, B^{-1}$	$R_{ц}, \Omega M$	$I_{к}, A$	$\alpha_{к}, B^{-1}$	$R_{к}, \Omega M$
Д405 (Д1)	$3,6 \cdot 10^{-6}$	30	22	$7,1 \cdot 10^{-6}$	22	2500
АА-121-А (Д2)	$1,4 \cdot 10^{-13}$	30	10,3	-	-	-

Единообразная, вида  $1/F$ , форма спектров не несет информации о количестве источников шума. Однако наличие двух областей насыщения на зависимостях коэффициента корреляции  $R(i_1, i_2, F)$  от  $i_2$  (рис. 3в) показывает, что у каждого диода в диапазоне обследованных токов имеется по два источника шума. Сравнив экспериментальные зависимости  $S_1(i)$  (рис. 3б) с теоретическими (рис. 2б) по наклону кривых  $\beta < 2$ , можно предсказать те источники, которые обеспечивают им качественное сходство. Однако мы воспользуемся формальным доказательством, процедуру которого опишем на примере диода Д1. Выбираем значение тока  $i_B$ , принадлежащее верхнему плато зависимости  $R(i_1, i_2, F)$  на рис. 3 в. Используя ВАХ, формулы (1) и данные таблицы, находим значения всех коэффициентов  $A_n(i_B)$ ,

$$\text{входящих в (6): } A_{1,2} = \left( \frac{i_B}{1 + i_B \alpha R} \right)_{ц,к}, \quad A_{3,4} = \left( \frac{i_B^2 \alpha R}{1 + i_B \alpha R} \right)_{ц,к}.$$

Подставляя в (12)  $S_1$  и  $A_n$ , находим интенсивности всех возможных источников шума:  $(C^2 S_x)_{ц,к}$ ,  $(S_r)_{ц,к}$ . Аналогичную процедуру выполним для тока  $i_H$ , принадлежащего нижнему плато. Затем, полагая найденные интенсивности шума неизменными, для всех возможных пар источников из верхнего и нижнего плато рассчитаем по формуле (11) зависимости  $R(i_1, i_2, F)$  и сравним их с экспериментальной. Оказалось, что для диода Д1 имеется только одна пара, дающая хорошее соответствие, - это флуктуации параметров центрального и краевого переходов. Первые преобладают в области больших токов (верхнее плато), вторые - в области малых (нижнее плато). Расчетная кривая приведена на рис. 3в сплошной линией.

Параметры области утечки диода Д2 неизвестны (прочерки в таблице), поэтому для Д2 подобный расчет  $R(i_1, i_2, F)$  можно сделать только для одной пары источников, для которых можно рассчитать коэффициенты  $A_n$ . Эти источники локализованы в переходе и базе центрального диода. Как видно, расчетная (штриховая) кривая на рис. 3 в расходится с результатами измерений. Очевидна необходимость привлечения источников, локализующихся в области утечки. Для этого обратимся к рис. 3 б, из которого видно, что при токах  $i < 10^{-4}$  А зависимость  $S_1 \sim i_{1,2}$ , а при токах  $i > 10^{-4}$  А  $S_1 \sim i^2$  с некоторым насыщением в области значений  $i \geq 10^{-3}$  А. В соответствии с (6) (см. также пунктирную кривую на рис. 2 б) такую зависимость создают флуктуации параметров переходов центральной и краевой областей. Причем первые действуют преимущественно в области больших токов, вторые - в области токов, где  $S_1 \sim i_{1,2}$ . Как следует из (6),

зависимость  $S_1 - i_{1,2}$  должна смениться насыщением при  $i_K > (a_K R_K)^{-1}$ . Но поскольку параметры  $I_K$ ,  $a_K$ ,  $R_K$  неизвестны, то определить область перехода к насыщению невозможно. Поэтому рассмотрим два предельных случая: 1) насыщения нет и во всем диапазоне исследуемых токов вклад источника  $S_{xK} \sim i_{1,2}$ ; 2) в области токов  $i \approx 10^{-4}$  А вклад источника  $S_{xK}$  постоянен. Эти предположения позволяют получить простые аппроксимации произведений  $A_n^2 S_{\text{шн}}$  и рассчитать зависимости  $R(i_2, F)$ , приведенные на рис. 3 в сплошными линиями. Как видно, второй случай лучше согласуется с экспериментом. Этот пример показывает, что шумы краевой области проявляются даже в диодах с пренебрежимо малыми токами утечки  $i_K \ll i_{ц} \approx i$ . Как следует из (6), для этого необходимо выполнение условия

$$S_{xK} \approx \left( \frac{i_{ц} C_{ц}}{i_K C_K} \right)^2, \text{ которое свидетельствует о том, что в области}$$

краевого перехода интенсивность источников шума значительно больше, чем в центре.

Следует добавить, что в диапазоне обследованных токов влияние флуктуаций сопротивлений базы диодов оказалось пренебрежимо мало. Пробные измерения показали, что они начинают проявляться при токе  $i \approx 5$  мА.

Таким образом, для описания НЧ шумовых характеристик планарного ДБШ в широком диапазоне токов и температур необходимы

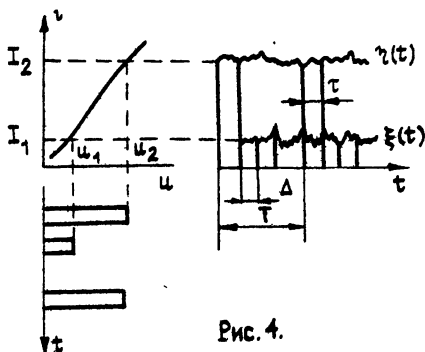


Рис. 4.

четыре статистически независимых источника шума, локализованных в переходах и сопротивлениях баз центральной и краевой областей. Ток диода в первом приближении не влияет на источники шума. Но от тока и температуры меняется величина сопротивлений различных областей диода, ведущая к изменению глубины внутренних обратных связей по шумам и перераспределению вклада

различных источников шума во флуктуации тока. При этом разброс обычно неконтролируемых параметров области утечки, роль которой в шумообразовании велика, вызывает разнообразие шумовых характеристик, наблюдаемое на практике. Например, при  $a_K/a_{ц} = 0,5$  получается зависимость  $S_1(i) \sim i$ , объяснение которой в рамках других шумовых моделей [4, 13] встречает серьезные препятствия.



ПРИЛОЖЕНИЕ

Подадим на диод смещение в виде периодической последовательности прямоугольных импульсов напряжения  $u_1$  и  $u_2$  (см. рис. 4). Источники шума, находящиеся внутри диода, будут модулировать амплитуды импульсов тока  $I_1$  и  $I_2$ . Представив источники шума стационарными случайными модулирующими функциями  $\xi$  и  $\eta$ , получим два случайных импульсных процесса

$$z(t) = \xi(t) I_1(u_1) f(t - kT),$$

$$y(t) = \eta(t) I_2(u_2) f(t - \Delta - kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$  - функция, описывающая форму прямоугольных импульсов. Здесь  $T$  - период,  $\tau$  - длительность импульсов,  $\Delta$  - задержка между ними. Используя определение взаимного энергетического спектра  $\psi_{z,y}(\Omega)$  (см. формулу (4.90) в [18]), совершив фурье-преобразование усеченных процессов  $z, y$ , проведя операции усреднения, получим

$$\begin{aligned} \psi_{z,y}(\Omega) = & I_{10} I_{20} S_{\xi\eta}(\Omega) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} I_{1n} I_{2n} [S_{\xi\eta}(\Omega - n\omega_1) \exp(jn\omega_1\Delta) + \\ & + S_{\xi\eta}(\Omega + n\omega_1) \exp(-jn\omega_1\Delta)]. \end{aligned} \quad (\text{П. 1})$$

Здесь  $\omega_1 = 2\pi/T$ ,  $S_{\xi\eta}(\Omega)$  - взаимный энергетический спектр модулирующих функций,  $I_{1n}, I_{2n}$  - фурье-амплитуды импульсов тока.

Как видно, если  $S_{\xi\eta}(\Omega)$  имеет ограниченный спектр или спектр, нарастающий при  $\Omega \rightarrow 0$  (например, вида  $1/\Omega$ ), то  $\lim_{\Omega \rightarrow 0} \psi_{z,y} = I_{10} I_{20} S_{\xi\eta}$ .

Таким образом, при достаточно высокой частоте следования импульсов можно по измеренному спектру  $\psi_{z,y}$  с определенной точностью восстановить спектр  $S_{\xi\eta}(\Omega) = S(i_1, i_2, \Omega)$ . Относительная ошибка

$$\delta S = \left| \frac{S(i_1, i_2) - \psi_{z,y}}{S(i_1, i_2)} \right| \quad \text{оценивается по максимуму, исходя из}$$

неравенств Коши - Буняковского

$$S(i_1, i_2) \leq \sqrt{S(i_1) S(i_2)}, \quad \psi(i_1, i_2) \leq \sqrt{\psi(i_1) \psi(i_2)}, \quad (\text{П. 2})$$

где  $s(i)$ ,  $\psi(i)$  - спектры, измеренные при токе  $i_1$  или  $i_2$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Божков В. Г., Усольцев Л. А., Хан А. В. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. N 1. С. 180.
2. Sikula J., Vasina P., Kontavy B., Chobola Z. // Sixth Int. Conf. on Noise in Physical Systems. 1981. Apr 6-10. P. 2061.
3. Hsu S. T. // IEEE. 1970. V. ED-17. N 7. P. 496.
4. Kleinpening T. G. M. // Solid-State Electron. 1979. V. 22. N 2. P. 121.
5. Wall L. // Solid-State Electron. 1976. V. 19. N 4. P. 289.
6. Luo M.-Y., Bosman G., Van der Ziel A., Hench L. L. // IEEE. 1988. V. ED-35. N 8. P. 1351.
7. Малышев В. М., Усыченко В. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 5. С. 632.
8. Herbert H., Werner G. et al. // Appl. Phys. Lett. 1990. V. 56. N 12. P. 1113.
9. Якимов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. N 1. С. 120.
10. Стриха В. И., Бузанева Е. В. Физические основы надежности контактов металл-полупроводник в интегральной электронике. - М.: Радио и связь, 1987. С. 256.
11. Тугов Н. М., Глебов Б. А., Чарыков Н. Л. Полупроводниковые приборы. - М.: Энергоатомиздат, 1990. С. 576.
12. Sherrill G. K., Matauch R. J., Grove T. W. // IEEE. 1986. V. MTT-34. N 3. P. 342.
13. Hsu S. T. // IEEE. 1971. V. ED-18. N 10. P. 882.
14. Бонч-Бруевич В. А., Калашников С. Г. Физика полупроводников. - М.: Наука, 1990. С. 688.
15. Емельянов А. Ф., Малышев В. М., Усыченко В. Г. // V Всесоюзная конференция "Флуктуационные явления в физических системах". 1988. С. 207.
16. Паленский В. П., Леонтьев Г. Е., Миколайтис Г. С. // Радиотехника и электроника. 1976. N 11. С. 2433.
17. Емельянов А. Ф., Усыченко В. Г. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1977. Вып. 10. С. 33.
18. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Сов. радио, 1974. Т. 1. С. 552.

УДК 537.874.6

РАСЧЕТ СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ  
И СЛУЧАЙНЫХ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ*Ю. И. Крутинь, Ю. К. Суренко, В. П. Шестопапов*

Работа посвящена решению некоторых проблем математического моделирования и изучения на основе данных вычислительного эксперимента физики процессов рассеяния волн произвольными и случайными поверхностями.

Последние достижения в электродинамической теории решеток подтвердили возможность эффективного пространственного и поляризационного частотного-селективного преобразования сигналов периодическими структурами. На часть из обнаруженных эффектов и явлений уже ориентируется научное приборостроение, но большинство результатов остается достоянием теории. Одна из причин в том, что основные выводы обобщающих работ [1, 2] базируются на анализе канонических, идеализированных ситуаций: бесконечная одномерно-периодическая решетка с ограниченным числом параметров в поле плоской волны. В рамках таких моделей нельзя было найти ответы на важные для практики вопросы о влиянии конечности размеров пятна поля возбуждения и структуры, случайных отклонений в значениях параметров и т. д., отсутствовала возможность постановки и решения полнопараметрических обратных задач - задач диагностики, синтеза и оптимизации. Ограниченность в выборе конфигурации структур, поддающихся строгому анализу, не позволяла в полной мере реализовать и естественную связь между периодическими и произвольными (случайными) границами раздела сред для получения достоверной информации о рассеивающих свойствах последних. В то же время классическая теория рассеяния волн произвольными (случайными) поверхностями, оперирующая в основном аналитическими представлениями, практически исчерпала свои возможности, предложив духмасштабную модель, широко эксплуатируемую сегодня в самых различных областях науки и техники [3, 4]. Желание напрямую связать характеристики рассеивателя и формируемого им поля всегда приводит к

введению малого или большого параметра, к погрешностям, реальный вклад которых в истинную картину происходящего редко удается оценить корректно. Модифицированные схемы, демонстрирующие принципиальную возможность учета многократных переотражений, затенений, неоднозначности функции высот, практически можно реализовать далеко не всегда. Особо следует отметить резонансный диапазон (характерные размеры объектов соизмеримы с длиной волны) - здесь нет еще ни одного достоверного теоретического результата, хотя некоторые численные исследования проводились [5]. С другой стороны, основные задачи, решение которых должна обеспечивать теория рассеяния волн произвольными (случайными) поверхностями (дистанционное зондирование, диагностика и т.п.), оптимальное решение могут получить именно в этом диапазоне с использованием в качестве опорных различных ярких аномальных и резонансных режимов рассеяния. Ряд тонких эффектов (таких, например, как эффект усиления обратного рассеяния), возникающих при рассеянии волн произвольными (случайными) поверхностями, может быть достаточно подробно изучен только на основе строгих моделей, дающих точные значения как энергетических, так и фазовых характеристик процессов.

В данной работе мы бы хотели указать на те возможности, которые открываются в решении обозначенных выше проблем, если в качестве базовых элементов использовать электродинамические модели произвольных (по конфигурации и масштабу неоднородностей) периодических границ раздела сред. Конечно, говорить об адекватности предлагаемой математической модели тому или иному физическому процессу можно только после сопоставления соответствующих теоретических и экспериментальных статистических характеристик, например, по критерию из [6].

## 1. Сечение рассеяния единичной площадки произвольной поверхности

1. Напомним (см. [1, 2]), что вторичное поле, сложившееся в результате дифракции плоской  $E$ -поляризованной волны ( $E_y = E_z = H_x = 0$ ) единичной амплитуды  $\exp[i(\Phi_0 y - \Gamma_0 z)]$  на произвольной отражательной решетке (см. рис. 1), представляется в виде бесконечной суммы однородных и неоднородных плоских волн (пространственных гармоник или гармоник дифракционного спектра)

$$U(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp[i(\Phi_n y + \Gamma_n z)], \quad z \geq 0, \quad |y| \leq \pi, \quad (1)$$

комплексные амплитуды которых определяются в результате решения соответствующей краевой задачи и являются сложными функциями

геометрических параметров структуры и параметров первичной волны. Здесь  $U = E_x$ ;  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  - векторы напряженности поля;  $\Phi_n = n + \phi$ ,  $\phi = \alpha \sin \varphi$ ;  $\alpha = \omega(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$  - частотный параметр;  $\varphi$  - угол прихода первичной волны;  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  - материалые параметры среды, содержащей структуру;  $\Gamma_n = (\alpha^2 - \Phi_n^2)^{1/2}$ ,  $\text{Re } \Gamma_n \geq 0$ ,  $\text{Im } \Gamma_n \geq 0$ ; зависимость от времени определяется множителем  $\exp(-i\omega t)$ ,  $\omega$  - круговая частота.

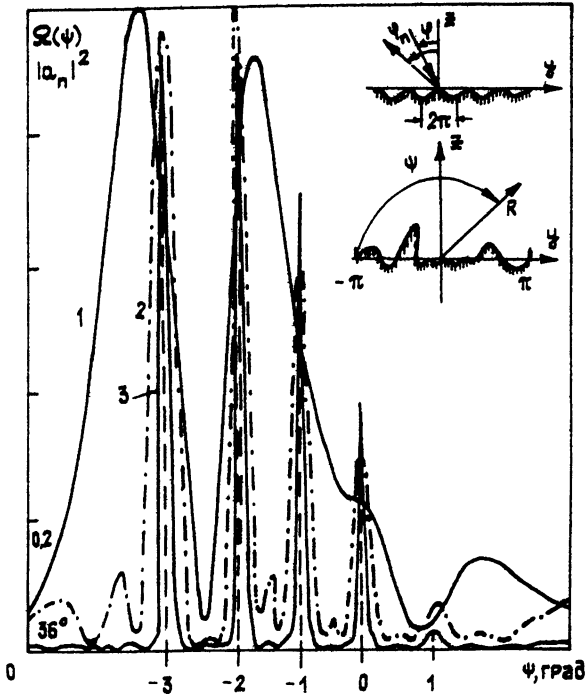


Рис. 1.

Только после построения эффективного алгоритма вычисления амплитуд  $\{a_n\}_n$ , задающих, в частности, долю энергии  $W_n^\alpha = |a_n|^2 \text{Re } \Gamma_n / \Gamma_0$ , переизлучаемую в направлении  $\varphi_n = -\arcsin(n\alpha^{-1} + \sin \varphi)$ , можно анализировать физические особенности рассеяния плоских волн периодическими структурами. Отметим в связи с этим результативность метода аналитической регуляризации, которым решена ключевая задача - задача о дифракции плоской  $E$ -поляризованной волны на отрагательной идеально проводящей решетке с произвольным гладким профилем штриха [2, 7]. Он базируется на оптимальной процедуре полуобращения интегрального уравнения первого рода, что позволяет перейти к эквивалентному интегральному уравнению второго рода с

максимально гладким ядром. Такой подход вместе с рядом эффективных численных процедур (построения оптимальной параметризации профиля решетки; целенаправленного повышения гладкости функций, фурье-амплитуды которых необходимо определять численно; аналитического суммирования медленно сходящихся составляющих бесконечных рядов) приводит к алгоритму, эксплуатационные характеристики которого по точности, быстрдействию и диапазону изменения параметров гораздо выше известных.

2. Рассмотрим падение в направлении, определяемом углом  $\varphi$ , плоской  $E$ -поляризованной волны  $\exp[i\alpha(y \sin \varphi - z \cos \varphi)]$  на участок произвольной идеально отражающей поверхности  $z = f(y)$ ,  $|y| \leq \pi$  (рис. 1). Если через  $E_x(\varphi, \psi, R)$  обозначить поле рассеянной в направлении  $\psi$  волны на достаточно большом расстоянии  $R$ , то сечение рассеяния единичной площадки неровной поверхности определяется выражением [4]

$$\Omega(\varphi, \psi) = |E_x(\varphi, \psi, R)|^2 R / 2\pi, \quad 0 < \psi < 180^\circ.$$

Рассеянное площадкой поле с прогнозируемой погрешностью при  $0 < z - h < \delta \ll 1$ ,  $h = \max_y f(y)$ ,  $|y| \leq \pi$  всегда можно представить в виде (1). Поэтому процедура удовлетворения стандартным для электродинамических задач граничным условиям сводит задачу определения функции  $E_x(\varphi, \psi, R)$  к решению задачи дифракции плоских волн на решетке, структура периода которой определяется геометрией рассматриваемого участка произвольной поверхности. Опуская вполне понятные детали, представим  $\Omega(\varphi, \psi)$  в виде

$$\Omega(\varphi, \psi) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(y) \mu^*(\tau) \times \quad (2)$$

$$\times \exp[i\alpha\{(y-\tau)\cos\psi - (z(y)-z(\tau))\sin\psi\}] dy d\tau,$$

где  $\mu(y)$  - токи, наводимые на поверхности периодической структуры, помещенной в поле плоской волны [2, 7]. Они связаны с амплитудами дифракционного спектра соотношением

$$a_n = -\frac{i}{2\pi\Gamma_n} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(y) \exp[i\alpha\{y \sin \varphi_n - z(y) \cos \varphi_n\}] dy; \quad n: \operatorname{Re} \Gamma_n \geq 0, \quad (3)$$

при этом

$$E_x(\varphi, \psi, R) = \quad (4)$$

$$= \cos\psi \left( \frac{2\pi R}{R} \right)^{1/2} \exp\left\{i\left[\alpha R + \frac{\pi}{4}\right]\right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\varphi_n + \alpha \cos\psi)\pi}{\varphi_n + \alpha \cos\psi}, \quad R \rightarrow \infty.$$

Строго говоря, (2), (4) не дают точного решения задачи, так как не учитывают вторичные эффекты, связанные с перерасеянием полей, формируемых на соседних освещенных площадках, с возможностью возбуждения приповерхностных волн, распространяющихся без затухания в направлениях  $|y| \rightarrow \infty$ . На практике вкладом этих эффектов обычно пренебрегают [4], что, очевидно, оправдано, когда освещенная часть поверхности по размерам значительно больше длины волны возбуждения ( $\alpha = 2\pi/\lambda$  - велико), а вся поверхность в целом имеет достаточно нерегулярный характер.

3. Представления (2), (4) можно также рассматривать как дифракционные характеристики поверхности в поле плоской волны с ограниченным фронтом. При этом характерный размер  $|y| \leq \pi$  определяет пятно поля, возбуждающего структуру. При всей искусственности такого построения оно имеет реальные аналоги в квазиоптике, основные теоретические результаты которой получаются при работе с парциальными составляющими пучков - плоскими волнами. Воспользуемся равенством (2) для того, чтобы рассмотреть актуальный для электродинамической теории решеток и многих прикладных дисциплин вопрос о том, насколько верно описывает реальный режим работы периодической структуры теория, рассматривающая ее как бесконечный в направлениях  $|y| \rightarrow \infty$  объект в поле плоской волны с неограниченным по  $y$  фронтом.

Пусть пятно поля плоской волны, приходящей на решетку, освещает часть ее, размером  $2\pi$  и содержащую  $N$  полных периодов. Геометрия решеток  $z(y) = A_N \sin Ny$ ,  $A_N = \pi/\alpha_N$ , частотный параметр  $\alpha_N = N/(2 \sin 10^\circ)$  подобраны таким образом, чтобы относительные (к длине волны) характерные размеры структур не зависели от  $N$ . Результаты расчета  $\Omega(\psi)/\max \Omega(\psi)$  представлены на рис. 1 (1 -  $N = 1$ ; 2 -  $N = 3$ ; 3 -  $N = 11$ ). Штрихами дана лучевая диаграмма  $|\alpha_n|^2/\max |\alpha_1|^2$ ;  $i, n = 0, \pm 1, -2, -3$  для распространяющихся гармоник дифракционного спектра той же структуры в поле плоской волны (идеальный случай,  $\psi_n = 90^\circ - \varphi_n$ ). Когда освещается только один период, в диаграмме невозможно выделить влияние распространяющихся

гармоник дифракционного спектра, но уже при  $N = 3$  основные всплески  $\Omega(\psi)$  как по пространственной ориентации, так и по энергетике (см. (3)) могут быть сопоставлены с аналогичными показателями, снятыми в идеальной ситуации. Вклад "незапланированных" лепестков и степень размытости лучей все еще велики, но тенденция к их уменьшению с ростом  $N$  является стабильной. Сечение рассеяния  $\Omega(\psi)$  при  $N = 101$  (не приведено на рисунке) практически повторяет лучевую диаграмму. Эти результаты подтверждают априорные предположения из [1] о том, что в резонансном диапазоне (период структур сравним с длиной волны) увеличение числа периодов, захватываемых пятном поля возбуждения, приводит к сближению (качественному и с учетом (3) - количественному) лучевых диаграмм и диаграмм рассеяния.

## 2. Случайные поверхности

1. Произвольная поверхность, сечение рассеяния единичной площадки которой рассчитывается в течение 10 - 20 с на ЭВМ ЕС-1061, может быть рассмотрена как одна из реализаций ансамбля чисто случайных однородных поверхностей, имеющих одну и ту же функцию корреляции. Таким образом, точные сведения о характере рассеянного поля (как для отдельных реализаций, так и статистические) можно получить без существенных затрат машинных ресурсов и, что особенно важно, без существенных ограничений на область изменения параметров решаемой задачи. Основная проблема здесь - алгоритмизация задания случайной поверхности. Для вычислительного эксперимента, ориентированного на изучение физики процессов рассеяния волн случайными поверхностями, на теоретическое обеспечение актуальных задач дистанционного зондирования, важно иметь возможность дифференцировать вклады отдельных составляющих пространственного спектра поверхностей в формирование общего переизлученного поля. С учетом этих требований и разработан алгоритм, схематичное описание которого приводится ниже.

2. Исходной при задании вещественной случайной функции  $z = f(y)$ ,  $|y| \leq \pi$ , определяющей на  $|y| \leq \pi$  некоторую поверхность из ансамбля  $Z$ , будем считать корреляционную функцию  $W(\tau)$ ,  $\tau = y_1 - y_2$ ,  $-\infty < y_1, y_2 < \infty$ . Размер  $2\pi$  определяет (после соответствующей перенормировки) облучаемый плоской волной участок поверхности из  $Z$  такой, что  $W(\pm\pi) \leq \epsilon_1 \ll 1$ , т.е. интервал, на концах которого с точностью, не превышающей  $\epsilon_1$ , значения случайной функции можно считать некоррелированными.

Пусть  $W(\tau)$  - достаточно гладкая функция корреляции поверхностей из  $Z$ . Для получения представления ее в виде ряда Фурье зададим



$\{W(\tau_j)\}_{j=1}^M$ ,  $M = 2^k$ ,  $k = 3, 4, 5, \dots$  - последовательность значений в узлах равномерной сетки  $-\pi = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_M = \pi$ . Используя быстрое преобразование Фурье, получаем с заданной точностью набор  $\{g_n\}_{n=0}^{M/2-1}$  для усеченного ряда

$$\tilde{W}(\tau) = \sum_{k=0}^N g_k \cos k\tau, \quad N < M/2 - 1, \quad |\tau| \leq \pi, \quad (5)$$

где натуральное число  $N$  определяется параметром  $\epsilon_2$  - заданной точностью приближения функции  $W(\tau)$  функцией  $\tilde{W}(\tau)$  в метрике пространства непрерывных функций  $C[-\pi, \pi]$ .

Хорошо известен факт [8], что в случае представления корреляционной функции в виде (5) соответствующая ей вещественная однородная в широком смысле чисто случайная функция  $z = f(y)$  имеет вид

$$f(y) = \sum_{k=0}^N (g_k)^{1/2} [\xi_k \cos \frac{k}{2} y + \eta_k \sin \frac{k}{2} y], \quad |y| \leq \pi, \quad (6)$$

где  $\{\xi_k\}_{k=0}^N$  и  $\{\eta_k\}_{k=0}^N$  - независимые нормально распределенные случайные величины, средние значения которых подчинены условиям

$$\overline{\xi_k} = \overline{\eta_k} = 0, \quad \overline{\xi_k \cdot \eta_k} = 0, \quad \overline{\xi_k \cdot \eta_m} = \overline{\xi_k^2} \cdot \delta_k^m,$$

$$\overline{\eta_k \cdot \eta_m} = \overline{\eta_k^2} \cdot \delta_k^m, \quad \overline{\xi_k^2} = \overline{\eta_k^2} = 1, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

При построении вероятностной математической модели, описывающей некоторый однородный случайный процесс с известным максимумом реализаций ( $\max_y |f(y)|$ ), коэффициенты в (6) можно подчинить условию

$$\max_y |f(y)| / \sum_{k=0}^N (g_k)^{1/2} \geq \{(\max_k \xi_k)^2 + (\max_k \eta_k)^2\}^{1/2},$$

что увеличивает быстродействие алгоритма, так как позволяет производить отбор случайных чисел при их генерации.

Для того чтобы использовать алгоритм из первой части работы, необходимо приблизить (в метрике пространства квадратично суммируемых функций  $L_2[-\pi, \pi]$ ) каждую реализацию случайной функции

(6) реализацией периодической случайной функции из класса  $C^0[-\pi, \pi]$  (девять раз непрерывно дифференцируемых функций) [7]. Задача решается заменой (6) на конечный ряд

$$\tilde{z} = \tilde{f}(y) = \sum_{n=-Q}^Q c_n \exp(iny), \quad |y| \leq \pi, \quad (7)$$

коэффициенты которого связаны с наборами  $\{g_k\}_{k=0}^N$ ,  $\{\xi_k\}_{k=0}^N$  и  $\{\eta_k\}_{k=0}^N$  простыми соотношениями, а натуральное число  $Q$  определяется с помощью равенства Парсеваля заданной точностью  $\varepsilon_3 > 0$  приближения функции (6) функцией (7). Необходимая степень гладкости функции, строящейся в виде (7), достигается путем замены конечного ряда аналогичным с коэффициентами Фурье  $\{\tilde{c}_n\}_{n=0}^Q$ , поиск которых сводится к задаче минимизации функционала [9], параметром которого является  $\varepsilon_4$  - погрешность, возникающая при замене ряда (7) сглаженным. Сглаживание случайной функции  $\tilde{z} = \tilde{f}(y)$  приносит еще и дополнительный положительный результат, связанный с исчезновением "краевых эффектов", возникающих при аппроксимации функций из  $C[-\pi, \pi]$  частичными суммами их рядов Фурье.

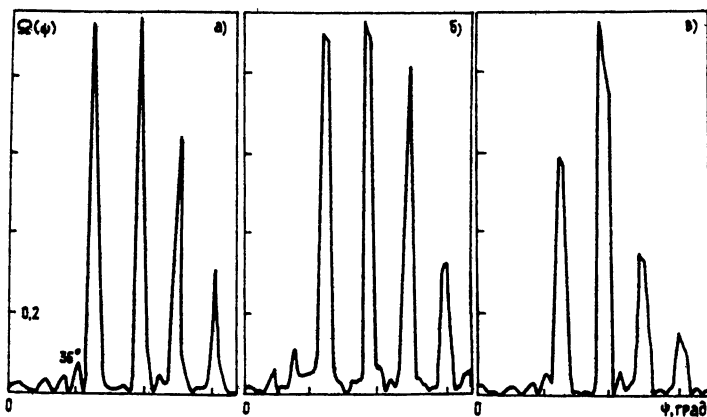


Рис 2

3. Кривые, приведенные на рис. 2, получены в той же ситуации, что и кривые на рис. 1 ( $N = 5$ , т. е. в пятно поля попадает пять полных периодов синусоидальной отрагательной решетки). Но сама структура является идеальной только в случае рис. 2а. Графикам на рис. 2б и 2в соответствует поверхность, возмущенная шорохом, каждая из реализаций которого задается функцией  $z^+ = f^+(y)$  из ансамбля  $z^+$  чисто случайных

цилиндрических поверхностей с функцией корреляции  $W^*(\tau) = \exp\{-\tau^2/2l^2\}$ . Радиус корреляции  $l$  определяется значением параметра  $\varepsilon_1^* = 10^{-6}$ , отнесенного к концам интервала периодичности  $z^* = f^*(y)$ .

Период суммарной функции высот  $z + z^* = f(y) + f^*(y)$  на рис. 2б равен  $2\pi$ , а на рис. 2в -  $2\pi/5$ , т.е. шум не нарушает периодичности структуры в последнем случае и делает ее непериодической в первом. Что касается относительной возможной величины отклонений шероховатой поверхности от идеальной, то она не превышает  $1/20$  глубины профилирования решетки  $-\max_y |f^*(y)| \leq 0,1 \pi/\xi_y$ . Сравнивая данные, представленные на рис. 2, отмечаем, что на каждой конкретной реализации шорох не приводит к заметным качественным изменениям в рассеянном структурами поле. И периодический шорох и шорох, покрывающий всю освещенную часть поверхности, вызывают лишь слабое перераспределение переизлучаемой энергии и, в основном, в направлениях, не связанных с главными лепестками диаграмм. Пики главных лепестков немного сглаживаются, поток энергии по их сечению становится более равномерным.

Периодический шорох при пятне поля, захватывающем более ста периодов, практически незаметен в соответствующих диаграммах. По существу, относительный размер пятна поля возбуждения (по отношению к радиусу корреляции  $l$ ) играет роль усредняющего фактора. Разные реализации  $z^* = f^*(y)$  из ансамбля  $z^*$  дают практически одно и то же значение  $\Omega(\psi)$  уже в том случае, когда на пятне укладывается более двадцати радиусов корреляции. Естественно в такой ситуации рассматривать любое  $\Omega(\psi)$  как соответствующее среднее  $\overline{\Omega(\psi)}$ .

### 3. Роль составляющих пространственного спектра случайной поверхности в формировании рассеянного поля

1. Теория в изучении тонких эффектов, сопровождающих процессы рассеяния волн случайными поверхностями, практически всегда идет вслед за натурным экспериментом, обнаруживающим их и устанавливающим опорные, отличительные характеристики. Причина в том, что традиционные методы анализа не дают достаточно подробной информации о структуре полей, многократное наложение которых определяет физику явлений. Электродинамическая модель поверхности, предлагаемая в данной работе, достаточно надежна в этом плане и может быть сориентирована на выявление основных физических особенностей, на детальный анализ механизмов реализации аномальных эффектов и

явлений. Весьма существенно то, что при таком подходе набор поддающихся анализу ситуаций практически не ограничен - поверхности могут быть случайными и произвольными детерминированными; с глубоким, средним и мелким гофром; содержать области ловушечного типа; облучаться первичной волной под любыми углами.

2. Направления  $\psi = \psi_p = 90^\circ - \varphi_p$ , связанные с направлениями распространения незатухающих гармоник дифракционного спектра периодически продолженной с интервала  $|y| \leq \pi$  произвольной (случайной) поверхности, замечательны тем, что позволяют с помощью (4) (здесь при  $\psi = \psi_p$  от бесконечной суммы остается только одно слагаемое с  $n = p$ ) достаточно уверенно прогнозировать особенности в рассеянном произвольной поверхностью поле, исходя из общих, хорошо изученных закономерностей дифракции плоских волн на периодических структурах [1, 2].

В случае слабошероховатых поверхностей можно продвинуться существенно дальше, используя в качестве основы составляющие пространственного спектра поверхности  $z = f(y)$ . Так, после вполне оправданного в такой ситуации [10] продолжения представления (1) до границы  $z = f(y)$  при  $1 \ll 2\pi$ ,  $\delta = \alpha \max |f(y)| \ll 1$  и  $2\Gamma_0 |\tilde{c}_p| \gg \delta^2$  получаем (в зоне Фраунгофера)

$$E_x(\varphi, \psi_p, R) = i\Gamma_p \left(\frac{2\pi}{\alpha R}\right)^{1/2} \exp\{i(\alpha R + \frac{\pi}{4})\} [2i\Gamma_0 \tilde{c}_p - \delta_0^p], \quad (8)$$

$$\Omega(\varphi, \psi_p) = -\frac{\Gamma_p}{\alpha} (2i\Gamma_0 \tilde{c}_p - \delta_0^p)(2i\Gamma_0 \tilde{c}_p^* + \delta_0^p), \quad p: \operatorname{Re}\Gamma_p \geq 0,$$

а для средних характеристик

$$\overline{E_x(\varphi, \psi_p, R)} = -i\delta_0^p \Gamma_0 \left(\frac{2\pi}{\alpha R}\right)^{1/2} \exp\{i(\alpha R + \frac{\pi}{4})\}, \quad (9)$$

$$\overline{\Omega(\varphi, \psi_p)} = \frac{\Gamma_p^2}{\alpha} (\delta_0^p + \frac{4\Gamma_0^2}{\pi} |\tilde{c}_p|^2).$$

Из (8), (9) следует, что основной вклад в формирование поля, рассеянного слабошероховатой поверхностью в направлениях  $\psi = \psi_p$ , вносят ее спектральные составляющие, которые, если их можно было бы рассматривать как независимо действующие периодические рассеиватели, имели бы в соответствующих направлениях открытый канал излучения на минус (при  $p < 0$ ) или плюс (при  $p > 0$ )  $p$ -й гармонике дифракционного

спектра. Формулы (8), (9) позволяют также оценить степень влияния на характеристики рассеяния основных параметров процесса: длины волны возбуждения ( $\lambda = 2\pi/\kappa$ ) угла прихода первичной волны ( $\varphi$ ); угла  $\psi$ , под которым ведется наблюдение; амплитуд спектральных составляющих поверхности  $z = f(y)$ .

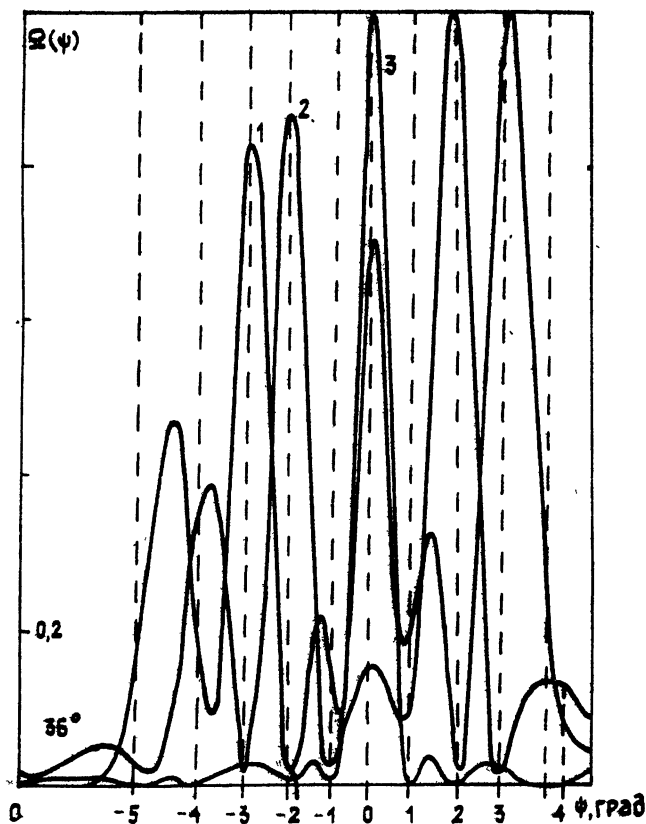


Рис. 3.

3. Выводы, следующие из (8), (9), подтверждены результатами численных экспериментов. Так, например, "удаление" из пространственного спектра случайной поверхности  $z = f(y)$  отдельных составляющих перекрывает каналы переизлучения рассеянной энергии в соответствующих направлениях. В случае шероховатостей, которые нельзя отнести к слабым, см. рис. 3, где даны нормированные на  $\max$  зависимости  $\Omega$  ( $\varphi = 5,46^\circ, \psi$ );  $\kappa = 5,26$ ; радиус 1 гауссовой корреляционной функции поверхности равен  $\max |f(y)| = 0,5 \lambda$ , простые связи типа (8), (9) неустанавливаемы. Однако, изменяя спектральный состав реализации случайной функции  $z = f(y)$ , можно отметить ряд

закономерностей. Так, практически все экстремальные значения диаграмм связаны с направлениями  $\psi = \psi_p$ ,  $p: \text{Re } \Gamma_p \geq 0$  (на рис. 3 они даны штриховыми линиями с указанием порядкового номера). Первая диаграмма соответствует одной из реализаций случайной поверхности с полным спектральным составом. "Удаление" составляющих с  $n = \pm 1$  (вторая диаграмма) заметно снижает интенсивность переизлучения в направлениях  $\psi = \psi_p$  с нечетными  $p = \pm 1, \pm 3, \pm 5$ . Это означает, что основную роль в формировании соответствующих потоков энергии играет именно эта составляющая, период которой совпадал с пятном поля облучения. Одновременно резко возрастает интенсивность излучения в направлениях  $\psi = \psi_p$  с четными  $p = \pm 2, \pm 4$ , т. е. в тех направлениях, в которых распространяются основные гармоники дифракционного спектра теперь уже "старшей" спектральной составляющей поверхности  $z = f(y)$  с периодом, в два раза меньшим пятна поля возбуждения. Глубокие минимумы  $\Omega(\varphi, \psi)$  в направлениях  $\psi = \psi_p$ ,  $p = \pm 1, \pm 2$  на третьей диаграмме (здесь  $z = f(y)$  лишена спектральных составляющих с  $n = \pm 1, \pm 2$ ) еще раз указывают на возможность прямых связей между спектральным составом поверхности и ее рассеивающими способностями в направлениях  $\psi = \psi_p$ ,  $p: \text{Re } \Gamma_p \geq 0$ .

В резонансном диапазоне отмеченные связи для отдельных реализаций случайных поверхностей не являются стабильными. Причины - в физических особенностях резонансного рассеяния волн, когда даже при незначительных изменениях в параметрах процесса картина формируемого каким-либо объектом поля может меняться неузнаваемо [1, 2]. Однако чисто резонансные эффекты не должны давать существенного вклада в средние, статистические характеристики. Это позволяет надеяться на то, что рассмотренные выше результаты и методы излучения механизмов формирования рассеянного произвольными (случайными) поверхностями поля окажутся полезными как в фундаментальном, так и в прикладном отношении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопапов В. П. и др. Дифракционные решетки. Резонансное рассеяние волн. - Киев: Наукова думка, 1986.
2. Шестопапов В. П., Сиренко Ю. К. Динамическая теория решеток. - Киев: Наукова думка, 1989.
3. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. - М.: Наука, 1972.
4. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. - М.: Мир, 1981.

5. Scattering in Volumes and Surfaces/Ed. M.Nieto-Vesperinas and C.Dainty. - North-Holland: Elsevier Science Publishers B.V., 1990.
6. Кравцов Ю. А. // Радиотехника и электроника. 1990. Т.35. N 1. С.114.
7. Крутинь Ю.И., Тучкин Ю.А. // В сб.: Распространение радиоволн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. - Харьков: ИРЭ АН УССР, 1989. С.131.
8. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. - М.: Наука, 1966.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979.
10. Куркчан А.Г. // Радиотехника и электроника. 1983. Т.28. N 8. С.1526.

Институт радиофизики и электроники  
АН Украины

Поступила в редакцию  
24 июня 1991 г.

SCATTERING CROSS SECTION CALCULATION OF ARBITRARY DETERMINED  
AND RANDOM PERFECTLY CONDUCTING SURFACES

*Yu. I. Krutin', Yu. K. Sirenko, V. P. Shestopalov*

The solutions of some problems of mathematical modelling and investigation of wave scattering from arbitrary and random surfaces based on the numerical experimental data are suggested.

УДК 621.372.88

## ВОЛНОВОДНО-КВАЗИОПТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР ДЛЯ КОРОТКОВОЛНОВЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ГЕНЕРАТОРОВ

*В. В. Ростов, Е. М. Тотьменинов*

Предложен квазиоптический высокودобротный резонатор, состоящий из слабонерегулярных осесимметричных волноводов, для генерации мощного излучения миллиметровых волн в убитроне с сильноточным электронным пучком. Для выбора геометрии резонатора исследовалось распространение собственных симметричных магнитных волн в эквивалентной передающей линии. Экспериментальные данные относительно электродинамической селекции мод согласуются с теоретическими.

В субмиллиметровом и коротковолновой части миллиметрового диапазонов существуют объективные трудности создания высокоселективных резонаторов, ограничивающие реализацию эффективных лазеров на свободных электронах с помощью сильноточных ( $\sim 10^4$  А) пучков [1]. При токах  $\sim 10^3$  А и относительно небольших сечениях цилиндрического резонатора (диаметр  $2R$  в 2-4 раза превышает длину волны  $\lambda$ ) используются брегговские рефлекторы [2, 3] - отрезки слабогфрированных волноводов. В случае  $\lambda \ll R$  более естественны открытые квазиоптические резонаторы [2, 4, 5]. Здесь важно совместить условия, при которых обеспечивается дифракционная селекция мод и возможность транспортировки сильноточного электронного пучка.

В рассматриваемом варианте волноводно-квазиоптического резонатора (рис. 1а) поперечная и продольная структура поля рабочего колебания, а точнее - нескольких продольных колебаний, представлена собственной скалярной  $H$ -волной соответствующей периодической линии. Период линии ( $D$  на рис. 1б) кратен длине волны биений двух волноводных осесимметричных волн  $H_{01}$  и  $H_{02}$ . Дифракционные ( $\alpha_q$ ) и омические ( $\alpha_0$ ) потери на одном периоде квазиоптической линии эквивалентны потерям в соответствующем резонаторе и характеризуют его

ненагруженную добротность  $Q_0 \approx \frac{4\pi L_0}{\lambda(\alpha_q + \alpha_0)}$  ( $D_0 = D/2$  - расстояние



между плоскими зеркалами). Такой подход правомерен, если принять во внимание, что внутренние поверхности токопровода, показанные на рис. 1а двойной штриховкой, изготовлены из материала, который эффективно поглощает и рассеивает микроволны.

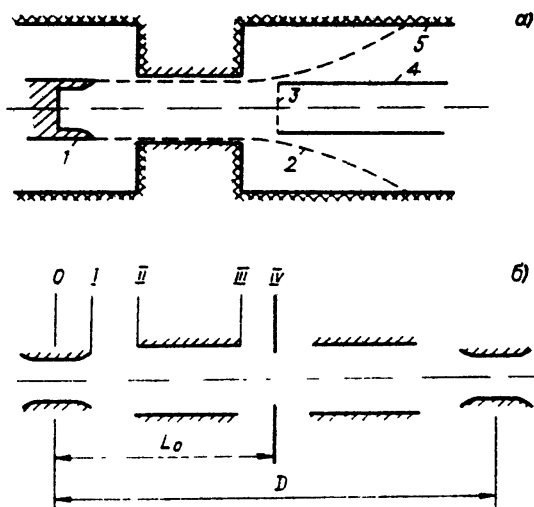


Рис 1

На рис. 1а показаны цифрами: 1 - катод, работающий в режиме взрывной эмиссии электронов, 2 - траектория электронного пучка в неоднородном магнитном поле, 3 - плоское полупрозрачное зеркало, 4 - волновод для вывода СВЧ мощности, 5 - коллектор пучка.

Высокая фильтрующая способность линии обусловлена аномально низкими омическими потерями симметричных  $H$ -волн при скользящем отражении от металла (см., например, [6]) и относительно малыми дифракционными потерями. Последний, весьма важный вывод сделан, в частности, на основании работы [7], где приведен сравнительный анализ потерь аксиально-симметричных и линейно-поляризованных пучков в комбинированных волноводно-квaziоптических линиях передачи, составленных из соосно и эквидистантно расположенных отрезков труб.

Пояснений требует выбор полупрозрачного зеркала (3 на рис. 1а). Дело в том, что экран с отверстием радиуса  $r_s$  (IV на рис. 1б) эквивалентен отрезку волновода с тем же радиусом и исчезающе малой длиной. Если подобрать величину  $r_s$  и другие параметры линии так, чтобы собственная волна в плоскости IV была представле-

на достаточно "чистой" модой круглого волновода ( $H_{01}$ ), то соответствующий отрезок волновода можно произвольно удлинить и использовать его для распределенного синфазного отражения волны\*. Так, при помощи брегговского зеркала с заданным коэффициентом пропускания на расчетной длине волны можно получить дополнительное разрежение спектра собственных колебаний в резонаторе и осуществить вывод СВЧ мощности одной из симметричных  $H$ -волн круглого волновода.

### Математическая модель

Сформулированный в работе [7] метод расчета волноводно-квaziоптических линий, использующий параксиальное приближение, взят за основу разработанной модели для исследования многопараметрической линии с симметричными  $H$ -волнами.

Пусть поле  $E_{\varphi}(r, z)$  описывается в каком-либо сечении  $N$ -мерным вектором  $\bar{y}(z)$  с компонентами  $y_k(z)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), характеризующими амплитуды  $H_{ок}$ -волн разложения. Тогда, в силу периодичности линии, можно записать

$$T\bar{y}(z) = \bar{y}(z + D) = \gamma\bar{y}(z), \quad (1)$$

где  $T$  - полная матрица передачи поля из одного сечения в сечение, отстоящее на один период линии, а  $\gamma$  - ее собственное значение ( $\alpha_q = -1 - |\gamma|^2$ ). Следовательно, задача сводится к нахождению матриц передачи поля на каждом участке линии, а  $T$  определяем их последовательным перемножением.

Будем исходить из параболического уравнения для поля в волноводе единичного радиуса, заполненного линзоподобной средой [8],

$$2i \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \frac{\epsilon}{\rho^2} + \Gamma \rho^2 \epsilon. \quad (2)$$

---

\* В общем случае, при необходимости, можно осуществить трансформацию волны с известной поперечной структурой и на заданной частоте с помощью отрезка волновода со специальным профилем.

В принятой системе координат  $\tau = \int_0^z \frac{dz}{kR^2(z)}$ ,  $\rho = r \frac{\sigma_1}{\alpha_0}$ ,  $\sigma_1(\tau) = \frac{\alpha_0}{R(z(\tau))}$ ,  $\alpha_0 = R(0)$ , электрическое поле записывается в виде

$$E_\varphi = E_0 \sigma_1(\tau) \varepsilon(\rho, \tau) \exp\left(i \frac{\rho^2}{2} \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}\right), \quad (3)$$

а граничные условия к (2):  $\varepsilon(1, \tau) = \varepsilon(0, \tau) = 0$ . Заполнение волновода характеризует функция  $\Gamma(\tau) = \frac{\sigma_1''}{\sigma_1} = -k^2 R^3 \frac{d^2 R}{dz^2}$ .

Достаточно простой алгоритм решения данной задачи выстраивается, если ограничить перечень вариантов рассматриваемых в модели нерегулярных волноводов с медленно меняющимся радиусом  $R(z)$  условием независимости  $\Gamma$  от координаты. Такое условие обеспечивается для цилиндрического и конического волновода  $R(z) = \alpha_0 + z \operatorname{tg} \alpha$  ( $0 \leq \operatorname{tg} \alpha \ll 1$ ),  $\Gamma = 0$ , а также в случае, когда профиль волновода описывается частью эллипса или гиперболы  $R(z) = \alpha_0 (1 \pm (z/\alpha_0)^2)^{1/2}$ ,

$$\Gamma = \mp \left\{ \frac{k \alpha_0^2}{z_0} \right\}^2.$$

Представим решение (2) в виде

$$\varepsilon(\rho, \tau) = \exp(-i \frac{\Gamma \tau}{\sigma}) \sum_{k=1}^N b_k Y_k(\tau) J_1(\mu_{0k} \rho). \quad (4)$$

Здесь  $b_k = \frac{\sqrt{2}}{J_0(\mu_{0k})}$ ,  $\mu_{0k}$  - "k"-й корень уравнения  $J_1(x) = 0$ ,  $J_0$  и  $J_1$  - функции Бесселя нулевого и первого порядка. Тогда, с учетом

нормировки и сохранения потока энергии  $\int_0^R |E_\varphi|^2 r dr = E_0^2 \alpha_0^2$  и

$\sum_{k=1}^N |Y_k(\tau)|^2 = 1$ , нетрудно получить систему  $N$  уравнений с постоянными коэффициентами для компонент вектора  $\bar{Y}(\tau)$ , описывающего поперечное и продольное распределение поля в каждом сечении волновода:

$$i \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \tau} + P \bar{Y} = 0, \quad P_{kn} = \begin{cases} \frac{\mu_{0n}^2}{2} & \text{при } k=n \\ -\Gamma \frac{4\mu_{0k}\mu_{0n}}{(\mu_{0k}^2 - \mu_{0n}^2)^2} & \text{при } k \neq n \end{cases} \quad (5)$$

При  $\Gamma = 0$  отсюда непосредственно получаем матрицу передачи диагонального вида или  $y_k(\tau) = \exp\left(i\frac{\mu_{ok}^2}{2}\tau\right) y_k(0)$ . Найдем матрицу передачи на участках волновода с профилем, имеющим конечный радиус

кривизны  $R_{кр} \left(\Gamma = \text{const} \approx \frac{k^2 \alpha_0^3}{R_{кр}}\right)$ . Собственными значениями действительной симметрической матрицы  $P$  в (5) являются действительные числа  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$ , которые пронумеруем в порядке возрастания.

Численный анализ по алгоритму Якоби [9] показывает, что в широкой области значений  $\Gamma$  кривые  $\Psi_1(\Gamma)$  не пересекаются, и с ростом  $|\Gamma|$  необходимо увеличивать число членов в разложении (4), например, с условием  $|\Gamma| \leq \mu_{он}^2$ . То есть, с учетом допущения о параксиальности ( $\mu_{он}^2 \ll (k\alpha_0)^2$ ), существует ограничение метода и относительно степени кривизны поверхностей  $R_{кр} \gg \alpha_0$ .

Осуществим невырожденное линейное преобразование вектора  $\bar{y}(\tau)$  к системе так называемых нормальных координат  $\bar{u}(\tau)$ :

$$\bar{y}(\tau) = N\bar{u}(\tau), \quad u_k(\tau) = \exp(i\Psi_k \tau). \quad (6)$$

Принимая во внимание хорошую обусловленность собственных значений матрицы  $P$ , нетрудно показать, что матрица  $N$  является единственной ортогональной матрицей, осуществляющей преобразование подобия матрицы  $P$  к диагональному виду:  $N^{-1}PN = F$ , где  $f_{kk} = \Psi_k$ . Каждый "j"-й столбец в  $N$  есть собственный вектор матрицы  $P$ , соответствующий собственному значению  $\Psi_j$ . Окончательно получаем искомую матрицу передачи  $G$  ( $\bar{y}(\tau) = G\bar{y}(0)$ ) с элементами

$$g_{jk} = \sum_{n=1}^N h_{jn} h_{kn} \exp(i\Psi_n \tau). \quad (7)$$

В модели рассматривается возможность сопряжения участков волновода с малым скачком производной  $\Delta\left(\frac{dR}{dz}\right) \leq (kR)^{-1}$ . Соответствующую матрицу передачи получаем исходя из непрерывности  $E_\varphi$ , и при условии  $\nu = kR \Delta\left(\frac{dR}{dz}\right) \ll 1$  матрица отличается от единичной наличием малых недиагональных элементов:  $\nu \frac{4\mu_{oj}\mu_{ok}}{(\mu_{oj}^2 - \mu_{ok}^2)^2} \ll 1$ .

С помощью интегральных соотношений [7, 10] представим матрицу, описывающую прохождение волны в свободном пространстве (1) между волноводами радиусов  $R_a$  и  $R_B$ ,

$$c_{jk} = b_j b_k t_0 \int_0^1 \int_0^1 \rho \rho' d\rho d\rho' J_1(\mu_{0j} \rho') J_1(\mu_{0k} \rho) J_1(t_0 \rho \rho') \times \quad (8)$$

$$\times \exp[(i/2)(t_1 \rho'^2 + t_2 \rho^2)].$$

Здесь  $t_0 = \frac{kR_a R_B}{l}$ ,  $t_1 = \frac{kR_a^2}{l} + kR_a \left(\frac{dR_a}{dz}\right)_a$ ,  $t_2 = \frac{kR_B^2}{l} - kR_B \left(\frac{dR_B}{dz}\right)_B$ .

Задача (1) решалась методом итераций, при котором установившаяся структура поля отвечает собственной волне с максимальной постоянной распространения  $\gamma$ . При малом затухании волны в линии и плохой сходимости итераций использовалось решение полной проблемы собственных значений по методу Якоби с понижением нормы для комплексной матрицы  $T$  [9].

### Расчет и эксперимент

Резонатор проектировался для убитрона с определенными параметрами электронного пучка и рабочей длиной волны  $\lambda_0 = 4$  мм. Из оценки необходимой протяженности взаимодействия электронов с попутной волной в первом приближении выбиралась длина основного волновода линии (II-III на рис. 1б) ~ 240 мм и фиксировался внешний диаметр катода (24 мм) с тонкой кромкой. Численное моделирование проводилось на вычислительных машинах типа РС-ХТ и РС-АТ с погрешностью вычислений  $|\gamma|^{\max}$  не хуже  $10^{-3}$  для  $N = 4$ . На каждом этапе варьирования какого-либо из параметров геометрии производилась максимизация  $|\gamma|$  как функции от длины цилиндрического участка основного волновода. В результате для окончательного варианта геометрии волноводно-квазиоптической линии получено  $\alpha_q \approx 0,04$ , в сечении IV (рис. 1б) собственная волна представлена достаточно "чистой" модой  $H_{01}$ :  $1 - |y_1|^2 = (5 \mp 2)10^{-3}$ ; в основном волноводе -  $|y_1|^2 \approx 0,8$ ,  $|y_2|^2 \approx 0,2$ .

На рис. 2а изображена зависимость постоянных распространения основной собственной волны и ближайшей по степени затухания волны

от нормированной частоты  $f_k = \frac{\lambda_0}{\lambda_k}$ . Таким образом, дифракционные потери "конкуrentов" среди скалярных собственных  $H$ -волн в линии существенно выше, чем у основной волны.

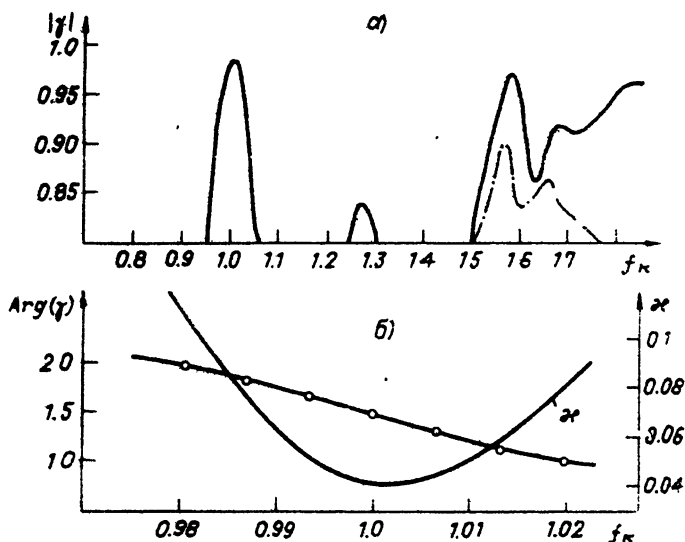


Рис. 2.

В соответствии с условием  $k_{pm} L_0 = \pi m + \text{Arg}(\gamma)$ , на рис. 2б кружками отмечены расчетные значения частот резонансных колебаний. При этом предполагалось, что в качестве зеркала (3) на рис. 1а используется металлический диск, который не вносит дополнительные потери.

Брегговское зеркало рассчитывалось по формулам работы [2] на длину волны  $\lambda_0$  и коэффициент пропускания волны  $H_{01}$  по мощности  $\alpha_{\pi} \approx 0,15$  в полосе частот по уровню  $2\alpha_{\pi}$  приблизительно  $1,4 \cdot 10^{-2}$ . Основной волновод резонатора изготовлен из нержавеющей стали. Расчетные значения омических потерь собственной волны  $\alpha_0 \approx 0,7 \cdot 10^{-2}$ , в то время как для несимметричных волн потери в стенках составляют  $\sim 15\alpha_0$ .

Экспериментальные исследования спектра собственных колебаний проводились с помощью панорамного измерителя КСВН Р2-69 и генератора Г4-142 в полосе частот 65-79 ГГц. Возбуждение колебаний в широкой полосе частот осуществлялось из открытого конца волновода,

а для снижения нерезонансного фона при регистрации рабочей группы высокооборотных продольных типов колебаний (рис. 3) использовался относительно широкополосный преобразователь с волной  $H_{01}$  круглого волновода. Значение измеренной максимальной добротности в пределах погрешности ( $\pm 10\%$ ) соответствует расчетной величине. В широкой полосе частот отсутствуют колебания, кроме указанных на рис. 3, с добротностью выше, чем 1500+2000.

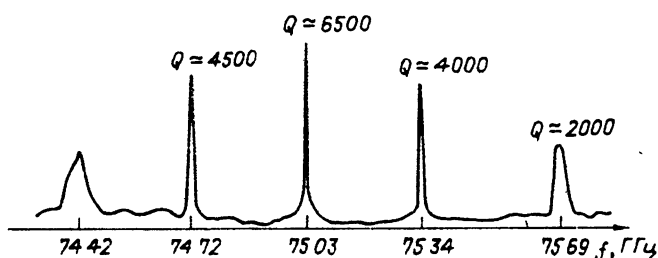


Рис 3.

Волноводно-квазиоптический резонатор должен удовлетворять требованиям к соосности отдельных частей. Чтобы дифракционные потери не возрастали из-за трансформации собственной симметричной волны в несимметричные волны, необходимо выполнить достаточно жесткое ограничение на угловой перекося осей  $\vartheta^{\max} \ll \frac{\lambda}{r_s} \approx \frac{1}{q}$ . Устойчивость спектра колебаний в эксперименте наблюдалась при углах перекося  $\leq 1^\circ$ .

Авторы признательны С. Д. Коровину за обсуждение работы и полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Братман В. Л., Денисов Г. Г., Коровин С. Д. и др. В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. - Горький: ИПФ АН СССР, 1984. Вып. 4. С. 119.
2. Братман В. Л., Денисов Г. Г., Офицеров М. М. В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. - Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1983. Вып. 3. С. 127.
3. Денисов Г. Г., Резников М. Т. - Изв. Вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. N 5. С. 562.
4. Von Laven S. A. - Nucl. Instrum. and Meth. Phys. Res. 1986, A250, P. 300.

5. Кляев А. И., Маненков А. Б. //Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. N 7. С. 1387.
6. Каценеленбаум Б. З. //Радиотехника и электроника. 1963. Т. 8. N 9. С. 1516.
7. Власов С. Н., Пискунова Л. В., Шапиро М. А. Препринт ИПФ АН СССР N 239. Горький, 1989.
8. Власов С. Н., Пискунова Л. В., Шапиро М. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. N 2. С. 245.
9. Уилкинсон Д. Х., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. - М.: Машиностроение, 1976.
10. Фокс А. Г., Ли Т. В кн.: Лазеры. - М.: ИЛ, 1963. С. 325.

Институт сильноточной электроники  
СО РАН

Поступила в редакцию  
19 декабря 1991 г.

WAVEGUIDE-QUAZIOPTICAL CAVITY  
FOR A SHORT-WAVE RELATIVISTIC OSCILLATORS

*W.W. Rostow, E.M. Tot'meninov*

A low-loss quasioptical cavity consisting of weakly-irregular axisymmetric waveguides has been proposed to generate the intense millimeter-wavelength radiation of high-current electron beam in ubitron. In order to choose the cavity configuration the propagation of symmetric magnetic natural waves in the equivalent transmission line is investigated. Experimental data about the electrodynamic selection of modes are found to agree with theoretical predictions.