

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ**

**Известия высших учебных заведений**

**РАДИОФИЗИКА**

**ежемесечный научно-технический журнал**

**Издается с апреля 1958 г.**

**Том XXXVI N 12**

**Нижний Новгород**

**1983**

**Содержание**

Заботин Н.А. Перенос энергии радионизлучения в ионосферном слое со случайными мелкомасштабными неоднородностями .....	1075
Беленов А.Ф., Пономарев П.В., Синицын В.Г., Ямпольский Ю.М. О природе квазипериодических вариаций допплеровского смещения частоты КВ радиосигналов, рассеянных областью ИИТ .....	1089
Копосова Е.В. Рассеяние волн идеально гофрированными поверхностями с простейшими формами гофра .....	1096
Беликович В.В. Аппроксимация экспериментальных данных экспонентой .....	1105
Савченко В.В. Об устойчивости спектральных оценок минимакса энтропии .....	1113
Дубровский В.Н., Карасев А.С., Шевченко В.И. Низкочастотный шум в полевых транзисторах с затвором Шотки .....	1118
Коростелев Г.Н., Романцев В.А., Сосновцева О.В. Шумовые характеристики многодiodного генератора .....	1128
Валов А.Н., Маковийчук М.И., Рекшинский В.А. Поверхностное сопротивление и шумовые свойства ионно-легированных структур кремния .....	1136
Лучинин А.С., Коробейников А.В. Исследование шумовых характеристик кварцевых и ПАВ резонаторов .....	1143

Уман С.Д., Усыченко В.Г., Ярушкин В.Р. Использование методов синхронизации для измерения флуктуаций в сверхмалошумящих твердотельных генераторах миллиметровых волн ..... 1153

#### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

- Бронин А.Г., Заботин Н.А. Приведение уравнения переноса излучения для плоскостной случайно-неоднородной магнитоактивной плазмы к инвариантным переменным ..... 1163
- Герценштейн М.Е., Левинсон Ф.А., Потемкин В.В. О термодинамических ограничениях на шум типа  $1/f$  реактивных элементов ..... 1167

#### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С.Л.БРАУДЕ, А.В.ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В.Л.ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л.М.ЕРУХИМОВ (зам.главного редактора), В.В.ЖЕЛЕЗНЫКОВ, В.А.ЗВЕРЕВ, Ю.Л.КЛИМОНТОВИЧ, А.Н.КОЦДРАТЕНКО, Ю.В.КРАВЦОВ, В.И.КРАСИЛЬНИКОВ, А.П.МАЛАХОВ, В.В.ПИКОЛЬСКИЙ, В.Ю.ПЕТРУНЬКИЙ, В.М.ПОЛЯКОВ, А.А.СЕМЕНОВ, С.А.ТАГЕР, В.И.ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К.Б.МУРАШКИНА

Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.  
Усл.печ.л. 9, 80. Усл.кр.-отт. 9, 80. Уч.-изд.л. 11, 10  
Тираж 300 экз. Заказ Цена 400 р.

---

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,  
ул. Большая Печерская, 25,  
Научно-исследовательский радиофизический институт,  
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика".  
Телефон 36-01-71, e-mail rfj@nirfi.nnov.su

---

Отпечатано с готового набора

Типография  
фирмы "УНИ-ПРИНТ"  
603600, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25

© "Известия высших учебных заведений. Радиофизика", 1994

УДК 550.388.2

# ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ИОНОСФЕРНОМ СЛОЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ МЕЛКОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*Н.А.Заботин*

На основе феноменологического подхода выведено уравнение баланса энергии излучения в случайно-неоднородном плоскостратифицированном слое плазмы. Использование приближения малоуглового рассеяния в инвариантных лучевых координатах позволяет преобразовать его в уравнение дрейфового типа. Последнее описывает деформацию пространственного распределения энергии радиоизлучения вследствие многократного рассеяния на анизотропных неоднородностях. Численно исследованы два эффекта — смещение углов прихода радиоволны при слабонаклонном распространении и изменение интенсивности, отраженного от плазменного слоя, радиоизлучения.

**Введение.** Наличие в ионосфере неоднородностей электронной концентрации с масштабами от нескольких километров до нескольких десятков метров, и менее надежно установленное в целом ряде экспериментов, является неотъемлемой частью современных представлений о физических процессах в верхней атмосфере [1, 2]. Мелкомасштабная структура наиболее развита в высоких и низких широтах. Но даже в самых неблагоприятных среднеширотных условиях при типичном для спокойной ионосферы уровне естественных неоднородностей ( $\Delta N/N \simeq 10^{-3} \div 3 \cdot 10^{-3}$  в масштабе 1 км) оптическая толщца  $F$ -слоя, при вертикальном зондировании, оказывается значительно больше единицы [3]. Таким образом, при ионосферном распространении радиоволны имеет место процесс многократного рассеяния, который может заметно повлиять на их характеристики.

По аналогии с рассеянием на шероховатой поверхности для ионосферного слоя можно ввести понятие эффективной индикатрисы рассеяния. Поскольку спектр неоднородностей в  $F$ -слое резко анизотропичен, следует ожидать существенной анизотропии ионосферной индикатрисы рассеяния. Иными словами, при облучении ионосферы радиоволнами (как при наклонном, так и при вертикальном зондировании) основной поток энергии, в отраженном сигнале, может не совпадать с направлением распространения зеркальной компоненты. Основной задачей настоящей работы является исследование этого эффекта для случая вертикального зондирования ионосферы с естественными неоднородностями.

*Н.А.Заботин*

1075

Проблема определения параметров рассеянного поля при наличии отражения от регулярно-неодиородного слоя в настоящее время окончательно не решена. Одна из трудностей связана с описанием процесса рассеяния вблизи уровня отражения волны. В случае плоскостратифицированного ионосферного слоя есть возможность обойти указанные трудности путем использования уравнения переноса излучения, представленного в инвариантных, переменных. Уравнение переноса излучения в случайно-неодиородной магнитоактивной плазме может быть получено путем преобразования соответствующего уравнения Бете-Солпитера [4]. В настоящей статье приводится феноменологический вывод уравнения баланса энергии излучения в плоскослоистой, в среднем, среде. Формально-математическую процедуру его получения из уравнения переноса излучения можно найти в работе [5].

В разделе 1 настоящей статьи поясняется смысл инвариантных переменных и приводится феноменологический вывод уравнения баланса энергии излучения в плоскостратифицированной плазме. В разделе 2 получено уравнение дрейфового приближения, решение которого справедливо в общем случае, плоскостратифицированной магнитоактивной плазмы. Раздел 3 посвящен численному исследованию полученного решения дрейфового уравнения в модели линейного слоя плазмы без магнитного поля. В разделе 4 полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными. В Заключении обсуждаются возможные обобщения и приложения полученных результатов.

**1. Инвариантные переменные и уравнение баланса энергии излучения.** Распространение электромагнитной волны в плоскостратифицированной плазме можно отобразить графически с помощью конструкции Поверлейна [6-8]. Введем в пространстве волновых векторов  $\vec{k}$  декартову систему координат, ось  $z$  которой перпендикулярна, а плоскость  $xy$  параллельна слою плазмы. Будем считать, что вектор магнитного поля  $\vec{H}$  располагается в плоскости  $xy$ . Потребуем, чтобы модуль радиус-вектора любой точки внутри единичной сферы с центром в начале координат, был равен значению показателя преломления  $n_i(v, \alpha)$ , где  $i = 1$  соответствует необыкновенной волне,  $i = 2$  — обычной,  $v = \omega_p^2/\omega^2$ ,  $\omega_p$  — плазменная частота,  $\omega$  — частота волны,  $\alpha$  — угол между радиус-вектором и магнитным полем  $\vec{H}$ . Поверхность показателя преломления, соответствующая фиксированному значению  $v$ , представляет собой тело вращения вокруг оси  $\vec{H}$ .

Удобство введенной системы координат связано с тем, что траектория волны изображается в ней прямой линией, параллельной оси  $z$ . Это — следствие обобщенного закона Снеллиуса, из которого также вытекает равенство угла падения волны на слой и угла выхода из слоя  $\vartheta$ , а также постоянство азимутального угла  $\varphi$  волнового вектора. Отметим также, что

точка пересечения траектории с поверхностью показателя преломления при данном  $\varphi$  определяет текущее направление волнового вектора в слое (он антипараллелен радиус-вектору) и групповую скорость (это нормаль к поверхности показателя преломления). Проекция траектории волны на плоскость  $x_0y$  представляет собой точку, радиус-вектор которой имеет модуль равный  $\sin \vartheta$  и составляет с осью  $x$  угол  $\varphi$ . Таким образом, координаты  $\vartheta, \varphi$  полностью определяют всю лучевую траекторию в плоском слое и вне его и являются в этом смысле инвариантными.

При облучении ионосферного слоя источником радиоволны поток энергии, ограниченный угловыми координатами  $\vartheta \div \vartheta + d\vartheta; \varphi \div \varphi + d\varphi$  соответствует потоку энергии в  $\vec{k}$  — пространстве внутри цилиндрической лучевой трубы с поперечным сечением  $\sin \vartheta d(\sin \vartheta) d\varphi \equiv \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi$ , параллельной оси  $z$ . В случае регулярного (без случайных неоднородностей) слоя ионосферной плазмы этот поток энергии сохраняется и полностью определяется диаграммой направленности источника:

$$P(h; \vartheta, \varphi, \vec{p}) = P_0(\vartheta, \varphi, \vec{p}), \quad (1)$$

где  $P$  — поток энергии в единичном телесном угле в направлении, определяемом углами  $\vartheta, \varphi$  через точку  $\vec{p}$  на поверхности Земли,  $h(v)$  — высота над поверхностью Земли. Если случайных неоднородностей нет и источник точечный, переменная  $\vec{p}$  в равенстве (1) является, по сути, лишней, так как имеется однозначная связь между ней и углами прихода луча  $\vartheta, \varphi$ . При наличии рассеяния энергия перераспределяется как по угловым переменным  $\vartheta, \varphi$ , так и в пространстве, что описывается переменной  $\vec{p}$ .

Как известно, условие рассеяния на неоднородностях с гармоникой  $\vec{\omega}$  в пространственном спектре имеет вид

$$\vec{k}' = \vec{k}_0 + \vec{\omega}, \quad (2)$$

где  $\vec{k}_0$  и  $\vec{k}'$  — волновые векторы падающей и рассеянной волн. Поэтому обычно процесс рассеяния описывают в угловых координатах волнового вектора  $\vec{k}$ . Для этого можно ввести декартову систему координат, ось  $z'$  которой параллельна  $\vec{H}$ , а ось  $x'$  совпадает с осью  $x$ , и характеризовать положение вектора  $\vec{k}$  в ней полярным и азимутальным углами  $\alpha, \beta$ . Анализируя конструкцию Поверлейна, можно убедиться, что углы  $\alpha, \beta$  на любой фиксированной высоте  $h(v)$  связаны с углами  $\vartheta, \varphi$ . Наличие такой связи позволяет описывать рассеяние в терминах инвариантных углов  $\vartheta, \varphi$ . Действительно, дифференциальное сечение рассеяния  $\sigma(\alpha_0, \beta_0; \alpha\beta)$  которое дает вероятность возникновения рассеянной волны с координатами углового вектора  $\alpha, \beta$  при взаимодействии с неоднородностями падающей волны, направление волнового вектора которой  $\alpha_0, \beta_0$ , простой

заменой переменных может быть приведено к виду, удобному для описания перераспределения потоков энергии по угловым координатам  $\vartheta, \varphi$ .

Уравнение, описывающее эволюцию величины  $P$  в слое плазмы может быть получено из феноменологических соображений баланса энергии в лучевых трубках. Уменьшение потока энергии  $P(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho})$  в области углов  $\vartheta \div \vartheta + d\vartheta; \varphi \div \varphi + d\varphi$  внутри тонкого слоя  $h \div h + \Delta h$  за счет рассеяния во всех других направлениях составляет

$$-\Delta h P(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho}) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi C^{-1}(h; \vartheta, \varphi) \int d\vartheta' d\varphi' \times \\ \times \sigma \left[ \alpha_0(\vartheta, \varphi), \beta_0(\vartheta, \varphi); \alpha(\vartheta', \varphi'), \beta(\vartheta', \varphi') \right] \sin \alpha(\vartheta', \varphi') \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\vartheta', \varphi')} \right|, \quad (3)$$

где  $C(h; \vartheta, \varphi)$  — косинус угла наклона на высоте  $h$  лучевой траектории, соответствующей углам входа  $\vartheta$  и  $\varphi$  (количество энергии лучевой трубы  $\vartheta \div \vartheta + d\vartheta; \varphi \div \varphi + d\varphi$ , находящейся одновременно в слое  $h \div h + \Delta h$ , пропорционально  $C^{-1}(h; \vartheta, \varphi)$ );  $\partial(\alpha, \beta)/\partial(\vartheta', \varphi')$  — якобиан преобразования угловых координат. Интегрирование в (1) проводится по области значений углов входа  $\vartheta', \varphi'$ , которая соответствует лучам с уровнем отражения выше  $h$ . В то же самое время, увеличение потока энергии  $P(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho}) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi$  за счет рассеяния в других лучевых трубках в этом же слое составляет

$$\Delta h \int P(h; \vartheta', \varphi', \vec{\rho}') \sin \vartheta' \cos \vartheta' d\vartheta' d\varphi' C^{-1}(h; \vartheta', \varphi') \times \\ \times \sigma \left[ \alpha_0(\vartheta', \varphi'), \beta_0(\vartheta', \varphi'); \alpha(\vartheta, \varphi), \beta(\vartheta, \varphi) \right] \sin \alpha(\vartheta, \varphi) \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\vartheta, \varphi)} \right| d\vartheta d\varphi, \quad (4)$$

где интегрирование проводится по той же области переменных  $\vartheta', \varphi'$ , что и в (3),  $\vec{\rho}' = \vec{\rho} - \vec{\Phi}(h; \vartheta', \varphi'; \vartheta, \varphi)$ . Векторная функция  $\vec{\Phi}(h; \vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi')$  представляет собой смещение точки прихода на поверхности Земли волны, которая после рассеяния на высоте  $h$  имеет угловые координаты  $\vartheta', \varphi'$ , по отношению к точке прихода падающей волны с угловыми координатами  $\vartheta, \varphi$ . Существенно, что в плоскостратифицированной среде вид функции  $\vec{\Phi}$  определяется только профилем  $v(h)$  и не зависит от горизонтальной координаты точки рассеяния, а также от координаты и рассеянных лучей. Предположим, что диссипативные потери энергии пренебрежимо малы. Тогда, складывая (3) и (4), получим уравнение баланса энергии следующего вида

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho})}{dh} \sin \vartheta \cos \vartheta = & \int \left\{ -P(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho}) \sin \vartheta \cos \vartheta C^{-1}(h; \vartheta, \varphi) \times \right. \\
 & \times \sigma \left[ \alpha_0(\vartheta, \varphi), \beta_0(\vartheta, \varphi); \alpha(\vartheta', \varphi'), \beta(\vartheta', \varphi') \right] \sin \alpha(\vartheta', \varphi') \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\vartheta', \varphi')} \right| + \\
 & + P \left[ h; \vartheta', \varphi', \vec{\rho} - \vec{\Phi}(h; \vartheta', \varphi'; \vartheta, \varphi) \right] \sin \vartheta' \cos \vartheta' C^{-1}(h; \vartheta', \varphi') \times \quad (5) \\
 & \times \sigma \left[ \alpha_0(\vartheta', \varphi'), \beta_0(\vartheta', \varphi'); \alpha(\vartheta, \varphi), \beta(\vartheta, \varphi) \right] \sin \alpha(\vartheta, \varphi) \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\vartheta', \varphi')} \right| \} d\vartheta' d\varphi'.
 \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что полученное уравнение удовлетворяет закону сохранения энергии: при интегрировании по всем возможным для уравнения  $h$  значениям  $\vartheta$ ,  $\varphi$  и  $\vec{\rho}$  правая часть (5) обращается в ноль. Это естественно, поскольку в отсутствие поглощений энергия, внутри ионосферного слоя, не накапливается.

В настоящей статье приводится феноменологический вывод уравнения баланса энергии, поскольку он позволяет яснее представить физику рассматриваемого процесса. Более формальный вывод уравнения (5) из уравнения переноса излучения в случайно-неоднородной магнитоактивной плазме [4] осуществляется в работе [5].

Уравнение (5) может служить основой численного алгоритма для определения пространственного распределения интенсивности сигнала при наличии рассеяния. В следующем разделе вводятся некоторые упрощения, позволяющие получить ряд результатов аналитически или с минимальным использованием численных методов.

**2. Уравнение дрейфового приближения.** Проинтегрируем левую и правую части уравнения (5) по всем возможным для уровня  $h$  значениям  $\vartheta$  и  $\varphi$ , и во втором слагаемом правой части полученного равенства поменяем местами штрихованные и нештрихованные переменные. В результате получим уравнение

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(h; \vec{\rho})}{dh} = & \int \left\{ -P(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho}) + P \left[ h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho} - \vec{\Phi}(h; \vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi') \right] \right\} \times \\
 & \times \sigma \left[ \alpha_0(\vartheta, \varphi), \beta_0(\vartheta, \varphi); \alpha(\vartheta', \varphi'), \beta(\vartheta', \varphi') \right] \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \alpha(\vartheta', \varphi') \times \quad (6) \\
 & \times \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\vartheta', \varphi')} \right| C^{-1}(h; \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi d\vartheta' d\varphi',
 \end{aligned}$$

где  $P(h; \vec{\rho}) = \int P(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho}) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Теперь снимем интегрирова-

ние по  $\vartheta, \varphi$  в уравнении (6):

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho})}{dh} = & \int d\vartheta' d\varphi' \left\{ -\tilde{P}(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho}) + \tilde{P}\left[h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho} - \vec{\Phi}(h; \vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi')\right] \right\} \times \\ & \times \sigma \left[ \alpha_0(\vartheta, \varphi), \beta_0(\vartheta, \varphi); \alpha(\vartheta', \varphi'), \beta(\vartheta', \varphi') \right] \sin \alpha(\vartheta', \varphi') \times \\ & \times \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\vartheta', \varphi')} \right| C^{-1}(h; \vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Решение уравнения (7) является решением уравнения (6). То же самое, очевидно, справедливо для уравнений (5) и (6). Нетрудно показать, что решение уравнения (5) представляется в виде суммы  $P = \tilde{P} + P'$ , где  $\tilde{P}$  есть решение уравнения (7), а  $P'$  — некая добавка, интеграл от которой по всем значениям  $\vartheta, \varphi$  и  $\vec{\rho}$  равен нулю. В то же время, интегрирование величины  $\tilde{P}$  дает полный поток энергии через плоскость  $z = z_0$ , который, в соответствии с законом сохранения энергии, не меняется из-за наличия рассеяния. Различие свойств двух слагаемых дает основание предположить, что член  $\tilde{P}$  является главным в полном решении уравнения (5). Далее в настоящей статье мы исследуем решение уравнения (7) и покажем, что описываемые им физические эффекты находятся в соответствии с экспериментальными данными.

Разложим функцию  $\tilde{P}$  в правой части уравнения (7) в ряд Тейлора по величине  $\vec{\Phi}$  и будем считать существенным только первый остающийся после сокращения член этого ряда. Очевидно, что это справедливо, если  $|\vec{\Phi}|$  является в определенном смысле малой величиной. В этом приближении, которое можно назвать малоугловым в смысле инвариантных переменных  $\vartheta, \varphi$ , получаем следующее уравнение дрейфового типа

$$\frac{d\tilde{P}(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho})}{dh} = -\vec{R}(h; \vartheta, \varphi) \frac{d\tilde{P}(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho})}{d\vec{\rho}}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{R}(h; \vartheta, \varphi) = & C^{-1}(h; \vartheta, \varphi) \int d\vartheta' d\varphi' \vec{\Phi}(h; \vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi') \times \\ & \times \sigma \left[ \alpha_0(\vartheta, \varphi), \beta_0(\vartheta, \varphi); \alpha(\vartheta', \varphi'), \beta(\vartheta', \varphi') \right] \times \\ & \times \sin \alpha(\vartheta', \varphi') \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\vartheta', \varphi')} \right|. \end{aligned} \quad (9)$$

Проведенная операция подобна разложению Крамерса—Мойала в основном кинетическом уравнении, в результате которого получается уравнение

Фоккера-Планка [9]. Член в уравнении Фоккера-Планка, содержащий первую производную, носит название дрейфового. Мы будем пользоваться тем же термином для краткой характеристики уравнения (8). Поскольку сечение  $\sigma$  определяет вероятность перехода  $\vartheta, \varphi \rightarrow \vartheta', \varphi'$ ,  $\tilde{R}$  представляет собой среднее значение вектора смещения  $\vec{\Phi}$  по всем возможным вероятностям перехода из состояния  $\vartheta, \varphi$ . Отметим, что с областью применимости используемого приближения шире, чем у обычного приближения малого углового рассеяния, анализ конструкции Поверлейна показывает, что при рассеянии вблизи уровня отражения вертикально падающей на слой волны большие изменения углов  $\alpha, \beta$ , соответствуют малым отклонениям инвариантного угла  $\vartheta$ .

Решение уравнения (8), которое нетрудно получить с помощью Фурье-разложения по переменной  $\vec{\rho}$ , имеет следующий простой вид

$$\tilde{P}(h; \vartheta, \varphi, \vec{\rho}) = P_0[\vartheta, \varphi, \vec{\rho} - \vec{D}(\vartheta, \varphi)], \quad (10)$$

где  $\vec{D}(\vartheta, \varphi) = \int_{h_K}^{h_N} \vec{R}(h; \vartheta, \varphi) dh$ ;  $h_K, h_N$  — высоты, ограничивающие рассеивающий слой. В случае отражения от слоя плазмы  $h_K = h_N$  и  $\int_{h_K}^{h_N} \rightarrow \int_{h_M}^{h_M} + \int_{h_M}^{h_K}$ , где  $h_M$  — высота точки поворота луча с параметрами  $\vartheta, \varphi$ . Таким образом, в рассматриваемом приближении рассеяние приводит к деформации поля излучения вне слоя плазмы без изменения вида функции, описывающей пространственное и угловое распределение интенсивности.

Если в каждую точку  $\vec{\rho}$  на поверхности Земли при отражении от регулярного ионосферного слоя приходит только один луч с параметрами  $\vartheta_0(\vec{\rho}), \varphi_0(\vec{\rho})$  (так будет, если источник точечный и частота меньше критической), для функции  $P_0$  можно использовать выражение типа

$$P_0(\vartheta, \varphi, \vec{\rho}) = \frac{2\pi}{3} \tilde{P}_0(\vec{\rho}) \sigma \left[ -\cos \vartheta + \cos \vartheta_0(\vec{\rho}) \right] \sigma \left[ \varphi - \varphi_0(\vec{\rho}) \right], \quad (11)$$

где величина  $\tilde{P}_0(\vec{\rho})$  имеет смысл потока энергии в точке  $\vec{\rho}$  в отсутствие рассеяния. Подставляя (11) в (10) и производя интегрирование по углам, для потока энергии в точке  $\vec{\rho}$  получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\vec{\rho}) &= \tilde{P}_0 \left[ \vec{\rho} - \vec{D}(\vartheta_1, \varphi_1) \right] \left| 1 + \vartheta_{0\rho} \left[ \vec{\rho} - \vec{D}(\vartheta_1, \varphi_1) \right] \vec{D}_\vartheta(\vartheta_1, \varphi_1) \right|^{-1} \times \\ &\times \left| 1 + \varphi_{0\rho} \left[ \vec{\rho} - \vec{D}(\vartheta_1, \varphi_1) \right] \vec{D}_\varphi(\vartheta_1, \varphi_1) \right|^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

где индексы  $\rho, \vartheta, \varphi$  означают производные по соответствующей переменной, а  $\vartheta_1$  и  $\varphi_1$  представляют собой новые углы прихода лучей и удовлетворяют системе уравнений

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 \left[ \vec{\rho} - \vec{D}(\vartheta_1, \varphi_1) \right], \quad \varphi_1 = \varphi_0 \left[ \vec{\rho} - \vec{D}(\vartheta_1, \varphi_1) \right]. \quad (13)$$

В соответствии с (12), (13) наблюдатель, находящийся в точке  $\vec{r}$ , обнаружит два эффекта связанных с рассеянием в ионосфере — изменение углов прихода волны и изменение интенсивности принимаемого сигнала. Эффекты размывания углового спектра радиоизлучения имеют более высокий порядок малости и для их описания необходим учет следующих ("дифузионных") членов в разложении функции  $\tilde{P}$  по величине  $\Phi$  в формуле (8).

Отметим, что полученные выражения (10) и (12), (13) справедливы для произвольного плоскостратифицированного слоя магнитоактивной плазмы. Однако в целях упрощения выкладок, численная оценка указанных эффектов проводится в следующем разделе для линейного слоя изотропной плазмы.

**3. Численный анализ полученного решения.** Решение (10) уравнения (8) получено в квадратурах. Поскольку подынтегральные выражения довольно сложны, требуется применение методов численного интегрирования. Трансцендентные уравнения (13) также могут быть решены только численно. В качестве примера приведем результаты расчетов по формулам (10), (12), (13) для случая изотропной плазмы, линейный слой ( $dh/dv = H$ ) который расположен на высоте  $h_0$ . Сечение рассеяния в изотропной плаэме имеет вид [6]

$$\sigma(\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} k_0^4 v^2 F\left[\vec{q}(\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta)\right], \quad (14)$$

где  $k_0 = \omega/c$ ,  $F(\vec{q})$  — пространственный спектр неоднородностей, который мы выберем в виде

$$F(\vec{q}) = \delta_R^2 C_\nu l_\perp^2 \left[1 + l_\perp^2 q_\perp^2\right]^{-\nu/2} \delta(q_\parallel), \quad (15)$$

где

$$C_\nu = \frac{\Gamma(\nu/2)}{2\pi} \left[ \Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right) - 2\left(\frac{R}{2l_\perp}\right) K_{(\nu-2)/2}\left(\frac{R}{l_\perp}\right) \right]^{-1}$$

— нормировочная константа,  $\Gamma_x$  — гамма-функция,  $K_\mu(z)$  — функция Маклоренда,  $\delta(x)$  — дельта-функция,  $l_\perp = l_m/2\pi$ ,  $l_m$  — максимальный поперечный масштаб в спектре неоднородностей. Нормировка спектра (15) произведена на величину структурной функции

$$\delta_R^2 = \left\langle \left[ \frac{\Delta N}{N}(\vec{r} + \vec{R}) - \frac{\Delta N}{N}(\vec{r}) \right]^2 \right\rangle$$

в поперечном масштабе  $\vec{R}$ . Как следует из (15), неоднородности считаются бесконечно вытянутыми (как бы вдоль силовых линий магнитного

чили). В этом случае продольная и поперечная составляющие вектора рассеяния имеют вид

$$q_{\parallel} = k_0 n (\cos \alpha - \cos \alpha_0); \quad (16)$$

$$q_{\perp}^2 = k_0^2 n^2 \left[ (\sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha_0 \cos \beta_0)^2 + (\sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha_0 \sin \beta_0)^2 \right],$$

где  $n^2 = 1 - v$  — показатель преломления. Отметим, что в выражении (9) удобно перейти к интегрированию по текущим значениям полярного  $\tilde{\vartheta}$  и азимутального  $\tilde{\varphi}$  углов волнового вектора в системе координат  $xyz$ , которые связаны с инвариантными переменными следующими соотношениями

$$n(v) \sin \tilde{\vartheta} = \sin \vartheta; \quad n^2(v) \cos^2 \tilde{\vartheta} = n^2(v) - \sin^2 \vartheta; \quad \tilde{\varphi} = \varphi. \quad (17)$$

Углы  $\alpha, \beta$  в (16) можно выразить через координаты  $\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}$  с помощью тригонометрических соотношений, которые мы здесь выписывать не будем. Определим теперь последний фактор в подынтегральном выражении (9) — вектор смещения  $\vec{\Phi}$ . В линейном слое изотропной плазмы его компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_x(v; \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}, \tilde{\vartheta}', \tilde{\varphi}') &= f(\tilde{\vartheta}') \cos \tilde{\varphi}' - f(\tilde{\vartheta}) \cos \tilde{\varphi}; \\ \Phi_y(v; \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}, \tilde{\vartheta}', \tilde{\varphi}') &= f(\tilde{\vartheta}') \sin \tilde{\varphi}' - f(\tilde{\vartheta}) \sin \tilde{\varphi}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$f(\tilde{\vartheta}) = 2H n \sin \tilde{\vartheta} \left( \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \tilde{\vartheta}} + n \cos \tilde{\vartheta} \right) + h_0 n \sin \tilde{\vartheta} / \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \tilde{\vartheta}}.$$

Из-за наличия дельта-функции в спектре неоднородностей (15) численная оценка выражения для  $\vec{D}(\vartheta_1, \varphi_1)$  сводится к взятию двукратного интеграла — по  $v$  и одному из углов. Определение  $\vec{D}(\vartheta_1, \varphi_1)$  производится с помощью итерационной процедуры решения системы уравнений (13). Если точечный источник находится в начале координат, то для небольших расстояний от него, справедливы выражения

$$\vartheta_0(\tilde{\rho}) \simeq |\tilde{\rho}| / \left( 2(2H + h_0) \right); \quad \operatorname{tg} \varphi_0(\tilde{\rho}) = \rho_v / \rho_x. \quad (19)$$

Опыт показывает, что для нахождения  $\vec{D}(\vartheta_1, \varphi_1)$  с точностью не хуже 1 км необходимы, в среднем, 3–4 итерации.

Конкретные расчеты проводились для следующего набора параметров:  $h_0 = 150$  км,  $H = 10$  км; угол между вертикалью и магнитным полем  $25^\circ$ ;

$\nu = 3$ ;  $l_m = 10$  км;  $R = 1$  км;  $\delta_R = 3 \cdot 10^{-3}$  (уровень ионосферных неоднородностей, характерный для ночных спокойных условий);  $\omega/2\pi = 5$  МГц. Относительная погрешность при вычислении интегралов составляла 0,05. Результаты расчетов представлены на рис.1, 2.

Рис.1 демонстрирует изменение углов прихода отражений от ионосфера радиоволны из-за рассеяния при распространении на короткой трассе (порядка 100 км и менее). Квадратиком отмечено положение передающей станции, показана проходящая через нее плоскость магнитного меридиана. Смысл отрезков с кружками на одном из концов следующий. Наблюдаемые углы прихода радиолуча будут одинаковы в точке, отмеченной кружком, при наличии рассеяния в ионосферном слое, и на свободном конце отрезка без рассеяния, но при прочих равных условиях. Таким образом, при наличии мелкомасштабных неоднородностей в ионосфере, наблюдаемое положение передающей станции не совпадает с истинным, она кажется смещенной за свою плоскость магнитного меридиана. Смещение по азимуту может достигать десятков градусов и особенно значительно для радиотрасс, проходящих под небольшими углами к плоскости магнитного меридиана.

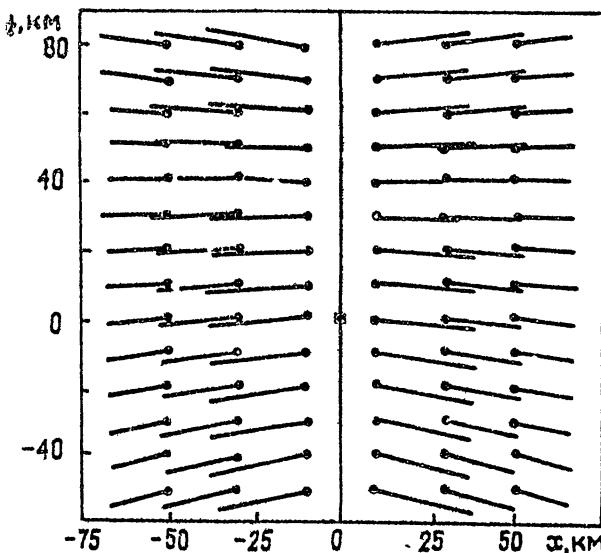


Рис.1:

Рис.2 характеризует изменение интенсивности отраженной от ионосферы волны при наличии рассеяния. Показаны изолинии равного отношения интенсивности с учетом рассеяния к интенсивности без учета рассеяния (правая часть формулы (12) без первого множителя). При до-

статочно широкой диаграмме направленности источника этот результат, равно как и предыдущий, не зависит от ее конкретной формы. Видно, что есть тенденция к уменьшению интенсивности принимаемого сигнала при приближении к плоскости магнитного меридиана. Из-за большого значения производной  $D_\varphi(\vartheta_1, \varphi_1)$  это уменьшение особенно значительно в плоскости меридиана передающей станции (и, в частности, в ее месте расположения). При указанных выше параметрах ослабление достигает — 18,2 дБ.

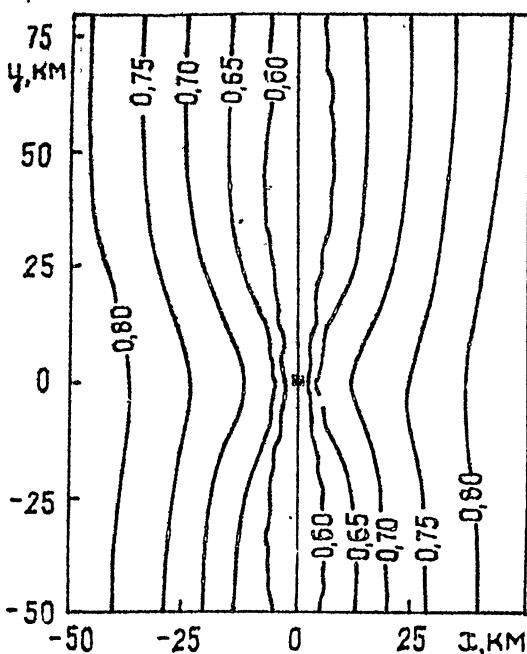


Рис.2:

**4. Сравнение с экспериментальными данными.** Уменьшение интенсивности отраженного от ионосферы сигнала при вертикальном радиовондировании должно интерпретироваться наблюдателем как дополнительный бесстолкновительный механизм затухания радиоволн. Это явление постоянно наблюдается в естественных условиях, приводя к повышенным значениям эффективной частоты соударений (см., например, [10, 11]). Есть веские основания полагать, что дополнительное поглощение связано с развитием мелкомасштабных неоднородностей в ионосфере. Оно, в частности, проявляется сильнее почью, чем в дневных условиях, когда ионосфера менее возмущена, и может достигать 10 ÷ 15 дБ [10].

Благоприятны условия для регистрации ослабления интенсивности от-

раженных от ионосферы радиоволны при возбуждении искусственной ионосферной турбулентности. В нагревных экспериментах действительно наблюдается аномальное поглощение пробной обыкновенной волны и волны накачки [12-14]. Это явление обычно интерпретируется как следствие трансформации обыкновенных волн в плазменные волны при рассеянии на искусственных неоднородностях, сильно вытянутых вдоль магнитного поля [15, 16]. Полученные в настоящей работе результаты позволяют предположить, что эффект аномального поглощения радиоволн может быть в значительной степени связан с обычным рассеянием на мелкомасштабной искусственной турбулентности.

В качестве экспериментального подтверждения результатов, относящихся к изменению углов прихода отраженного от ионосферы радиолуча можно указать работу [17]. В ней представлены результаты радиофизических измерений на среднеширотной трассе длиной 102 км, расположенной под углом около  $7^{\circ}$  к плоскости магнитного меридиана. Если днем средний азимут приходящего луча примерно соответствовал истинному направлению на передающую станцию, то в течение ночи имели место сильные вариации этой величины, а ее среднее значение смешалось на  $26^{\circ}$ . Как количественно, так и качественно это соответствует результатам настоящей работы. Ведь поочу уровень неоднородностей усиливается и, кроме того, ионизованный слой расположен выше, так что волна может проникать в него глубже. Оба фактора способствуют увеличению оптической толщины радиотрассы по процессу рассеяния.

**Заключение.** В настоящей работе на основе феноменологического подхода выведено уравнение баланса энергии излучения в случайно-неоднородном плоскостратифицированном слое плазмы. Благодаря использованию инвариантных лучевых переменных это уравнение удается преобразовать в уравнение дрейфового типа, которое описывает деформацию пространственного распределения энергии радиоизлучения вследствие многократного рассеяния. Численно исследованы два связанных с этим эффекта: изменение углов прихода радиоволн при слабонаклонном распространении и изменение интенсивности отраженного от плазменного слоя радиоизлучения. Их практическое значение связано с такими областями, как радиопеленгация на коротких трассах, КВ-радиолокация, интерпретация результатов вертикального зондирования ионосферы, а также диагностика неоднородной структуры плазмы и плазмоподобных сред.

Предложенная методика может быть использована для исследования эффектов рассеяния радиоволн, пересекающих плазменный слой (например, при трансионосферном зондировании), или распространяющихся наклонно (например, в окрестности максимальной применимой частоты). Это, также как и анализ полного решения уравнения баланса энергии в

плоскостратифицированном слое, будет проделано в последующих работах.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.А. Волновые явления в ионосферной и космической плазме. - М.: Наука, 1987.
2. Fejer B.G., Kelley M.C. // Rev.Geophys.Space Phys. 1980. V.18. N 2. P.401.
3. Бронин А.Г., Денисенко П.Ф., Заботин Н.А. // Геомагнетизм и аэрономия. 1993. Т.33. N 1. С.169.
4. Бронин А.Г., Заботин Н.А. // ЖЭТФ. 1992. Т.102. N 4(10). С.1167.
5. Бронин А.Г., Заботин Н.А. // Изв.вузов. Радиофизика (тот же выпуск).
6. Poeverlein H. // Z.Angew.Phys. 1949. V.1. P.517.
7. Budden K.G. The propagation of radiowaves. - Cambridge: Cambridge Univ.Press. 1985.
8. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. - М.: Наука, 1967.
9. Репке Г. Неравновесная статистическая механика. - М.: Мир, 1990.
10. Водолазкин В.И., Данилкин Н.П., Денисенко П.Ф., Фаер Ю.И. // Геомагнетизм и аэрономия. 1983. Т.23. N 1. С.25.
11. Setty C.S.G.K., Nagpal O.P., Dharvan V.K. // Indian J. of Pure and Appl.Phys. 1971. V.9. N 8. P.519.
12. Бетикович В.В., Бенедиктов Е.А., Гетманцев Г.Г. и др. // Изв.вузов. Радиофизика. 1975. Т.18. С.516.
13. Ерухимов Л.М., Метелев С.А., Митякова Э.З. и др. // Сб.Тепловые нелинейные явления в плазме. - Горький: НИРФИ, 1979.
14. Mjolhus E. // J.Geophys.Res. 1985. V.90. N A5. P.4269.
15. Erukhimov L.M., Mityakov N.A. // In.: WITS Handbook. - Urbana: SCOCTEP. 1989. V.2. P.267.
16. Васьков В.В., Гуревич А.В. // Физика плазмы. 1976. Т.2. N 1. С.113.
17. Baulch R.N.E., Butcher E.C., Devlin J.C., Hammer P.R. // J.Atmos. Terr.Phys. 1984. V.46. N 10. P.895.

Научно-исследовательский  
институт физики  
при Ростовском университете

Поступила в редакцию  
16 декабря 1992 г.

**RADIATION ENERGY TRANSFER IN IONOSPHERIC LASER WITH  
SMALL-SCALE RANDOM IRREGULARITIES***N.A.Zabotin*

On the base of the phenomenological approach the equation of energy balance in a randomly irregular plane-stratified layer of plasma has been derived. Use of the small-angle approximation in the invariant ray coordinates allows one to transform it into a simpler equation that describes the deformation of spatial distribution of radiation energy due to the multiple scattering from the anisotropic irregularities. Two effects have been investigated numerically: shift of the arrival angles of waves under slightly oblique propagation and alteration of the intensity of radiation reflected from a plasma layer.

# О ПРИРОДЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ВАРИАЦИЙ ДОППЛЕРОВСКОГО СМЕЩЕНИЯ ЧАСТОТЫ КВ РАДИОСИГНАЛОВ, РАССЕЯННЫХ ОБЛАСТЬЮ ИИТ

*А.Ф.Беленов, П.В.Пономаренко, В.Г.Синицын,  
Ю.М.Ямпольский*

В статье изложены результаты экспериментального исследования квазипериодических колебаний допплеровского смещения частоты (ДСЧ) декаметровых сигналов, рассеянных искусственной ионосферной турбулентностью. Высказано предположение о том, что возможной причиной таких колебаний могут служить ионосферные МГД-волны естественного происхождения. Оценка амплитуды магнитной составляющей таких волн, приводящая к наблюдаемым значениям вариаций ДСЧ, составила  $1\gamma$ .

Одним из проявлений нелинейного взаимодействия мощного КВ излучения с ионосферой на высотах  $F$ -области является турбулизация плазмы. Эффективным методом диагностики такой искусственно возбужденной турбулентности служит наблюдение пробных радиосигналов декаметрового диапазона, рассеянных возмущенной областью. Этот метод позволяет исследовать мелкомасштабные неоднородности среды с размерами  $10 \div 100$  м. В угловых и частотных спектрах сигнала в результате рассеяния на ИИТ появляются дополнительные составляющие, определяемые геометрией рассеяния и скоростью движения неоднородностей  $\vec{v}$ . Подробные исследования спектральных и статистических характеристик декаметровых волн, рассеянных ИИТ, описаны в [1]. В данной статье анализируются квазипериодические вариации спектральных составляющих рассеянного поля, которые можно отнести к проявлениям естественных процессов в возмущенной ионосфере.

В НИРФИ (Н.Новгород) и РИАН Украины (Харьков) исследовались спектры сигналов от широковещательных и специальных КВ передатчиков (Москва, Киев, Воронеж), которые рассеивались турбулентностью, стимулированной мощным нагревным стендом "Сура". Прием пробных сигналов осуществлялся с помощью большой ФАР радиотелескопа УТР-2 [2]. Схема измерений представлена на рис.1. Пробные частоты  $f_0$  выбирались таким образом, чтобы на прямой трассе "передатчик — приемник" выполнялось условие  $f > \text{МПЧ}$ . Это позволило практически избавиться

от мешающего влияния прямого сигнала и исследовать тонкие вариации спектральных характеристик в широком динамическом диапазоне.

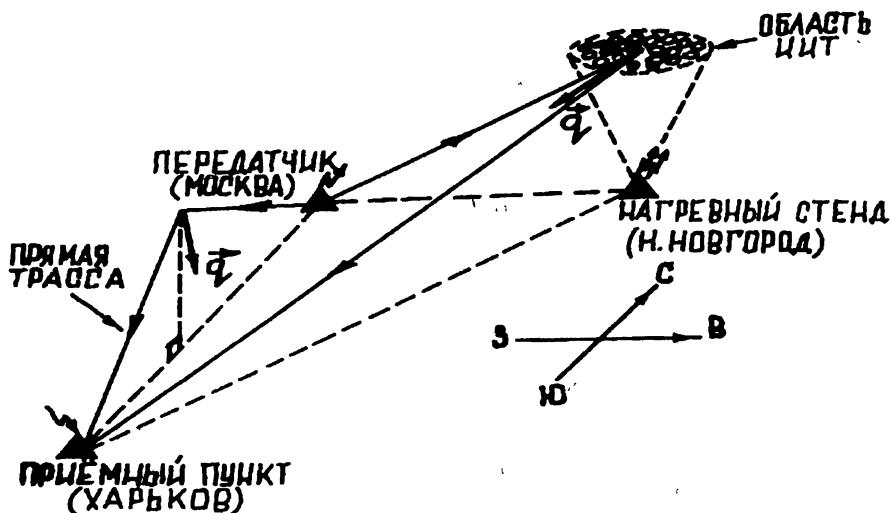


Рис.1:

В целом ряде сеансов были обнаружены квазипериодические осцилляции допплеровского смещения частоты  $F_d$  (рис.2).

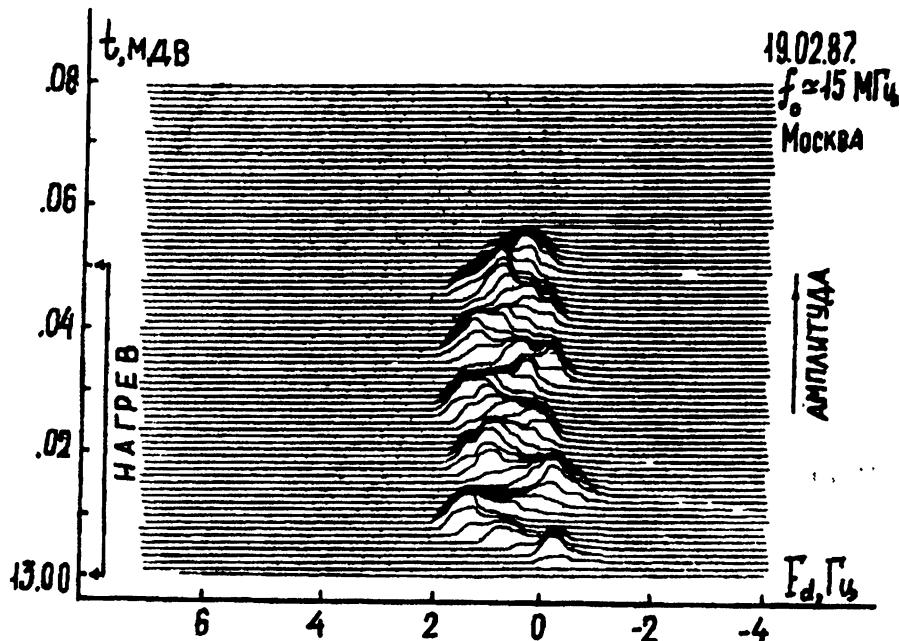


Рис.2:

Анализ нескольких десятков сеансов позволил установить следующее:

1. Осцилляции  $F_d$  наблюдались как в различные сезоны, так и в разное время суток.

2. Период колебаний  $T$  изменялся в интервале  $45 < T < 300$  с.

3. Размах осцилляций  $\delta F_d$  варьировался от десятых долей герца до нескольких герц на фоне постоянной сдвигки  $F_{d0} \approx 1 \div 4$  Гц. При этом весь спектр сигнала смещался по частоте как единое целое.

Заметим сразу, что постоянная составляющая допплеровского смещения  $F_{d0}$  связывается с регулярным дрейфом ионосферных неоднородностей [1].

4. Осцилляции  $F_d$ , одновременно наблюдавшиеся для пространственно разнесенных передатчиков (Москва, Киев) на отличающихся частотах (15 и 20 МГц), были синфазны.

5. Колебания ДСЧ сигналов, одновременно принятых остронаправленными антеннами УГР-2 от разных участков ИИТ, были идентичны и совпадали с поведением  $F_d$  при приеме на исправленную антенну (одиночный вибратор).

6. В спектрах прямого сигнала, рассеянного на трассе "передатчик — приемник" естественными ионосферными неоднородностями [1], в большинстве сеансов подобные осцилляции не наблюдались. Лишь в случае экстремально сильных (более 2 Гц) вариаций  $F_d$  сигнала, рассеянного ИИТ, были отмечены слабые (не более 0,3 Гц) синхронные колебания частоты прямого сигнала.

7. В единичных случаях были обнаружены вариации интенсивности рассеянного ИИТ сигнала, повторяющие осцилляции  $F_d$ .

Следует отметить, что подобные колебания  $F_d$  при обратном рассеянии КВ сигналов от области ИИТ описаны также в работах [3, 4]. Например, в [3] на трассе, протяженностью около 1300 км, их период составил 20...60 с, а амплитуда — около 1 Гц при  $f_0 = 10 \div 20$  МГц. В то же время на короткой трассе 110 км при  $f_0 = 2,7 \div 4$  МГц такие эффекты отсутствовали.

Квазипериодичность наблюдавшихся колебаний  $F_d$  свидетельствует о наличии волновых процессов, возмущающих плазму в области ИИТ. В ионосфере известны волны двух типов с периодами порядка нескольких минут [5]:

1. Акустические.

2. Магнитогидродинамические.

Первые распространяются в различных направлениях со скоростями  $500 \div 800$  м/с. Их максимальный период ограничен частотой акустического резонанса атмосферы и не может превышать 10 мин [5]. При  $T \approx 1$  мин длина волны составляет несколько десятков километров.

МГД-волны распространяются в ионосфере и магнитосфере с альфавеновскими скоростями. Основным способом их обнаружения является

регистрация микропульсаций геомагнитного поля  $\vec{H}_0$  [6]. Пульсации с периодами  $45 \leq T \leq 600$  с по общепринятой классификации относятся к типам Pc IV, V и ассоциируются с различными модами и гармониками альфвеновских колебаний магнитосферы [6]. Пространственный масштаб наблюдаемых на Земле микропульсаций Pc IV, V естественного происхождения — порядка  $10^3$  км [6].

Поскольку в нашем случае спектр сигнала, формируемый всем рассеивающим объемом ИИТ, перемещался по частоте как единое целое, можно сделать вывод о том, что пространственный масштаб колебаний всегда превышал размеры области ИИТ  $L \simeq 10^3$  км. Это дало серьезные основания считать, что мы имели дело с МГД-волнами.

В пользу такого предположения свидетельствуют также известные экспериментальные данные о высокой корреляции между микропульсациями геомагнитного поля и вариациями ДСЧ сигналов, отраженных от ионосферы при  $f_0 < \text{МПЧ}$  (см., например, [7, 8]).

Рассмотрим возможный механизм модуляции  $F_d$  рассеянных сигналов МГД-волной. Будем считать, что при  $f_0 > \text{МПЧ}$  основной вклад в допплеровское смещение частоты дает направленное движение ионосферных неоднородностей со скоростью  $\vec{v}$ :

$$2\pi F_d \simeq \vec{q}\vec{v},$$

где  $\vec{q}$  — вектор рассеяния радиоволны. Поскольку плазма  $F$ -области, где обычно локализована ИИТ, "замагничена", электроны и ионы "вморожены" в  $\vec{H}_0$  и при прохождении МГД-волны колеблются вместе с силовыми линиями геомагнитного поля. Это приводит к модуляции  $\vec{v}$  и, следовательно,  $F_d$ . Для малой амплитуды альфвеновской волны  $\delta H \ll H_0$  ее связь с возмущением скорости  $\delta v$  линейна [9]:

$$\delta v \simeq \delta H / (4\pi\rho)^{1/2},$$

где  $\rho$  — плотность плазмы ( $\rho \simeq m_i N_i$ ,  $m_i$  — масса ионов,  $N_i$  — их концентрация). На высотах  $F$ -слоя ионосферы основным ионом является  $O^+$  с типичным значением концентрации  $N_i \sim 10^6 \text{ см}^{-3}$  [10]. Характерная величина вариаций скорости при  $\delta F_d \sim 1 \text{ Гц}$  составляет  $\delta v \geq 10^{-3} \text{ см/с}$ . Отсюда следует оценка  $\delta H \sim 10^{-5} \text{ Гс} = 1\gamma$ , что согласуется с известными данными об амплитуде микропульсаций геомагнитного поля [6].

В данной схеме легко интерпретировать отличие поведения  $\delta F_d$  на прямой трассе и при рассеянии от ИИТ. Оно может быть обусловлено различием на этих двух трассах взаимной ориентации векторов  $\vec{q}$  и  $\vec{v}$ . Поскольку альфвеновская волна является поперечной ( $\delta\vec{v} \perp \vec{H}_0$ ), а магнитное наклонение в районе измерений составляет около  $70^\circ$  [10], горизонтальная компонента вариаций скорости дрейфа рассеивателей  $\delta\vec{v}$  всегда существенно превышает вертикальную. В то же время горизонтальная

составляющая  $\vec{q}$  на прямой трассе значительно меньше, чем в области ИИТ (рис.1). Эти обстоятельства и приводят к наблюдаемому отличию значений  $\delta F_d$ . Теми же причинами можно объяснить и отсутствие видимых колебаний  $F_d$  на короткой трассе в работе [3], когда вектор  $\vec{q}$  ориентирован почти вертикально.

Необходимо отметить, что в тех случаях, когда по экспериментальным данным удавалось восстановить полный вектор  $\delta \vec{v}$ , можно было судить о поляризации микропульсаций. Вектор  $\delta \vec{H}$  в таких ситуациях был ориентирован преимущественно в долготном направлении. Это соответствует так называемой тороидальной моде колебаний силовых линий  $\vec{H}_0$  [11].

Изложенная интерпретация наблюдавшихся осцилляций  $F_d$  объединяет их в одну схему с описанным ранее эффектом "эхо-рассеяния" декаметровых радиоволн от области ИИТ в период ее релаксации [12]. Вариации  $F_d$  в сигналах, рассеиваемых ИИТ в стационарном режиме нагрева, связаны, очевидно, с естественными микропульсациями геомагнитного поля. В то же время, в момент выключения нагревного стенда может возникать альфеновский импульс, колеблющийся вдоль силовой линии между магнитоспряженными точками с периодом 30..40 с. Если амплитуда его электрической составляющей близка к пороговому значению для токово-дрейфовой неустойчивости (около 1 мВ/м) [13], это может приводить к повторной "подкачке" мелкомасштабной турбулентности в пределах релаксирующей ИИТ. На этих неоднородностях вновь происходит рассеяние пробных радиоволн — "эхо-рассеяние". Сходный характер этих двух эффектов подчеркивается наблюдавшейся в ряде случаев для стационарного режима нагрева модуляцией амплитуды рассеянного сигнала, которая была синхронна с модуляцией  $F_d$ .

Следует отметить, что геомагнитная природа обнаруженных осцилляций  $F_d$  еще нуждается в подтверждении. Для этого необходимо проведение комплексных экспериментов, включающих прямую регистрацию микропульсаций в районе области возмущения. Эти же измерения позволяют ответить на вопрос о возможной связи пульсаций с режимом работы нагревного стенда. Заметим, что авторами работы [14] экспериментально было зафиксировано возникновение короткопериодных микропульсаций с  $T \sim 1$  с при модуляции ионосферы мощным радиоизлучением КВ и СВ диапазонов.

В заключение авторы выражают благодарность за полезные обсуждения работы В.Ю.Трахтенгерцу и Л.М.Ерухимову, а также коллегам из НИРФИ и РИАН, принимавшим участие в проведении сложных измерений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белей В.С., Беленов А.Ф., Галушко В.Г. и др. // Препринт N 285. – НИРФИ: Іоркій, 1989.
2. Брауде С.Я., Мень А.В., Содин Л.Г. Радиотелескоп декаметрового диапазона волн УТР-2. – В сб.: Ачченлы. – М.. Связь, 1987. Вып.26.С.3.
3. Гудин В.А., Дейнеко В.Н., Иванов В.И. и др. // Тезисы докладов XVI Всесоюзной конференции по распространению радиоволни. – Харьков: 1990. Ч.1. С.153.
4. Андреев А.Д., Благовещенская И.Ф., Бородкин В.Н. и др. // Тезисы докладов XVI Всесоюзной конференции по распространению радиоволни. – Харьков: 1990. Ч.1. С.153.
5. Харгривс Дж.К. Верхняя атмосфера и солнечно-земные связи. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
6. Паркинсон У. Введение в геомагнетизм. – М.: Мир, 1986.
7. Альперович Л.С., Волгин А.В., Карпов П.Б. и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 1991. Т.31. N 6. С.1003.
8. Bourdillon T.A., Dellone J., Parent J. // Radio Science. 1989. V.24. N 2. P.183.
9. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. – М.: Автоиздат, 1968.
- 10 Околоземное космическое пространство. Справочные данные /Под ред.Ф.С.Джонсона. – М.: Мир, 1966.
11. Гульельми А.В., Троицкая В.А. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. – М.: Наука, 1973.
12. Ямпольский Ю.М. // Изв.вузов. Радиофизика. 1989. Т.32. N 4. С.519.
13. Гершман Б.Н., Каменецкая Г.Х. // Изв.вузов. Радиофизика. 1973. Т.16. N 7. С.988.
14. Беляев П.П., Поляков С.В., Рапопорт В.О., Трахтенгерц В.Ю. // Материалы Международного симпозиума. – М. 1986. С.126.

Радиоастрономический институт  
АН Украины

Поступила в редакцию  
1 июня 1992 г.

**ON THE ORIGIN OF QUASIPERIODICAL VARIATION IN THE  
DOPPLER SHIFT OF HF RADIO SIGNALS SCATTERED BY AN  
ARTIFICIAL IONOSPHERIC TURBULENCE**

*A.F.Belenov, P.V.Ponomarenko, V.G.Sinitsin,  
Y.M.Yampolski*

Quasiperiodical variation in the doppler shift of HF signals scattered by an artificial ionospheric turbulence have been investigated experimentally. It is assumed that a possible cause for these variations might be natural ionospheric MHD-waves. The magnetic amplitude of such waves resulting in the doppler shift variations of the measured magnitude has been estimated as  $1\gamma$ .

УДК 537.874.6

# РАССЕЯНИЕ ВОЛН ИДЕАЛЬНО ГОФРИРОВАННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ С ПРОСТЕЙШИМИ ФОРМАМИ ГОФРА

*E.B.Копосова*

Исследована дифракция плоских волн на идеально проводящих периодически гофрированных поверхностях с гладкими формами гофра. Проведено сравнение рассеивающих свойств таких поверхностей со свойствами соответствующих им решеток волноводного типа с профилями канавок в виде прямоугольников. Обобщено известное правило эквивалентности свойств решеток с простейшими профилями, обладающими центром симметрии, на решетки с профилями более общего класса.

Дифракционные решетки из элементов разнообразного профиля издавна используются в различных областях физики и техники, таких, как оптика, акустика, антенная и измерительная техника, электроника и т.д. Для конструирования частотно-селективных зеркал представляют интерес режимы рассеяния в один из дифракционных порядков с близким к единице коэффициентом отражения. Численные исследования показывают, что такие режимы имеются практически у любых решеток с достаточно глубоким гофром [1]. В [2, 4] изучены отражательные свойства решетки с профилем канавки в виде прямоугольника, заполненного диэлектриком. На примере ножевой решетки, являющейся предельным случаем геометрии волноводных решеток и допускающей аналитическое рассмотрение, была предложена качественная модель эффектов специфического рассеяния волны решетками волноводного типа.

В канавках рассматриваемой структуры могут распространяться собственные волноводные моды. Их количество  $M$  и частоты определяются шириной канавки на периоде и диэлектрической проницаемостью заполнения. Режимы с большим коэффициентом рассеяния в один из высших порядков возникают как отклики на возбуждение этих мод. Качественный прогноз свойств такой волноводной структуры основан на соотношении количества распространяющихся дифрагированных волн в верхнем полупространстве с несовпадающими постоянными распространений  $N$  и количества распространяющихся волноводных мод в канавках  $M$ . Причем особенно интересные и разнообразные эффекты специфического рассеяния наблюдаются в области параметров, соответствующих  $M > N > 2$ .

Во многих технических конструкциях использование гофрированных поверхностей с элементами, содержащими углы, а также диэлектрические заполнения, нежелательно. Предсказание же свойств гладкого гофрированных поверхностей, ввиду отсутствия аналитически определяемого дискретного ряда собственных колебаний в калавках, на базе этой модели затруднительно. Однако многочисленные исследования, представленные в [1, 3], демонстрируют качественное сходство отражательных решеток с формой гофра, имеющей центр симметрии — треугольной, синусоидальной и прямоугольной. В [3] предложено эмпирически выведенное правило эквивалентности, заключающееся в том, что свойства рассеяния волны отражательными решетками перечисленных профилей, в основном, определяются в области  $N = 1$  амплитудой первой гармоники разложения профиля в гармонический ряд. Эта эквивалентность распространяется и на случаи полного антизеркального отражения (ПАО).

Исследуем, на основании численного решения интегрального уравнения, свойства отражательных решеток простейших гладких профилей, в общем случае не имеющих центра симметрии, и покажем их близость свойствам соответствующих решеток волноводного типа.

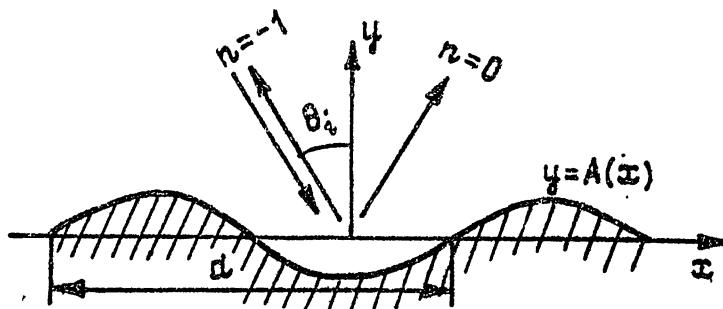


Рис.1:

Пусть плоская волна падает на идеально-проводящую периодически гофрированную поверхность (рис.1), однородную в направлении  $z$  с профилем  $y = A(x)$ . Составляющую полного электрического поля  $E_z$  или магнитного  $H_z$  (в зависимости от поляризации волны) можно представить как некую скалярную функцию  $\Psi(x, y)$ . В соответствии с принципом Гюйгенса полное поле  $\Psi(x, y)$  определяется, согласно теореме Грина и формуле Кирхгофа [5], в виде

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & \psi_i(x, y) + \int ds' \left\{ G(x - x', y - y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(x', y') - \right. \\ & \left. - \Psi(x', y') \frac{\partial}{\partial n'} G(x - x', y - y') \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $y' = A(x')$ , через  $\Psi = \exp(ik_x x - ik_y y)$  обозначено поле падающей волны, а  $ds' = dx' \sqrt{1 + (dy'/dx')^2}$ , представляет собой элемент дуги профиля поверхности. Интегрирование производится по периоду структуры  $d$ .

Двумерная функция Грина

$$G(x - x', y - y') = \frac{1}{2id} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{ny}} \exp\left(ik_{xn}(x - x') + ik_{yn}(y - y')\right) \quad (2)$$

соответствует полю в среде, создаваемому решеткой коллинеарных линейных по  $z$  источников, расположенных по  $x$  с периодом  $d$ .

Рассеянное поле в общем случае определяется полным тангенциальным полем и его нормальной производной непосредственно на поверхности.

Границные условия для  $E_z$ -поляризации имеют вид

$$\Psi(x, y) = 0 \Big|_{y=A(x)} \quad (3)$$

Помещаем точку наблюдения в (1) на поверхность и учтем граничные условия (3). В результате получаем

$$\int ds' G(x - x', y - y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(x', y') \Big|_{y=A(x)} + \Psi_i(x, y) \Big|_{y=A(x)} = 0 \quad (4)$$

— интегральное уравнение Фредгольма I рода относительно поверхностного тока  $\frac{\partial}{\partial n} \Psi(x', y')$ . Уравнения Фредгольма I рода в общем случае не являются корректными [6]. Но в данном конкретном случае уравнение (4), как показано в [7], в силу логарифмической расходимости ядра в точке  $x = x'$  при решении методом разложения в ряды Фурье приводится к устойчивой матрице близкого к диагональному виду и является корректным.

После решения уравнения полное поле  $E_z$  в пространстве выражается согласно (1) через найденную неизвестную  $\frac{\partial}{\partial n} \Psi(x', y')$  следующим образом:

$$\Psi(x, y) = \psi_i(x, y) + \int ds' G(x - x', y - y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(x', y'). \quad (5)$$

Учитывая справедливость разложения поля в пространстве вне решетки при  $y > \max A(x)$  по пространственным гармоникам, можем определить их амплитуды или комплексные коэффициенты отражения

$$R_n = \frac{1}{2idk_{ny}} \int ds' \exp(-ik_{xn}x' - ik_{yn}y') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(x', y'). \quad (6)$$

Полученное уравнение (4) можно представить в виде

$$\mu U(x) = \int_0^d W(x, x') U(x') dx' + V(x) = 0. \quad (7)$$

где

$$U(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \frac{\partial}{\partial n} \Psi(x, y) \Big|_{y=A(x)}$$

$$V(x) = \Psi_i(x, y) \Big|_{y=A(x)}$$

$$W(x, x') = G(x - x', y - y') \Big|_{y=A(x)}$$

$$\mu = 0$$

$$R_n = \frac{1}{2ik_{ny}} \int_0^d dx' \exp(-ik_{xn}x' - ik_{yn}y') u(x')$$

функции  $U$ ,  $V$  и  $W$  являются периодическими по  $x$ , ядро  $W$  может быть сингулярным, но интегрируемым.

Для численных решений интегральных уравнений могут быть использованы различные методы [6]. Одним из распространенных методов является метод, предполагающий разложение в ряде Фурье неизвестной функции  $U(x)$ . Этот метод был эффективно использован, например, в [7]. Все периодические функции, включая неизвестную, разлагаем в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \exp\left(in\frac{2\pi}{d}x\right) \\ V(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \exp\left(in\frac{2\pi}{d}x\right) \\ W(x, x') &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_{nm} \exp\left(in\frac{2\pi}{d}x - im\frac{2\pi}{d}x'\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$V_n = \frac{1}{d} \int_0^d dx V(x) \exp\left(-in\frac{2\pi}{d}x\right),$$

$$W_{nm} = \frac{1}{d^2} \int_0^d \int_0^d dx dx' W(x, x') \exp\left(-in\frac{2\pi}{d}x + im\frac{2\pi}{d}x'\right).$$

Подставляя эти разложения в (7), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (W_{nm} - \mu \delta_{nm}) U_m = -V_n. \quad (9)$$

Решая систему (11), численно с конечным количеством  $M$  неизвестных  $U_m$ , увеличиваем  $M$  постепенно так, чтобы достичь необходимой точности вычислений  $U_m$ .

Для численного решения (9) по методике разложения в ряды Фурье целесообразно использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье [7], что существенно ускоряет вычисления. При вычислениях удобно без ограничения общности положить период структуры  $d = 2\pi$ , что приводит к обезразмериванию всех входящих в уравнения переменных и параметров.

Существует также прямой метод решения уравнения (7) "по точкам". Неизвестная функция  $U(x)$  представляется здесь  $N$  значениями

$$U_n = U(x_n) \quad (10)$$

в  $N$  точках  $x = x_n$  на периоде  $d$ . Аналогично представляется свободный член

$$V_n = V(x_n)$$

и ядро

$$W_n = W(x_n, x').$$

В этом случае (7) можно представить в виде  $N$  уравнений:

$$\mu U_n = \int_0^d W_n(x') U(x') dx' + V_n = 0.$$

Теперь, полагая каждый из  $N$  интегралов как сумму подынтегральных функций в  $N$  точках

$$\int_0^d W_n(x') U(x') dx' = \sum_{m=1}^N W_{nm} U_m,$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^N (W_{nm} - \mu \delta_{nm}) U_m = -V_n, \quad (11)$$

которую решаем, постепенно увеличивая  $N$  и достигая сходимости результатов.

В процессе численного исследования отражательных свойств решеток использовались оба метода, причем результаты их в контрольных точках совпадали.

Рассмотрим профиль гофра гладкой формы, изображенный на рис.2а и представляющий собой канавку со стенками из полуperiодов синусоиды амплитуды  $A_0$  и дном относительной ширины  $\beta$  на периоде  $d$ . Следуя правилу эквивалентности [3], сделаем попытку обобщения этого правила на несимметричные профили и поставим в соответствие рассматриваемому профилю с прямоугольной канавкой (рис.2б) относительной ширины  $\delta = (\beta + 1)/2$ . Для последнего, используя волноводную модель [4], можно выделить зоны с различным значением вектора  $\{N, M\}$  и качественно предсказать свойства рассеяния в каждой из них. В случае режима автоколлимации на дифрагированной волне -1-го порядка, рассмотрением которого мы пока ограничимся, границам изменения величины  $N$  от  $n-1$  до  $n$  соответствует  $\alpha_n = n - 0,5$ ,  $M$  от  $m-1$  до  $m - \alpha_m = m/2\delta$ , где  $\alpha = d/\lambda$ . Сравним теперь результаты, полученные численно для исследуемого профиля (рис.1), с предсказанными для соответствующего прямоугольного профиля на примере волны с поляризацией  $E$  вдоль образующих решетки.

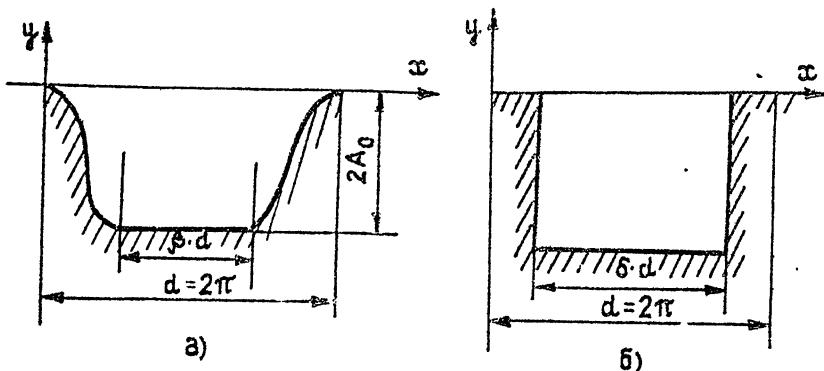


Рис.2:

На рис.3 в координатах  $A_0, \alpha$  изображены линии равного уровня энергии (-1)-й гармоники в режиме автоколлимации  $W_{-1}$  при падении волны на синусоидально гофрированную поверхность с  $\beta = 0$ . Зоны с различным значением вектора  $\{N, M\}$  для соответствующего прямоугольного профиля с  $\delta = 0,5$  разделены пунктирными линиями. В зонах  $\{1,0\}$  и  $\{1,1\}$  линии ведут себя практически регулярно, за исключением слабой тенденции к нерегулярности с ростом амплитуды вблизи границы зоны. Линии ПАО  $W_{-1} = 1$  периодически повторяются (на рисунке убралась лишь первая), что качественно похоже на свойства отражательной решетки с прямоугольной гофрировкой. В зоне  $\{2,1\}$  энергия (-1)-й гармоники меняется с изменением  $A_0$  и  $\alpha$  плавно, достигая высоких значений  $W_{-1} \geq 0,9$  лишь при достаточно больших амплитудах, что также

согласуется со свойствами данной зоны для прямоугольной гофрировки. На конец, в зоне  $\{2, 2\}$  функция  $W_{-1}(A_0, \alpha)$  ведет себя более изрезанно и достигает значений  $W_{-1} = 0$  и  $W_{-1} \geq 0,9$  и при не слишком больших амплитудах.

На рис.4 изображена аналогичная картина для поверхности, отличной от синусоидальной, имеющей  $\beta = 1/3$ . В зонах  $\{1, 0\}$  и  $\{1, 1\}$  при  $\alpha < 1,5$  наблюдаются качественно те же закономерности; зона  $\{2, 1\}$  плавного изменения в этом случае отсутствует, и при  $\alpha = 2,0$  и  $A_0 = 1,4$  в зоне  $\{2, 2\}$  энергия (-1)-й гармоники  $W_{-1}$  обращается в единицу, образуя полосу по сравнению  $W_{-1} = 0,9$  порядка 10%.

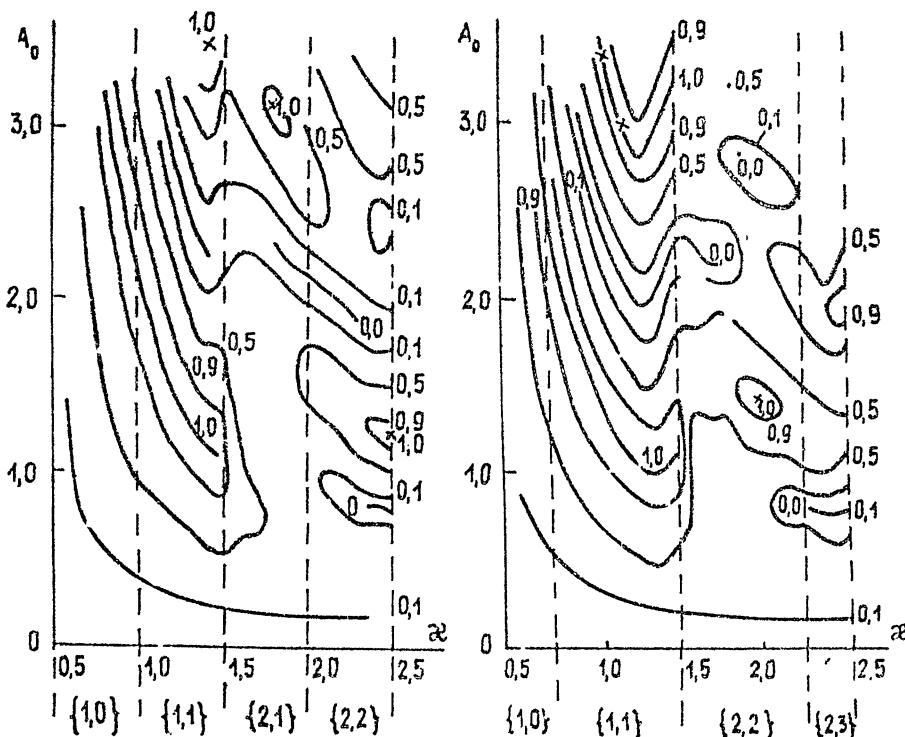


Рис.3, 4:

В случае  $\beta = 2/3$  (еще более широкая канавка и узкие зубья) картина качественно уже напоминает картину для пижевой решетки и ее эквивалентных профилей [4]. В частности, в интервале  $\alpha = 1,2 - \alpha = 1,5$  существует зона  $\{1, 2\}$  с менее регулярным ходом линий и большим разнообразием режимов.

На рис.5 и 6 представлены линии равного уровня фаз коэффициентов отражения (-1)-й гармоники в режиме автоколлимации соответственно для поверхностей с  $\beta = 0$  (синусоидально-гофрированной) и с  $\beta = 1/3$ . Независимо от величины вектора  $\{N, M\}$  линии равного уровня фаз ведут себя достаточно регулярно и плавно за исключением значений  $\alpha$ ,  $A_0$ ,

где  $W_{-1}$  точно обращается в ноль. При этом фаза (-1)-й гармоники испытывает скачок на  $180^\circ$ . Значения фаз на линиях, изображенных на рисунках, отличаются на  $90^\circ$ . Линии на плоскости  $\alpha$ ,  $A_0$ , соответствующие скачкам фазы и точно соответствующие  $W_{-1} = 0$ , изображены волнистыми. С ростом амплитуды и волнового числа линии сгущаются, что соответствует более быстрому изменению фазы. Более сгущены они и в случае более широкой канавки гофра  $\beta = 1/3$ .

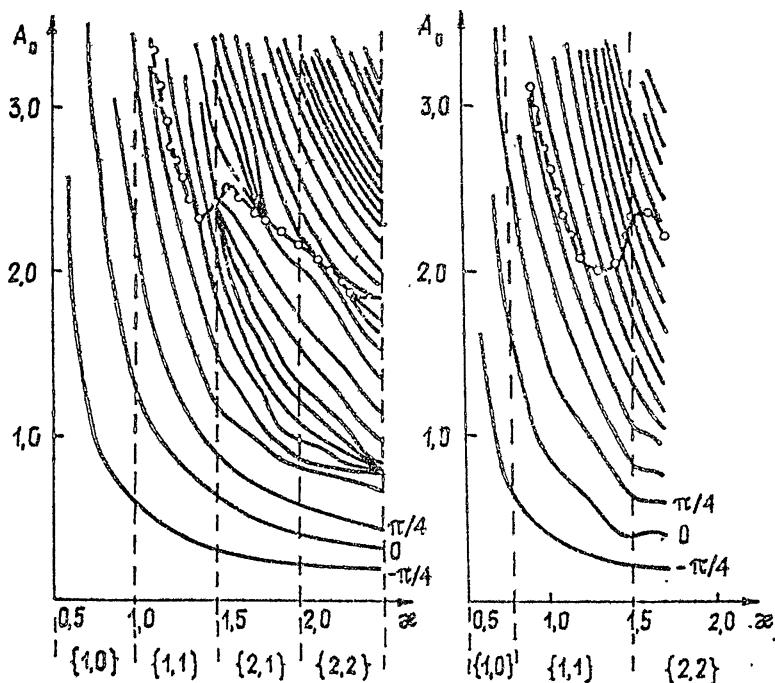


Рис.5, 6:

Анализ результатов показывает, что свойства решеток со слаженным профилем гофра качественно и количественно похожи на свойства соответствующих решеток волноводного типа с профилем канавки в виде прямоугольника. Это позволяет обобщить эмпирическое правило эквивалентности, предложенное в [3] на профили, не обладающие центром симметрии и использовать в технических приложениях решетки с гладкими профилями гофра, опираясь на свойства хорошо изученных [2] волноводных решеток.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Electromagnetic Theory of Grating / Ed.Petit R. – Berlin – Heiderberg – New York: Springer – Verlag, 1980.
2. Щестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. Ревианское рассеяние волн. Т.1. Дифракционные решетки. – Киев: Наукова думка, 1986.
3. Breidne M., Maystre D. // Applied option. 1980. V.19. N.11. P.1812.
4. Кириленко А.А., Кусайкин А.П., Сиренко Ю.К. // Изв.вузов. Радиофизика. 1985. Т.28. N 11. С.1450.
5. Чжуан Шуньлянь, Гун Жэньяо // ТИИЭР. 1981. Т.69. Вып.2. С.43.
6. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / Справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1978.
7. Вайнштейн Л.А., Суров А.И. // Радиотехника и электроника. 1984. Т.29. Вып.8. С.1472.

Институт прикладной физики.  
РАН

Поступила в редакцию  
21 апреля 1992 г.

**WAVE SCATTERING BY PERFECTLY CONDUCTING CORRUGATED SURFACES OF SIMPLE SHAPES**

*E.V.Koposova*

The diffraction of a plan wave at the perfectly conducting periodically corrugated surfaces with smooth profiles of grooves is investigated. The scattering properties of smooth profiles corrugated surfaces are compared with properties of corresponding gratings of wavequite type with lamellar profiles. The known empiric rule of equivalence of the scattering properties of gratings with simple central symmetrical profiles is generalized to gratings with profiles of more general class which not have the central of symmetry.

УДК 519.28

# АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ЭКСПОНЕНТОЙ

*B.B. Беликович*

Найдены дисперсии параметров при аппроксимации процесса, представляющего сумму экспоненты и случайной величины, распределенной по нормальному закону, методом наименьших квадратов с различными весовыми функциями. Показано, что введение весовой функции, выравнивающей дисперсии отсчетов, существенно уменьшает дисперсию параметров. В то же время ошибка в параметре весовой функции несущественно оказывается на результате.

— 1. Аппроксимация экспериментальных данных  $Y_k$  экспоненциальной зависимостью  $Y_k = \exp(a - bx_k) + \delta_k$  в общем случае относится к нелинейным задачам. Однако, эта нелинейность "внешняя", поскольку путем логарифмического преобразования исходная зависимость линеаризуется  $z_k = \ln Y_k = a - bx_k + \delta_{zk}$ , и задача может быть решена стандартным методом наименьших квадратов [1]. Вместе с тем, при нелинейном преобразовании происходит трансформация погрешностей [2]. В частности, если исходные данные имеют погрешности  $\delta_k$  с однапаковой дисперсией  $\sigma_k^2 = \sigma_0^2$ , то после логарифмического преобразования  $\delta_{zk} \simeq \delta_k/\bar{Y}_k$  (при условии  $\delta_k < Y_k$ ) и  $\delta_{zk}$  имеют дисперсии, зависящие от  $k$ . Разумеется, что в этом случае тоже можно пользоваться обычной методикой наименьших квадратов, однако оценки параметров  $a$  и  $b$  в этом случае будут неэффективны, то есть не будут обладать минимальной дисперсией. Для нахождения эффективных оценок необходимо применение метода наименьших квадратов с весовым множителем  $g_k = (\sigma_{zk}^2)^{-1}$ . В данном случае  $\sigma_{zk}^2 \sim \bar{Y}_k^{-2}$  и  $g_k \sim \exp(-2bx_k)$ . Поскольку значения  $\bar{Y}_k$  становятся известными только после проведения процедуры аппроксимации, то задача решается методом последовательных приближений. На первом этапе определяются значения  $a_0$  и  $b_0$  с весовым множителем  $g_k = 1$ , по ним вычисляются веса  $g_{1k} = \exp(-2b_0x_k)$  и находятся значения  $a_1$  и  $b_1$ , по которым можно уточнить веса  $g_{2k} = \exp(-2b_1x_k)$  и найти  $a_2$  и  $b_2$  и так далее. Как утверждается в [2], практически достаточно ограничиться нахождением  $a_1$  и  $b_1$  и дальнейшие приближения не искать, однако никаких доказательств этого не приведено. В работе [3] приведено оригинальное обоснование весовой функции  $g_k = \bar{Y}_k^2$  и предложено в качестве ее приближения использовать

*B.B. Беликович*

1105

значения  $y_k^2$ . Такая замена, по мнению авторов, должна существенно сократить объем вычислений, отказываясь от нахождения нулевого приближения, и давать оценки, близкие к эффективным.

В настоящей работе определены дисперсии  $\sigma_a^2$  и  $\sigma_b^2$ , которые характеризуют точность нахождения параметров  $a$  и  $b$  с помощью различных процедур. Такое рассмотрение оказывается разумным, в частности, для выбора алгоритма обработки данных в реальном времени при исследовании радиофизическими методами различных неоднородностей плазмы (радиоотражений от метеорных следов, отражений от искусственных периодических неоднородностей и других короткоживущих образований в ионосфере).

2. В общем случае уравнения для нахождения параметров линейной аппроксимации имеют вид (смотри, например, [2]).

$$a = \frac{\sum g_k z_k \sum g_k x_k^2 - \sum g_k x_k \sum g_k x_k z_k}{\sum g_k \sum g_k x_k^2 - [\sum g_k x_k]^2}, \quad (1)$$

$$b = \frac{\sum g_k \sum g_k x_k z_k - \sum g_k x_k \sum g_k z_k}{\sum g_k \sum g_k x_k^2 - [\sum g_k x_k]^2}. \quad (1a)$$

Формулы (1) и (1a) значительно упрощаются, если перейти к системе координат, связанной с центром тяжести массива, то есть ввести

$$\hat{x} = x - x_0, \quad (2)$$

для которого  $\sum g_k \hat{x}_k = 0$ . В этом случае

$$a = \frac{\sum g_k z_k}{\sum g_k} + b x_0, \quad (3)$$

$$b = -\frac{\sum g_k \hat{x}_k z_k}{\sum g_k \hat{x}_k^2}. \quad (3a)$$

Для дисперсий параметров  $a$  и  $b$  при некоррелированных отсчетах получаются выражения

$$\sigma_a^2 = \frac{\sum g_k^2 \sigma_{z_k}^2}{[\sum g_k]^2}, \quad (4)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum g_k^2 \hat{x}_k^2 \sigma_{z_k}^2}{[\sum g_k \hat{x}_k^2]^2}. \quad (4a)$$

Заметим, что (4) определяет значение  $\sigma_a^2$  в центре тяжести интервала и для его нахождения не нужно знать  $x_0$ . Для произвольной точки интервала

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 \hat{x}^2. \quad (5)$$

Для дальнейших расчетов будем полагать, что величина  $Y$  измеряется в  $n$  точках интервала  $[0, T]$ , причем  $x_k$  заданы с постоянным шагом  $\Delta = T/(n-1)$  (это типичный случай при автоматическом съеме данных). Рассмотрим четыре случая.

*Случай 1.* Дисперсия  $z_k$  постоянна  $\sigma_{zk}^2 = D^2$  и, как следует в этом случае,  $g_k = 1$ . (Это имеет место при постоянной относительной погрешности измерений, то есть  $\sigma_k \sim \bar{Y}_k$ .) В этом случае центр тяжести массива совпадает с серединой интервала и нужно положить  $\hat{x}_k = \Delta k$ , где  $k = -(n-1)/2; -(n-3)/2; \dots; -1; 0; 1; \dots; (n-3)/2; (n-1)/2$  (полагаем  $n$  нечетным). При этом легко найти необходимые суммы (смотри [4]) и получить простой и хорошо известный результат.

$$\sigma_{a1}^2 = \frac{D^2}{n} \simeq \frac{D^2 \Delta}{T}, \quad (6)$$

$$\sigma_{b1}^2 = \frac{12D^2(n-1)}{nT^2(n+1)} \simeq \sigma_{a1}^2 \frac{12}{T^2}. \quad (6a)$$

Здесь индекс 1 значит, что результат относится к первому случаю, а приближенное выражение справедливо при  $n \gg 1$ . Из формул (6) и (6a) следует хорошо известный вывод, что для уменьшения  $\sigma_{a1}^2$  следует увеличивать число отсчетов, а для уменьшения  $\sigma_{b1}^2$ , кроме того, увеличивать интервал измерений  $T$ .

*Случай 2.* Дисперсия  $z_k$  изменяется  $\sigma_{zk}^2 = \sigma_0^2/\bar{Y}_k^2 = D_0^2 \exp(2\Delta b k)$ , где  $D_0^2 = \sigma_0^2/\bar{Y}^2$ , но  $g_k = 1$ . Это неоптимальная обработка, дающая неэффективные оценки для разноточных измерений. В этом случае

$$\sigma_{a2}^2 = D_0^2 \frac{\sum \exp(2\Delta b k)}{n} = D_0^2 \frac{\operatorname{sh}(n\Delta b) \exp[(n-1)\Delta b]}{n^2 \operatorname{sh} \Delta b}, \quad (7)$$

$$\sigma_{b2}^2 = \sigma_{a2}^2 \frac{12(n-1)}{T^2(n+1)} \left\{ \frac{3(n^2+1)}{n^2-1} + \frac{6}{(n^2-1)\operatorname{sh}^2 \Delta b} - \frac{6k}{n^2-1} \operatorname{cth}(bT) \operatorname{cth}(\Delta b) \right\}. \quad (7a)$$

Легко видеть, что  $\sigma_{a2}^2$  отличается от первого случая множителем

$$F_{a2}^2 = \frac{\exp[(n-1)\Delta b] \operatorname{sh}(n\Delta b)}{n \operatorname{sh} \Delta b} \simeq \frac{\exp(2bT) - 1}{2bT}. \quad (8)$$

Приближенное значение  $F_{a2}^2$  справедливо при  $n \gg 1$ , когда  $\operatorname{sh}(\Delta b)$  можно разложить в ряд и ограничиться первым членом (этот результат также можно получить непосредственно из (4), заменив суммы интегралами). Значение  $\sigma_{b2}^2$ , кроме того, отличается множителем в фигурных скобках. Этот множитель сравнительно мало отличается от единицы и достигает

1,9 при  $bT = 4$ , в то время как  $F_{a2}^2 = 440$ , поэтому в первом приближении его можно не учитывать. Отметим, что при  $bT \rightarrow 0$   $F_{a2}^2, F_{b2}^2 \rightarrow 1$ . Это совершенно естественно, поскольку при малых  $bT$  различия в  $\sigma_{zk}^2$  невелики и фактически задача приближается к первому случаю. При  $bT > 1$   $F_{a2}^2$  экспоненциально возрастает. Это приводит к тому, что  $\sigma_{a2}^2$  достигает минимума при некотором значении  $bT$ . При этом для  $\sigma_{a2}^2$  минимум достигается при  $bT \approx 0,8$ , а для  $\sigma_{b2}^2$  — при  $bT \approx 1,96$ . При этом минимальные значения  $\sigma_{a2}^2 = 3,85\Delta b D_0^2$  и  $\sigma_{b2}^2 = 20\Delta b^3 D_0^2$ . Полученный результат вполне понятен, поскольку при больших  $T$  "сигнал" убывает, а "шум" сохраняется постоянным и его добавление может только увеличивать дисперсию параметров аппроксимации.

*Случай 3.* Дисперсия  $z_k$  изменяется, как и во втором случае  $\sigma_{zk}^2 = D_0^2 \exp(2\Delta b k)$ , но  $g_k = \exp(-2\Delta b k)$ . Это оптимальная обработка для разноточных измерений, дающая эффективные оценки в этом случае. Подстановка  $g_k$  в (4a) дает

$$\sigma_{a3}^2 = \frac{D_0^2}{\sum \exp(-2\Delta b k)}, \quad (9)$$

$$\sigma_{b3}^2 = \frac{D_0^2}{\sum \hat{x}^2 \exp(-2\Delta b k)}. \quad (9)$$

Заметим, что в формуле (9a)  $\hat{x}$  определяется соотношением (7), а  $x_0$  находится из уравнения  $\sum(x - x_0)g_k = 0$ , решение которого в интервале  $[-T/2, +T/2]$  имеет вид

$$x_0 = \frac{\sum g_k x_k}{\sum g_k} = \frac{\Delta(n-1)}{2} \left[ n \operatorname{cth} n\Delta b - \operatorname{cth} \Delta b \right]. \quad (10)$$

С учетом найденного  $x_0$  (9) и (9a) приводятся к выражениям

$$\sigma_{a3}^2 = \frac{D_0^2 \exp(bT) n \operatorname{sh}(bT/n)}{n \operatorname{sh} bT}, \quad (11)$$

$$\sigma_{b3}^2 = \sigma_{a3}^2 \frac{12}{T^2} \left\{ \frac{(n^2 - 1) \operatorname{sh}^2 bT \cdot \operatorname{sh}^2(bT/n)}{3(\operatorname{sh}^2 bT - n^2 \operatorname{sh}^2(bT/n))} \right\}. \quad (11a)$$

Здесь, как и в предыдущем случае, выражение в фигурных скобках не сильно отличается от единицы (достигает 5,5 при  $bT = 4$ ). Основной множитель

$$F_{a3}^2 = \frac{n \exp(bT) \operatorname{sh}(bT/n)}{\operatorname{sh} bT} \simeq \frac{2bT}{1 - \exp(-2bT)}. \quad (12)$$

Множители  $F_{a3}^2$  и  $F_{b3}^2$ , как и в предыдущем случае, стремятся к единице при  $bT \rightarrow 0$  и возрастают при  $bT > 1$ . При этом  $\sigma_{a3}^2$  имеет конечный предел,

который примерно в 2 раза ниже минимальных значений предыдущего случая, а  $\sigma_{b3}^2$  продолжает монотонно убывать с увеличением интервала. Таким образом, оптимальная процедура позволяет получить более низкие значения  $\sigma^2$ , при этом точность определения не ухудшается с увеличением интервала  $T$ , поскольку весовая функция автоматически уменьшает вклад малоточных значений в общую сумму.

**Случай 4.** Дисперсия меняется, как в случае два,  $\sigma_z^2 = D_0^2 \exp(2\Delta b k)$ , а в качестве весовой функции использованы значения  $Y_k^2 / \bar{Y}_0^2 = g_k$ . Назовем этот случай квазиоптимальной обработкой. Учтем, что  $\bar{Y}_k^2 = (\bar{Y}_k + \delta_k)^2$  и  $g_k = e^{-2\Delta b k} + 2D_k e^{-\Delta b k} + D_k^2$ . Тогда соотношения (4) и (4а) можно привести к следующему виду:

$$\sigma_{a4}^2 = \frac{\sigma_{a3}^2}{[1 + nD_0^2 / \sum \exp(-2\Delta b k)]^2} \left\{ 1 + \frac{18nD_0^2 + 15D_0^4 \sum \exp(2\Delta b k)}{\sum \exp(-2\Delta b k)} \right\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{b4}^2 = & \frac{\sigma_{b3}^2}{[1 + D_0^2 \sum \hat{x}_k^2 / \sum x_k^2 \exp(-2\Delta b k)]^2} \left\{ 1 + \right. \\ & \left. + \frac{18D_0^2 \sum \hat{x}_k^2 + 15D_0^4 \sum \hat{x}_k^2 \exp(-2\Delta b k)}{\sum \hat{x}_k^2 \exp(-2\Delta b k)} \right\}. \end{aligned} \quad (13a)$$

Отметим, что при выводе выражений (13) и (13а) предполагалось, что  $\sum \delta_k^{(2n-1)} \exp(\pm \Delta b k) = 0$ ;  $\sum \delta_k^4 \exp(\pm \Delta b k) = 3\sigma_0^4 \sum \exp(\pm \Delta b k)$ ;  $\sum \delta_k^6 \exp(\pm \Delta b k) = 15\sigma_0^6 \sum \exp(\pm \Delta b k)$ , что справедливо при нормальном законе распределения  $\delta_k$ . Выражения в фигурных скобках обозначим через  $F_{a4}^2$  и  $F_{b4}^2$  соответственно. Как и следовало ожидать,  $F_4^2 \rightarrow 1$  при  $D_0^2 \rightarrow 0$ , однако при  $D_0^2 \neq 0$  и  $bT \rightarrow 0$   $F_4^2 \simeq 1 + 16D_0^2 + 14D_0^4$ , то есть отличен от единицы. Таким образом, применение весовой функции со случайными ошибками увеличивает дисперсию параметров аппроксимации по отношению к оптимальной обработке. Этот результат совершенно понятен, так как значения с положительной ошибкой как бы увеличиваются весовой функцией, а с отрицательной ошибкой уменьшаются, что эквивалентно увеличению дисперсии исходных данных.

**3.** О реальном соотношении точностей, которые дают различные процедуры обработки, можно судить по рис.1, где кривыми 1-4 представлены значения среднеквадратичного отклонения  $\sigma_a$  соответственно для четырех рассмотренных случаев (при расчетах множитель  $D_0^2 \Delta = 1$ ). Расчеты выполнены по формулам, аналогичным (6), (7), (11) и (13) с заменой сумм соответствующими интегралами. Для удобства количественного сравнения кривых на рисунке имеется две шкалы: левая — логарифмическая в разах и правая — линейная в децибеллах. Кривая 1 показывает убывание среднеквадратичного отклонения для случая постоянной относительной

дисперсии исходных данных в зависимости от параметра  $T$  при постоянном шаге  $\Delta$  и является как бы нижним пределом  $\sigma_a$ . Оптимальная обработка (кривая 3), начиная с  $bT \approx 1$ , фактически дает постоянное значение  $\sigma_a$ , в то время как неоптимальная (кривая 2) после минимума возрастает и при  $bT = 4$  в 7 раз (или на 17 дБ) превышает оптимальную. Квазиоптимальная обработка (кривая 4 рассчитана для  $D_0 = 0,1$ ) при  $bT > 1$  дает более точные результаты, чем неоптимальная, но хуже, чем оптимальная. Заметим, что положение кривой 4 зависит от параметра  $D_0$  и при меньших  $D_0$  она ближе подходит к кривой 3.

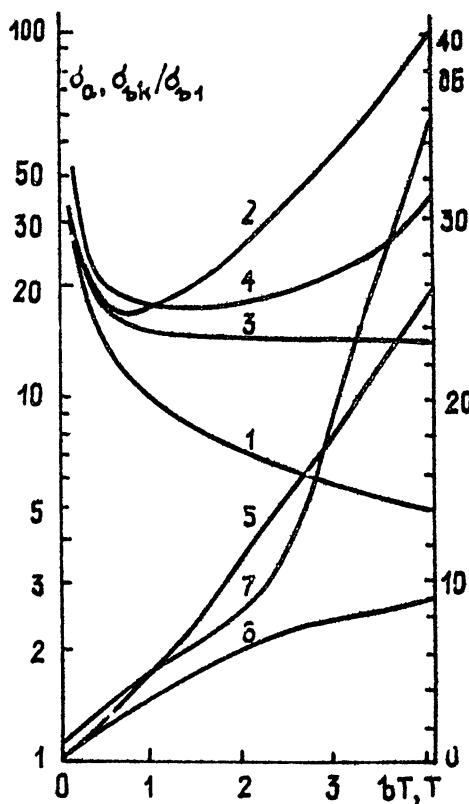


Рис.1:

Близкая картина наблюдается и для  $\sigma_b$ . На рисунке кривыми 5, 6 и 7 представлены отношения  $\sigma_{b2}/\sigma_{b1}$ ;  $\sigma_{b3}/\sigma_{b1}$  и  $\sigma_{b4}/\sigma_{b1}$  соответственно. Здесь еще более заметна неоптимальность квазиоптимальной обработки, поскольку она дает выигрыш по отношению к неоптимальной для  $D_0 = 0,1$  только в интервале  $1 < bT < 3$ . Следует отметить, что  $\sigma_{az}$  и  $\sigma_{bz}$  действительно малочувствительны к точности задания показателя весовой функции. В частности, если использовать показатель весовой функции  $b$

с ошибкой  $\delta_b$  и вычислить множитель  $F_{a5}^2$ , аналогичный для случая четыре, то получим

$$F_{a5}^2 = \frac{(b + \delta_b)^2 \operatorname{sh}(bT) \operatorname{sh}(b + 2\delta_b)T}{(b + 2\delta_b) b \operatorname{sh}^2(b + \delta_b)T}. \quad (14)$$

Анализ этой формулы показывает, что максимальное увеличение дисперсии получается при  $b \rightarrow 0$ . В этом случае  $F_{a5}^2 \approx 1 + (\delta_b T)^2 / 3$  и фактически увеличение дисперсии ничтожно, например, при  $\delta_b = 0,1$  и  $T=4$  оно составит 0,05 или 0,5 дБ. Таким образом, ошибка в задании параметра весовой функции действительно несущественна. Практически это означает, что находить  $b_0$  можно по упрощенной методике, например, по формуле

$$b_0 = \frac{\ln Y_r - \ln Y_1}{\Delta(r-1)}. \quad (15)$$

Если значения  $Y_k$  имеют большую дисперсию, то целесообразно единичные значения заменить суммами, например,

$$Y_1 = \sum k = 1^5 Y_k \quad \text{и} \quad Y_r = \sum_{k=r}^{r+5} Y_k.$$

Результаты настоящей работы, строго говоря, применимы только для случая нормального закона распределения ошибок, однако, качественно они будут верны и для других законов распределения, например, для случая, когда источником ошибок является округление результата с равномерным законом распределения ошибки.

**4.** Проведенный анализ показывает, что при нахождении параметров экспоненциальной модели процесса, представляющего собой сумму убывающей экспоненты и случайной ошибки с нормальнym законом распределения и дисперсией, не зависящей от величины экспоненты, применение метода наименьших квадратов с весовой функцией целесообразно при  $bT \geq 1$ . При этом выигрыш этой методики тем больше, чем больше параметр  $bT$ . Одновременно показано, что использование в качестве весовой функции значений  $Y_k^2$  нецелесообразно и допустимо только при низкой дисперсии ошибки, в то же время ошибка в задании параметра весовой функции  $b$  несущественна, что позволяет определять его упрощенной методике.

Автор выражает благодарность А.В. Толмачевой за помощь в проведении расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Кн.1. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 366 с.
2. Себер Дж. Линейный регрессивный анализ. — М.: Мир, 1980. — 456 с.
3. Лелянов С.П. // Заводская лаборатория. 1967. Т.33. N 11. С.1417.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды, элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 780 с.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
23 апреля 1992 г.

## EXPONENTIAL APPROXIMATION OF EXPERIMENTAL DATA

*V. V. Belikovich*

Variances have been found for parameters of a process which is assumed to be a sum of exponential and random value having Gaussian distribution. Least squares fit to an exponential is made using different weight functions. It is shown that variances of parameters are significantly less if the weight function is used which evens uncertainties of individual data points. The uncertainty of the weight function parameter strongly influences on the results.

УДК 519.216:621.391

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК МИНИМАКСА ЭНТРОПИИ

*B.B. Савченко*

Исследуется устойчивость метода минимакса энтропии по отношению к возмущениям в выборочных данных. На основе информационного критерия эффективности определяются ее границы и условия.

Метод минимакса энтропии (ММЭ) принадлежит к числу нетрадиционных, нелинейных методов спектрального анализа случайных процессов и полей с высокой разрешающей способностью [1]. Проблема устойчивости (*robustness, resistant*) для него, как и для всего класса нелинейных методов относится к наиболее актуальным [2]. Необходимым этапом на пути к ее решению является определение границ и условий устойчивости метода ММЭ по эффективности. Указанной задаче и посвящена настоящая работа.

В соответствии с общей формулировкой метода ММЭ в основе рассматриваемой оценки энергетического спектра используется ее параметризованное выражение

$$G_{MM}(f) = 1 / \sum_{m=0}^M \lambda_m K_m^2(f), \quad (1)$$

определенное на множестве амплитудно-частотных характеристик  $\{K_m(f)\}$  набора из  $M$  линейных декорреляторов, отличающихся своими порядками  $m \leq M$  и адаптированных под анализируемый процесс  $\{x_t\}$  на некотором фиксированном интервале наблюдения  $t \leq T$  (здесь  $K_0(f) \equiv 1$ ). Свой окончательный вид спектральная оценка ММЭ  $M$ -го порядка принимает по результатам последующей оптимизации  $(M+1)$ -вектора ее параметров  $\{\lambda_m\}$  из условия выполнения системы равенств

$$\int_0^F K_m^2(f) / \sum_{i=0}^M \lambda_i K_i^2(f) df = \sigma_m^2, \quad m = \overline{0, M}, \quad (2)$$

записанных относительно дисперсии откликов  $\{G_m^2\}$  набора декорреляторов. Здесь  $\sigma_0^2 \stackrel{\Delta}{=} M(x_t^2) = \text{const}$  — дисперсия или средняя мощность

*B.B. Савченко*

1113

анализируемого процесса;  $[0; F]$  — рассматриваемый частотный диапазон.

Выражения (1) и (2) в совокупности моделируют случайный гауссовский процесс с минимальным уровнем его удельной (на один отсчет данных) энтропии [3]:

$$h_{MM} = 1/F \int_0^F \log G_{MM}(f) df + \text{const} \sim \sum_{m=0}^M \log \sigma_m^2. \quad (3)$$

При точно заданных (измеренных) дисперсиях  $\{\sigma_m^2\}$  он непосредственно пересчитывается в достигаемую нижнюю границу погрешности формируемой модели в информационной метрике Кульбака–Лейблера [1]. Поэтому представленный функционал (3) может служить количественной характеристикой эффективности спектральной оценки ММЭ  $M$ -го порядка [4]. Проблему точности задания  $\{\sigma_m^2\}$  решают при этом выбором достаточно большого объема наблюдений  $T$ .

При обработке наблюдений с возмущениями  $\tilde{x}_t = x_t + \Delta x_t$ ,  $t = 0, 1, \dots, T$ , типа мощных неконтролируемых выбросов  $\Delta x_t$  [2] измеренные значения дисперсий откликов дескорреляторов возрастают:  $\tilde{\sigma}_m^2 = \sigma_m^2 + \Delta \sigma_m^2$ ,  $\Delta \sigma_m^2 \geq 0 \forall m = \overline{0, M}$ . Их приращения  $\{\Delta \sigma_m^2\}$  зависят от интенсивности потока выбросов  $\{\Delta x_t\}$  [5] и могут служить в совокупности интегральной характеристикой уровня возмущений. В пересчете к выходу алгоритма (1), (2) при возмущениях получаем искаженную спектральную оценку  $\tilde{G}_{MM}(f) = G_{MM}(f) + \Delta G_{MM}(f)$ , отклонение которой от оптимальной оценки ММЭ отвечает системе равенств

$$\int_0^F \Delta G_{MM}(f) K_m^2(f) df = \Delta \sigma_m^2, \quad m = \overline{0, M}. \quad (4)$$

Его количественной характеристикой является величина информационного отклонения [3]

$$\Delta h_{MM} = \tilde{h}_{MM} - h_{MM} \geq 0, \quad (5)$$

определенная потери полезной информации в формируемой спектральной оценке за счет возмущений. Здесь энтропия  $\tilde{h}_{MM}$  находится из выражения (3) после замены в нем оптимальной оценки на искаженную. Анализируя зависимость информационного отклонения (5) от интенсивности возмущений  $\Delta \sigma_m^2$  в каждом канале обработки наблюдений, определим границы и условия устойчивости спектральной оценки ММЭ  $M$ -го порядка.

*Утверждение 1.* Информационное отклонение спектральной оценки ММЭ при возмущениях ограничено сверху средним относительным уров-

нем ее искажений

$$\delta G_{MM} = 1/F \int_0^F \Delta G_{MM}(f) / G_{MM}(f) df. \quad (6)$$

Для доказательства данного утверждения воспользуемся определениями (5) и (3), а также известным алгебраическим соотношением  $\log y \leq y - 1 \forall y > 0$ :

$$\Delta h_{MM} = 1/F \int \log \frac{\tilde{G}_{MM}(f)}{G_{MM}(f)} df \leq 1/F \int \frac{\tilde{G}_{MM}(f)}{G_{MM}(f)} df - 1 = \delta G_{MM}.$$

*Утверждение 2.* Средний относительный уровень искажений спектральной оценки ММЭ при возмущениях

$$\delta G_{MM} = \sum_{m=0}^M \lambda_m \Delta \sigma_m^2 / F$$

линейно зависит от их интенсивности.

Справедливость сказанного непосредственно доказывается по определению (6) с использованием (1) и системы соотношений (4).

*Следствие 1.* Информационное отклонение (5) спектральной оценки ММЭ (1), (2) при возмущениях находится в границах

$$0 \leq \Delta h_{MM} \leq \sum_{m=0}^M \lambda_m \Delta \sigma_m^2 / F. \quad (7)$$

В одноканальном варианте рассматриваемой спектральной оценки  $M$ -го порядка

$$G_{1M}(f) = \sigma_M^2 / [F K_M^2(f)], \quad (8)$$

полученном из выражений (1), (2) при равенстве всех  $\lambda_m$ , кроме последнего  $\lambda_M$ , нулю ( $\lambda_M = F/\sigma_M^2$  [4]), информационное отклонение

$$\Delta h_{1M} \leq \Delta \sigma_M^2 / \sigma_M^2 = \beta_M^2 K_{\text{под}}^{(M)} \triangleq \sup \Delta h_{1M} \quad (9)$$

в соответствии с (7) ограничено сверху относительным (в пересчете ко входу) уровнем возмущений  $\beta_M^2 \triangleq \Delta \sigma_M^2 / \sigma_0^2$  и коэффициентом подавления (или ослабления) анализируемого процесса  $K_{\text{под}}^{(M)} \triangleq \sigma_0^2 / \sigma_M^2 \geq 1$  в декорреляторе  $M$ -го порядка. В аналогичных обозначениях для общего,  $M$ -канального варианта спектральной оценки ММЭ (1), (2) будем иметь

$$\Delta h_{MM} \leq \sum_{m=0}^M \lambda_m \sigma_m^2 / F \cdot \sup \Delta h_{1m}, \quad (10)$$

где  $\sup \Delta h_{1m}$  — верхняя граница информационного отклонения (5) одноканальной спектральной оценки (8)  $m$ -го порядка.

*Утверждение 3.* При любых независимых возмущениях в наблюдениях  $\tilde{x}_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , информационные отклонения одноканальных спектральных оценок ММЭ различных порядков  $m \leq M$  образуют вариационный ряд

$$\Delta h_{10} \leq \Delta h_{11} \leq \dots \leq \Delta h_{1M}.$$

Доказательство этого непосредственно следует из определения (9) и очевидных соотношений  $\forall m \leq M : \Delta \sigma_{m-1}^2 \leq \Delta \sigma_m^2$ ,  $K_{\text{под}}^{(m-1)} \leq K_{\text{под}}^{(m)}$  [6].

*Следствие 2.* Информационное отклонение при возмущениях спектральной оценки ММЭ  $M$ -го порядка

$$\Delta h_{MM} \leq \sup \Delta h_{1M} \sum_{m=0}^M \lambda_m \sigma_m^2 / F. \quad (11)$$

*Утверждение 4.* При заданном порядке  $M$  спектральной оценки ММЭ увеличение числа используемых в ней каналов обработки наблюдений по крайней мере не ухудшает границ устойчивости оценки при возмущениях, т.е. всегда выполняется условие

$$\Delta h_{MM} \leq \Delta h_{1M}. \quad (12)$$

Его доказательство основывается на соотношении (11) и тождестве  $\sum_m \lambda_m \sigma_m^2 \equiv F$ , определенном на множестве корней  $\{\lambda_m\}$  системы уравнений (2).

Полученный результат (12) совместно с определением (9) характеризует условия достижения требуемой устойчивости спектральных оценок ММЭ по эффективности. Его значение еще более возрастает, если учесть, что рассмотренная одноканальная модификация оценки (8) общеизвестна как спектральная оценка по методу линейного предсказания или максимальной энтропии [4].

*Следствие 3.* При любом порядке оценки ММЭ  $M < \infty$  и любом наборе положительных  $\varepsilon_m$ ,  $m = \overline{0, M}$ , всегда найдется такое положительное  $\delta_M < \infty$ , что справедлива импликация

$$\{\Delta \sigma_m^2 \leq \varepsilon_m\} \Rightarrow \Delta h_{MM} \leq \delta_M.$$

Согласно определению [7] последнее доказывает качественную устойчивость (quality robustness) рассматриваемой спектральной оценки к возмущениям в дисперсиях откликов  $\{\tilde{\sigma}_m^2\}$  используемого набора декорреляторов. Если, кроме того, на всем интервале наблюдений  $[0; T]$  для любого  $\gamma > 0$  и некоторых  $\varepsilon_m > 0$ ,  $m = \overline{0, M}$ , выполняется импликация

$$\{\Delta x_t^2 \leq \gamma\} \Rightarrow \Delta \sigma_m^2 \leq \varepsilon_m \quad \forall m = \overline{0, M},$$

то свойство качественной устойчивости спектральной оценки ММЭ

$$\{\Delta x_i^2 \leq \gamma\} \Rightarrow \Delta b_{MM} \leq \delta_M < \infty.$$

распространяется на возмущения (представление в наблюдениях  $\{\tilde{x}_t\}$ ).

**Заключение.** Необходимым и достаточным условием устойчивости метода ММЭ по эффективности является устойчивость по отношению к возмущениям используемых в нем процедур аддитивной настройки набора декоррелиаторов и аддитивного оптимизации дисперсий их откликов.

Теория построения таких процедур хорошо изучена [?], примеры их практической реализации рассматривались в работах [6] и [5] соответственно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Савченко В.В. // Радиотехника и электроника. 1990. Т.35. 8. С.1650.
2. Мартин В.Д., Томсон Д.Д. // ТИИЭР. 1982. Т.70. 9. С.220.
3. Савченко В.В. // Изв.вузов. Радиофизика. 1991. Т.34. 3. С.268.
4. Савченко В.В. // Автоматика и телемеханика. 1988. 10. С.101.
5. Савченко В.В. // Изв.вузов. Радиоэлектроника. 1985. Т.28. 4. С.3.
6. Савченко В.В. // Радиотехника и электроника. 1986. Т.31. 8. С.1571.
7. Хьюбер П. Робастность в статистике. — М.: Мир, 1984.

Нижегородский государственный  
технический университет

Поступила в редакцию  
16 апреля 1992 г.

#### ON THE ROBUSTNESS OF THE MINIMAX ENTROPY SPECTRAL ESTIMATION

V. V. Savchenko

The robustness of the minimax entropy method to perturbations in the sampled data is considered. It's limits and conditions are determined on the basis of the informational criterion of effectiveness.

УДК 621.382.3:621.391.822

# НИЗКОЧАСТОТНЫЙ ШУМ В ПОЛЕВЫХ ТРАНЗИСТОРАХ С ЗАТВОРОМ ШОТКИ \*

*В.Н.Дубровский, А.С.Карасев, В.И.Шевченко*

С использованием трехсекционной аналитической модели для рабочего режима полевого транзистора с затвором Шотки рассчитаны модуляционные чувствительности тока стока к низкочастотным флуктуациям в различных областях активного слоя. В качестве шумовых источников в проводящем канале и в обедненной области затвора рассмотрены флуктуации концентрации носителей и связанный заряд, спектры которых могут включать генерационно-рекомбинационные и фликкерные составляющие. Теоретические результаты со-поставлены с данными измерений низкочастотного токового шума ПТШ.

В настоящем сообщении приведены результаты теоретического и экспериментального исследований низкочастотных флуктуаций в полевых транзисторах с затвором Шотки (ПТШ). Теоретический анализ проводился на основе трехсекционной модели для рабочего режима ПТШ с насыщением тока стока (рис.1). Граница между проводящим каналом и обедненной областью пространственного заряда (ОПЗ) предполагалась резкой. Использована кусочно-линейная аппроксимация зависимости дрейфовой скорости носителей заряда  $v$  от электрического поля  $E$  в аргониде галия:

$$v = \begin{cases} \mu E & \text{при } E \leq E_t, \\ v_s & \text{при } E > E_t, \end{cases}$$

где  $\mu$  — низкопольная подвижность носителей;  $E_t$  — пороговое поле. Омическая область I, для которой подвижность электронов в канале постоянна, описывается приближенiem плавного канала [1, 2]. В области II под затвором, где  $E > E_t$ , скорость электронов равна скорости насыщения  $v_s < v_m = \mu E_t$ , а толщина проводящего канала считается постоянной [2]. Концентрация носителей в канале этой области, полученная из условия непрерывности тока, равна  $n = n_d v_m / v_s$ , где  $n_d$  — концентрация

\* Докладено на Всесоюзно-координационном совещании "Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах" (поселок Черноголовка Московской области, июнь 1991 г.)

легирующей примеси. Область III, в которой также  $E > E_t$  и  $v = v_s$ , соответствует ОПЗ, распространяющейся от края затвора к стоку и аппроксимирующейся четвертью эллипса. В канале областей II и III возникает статистический домен сильного поля.

В рамках принятой аналитической модели распространение потенциала вдоль канала рассчитывалось с использованием одномерного уравнения Пуассона [2, 3]. При этом, для падения напряжения между стоком и истоком ПТШ в режиме насыщения тока стока, получено выражение

$$U_{\text{си}} = U_0(p^2 - s^2) + E_t \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right) + \frac{U_0 L_2}{a^2} (L_2 + L_3) \times \\ \times \left( \frac{v_m}{v_s} - 1 \right) + I_c (R_u + R_c), \quad (1)$$

а ток стока равен

$$I_c = q n_d v_m W a (1 - p). \quad (2)$$

Здесь  $U_0 = q n_d a^2 / 2\epsilon$ ;  $q$  — величина заряда электрона;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость полупроводника;  $a$  — толщина активного слоя ПТШ;  $W$  — ширина затвора;  $R_u$  и  $R_c$  — сопротивления омических потерь и стока;  $p$  и  $s$  — безразмерные величины глубины ОПЗ в области II и на истоковом конце затвора, причем

$$s = \left( \frac{I_c R_u - U_{\text{си}} + U_k}{U_0} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где  $U_{\text{си}}$  — напряжение между затвором и истоком ПТШ;  $U_k$  — контактная разность потенциалов барьера Шотки. Длина области II, определяемая с учетом выражения для тока в канале области I [1, 2],

$$L_2 = L - \frac{U_0}{E_t} \frac{p^2 - s^2 - \frac{2}{3}(p^3 - s^3)}{1 - p}, \quad (4)$$

где  $L$  — длина затвора. Длина области III (полуось эллипса)

$$L_3 = a \left( \frac{U_{\text{си}} - U_{\text{си}} - I_c R_c + U_k}{U_0} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Соотношения (1)–(5) позволяют рассчитать область насыщения вольт–амперной характеристики ПТШ и, в частности, дифференциальное сопротивление сток–исток:

$$R_{\text{си}} = \frac{\Psi E_t \left( \frac{L-L_2}{1-p} + \frac{2U_0 p}{E_t} \right) - 2U_0 p}{A q n_d v_m W a} + R_u + R_c, \quad (6)$$

где  $\Psi = \frac{2U_0}{a^2 E_t} \left( \frac{v_m}{v_s} - 1 \right) \left( L_2 + \frac{L_3}{2} \right) + 1$ ;  $A = 1 - \frac{E_t a^2}{4U_0 L_3} - \frac{L_2}{L_3} \left( \frac{v_m}{v_s} - 1 \right)$ .

Для каждой из областей I, II, III в квазистатическом приближении были оценены модуляционные чувствительности тока стока транзистора к низкочастотным флуктуациям в активном слое. В качестве шумовых источников в проводящем канале и в ОПЗ рассматривались флуктуации концентрации носителей и связанных зарядов. При проведении расчетов локальные источники шума предполагались статистически независимыми и равномерно распределенными.

После интегрирования по длине области I вкладов флуктуаций плотности носителей  $\delta n$  в элементах объема  $W(a-h)\Delta x$  омической части канала (рис.1а) аналогично [4] получено следующее выражение для спектральной плотности флуктуаций напряжения на стоке ПТШ в режиме холостого хода по переменному току:

$$S_{U_{\text{си}}}(F) = \frac{\Psi^2 E_t U_0 (p^2 - s^2)}{\Lambda^2 n_d^2 W a (1-p)} s_n^0(F). \quad (7)$$

Здесь  $s_n^0(F)$  — локальная спектральная плотность флуктуаций концентрации носителей в рассматриваемой области для единичного объема. (При равномерном распределении статистически независимых источников шума интенсивность флуктуаций концентрации в объеме  $V$  равна  $S_n = s_n^0/V$ .) Коэффициент  $\Psi$  учитывает преобразование флуктуаций напряжения в конце области I во флуктуации  $U_{\text{си}}$ ; коэффициент  $\Lambda$  учитывает зависимость  $L_3$  от  $U_{\text{си}}$ .

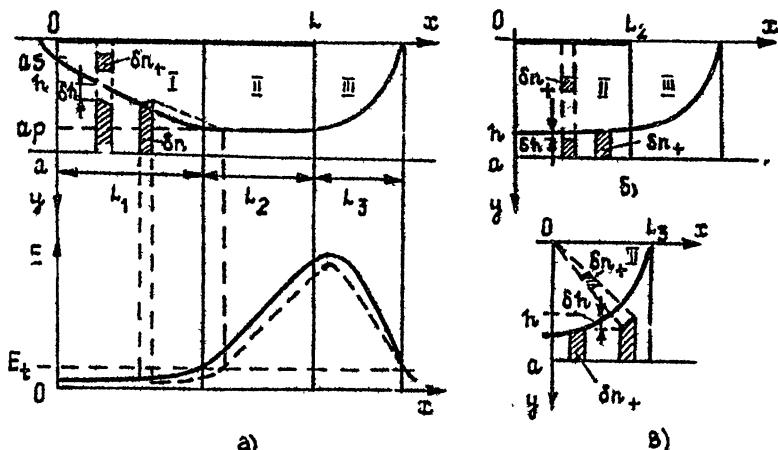


Рис.1:

Чувствительность напряжения холостого хода  $U_{\text{си}}$  к флуктуациям концентрации положительного связанных зарядов  $\delta n_+$  (которые могут быть вызваны флуктуациями числа носителей, захваченных ловушками) в элементах объема  $W \Delta x \Delta y$  ОПЗ области I рассчитывалась на основе подхода,

описанного в [5, 6]. Флуктуация глубины ОПЗ, вызванная локальной флуктуацией  $\delta n_+$ , (см.рис.1а) равна

$$\delta h = -\frac{y}{n_d h} \delta n_+ \Delta y.$$

Эти флуктуации, модулируя толщину проводящего канала, приводят к флуктуациям падения напряжения. Проведя интегрирование по  $y$  и  $x$  в ОПЗ области I, можно получить интенсивность соответствующих флуктуаций выходного напряжения:

$$S_{U_{\text{чи}}}(F) = \frac{2\Psi^2 E_t U_0 [\ln \frac{1-s}{1-p} + s - p + \frac{1}{2}(s^2 - p^2)]}{3\Lambda^2 n_d^2 W a (1-p)} s_{n_+}^0(F). \quad (8)$$

При расчете флуктуаций, обусловленных шумовыми источниками в областях II и III, использовалось одномерное уравнение Пуассона для канала в виде [3]

$$\frac{d[E(a-h)]}{dx} = \frac{q}{\epsilon} (n - n_d)(a - h). \quad (9)$$

В канале области II, где электроны движутся со скоростью насыщения  $v_s$ , могут возникать низкочастотные флуктуации объемного заряда. Это происходит, например, когда на месте спесенной потоком электронов флуктуации концентрации носителей  $\delta n$  в элементе объема канала  $Wa(1-p)\Delta x$  остается флуктуация концентрации положительного связанных зарядов  $\delta n_+ = \delta n$  (рис.1б). С помощью уравнения Пуассона находится соответствующая флуктуация выходного напряжения:

$$\delta \Delta U_{\text{чи}} = -\frac{q}{\epsilon} \left( L_2 + \frac{L_3}{2} - x \right) \delta n_+ \Delta x.$$

После интегрирования статистически независимых флуктуаций по длине канала области II получим

$$S_{U_{\text{чи}}}(F) = \frac{4U_0^2 [(L_2 + \frac{L_3}{2})^3 - (\frac{L_3}{2})^3]}{3\Lambda^2 n_d^2 W a^5 (1-p)} s_{n_+}^0(F). \quad (10)$$

Флуктуации концентрации связанных зарядов  $\delta n_+$  в ОПЗ области II, изменяя толщину канала (см.рис.1б) при постоянной вследствие непрерывности тока величине  $n(a-h)$ , приводят к флуктуациям напряжения  $U_{\text{чи}}$ . Интегрируя вклады  $\delta n_+$  по  $y$  и  $x$ , для спектральной плотности флуктуаций напряжения получим

$$S_{U_{\text{чи}}}(F) = \frac{4U_0^2 [(L_2 + \frac{L_3}{2})^3 - (\frac{L_3}{2})^3]}{9\Lambda^2 n_d^2 W a^5 (1-p)^2} s_{n_+}^0(F). \quad (11)$$

В соответствии с уравнением (9) и теоремой Гаусса распределение электрического поля в канале области III (рис.1в) определяется выражением

$$E(x) = \frac{1}{a - h(x)} \left\{ E(0)a(1-p) + \frac{q}{\epsilon} \int_0^x [n(x) - n_d][a - h(x)]dx \right\}. \quad (12)$$

С использованием (12) и подхода, аналогичного предыдущему, получены выражения для спектральных интенсивностей флуктуаций выходного напряжения холостого хода, вызванных флуктуациями в канале,

$$S_{U_{\text{чи}}}(F) = \frac{U_0^2 L_3^3 (\frac{p}{1-p} + 4)}{4 \Lambda^2 n_d^2 W a^5} s_n^0(F), \quad (13)$$

и флуктуациями в ОПЗ,

$$S_{U_{\text{чи}}}(F) = \frac{U_0^2 L_3^3 p (\frac{2p}{1-p} + 7)}{21 \Lambda^2 n_d^2 W a^5 (1-p)} s_{n+}^0(F), \quad (14)$$

области III. При выводе выражения (14), описывающего влияние флуктуаций концентрации связанного заряда  $\delta n_+$  в элементах объема  $W r \Delta r \Delta \varphi$  ОПЗ (см.рис.1в), интегрирование проводилось в полярных координатах  $r$  (ст 0 до  $r(x)$ ) и  $\varphi(x)$  по длине области III.

Спектральная плотность флуктуаций тока стока в режиме короткого замыкания выходной цепи ПТШ по переменному току  $S_{I_{\text{C}}}$  связана с рассчитанным спектром  $S_{U_{\text{чи}}}$  соотношением

$$S_{I_{\text{C}}}(F) = S_{U_{\text{чи}}}/R_{\text{чи}}^2. \quad (15)$$

На рис.2, 3 приведены примеры расчетных зависимостей от напряжений  $U_{\text{чи}}$  и  $U_{\text{ши}}$  модуляционных чувствительностей тока к флуктуациям в канале и ОПЗ областей I, II, III для ПТШ с длиной затвора  $L = 1$  мкм и шириной затвора  $W = 600$  мкм. Суммарные чувствительности для канала и ОПЗ слабо зависят от напряжения на стоке в режиме насыщения. С уменьшением  $U_{\text{ши}}$  от 0 до -1,5 В (при  $U_{\text{чи}} = 5$  В) вклад в токовый шум флуктуаций в ОПЗ возрастает на величину около 8 дБ при слабом изменении вклада флуктуаций в канале.

Если низкочастотные флуктуации в ПТШ обусловлены наличием в активном слое различных источников генерационно-рекомбинационного (ГР) шума и источников фликкерного шума, то локальную спектральную плотность флуктуаций концентрации можно представить в виде

$$s_n^0(F) = \sum_i \frac{4\gamma_i \tau_i}{1 + (2\pi \tau_i F)^2} + \frac{\beta}{F}. \quad (16)$$

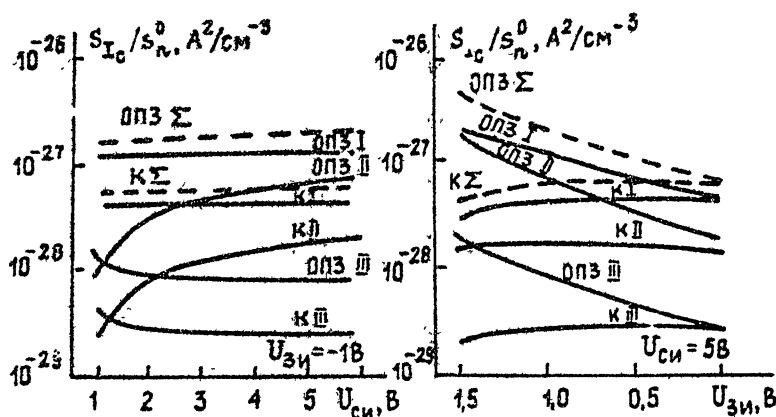


Рис.2, 3:

Спектральные характеристики ГР шума определяются случайными процессами захвата и эмиссии электронов и дырок глубокими уровнями ловушек, сопровождающимися флуктуациями концентрации захваченных электронов [5]. Для одного типа ловушек дисперсия ГР флуктуаций

$$\tau = n_T f_t (1 - f_t), \quad (17)$$

где  $n_T$  — концентрация ловушечных центров;  $f_t$  — коэффициент заполнения ловушек в стационарном состоянии,

$$f_t = \frac{c_n n_0 + c_p p_1}{c_n (n_0 + n_1) + c_p (p_0 + p_1)}. \quad (18)$$

Здесь  $c_n$  и  $c_p$  — коэффициенты захвата электронов и дырок;  $n_0$  и  $p_0$  — стационарные концентрации электронов и дырок;  $n_1$  и  $p_1$  — концентрации свободных носителей в случае, когда уровень Ферми совпадает с уровнем ловушек. Постоянная времени ГР шума

$$\tau = \frac{1}{c_n (n_0 + n_1) + c_p (p_0 + p_1)}. \quad (19)$$

Как показано в [5], в проводящем канале  $n$ -типа коэффициент заполнения глубокого уровня  $f_t \simeq n_0 / (n_0 + n_1) \simeq 1$ ;  $1 - f_t \simeq n_1 / n_0 \simeq n_1 / n_d \ll 1$  и, следовательно,

$$\gamma \simeq n_T n_1 / n_d. \quad (20)$$

При этом постоянная времени

$$\tau \simeq 1 / c_n n_d. \quad (21)$$

Отметим, что в этом случае  $\tau$  слабо зависит от температуры  $T$ , зависимость  $\gamma$  от  $T$  определяется величиной  $n_1$ , которая пропорциональна  $T^2 \exp(-\Delta W_T/k_B T)$ , где  $\Delta W_T$  — энергия ионизации уровня.

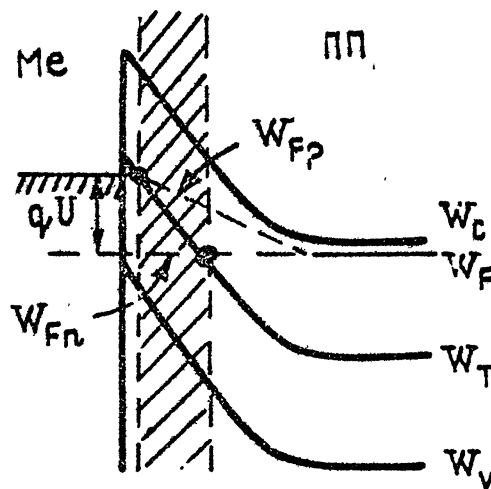


Рис.4:

Энергетическая зонная диаграмма ОПЗ барьера Шотки при приложении обратного смещения  $U$  показана на рис.4. Можно считать, что на большей части обедненного слоя, положение квазиуровня Ферми для электронов  $WF_n$  изменяется слабо [7], в отличие от квазиуровня Ферми для дырок  $WF_p$ . Величина "расщепления" уровня Ферми  $WF$  в ОПЗ на два квазиуровня  $WF_n$  и  $WF_p$  характеризует степень неравновесности полупроводника. В [5] отмечено, что соотношения (17)–(19) можно использовать и в случае неравновесного состояния. В заштрихованной области на рис.4, где  $WF_n < WT < WF_p$  ( $WT$  — глубокий уровень ловушек),  $n_1 > n_0$  и  $p_1 > p_0$ . При этом выражения для дисперсии и постоянной времени приобретают вид

$$\gamma \simeq \frac{n_T c_n c_p n_1 p_1}{(c_n n_1 + c_p p_1)^2}; \quad (22)$$

$$\tau \simeq \frac{1}{c_n n_1 + c_p p_1}, \quad (23)$$

причем  $\tau$  достигает максимальных значений при данной температуре. Для глубокого уровня, расположенного вблизи середины запрещенной зоны, полагая  $c_n = c_p$ , получим максимальную величину дисперсии  $\gamma \simeq 1/4$  ( $f_t \simeq 1 - f_t \simeq 1/2$ ). Таким образом, в той части ОПЗ, которая дает

основной вклад в низкочастотный ГР шум,  $\gamma$  оказывается не зависящей от температуры, а  $\tau \propto T^{-2} \exp(\Delta W_T/k_B T)$ .

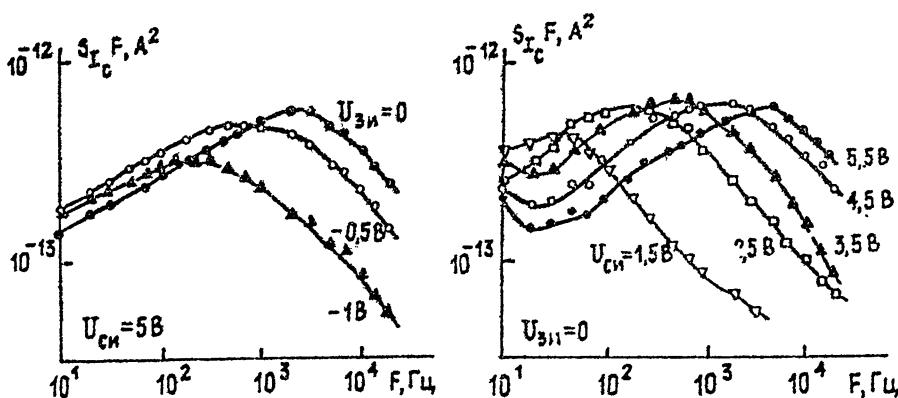


Рис.5, 6:

На рис.5-7 приведены экспериментальные частотные зависимости произведения токового шума  $S_{I_c}(F)$  и частоты анализа  $F$  при различных напряжениях  $U_{\text{оп}}$ ,  $U_{\text{сii}}$  и температурах окружающей среды  $T_0$  для ПТШ со следующими параметрами:  $W = 600$  мкм,  $L = 1$  мкм,  $n_d = 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $a = 0,15$  мкм, ток стока насыщения при  $U_{\text{оп}} = 0$  около 70 мА. На примере характеристики при  $T_0 = 335$  К на рис.7 показаны выделенные из шумового спектра ГР и фтикерная составляющая (штриховые линии). Температура активного слоя ПТШ определялась как  $T = T_0 + U_{\text{сii}} I_c R_T$ , где  $R_T$  — тепловое сопротивление транзистора. При изменении питавших напряжений и постоянной температуре теплоотвода температура  $T$  изменяется из-за изменения рассеиваемой мощности  $U_{\text{сii}} I_c$ . Экспериментально наблюдавшееся смещение максимума спектра  $S_{I_c} F$  в зависимости от температуры (рис.7) и напряжений (рис.5, 6) (с учетом результатов расчета модуляционных чувствительностей и разогрева активного слоя) согласуется со следующими из (22), (23) экспоненциальной температурой, зависимостью частоты максимума  $F_T = 1/2\pi\tau$  и слабой зависимостью его величины для ГР шума, создаваемого ловушками в ОПЗ. Для шума, обусловленного глубокими центрами в проводящем канале, наблюдалась бы обратная картина, как это следует из (19), (20). Полученные результаты соответствуют сделанному в [5] выводу о преобладающей роли источников низкочастотного ГР шума в ОПЗ, для которых дисперсия флуктуаций (22) и постоянная времени (23) значительно превышают соответствующие параметры (19) и (20) более высокочастотных шумов, связанных с такими же центрами в канале.

При этом энергетическое положение уровня ловушек относительно дна

зоны проводимости можно определить по измеренной температурной зависимости частоты  $F_\tau$  с помощью соотношения

$$\Delta W_T = -k_B \frac{d[\ln(F_\tau/T^2)]}{d(1/T)}. \quad (24)$$

Экспериментальные точки • на рис.8 соответствуют данным рис.7, точки о — данным на рис.6 при гепловом сопротивлении ПТШ  $R_T = 150$  К/Вт. Наклон графика к оси абсцисс определяет глубину уровня центров захвата:  $\Delta W_T \approx 0,6$  эВ. Эта величина близка к энергиям активации электронных ловушек, характерных для арсенидгаллиевых ПТШ, 0,53 эВ ( $EL4$ ) и 0,64 эВ (возможно, комплексы  $Cr$ ) [8]. Оцененная по величине максимума  $S_{I_c} F$  ГР шума и рассчитанной модуляционной чувствительности тона к флюктуациям в ОПЗ концентрация ловушек  $n_T$  для исследованных образцов была порядка  $10^{-15} \text{ см}^{-3}$ .

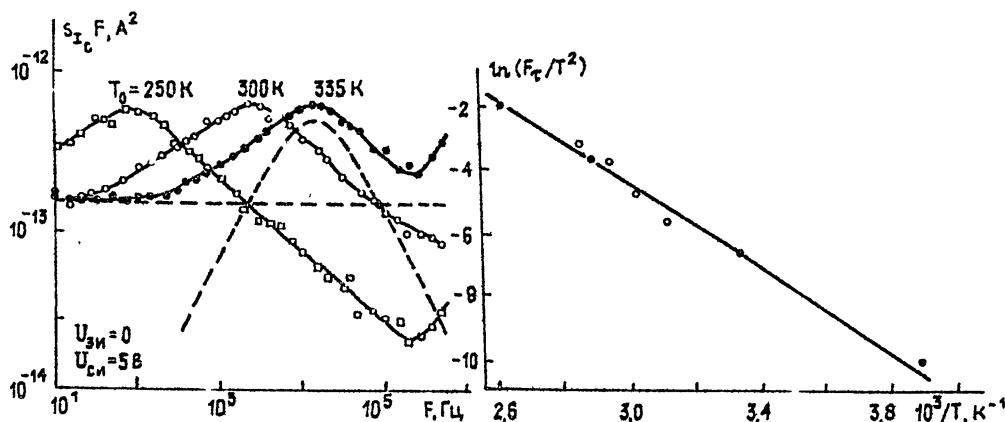


Рис.7, 8:

Сопоставляя выражение (16) с феноменологическим соотношением Хоухе [9] для фликкерных флюктуаций проводимости полупроводника, получим, что  $\beta = n\alpha$ , где  $\alpha$  — постоянная Хоухе. Если считать, что причиной фликкерного шума ПТШ являются объемные флюктуации в проводящем канале, то оценка  $\alpha$  по уровню выделенной спектральной  $1/F$  составляющей измеренного шума (горизонтальная штриховая линия на рис.7) и рассчитанной для канала модуляционной чувствительности дает величину около  $10^{-3}$ . Полученное значение  $\alpha$  близко к "универсальному" [9]. Однако следует отметить, что такой результат не исключает возможности другого объяснения происхождения фликкерного шума в ПТШ. Необходимо дальнейшее исследование этого вопроса.

Рассмотренные в работе низкочастотные флюктуации при использовании ПТШ в нелинейных устройствах, таких, как генераторы или смеси-

сители, за счет модуляции электрических параметров прибора могут переноситься на СВЧ. Возникающий при этом избыточный шум вблизи несущей частоты часто ограничивает применение ПТШ в современных СВЧ радиоэлектронных системах.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Pucel R.A., Haus H.A., Stattz H. // Adv.Electron Phys. 1975. V.38. P.195.
2. Данилин В.Н., Кущиненко А.И., Петров Г.В. Аналоговые полупроводниковые интегральные схемы СВЧ. – М.: Радио и связь, 1985. 192 с.
3. Кальфа А.А., Пашковский А.Б., Тагер А.С. // Изв.ВУЗов. Радиофизика. 1985. Т.28. N 12. С.1583.
4. Debney B.T. // Solid-St.Electron. 1981. V.24. N 8. P.703.
5. Sah C.T. // Proc.IEEE. 1964. V.52. N 7. P.795.
6. Van der Ziel A. Шум (источники, описание, измерение). – М.: Сов. радио, 1973. 228 с.
7. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. – М.: Мир, 1984. Т.1. 456 с.
8. Sriram S., Das M.B. // IEEE Trans.Electron Dev. 1983. V.30. N 6. P.586.
9. Hooge F.N., Kleinpenning T.G.M., Vandamme L.K.F. // Rep.Prog.Phys. 1981. V.44. N 5. P.479.

Санкт-Петербургский государственный  
технический университет

Поступила в редакцию  
17 апреля 1992 г.

### LOW-FREQUENCY NOISE IN SCHOTTKY-GATE FIELD-EFFECT TRANSISTORS

*V.N.Dubrovskij, A.S.Karasev, V.I.Shevchenko*

Using a three-section analytical model for an operating regime of Schottky-gate field-effect transistor, the modulation sensitivities of drain current to low-frequency fluctuations in different regions of the active layer are calculated. Concentration fluctuations of carriers and of the fixed charge are considered as noise sources in the conducting channel and in the gate depletion region. The spectra of these fluctuation may include generation-recombination and flicker components. Theoretical results are compared with the measurements of low-frequency current noise of a FET.

УДК 621.373

## ШУМОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОДИОДНОГО ГЕНЕРАТОРА \*

*Г.Н.Коростелев, В.А.Романцев, О.В.Сосновцева*

Развита модель оценки АМ и ЧМ шумов многодиодного волноводного генератора с парным расположением диодов в одной плоскости. Теоретически и экспериментально исследованы зависимости АМ и ЧМ шумов от добротности, мощности и фазы взаимной синхронизации активных элементов. При этом проанализировано влияние расположения диодов и их количества на выходные характеристики генератора. Показано, что минимальным расстройкам взаимосинхронизированных диодных генераторов соответствует минимальный уровень АМ шума, меньший, чем в случае однодиодного генератора.

Вопросы суммирования мощности от отдельных элементов, как путь повышения генерируемой мощности, надежности генератора (имеется в виду облегченный режим работы каждого активного элемента) обсуждаются в настоящее время достаточно много [1-5]. Но при этом, исследованию спектральных характеристик уделяется недостаточно внимания.

Нами исследовался волноводный СВЧ генератор, имеющий периодическую структуру расположения активных элементов (рис.1).

По сравнению с сумматором, описанным в работе [1], он отличается, тем, что активные элементы находятся непосредственно в волноводе, а по сравнению с сумматором, описанным в работе [4], во-первых, дополнительно введены перестраиваемые коаксиальные резонаторы и, во-вторых, в устройстве диододержателя предусматривалась возможность перемещения активного элемента в поперечном сечении между широкими стенками волновода (рис.1).

Для перестройки коаксиальных резонаторов подвижный плунжер изолируется от внешнего коаксиала тонкой фторопластовой пленкой, что позволяет подавать постоянное напряжение питания диода непосредственно на центральный коаксиал, при этом па СВЧ короткое замыкание сохраняется. Таким образом, перестраивая коаксиальные резонаторы, можно

\* Доложено на Всесоюзно-координационном совещании "Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах" (поселок Черноголовка Московской области, июнь 1991 г.)

изменять реактивные параметры каждого активного элемента в отдельности и добиваться устойчивого режима синхронизации при значительном разбросе импедансных характеристик диодов Ганна.

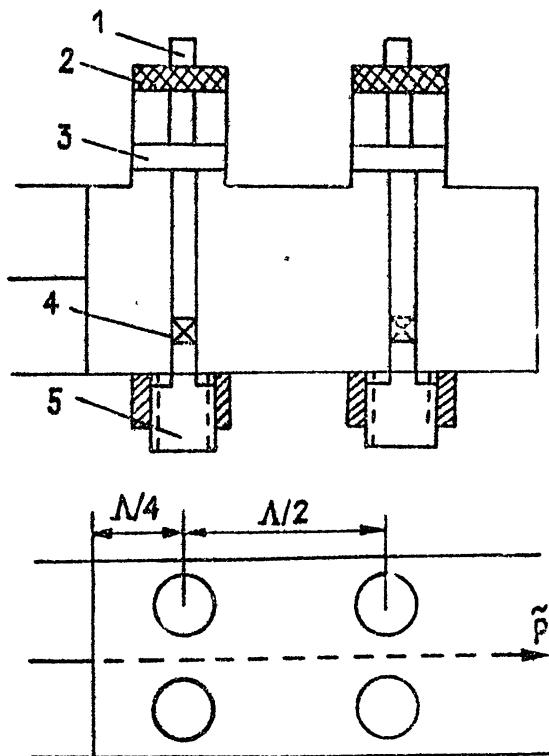


Рис. 1: Схема четырехдиодного волнового генератора: 1. Штырь питания. 2. Согласованная нагрузка. 3. Подвижный металлический плунжер. 4. Диод. 5. Цанга.

Парное расположение диодов позволяет рассматривать взаимодействие диодов лишь с соседними парами, полагая, что остальные развязаны запредельностью предшествующей пары. В этом случае эквивалентную схему описанного многодиодного генератора можно представить следующим образом, как это показано на рис.2.

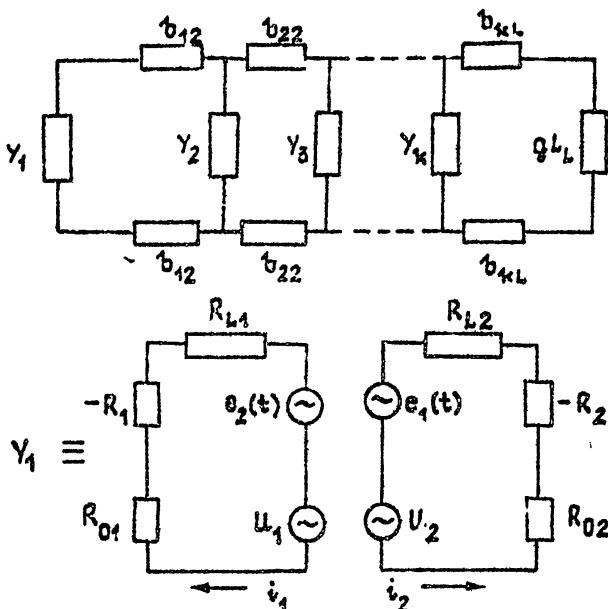


Рис. 2: Эквивалентная схема волноводного многодиодного генератора.

Записывая уравнение для каждого узла эквивалентной схемы (рис.2) и учитывая взаимную синхронизацию активных элементов по аналогии с тем, как это было сделано в работе [5], можно вывести соотношения, определяющие основные параметры генератора, такие как  $g_k$  — проводимость  $k$ -го активного элемента,  $g_{10}$  — оптимальную проводимость нагрузки,  $P_0$  и  $Q_{\text{ви}}$  — оптимальную мощность и внешнюю добротность.

Однако полученные выражения позволяли учитывать влияние на параметры генератора лишь перемещения активных элементов между узкими стенками волновода. Но эксперимент указывает на существование зависимости основных параметров многодиодного генератора от положения диодов между широкими стенками волновода. Используя результаты измерений теории, изложенной в работе [6], был введен коэффициент редукции  $\sin \frac{2\pi}{\lambda}x$ , где  $x$  — расстояние от диода до нижней стенки волновода. С учетом этого коэффициента можно привести уточненные параметры

эквивалентной схемы и выходные параметры генератора:

$$g_k = (-g_0 r_k^2 - r_k^2 Q_k V_k^2) \sin \frac{2\pi}{\lambda} x,$$

$$g_L = \frac{1}{2} N g_{0k} r_k^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x,$$

$$P_{\text{opt}} = \frac{g_{0k}^2 \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} x}{4 r_k^4 Q_k},$$

$$Q_{\text{BH}} = \frac{1}{N g_0 r^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x} \left[ \sum_{k=1}^N \tilde{b}_k + 2 \sum_{k=2}^N \frac{\tilde{b}_{lk}}{b_{lk}} \left( \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{k-l} b_l \right) \right],$$

где  $g_0$  — активная часть проводимости диода,  $r$  — нормированное расстояние между диодами,  $N$  — число диодов,  $b_l$  — реактивность  $l$  диода,  $b_{lk}$  — реактивность между  $l$  и  $k$  диодами,  $\tilde{b}$  — изменение реактивности.

Экспериментально, генерируемая мощность измерялась по стандартной методике, а для измерения добротности использовался разработанный нами метод, описанный в работе [7].

На рис.3 приведены результаты расчетов (сплошные линии) и эксперимента (точки). Из этих рисунков следует, что существует такое положение диодов в волноводе, при котором внешняя добротность минимальна, а генерируемая мощность максимальна.

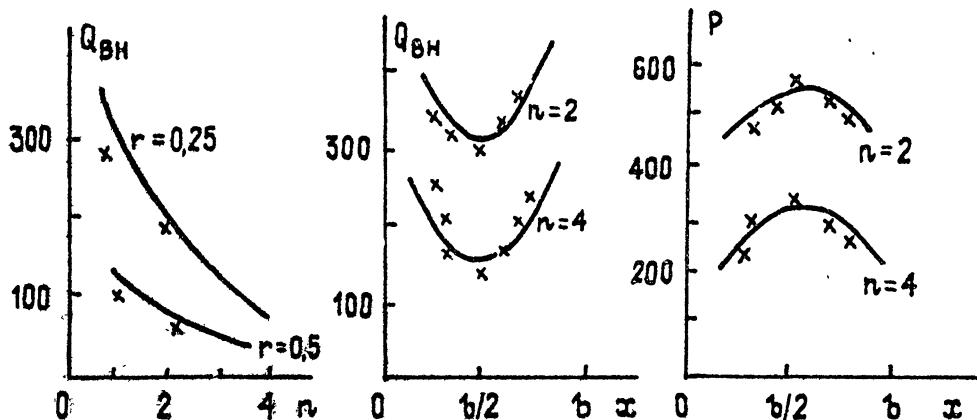


Рис. 3: Эквивалентная схема волноводного многодиодного генератора.

Для оценки АМ и ЧМ шумов использовалась полученная система дифференциальных уравнений, описывающих эквивалентную схему (рис.2), в

правую часть которых вводились эквивалентные источники шума для АМ и ЧМ составляющих. Затем, используя методику усреднения для шумового напряжения генератора, как это было сделано в работе [8, 9], исходные уравнения упрощались и разделялись на две группы, одни определяли изменение фаз, а другие — изменения амплитуд, и можно было получить, при некоторых ограничениях, аналитические решения этих уравнений, определяющие шумовую левиацию фаз и амплитуд сигнала. Необходимые значения импедансов диодов вычислялись по программе, описанной в работе [10].

Для экспериментального исследования шумовых характеристик многодиодного СВЧ генератора использовалась измерительная установка, блок-схема которой изображена на рис.4. Особенностью этой измерительной установки является отсутствие всякого рода коммутаторов. В каждом плече Т-моста находится пара диодов, два работают на сумму, а два — на разность сигналов. В разностной группе коррелированные шумы несущей подавляются, остаются некоррелированные шумы детекторов. В суммарной группе все шумы удваиваются. Сигналы с этих двух групп подаются на разностный усилитель, на выходе которого собственные некоррелированные шумы детекторов подавляются примерно на 40 дБ. Для измерения частотных шумов в разрыве между ферритовым вентилем и аттенюатором (рис.4) включается проходной резонатор с добротностью 200.

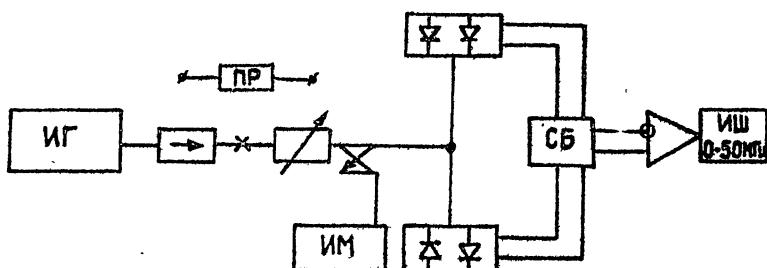


Рис. 4: Результаты измерений и расчетов добротности и мощности многодиодного генератора.

Измерялись также взаимокорреляционные характеристики активных элементов многодиодного генератора. Для этого использовался эффект автодинного детектирования шумов каждого активного элемента в отдельности. В цепь каждого элемента включается широкополосный высокочастотный трансформатор на связанных линиях, выход которого через широкополосный малошумящий усилитель подключается к входу измерителя корреляционных характеристик X6/4.

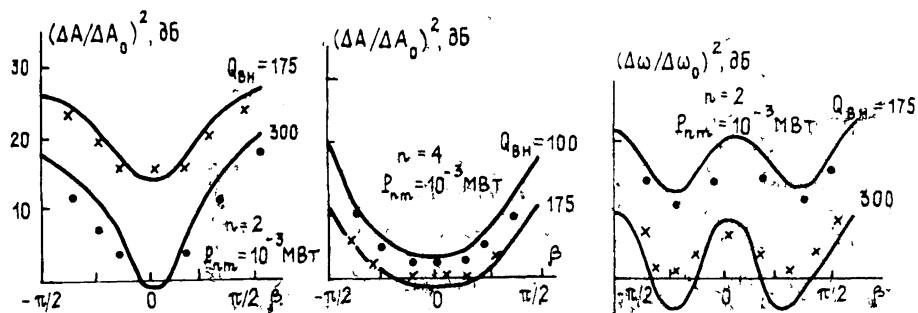


Рис. 5: Блок-схема измерительной установки АМ и ЧМ шумов.

На рис.5 приведены результаты расчетов и измерений шумов двух- и четырехдиодного СВЧ генератора проинормированные к шумам однодиодного генератора. Из этих рисунков следует, что при увеличении внешней добротности АМ и ЧМ шумы уменьшаются, однако, анализируя рис.3, получаем, что с увеличением количества диодов  $Q_{\text{вн}}$  уменьшается. Из рис.3 также следует, что при минимальной внешней добротности мы имеем максимальную выходную мощность. Таким образом, путь уменьшения шумов за счет увеличения  $Q_{\text{вн}}$  не является оптимальным. Из рис.5 видно, что при минимальном свдиге фаз сигналов взаимосинхронизированных генераторов получаем минимальный уровень АМ шума. На краях полосы синхронизации шумы возрастают. На рис.6 показаны характеристики взаимной корреляции двух связанных генераторов. Минимальная амплитуда АМ шума получается при максимальной связи генераторов и минимальной расстройке. При этом спектр шума оказывается более высокочастотным.

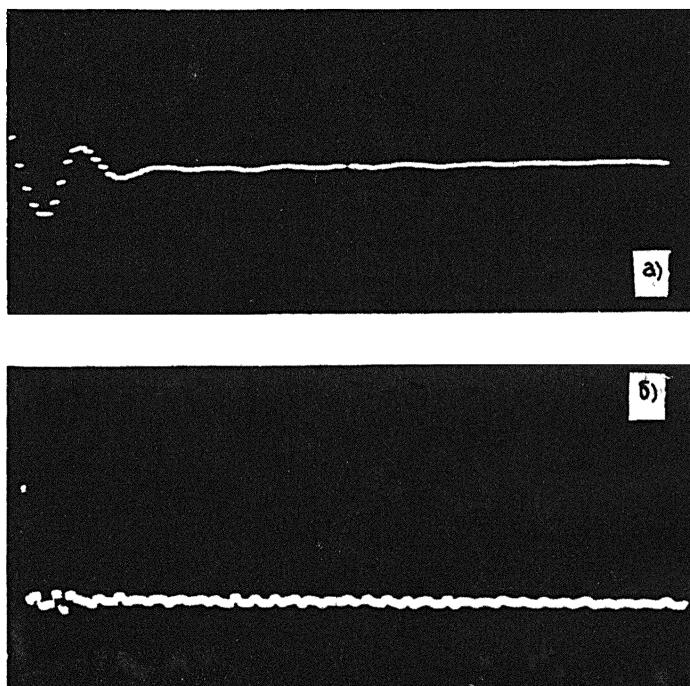


Рис. 6: Результаты измерений и расчетов АМ и ЧМ шумов многодиодного генератора.

Таким образом, подбирая соответствующим образом фазы взаимной синхронизации, можно, при определенных условиях, добиться уменьшения уровня шума даже по отношению к однодиодному генератору.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Курокава К. // ТИИЭР. 1917. Т.16. N 10. С.12.
2. Chang K., Sun C. // IEEE Trans. 1983. V.MTT-31. P.91.
3. Дворников А.А., Уткин Г.М. Фазированные автогенераторы радиопредающих устройств. – М.: Сов.радио, 1980.
4. Nogi C., Fukui K. // IEEE Trans. 1983. V.MTT-29. N 5. P.735.
5. Nogi C., Fukui K. // IEE Trans. 1985. V.MTT-33. N 12. P.25.
6. Эйзенгард Р.Л., Кан Р.Д. // Зарубежная радиоэлектроника. 1972. N 8. С.102.
7. А.с.1357873 СССР. Способ измерения добротности резонансной системы с активным элементом/В.А.Романов, Г.Н.Коростелев, С.А.Куд-

- ряшов. – Опубл. в Б.И. 1987. N 45.
8. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. – М.: Наука, 1968. С.660.
  9. Kurokawa K. // IEEE Trans. 1968. V.MTT-16. N 4 P.210.
  10. Кальфа А.А., Пореи С.Б. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1986. Вып.2(386). С.67.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
17 апреля 1992 г.

### **NOISE CHARACTERS OF MULTIPLE-DEVICE OSCILLATOR**

*G.N.Korostelcv, V.A.Romantsev, O.V.Sosnovseva*

The estimation model for AM nad FM noises of a wave guide multiple-device oscillator with tye twin disposition of diodes in the sasme plan was developed. All the dependencies of AM and FM noises in accordance with the Q-factor the power and the mutual synchronization phase of active devices were investigated theoretically and experimental. In line with the above mentioned investigation the influence of a diode disposition and their number upon output characters of an oscillator was analyzed. It is shown, that a minimum level of AM noise which is less the one in the case of singledevice oscillator corresponds by minimum detunes of mutual synchronization diode oscillators.

УДК 621.391.822.4

# ПОВЕРХНОСТНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ШУМОВЫЕ СВОЙСТВА ИОННО-ЛЕГИРОВАННЫХ СТРУКТУР КРЕМНИЯ \*

*A.N. Валов, M.I. Маковийчук, B.A. Рекшинский*

Представлены результаты экспериментальных исследований величины слоевого сопротивления и спектров низкочастотного токового шума в слоях кремния, легированных ионами фосфора и бора, в зависимости от режимов имплантации и постимплантационной термообработки. К объяснению полученных зависимостей привлечены результаты расчетов профилей имплантации по Пирсону, а также литературные данные о дефектности ионно-имплантированного кремния. Анализ шумовых спектров проведен с помощью эмпирического соотношения Фандамме-Хоухе.

В условиях широкого промышленного применения технологии ионного легирования первостепенной задачей является правильная организация операционного контроля качества полупроводниковых пластин. В настоящее время в производстве при контроле электрофизических параметров в основном используют лишь измерения величины поверхностного сопротивления кремния и глубины залегания  $p-n$ -перехода. Однако для изготовления малошумящих ионно-легированных структур этого недостаточно. По нашему убеждению целесообразным в плане экспрессности получения информации, чувствительности к уровню технологической дефектности имплантированной структуры кремния и информативности результатов, является применение методов низкочастотной шумовой диагностики в сочетании с традиционными вышеназванными методами. Между тем, использование шумовой спектроскопии на стадии контроля в промышленной технологии в значительной степени содержит из-за отсутствия информации о связи шумов с дефектностью кремния, хотя достоверно установлено, что эта связь может быть достаточно сильной. Фактор Фликкер-шума  $\alpha$  в зависимости от дефектности может изменяться на несколько порядков [1]. В представленной работе даны результаты совместного исследования поверхностного сопротивления и низкочастотного токового шума ионно-легированных структур кремния в зависимости от условий имплантации и постимплантационной термообработки.

\*Доложено на Всесоюзно-координационном совещании "Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах" (поселок Черноголовка Московской области, июль, 1991 г.)

Объектом исследования были пластины кремния марки КЭФ-4,5 и КДБ-10,5 имплантированные соответственно ионами бора и фосфора. Дозы имплантации лежали в интервале  $\Phi = 10^{11} \div 10^{16} \text{ см}^{-2}$ , энергии ионов —  $E = 20 \div 150 \text{ кэВ}$ . Постимплантационный отжиг образцов проведен в вакууме при остаточном давлении  $p = 10^{-4} \text{ мм рт.ст.}$  в течение 10 минут при различных температурах ( $T = 400 \div 800^\circ\text{C}$ ). Охлаждение образцов до комнатной температуры происходило при продувке рабочей зоны азотом со скоростью  $\sim 1,4^\circ/\text{С}$ .

Двухкомбинационным четырехзондовым методом измеряли слоевое сопротивление  $R_s$  и спектры низкочастотных токовых шумов [2]. Замеры  $R_s$  делались в 20 различных точках пластин. Измерение спектральной плотности токовых шумов проведено в диапазоне частот  $10 \text{ Гц} \div 20 \text{ кГц}$ . Спектры снимались в трех различных точках образца. Измерения проводились в области линейной (омической) проводимости, для которой выполнялись соотношения

$$\overline{\delta U^2} = I^2 \overline{\delta R^2}, \quad \frac{\overline{\delta I^2}}{I^2} = \frac{\overline{\delta R^2}}{R^2}, \quad (1)$$

где  $\overline{\delta U^2}$ ,  $\overline{\delta I^2}$ ,  $\overline{\delta R^2}$  — среднеквадратичные значения шумового напряжения, тока и сопротивления соответственно.

Измерения собственного шума установки показали, что он мал в сравнении с токовыми шумами исследуемых образцов и не превышает 5%. Поэтому в дальнейшем собственные шумы установки не учитывались.

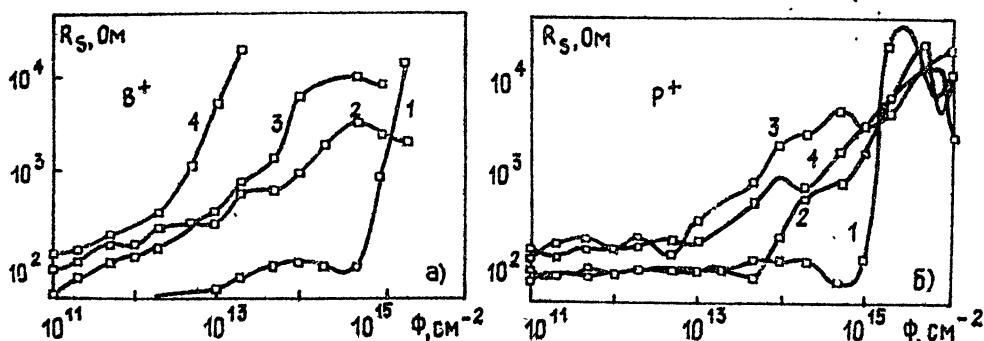


Рис.1:

На рис.1а представлены доотжиговые дозовые зависимости слоевого сопротивления кремния марки КЭФ-4,5, имплантированного ионами  $B^+$  с энергией 20, 60, 100 и 150 кэВ (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно). Дозы имплантации лежат в интервале от  $10^{11}$  до  $10^{16} \text{ см}^{-2}$ . Следует отметить значительный разброс по величине поверхностного сопротивления

от точки к точке по поверхности исследуемых образцов, растущий с увеличением дозы облучения. Так, например, для образцов, имплантированных бором с энергией 150 кэВ (кривая 4) при дозе  $\Phi = 10^{11} \text{ см}^{-2}$  разброс составил 6,3%, а при дозе облучения  $\Phi = 10^{12} \text{ см}^{-2}$  — 65%. На данном рисунке представлены усредненные результаты. Как видно рис.1а при малой энергии ионов (кривая 1) вплоть до доз имплантации  $\sim 10^{14} \text{ см}^{-2}$  поверхностное сопротивление слабо зависит от дозы легирования. По мере увеличения энергии ионов бора эта зависимость усиливается (кривые 2-4), с ростом дозы облучения растет поверхностное сопротивление.

На рис.1б представлены аналогичные зависимости для кремния марки КДБ-10,5, имплантированного ионами  $P^+$  с энергией 40, 70, 100 и 150 кэВ (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно). Здесь наблюдается та же картина. Влияние дозы облучения начинаетказываться на рост слоевого сопротивления по мере увеличения энергии ионов фосфора.

Как видно из рис.1б при дозах имплантации выше  $5 \times 10^{15} \text{ см}^{-2}$  наблюдается снижение слоевого сопротивления образцов, что, по-видимому, связано с радиационным отжигом в процессе имплантации.

Анализируя результаты измерений слоевого сопротивления, можно сделать следующие выводы:

1. Отжиг образцов при низких ( $T < 800^\circ\text{C}$ ) температурах и дозах легирования ( $\Phi < 10^{16} \text{ см}^{-2}$ ) приводит к повышению слоевого сопротивления кремния.

2. Отжиг при  $T = 800^\circ\text{C}$  при малой дозе легирования ( $\sim 10^{12} \text{ см}^{-2}$ ) также приводит к повышению  $R_s$ .

3. После термообработки образцов при  $T = 800^\circ\text{C}$ , легированных дозой  $\Phi = 10^{16} \text{ см}^{-2}$ , слоевое сопротивление снижается на несколько порядков.

Первое, на наш взгляд, связано с низкотемпературной диффузсией по движущих радиационных дефектов к поверхности образца. Такими дефектами могут быть в основном точечные дефекты (вакансии и междуузельные атомы), а также их комплексы.

Второе, по-видимому, связано с образованием в результате отжига обедненного свободными носителями  $p - n$ -перехода.

Третье обстоятельство связано как с эффективной активацией имплантированной примеси, так и увеличением подвижности носителей в результате отжига простых дефектов.

На рис.2 представлена дозовая зависимость слоевого сопротивления образцов кремния марки КЭФ-4,5, имплантированного ионами  $B^+$  с энергией 150 кэВ после отжига при температуре  $T = 800^\circ\text{C}$ ,  $t = 10$  мин.

Следует заметить, что после отжига образцов однородность по площади увеличилась и разброс по величине  $R_s$  от точки к точке не превышал 9%.

После отжига сопротивление пластин резко уменьшилось, однако сле-

дует отметить немонотонный характер дозовой зависимости  $R_s$ . Наблюдается рост слоевого сопротивления  $R_s$  с увеличением дозы облучения в интервале  $10^{11} \div 10^{13} \text{ см}^{-2}$ , при дальнейшем увеличении дозы слоевое сопротивление падает. К объяснению дозовой зависимости  $R_s$  привлечем результаты расчетов профилей концентрации имплантированного в кремний бора.

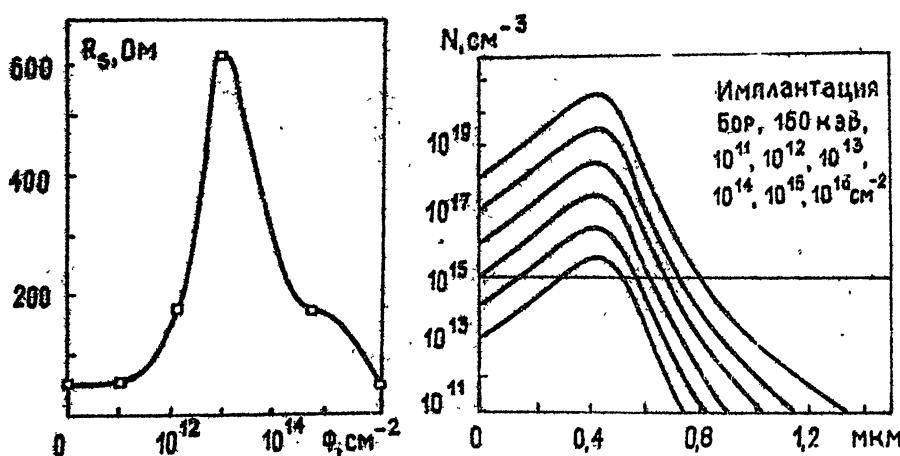


Рис.2, 3:

На рис.3 представлены расчетные профили концентрации бора по толщине кремния. Профили заданы распределением Пирсона IV, позволяющим наиболее точно аппроксимировать экспериментальные профили имплантированного бора в сравнении с другими известными распределениями. Горизонтальной чертой на уровне около  $10^{15} \text{ см}^{-3}$  отмечено распределение фосфора, однородно легирующего исходные пластинки кремния.

В работе [3] было показано, что в области доз легирования кремния ионами бора  $\Phi \ll 10^{13} \text{ см}^{-2}$ , коэффициент использования имплантируемой примеси, определяемый через слоевую концентрацию  $N$ , как  $\epsilon = N_s/\Phi$  стремится к единице, что соответствует полной активации имплантированной примеси после отжига при температуре  $T = 800^\circ\text{C}$ . С повышением дозы легирования бором, коэффициенты использования уменьшаются и в области  $\Phi \leq 10^{15} \text{ см}^{-2}$   $\epsilon < 0,1$ . Эти результаты дают основание полагать, что в области доз  $\Phi \leq 10^{13} \text{ см}^{-2}$  вся имплантированная примесь активирована, с повышением дозы степень активации уменьшается.

Как видно из профилей, доза легирования бором  $\Phi = 10^{11} \text{ см}^{-2}$  соответствует слабой компенсации донорной примеси и концентрация свободных носителей, определяемая через  $N_d - N_a \approx N_d$ . Поэтому на величине

слоевого сопротивления, как видно при сравнении с результатами для контрольного образца, такая малая доза практически не сказывается.

С увеличением дозы имплантации бором ( $\Phi = 10^{12} \div 10^{13} \text{ см}^{-2}$ ) растет степень компенсации, число свободных носителей уменьшается, кроме того, снижается их подвижность из-за рассеяния на заряженных ионах доноров и акцептеров — следствием этого будет рост величины  $R_s$ .

Дальнейшее увеличение дозы легирования бором приводит к тому, что  $N_a \gg N_d$ , т.е. донорная примесь полностью компенсирована, концентрация носителей определяется акцепторной примесью. С увеличением дозы слоевое сопротивление будет падать, что и подтверждается экспериментом (рис.2).

На рис.4 представлены спектры токовых шумов в образцах кремния до отжига. Спектры имеют ярко выраженный немонотонный характер и представляют из себя суперпозицию шумовых спектров от различной природы радиационных дефектов. Как видно из рис.4, проявляется тенденция к росту шумов с увеличением дозы легирования, причиной чему является рост плотности радиационных дефектов.

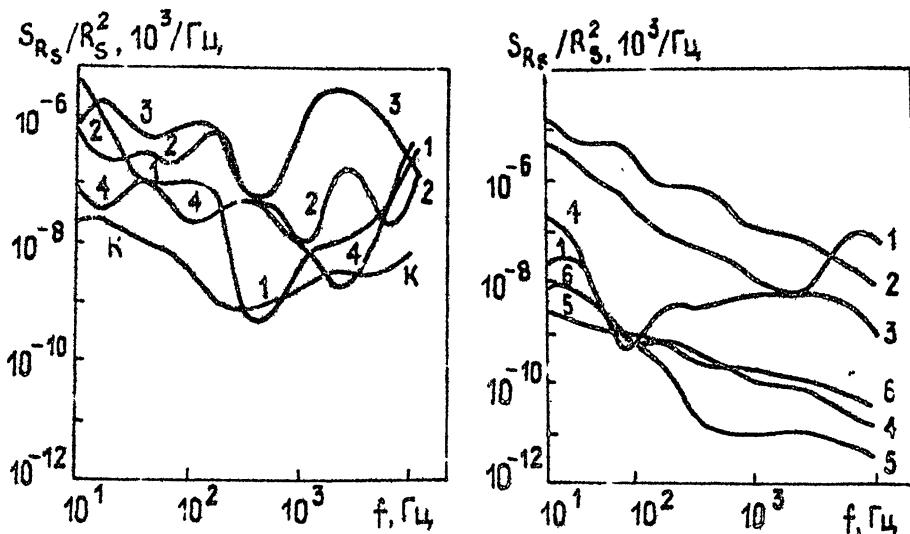


Рис.4, 5:

На рис.5 представлены шумовые спектры, снятые с имплантированных образцов после отжига. Несмотря на определенную немонотонность полученных спектров, следует отметить их близость к спектру типа  $1/f$ , что особенно заметно для образцов с дозой легирования  $10^{12}$  и  $10^{13} \text{ см}^{-2}$ . Отжиг образцов, имплантированных дозами  $10^{11}$  и  $10^{12} \text{ см}^{-2}$  привел к возрастанию шумов; начиная с дозы  $10^{13} \text{ см}^{-2}$  наблюдается снижение шумов, эффект снижения шумов возрастает с увеличением дозы имплантации.

Следуя модели объемного происхождения  $1/f$  шума в полупроводниках, к анализу спектров обычно привлекают эмпирическое соотношение Фандамме-Хоухе [1]:

$$\frac{S_{R_s}}{R_s^2} = \frac{\alpha_0}{Nf} \left( \frac{\mu}{\mu_1} \right)^2, \quad (2)$$

где  $\alpha_0$  — постоянная, определяемая материалом,  $\mu$  — подвижность носителей заряда,  $\mu_1$  — подвижность, обусловленная решеточным рассеянием,  $f$  — частота,  $N$  — число свободных НЗ.

Следуя тому, что определяющим механизмом рассеяния носителей в слаболегированном кремнии при комнатной температуре является решеточное, можно заключить, что уровень шумов в наших структурах будет определяться числом свободных носителей. Изменения в концентрации носителей после активации бора термообработкой и связанный с этим эффект компенсации приводят к изменению уровня шумов в имплантированном кремнии.

Шумы в образце с дозой легирования бором  $\Phi = 10^{11} \text{ см}^{-2}$  после отжига практически те же, что и в контрольном образце. Слоевое сопротивление образцов примерно совпадает. Несмотря на то, что слоевое сопротивление этого образца после отжига уменьшилось за счет увеличения подвижности носителей, шумы возросли. Отношение  $\mu/\mu_1$  в выражении (2) за счет возрастания  $\mu_1$  после отжига должно уменьшиться, что должно привести к снижению шумов. На эксперименте наблюдается обратная картина, что можно объяснить снижением числа носителей за счет эффекта компенсации. Подобным образом можно объяснить рост шумов после отжига образца, легированного дозой  $\Phi = 10^{11} \text{ см}^{-2}$ .

Сравнивая результаты дозовых послеотжиговых зависимостей шумов и  $R_s$ , видим, что для дозы  $\Phi = 10^{13} \text{ см}^{-2}$  слоевое сопротивление выше, чем для дозы  $\Phi = 10^{12} \text{ см}^{-2}$ , а шумы ниже. Это противоречит представлению о преобладающем влиянии на величину шума числа свободных носителей  $N$ . В данном случае на величине шума, по-видимому, сказываются изменения в подвижности носителей, связанные с остаточными радиационными дефектами, о чём также говорит немонотонный характер дозовой зависимости шумов при  $\Phi \geq 10^{15} \text{ см}^{-2}$ .

Полученные результаты могут быть полезны при разработке оптимального технологического процесса изготовления малошумящих ионно-легированных структур на основе кремния.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Маковийчук М.И. // Препринт ИМ АН СССР. – Ярославль, 1989.
2. Батавин В.В., Концевой Ю.А., Федорович Ю.В. Измерение параметров полупроводниковых материалов и структур. – М.: Радио и связь,

1985. 264 с.
3. Маковийчук М.И., Острова С.О., Стоянова И.Г., Троицкий В.Ю. Материалы семинара "Электрофлуктуационная диагностика материалов и изделий микроэлектроники". – Казань, 1983. С.55.
  4. Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах. – М.: Мир, 1986. 399 с.

Институт микроэлектроники  
РАН

Поступила в редакцию  
17 апреля 1992 г.

**SHEET RESISTANCE AND NOISE PROPERTIES OF ION-IMPLANTED SILICON STRUCTURES**

*A.N. Valov, M.I. Makovijchuk, V.A. Rekchinski*

Results of experimental investigation of sheet resistance and spectra of low frequency current noise in silicon layers, implanted by phosphorus and boron ion, depending on implantation regimes and postimplantation thermal treatment are presented. To explain the found dependences the results of implantation profiles evaluations following to Pirson, and also literary data on ion implanted silicon defection were attached. Noise spectrums analysis was made by means of Phandamme–Hooge empirical relation.

УДК 621.391.822

# ИССЛЕДОВАНИЕ ШУМОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КВАРЦЕВЫХ И ПАВ-РЕЗОНАТОРОВ \*

*А.С.Лучинин, А.В.Коробейников*

Приведены результаты экспериментального исследования низкочастотных шумов кварцевых резонаторов на основе поверхностных и объемных акустических волн (ПАВ) и (ОАВ) с рабочими частотами от 100 до 600 МГц. Показано, что как ПАВ, так и ОАВ резонаторы обладают флуктуациями параметров (резонансной частоты) имеющими спектр мощности вида  $1/f$  со эпичетельным разбросом интенсивности: примерно 20 дБ у ПАВ и более 30 дБ у ОАВ резонаторов.

Минимальный уровень фазовых шумов генераторов с резонаторами на ОАВ с частотой 100 МГц составляет -150 дБ/Гц на частоте анализа 1 кГц. Генераторы на ПАВ резонаторах на частотах 400-600 МГц уступают 5-10 дБ (при пересчете уровня шумов к нёсущей частоте 100 МГц).

Шумы кварцевых генераторов с резонаторами на основе поверхностных и объемных акустических волн (ПАВ) и (ОАВ) составляют все более серьезную проблему для разработчиков радиоэлектронной аппаратуры. Изучению этой проблемы посвящено значительное количество зарубежных публикаций, например, [1-3]. В отечественной литературе сведения о шумах генераторов с ОАВ и особенно ПАВ резонаторами представлены очень бедно.

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию шумов генераторов с резонаторами на ПАВ и ОАВ с целью определения роли шумов резонаторов и количественной оценки их вклада; сравнения шумов ПАВ и ОАВ резонаторов; поиска причин возникновения шумов резонаторов.

Методика оценки шумов резонаторов основывалась на измерениях фазовых шумов ПАВ и ОАВ генераторов и шумов частотных дискриминаторов на основе этих резонаторов. Для исследований были построены две установки. Первая — для измерения шумов ПАВ генераторов, на основе

\*Доложено на Всесоюзно-координационном совещании "Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах" (поселок Черноголовка Московской области, июнь 1991 г.)

метода гетеродинирования с частотным детектированием на низкой промежуточной частоте (0,1–0,5 МГц). Частотный детектор выполнен на основе  $LC$ -контура (перестраиваемого в диапазоне частот 0,1–0,5 МГц) и малошумящего фазового детектора. В качестве гетеродина использовался либо кварцевый генератор с умножителем частоты, либо ПАВ генератор, подобный исследуемому, отличающийся по частоте на 0,1–0,5 МГц.

Вторая установка — для измерения шумов ПАВ и ОАВ генераторов, основана на методе прямого частотного детектирования. Частотный детектор построен на основе ПАВ или ОАВ резонатора и малошумящего широкодиапазонного фазового детектора (работающего в диапазоне частот 0,1–1 ГГц). При измерениях использовались два одинаковых по частоте резонатора, один — для построения генератора, второй — для частотного детектора. К выходам обеих установок подключался низкочастотный анализатор спектра типа С5-3 или СК4-56. Измеренные спектры пересчитывались в спектры фазовых шумов исследуемых генераторов или в спектры флуктуаций параметров резонаторов.

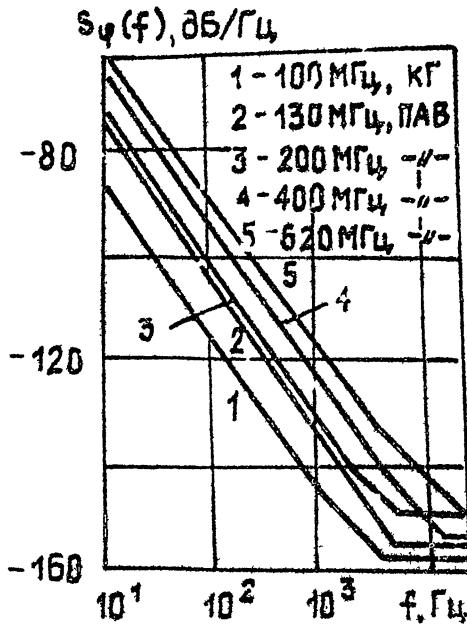


Рис. 1: Спектры фазовых шумов ПАВ и ОАВ генераторов.

Малошумящие фазовые детекторы построены в соответствии с [4]. Исследуемые ПАВ генераторы строились на основе двухкаскадных усилителей на малошумящих эквивалентах транзисторов (использовались транзисторы типов 2Е 371, 2Е 3101, 2Е 657). Первый каскад резистивный, второй — резонансный. ПАВ резонаторы включались в цепь обратной

связи между выходом резонансного каскада и входом резистивного. Малошумящий генератор на резонаторах с ОАВ был построен на транзисторе 2Е 642 по схеме с кварцем в цепи обратной связи (резонатор в цепи базы).

Результаты измерений показаны на рис.1–7. На рис.1 изображены спектры фазовых шумов автогенераторов, работающих на разных частотах. Кривой 1 показан спектр шумов генератора с объемным резонатором, имеющим резонансную частоту 100 МГц (на пятой механической гармонике) и добротность  $Q = 10^5$ . Кривые 2–5 иллюстрируют спектры ПАВ генераторов с резонаторами на частоты 130, 200, 400, 620 МГц. Добротности всех резонаторов имеют значения  $(1 - 1,5) \cdot 10^4$ . Все изображенные спектры отражают минимальные уровни шумов перечисленных генераторов, достигнутые подбором самых малошумящих экземпляров резонаторов.

При построении генераторов основное внимание уделялось спектральной плотности фазовых шумов изменяющейся по закону  $1/f^3$  (область спектральных частот преобладания частотного фликкер-шума [3]). Спектральная плотность на более высоких частотах анализа не является минимальной и при необходимости может быть уменьшена.

На рис.2 и 3 показано изменение уровня шумов генераторов при смене образцов резонаторов: ПАВ — рис.2 и объемных — рис.3. Изображены спектральные плотности фазовых шумов генераторов на частоте анализа 300 Гц в зависимости от ненагруженной добротности соответствующих образцов резонаторов. Для удобства сравнения спектральные плотности всех генераторов пересчитаны к одной несущей частоте 400 МГц. Точки, кружки и крестики обозначают спектральные плотности шумов генераторов на резонаторах разного типа или разных партий. Следует отметить, что значения спектральных плотностей фазовых шумов, изображенные на рис.2 и 3, получаются как при смене резонаторов в генераторах, так и при смене их в дискриминаторах. При этом, в первом случае в дискриминаторе использовались самые малошумящие экземпляры, а во втором — в генераторе.

Как видно из рисунков, имеет место большой разброс уровней шумов от экземпляра к экземпляру — 20 дБ у ПАВ генераторов и более 30 дБ у генераторов на ОАВ резонаторах. Большой разброс свидетельствует о значительном преобладании влияния собственных шумов резонаторов над другими источниками, определяющими флуктуации в автогенераторах. Исключение могут составлять минимальные спектральные плотности. Факт преобладания флуктуаций резонаторов дополнительно подтверждается изменением наблюдаемых спектральных плотностей фазовых шумов при смене резонаторов в дискриминаторах.

Сопоставление уровней шумов генераторов с добротностью резонаторов показывает, что существует корреляционная связь между ними. Степ-

пень связи, однако, не является постоянной и зависит от параметрии резонаторов. Например, для ПАВ резонаторов коэффициент корреляции между уровнем шумов и добротностью составляет  $r_{SQ} = -0,53$  (для всех резонаторов, отмеченные на рис.2);  $r_{SQ} = -0,71$  для резонаторов с  $f_0 = 620$  МГц;  $r_{SQ} = -0,84$  для резонаторов с  $f_0 = 400$  МГц, отмеченные точками и  $r_{SQ} = -0,027$  для резонаторов с  $f_0 = 400$  МГц, отмеченные кружками. Для генераторов с резонаторами на ОАВ коэффициент корреляции для всех резонаторов составляет  $r_{SQ} = -0,39$ ; для резонаторов, работающих на 5 механической гармонике, отмеченные точками —  $r_{SQ} = -0,7$ ; для резонаторов работающих на 3 гармонике, отмеченные крестиками —  $r_{SQ} = -0,67$ .

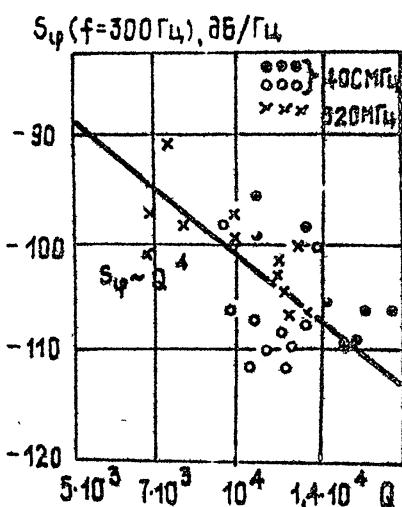


Рис. 2: Изменение уровня шума ПАВ генераторов при смене резонаторов.

В [3] отмечается, что спектральная плотность собственных шумов ПАВ резонаторов снижается примерно пропорционально  $Q^{-4}$ . На рис.2 и 3 изображены прямые, отражающие закономерность  $S_\varphi \sim Q^{-4}$ . Как видно, изменение спектральных плотностей шумов ПАВ и ОАВ резонаторов в какой-то степени соответствуют этой закономерности.

Сравнение уровней шумов ПАВ и ОАВ резонаторов показывает, что объемные резонаторы позволяют получить более низкий уровень фазовых шумов, при использовании малошумящих экземпляров резонаторов на 5–7 дБ. Однако разброс уровней шумов ОАВ резонаторов больше, чем ПАВ резонаторов и генераторы на худших объемных резонаторах могут оказаться более шумящими, чем худшие ПАВ генераторы.

Большой разброс уровней шумов резонаторов представляет самостоятельную задачу. Выяснение причин такого разброса позволило бы скор-

ректировать технологию производства резонаторов и повысить их качество. Некоторые шаги в направлении решения этой задачи были сделаны для ПАВ и ОАВ резонаторов.

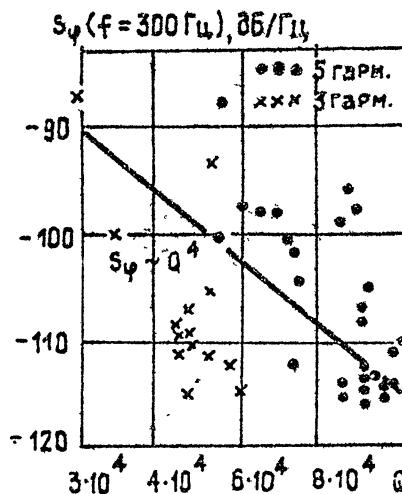


Рис. 3: Изменение уровня шума ОАВ генераторов при смене резонаторов.

Были проведены измерения фазовых шумов резонаторов различных конструкций, работающих на разных механических гармониках (3,5 и 9) и разных частотах. Спектральные плотности шумов резонаторов, работающих на 3 и 5 гармониках, проиллюстрированы на рис.3. Прецизионные резонаторы с рабочей частотой 100 МГц, работающие на 9 механической гармонике обладают, в среднем, такими же шумами.

Более высоким уровнем шумов обладают более высокочастотные резонаторы. Так резонаторы с резонансной частотой 170 МГц, работающие на 5 механической гармонике имеют примерно на 15 дБ более высокий уровень шумов.

Все исследованные резонаторы на ОАВ имели одинаковый срез АТ, но различались конструкцией. Часть были вакуумированными, часть герметизированными. Качественной разницы в уровнях шумов разных резонаторов не наблюдается.

Такое поведение шумовых характеристик резонаторов на ОАВ (большой разброс, рост уровня с возрастанием рабочей частоты, независимость от конструкции) указывает на то, что причина шумов резонаторов кроется в кварце. Более тонкие пластины кварца подвержены дефектам при их изготовлении, поэтому более высокочастотные резонаторы имеют более высокий уровень шумов.

К выводу о преобладании влияния кварца приводит и исследование

ПАВ резонаторов. На рис.4 показана зависимость спектральной плотности фазовых шумов ПАВ генератора с рабочей частотой 400 МГц на частоте анализа 300 Гц от расстройки относительно резонансной частоты резонаторов (для четырех экземпляров). По оси абсцисс отложена обобщенная расстройка ( $\xi = 2Q\Delta f/f_0$ , где  $Q$  — добротность,  $\Delta f$  — расстройка относительно  $f_0$ ). Как видно, зависимость спектральной плотности от расстройки значительно изменяется при смене образцов резонаторов, а для некоторых экземпляров носит резко немонотонный характер. Такую особенность поведения частотной зависимости уровня шумов ПАВ резонаторов можно объяснить тем, что на разных частотах проявляются разные дефекты кварца, пространственно разнесенные вдоль отражательной решетки, формирующей стоячую волну. При изменении рабочей частоты, меняются фазовые соотношения отраженных от элементов решетки и суммирующихся на встречно-штыревых преобразователях волн.

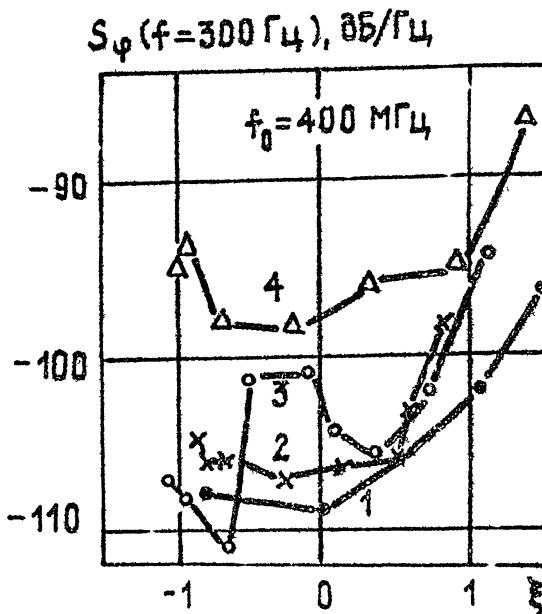


Рис. 4: Изменение уровня шума ПАВ генераторов при перестройке частоты.

В ПАВ устройствах на шумовые (и другие) характеристики значительное влияние оказывает состояние поверхности кварца. Это иллюстрируется экспериментом, проведенным с ПАВ резонаторами, имеющими рабочую частоту 400 МГц, состоящим в наблюдении за шумовыми и другими параметрами после вскрытия корпусов резонаторов. На рис.5 показана зависимость спектральной плотности фазовых шумов (на частоте анализа 300 Гц) от времени после вскрытия двух экземпляров резонаторов. По оси абсцисс отложено время в сутках. Уровень шумов данного

типа резонаторов увеличивался в течение первых пяти суток (примерно на 10 дБ). Другие параметры (резонансная частота, добротность, коэффициент передачи) в эти сутки оставались неизменными. Они незначительно изменились примерно через месяц (частота резонанса упала на 10 кГц, добротность снизилась на 5%).

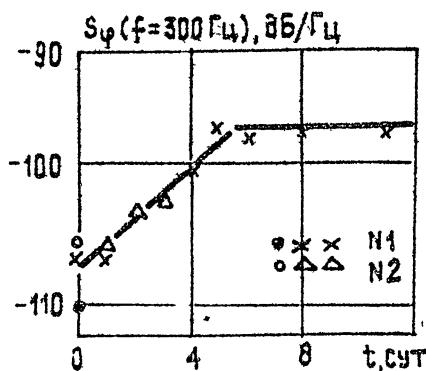


Рис. 5: Изменение уровня шума ПАВ генератора при вскрытии корпусов резонаторов.

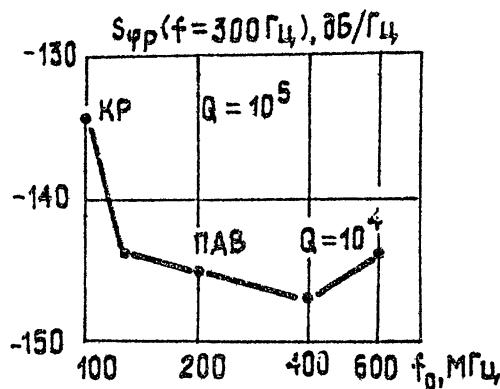


Рис. 6: Зависимость спектральной плотности фазового шума резонаторов от частоты резонанса.

В работах [1, 3] и других собственные шумы ПАВ резонаторов характеризуются спектральной плотностью фазовых флуктуаций, вносимых резонаторами при прохождении через них гармонического колебания. Эта спектральная плотность непосредственно измеряется фазовым детектором в схеме частотного детектирования, в которой резонатор используется в роли элемента задержки. Она может быть рассчитана из спектральной плотности фазовых шумов генератора  $S_\phi(f)$ , если считать,

что последняя определяется фазовыми шумами резонатора  $S_{\varphi p}(f)$  [5]

$$S_{\varphi p}(f) = S_{\varphi}(f)4Q^2f^2/f_0^2.$$

Пересчитанные таким образом спектральные плотности фазовых шумов резонаторов с разными резонансными частотами показаны на рис.6. Здесь изображены минимальные спектральные плотности, которые наблюдались в экспериментах. Из такого представления следует, что фазовый шум, вносимый кварцевым резонатором с ОАВ (на рисунке КР) с добротностью  $Q = 10^5$  наиболее высок, примерно на 10 dB превышает фазовые шумы ПАВ резонаторов, обладающих добротностью  $Q = 10^4$ . Уровни шумов ПАВ резонаторов с разными частотами практически не различаются.

Такое представление шумов резонаторов плохо согласуется с экспериментальными оценками шумов генераторов, рис.1. Более правильным, с точки зрения согласования с рис.1, является описание флуктуаций резонаторов через флуктуации их резонансной частоты или эквивалентных реактивных параметров схемы замещения резонаторов (индуктивности или емкости). На рис.7 показана зависимость спектральной плотности флуктуаций относительного значения эквивалентной индуктивности  $S_{\Delta L/L}(f)$  от рабочей частоты резонаторов.

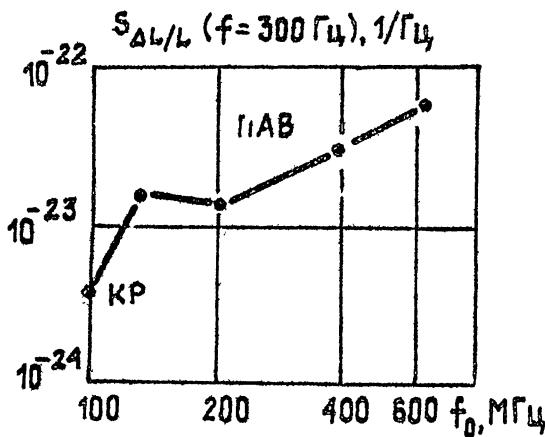


Рис. 7: Зависимость спектральной плотности флуктуаций эквивалентной индуктивности резонаторов от частоты резонанса.

Нетрудно показать, что связь спектральной плотности  $S_{\Delta L/L}(f)$  со спектром  $S_{\varphi}(f)$  устанавливается соотношением

$$S_{\Delta L/L}(f) = 4S_{\Delta f_0/f_0}(f) = S_{\varphi}(f)4f^2/f_0^2,$$

где  $S_{\Delta f_0/f_0}(f)$  — спектральная плотность относительных флуктуаций частоты генератора.

Из второго представления видно, что уровень шумов лучшего резонатора с ОАВ ниже, чем у ПАВ резонаторов. Наблюдается рост спектральной плотности пропорционально  $f_0^{1,5}$  (исключение составляет ПАВ резонатор с  $f_0 = 130$  МГц), причем этому закону подчиняются резонаторы на ПАВ и ОАВ.

Объединение одной закономерностью изменения интенсивности шумов ПАВ резонаторов с разными частотами и резонаторов с ОАВ можно объяснить одной общей причиной флюктуаций, например, флюктуациями упругих свойств кварца.

1. Кварцевые резонаторы на основе поверхностных и объемных акустических волн обладают значительным уровнем флюктуаций параметров (резонансной частоты) носящих характер фликкер-шума со спектральной плотностью близкой к  $1/f$  (в генераторах, проявляющейся в виде  $1/f^3$ ).

2. Уровни флюктуаций параметров резонаторов на ПАВ и ОАВ имеют значительный разброс (ПАВ — примерно 20 дБ, ОАВ — более 30 дБ). Минимальный уровень фазовых шумов генераторов с резонаторами на ОАВ с частотой 100 МГц составляет примерно -150 дБ/Гц на частоте анализа 1 кГц. Генераторы на ПАВ резонаторах (на частотах 400–600 МГц) уступают 5–10 дБ (при пересчете уровня шумов к несущей частоте 100 МГц).

3. Причина флюктуаций параметров резонаторов как на ПАВ, так и на ОАВ, вероятнее всего, кроется во флюктуациях параметров кварца.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kroupa V.F. // IEEE Jtrans.Ultrason.Ferroelectrics Frequency Control. 1988. N 3. P.406.
2. Driscoll M.M. // IEEE Jtrans.Ultrason.Ferroelectrics Frequency Control. 1986. N 6. P.698.
3. Parker T.E. // Proc. 41 st Annu.Freq.Contr.Symp. 1987. P.99.
4. Лучинин А.С., Ковалев Е.И., Коробейников А.В., Костин А.А. // Метрология. 1985. N 1. С.43.
5. Leson D.B. // Proc.IEEE. 1966. N 54. P.329.

Уральский политехнический  
институт

Поступила в редакцию  
17 апреля 1992 г.

**INVESTIGATION OF BAW AND SAW QUARTZ RESONATORS' NOISE***A.S.Luchinin, A.V.Korobeynikov*

Low-frequency noise of bulk-and-surface-acoustic-wave (BAW and SAW) resonators for 100–600 MHz are investigated. It is shown that both BAW and SAW resonators have fluctuations of resonant frequency with spectra of  $1/f$  type and variation in spectral density 20 dB for SAW and over 30 dB for BAW ones.

The lowest level of phase noise of phase noise of BAW resonator-stabilized oscillators operating at 100 MHz is -150 dB/Hz at 1 KHz offset frequency. The SAW oscillators operating at 400–600 MHz have 5–10 dB higher phase noise level if it recalculated to frequency 100 MHz.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ СИНХРОНИЗАЦИИ  
ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ  
В СВЕРХМАЛОШУМЯЩИХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ  
ГЕНЕРАТОРАХ МИЛЛИМЕТРОВЫХ ВОЛН\***

*С.Д.Уман, В.Г.Усыченко, В.Р.Ярушкин*

Рассмотрены флуктуации амплитуды и частоты синхронизированного автогенератора, а также флуктуации разности фаз между выходным и выходным колебаниями. Обоснованы синхронизационные методы измерения флуктуаций частоты сверхмалошумящих мало-мощных СВЧ-автогенераторов, для которых традиционные методы непригодны. Методы апробированы.

**1. Исходные положения.** Укороченные уравнения синхронизированного автогенератора (АГ) гармонических колебаний имеют вид [1, 2, 3]:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\omega_0}{2Q_n g_n} I_{1a} - \frac{\omega_0}{2Q_n} A + \frac{\omega_0}{2Q_{vn}} E_c \cos \alpha, \quad (a)$$

(1)

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_c + \omega_0 \left( 1 + \frac{\operatorname{tg} \Theta}{2Q_n} \right) - \frac{\omega_0 E_c}{2Q_{vn} A \cos \Theta} \sin \alpha. \quad (b)$$

Здесь  $A$  — амплитуда колебательного напряжения на выходе активного элемента (в точках подключения колебательного контура;  $\varphi$  — его фаза;  $I_{1a} = I_1 \cos \Theta$ , где  $I_1$  — амплитуда 1-й гармоники наведенного тока,  $\Theta$  — угол запаздывания тока относительно напряжения;  $\omega_0$  — собственная частота контура;  $Q_n$ ,  $Q_{vn}$  — нагруженная и внешняя добротности контура;  $E_c$ ,  $\omega_c$ ,  $\psi$  — амплитуда, частота и фаза внешнего синхронизирующего колебания;  $\alpha = \varphi - \psi$  — разность фаз между выходным и входным (внешним) колебаниями;  $g_n$  — пересчитанная в контур проводимость нагрузки.

Используя базовые уравнения (1a), (1b), решим задачу о флуктуациях в синхронизированном АГ, вызываемых амплитудными и частотными шумами как самого автогенератора, так и входного сигнала. Такое решение необходимо как для разработки методики шумовых измерений, так

\*Доложено на Всесоюзно-координационном совещании "Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах" (поселок Черноголовка Московской области, июнь, 1991 г.)

и для оценки ее эффективности по сравнению с традиционными методиками.

Задача решается в общем виде без конкретизации источников шума, которые могут быть любыми: аддитивными, модуляционными, вибрационными, импульсными и т.п. В данном случае важен результат их воздействия, который выражается во флуктуациях амплитуды  $\delta E_c(t)$  и частоты  $\delta\omega_c(t)$  входного сигнала, а также во флуктуациях амплитуды первой гармоники тока и частоты  $\delta I_1$ ,  $\delta\omega_2$  автоколебаний автономного АГ. Частота автоколебаний АГ, как видно из ее определения

$$\omega_2 = \omega_0(1 + \operatorname{tg}\Theta/2Q_n), \quad (2)$$

флуктуирует (при  $\omega_0 = \text{const}$ ) из-за флуктуаций  $\delta\Theta$  угла фазового сдвига [2]

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{I_{1p}}{I_{1a}},$$

зависящего от амплитуд активной и реактивной составляющих тока, подверженных воздействию источников нестабильности.

Для сокращения дальнейших выкладок напомним те формальные операции [4, 5], с помощью которых будем непосредственно переходить от стационарного случайного процесса  $x(t)$  к его энергетическому спектру

$$S_x(F) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} |\hat{x}_k(\bar{F}) \hat{x}_k^*|.$$

Здесь  $\hat{x}_k(\bar{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) \exp(-2\pi j F t) dt$  — спектральная плотность  $k$ -ой усеченной реализации случайного процесса, заданной в интервале  $-T/2 \leq t \leq T/2$ ;  $\hat{x}_k^*(\bar{F})$  — комплексно-сопряженная спектральная плотность; черта сверху означает усреднение по реализациям. Производная случайного процесса имеет спектральную функцию  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \exp(-2\pi j F t) dt = j2\pi F \hat{x}(F)$  и энергетический спектр  $S_{\dot{x}}(F) = F^2 S_x(F)$ , которые с точностью до коэффициентов совпадают с аналогичными характеристиками самого случайного процесса.

**2. Флуктуации амплитуды АГ.** Представим первую гармонику тока в уравнении для амплитуд (уравнение (1а)) в виде суммы среднего значения и случайного отклонения:  $I_{1a} = \bar{I}_{1a} + \Delta I_{1a}(t)$ . Случайные отклонения тока  $\Delta I_{1a}$  вызовут флуктуации амплитуды напряжения  $\Delta A(t)$ , которые легко найти методом вариации параметров. Сгруппировав по разные средние значения и случайные отклонения, получим уравнение для средних величин

$$\frac{2Q_n}{\omega_0} \frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{1}{g_n} \bar{I}_{1a} - \bar{A} + \frac{Q_n}{Q_{\text{вн}}} E_c \cos \alpha \quad (3)$$

и флюктуационное уравнение

$$\frac{2Q_n}{\omega_0} \frac{d\Delta A}{dt} = \frac{\Delta I_{1a}}{\bar{A}g_n} - \frac{\Delta A}{\bar{A}} + \frac{\partial I_{1a}}{\partial A} \frac{\Delta A}{\bar{A}}. \quad (4)$$

Введя относительные флюктуации амплитуды  $\alpha = \Delta A / \bar{A}$ , перепишем (4) в спектральной форме

$$\dot{\alpha} \left( 1 - \frac{\partial I_{1a}}{g_n \partial A} + 2\pi j F 2Q_n / \omega_0 \right) = \Delta I_{1a} / \bar{A}g_n$$

и по описанному выше правилу найдем энергетический спектр

$$S_\alpha(F) = \frac{1}{\left( 1 - \frac{\partial I_{1a}}{g_n \partial A} \right)^2 + \frac{4F^2 Q_n^2}{f_0^2}} \frac{S_{I_{1a}}(F)}{(\bar{A}g_n)^2}. \quad (5)$$

Здесь  $S_{I_{1a}}(F)$  — энергетический спектр флюктуаций тока,  $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ . Положив в (5)  $dA/dt = 0$ , получим уравнение стационарного режима работы генератора

$$I_{1a} = g_n \bar{A} - Q_n / C_{vn} g_n E_c \cos \varphi. \quad (6)$$

Найдем отсюда  $\bar{A}g_n$  и, подставив в (5), в приближении  $4F^2 Q_n^2 \ll f_0^2$  получим

$$S_\alpha(F) = \frac{S_{I_{1a}}(F) / I_{1a}^2}{\left( 1 - \frac{\partial I_{1a}}{g_n \partial A} \right)^2 \left( 1 + \frac{Q_n}{Q_{vn}} \frac{E_c}{\bar{A}} \cos \varphi \right)^2}. \quad (7)$$

Положив  $E_c = 0$ , найдем спектр относительных флюктуаций амплитуды автономного АГ

$$S_{\alpha 0}(F) = \frac{S_{I_{1a}}(F) / I_{1a}^2}{\left( 1 - \frac{\partial I_{1a}}{g_n \partial A} \right)^2}. \quad (8)$$

Он оказывается пропорционален спектру относительных флюктуаций тока и обратно пропорционален коэффициенту, который при умножении на  $(\omega_0 / 2Q_n)^2$  дает квадрат прочности предельного цикла [1], характеризующий запас устойчивости стационарного режима. Сравнивая (7) и (8) видим, что в режиме синхронизации амплитудные флюктуации АГ оказываются немного меньше, чем в автономном режиме.

**3. Прожаждение амплитудных шумов возбудителя.** Флюктуации амплитуды синхронизирующего колебания  $\delta E_c(t)$  вызовут отклонения амплитуды выходного колебания  $\Delta A$ . Флюктуационное уравнение находится вариационным методом из (1а)

$$\frac{2Q_n}{\omega_0} \frac{d\Delta A}{dt} = \frac{\partial I_{1a}}{g_n \partial A} \frac{\Delta A}{\bar{A}} - \frac{\Delta A}{\bar{A}} + \frac{Q_n}{Q_{vn}} \cos \varphi \frac{\delta E}{\bar{A}}$$

и имеет решение

$$S_{\alpha E}(F) = \frac{\left(\frac{E_c}{A} \frac{Q_n}{Q_{\text{вн}}} \cos \alpha\right)^2 S_E(F) / E_c^2}{\left(1 - \frac{\partial I_{\alpha}}{\partial Q_{\text{вн}}} A\right)^2 \left(1 + \frac{Q_n}{Q_{\text{вн}}} \frac{E_c}{A} \cos \alpha\right)^2}, \quad (9)$$

которое в сравнении с (7) показывает, что флюктуации амплитуды возбуждителя проходят на выход с ослаблением, равным  $(\frac{E_c}{A} \frac{Q_n}{Q_{\text{вн}}} \cos \alpha)^2$ .

**4. Флюктуации частоты АГ.** Перепишем уравнение (16) с учетом (2):

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_c + \omega_2 - \frac{\omega_0 E_c}{2Q_{\text{вн}} A \cos \Theta} \sin \alpha. \quad (10)$$

Выражение

$$\Delta_{\omega c} = \frac{\omega_0 E_c}{2Q_{\text{вн}} A \cos \Theta} \quad (11)$$

определяет в круговых частотах полуполосу синхронизации [1], которая связана с расстройкой

$$\Delta_{\omega} = \omega_c - \omega_2 \quad (12)$$

уравнением

$$\Delta_{\omega} = -\Delta_{\omega c} \sin \alpha, \quad (13)$$

вытекающим из (10) при  $d\varphi/dt = 0$ , т.е. в установившемся (стационарном) режиме. Перепишем фазовое уравнение в виде, удобном для анализа:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_c + \omega_2 - \Delta_{\omega c} \sin(\varphi - \psi). \quad (14)$$

Исследуя влияние собственных флюктуаций частоты  $\delta\omega_2$ , полагаем  $\psi = \text{const}$ . Варьируя (14), найдем флюктуационное уравнение и запишем его в спектральной форме:

$$\frac{d\delta\varphi}{dt} = \delta\omega_2 - \Delta_{\omega c} \cos(\varphi - \psi) \delta\varphi. \quad (15)$$

Поскольку при  $\psi = \text{const}$  имеем  $\delta\psi = 0$ , то равенство вариаций  $\delta\dot{\varphi} = \delta(\dot{\varphi} - \dot{\psi})$  означает, что уравнение (15) описывает флюктуации разности фаз между входным (нефлюктуирующим) и выходным колебаниями. Решение этого уравнения с учетом (13) имеет вид

$$S_{\alpha\alpha}^{A\Gamma}(F) = \frac{S_{f_2}(F)}{\Delta_c^2 - \Delta^2 + F^2}. \quad (16)$$

Здесь мы совершили переход от круговых к физическим частотам, что привело к переобозначению выражений (12), (13):

$$\Delta_c = \frac{\Delta_{\omega c}}{2\pi}, \quad \Delta = \Delta_{\omega}/2\pi = f_c - f_2. \quad (17)$$

В центре полосы синхронизации (при  $f_c = f_2$ ) имеем

$$S_{\infty}^{AF}(F) = S_{f_2}(F) / (\Delta_c^2 + F^2), \quad (18)$$

откуда следует, что спектр флюктуаций фазы (разности фаз) на низких частотах анализа  $F^2 \ll \Delta_c^2$  повторяет по форме спектр флюктуаций частоты автономного АГ. Коэффициент преобразования частотных флюктуаций АГ во флюктуации разности фаз тем больше, чем меньше полоса синхронизации.

$$2\Delta_c = \frac{f_0}{Q_{\text{вн}} \cos \Theta} \frac{E}{A}. \quad (19)$$

При больших частотах анализа  $F \gg \Delta_c$  флюктуации разности фаз совпадают с флюктуациями фазы АГ:

$$S_{\infty}^{AF}(F) = S_{f_2}/F^2. \quad (20)$$

Как известно [1, 5], аналогичная связь между флюктуациями частоты и фазы автономного АГ справедлива для крыльев спектральной линии, т.е. в области частот анализа  $F$ , значительно превышающих ширину спектральной линии колебания. Таким образом, синхронизация как бы "расширяет" спектральную линию АГ, доводя ее ширину до полосы синхронизации (17).

Как следует из (16), при увеличении расстройки, с приближением к границам полосы синхронизации, низкочастотные флюктуации неограниченно возрастают. Визуальная интерпретация сказанного выше представлена рисунками 1, 2.

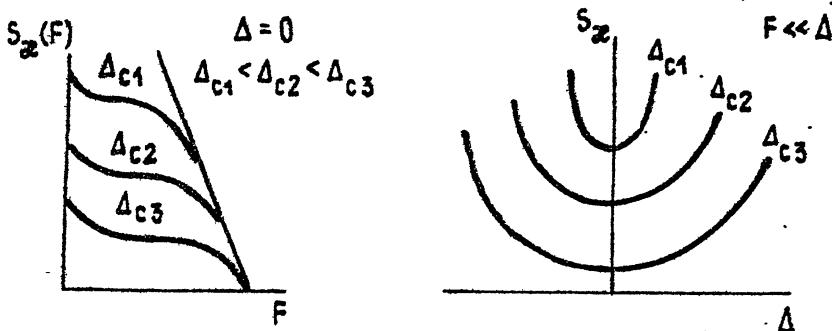


Рис.1, 2:

Обозначим в (15)  $\nu = 2\pi\delta f_{\text{вых}} = d\delta\phi/dt$ . Тогда

$$\delta\phi = \hat{\nu}/j\Omega,$$

и уравнение (15), переписанное в новых обозначениях,

$$j\Omega\hat{\nu} = j\Omega\delta\omega_2 - \Delta_{\omega_c} \cos \alpha\hat{\nu}, \quad \Omega = 2\pi F, \quad (21)$$

описывает флуктуации частоты синхронизированного АГ, энергетический спектр которых, выраженный в физических частотах,

$$S_{f_{\text{вых}}}^{\text{АГ}}(F) = \frac{F^2 S_{f_2}(F)}{\Delta_c^2 - \Delta^2 + F^2}, \quad (22)$$

можно было бы получить проще — умножив правую часть формулы (15) на  $F^2$ . Рис.3, 4 помогают понять физическое содержание формулы (22).

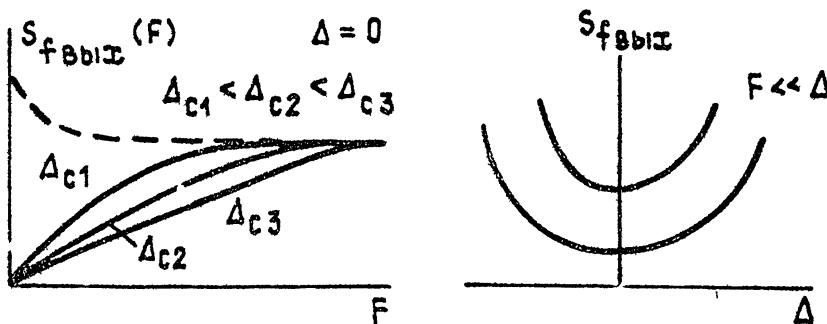


Рис.3, 4:

**5. Воздействие флуктуаций частоты возбудителя.** Из левой части уравнения (14) вычтем и прибавим к ней  $d\psi/dt$ . Получим

$$\left( \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \right) + \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = -\omega_c + \omega_2 - \Delta_{\omega c} \sin \alpha. \quad (23)$$

Введя флуктуации частоты возбудителя  $\nu_c = 2\pi\delta f_c = d\psi_c/dt$  и флуктуации разности фаз  $\delta\alpha$  между входным и выходным колебаниями, получим флуктуационное уравнение, которое в спектральной форме выглядит так:

$$j\Omega\delta\hat{\alpha} + \hat{\nu}_c = \Delta_{\omega c} \cos \alpha \delta\hat{\alpha}.$$

Отсюда по обычным правилам находим энергетический спектр флуктуаций разности фаз

$$S_{\alpha}^{\text{СР}}(F) = \frac{S_{f_c}(F)}{\Delta_c^2 - \Delta^2 + F^2}, \quad (24)$$

порождаемых флуктуациями частоты синхронизирующего колебания. По форме полученное выражение совпадает с формулой (16) и к нему в равной мере относятся рис.1, 2.

Используя уже принятые обозначения  $\nu = d\delta\varphi/dt$ ,  $\nu_c = d\delta\psi_c/dt$  из (14) найдем флуктуационное уравнение

$$\hat{\nu} = - \left( \frac{\hat{\nu}}{j\Omega} - \frac{\hat{\nu}_c}{j\Omega} \right) \Delta_{\omega c} \cos \alpha,$$

решение которого приводит к выражению

$$S_{f_{\max}}^{\text{ср}}(F) = \frac{(\Delta_c^2 - \Delta^2)S_{f_c}(F)}{\Delta_c^2 - \Delta^2 + F^2}. \quad (25)$$

**6. Методические рекомендации.** Полные флуктуации частоты на выходе синхронизированного АГ определяются суммой выражений (22) и (25):

$$S_{f_{\max}}(F) = \frac{\Delta_c^2 - \Delta^2}{\Delta_c^2 - \Delta^2 + F^2} \left( S_{f_c}(F) + \frac{F^2 S_{f_c}(F)}{\Delta_c^2 - \Delta^2} \right). \quad (26)$$

Как видно, на низких частотах анализа  $F^2 \ll \Delta_c^2 - \Delta^2$  флуктуации выходного колебания определяются флуктуациями возбудителя. Из условия

$$S_{f_c}(F) \geq \frac{F^2 S_{f_c}(F)}{\Delta_c^2 - \Delta^2}$$

найдем верхнюю частоту анализа

$$F_b \leq \sqrt{(\Delta_c^2 - \Delta^2)S_{f_c}(F) / S_{f_c}(F)},$$

выше которой флуктуации выходной частоты будут определяться в основном флуктуациями частоты автогенератора, а не синхросигнала. При нулевой расстройке достигается максимальное из возможных значение

$$F_b \leq \Delta_c \sqrt{S_{f_c}(F) / S_{f_2}(F)}. \quad (27)$$

Рис.5 раскрывает компонентный состав флуктуаций частоты выходного колебания при различных соотношениях между  $S_{f_c}$  и  $S_{f_2}$ . Чем больше  $S_{f_2}/S_{f_c}$ , тем меньше  $F_b$  при одинаковой полосе синхронизации.

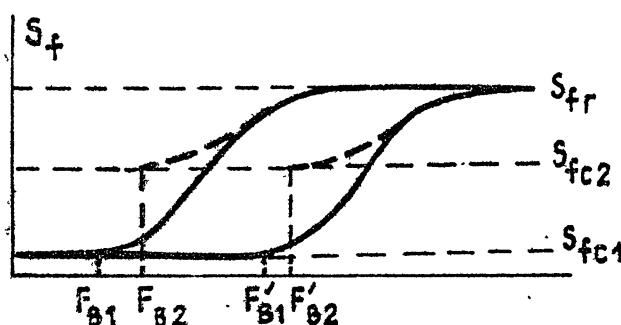


Рис.5:

Из проведенного анализа вытекают практические рекомендации. В тех случаях, когда исследуемый малошумящий генератор обладает малой мощностью, которой недостаточно для нормальной работы измерителя флюктуаций, можно синхронизировать его сигналом генератора большой мощности и измерять флюктуации частоты на его выходе. При этом диапазон анализируемых частот ограничивается сверху частотой  $F_{\text{в}}$ . Управляя этой частотой можно, меняя полосу синхронизации

$$2\Delta_c = f_0 / Q_{\text{вн}} \sqrt{K_p}, \quad (28)$$

зависящую от коэффициента усиления мощности  $K_p = P_{\text{АГ}}/P_{\text{СГ}}$ .

Для оценки интенсивности флюктуаций частоты однотипных генераторов может оказаться полезным метод, основанный на измерении флюктуаций разности фаз между входным и выходным колебаниями. Эти флюктуации определяются суммой выражений (16), (24), которая при нулевой расстройке равна

$$S_{\alpha}(F) = \frac{S_{f_2}(F) + S_{f_c}(F)}{\Delta_c^2 + F^2}. \quad (29)$$

Как известно [1, 6], чувствительность измерения флюктуаций амплитуды и разности фаз одинакова, что дает

$$S_{\alpha\min}(F) = S_{f\min}(F) = \frac{[S_{f_2}(F) + S_{f_c}(F)]_{\min}}{\Delta_c^2 + F^2}, \quad (30)$$

Чувствительность же измерения флюктуаций частоты методом контура оценивается соотношением [6]

$$S_{f\min}(F) = \Pi^2 S_{\alpha\min}(F), \quad (31)$$

где  $\Pi = f_0/Q_d$  — полоса прозрачности дискриминатора,  $Q_d$  — его добротность. Из (30), (31) с учетом (28) вытекает выигрыш в чувствительности

$$\Gamma = \frac{S_{f\min}}{(S_{f_2} + S_{f_c})_{\min}} = \frac{\Pi^2}{\Delta_c^2} \approx \frac{4Q_{\text{вн}}^2 K_p}{Q_d}, \quad (32)$$

который обеспечивает метод синхронизации по сравнению с контурным методом. Полученный результат имеет простое физическое содержание. Как известно [1, 6], коэффициент преобразования частотного дискриминатора пропорционален полосе прозрачности, в пределах которой фаза меняется от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ . В синхронизированном генераторе такой полосой пропускания является полоса синхронизации, что видно из (13). При коэффициентах усиления  $K_p$  порядка 20 дБ полоса синхронизации не превышает сотых долей полосы прозрачности контурной системы АГ, что и

определяет флуктуационный выигрыш при использовании в дискриминаторе и АГ резонаторов равной добротности.

Амплитуды квазистатических (т.е. медленных по сравнению с периодом колебаний) отклонений частоты любой природы, в том числе флуктуационной, увеличиваются или уменьшаются во столько раз, во сколько умножается или делится несущая частота. Это свойство позволяет измерять флуктуации частоты после преобразования несущей, которое в некоторых случаях может быть полезным. Для деления или умножения частоты в  $n$  или  $m$  раз можно использовать синхронизацию на субгармониках или на гармониках частоты исследуемого сигнала. Шумовые измерения ведутся по методике, опирающейся на формулы (26), (27). Очевидно, измеренный спектр  $S_{f_n}(F)$  связан со спектром исходных флуктуаций простым соотношением:

$$S_{f_n}(F) = \frac{n^2}{m^2} S_{f_m}(F).$$

Использование методов в промышленных условиях показало их надежность и эффективность при измерении низкочастотных флуктуаций в сверхмалошумящих ГДГ миллиметровых волн. Например, в восьмимиллиметровом диапазоне достаточно уверенно измерялись фазовые шумы со спектральной интенсивностью  $-122$  ДБ/Гц на частоте отстройки  $5$  кГц, что соответствует уровню частотного шума  $1,5 \cdot 10^{-5}$  Гц $^2$ /Гц. Измерить столь малые шумы традиционными методами оказалось невозможным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Сов.радио, 1977. — 485 с.
3. Смирнов А.В., Усыченко В.Г., Ломакин Г.В. // Электронная техника. Сер.1. Электроника СВЧ. 1983. 2. С.9.
4. Левин Б.Р. Статистическая радиотехника. — М.: Сов.радио, 1966. Т.1. — 720 с.
5. Корнилов С.А., Савинский В.А., Уман С.Д. Шумы кристаллических генераторов малой мощности. — М.: Сов.радио, 1972. — 200 с.
6. Корнилов С.А. // Обзоры по электронной технике. Сер.1. Электроника СВЧ. 1977. Вып.8 (471). С.57.

Санкт-Петербургский государственный  
технический университет

Поступила в редакцию  
17 апреля 1992 г.

**THE EMPLOYMENT OF SYNCHRONIZE METHODS FOR THE  
MESUREMENT OF FLUCTUATIONS IN SUPER LOW-NOISE SOLID  
STATE MICROWAVE OSCILLATORS**

*S.D.Uman, V.G.Usychenko, V.R.Yarushkin*

Amplitude and frequency fluctuations and fluctuations of in the phase difference between input and output of synchronized oscillators are considered. Synchronize methods of frequency fluctuations mesurement in super low-noise low-power microwave oscillators for which tradicional methods are useless are proposed. Methods are approved.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 550.388.2

**ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ  
ДЛЯ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ  
СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ  
ПЛАЗМЫ К ИНВАРИАНТНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ**

*A.Г.Бронин, Н.А.Заботин*

**Введение.** Корректный анализ эффектов распространения электромагнитного излучения в случайно-неоднородных средах во многих случаях требует учета многократного рассеяния. Согласно теории многократного рассеяния [1] среднее поле в случайно-неоднородной среде удовлетворяет уравнению Дайсона, а функция когерентности — уравнению Бете-Солпитера. Решение последнего для случайно-неоднородной гиротропной среды, средние свойства которой меняются в пространстве и во времени, представляет крайне сложную задачу.

Некоторое упрощение достигается ча пути преобразования уравнения Бете-Солпитера в уравнение переноса излучения. Для случайно-неоднородной магнитоактивной плазмы уравнение переноса излучения было получено в работе [2].

В работе [3] на основе феноменологического анализа баланса энергии при рассеянии на случайных неоднородностях в стационарном плоскостратифицированном плаэмеенном слое было выведено уравнение баланса энергии излучения в инвариантных переменных, под которыми подразумеваются координаты луча (пространственные и угловые) вне слоя. Очевидно, что уравнение баланса энергии должно быть следствием более общего уравнения переноса излучения [2]. Изложение процедуры перехода в уравнении переноса излучения для плоскостратифицированного слоя магнитоактивной плазмы со случайными неоднородностями к инвариантным переменным и составляет цель настоящего сообщения.

**Преобразование уравнения переноса.** Будем исходить из уравнения переноса излучения [2], которое для стационарной среды и моно-

хроматического излучения может быть записано в следующем виде

$$\frac{n_\alpha^2}{|\cos \vartheta_{g\alpha}|} \frac{d}{ds} \frac{I_\alpha |\cos \vartheta_{g\alpha}|}{n_\alpha^2} + \sigma_{0\alpha} I_\alpha = \sum_{\beta=1}^2 \int \sigma_{\alpha\beta} I'_\beta d\Omega'_k, \quad (1)$$

где индекс  $\alpha$  нумерует тип нормальной волны ( $\alpha = 1$  соответствует необыкновенной, а  $\alpha = 2$  — обычной волне),  $n_\alpha$  и  $\vartheta_{g\alpha}$  — показатель преломления и угол между волновым вектором и вектором групповой скорости волны типа  $\alpha$ ,  $I_\alpha(z, \vec{p}, \vartheta, \varphi)$  — лучевая интенсивность волны типа  $\alpha$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}(z, \vartheta, \varphi, \vartheta', \varphi')$  — дифференциальное сечение рассеяния волны типа  $\alpha$ ,  $\sigma_{0\alpha}(z, \vartheta, \varphi)$  — полное (интегральное) сечение рассеяния,  $d\Omega'_k = \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$ . Учитывая, что имеет место соотношение

$$\sigma_{0\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 \int \sigma_{\beta\alpha} d\Omega'_k, \quad (2)$$

уравнение (1) может быть записано в более симметричной форме:

$$\frac{n_\alpha^2}{|\cos \vartheta_{g\alpha}|} \frac{d}{ds} \frac{I_\alpha |\cos \vartheta_{g\alpha}|}{n_\alpha^2} = \sum_{\beta=1}^2 \int \left\{ \sigma_{\beta\alpha}(z, \vartheta, \varphi, \vartheta', \varphi') I_\alpha(z, \vec{p}, \vartheta', \varphi') - \sigma_{\beta\alpha}(z, \vartheta', \varphi', \vartheta, \varphi) I_\alpha(z, \vec{p}, \vartheta, \varphi) \right\} d\Omega'_k. \quad (3)$$

Следует отметить, что структура уравнения (3) аналогична структуре основного кинетического уравнения (уравнения Паули) [4].

Лучевая интенсивность  $I_\alpha$  в уравнениях (1) и (3) определяется как поток энергии, отнесенный к элементу телесного угла  $d\Omega_k$  вдоль направления  $\vec{k}$  [5]. Для дальнейшего удобно использовать классическое определение лучевой интенсивности, как потока энергии, отнесенного к элементу телесного угла вдоль направления вектора групповой скорости [6]. При этом имеет место соотношение:

$$\tilde{I}_\alpha(z, \vec{p}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}) = I_\alpha(z, \vec{p}, \vartheta, \varphi) \left| \frac{d\Omega_g}{d\Omega_k} \right|^{-1}, \quad (4)$$

где  $\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}$  — полярный и азимутальный углы вектора групповой скорости  $\vec{g}$ . Уравнение переноса (3) при этом приводится к следующему виду

$$\frac{dP_\alpha}{ds} = \sum_{\beta=1}^2 \int \left\{ \sigma_{\alpha\beta} \left| \frac{d\Omega_g}{d\Omega_k} \right|^{-1} \frac{|K_\alpha|}{|K'_\beta|} P'_\beta - \sigma_{\beta\alpha} \left| \frac{d\Omega_g}{d\Omega'_k} \right|^{-1} P_\alpha \right\} d\Omega'_k, \quad (5)$$

где  $K_\alpha$  — гауссова кривизна поверхности показателя преломления волны типа  $\alpha$ ,  $P_\alpha = \tilde{I}_\alpha |K_\alpha|$ .

В иллюстративированном слое, регулярные характеристики которого зависят только от переменной  $z$ , углы  $\vartheta, \phi$  и координату  $\vec{r}$  можно рассматривать как функции  $z$  и соответствующих "начальных" значений  $\Phi, \Theta$  и  $\vec{r}_0$  этих величин. В качестве  $\Phi$  и  $\Theta$  удобно использовать углы выхода излучения из слоя. В качестве  $\vec{r}_0$  можно использовать координату пересечения траектории с произвольной плоскостью  $z = z_0 = \text{const}$ , лежащей вне слоя (например, в случае радиозондирования ионосферы в качестве такой плоскости естественно выбрать поверхность Земли). Координаты  $\Phi, \Theta$  и  $\vec{r}_0$  полностью определяют лучевую траекторию и являются в этом смысле инвариантными [3].

Для новых переменных имеем

$$\frac{d}{ds} P_\alpha(z, \vec{r}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}) = s_z(z, \Theta, \Phi) \frac{d}{dz} P_\alpha(z, \vec{r}_0, \Theta, \Phi), \quad (6)$$

где  $s_z(z, \Theta, \Phi) = \cos \tilde{\vartheta}$ , что позволяет переписать (5) в виде

$$\begin{aligned} s_z(z, \Theta, \Phi) \frac{d}{ds} P_\alpha(z, \vec{r}_0, \Theta, \Phi) &= \sum_{\beta=1}^2 \int \left\{ \sigma_{\alpha\beta}(z, \Theta, \Phi, \Theta', \Phi') \times \right. \\ &\times \frac{|K_\alpha(z, \Theta, \Phi)|}{|K_\beta(z, \Theta', \Phi')|} P_\beta \left( z, \vec{r}_0 - \vec{\Delta}(z, \Theta, \xi, \Theta', \Phi'), \Theta', \Phi' \right) \left| \frac{d\Omega_g}{d\Omega_k} \right|^{-1} - \\ &- \left. \sigma_{\beta\alpha}(z, \Theta', \Phi', \Theta, \Phi) \left| \frac{d\Omega'_g}{d\Omega'_k} \right|^{-1} P_\alpha(z, \vec{r}_0, \Theta, \Phi) \right\} \left| \frac{d\Omega'_g}{d\Omega'_0} \right|^{-1} d\Omega_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где величина  $\vec{\Delta}(z, \Theta, \Phi, \Theta', \Phi') = \int_{z_0}^z \frac{\partial}{\partial z} \vec{r}(z, \Theta, \Phi) dz - \int_{z_0}^z \frac{\partial}{\partial z} \vec{r}(z, \Theta', \Phi') dz$  — геометрооптическое смещение точек пересечения координатной плоскости  $z = z_0$  лучами, задаваемыми инвариантными угловыми координатами  $(\Theta, \Phi)$  и  $(\Theta', \Phi')$ , при условии, что эти лучи пересекаются на уровне  $z$ .

Рассмотрим теперь случай, когда кросс-модовым расстоянием можно пренебречь (т.е.  $\alpha = \beta$ ) и опустим индексы  $\alpha, \beta$  у всех величин. Проектируя элемент площади  $dS$  поверхности показателя преломления на плоскость  $z = z_0$ , получаем  $s_z dS = \cos \Theta d\Omega_0 = \sin \Theta \cos \Theta d\Theta d\Phi$ . С другой стороны, имеем  $\cos \vartheta_g dS = n^2 d\Omega_k$  и, следовательно,

$$\left| \frac{d\Omega_g}{d\Omega_0} \right| = \frac{\cos \vartheta_g \cos \Theta}{n^2 s_z}. \quad (8)$$

Учитывая тождество

$$\left| \frac{d\Omega_g}{d\Omega_k} \right|^{-1} = \frac{\cos \vartheta_g}{n^2 |K|},$$

получаем

$$\left| \frac{d\Omega_g}{d\Omega_0} \right| = \left| \frac{d\Omega_k}{d\Omega_0} \right| \left| \frac{d\Omega_g}{d\Omega_k} \right| = \left| \frac{d\Omega_k}{d\Omega_0} \right| \frac{|K| n^2}{\cos \vartheta_g}. \quad (9)$$

Используя (8) и (9) преобразуем (7) к виду

$$\begin{aligned} \cos \Theta \frac{d}{ds} P(z, \vec{\rho}, \Theta, \Phi) = & \int \left\{ \sigma(z, \Theta, \Phi, \Theta', \Phi') \left| \frac{d\Omega_k}{d\Omega_0} \right| s_z^{-1}(z, \Theta', \Phi') \times \right. \\ & \times P \left( z, \vec{\rho}_0 - \vec{\Delta}(z, \Theta, \Phi, \Theta', \Phi'), \Theta', \Phi' \right) \cos \Theta' - \sigma(z, \Theta', \Phi', \Theta, \Phi) \left| \frac{d\Omega_k}{d\Omega_0} \right| \times \\ & \left. \times s_z^{-1}(z, \Theta, \Phi) P(z, \vec{\rho}_0, \Theta, \Phi) \cos \Theta \right\} d\Omega'_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что  $d\Omega_0 = \sin \Theta \, d\Theta \, d\Phi$  и  $\left| \frac{d\Omega_k}{d\Omega_0} \right| = \frac{\sin \alpha}{\sin \Theta} \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\Theta, \Phi)} \right|$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — соответственно полярный и азимутальный углы волнового вектора в системе координат, ориентированной вдоль внешнего магнитного поля ( $\vec{z}' \parallel \vec{H}_0$ ), получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} P(z, \vec{\rho}, \Theta, \Phi) \sin \Theta \cos \Theta = & \int \left\{ P \left( z, \vec{\rho}_0 - \vec{\Delta}(z, \Theta, \Phi, \Theta', \Phi'), \Theta', \Phi' \right) \times \right. \\ & \times \sigma(z, \Theta, \Phi, \Theta', \Phi') s_z^{-1}(z, \Theta', \Phi') \sin \Theta' \cos \Theta' \sin \alpha(\Theta, \Phi) \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\Theta, \Phi)} \right| - \\ & - P(z, \vec{\rho}_0, \Theta, \Phi) \sigma(z, \Theta', \Phi', \Theta, \Phi) s_z^{-1}(z, \Theta', \Phi') \sin \Theta \cos \Theta \times \\ & \left. \times \sin \alpha(\Theta, \Phi) \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\Theta, \Phi)} \right| \right\} d\Theta' d\Phi', \end{aligned} \quad (11)$$

которое соответствует уравнению (5) из работы [3].

**Заключение.** В настоящей работе показано, что уравнение, описывающее геометрооптический баланс энергии излучения в плоскостратифицированном слое является строгим математическим следствием уравнения переноса излучения. Его представление в инвариантных переменных дает ряд преимуществ, которые подробно обсуждаются в работе [3].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.2. Случайные поля. — М.: Наука, 1978. 432 с.
2. Бронин А.Г., Заботин Н.А. // ЖЭТФ. 1992. Т.101. № 4. С.1167-1176.
3. Заботин Н.А. // Изв.вузов. Радиофизика (в печати).
4. Репке Г. Неравновесная статистическая механика. — М.: Мир, 1990. 320 с.
5. Железняков В.В. Электромагнитные волны в космической плаэме.

- М.: Наука, 1977. 432 с.  
 6. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. – М.: Мир, 1971. 437 с.

Научно-исследовательский  
институт физики  
при Ростовском университете

Поступила в редакцию  
16 декабря 1992 г.

**THE REDUCTION OF RADIATION ENERGY TRANSFER EQUATION TO  
INVARIANT VARIABLES IN RANDOM PLANO-STRATIFIED  
MAGNETOACTIVE PLASMA**

*A.G.Bronin, N.A.Zabotin*

УДК 621.391.822.3

**О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА  
ШУМ ТИПА  $1/f$  РЕАКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

*M.E.Герценштейн, Ф.А.Левинзон, В.В.Потемкин*

Шум  $1/f$  (фликкер-шум) активных и реактивных элементов контура автогенератора определяет форму его линии [1–3] и точностные характеристики радиосистем, использующих автогенераторы [1, 4].

Заметим, что любая реактивность, как и любая конструкция, имеет механические резонансы. Энергия колебаний равна тепловой равновесной энергии  $kT/2$ . Поэтому и величина реактивности флюктуирует на частотах механического резонанса. Флюктуации, обусловленные потерями в реактивности, в частности, для конденсатора — диэлектрическими потерями, эквивалентны тепловому шуму резистора, включенного параллельно реактивности [5]. Однако эти тепловые флюктуации приводят к сравнительно небольшим флюктуациям сигнала и ведут к незначительным низкочастотным уходам параметров, по сравнению с шумом  $1/f$ , который наиболее опасен [1–3]. При  $f \rightarrow 0$  шум  $1/f$  превышает тепловые флюктуации.

Поэтому актуальным является вопрос о возможном механизме  $1/f$ -флуктуаций реактивности — аналога электрического токового шума, который проявляется при пропускании тока через элемент [5, 6]. Для шума  $1/f$  сопротивлений ясности с механизмом флуктуаций нет [5, 6], в принципе возможны как равновесные, так и деградационные механизмы. Термодинамика запрещает многие конкретные равновесные механизмы [7, 8].

В настоящей заметке будут рассмотрены флуктуации реактивных элементов типа  $1/f$ , для конкретности мы будем говорить о конденсаторе. И будет доказано, что термодинамика запрещает любые флуктуации емкости, уровень которых превышает тепловой.

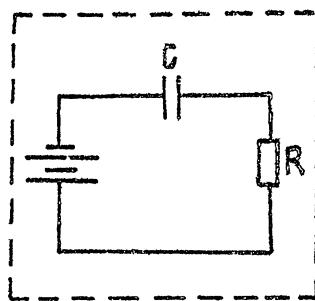


Рис.1:

Рассмотрим помещенную в термостат схему, изображенную на рис.1, в которой химическая батарея нагружена на резистор  $R$  через конденсатор  $C$  без утечки. Такой идеальный конденсатор не запрещен термодинамикой. Так как постоянный ток не идет через конденсатор, то химическая энергия батареи не расходуется (вместо батареи можно взять заряженный конденсатор), и рассматриваемая схема находится в термодинамически равновесном состоянии. Если величина емкости  $C$  флуктуирует, то ток  $i$  равен

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dC}{dt}U \neq 0, \quad (12)$$

и резистор  $R$  этим током нагревается. Тогда нарушается первый принцип термодинамики: резистор потребляет энергию, но батарея ее не расходует. Если предположить, что энергия к резистору поступает от конденсатора, то это противоречит второму принципу термодинамики, так как и резистор и конденсатор находятся в термодинамическом равновесии.

Однако такое рассуждение не запрещает флуктуации контактов между отдельными элементами обкладки конденсатора [3] (см.рис.2). Покажем, что эта возможность запрещена термодинамикой. Рассмотрим параметрическую схему с флуктуирующими конденсатором  $C$ , изображенную на рис.3. Пусть контуры  $L_1, C_1$  и  $L_2, C_2$  настроены на частоты  $f_1$  и  $f_2$  соответственно, причем

$$f_2 = f_1 + \nu > f_1, \quad (13)$$

где  $\nu$  — частота, на которой возьмем Фурье-компоненту флуктуаций конденсатора  $C$ . Тогда мы приходим к схеме, эквивалентной схеме параметрического преобразователя. Постоянную компоненту флуктуирующей емкости можно включить в емкости контуров  $C_1, C_2$  [9]. При достаточно узких полосах пропускания контуров, что не запрещено термодинамикой, других частот в схеме не будет, и схема работает как нерегенеративный преобразователь. И это имеет место для тепловых шумов резисторов  $R_1$  и  $R_2$ , их эквивалентные генераторы показаны на схеме рис.3. Если выбрать резисторы  $R_1$  и  $R_2$  так, чтобы параметр регенерации  $\alpha$  равнялся единице:

$$\alpha = (2\pi\nu C_\nu)^2 R_1 R_2 = 1, \quad (14)$$

то схема согласована, и ее коэффициент усиления  $G$  равен [9, 10]:

$$G = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2} \frac{f_2}{f_1} = 1 + \frac{\nu}{f_1} > 1. \quad (15)$$

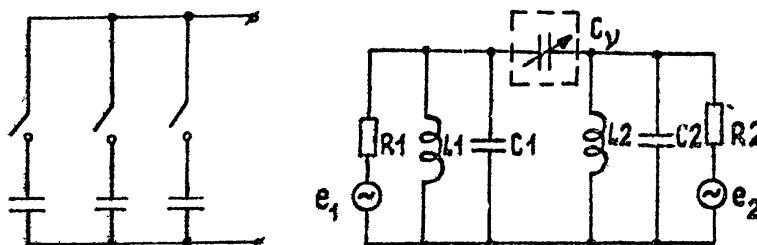


Рис.2, 3:

Нарушается первый принцип термодинамики: в равновесной системе нет источника энергии, за счет которого возможно усиление, — и второй принцип: резистор  $R_2$  излучает в полосе  $B$  мощность  $\kappa$ ТВ, а получает мощность  $\kappa$ ТВ  $(1 + \nu/f_1)$ , и поэтому у него температура будет выше, чем у резистора  $R_1$ . Конечно, так как  $B < \nu$ ,  $\nu \ll f_1$ , то эффект очень мал, но для термодинамики это не принципиально.

В заключение авторы выражают благодарность А.В.Якимову за замечания и полезные обсуждения вопросов данной статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968. 660 с.
2. Мальцев А.А., Якимов А.В. // Изв.вузов. Радиоэлектроника. 1975.

- Т.18. N 8. С.113.
3. Бочков Г.Н., Мальцев А.А., Якимов А.В. // Изв.вузов. Радиофизика. 1981. Т.24. N 1. С.126.
  4. Proceedings of the IEEE. 1966. N 2. P.5, 41.
  5. Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах. — М.: Мир, 1986. 398 с.
  6. Коган Ш.М. // Успехи физических наук. 1985. Т.145. N 2. 285 с.
  7. Герценштейн М.Е., Коротков А.Н., Потемкин В.В., Степанов А.В. // Изв.вузов. Радиофизика. 1991. Т.34. N 1. С.47.
  8. Герценштейн М.Е., Левинзон Ф.А. Статья в сборнике "Задачи физической электроники". — М.: Наука, 1982. С.228.
  9. Блошин И.А., Герценштейн М.Е. // Радиотехника и электроника. 1966. N 5. С.916.
  10. СВЧ устройства на полупроводниковых диодах./Под ред. И.В.Мальского и Б.В.Сестрорецкого. — М.: Сов.радио, 1969. 580 с.

Поступила в редакцию  
15 марта 1993 г.

**THE THERMODYNAMIC CONFINEMENTS ON THE FLICKER NOISE  
OF JET ELEMENTS**

*M.E.Gertsenshtein, F.A.Levinzon, V.V.Potemkin*