

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Новости высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежеслмачный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том XXXVI N 10

Нижний Новгород

1963

С о д е р ж а н и е

Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Метод характеристик уравнения Власова в начальной и граничной задачах электродинамики	867
Ломухин Ю.Л. Ослабление электромагнитных волн вдоль идеально проводящего неровного края	872
Филинов В.С. Локализация волн в одно-, двух- и трехмерных случайных средах в присутствии крупномасштабных неоднородностей	880
Жаров А.А., Кондратьев И.Г., Кузнецова Е.Ю. О резонансном поглощении электромагнитного излучения в мелкодисперсных средах	892
Батраков Д.О., Жух Н.П. Итерационная схема решения обратной задачи зондирования радиально-неоднородного цилиндра ...	901
Гайкович К.П. Совместное решение уравнений переноса излучения и теплопроводности в задачах радиотеплового зондирования атмосферы и подстилающей поверхности	912
Понятов А.А. Конвергентная неустойчивость в ионосфере	921
Долгина А.Н., Ковалев А.А., Кондратенко П.С. Пространственные и временные искажения отраженной волны, обусловленные возбуждением ПЭВ при скользящем падении излучения на металлическую решетку	929
Демин Н.В., Якимов А.В. Учет широкополосных флуктуаций параметров линейных инерционных цепей	936

Краткие сообщения

Быков Ю.В., Дрягин Ю.А., Кукин Л.М., Токман М.Д. Рассеяние миллиметрового излучения в "чистой" атмосфере	942
Караков В.А., Лавров А.М. О связи между кинетическими уравнениями различных видов	944
Двинских В.А. Вычисление параметров составляющих квазипериодических колебаний	948
Маругин А.В. Флуктуации частоты лазерных инжекционных диодов	952
Райский Б.В., Цимринг Ш.Е. О расчете систем формирования интенсивных электронных пучков в режиме ограничения тока пространственным зарядом	955

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С.Я.БРАУДЕ, А.В.ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В.Л.ГИНЗБУРГ (главный редактор), Л.М.ЕРУХИМОВ (зам.главного редактора), В.В.ЖЕЛЕЗНЯКОВ, В.А.ЗВЕРЕВ, Ю.Л.КЛИМОНТОВИЧ, А.Н.КОНДРАТЕНКО, Ю.В.КРАВЦОВ, В.Н.КРАСИЛЬНИКОВ, А.Н.МАЛАХОВ, В.В.НИКОЛЬСКИЙ, В.Ю.ПЕТРУНЬКИН, В.М.ПОЛЯКОВ, А.А.СЕМЕНОВ, С.А.ТАГЕР, В.И.ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции О.А.ШЕЙНЕР

Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.
Усл.печ.л. 11, 55. Усл.кр.-отт. 11, 55. Уч.-нод.л. 13, 90
Тираж 300 экз. Заказ Цена 400 р.

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,
ул.Большая Печерская, 25,
Научно-исследовательский радиофизический институт,
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика".
Телефон 36-01-71, e-mail rfj@nirfi.nnov.su

Отпечатано с готового набора

Типография
фирмы "УНИ-ПРИНТ"
603600, Нижний Новгород, ул.Большая Печерская, 25

© "Известия высших учебных заведений. Радиофизика", 1993

УДК 533.9.01

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА В НАЧАЛЬНОЙ И ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

М.В.Кузелев, А.А.Рухадзе

Дается строгое обоснование метода характеристик для решения кинетического уравнения Власова с самосогласованным полем. Обсуждаются аналогии и различия метода для начальной и граничной постановок задачи.

В электродинамике плазмы и СВЧ-электронике часто возникает необходимость решить систему уравнений Максвелла-Власова в постановке начальной или граничной задач [1]. Решать подобные задачи можно следующим образом: вместо прямого решения уравнения Власова для функции распределения заряженных частиц того или иного сорта следует проинтегрировать соответствующую систему характеристических уравнений, затем — выразить правые части уравнений Максвелла (плотности зарядов и токов) через некоторые интегралы от характеристик по начальным координатам частиц. Такой подход в настоящее время является общепринятым. Однако, с нашей точки зрения, в специальной физической литературе (см., например, [2, 3]) достаточно строгого обоснования метода характеристик нет. В настоящей методической работе мы постараемся восполнить этот пробел. Кроме того, выполним различие между начальной и граничной постановками задачи.

Рассмотрим простейшее уравнение Власова для функции распределения $f(t, z, v)$ частиц, совершающих одномерное движение в электрическом поле

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{e}{m} E(z, t) \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (1)$$

Обозначим через $\hat{z}(t, z_0, v_0)$ и $\hat{v}(t, z_0, v_0)$ решения характеристической системы уравнения (1)

$$\frac{dz}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} E(z, t), \quad (2)$$

дополненной начальными условиями

$$z|_{t=0} = z_0, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (3)$$

Покажем, что если

$$f(t, z, v)|_{t=0} = f_0(v_0), \quad (4)$$

то во все последующие моменты времени функция распределения определяется выражением:

$$f(t, z, v) = \iint dz_0 dv_0 f_0(v_0) \delta[z - \hat{z}(t, z_0, v_0)] \delta[v - \hat{v}(t, z_0, v_0)]. \quad (5)$$

Выполнение начального условия (4) в силу (3) очевидно. Остается только проверить, что функция (5) удовлетворяет уравнению (1). Сделаем это прямой подстановкой. Имеем, с учетом (2),

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= - \iint dz_0 dv_0 f_0(v_0) \left\{ \dot{v} \delta'_z \delta_v + \frac{e}{m} E(\dot{z}, t) \delta_x \delta'_v \right\}, \\ v \frac{\partial f}{\partial z} &= v \iint dz_0 dv_0 f_0(v_0) \delta'_z \delta_v, \\ \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{e}{m} E \iint dz_0 dv_0 f_0(v_0) \delta_x \delta'_v.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь $\delta_x \equiv \delta[z - \dot{z}(t, z_0, v_0)]$, $\delta_v \equiv \delta[v - \dot{v}(t, z_0, v_0)]$, а штрих означает дифференцирование по всему аргументу. Подстановка (6) в (1) приводит к следующему

$$\begin{aligned}\iint dz_0 dv_0 f_0(v_0) (v - \dot{v}) \delta'_z \delta_v + \\ \frac{e}{m} \iint f_0(v_0) dz_0 dv_0 [E(z, t) - E(\dot{z}, t)] \delta_x \delta'_v = 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Вычислим теперь якобиан преобразования от переменных \dot{z}, \dot{v} к переменным z_0, v_0 [4]

$$D_t = \frac{\partial(\dot{z}, \dot{v})}{\partial(z_0, v_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{z}}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial v_0} \\ \frac{\partial \dot{v}}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial v_0} \end{vmatrix}.\quad (8)$$

При $t = 0$, $\dot{z} = z_0$ и $\dot{v} = v_0$, а следовательно $D_t(0) = 1$. В момент времени Δt ($\Delta t \rightarrow 0$) из уравнений (2) имеем

$$\dot{z} = z_0 + v_0 \Delta t, \quad \dot{v} = v_0 + \frac{e}{m} E(z_0, 0) \Delta t.\quad (9)$$

Следовательно

$$D_t(\Delta t) = 1 - \frac{e}{m} \frac{\partial E(z_0, 0)}{\partial z_0} (\Delta t)^2.\quad (10)$$

Поэтому

$$\frac{\partial D_t(0)}{\partial t} = 0.\quad (11)$$

Так как выбор начала отсчета времени произволен, то соотношение (11) верно при любом t , а не только при $t = 0$. Учитывая, что $D(0) = 1$, окончательно получаем

$$D_t \equiv 1\quad (12)$$

или $dz_0 dv_0 = d\dot{z} d\dot{v}$, что отражает теорему Лиувилля о сохранении фазового объема [4, 5].

Используя теорему Лиувилля и учитывая свойство δ -функции $x\delta(x) \rightarrow 0$, сразу получаем, что равенство (7) выполняется тождественно.

Таким образом, (5) является решением уравнения Власова (хотя и формальным) с заданным начальным условием. Оно весьма удобно в начальных задачах теории плазмы. При этом интегрирование уравнения

Власова заменяется интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений и вычислением интегралов по начальным координатам z_0 и скоростям v_0 . Так, компонента Фурье любого момента функции распределения

$$J_n = \int dz e^{-ikz} \int dv v^n f(v) = \\ = \iint dz_0 dv_0 \hat{v}^n(t, z_0, v_0) f_0(v_0) e^{-ikz(t, z_0, v_0)}. \quad (13)$$

Очевидно, что функция распределения точно так же как и (5) выражается через характеристики и в общем случае трехмерного движения. Кроме того, начальное распределение $f_0(v_0)$ в (4) может зависеть не только от скоростей, но и от координат.

При решении граничной задачи с инжекцией частиц в некоторую систему их начальными координатами на фазовой плоскости являются не z_0 и v_0 , а v_0 и t_0 , где t_0 — время инжекции (влета). Поэтому вместо характеристической системы (2) с начальными условиями (3) удобнее выбрать следующую

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v}, \quad v \frac{dv}{dz} = \frac{e}{m} E(z, t), \quad (14)$$

$$t|_{z=0} = t_0, \quad v|_{z=0} = v_0.$$

При этом независимой переменной уже считается z , а плоскость $z = 0$ является местом инжекции. Обозначая через $\hat{t}(z, t_0, v_0)$ и $\hat{v}(z, t_0, v_0)$ решения системы (14), запишем по аналогии с (5) следующее выражение для функции распределения

$$f(t, z, v) = \iint dt_0 dv_0 f_0(v_0) \delta[t - \hat{t}(z, t_0, v_0)] \delta[v - \hat{v}(z, t_0, v_0)]. \quad (15)$$

Подстановка (15) в уравнение (1) приводит к соотношению ($\delta_t = \delta(t - \hat{t})$):

$$\iint dt_0 dv_0 f_0(v_0) \left(1 - \frac{v}{\hat{v}}\right) \delta_t' \delta_v + \\ + \frac{e}{m} \iint dt_0 dv_0 f_0(v_0) \left[E(z, t) - \frac{v}{\hat{v}} E(z, \hat{t})\right] \delta_t \delta_v' = 0. \quad (16)$$

Делая далее под интегралом замену

$$dt_0 dv_0 = D_z^{-1} d\hat{t} d\hat{v}, \quad (17)$$

где

$$D_z = \frac{\partial(\hat{t}, \hat{v})}{\partial(t_0, v_0)} \quad (18)$$

— якобиан преобразования от переменных \hat{t}, \hat{v} к переменным t_0, v_0 , перепишем (16) в виде

$$\iint d\hat{t} d\hat{v} f_0 D_z^{-1} \left(1 - \frac{v}{\hat{v}}\right) \delta_t' \delta_v + \\ + \frac{e}{m} \iint d\hat{t} d\hat{v} f_0 D_z^{-1} \left[E(z, t) - \frac{v}{\hat{v}} E(z, \hat{t})\right] \delta_t \delta_v' = 0. \quad (19)$$

Здесь аргументы функций f_0 и D_z^{-1} , v_0 и t_0 должны быть выражены через \hat{v} и \hat{t} . Первое слагаемое в (19) очевидно тождественно равно нулю. Второе же слагаемое, так как $z\delta'(z) \rightarrow 0$ [6], в нуль не обращается. Следовательно (15) не является решением уравнения Власова. К тому же якобиан (18) отличен, вообще говоря, от единицы. Более того при обращении \hat{v} в ноль якобиан D_z имеет особенность. *

Тем не менее, в многочисленных статьях и монографиях существенно используются выражения типа (15), что, как следует из сказанного выше, не является законным. Выясним поэтому, когда функцией распределения (16) все же пользоваться можно. Пусть все частицы системы имеют достаточно большую среднюю скорость u и отклонения их скорости от u , обусловленные тепловым разбросом и взаимодействием с полем, $\tilde{v} = v - u$ таковы, что

$$|\tilde{v}| \ll u. \quad (20)$$

Тогда систему (14) можно переписать в виде

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{u} \left(1 - \frac{\tilde{v}}{u}\right), \quad \frac{d\tilde{v}}{dz} = \frac{1}{u} \frac{e}{m} E. \quad (21)$$

В том же приближении уравнение Власова преобразуется к следующему

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{u} \left(1 - \frac{\tilde{v}}{u}\right) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{u} \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial \tilde{v}} = 0. \quad (22)$$

Введем теперь новую переменную $\tau = z/u - t$, то есть $f(t, z, \tilde{v}) = f(\tau, z, \tilde{v})$. Тогда (22) и (21) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\tilde{v}}{u^2} \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{e}{mu} E \frac{\partial f}{\partial \tilde{v}} &= 0, \\ \frac{d\tau}{dz} = \frac{\tilde{v}}{u^2}, \quad \frac{d\tilde{v}}{dz} = \frac{1}{u} \frac{e}{m} E, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\tau|_{z=0} = \tau_0 = t_0, \quad \tilde{v}|_{z=0} = \tilde{v}_0 = v_0 - u.$$

Последние уравнения только обозначениями отличаются от (1)-(3). Поэтому функцию распределения можно как и (5) представить в следующей форме

$$f(t, z, \tilde{v}) = \iint d\tilde{v}_0 d\tau_0 f_0(v_0) \delta[\tau - \hat{\tau}(z, \tau_0, \tilde{v}_0)] \delta[\tilde{v} - \hat{\tilde{v}}(z, \tau_0, \tilde{v}_0)]. \quad (24)$$

* Легко показать, что, например, при движении заряда в статическом поле с потенциалом $\varphi(z)$ ($\varphi(0) = 0$)

$$D_z = v_0 \left[v_0^2 - \frac{2e}{m} \varphi(z) \right]^{-1/2}.$$

Аналогом же (10) в граничной задаче является следующее

$$D_z(\Delta z) = 1 - \frac{e}{mv_0^2} E \Delta z + \frac{e}{mv_0^3} \frac{\partial e}{\partial t_0} (\Delta z)^2.$$

Временные же компоненты Фурье моментов функции распределения (24) определяются выражениями

$$J_n = \int dt e^{i\omega t} \int dv v^n f = \\ = -e^{i\frac{\omega}{v_0} z} \iint dv_0 d\tau_0 \hat{v}^n(z, \tau_0, \tilde{v}_0) f_0(v_0) e^{-i\omega \hat{\tau}(z, \tau_0, v_0)}. \quad (25)$$

Здесь $\hat{\tau}(z, \tau_0, \tilde{v}_0)$ и $\hat{v}(z, \tau_0, v_0)$ – решения характеристической системы (23).

Как правило неравенство (20) хорошо выполняется в случае пучков заряженных частиц. Поэтому формулы (25) успешно используются в теории усиления электромагнитных волн пучками. Если же в исходном состоянии пучок моноскоростной, то $f_0(\tilde{v}_0) = \delta(\tilde{v}_0)$ и интеграл по \tilde{v}_0 в (25) снимается, что еще больше упрощает ситуацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. – М.: Высшая школа, 1978. – 407 с.
2. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. – М.: Сов.радио, 1970. – 350 с.
3. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. – М.: Наука, 1990. – 336 с.
4. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Наука, 1970. – 447 с.
5. Либов Р. Введение в теорию кинетических уравнений. – М.: Мир, 1974. – 371 с.
6. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.

Институт общей физики
РАН

Поступила в редакцию
16 марта 1992 г.

CHARACTERISTIC METHOD FOR EQUATION IN THE BOUNDARY AND INITIAL PROBLEMS OF ELECTRODYNAMICS

M. V. Kuzelev, A. A. Rukhadze

A well-grounded characteristic method for Vlasov equation with self-consistent field is presented. The differences and analogies of the method for boundary and initial problems are discussed.

УДК 621.396.67

ОСЛАБЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДЯЩЕГО НЕРОВНОГО КРАЯ

Ю.Л.Ломузин

Построено импедансное приближение для определения ослабления электромагнитных волн, распространяющихся вдоль идеально проводящего неровного края. Установлено существование глубокого минимума поля при определенных параметрах изрезанности.

Известно, что источники, расположенные на острых проводящих краях, возбуждают кромочную волну [1, 2 и др.]. Интенсивность этой волны значительно больше, чем поле в свободном пространстве. Поэтому связь антенн, размещенных вблизи острого края, при определенной поляризации возрастает. На практике часто требуется напротив дополнительное ослабление связи. Ранее обнаружено, что для этой цели достаточно изменить форму края [3]. В данной работе, используя импедансный метод, исследуется влияние неровностей на ослабление волн, распространяющихся вдоль неровного острого края проводящей кромки.

1. ИМПЕДАНС НЕРОВНОГО КРАЯ

Рассмотрим неровный острый проводящий край, рис.1. Неровности представляют собой прямоугольные вырезы с периодом d , глубиной h и шириной выступа t . Ось x прямоугольной системы координат xyz направим вдоль края, y — перпендикулярно ему. Будем искать поверхностный импеданс в плоскости $z = 0$.

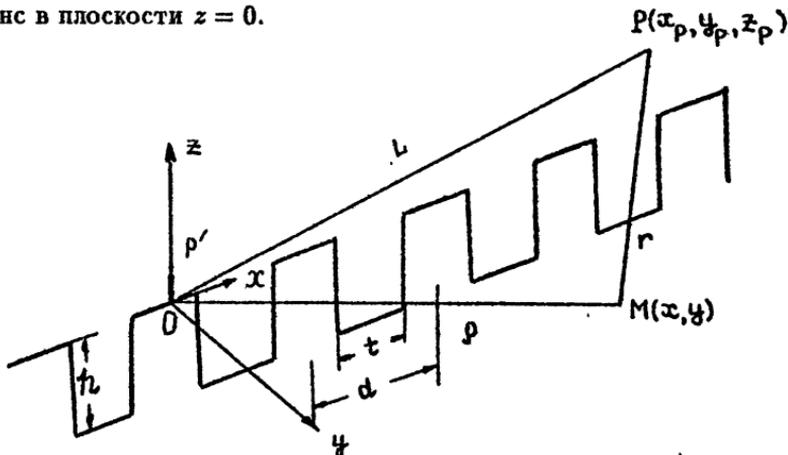


Рис. 1.

Связь тангенциальных компонент поля в плоскости $z = 0$ можно записать как [4]

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= -Z_{11}\tilde{H}_y + Z_{12}\tilde{H}_x, \\ \tilde{E}_y &= -Z_{21}\tilde{H}_y + Z_{22}\tilde{H}_x. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Z_{jl} ($j = 1, 2; l = 1, 2$) – компоненты тензора поверхностного импеданса. Как следует из (1), для определения Z_{jl} необходимо знать $\vec{E}_x, \vec{H}_y, \vec{H}_x, \vec{E}_y$ и некоторые дополнительные требования [4]. В качестве компонент поля в (1) мы будем использовать поля собственных волн полубесконечной ленточной многопроводной линии. Эти волны мы будем искать, исходя из результатов работы [5], где определены свободные волны бесконечной ленточной линии. Согласно [5] компоненты поля E_x и H_y запишутся следующим образом:

$$E_x = iE_0 \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(\cos \frac{\pi t}{d} \right) \left[e^{-i(n+s)(x \mp iy)(2\pi/d)} - e^{i(n-s+1)(x \pm iy)(2\pi/d)} \right] e^{-ikz}, \quad (2)$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_0},$$

где $P_n(\cos(\pi t/d))$ – полиномы Лежандра, s – параметр, связанный с волновым числом по оси x , E_0 – постоянная. Верхние знаки относятся к случаю $y > 0$, нижние – $y < 0$.

Как видно из (2) поле E_x представляет собой суперпозицию плоских неоднородных поверхностных гармоник, движущихся в прямом и обратном направлении вдоль оси x . В направлении оси z мы имеем бегущую со скоростью света плоскую волну.

Перейдем к определению собственных волн в случае полубесконечной линии. Очевидно, что поле данной структуры образуется в результате дифракции волн (2) на поперечных кромках. Найдем это дифракционное поле с помощью спектрального метода. Для чего рассчитаем функцию

$$\Phi(k_x, k_y, k_z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} E_x(x, y, z') e^{i(k_x x + k_y y + k_z z')} dx dy dz', \quad z' = z + h.$$

$E_x(x, y, z')$ выражается формулой (2), подставляя которую в последнее выражение, получим

$$\Phi(k_x, k_y, K_z) = -(2\pi)^2 E_0 \delta(k_z - k) \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(\cos \frac{\pi t}{d} \right) \left\{ \delta \left[k_x + \frac{2\pi}{d}(n - s + 1) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{(4\pi/d)(n - s + 1)}{k_y^2 + [(n - s + 1)(2\pi/d)]^2} - \delta \left[k_x - \frac{2\pi}{d}(n + s) \right] \frac{(4\pi/d)(n + s)}{k_y^2 + [(2\pi/d)(n + s)]^2} \right\}.$$

Дифракционное поле от полуплоскости при падении на нее плоской волны с произвольного направления имеет вид [6]

$$E_x(k_x, k_y, k_z) = \frac{e^{i(\pi/4)} k_y y + k_z z'}{\sqrt{\pi} k r} \exp[-i(k_y y + k_z z') + ik_x x] \{G(p) - G(q)\}.$$

Здесь

$$G(\gamma) = e^{i\gamma} \int_{\gamma}^{\infty} e^{-i\mu^2} d\mu, \quad \gamma = p, q, \quad p = -\sqrt{2[k_y y + k_z z']} \cos \frac{1}{2}(Q - \alpha),$$

$$q = -\sqrt{2[k_y y + k_z z']} \cos \frac{1}{2}(Q + \alpha), \quad L = \arccos \frac{k_x}{k}, \quad Q = \arccos \frac{z'}{r},$$

$$r = \sqrt{z'^2 + y^2}, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

Суммарное поле при дифракции спектра плоских волн есть

$$\bar{E}_a(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y, k_z) E_a(k_x, k_y, k_z) dk_x dk_y dk_z. \quad (3)$$

Вычисляя (3), находим

$$\bar{E}_a(x, y, z) = \frac{iE_0 e^{i(\pi/4)}}{\sqrt{\pi k r}} e^{-ikz'} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \frac{\pi t}{d}) \left[e^{-i(n-s+1)(2\pi/d)} \{G(p_1) - G(q_1)\} \times \right.$$

$$\times [kz' \pm iy \frac{2\pi}{d}(n-s+1)] e^{\mp(2\pi/d)y(n-s+1)} - e^{i(n+s)(2\pi/d)} \{G(p_2) - G(q_2)\} \times$$

$$\left. \times [kz' \pm iy \frac{2\pi}{d}y(n+s)] e^{\mp(2\pi/d)y(n+s)} \right], \quad (4)$$

$$p_1 = -\sqrt{2[kz' \mp iy \frac{2\pi}{d}y(n-s+1)]} \cos \frac{1}{2}(Q - \pi),$$

$$p_2 = -\sqrt{2[kz' \mp iy \frac{2\pi}{d}y(n+s)]} \cos \frac{1}{2}(Q - \pi),$$

$$q_1 = -\sqrt{2[kz' \mp iy \frac{2\pi}{d}y(n-s+1)]} \cos \frac{1}{2}(Q + \pi),$$

$$q_2 = -\sqrt{2[kz' \mp iy \frac{2\pi}{d}y(n+s)]} \cos \frac{1}{2}(Q + \pi).$$

Из (4) следует, что структура поля полубесконечной ленточной линии представляет из себя две системы пространственных поверхностных гармоник, распространяющихся навстречу друг другу вдоль оси x . Вдоль оси z также движутся навстречу друг другу волны: плоская к поперечной кромке, цилиндрическая от нее.

Компоненту $\bar{H}_y(x, y, z)$ для полубесконечной линии рассчитываем аналогичным способом и получаем в виде

$$H_y(x, y, z) = \frac{iE_0}{Z_0} e^{-ikz'} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \frac{\pi t}{d}) \left[e^{i(2\pi/d)y(n-s+1)} \{G(q_1) - G(p_1) + \right.$$

$$+ i \sqrt{\frac{2}{kz' \mp iy(2\pi/d)(n-s+1)}} \sin \frac{1}{2}Q \left. \right\} e^{\mp(2\pi/d)y(n-s+1)} - e^{i(2\pi/d)y(n+s)} \times$$

$$\times \left\{ G(q_2) - G(p_2) + i \sqrt{\frac{2}{kz' \mp iy(2\pi/d)(n+s)}} \sin \frac{1}{2}Q \right\} e^{\mp(2\pi/d)y(n+s)} \right]. \quad (5)$$

Входящие в (1) компоненты полей $\vec{E}_y(x, y, z)$ и $\vec{H}_x(x, y, z)$ при $y \rightarrow 0$ (т.е. в интересующей нас области) обращаются в ноль. Поэтому мы положим

$$Z(x, y) = -Z_{11} = \frac{\vec{E}_x(x, y, 0)}{\vec{H}_y(x, y, 0)}, \quad (6)$$

где $\vec{E}_x(x, y, 0)$ и $\vec{H}_y(x, y, 0)$ определяются формулами (4) и (5).

При "срезе" полубесконечной структуры плоскостью $z = 0$ появляются дополнительные острые края и угловые точки выступов. Поэтому (6) необходимо распространить непосредственно на линию края ($y = 0$). При $y = 0$ на выступах должны выполняться условия $\vec{E}_x(x, 0, 0) = 0$, $\vec{H}_y(x, 0, 0) \rightarrow \infty$, т.е. $Z(x, 0) = 0$. Этот факт мы учтем в (6), умножив $Z(x, y)$ на функцию

$$\Pi(x, y) = \begin{cases} F(x), & y = 0 \\ 0, & y \neq 0 \end{cases},$$

где

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x > \nu d + \frac{d}{2}, \quad x < (\nu + 1)d - \frac{d}{2} \\ 0, & x > \nu d - \frac{d}{2}, \quad x < \nu d + \frac{d}{2}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Меандровую функцию $F(x)$ представим в виде ряда Фурье и запишем окончательное выражение для поверхностного импеданса неровного края

$$Z(x, y) = \frac{\vec{E}_x(x, y, 0)}{\vec{H}_y(x, y, 0)} \frac{t}{d} \left[1 + \frac{2d}{\pi t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos\left(\frac{\pi t}{d} m\right) \sin\frac{2\pi x}{d} m \right]. \quad (7)$$

Следует отметить, что при $y \neq 0$ в (4), (5) входит параметр, точное значение которого можно найти только из строгой постановки задачи возбуждения. Если структура такова, что $s = 1/2$, то поле под поверхностью $z = 0$ вдоль оси x будет представлять собой стоячую волну, в результате не будет движения энергии вдоль x . При этих условиях поверхность $z = 0$ с импедансом (7) приобретает свойства локально реагирующей [7]. Из (4), (5) кроме того следует, что при $y = 0$ импеданс сложной кромки в любом случае не зависит от структуры возбуждающего поля.

2. МНОЖИТЕЛЬ ОСЛАБЛЕНИЯ

Пусть источником является диполь Герца P' , расположенный на краю в начале координат и ориентированный вдоль оси z , рис.1. Из [1] следует, что преобладающей компонентой поля диполя вблизи края является E_z . Поэтому будем исследовать влияние неровностей края на E_z . Поле при $z \geq 0$ определим с помощью формулы Грина

$$E_z(P', P) = E_{z0}(P', P) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[\Gamma(\mu, P) \frac{\partial E_z(P', \mu)}{\partial \bar{n}} - E_z(P', \mu) \frac{\partial \Gamma(\mu, P)}{\partial \bar{n}} \right] ds. \quad (8)$$

Здесь Σ – плоскость $z = 0$, μ – точка интегрирования, лежащая на Σ , \vec{n} – нормаль к Σ , направленная по $z < 0$, $\Gamma(\mu, P)$ – функция Грина, которую запишем в виде

$$\Gamma(\mu, P) = \frac{e^{-ikL}}{L}, \quad L = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + z_p^2}.$$

Поставим на поверхности Σ импедансное граничное условие

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = ik \frac{Z(x, y)}{Z_0} E_z, \quad z = 0.$$

От (8) известным способом [8] переходим к уравнению

$$E_z(P', P) = 2E_{z0}(P', P) + \frac{ik}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} Z(x, y) E_z(P', \mu) \Gamma(\mu, P) dx dy. \quad (9)$$

Введем в (9) функции ослабления $W(P', P)$, положив

$$E_z(P', P) = 2E_{z0}(P', P). \quad (10)$$

Пусть $E_{z0}(P', P) = \frac{1}{2} E_z^0$, где E_z^0 – поле диполя при ровном крае. Явное выражение для E_z^0 определено в [1]. Его при $k\rho \gg 1$ можем записать приближенно в виде:

$$E_z^0 \approx \frac{e^{-ik\rho}}{\sqrt{y\rho}} V, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad V = \text{const.}$$

Уравнение (9) с учетом (10) принимает вид

$$W(P', P) = 1 + \frac{ik}{2\pi} [E_{z0}(P', P)]^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} Z(x, y) E_{z0}(P', \mu) W(P', \mu) \Gamma(\mu, P) dx dy. \quad (11)$$

Решение двумерного уравнения (11) – задача весьма сложная. Поэтому часто используется упрощенный вариант такого типа уравнений [8]. Прежде всего интегрирование по x ограничивают интервалом $[0, x_p]$, а интегрирование по y выполняют приближенно, допуская, что $Z(x, y)$ и $W(x, y)$ – медленноменяющиеся функции переменной y . Тогда при интегрировании по y вынесем за знак интеграла функции $Z(x, y)$ и $W(x, y)$ при $y = y_{ст} x/x_p$, где $y_{ст}$ – точка стационарной фазы. Оставшееся выражение интегрируем с учетом особенности $1/\sqrt{y}$, в результате получим

$$W(x_p, y_p) = 1 + i \sqrt{\frac{-ik}{2\pi x_p}} \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \int_0^{x_p} \frac{W(x) Z(x, y_{ст})}{\sqrt{x(x_p - x)}} dx. \quad (12)$$

Это и есть окончательное упрощенное по сравнению с (11) уравнение для множителя ослабления. Входящее в (12) $Z(x, y_{ст})$ определяется формулой (7), в которой вместо y представляется $y_{ст}$.

Пусть точка наблюдения также как и источник помещается на край. Тогда (7) принимает вид

$$Z(x, 0) = Z_0 \frac{G(p_0) - G(q_0)}{G(q_0) - G(p_0) + i\sqrt{2/(kh)}} \frac{t}{d} \left[1 + \frac{2d}{\pi t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos\left(\frac{\pi t m}{d}\right) \sin\left(\frac{2\pi x m}{d}\right) \right],$$

где $p_0 = -\sqrt{2kh}$, $q_0 = \sqrt{2kh}$. Если $t = d/2$, то

$$Z(x, 0) = \frac{Z_0}{2} \frac{G(p_0) - G(q_0)}{G(q_0) - G(p_0) + i\sqrt{2/(kh)}} \left[1 + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-1)^m \sin \frac{4\pi m}{d} x \right]. \quad (13)$$

Ряд (13) является знакопеременным. Высшие гармоники в нем уменьшаются как $1/m$, поэтому данный ряд будет достаточно быстро сходиться. Если ограничиться нулевым членом, то импеданс перестанет зависеть от x , а уравнение (12) принимает хорошо известную форму

$$W(x_p) = 1 + \frac{i}{2} \frac{Z(00)}{Z_0} \sqrt{\frac{-ikx_p}{2\pi}} \int_0^{x_p} \frac{W(x)}{\sqrt{x(x_p - x)}} dx, \quad (14)$$

при которой оно имеет аналитическое решение

$$W(\sigma) = 1 - 2\sigma e^{-\sigma^2} \int_{-i\infty}^{\sigma} e^{t^2} dt, \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{Z(00)}{Z_0} \sqrt{\frac{ikx_p}{2}}. \quad (15)$$

Таким образом, влияние неровностей, у которых $t/d = 1/2$, на поле дipoля приближенно описывается множителем (15), т.е. функцией Зоммерфельда. Отметим прежде всего, что при $kh = 0$ имеем ровный край и при этом $Z(00)/Z_0 = 0$, следовательно $W(\sigma) = 1$, тогда

$$E_z(P', P) = 2E_{z0}W = E_z^0,$$

т.е. в случае ровного края приходим к известному результату.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис.2 показана зависимость параметра $|\sigma|$ от kh , т.е. от глубины нарезки. Видно, что с увеличением kh $|\sigma|$ осциллирует с затухающей амплитудой. Период осцилляции не постоянен. Наибольшее значение $|\sigma|$ имеет место при $kh \approx 0,8$. Расчеты показывают, что величина $\arg \sigma$ также колеблется. При этом до $kh = 0,8$ $\text{Im } \sigma > 0$ и при $kh > 0,8$ $\text{Im } \sigma < 0$. Тогда при $0 < kh < 0,8$ и $|\sigma| > 1$ функция $W(\sigma)$ может иметь вид

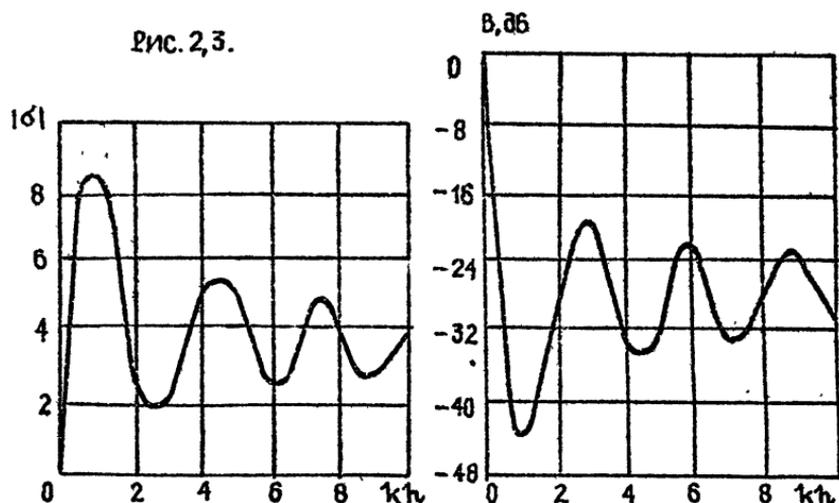
$$W(\sigma) \sim -e^{-\sigma^2} 2i\sqrt{\pi}\sigma - \frac{1}{2\sigma^2} + \dots,$$

в котором первое слагаемое соответствует замедленной волне.

При $kh > 0,8$ и $|\sigma| > 1$

$$W(\sigma) \sim -\frac{1}{2\sigma^2} + \dots,$$

т.е. поверхностная волна исчезает, остается только ослабленное поле. Физически это связано с резким уменьшением компоненты \vec{H}_y из-за взаимной компенсации падающей и переизлученной поперечной кромкой волн в пазах полубесконечной ленточной структуры.



Зависимость величины $B = 10 \lg WW^*$ от kh , рассчитанная по формулам (15) и (13) для случая $t = d/2$, где $d = \lambda/2$, показана на рис.3. Отсюда видно, что при $kh = 0,8$, B , дБ имеет глубокий минимум. С увеличением kh она также как и $|\sigma|$ осциллирует. Аналогичное поведение величины B , дБ наблюдается и в экспериментах [3].

Таким образом, изменение формы края приводит к преобразованию кромочной волны в структуру, аналогичную поверхностной, которая при $kh = 0,8$ имеет максимальное замедление (срыв). Если сравнить неровный край с ребристой поверхностью, то можно отметить, что поверхностная волна над ребристой структурой исчезает при $kh_0 \approx \pi/2$, где h_0 — глубина канавок, т.е. $h_0 > h$.

Обнаруженное явление срыва кромочной волны можно использовать на практике. В частности, поскольку срыв вызван взаимной компенсацией волн с близкими по величине амплитудами, то дополнительное ослабление поля вдоль неровного края при $kh \approx 0,8$ является весьма существенным и превышает затухание в свободном пространстве. Поэтому неровный край может служить в качестве развязывающего устройства.

Кроме того, полученные результаты полезны при разработке электродинамических устройств, содержащих острые проводящие края, например, микрополосковые и реберные линии; а также при проектировании и размещении антенн вблизи острых проводящих кромок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потехин Л.И., Тартаковский А.Б. // Радиотехника и электроника. 1953. Т.3, N 5. С.592.
2. Ломухин Ю.Л., Бадмаев С.Д., Чимитдоржиев Н.Б. // Радиотехника.

1985. N 8. С.47.

3. Ломухин Ю.Л., Дамдинов Б.Б., Чимитдоржиев Н.Б. // Радиотехника. 1989. N 5. С.52.
4. Миллар М.А., Таланов В.И. // Изв.вузов. Радиофизика. 1961. Т.4, N 5. С.795.
5. Chu Chio-Min // Appl.Phys. 1958. V.29, N 1. P.88.
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. - М.: Наука, 1973.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973.
8. Фейнберг Л.Е. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. - М.: АН СССР, 1962.

Бурятский институт естественных
наук СО РАН

Поступила в редакцию
9 марта 1992 г.

ATTENUATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY THE IRREGULAR CONDUCTIVE EDGE

Yu.L.Lomukhin

The impedance approach for the calculation of electromagnetic field, propagation by the irregular conductive edge is constructed. Possibility of getting deep minimum of field at some parameters of irregular edge is shown.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЛН В ОДНО-, ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ В ПРИСУТСТВИИ КРУПНОМАСШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

В.С. Филинов

Для описания распространения и локализации волн в 1D, 2D и 3D средах с мелко-масштабными случайными и крупномасштабными регулярными неоднородностями используются интегралы по путям и комплексный метод Монте Карло. Рассчитана усредненная по ансамблю рассеивателей вероятность прохождения волной расстояния $|\bar{r} - \bar{r}'|$. Проведено сопоставление с аналитическими результатами. Численно обнаружены неожиданные резкие пики, прерывающие экспоненциальное затухание среднего значения квадрата модуля гриновской функции, а также возможность делокализации волны в присутствии регулярных неоднородностей.

Процессы распространения волн в случайно-неоднородных средах и неоднородных средах, обладающих пространственной регулярной структурой, могут радикально отличаться. Физической причиной этого является интерференция многократно рассеянных полей, которая может приводить к локализации волн, в результате чего волны, распространяющиеся даже в практически непоглощающей случайно-неоднородной среде, экспоненциально затухают [1-10]. В пионерских работах Андерсона и Мотта [1-3] впервые были приведены убедительные аргументы в пользу того, что усиление беспорядка при определенных условиях приводит к появлению локализованных состояний. Однако присутствие крупномасштабных неоднородностей может вызывать делокализацию и существенно осложняет проблему.

За прошедшее время получено много значительных результатов [4-10], однако проблема вычисления положения порогов подвижности, описания кинетики волн и влияния крупномасштабных неоднородностей еще далека от завершения.

Отметим, что благодаря идентичности стохастических дифференциальных уравнений, описывающих распространение квантовых частиц, а также упругих и электромагнитных волн в случайных средах, результаты, полученные для электрона во внешнем поле, можно использовать и в случае волн в средах с мелко-масштабными случайными и крупномасштабными регулярными неоднородностями.

Волна или квантовая частица в случайном поле хаотически расположенных в d -мерном пространстве рассеивающих центров либо локализована, либо может уходить на бесконечность — это зависит от энергии частицы (длины волны), плотности и размерности системы. Для $d = 3$ в пределе больших времен и расстояний распространение достаточно коротких волн описывается диффузионным уравнением. Рассеяние в низкоразмерных системах качественно отличается от случая $d = 3$. Согласно

Мотту [2, 3] диффузия частицы любой энергии в одномерных системах невозможна. Локализация, например, электрона в одномерном случайном поле является полной.

В двумерных системах вопрос о локализации является спорным. В расчетах по скэйлинговой теории и в численных расчетах [10] обнаружены пороги подвижности при $d = 2$, которые, возможно, не являются истинными, а просто отделяют области экспоненциально локализованных состояний от расположенных при больших энергиях состояний со степенным спаданием волновых функций.

В работах [11–14] изучались распространение и локализация электрона в случайной среде в сильном статическом поле. Авторы [11, 12] обнаружили эффект делокализации электрона в одномерной системе рассеивающих δ -центров в достаточно сильном электрическом поле.

К сожалению, аналитические методы решения проблемы в настоящее время не могут дать гарантированную область применимости получающихся приближенных результатов, поэтому нами используется новый численный подход. В этом подходе для усредненной по ансамблю случайных неоднородностей функции Грина волнового стохастического уравнения, а также усредненного квадрата модуля функции Грина и ее корреляционных функций получены выражения через модифицированные интегралы по траекториям [15]. Для их расчета используется недавно развитый комплексный метод Монте-Карло (ММК) [16–19]. Главным достоинством этого подхода является то, что полученные интегралы по траекториям зависят от функционалов, определяемых самоусредяющимися величинами. Не менее важна высокая эффективность ММК, позволяющая за разумные времена счета (10 минут на ЭВМ типа "Эльбрус") получить достаточно надежные результаты.

Для проверки данного подхода значительное внимание уделено исследованию одномерных неупорядоченных систем с мелкомасштабными случайными пространственными неоднородностями, для которых имеются аналитические и численные результаты [6–9].

В результате расчетов ММК для одномерных и двумерных систем установлено, что вокруг центра локализации существует небольшая область пространства, в которой средняя интенсивность не убывает, а экспоненциальный спад формируется вне этой области. Известно, что экспоненциальный спад определяется характерной длиной локализации l . Аналогично область неубывающей средней интенсивности будем характеризовать ее размером \bar{l} , причем \bar{l} , как показали расчеты ММК, порядка пяти–шести средних расстояний между рассеивателями, что много меньше длины локализации l . В месте перехода от неубывающей средней интенсивности к экспоненциальному спаду наблюдается резкий всплеск. Обнаружена также серия последующих всплесков, прерывающих экспоненциальный спад средней интенсивности. Как экспоненциальный спад, так и серия всплесков имеют, по-видимому, интерференционное происхождение и обусловлены случайным характером рассеивающей среды.

В трехмерном случае, как показали расчеты ММК, аналогичные всплески интенсивности слабо выражены, что связано с быстрым убыванием амплитуды рассеянных волн в пространстве большей размерности.

Исследовано также влияние на локализацию крупномасштабных неоднородностей. Обнаружены резкие осцилляции средней интенсивности, обусловленные интерференцией прямой и отраженной крупной неоднородностью волн. Крупномасштабные неоднородности вследствие увеличения показателя преломления (увеличения энергии частицы) могут приводить к уменьшению длины волны и сечения рассеяния на мелкомасштабных неоднородностях. В результате этого снижается роль интерференции рассеянных волн, что и является причиной делокализации.

1. КРИТЕРИЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Исследование локализации волн будем проводить в приближении волнового стохастического уравнения, которое достаточно надежно описывает распространение широкого класса монохроматических волн в квазистационарных случайных средах [20]:

$$\Delta\psi + k_0^2 \varepsilon(\vec{r})\psi = 0, \quad (1)$$

где $k_0^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon_0$, ω — частота и c — скорость волны, $\varepsilon(\vec{r})$ — диэлектрическая проницаемость (д.п.) неоднородного пространства (или квадрат показателя преломления среды), ε_0 — д.п. среды без неоднородностей. Диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\vec{r})$, следуя [20, 21], представим в виде:

$$\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_0(1 + \delta\varepsilon_1/\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_2/\varepsilon_0) = \varepsilon_0(1 - 2 \sum_{j=1}^N V(|\vec{r} - \vec{R}_j|) - 2W(\vec{r})). \quad (2)$$

Слагаемые $-2 \sum_{j=1}^N V(|\vec{r} - \vec{R}_j|/\sigma')$ описывают мелкомасштабные ($\sim \sigma$) случайные неоднородности, а статистически независимые от них крупномасштабные ($\sim \bar{L}$) регулярные неоднородности д.п. описываются $W(\vec{r})$ [5, 21]. Слагаемое $\delta\varepsilon_1(\vec{r})/\varepsilon_0$ соответствует взаимодействию волны со случайными рассеивателями, которые для простоты будем считать диэлектрическими сферами с д.п. $\varepsilon_1(\omega)$ ($\mu = 1$) и диаметром σ . Их центры будем задавать радиусами-векторами \vec{R}_j ($j = 1, \dots, N$), где N — полное число рассеивателей в объеме v , а их плотность определяется пределом $n = \lim_{v \rightarrow \infty} (N/v)$. Функции V равны 0, когда $|\vec{r} - \vec{R}_j| > \sigma'$ ($\sigma = 2\sigma'$) и скачком принимают значение $\xi = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/2\varepsilon_0$, когда $|\vec{r} - \vec{R}_j| \leq \sigma'$. Кроме того будем считать, что в точке \vec{r} расположен δ -образный точечный источник, что позволит в дальнейшем найти функцию Грина данной задачи.

Строго говоря, вклад N мелкомасштабных случайных неоднородностей в общую диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\vec{r}, \vec{R}_1, \dots, \vec{R}_N)$ определяется многократными суммами [21]:

$$\delta\varepsilon_1(\vec{r}, \vec{R}_1, \dots, \vec{R}_N) = -2\varepsilon_0 \sum_{j=1}^N V(|\vec{r} - \vec{R}_j|) - 2\varepsilon_0 \sum_{i \neq j}^N V(|\vec{r} - \vec{R}_i|, |\vec{r} - \vec{R}_j|) + \dots \quad (3)$$

Здесь, например, двойная сумма учитывает отличие совместного действия двух неоднородностей от вклада каждой из них в отдельности.

Однако для не слишком больших длин волн ($\lambda \leq n^{-1}, \sigma'$) поправкой на неаддитивность можно пренебречь [21].

Слагаемое $\delta\epsilon_2(\vec{r})/\epsilon_0$ при слабой зависимости от $(\vec{r} - \vec{r}')$ на масштабах $l \simeq |\vec{r} - \vec{r}'|$, удовлетворяющих неравенству $\lambda < l \leq \bar{L}$, может быть представлено в виде:

$$\delta\epsilon_2(\vec{r})/\epsilon_0 \simeq \langle \vec{r} - \vec{r}' | \delta\epsilon_2'(\vec{r}') \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{r} - \vec{r}' | \delta\epsilon_2'' | \vec{r} - \vec{r}' \rangle + \dots \quad (4)$$

где скобки $\langle \rangle$ – скалярное произведение двух векторов, $\langle \vec{r} - \vec{r}' | \delta\epsilon_2'(\vec{r}') \rangle$ – первый дифференциал, $\langle \vec{r} - \vec{r}' | \delta\epsilon_2'' | \vec{r} - \vec{r}' \rangle$ – второй дифференциал, $\delta\epsilon_2''(\vec{r}')$ – матрица вторых производных.

Крупномасштабные неоднородности обычно резко анизотропны, что позволяет пренебречь их изменением, например, в плоскости y, z и ограничиться учетом зависимости $\delta\epsilon_2(x)$. Отметим, что при отсутствии случайной составляющей $\delta\epsilon_1$ точные и приближенные решения волнового уравнения рассматривались неоднократно, для $\delta\epsilon_2(x)$ в форме полинома и суперпозиции экспонент (экспоненциальный характер функция $\delta\epsilon_2(x)$ имеет при учете крупномасштабной неоднородности газа или плазмы в гравитационном поле).

Надежным критерием локализации является условие обращения в ноль статических кинетических коэффициентов, которые определяются интегралами по пространственным переменным \vec{r}' и \vec{r}'' от усредненного квадрата модуля функции Грина $P(\vec{r}, \vec{r}', E) = |\overline{G(\vec{r}, \vec{r}', E)}|^2$ и соответствующих производных [6]. Однако подобные вычисления требуют слишком большого времени счета ЭВМ, поэтому на первом этапе ограничимся расчетом $P(\vec{r}, \vec{r}', E)$ для заданных \vec{r} и \vec{r}' . Поскольку при локализации на случайно расположенных центрах волновые функции экспоненциально затухают на больших расстояниях от центра, в качестве простого критерия локализации можно принять часто используемое в литературе [5–9] условие:

$$-\ln(P) \sim |\vec{r} - \vec{r}'|/l. \quad (5)$$

Здесь l – радиус локализованного состояния, зависящий от ξ , длины волны и плотности n рассеивающих центров. Для удобства мы рассчитывали (см. следующий раздел) приведенную вероятность $p = |\overline{G}|^2/|G_0|^2$ (G_0 – функция Грина свободной частицы).

2. ВЕРОЯТНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

Кратко рассмотрим представление функции Грина волнового стохастического уравнения в виде модифицированных интегралов по траекториям. Подробное положение приведено в [15].

Для функции Грина уравнения (1) $G(\vec{r}, \vec{r}', z)$ имеет место равенство:

$$G(\vec{r}, \vec{r}', z) = \int_0^{\infty} \exp(izl) G(\vec{r}, \vec{r}', l) dl, \quad (6)$$

где $G(\vec{r}, \vec{r}', l)$ - функция Грина уравнения $i\partial\phi/\partial l = [-\Delta/2 + \sum_{j=0}^N V(\vec{r} - \vec{R}_j/\sigma')]\phi(\vec{r})$. Функцию Грина $G(\vec{r}, \vec{r}', l)$ можно записать в виде интеграла Фейнмана:

$$G(\vec{r}, \vec{r}', l) = i\theta(l)(2\pi i\tau)^{-Md/2} \int \dots \int \exp(i\tau^{-1}S\{\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_M\}d\{\vec{r}_m\}. \quad (7)$$

В (7) траектории аппроксимированы ломаными линиями с вершинами в точках \vec{r}_m в "моменты времени" $l_m = \tau m$, $\tau = l/M$, $m = 0, 1, \dots, M$; $\vec{r}_0 = \vec{r}'$, $\vec{r}_M = \vec{r}$, $d\{\vec{r}_m\} = d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_{M-1}$, d - размерность пространства, $S = \langle \vec{r} | K | \vec{r} \rangle - \tau^2 \sum_m V(\vec{r}_m, \vec{R})$, $V(\vec{r}_m, \vec{R}) = \sum_{j=1}^N V(|\vec{r}_m - \vec{R}_j/\sigma'|)$, $\langle \vec{r} | K | \vec{r} \rangle = \sum_m |\vec{r}_{m+1} - \vec{r}_m|^2$ - квадратичная форма, $|\vec{r}'| > -d(M+1)$ -мерный вектор с компонентами $\vec{r}'_0, \dots, \vec{r}'_M$.

Рассмотрим $G(\vec{r}, \vec{r}', l)$, усредненную по положениям рассеивателей, конфигурации которых описываются плотностью вероятности $p(\vec{R}_j)$:

$$\begin{aligned} \overline{G(\vec{r}, \vec{r}', l)} &= \int \dots \int p(\vec{R}_j) G(\vec{r}, \vec{r}', l) \prod_{j=0}^N d\vec{R}_j = \\ &= i\theta(l)(2\pi i\tau)^{-Md/2} \int \dots \int \exp(i\tau^{-1}\langle \vec{r} | K | \vec{r} \rangle + \sum_{i=0}^{\infty} n^i W_i/t!) d\{\vec{r}_m\}, \quad (8) \end{aligned}$$

где n - плотность рассеивателей, W_i - групповые интегралы, явные выражения для которых можно найти из решения соответствующих систем алгебраических уравнений [22]. Для газа идеальных рассеивателей ($n\sigma^d \ll 1$ в ряду (10) отличен от нуля только $W_1 = \int f_1 d\vec{R}_1$, где $f_1 = \exp(-i\tau \sum_{m=0}^{M-1} V(|\vec{r}_m - \vec{R}_1/\sigma'|)) - 1$.

Подставим (10) в (8), тогда при выполнении условий $\sqrt{M\langle \vec{r} | K | \vec{r} \rangle} \approx |\vec{r}' - \vec{r}| = L \gg Md/2$ и $\sqrt{2} \gg (\pi/2)n\sigma^d(L/\sigma) \exp(\text{Im}(\xi)\sigma)/\sqrt{L}$ или $\sqrt{2} \gg n\sigma^d|\xi\sigma|/\sqrt{L/\sigma}/\sqrt{\sigma}$ соответственно для $|\xi\sigma| \gg 1$ и $|\xi\sigma| \ll 1$, имеем:

$$\begin{aligned} \overline{G(\vec{r}, \vec{r}', 1/2)} &\simeq i\sqrt{M} \int \dots \int d\{\vec{r}_m\} (2\pi i\zeta)^{-(Md-1)/2} \cdot \\ &\cdot \exp(i\zeta^{-1}\langle \vec{r} | K | \vec{r} \rangle + n \int d\vec{R} f^+ + \ln(\tilde{S}(z))), \quad (9) \end{aligned}$$

где функционалы

$$z^2 = M\langle \vec{r} | K | \vec{r} \rangle, \quad \zeta = z/M, \quad \tilde{S}(z) = \sum_{a=0}^{A-1} (-2iz)^a (A+a-1)! / (a!(A-a-1)!),$$

$$A = (Md-1)/2 - 1, \quad f^+ = f|_{\tau=\tau_+}, \quad \tau_+ = \sqrt{\langle \vec{r} | K | \vec{r} \rangle / M - (d/2)^2} - id/2 \approx \zeta.$$

Для $\overline{G(\vec{r}, \vec{r}', 1/2)}G^*(\vec{r}, \vec{r}', 1/2)$ при $n\sigma^d \ll 1$ аналогично имеем [15]:

$$\begin{aligned} \overline{G(\vec{r}, \vec{r}', 1/2)}G^*(\vec{r}, \vec{r}', 1/2) &= \int_0^\infty dl' \int_0^\infty dl'' \exp(i(l' - l'')/2) \cdot \\ &\cdot \theta(l')\theta(l'')(2\pi i\tau')^{-Md/2} (-2\pi i\tau'')^{-Md/2} \int \dots \int d\{\vec{r}_m\} \int \dots \int d\{\vec{r}_m\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \exp(i\langle \vec{r}^i | K | \vec{r}^i \rangle / \tau' - i\langle \vec{r}^b | K | \vec{r}^b \rangle / \tau'' + n \int d\vec{R} F(\vec{R})) \simeq \\ & \simeq M \int \dots \int d\{\vec{r}'_m\} \int \dots \int d\{\vec{r}''_m\} (2\pi i \zeta')^{-(Md-1)/2} (-2\pi i \zeta'')^{-(Md-1)/2} \cdot \\ & \cdot \exp(i\langle \vec{r}^i | K | \vec{r}^i \rangle / \zeta' - i\langle \vec{r}^b | K | \vec{r}^b \rangle / \zeta'' + n \int d\vec{R} F_+(\vec{R}) + \ln(\dot{S}(z') \dot{S}^*(z''))), \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$F_+ = \exp(-i\tau'_+ \sum_{m=0}^{M-1} V(|\vec{r}'_m - \vec{R}|/\sigma) + i\tau''_+ \sum_{m=0}^{M-1} V^*(|\vec{r}''_m - \vec{R}|/\sigma)) - 1.$$

Расчеты $\overline{GG^*}$ проведены с помощью комплексного метода Монте-Карло, развитого в [16-19].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

3.1. Случайные мелкомасштабные неоднородности. Перейдем к обсуждению полученных результатов. Исследуем зависимость нормированной вероятности $p = \overline{GG^*}/G_0G_0$ (G_0 - функция Грина свободной частицы) от следующих характерных параметров: ξ , $|x - x'|$, σ и $n\sigma$.

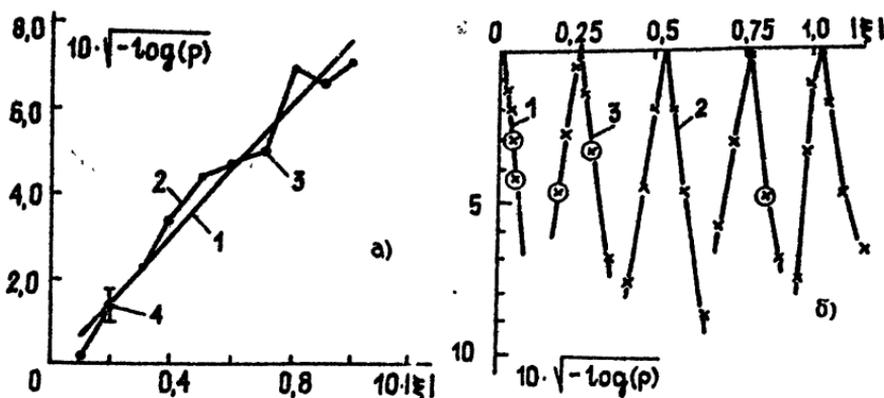


Рис. 1:

3.1.1. Зависимость от $|\xi|$. На рис.1а представлена зависимость $10\sqrt{-\log(p)}$ от параметра $|\xi|$ при $d = 1$ для фиксированных значений $|x - x'| = 120$, $n\sigma = 0,1\pi/6$ и $\sigma = 4\pi/12$. Точки 2 для $\xi > 0$ и точки 3 для $\xi < 0$, рассчитанные ММК, ложатся на прямую линию с небольшим разбросом. Линия 1 - наилучшее линейное приближение результатов расчета ММК для $\xi > 0$; 4 - статистическая погрешность расчета ММК. Изменение знака ξ на $-\xi$ для нескольких контрольных точек в пределах статистической ошибки (обозначенной вертикальным отрезком) не меняет величину $\overline{GG^*}$. Из представленных результатов следует, что усредненная величина $\overline{GG^*}$ пропорциональна экспоненте с показателем, квадратично зависящим от ξ по крайней мере в интервале от 0 до 0,1.

Результаты расчетов ММК в более широком интервале изменения ξ от 0 до 1 в обозначениях, аналогичных рис.1а, представлены на рис.1б. Как следует из рис.1б, в окрестностях точек $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 0,26$; $\xi_3 = 0,52$; $\xi_4 = 0,78$; $\xi_5 = 1,04$ и т.д. ($n = 1, 2, \dots$) зависимость $\overline{GG^*}$ от ξ пропорциональна $|\xi - \xi_n|^2$. В дальнейших расчетах зафиксируем $\xi = 0,03$.

3.1.2. Зависимость от $|x - x'|$. Перейдем к исследованию зависимости $\overline{GG^*}$ от расстояния $|x - x'|$. На рис.2а, аналогично рис.1а ($|\xi| = 0,03$; $n\sigma = 0,1\pi/6$, $\sigma = 4\pi/12$, $d = 1$), представлены результаты расчета ММК $10 \log(p)$ при изменении $|x - x'|$ в интервале от 60 до 600 при фиксированных ранее значениях параметров. Рассчитанные точки при $|x - x'| \leq 100$ попадают в пределах статистической ошибки ММК на слабо осциллирующую в окрестности нуля зависимость, что свидетельствует о слабом отличии $\overline{GG^*}$ от $G_0 G_0^* = 1$, соответствующей однородному пространству.

Далее, при $120 < |x - x'| < 400$ точки ММК для $10 \log(p)$ осциллируют около наклонной прямой, что свидетельствует об экспоненциальном в среднем убывании $\overline{GG^*}$ с увеличением $|x - x'|$. Для расчетной плотности $n\sigma = 0,1\pi/6$ среднее расстояние между рассеивателями равно 20. Результаты расчетов ММК указывают на то, что экспоненциальный спад $\overline{GG^*}$ формируется на расстояниях не менее чем пять-шесть средних расстояний между рассеивателями.

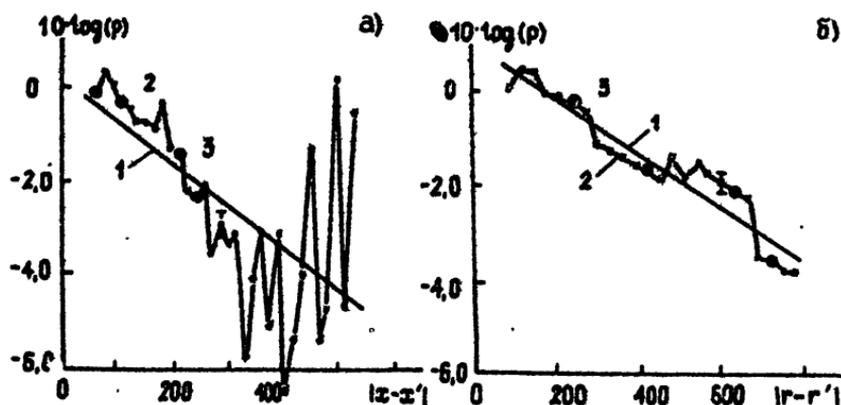


Рис. 2:

Усиление всплесков прозрачности, нарушающих экспоненциальный спад $\overline{GG^*}$ для больших расстояний $280 < |x - x'| < 600$, возможно связано с увеличением роли репрезентативных резонансно-прозрачных конфигураций рассеивателей. Косвенным подтверждением этого является чувствительность величины всплесков к знаку ξ ($\xi = \mp 0,03$), в то время как в области экспоненциального спада $\overline{GG^*}$ ($120 < |x - x'| < 400$) такая чувствительность практически отсутствует. Существование маловероятных резонансных конфигураций, отвечающих экспоненциально большим всплескам интенсивности внутри среды и нарушающих экспоненциальный спад средней интенсивности $\overline{GG^*}$, отмечается также в работе [23].

Устранить всплески с помощью увеличения точности аппроксимаций непрерывных интегралов и увеличения точности расчета ММК не удалось. Возможно также, что на больших расстояниях от источника начинается достаточно сильное проявление предэкспоненциального множителя. Более подробное исследование этого вопроса заслуживает отдельного рассмотрения.

На рис.26, аналогично рис.1а ($n\sigma^3 = 0,1$; $\sigma = 4\pi/12$; $\xi = 0,01$; $d = 3$), представлены результаты расчета ММК величины $10 \log(p)$ в интервале $90 \leq |\bar{r} - \bar{r}'| \leq 800$ для трехмерной среды с хаотическими рассеивателями ($G_0 G_0 = 1/4\pi(|\bar{r} - \bar{r}'|)^2$, $p = \overline{GG^*}/G_0 G_0^*$). В трехмерном случае аналогичные всплески на фоне экспоненциального спада $\overline{GG^*}/G_0 G_0^*$ выражены не так ярко. Это связано, по-видимому, с тем, что амплитуды рассеянных волн в трехмерном случае убывают обратно пропорционально расстоянию от рассеивателя, в то время как в одномерном случае амплитуды рассеянных волн сохраняют свою величину (тождественно равны единице). В результате интерференционные явления в трехмерном случае проявляются значительно мягче, чем в одномерном.

3.1.3. Зависимость от σ . Рассмотрим зависимость $\overline{GG^*}$ от размера рассеивателей в одномерном случае при тех же характерных значениях параметров $n\sigma = 0,1\pi/6$, $|x - x'| = 120$, $\xi = 0,03$. На рис.3а представлены результаты расчета ММК величины $10 \log(p)$ как функции от σ : точки 2 - для $\xi = 0,03$ и точки 3 - для $\xi = -0,03$. Для качественного анализа и объяснения полученной зависимости воспользуемся результатами [8]. Профиль $\check{V}(x) = \sum_{j=1}^N V(x - x_j) - \bar{V}$ для каждой конфигурации рассеивателей (V - среднее значение по всем конфигурациям) рассмотрим как случайный процесс с малыми флуктуациями относительно \bar{V} и $\bar{V}(x) = 0$. Резко меняющуюся часть корреляционной функции процесса $B_V(x - x')$ можно аппроксимировать спадающей экспонентой с характерным масштабом σ , т.е. $B_V(x - x') = \langle \check{V}(x)\check{V}(x') \rangle \approx \sigma_V^2 \exp(-|x - x'|/\sigma)$, где σ - размер рассеивателя, равный радиусу корреляции, а σ_V^2 - неизвестная величина, пропорциональная ξ^2 . Для малых флуктуаций $\check{V}(x)$ ($\sigma_V^2 \ll 1$) [7-9] после усреднения по быстрым осцилляциям величина $\overline{GG^*}$ имеет вид $\exp(-D|x - x'|)$ для $D|x - x'| < \pi^2$ [8], а коэффициент D равен:

$$D = \sigma_V^2 \sigma / 2(1 + 4\sigma^2). \quad (11)$$

Проверим возможность аппроксимации расчетной ММК кривой на рис.3а с помощью данной формулы, в которой единственной неизвестной величиной является σ_V^2 . Для определения σ_V^2 выберем точку $10 \log(p) = -0,25$ для $\sigma = 3$, полученную с помощью ММК в области плавного изменения расчетной кривой. Полагая $\overline{GG^*} \approx \exp(-D|x - x'|)$, получаем, что $\sigma_V^2 = 0,0125$. Линией 1 на рис.3а представлена зависимость D от σ с $\sigma_V^2 = 0,05$ в интервале $0,1 < \sigma < 5,5$. Практически все точки, рассчитанные с помощью ММК, осциллируют вокруг линии 1. Заметим, что в области $\sigma \ll 1$ статистическая погрешность расчета ММК несколько увеличивается из-за малости σ .

Неожиданным является резкое увеличение амплитуды и периода колебаний результатов ММК для $10 \log(p)$ в области $\sigma \geq 5,5$. Объяснить это

явление можно следующим образом. Расчеты проводились для фиксированных величин $|x - x'| = 120$ и $n\sigma = 0,1\pi/6$, поэтому среднее расстояние между рассеивателями $x_0 = \sigma/n\sigma$ при $\sigma > 5,5$ становится больше, чем $|x - x'| = 120$. Иными словами формула (11) и соответствующая теория становятся неприменимы. Результаты ММК демонстрируют резкую смену функциональной зависимости - наблюдаются осцилляции $\overline{GG^*}$ вокруг единицы.

Аналогично при $\sigma \ll 1$ среднее расстояние x_0 будет много меньше $|x - x'| = 120$. В разделе 1.2 отмечалось, что в этих условиях наблюдаются резкие всплески $\overline{GG^*}$, по-видимому, связанные с возрастающей ролью репрезентативных резонансно-прозрачных конфигураций. Резкие всплески $\overline{GG^*}$, рассчитанной ММК на рис.3а при $\sigma \ll 1$, по-видимому, имеют аналогичное происхождение.

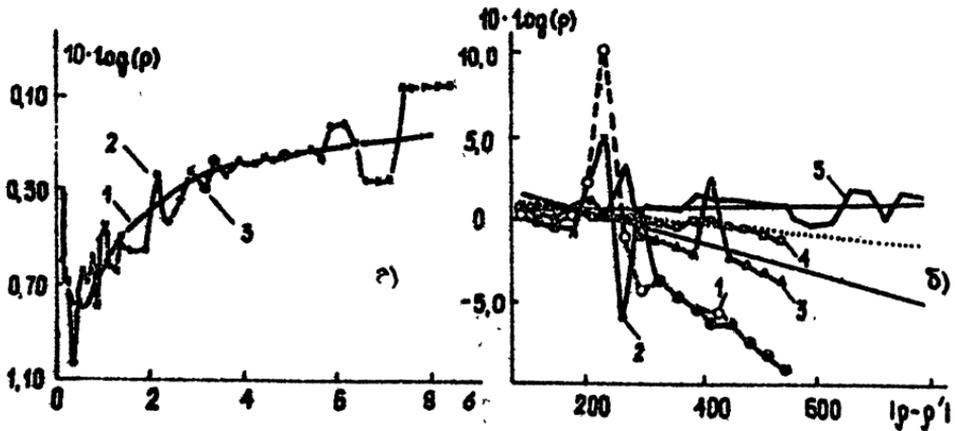


Рис. 3:

Заметим, что аппроксимация (11) для D хорошо согласуется с результатами ММК, представленных на рис.1а и 2а (за исключением обсуждавшихся всплесков на рис.2а при больших $|x - x'|$).

3.1.4. Двумерная среда. Результаты расчета $10 \log(p)$ от $|\rho' - \rho|$ в случае двумерных случайных сред представлены на рис.3б для тех же, что и раньше значений характерных параметров и $|\xi| = 0,015$. Линии 1, 2 соответствуют плотности $n\sigma^2 = 0,4$ для $\xi = -0,015$ и $\xi = 0,015$. Линии 3-5 для $\xi = 0,015$ отличаются объемной плотностью рассеивателей, которая равна соответственно 0,2; 0,1 и 0,03. Характерные особенности поведения зависимостей $10 \log(p)$ от $|\rho' - \rho|$ для $d = 2$ и $10 \log(p)$ от $|x - x'|$ для $d = 1$ в основном одинаковы. Как и в одномерном случае резкие всплески прерывают экспоненциальный спад средней интенсивности, причем в области экспоненциального спада результаты ММК не чувствительны к знаку ξ , а в области резких всплесков такая чувствительность отмечается. В соответствии с формулой (11) изменению плотности в два раза соответствует аналогичное изменение коэффициента D . Зависимость 5 (плотность $n\sigma^2 = 0,03$) заведомо соответствует дефокализованному состоянию (длина локализации l равна бесконечности).

3.2. Регулярные крупномасштабные и случайные мелкомасштабные неоднородности.

3.2.1. Зависимость от $|x - x'|$. Рассмотрим зависимость $\overline{GG^*}$ от $|x - x'|$, когда помимо случайной компоненты $\sum_{j=1}^N V(|x - x_j|)$ имеется крупномасштабная регулярная компонента $W(x)$. Для простоты возьмем $W(x)$ в виде $W(x) = -F\Delta x$ ($\Delta x = x - x'$, $x' = 0$). На рис.4а представлены результаты расчета ММК величины $10 \log(p)$ в интервале $60 < |x - x'| \leq 400$ при $d = 1$, $n\sigma = 0,1\pi/6$, $\sigma = 4\pi/12$ и $F = 0,001$. Линия 1 соответствует $\xi = 0,03$ и $F = 0$, а линии 2, 3 - $\xi = \pm 0,03$ при $F = 0,001$. Как показывают расчеты ММК (рис.4а) для малых $|x - x'|$ ($|x - x'| < 150$) влиянием регулярного поля W на $\overline{GG^*}$ можно пренебречь. Качественно это можно объяснить тем, что возмущающее влияние поля W на $\overline{GG^*}$ определяется средним значением W на характерных траекториях, соединяющих x и x' . Однако $W(x') = 0$, а $|W(x)| = |-F\Delta x| \ll 1$ для $x' = 0$ и $x < 150$.

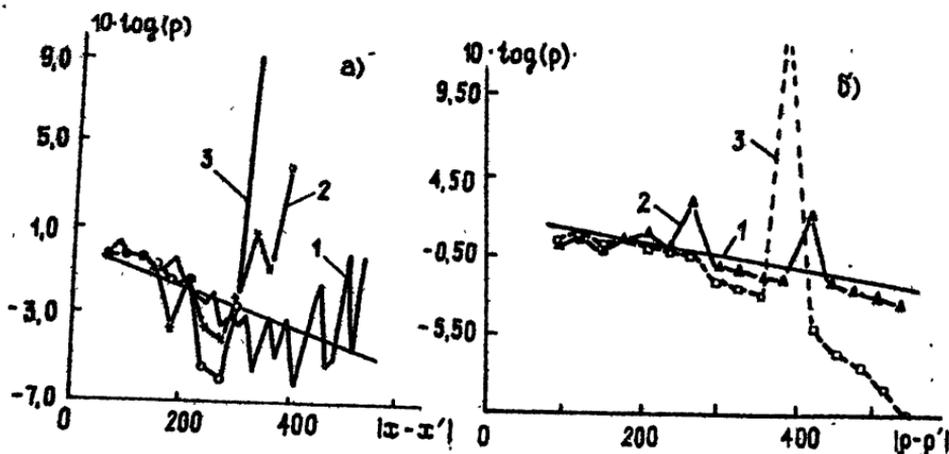


Рис. 4:

В интервале же больших расстояний $150 < |x - x'| < 300$ наблюдаются несовпадающие для разных знаков ξ осцилляции $\overline{GG^*}$. Наличие неоднородности в виде регулярной компоненты W приводит к появлению отраженных волн, которые интерферируют с волной, распространяющейся от источника, приводя к осцилляции суммарной интенсивности $\overline{GG^*}$.

Отметим, что с увеличением $|x - x'|$ длина волны k^{-1} за счет изменения W плавно уменьшается, с чем, по-видимому, и связан резкий рост средней интенсивности при $|x - x'| > 300$. Уменьшение или увеличение F приводит к сдвигу этого резкого роста $\overline{GG^*}$ вправо или влево соответственно.

При дальнейшем увеличении $|x - x'|$ ($300 < |x - x'|$) результаты, полученные с помощью ММК, вызывают определенные вопросы, так как во время вычислений не удается осуществить случайные блуждания в пространстве траекторий. Все попытки перейти от прямолинейной траектории с эквидистантным расположением вершин траектории отвергаются цепью Маркова, что может быть связано с резким "схлопыванием" области главного вклада в интеграл по траекториям. Формально рассчитанное ММК $\overline{GG^*}$ в этих условиях тождественно равно единице.

Физический аналог похожей ситуации известен в задаче о распространении электрона в среде хаотических рассеивателей, помещенной во внешнем электрическом поле [11]. В работе [11] доказано, что для достаточно сильных внешних полей в однородной случайной среде возможен срыв локализации электронов и изменение экспоненциального характера убывания $\overline{GG^*}$. Данное явление интерпретируется в [11] как потеря устойчивости такой системы во внешнем поле за счет фактически бесстолкновительного ухода электронов по полю на бесконечность. Таким образом, влияние интерференции рассеянных волн резко падает для достаточно коротких волн, приводя к исчезновению экспоненциального спада $\overline{GG^*}$.

3.2.2. Двумерная среда. Влияние крупномасштабных неоднородностей можно проследить из рис.46. Линией 1 представлено наилучшее линейное приближение результатов расчета ММК для $\xi = 0,015$ и $F = 0$, линией 2 – результаты ММК для $\xi = 0,015$ и $F = 0$, а линией 3 – результаты ММК для $\xi = 0,015$ и $F = 0,005$ ($n\sigma^2 = 0,2$). Наибольшее различие результатов наблюдается на больших расстояниях, когда приращение показателя преломления соизмеримо с его начальной величиной (энергия, сообщенная электрону внешним полем, соизмерима с первоначальной энергией электрона). Частично сохраняются резкие пики средней интенсивности. На расстояниях $|\rho - \rho'| > 550$, как и в случае $d = 1$, наблюдается резкое изменение характера убывания средней интенсивности, что как и ранее интерпретируется как срыв локализации. В данной области формально рассчитанное ММК $\overline{GG^*}$ порядка $G_0 G_0^*$, хотя осуществить случайные блуждания в пространстве траекторий при расчетах ММК, как и для $d = 1$, не удастся. Подробное исследование этого вопроса заслуживает отдельного рассмотрения.

Автор статьи выражает искреннюю благодарность В.И.Кляцкину за обсуждение статьи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson P.W. // Phys. Rev. 1958. V.109. P.1492.
2. Mott N.F., Twose W.D. // Adv. Phys. 1961. V.10. P.107.
3. Mott N.F. // Adv. Phys. 1967. V.16. P.49.
4. Мотт Н. Переходы металл-изолятор. – М.: Наука, 1979.
5. Гредескул С.А., Фрейлихер В.Д. // УФН. 1990. Т.160. С.239.
6. Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А. Введение в теорию неупорядоченных систем. – М.: Наука, 1982.
7. Кляцкин В.И. Метод погружения в теории распространения волн. – М.: Наука, 1986.
8. Кляцкин В.И. // Изв. АН СССР. Сер.ФАО. 1991. Т.27. С.45.
9. Guzev M.A., Klyatskin V.I. // Random Media. 1991. V.1. P.7.
10. Садовский М.В. // УФН. 1981. Т.133. С.223.
11. Пригодин В.М. // ЖТФ. 1980. Т.66. С.233.
12. Kirkpatrick T.R. // Phys. Rev. 1986. V.B33. P.780.
13. Гаспарян В.М., Жарекешев И.Х. // ФТТ. 1990. Т.32. С.456.
14. Перель В.И., Поляков Д.Г. // ЖЭТФ. 1984. Т.86. С.352.
15. Filinov V.S. // Waves Random Media. 1991. V.2. P.141.

16. Filinov V.S. // Nucl. Phys. 1986. V.B271. P.717.
17. Doll J.D., Beek T.L. // J. Chem. Phys. 1988. V.89. P.5753.
18. Doll J.D., Freeman D.L., Gillian M.J. // Chem. Phys. Lett. 1988. V.143. P.277.
19. Makri N., Miller W.H. // J. Chem. Phys. 1988. V.89. P.2170.
20. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. - М.: Наука, 1978. Т.2.
21. Рязанов М.И. Электродинамика конденсированного вещества. - М.: Наука, 1984.
22. Зеленер Б.В., Норман Г.Э., Филинов В.С. Теория возмущений и псевдопотенциал в статистической термодинамике. - М.: Наука, 1981.
23. Лифшиц И.М., Кириченко В.Я. // ЖЭТФ. 1979. Т.77. С.989.

Институт высоких температур
РАН

Поступила в редакцию
25 марта 1992 г.

WAVE LOCALISATION IN 1D, 2D AND 3D RANDOM MEDIA WITH LARGE SCALE INHOMOGENEITIES

V.S.Filinov

Path integrals and complex Monte Carlo method are formulated for waves propagation in random media with large scale inhomogeneities. The ensemble-averaged probability for wave to travel a distance $|r - r'|$ have been calculated. The numerical results for 1D, 2D and 3D disordered systems have been obtained and compared with analytical results. The unwaited sharp peaks, which interrupt the exponential decay of the mean squared value of the Green function modulus and wave delocalization due to large scale inhomogeneities have been also obtained.

О РЕЗОНАНСНОМ ПОГЛОЩЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ

А.А.Жаров, И.Г.Кондратьев, У.Ю.Кузнецова

Показано, что статистический разброс параметров частиц диспергированной фазы мелкодисперсной среды, влияющих на частоту дипольного квазистатического резонанса, приводит к появлению полосы поглощения с частотной шириной, определяемой лишь соответствующей функцией распределения и не зависящей в случае малых потерь от конкретного механизма затухания поля в веществе. Диссипация обусловлена наличием группы резонансных частиц и в этом смысле аналогична бесстолкновительному затуханию Ландау в плазме. Приводятся примеры численно рассчитанных спектров отражения, пропускания и поглощения мелкодисперсных сред, представляющих собой соответствующую взвесь серебряных частиц, вложенных в диэлектрическую матрицу.

1. Как известно [1, 2], электромагнитные свойства мелкодисперсных сред в условиях, когда длина волны значительно больше размеров частиц a и среднего межчастичного расстояния l : $\lambda \gg a, l$, могут быть описаны с помощью эффективной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\text{эф}}$. Впервые выражение для $\epsilon_{\text{эф}}$ двухфазной среды со сферическими частицами, опирающееся на известное решение Ми, было получено Максвелл-Гарнеттом еще в 1906 г. [3]. В последнее время, в результате сильно возросшего интереса к дисперсным и композитным средам, появилось достаточно большое число работ, в которых теория Максвелл-Гарнетта (МГ) уточняется с учетом влияния на $\epsilon_{\text{эф}}$ таких факторов, как разброс частиц по размерам [4, 5], форме [6, 7], степени их пространственной хаотичности [8]. Было показано, что это влияние сказывается в первую очередь на частотной зависимости $\epsilon_{\text{эф}}(\omega)$ и практически не изменяет положения основной линии поглощения, которая, в соответствии с теорией Ми, обусловлена дипольным квазистатическим резонансом.

В настоящей работе обращается внимание на тот факт, что разброс параметров частиц диспергированной фазы (проницаемости, формы, ориентации и т.д.), влияющих на частоту дипольного резонанса, приводит к появлению полосы поглощения с частотной шириной $\Delta\omega$, определяемой лишь шириной соответствующей функции распределения и практически независимой от конкретного механизма затухания поля в веществе, что указывает на резонансный механизм поглощения. Диссипация обусловлена наличием группы резонансных частиц и в этом смысле аналогична

*В общем случае — с помощью тензора проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$ (например, в средах с одинаково ориентированными эллипсоидальными частицами): однако ниже мы будем рассматривать лишь изотропные (в среднем — по объемам, содержащим большое число частиц) среды.

бесстолкновительному затуханию Ландау в плазме* [9]. Эффект резонансного поглощения открывает возможности создания на основе мелкодисперсных структур селективных поглотителей, полосовых фильтров и пр. с заданными или регулируемыми параметрами. В то же время учет этого эффекта при спектроскопии дисперсных сред (аэрозолей, суспензий, градулированных и островковых пленок и т.д.) дает возможность извлечения дополнительной информации как о физическом строении, так и о статистических свойствах вещества диспергированной фазы.

2. Прежде всего получим обобщенную формулу МГ для дисперсной среды с некоторым набором составляющих ее компонентов, число которых пусть будет N ; причем, если коэффициент объемного заполнения i -го компонента равен ρ_i , то очевидно, что

$$\sum_{i=1}^N \rho_i = 1. \quad (1)$$

Пусть m -ая компонента ($1 \leq m \leq p$) представляет собой базовую среду или "заполнение", а все остальные компоненты – диспергированную фазу, состоящую для определенности из различных по своим параметрам сферических частиц. Для нахождения ϵ_{eff} будем действовать аналогично [11], а именно, вычислим интеграл:

$$\vec{I} = (1/V) \int_V (\vec{D} - \epsilon_m \vec{E}) dV$$

(V – элемент объема, малы по сравнению с характерным масштабом неоднородности среднего поля, но включающий достаточно большое число частиц). С одной стороны он очевидно дает:

$$\vec{I} = \langle \vec{D} \rangle - \epsilon_m \langle \vec{E} \rangle \quad (2)$$

(здесь $\langle \rangle$ – обозначают усреднение по объему V); с другой стороны он же равен:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^N (\epsilon_i - \epsilon_m) \rho_i \frac{3\epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \vec{E}_0, \quad (3)$$

где \vec{E}_0 – электрическое поле в среде заполнения, в котором находятся частицы диспергированной фазы. При этом $\langle \vec{E} \rangle$ и \vec{E}_0 связаны, естественно, таким образом:

$$\langle \vec{E} \rangle = \sum_{i=1}^N \rho_i \frac{3\epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \vec{E}_0. \quad (4)$$

Учитывая, что ϵ_{eff} определяется соотношением $\langle \vec{D} \rangle$ и $\langle \vec{E} \rangle$

$$\langle \vec{D} \rangle = \epsilon_{\text{eff}} \langle \vec{E} \rangle, \quad (5)$$

*Для ансамбля взаимодействующих осцилляторов с Лоренцевым распределением по собственным частотам аналогичное явление обсуждалось в [10].

и объединяя (2)–(5), приходим к следующему явному выражению для эффективной диэлектрической проницаемости ϵ_{eff} , представляющему как раз искомое обобщение формулы МГ:

$$\epsilon_{\text{eff}} = \left\{ \sum_{i=1}^N \rho_i \frac{\epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right\} / \left\{ \sum_{i=1}^N \rho_i \frac{1}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right\}^{-1}. \quad (6)$$

Если набор парциальных сред, составляющих дисперсную среду, образует, так сказать, непрерывный спектр, то (6) может быть переписана в виде:

$$\epsilon_{\text{eff}} = \left\{ \int d\epsilon \frac{\epsilon f(\epsilon)}{\epsilon + 2\epsilon_m} \right\} / \left\{ \int d\epsilon \frac{f(\epsilon)}{\epsilon + 2\epsilon_m} \right\}^{-1}, \quad (7)$$

где функция распределения выглядит так:

$$f(\epsilon) = f_d(\epsilon) + (1 - \rho_0)\delta(\epsilon - \epsilon_m). \quad (8)$$

Входящая в (8) функция $f_d(\epsilon)$ дает распределение частиц диспергированной фазы по ϵ , и нормирована таким образом, что

$$\int d\epsilon f_d(\epsilon) = \rho_0, \quad (9)$$

где ρ_0 – суммарный фактор заполнения диспергированной фазы. Если дисперсная среда достаточно разреженная, т.е. $\rho_0 \ll 1$, то вместо (7) в первом порядке по ρ_0 можно приближенно написать:

$$\epsilon_{\text{eff}} \approx \epsilon_m \left\{ 1 + 3 \int d\epsilon f_d(\epsilon) \frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m} \right\}. \quad (10)$$

Именно эту упрощенную формулу мы и будем использовать ниже.

3. В настоящей работе исследуется дисперсная среда, содержащая так называемые плазмopodobные сферические частицы с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_p(\omega)$, описываемой формулой:

$$\epsilon_p(\omega) = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\gamma)}, \quad (11)$$

где ω_p – плазменная частота электронного газа; γ – коэффициент затухания. Предполагается, что входящая в плазменную частоту ω_p ($\omega_p = (4\pi e^2 N_e / m_e)^{1/2}$) концентрация свободных электронов N_e "флуктуирует" от частицы к частице, что и приводит к некоторой функции распределения $f_d(\epsilon)$. Переходя в (10) от функции распределения по ϵ к функции распределения по концентрациям свободных электронов в частицах (или, что то же самое, по квадрату плазменной частоты), для $\epsilon_{\text{eff}}(\omega)$ получим:

$$\epsilon_{\text{eff}}(\omega) = \epsilon_m \left\{ 1 + 3 \int d(\omega_p^2) f(\omega_p^2) \frac{(\epsilon_\infty - \epsilon_m)\omega(\omega - i\gamma) - \omega_p^2}{(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)\omega(\omega - i\gamma) - \omega_p^2} \right\}. \quad (12)$$

Для большей наглядности исследуем влияние разброса значений концентрации электронов внутри частиц на свойства среды на примере простейшей функции распределения вида

$$f_d(\omega_p^2) = \rho_0 \left\{ \theta(\omega_p^2 - \omega_{p1}^2) - \theta(\omega_p^2 - \omega_{p2}^2) \right\} (\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2)^{-1}, \quad (13)$$

где $\theta(x)$ – степ-функция Хевисайда (см. рис.1). Подставляя (13) в (12), получим:

$$\epsilon_{\text{эф}}(\omega) = \epsilon_m \left\{ 1 + 3 \frac{\rho_0}{\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2} \int_{\omega_{p1}^2}^{\omega^2} d(\omega_p^2) \frac{(\epsilon_\infty - \epsilon_m)\omega(\omega - i\gamma) - \omega_p^2}{(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)\omega(\omega - i\gamma) - \omega_p^2} \right\}. \quad (14)$$

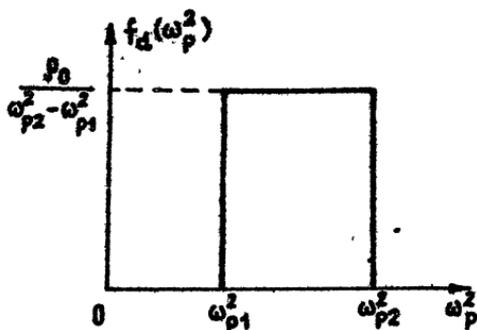


Рис. 1:

Вычисление интеграла дает для реальной и мнимой частей $\epsilon_{\text{эф}}(\omega)$:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\epsilon_{\text{эф}}(\omega)) = \epsilon_m \left\{ 1 + 3\rho_0 + \frac{9\rho_0\epsilon_m\omega^2}{\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2} \times \right. \\ \times \left[0,5 \ln \left(\frac{(\omega_{p2}^2 - \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m))^2 + \gamma^2\omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)^2}{(\omega_{p1}^2 - \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m))^2 + \gamma^2\omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)^2} \right) - \right. \\ \left. \left. - \frac{\gamma}{\omega} \left(\text{arctg} \frac{\omega_{p2}^2 - \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)}{\gamma\omega(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)} - \text{arctg} \frac{\omega_{p1}^2 - \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)}{\gamma\omega(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)} \right) \right] \right\}; \quad (15a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(\epsilon_{\text{эф}}(\omega)) = \frac{9\rho_0\epsilon_m\omega^2}{\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2} \left\{ \frac{\gamma}{2\omega} \ln \frac{[\omega_{p2}^2 - \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)]^2 + \gamma^2\omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)^2}{[\omega_{p1}^2 - \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)]^2 + \gamma^2\omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)^2} - \right. \\ \left. - \left(\text{arctg} \frac{\omega_{p2}^2 - \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)}{\gamma\omega(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)} - \text{arctg} \frac{\omega_{p1}^2 - \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)}{\gamma\omega(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)} \right) \right\}. \quad (15b) \end{aligned}$$

В условиях слабой диссипации $\gamma/\omega \ll 1$, $\gamma \ll \omega_{p2} - \omega_{p1}$, выражения (15) упрощаются к виду:

$$\text{Re}(\epsilon_{\text{эф}}(\omega)) \approx \epsilon_m \left\{ 1 + 3\rho_0 + \frac{9\rho_0\epsilon_m\omega^2}{2(\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2)} \ln \left(\frac{\omega_{p2}^2 - \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)}{\omega_{p1}^2 - \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m)} \right) \right\}, \quad (16a)$$

$$\text{Im}(\epsilon_{\text{эф}}(\omega)) \approx -\frac{9\rho_0\epsilon_m\omega^2}{\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2} \times \begin{cases} \pi & \text{при } \omega_{p1}^2 < \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m) < \omega_{p2}^2 \\ 0 & \text{вне данного интервала} \end{cases} \quad (16b)$$

Зависимости (15а), (16а) и (15б), (16б) изображены качественно на рис. 2 а, б соответственно штриховыми и сплошными линиями.

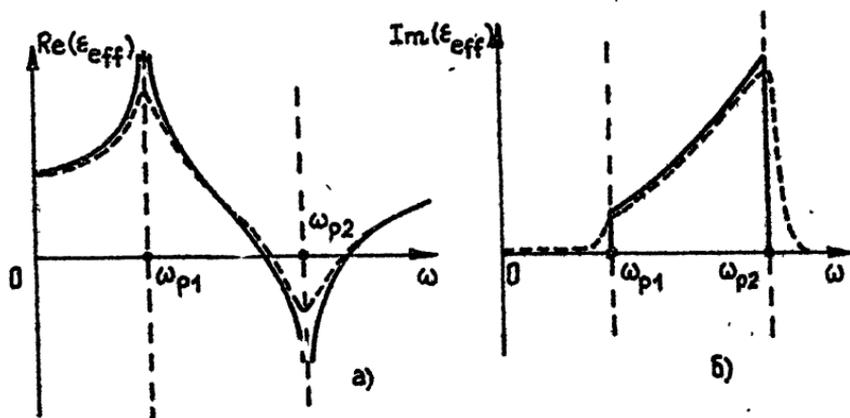


Рис. 2:

Таким образом, с уменьшением γ начиная с некоторых достаточно малых значений потери вообще перестают зависеть от γ и остаются конечными в полосе частот $\omega_{p1}^2 < \omega^2(\epsilon_\infty + 2\epsilon_m) < \omega_{p2}^2$ в пределе $\gamma \rightarrow 0$. Последнее обстоятельство связано с резонансным характером поглощения энергии электромагнитного поля и физически объясняется тем, что в случайной дисперсной среде в полосе частот, определяемой соответствующей функцией распределения, всегда присутствуют частицы, для которых выполнено условие дипольного квазистатического резонанса. Здесь, как уже отмечалось выше, прослеживается некоторая аналогия с классическим затуханием Ландау (с точки зрения формализма резонансные потери отвечают вкладу от полюса в подынтегральном выражении в (12)). Однако из-за того, что затухание Ландау связано с превышением числа поглощающих частиц над числом частиц, отдающих энергию, соответствующий декремент ($\text{Im}\epsilon$) пропорционален производной функции распределения, в то время как в рассмотренном случае дисперсной среды все резонансные частицы – поглощающие, и $\text{Im}(\epsilon_{\text{eff}})$ зависит от значения самой функции распределения. Отсюда, как нетрудно убедиться, в свою очередь следует, что более сложный закон распределения частиц по концентрациям по сравнению с рассмотренным выше (скажем, описываемый некоторой гладкой функцией) приведет к изменению частотной зависимости $\text{Re}, \text{Im}(\epsilon_{\text{eff}})$ внутри полосы поглощения; ширина же ее по-прежнему будет определяться характерной шириной функции распределения.

4. Продемонстрируем, что статистический разброс и других параметров частиц диспергированной фазы мелкодисперсной среды, влияющих на частоту дипольного резонанса также приводит к появлению полосы поглощения. С этой целью рассмотрим среду, диспергированная фаза которой представляет собой набор одинаково ориентированных эллипсоидальных частиц с одними и теми же диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_p(\omega)$, но с некоторым разбросом по форме (эксцентриситетам эллипсоидов). С помощью аналогичной процедуры приходим к следующему выра-

жению для тензора $\hat{\epsilon}_{\text{eff}}(\omega)$:

$$\left(\hat{\epsilon}_{\text{eff}}(\omega)\right)_{ii} = \epsilon_m \left\{ 1 + \frac{\rho_0}{\Delta F_i} \ln \frac{\epsilon_p(\omega) + 2\epsilon_m + \frac{3}{2}\Delta F_i(\epsilon_p(\omega) - \epsilon_m)}{\epsilon_p(\omega) + 2\epsilon_m - \frac{3}{2}\Delta F_i(\epsilon_p(\omega) - \epsilon_m)} \right\}, \quad (17)$$

(тензор приведен к главным осям). Эксцентриситет эллипсоида вдоль каждой главной оси характеризуется форм-фактором F_i ($0 < F_i < 1$); для соответствующего кругового сечения — $F_i = 1/3$. Входящая в (17) величина ΔF_i представляет собой полуширину функции распределения, как и ранее предполагаемую однородной. Считается также, что центр функции распределения отвечает значениям $F_i = 1/3$. Ширина полосы поглощения при этом определяется величиной ΔF_i . Если частицы еще и хаотично ориентированы, то все компоненты тензора (17) становятся одинаковыми, а среда в среднем — изотропной. Таким образом, для формирования полосы поглощения вовсе необязателен статистический разброс собственных (плазменных) частот внутренних степеней свобод диспергированных частиц. Случайность внешних характеристик (формы, ориентации) также приводит к появлению резонансного поглощения*.

5. Вполне очевидно, что при падении электромагнитного излучения на границу раздела с соответствующей дисперсной средой резонансное поглощение будет иметь место для обеих (s и p) поляризаций волн, поскольку эффект связан с резонансными потерями в отдельных частицах диспергированной фазы. Следовательно и полоса такого резонансного поглощения будет формироваться независимо от поляризации. Естественно, что это обстоятельство проявится в оптическом отклике мелкодисперсных сред и будет влиять на характер спектров отражения, пропускания и поглощения. В качестве примера рассчитаны соответствующие спектры для дисперсной среды, состоящей из серебряных частиц с характерным размером $a \sim 10$ нм, замороженных в стеклянную матрицу ($\epsilon \approx 2, 2$). Рассматривался сравнительно простой частный случай, когда серебряные частицы статистически распределены по форме и хаотически ориентированы так, что для ϵ_{eff} применимо выражение (17), в котором все ΔF_i одинаковы, а среда, следовательно, — изотропна. Диэлектрическая проницаемость серебра $\epsilon_p(\omega)$ описывалась формулой (11) со значением ϵ_∞ , определяемым межзонными переходами, и равным $\epsilon_\infty \approx 4, 7$. Данное значение ϵ_∞ отвечает экспериментальным измерениям проницаемости серебра [12, 13] в диапазоне 300 — 400 нм. Кроме этого значение постоянной затухания γ в (11) "подправлено" с учетом дополнительного механизма поглощения, связанного с соударениями свободных электронов с поверхностью частиц: $\gamma = \gamma_b + v_F/a$, где γ_b — постоянная затухания объемного серебра; v_F — скорость Ферми ($\gamma_b \approx 2, 7 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $v_F \approx 1, 4 \cdot 10^8 \text{ см/с}$). Входящая в (11) плазменная частота принималась равной $\omega_p \approx 1, 38 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$.

На рис.3 представлены спектры отражения нормально падающего на объемный образец рассматриваемой дисперсной среды света в зависимости от ширины функции распределения ($\rho_0 = 0, 15$, кривая 1 — $\Delta F = 0$, 2 — $\Delta F = 0, 15$, 3 — $\Delta F = 0, 3$). Как видно, с увеличением беспорядка

*Такая ситуация характерна для мелкодисперсных сред на основе металлов.

частотная зависимость коэффициента отражения приобретает характерную форму "плато" с шириной, отвечающей ширине полосы поглощения.

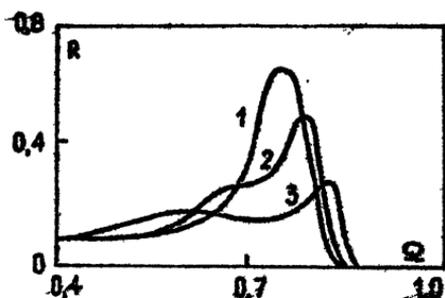


Рис. 3:

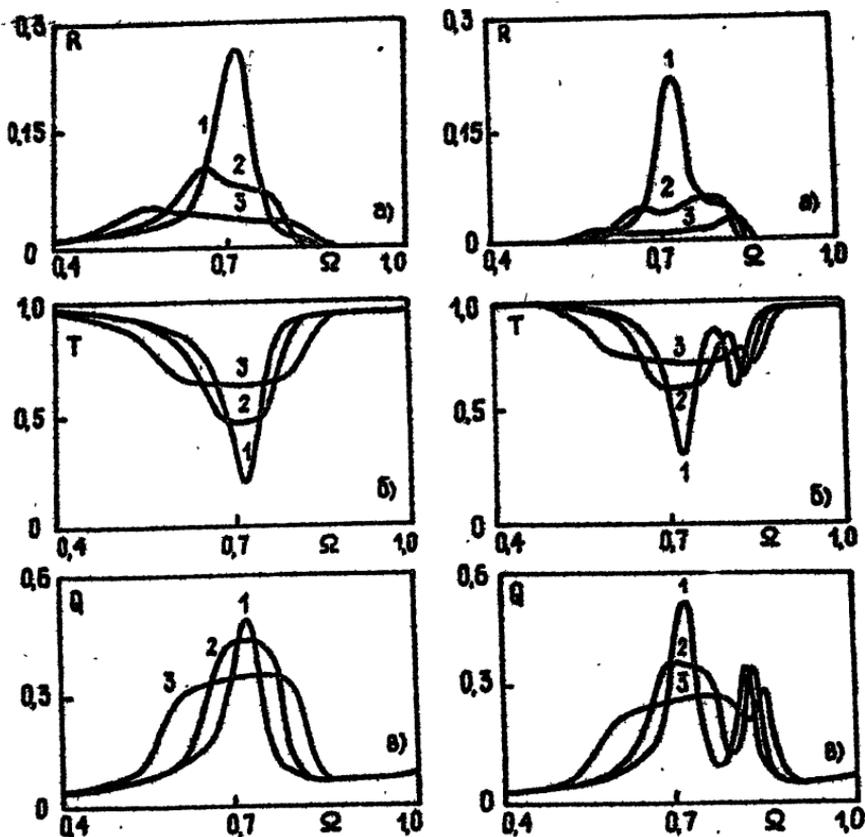


Рис. 4, 5.

Рисунки 4, 5 демонстрируют спектры отражения, пропускания и поглощения тонких дисперсных пленок толщиной ~ 10 нм нормально падающего и наклонно падающего ($\Theta = 60^\circ$) р-поляризованного электромагнитного излучения оптического диапазона (нормировка частоты на графиках такова, что частоте $\Omega = 1$ соответствует длина волны $\lambda \approx 300$ нм). По представленным спектрам также отчетливо прослеживается форми-

рование соответствующей полосы поглощения. Пик в высокочастотной области спектров, наблюдаемый только в p -поляризованном свете, и не исчезающий даже при значительном уширении функции распределения отвечает частоте, для которой выполнены условия $\text{Re}\varepsilon_{\text{eff}}(\omega_{\text{res}}) = 0$; $|\text{Im}\varepsilon_{\text{eff}}(\omega_{\text{res}})| \ll 1$, и связан с резонансным возрастанием нормальной к поверхности пленки компоненты среднего макроскопического электрического поля [14; 15].

6. Таким образом, действительно статистический разброс параметров частиц диспергированной фазы, влияющих на частоту дипольного квазистатического резонанса, приводит к возникновению полосы поглощения, ширина которой в случае достаточно малых значений коэффициентов затухания определяется только соответствующей функцией распределения. Естественно, что это заметно скажется на спектрах отражения, пропускания и поглощения таких мелкодисперсных сред, и потому соответствующие спектроскопические измерения представляются перспективным методом их исследования, и могут помочь в восстановлении особенностей структуры, статистики и других свойств этих сред. В перспективе на основе мелкодисперсных сред возможно создание достаточно эффективных оптических приборов, таких как полосовые фильтры, селективные покрытия, поляризаторы и т.д. с заранее заданными или регулируемые свойствами. Если среда, из которых состоят дисперсные частицы (или среда заполнения) является нелинейной (например, с Керровским механизмом нелинейности), то ширина полосы поглощения будет зависеть не только от ширины функции распределения диспергированной фазы, но и от интенсивности падающего излучения, что расширяет возможности физических приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Optical Effects in Small Particles / Edited by P.W.Barber and R.K.Chang. - N.J.: World Scientific, Princeton, 1988.
2. Петров Ю.И. Физика малых частиц. - М.: Наука, 1982.
3. Maxwell-Garnett J.C. // *Phys. Trans. R. Soc. Lond.* 11906. V.205. P.237.
4. Granqvist C.G., Buhrmaan R.A. // *Appl. Phys.* 1976. V.4. P.2200.
5. Doyle W.T. // *Phys. Rev. B.* 1989. V.39. P.9852.
6. Yoshida S., Yamaguchi T., Kiinbaara A. // *J. Opt. Soc. Am.* 1971. V.61. P.62.
7. Norrman S., Anderson T., Granqvist C.G. // *Phys. Rev. B.* 1978. V.18. P.674.
8. Cukier R.I., Karkheck J., Kumaz S., Sheu S.Y. // *Phys. Rev. B.* 1990. V.41. P.1630.
9. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. - М.: Наука, 1979. С.156.
10. Якубович Е.И. // *ЖЭТФ.* 1968. Т.55. С.304.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982.
12. Huebner R.H., Arakawa E.T., MacRae R.A., Hamm R.N. // *J. Opt. Soc.*

Am. 1964. V.54. P.1434.

13. Otter M. // Z. Phys. 1961. V.161. P.163.

14. Godwin R.P. // Phys. Rev. Lett. 1972. V.28. P.85.

15. Жаров А.А., Кондратьев И.Г., Кузнецова Е.Ю. // Препринт НИРФИ N 338. Нижний Новгород, 1991.

Институт прикладной физики
РАН

Поступила в редакцию
2 марта 1992 г.

**ON THE RESONANT ABSORPTION
OF ELECTROMAGNETIC RADIATION
IN THE FINE DISPERSED MEDIA**

A.A.Zharov, I.G.Kondrat'ev, E.Yu.Kuznetsova

It is shown, that statistical disorder of the parameters of the dispersed - phase particles influencing upon the dipole quasistatic frequency direct to the appearance of absorption band with the spectral width is determined only by corresponding distribution function and undependent on the specific mechanism of field damping in the matter. The dissipation caused by presence of the resonant particles group and in sense is analogical to the collisionless Landau damping in plasma. The examples of the numerically calculated reflection, transition and absorption spectra of the fine dispersed media representing the corresponding suspension of silver particles into the dielectric matrix, are given.

УДК 533.9.01

ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЗОНДИРОВАНИЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

Д.О.Батраков, Н.П.Жук

Построен алгоритм решения обратной задачи зондирования радиально-слоистого цилиндра, который использует итерационную процедуру Ньютона-Канторовича и метод регуляризации Тихонова. Значительную часть вычислений в рамках предложенного решения удается выполнить аналитически, что приводит к высокой эффективности его компьютерной реализации. Приведены иллюстративные результаты численных экспериментов.

В данной работе предложено решение одномерной задачи о восстановлении профиля диэлектрической проницаемости радиально-слоистого цилиндра по данным радиоволнового зондирования. Это решение основано на последовательном уточнении оценки искомого профиля, причем оценка на каждом этапе находится аналитически, в явном виде как результат "подгонки" расчетных данных к экспериментальным в рамках улучшенного ("искаженного") приближения Борна для прямой задачи рассеяния [1, 2]. В математическом плане речь идет об использовании итерационной процедуры Ньютона-Канторовича [3] с привлечением метода регуляризации Тихонова [4].

От других решений обратной задачи рассеяния для радиально-неоднородного цилиндра, которые основаны на минимизации невязки между смоделированными и измеренными значениями параметров рассеянного поля [5] или же используют математически совершенное уравнение Гельфанда-Левитала-Марченко [6], предложенное здесь решение выгодно отличается простотой численного алгоритма, как следствие, меньшим временем выполнения программ и меньшими требованиями к объему памяти компьютера. Кроме того, наше решение позволяет интерпретировать результаты таких типов измерений, которые весьма перспективны в практическом плане - к примеру, в области значений поляризационных параметров [7], но не обеспечены математической теорией того же уровня строгости, что и спектральная теория обратных задач рассеяния [6]. В отличие от решений, основанных на обычном приближении Борна, наши результаты не связаны требованием "мягкости" рассеивателя и пригодны для случая, когда диэлектрическая проницаемость тела существенно разнится от 1.

Врожденный недостаток данного решения как и всех прочих [5], изначально оперирующих с неполным набором данных, состоит в возможной неоднозначности восстановления в зависимости от априорной оценки профиля, задаваемой на первом шаге. Проведенные нами численные эксперименты позволили, однако, установить, что применяемый итерационный

процесс сходится к единственному – истинному – профилю при достаточно свободном выборе начальных приближений.

Предложенное решение может найти применение при осуществлении бесконтактной диагностики плазмы, пластмассовых труб и других объектов, укладываемых в рамки модели радиально-слоистого цилиндра, в реальном масштабе времени.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Зондируемое тело представляет собой бесконечно длинный круговой цилиндр с осью вращения Oz и радиусом a (см.рис.1).

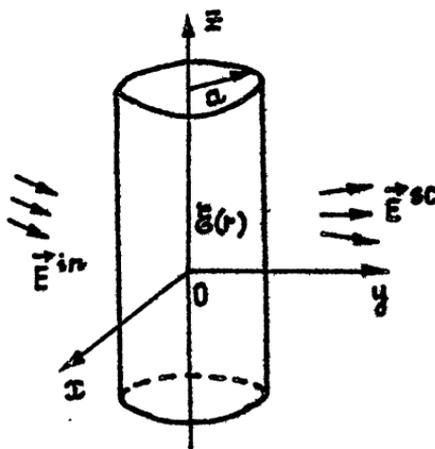


Рис. 1:

Оно состоит из пассивного изотропного диэлектрика, проницаемость которого характеризуется функцией $\epsilon \equiv \epsilon(r)$ ($0 \leq r < a$), вещественной или комплекснозначной ($\text{Im } \epsilon \geq 0$). Внешняя по отношению к телу область $r > a$ является свободной. Здесь $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$; далее нам также понадобятся области $S_p = \{r < a\}$ и $S_e = \{r > a\}$ в плоскости $z = 0$. Первая совпадает с поперечным сечением тела указанной плоскостью, а вторая представляет собой двумерный образ свободного пространства.

Сторонние монохроматические ($\sim e^{-i\omega t}$) источники располагаются в свободной части пространства на конечном или же бесконечном удалении от тела. Они издают первичную электромагнитную волну с комплексными амплитудами $\vec{E}^{\text{in}}(\vec{R})$, $\vec{H}^{\text{in}}(\vec{R})$, которая, дифрагируя на теле, порождает внутри него поле $\vec{E}(\vec{R})$, $\vec{H}(\vec{R})$, а вне его – рассеянное поле $\vec{E}^{\text{sc}}(\vec{R})$, $\vec{H}^{\text{sc}}(\vec{R})$. Излагаемый ниже метод решения обратной задачи пригоден для самого общего вида зондирующего поля (см.поэтому поводу [2, 8]). Мы, однако, ограничимся частным, но достаточно обширным классом зондирующих полей, которые зависят от z как $\exp(ihz)$:

$$\vec{E}^{\text{in}}(\vec{R}) = \vec{E}^{\text{in}}(\vec{r})e^{ihz}, \quad \vec{H}^{\text{in}}(\vec{R}) = \vec{H}^{\text{in}}(\vec{r})e^{ihz}. \quad (1)$$

Ясно, что внутреннее и рассеянное поля будут зависеть от z аналогичным образом:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{R}) &= \vec{E}(\vec{r})e^{ihz}, & \vec{H}(\vec{R}) &= \vec{H}(\vec{r})e^{ihz}, \\ \vec{E}^{sc}(\vec{R}) &= \vec{E}^{sc}(\vec{r})e^{ihz}, & \vec{H}^{sc}(\vec{R}) &= \vec{H}^{sc}(\vec{r})e^{ihz}.\end{aligned}\quad (2)$$

Постоянная h может быть комплекснозначной: она имеет смысл проекции волнового вектора на ось Oz . Функции $\vec{E}^{in}(\vec{r})$ и $\vec{H}^{in}(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{E}^{sc}(\vec{r})$ и $\vec{H}^{sc}(\vec{r})$ характеризуют распределение полевых векторов в соответствующей области плоскости $z = 0$, $\vec{r} = (x, y, 0)$. Выражения (1) описывают, в частности, ситуацию, когда цилиндр облучается плоской волной, падающей под углом θ к оси z : $h = k \cos \theta$, где $0 < \theta < \pi$, $k = \omega/c$, c – скорость света в вакууме. Для волны, падающей поперек цилиндра, очевидно $\theta = \pi/2$. Они применимы и при возбуждении цилиндра параллельной ему нитью тока, зависящего от z по закону бегущей или неоднородной волны. Достаточно реалистичная в практическом плане, модель (1)–(2) предельно упрощает численную реализацию решения обратной задачи.

Считается, что информативный параметр u , даваемый натурным экспериментом, представляет собой скалярную и, в общем случае, комплекснозначную величину, которая линейным образом связана с электрически вектором рассеянного поля:

$$u = \Phi \vec{E}^{sc}(\vec{R}). \quad (3)$$

Здесь Φ – надлежащий линейный функционал, действующий по переменной \vec{R} . В качестве примера можно привести значение в точке наблюдения $\vec{R}_{об}$ ($r_{об} > a$) проекции вектора \vec{E}^{sc} на вектор \vec{d} , характеризующий поляризацию приемного зонда: $u = \vec{d} \cdot \vec{E}^{sc}(\vec{R}_{об})$ – или же функционал более общего вида:

$$u = \int_{S_{\perp}} \vec{d}(\vec{R}) \cdot \vec{E}^{sc}(\vec{R}) dS_{\perp}, \quad (4)$$

где вектор-функция $\vec{d}(\vec{R})$ определяется приемной антенной, S_{\perp} – ее апертура. С практической точки зрения описанный выбор (3) информативного параметра предполагает возможность измерения не только энергетических, но и фазовых характеристик рассеянного поля.

Положим, что в результате серии из N экспериментов получен набор N чисел $\{u^{(j)}\}$, где $u^{(j)}$ – значение информативного параметра u в j -м эксперименте, ($j = 1, 2, \dots, N$). Подчеркнем, что эти эксперименты отнюдь не обязаны быть однотипными – каждый из них может быть вполне индивидуален как в отношении сторонних источников (включая выбор частоты излучения), так и в плане физической природы информативного параметра. Это допущение делает последующий алгоритм пригодным для интерпретации результатов разнообразных измерений – в частотной области, позиционных, поляризационных, осуществляемых порознь или же в единой серии экспериментов.

Естественно возникает задача об оценке профиля $\epsilon(r)$ диэлектрической проницаемости цилиндра по набору экспериментальных данных $\{u^{(j)}\}$. Один из возможных подходов к ее решению излагается ниже.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

2.1. Мы начнем с постановки вспомогательного вопроса о связи информативных параметров u и u_{aux} , которые отвечают одному и тому же функционалу Φ и относятся соответственно к зондируемому и некоторому вспомогательному телам. Форма и расположение последнего такие же, как и у зондируемого тела, но диэлектрическая проницаемость выбрана иной и задана некоторой новой функцией $\epsilon_{\text{aux}}(r)$ ($0 \leq r < a$). Обозначим через

$$\vec{E}_{\text{aux}}(\vec{R}) = \vec{E}_{\text{aux}}(\vec{r})e^{ihz}, \quad \vec{H}_{\text{aux}}(\vec{R}) = \vec{H}_{\text{aux}}(\vec{r})e^{ihz} \quad (5)$$

электрические векторы внутренней и рассеянного полей, которые возникли бы при дифракции прежнего зондирующего поля (1) на вспомогательном теле.

Руководствуясь известной идеологией [1-2, 7-8], нетрудно показать, что поле, рассеянное зондируемым телом, можно представить как суперпозицию поля, рассеянного вспомогательным телом, и поля, возбуждаемого в присутствии последнего наведенными (вторичными) источниками электрического типа в объемной плотностью

$$\vec{J}_{\text{ind}}(\vec{R}) = -(ikc/4\pi)\eta(r)\vec{E}(\vec{R}), \quad (6)$$

где

$$\eta(r) = \begin{cases} \epsilon(r) - \epsilon_{\text{aux}}(r), & 0 \leq r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (7)$$

Введем в рассмотрение $\widehat{G}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}')$ - диадную электрическую функцию Грина уравнений Максвелла [7] для вспомогательного тела, а также $\widehat{G}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}', h)$ - ее одномерный Фурье-образ:

$$\widehat{G}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}', h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{G}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}') \exp[-ih(z-z')] dz. \quad (8)$$

Аналитическое выражение для $\widehat{G}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}', h)$ дано в Приложении. Тогда приведенное выше соображение доставляет следующий результат:

$$\vec{E}^{\text{sc}}(\vec{R}) = \vec{E}_{\text{aux}}^{\text{sc}}(\vec{R}) + \int \widehat{G}_{ee}(\vec{R}, \vec{R}') \cdot \vec{J}_{\text{ind}}(\vec{R}') d\vec{R}',$$

или, с учетом (6) и явного вида внутреннего поля (2),

$$\vec{E}^{\text{sc}}(\vec{R}) = \vec{E}_{\text{aux}}^{\text{sc}}(\vec{R}) - (ikc/4\pi)e^{ihz} \int_{S_p} \widehat{G}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{E}(\vec{r}') \eta(r') d\vec{r}'. \quad (9)$$

Это - строгое интегральное соотношение, которое связывает $\vec{E}^{\text{sc}}(\vec{R})$ с полем внутри зондируемого тела посредством величин $\vec{E}_{\text{aux}}^{\text{sc}}(\vec{R})$, $\widehat{G}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}', h)$, относящихся к вспомогательному телу.

Допустим, что профили диэлектрических проницаемостей зондирующего и вспомогательного тел близки, и, стало быть, η - малая величина.

Тогда с точностью до квадратичных по η величин, отбрасываемых нами, под интегралом в (9) можно заменить $\vec{E}(\vec{r})$ на $\vec{E}_{\text{aux}}(\vec{r})$ — поле в сечении $z = 0$ вспомогательного тела (улучшенное, или "искаженное" приближение Борна). Подействовав на обе части возникающего равенства функционалом Φ из (3), получаем ответ на поставленный в начале раздела вопрос:

$$u = u_{\text{aux}} - L\eta. \quad (10)$$

Это соотношение связывает информативные параметры u и u_{aux} , порожденные общим "измерительным" функционалом и относящиеся соответственно к зондируемому и вспомогательному телам. Здесь

$$u_{\text{aux}} = \Phi \vec{E}_{\text{aux}}^{\text{sc}}(\vec{R}), \quad (11)$$

L — линейный функционал, действующий на произвольную пробную функцию $\psi(r)$ по правилу

$$L\psi = \int_0^a L(r') \psi(r') dr'; \quad (12)$$

$$L(r') \equiv (ikc/4\pi)\Phi \left[\exp(ihz) \int_0^{2\pi} r' \hat{G}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}', h) \cdot \vec{E}_{\text{aux}}(\vec{r}') d\varphi' \right], \quad (13)$$

$$(0 \leq r' < a),$$

r' , φ' — полярные координаты точки \vec{r}' , функционал Φ действует в (12) по переменным \vec{r} , z (и не затрагивает \vec{r}').

2.2. В качестве промежуточного вопроса рассмотрим методику нахождения оценки $\tilde{\eta}(r)$ функции $\eta(r)$ на основе экспериментальных данных $\{u^{(j)}\}$. Естественно выбрать эту оценку из условия минимума невязки по совокупности N измерений между экспериментальными и расчетными данными. Последнее в рамках улучшенного приближения Борна дается правой частью соотношения (10). Для противодействия влиянию измерительной погрешности, присутствующей в экспериментальных данных, необходимо также привлечь метод регуляризации [4]. Он обеспечивает устойчивость процедуры нахождения $\tilde{\eta}$. Таким образом, оценка разности распределения диэлектрических проницаемостей зондируемого и вспомогательного тела находится из условия

$$F[\eta] \rightarrow \min, \quad (14)$$

где $F[\eta]$ — сглаживающий функционал: $F[\eta] = f[\eta] + \alpha\Omega[\eta]$, α — параметр регуляризации ($\alpha > 0$), $f[\eta]$ — квадрат "расстояния" между наборами $\{u^{(j)}\}$ и $\{u_{\text{aux}}^{(j)} - L^{(j)}\eta\}$:

$$f[\eta] = \sum_{j=1}^N w_j |u^{(j)} - u_{\text{aux}}^{(j)} + L^{(j)}\eta|^2, \quad (15)$$

$\Omega[\eta]$ — стабилизирующий функционал: $\Omega[\eta] = \int_0^a w(r) |\eta(r)|^2 dr$. Здесь w_j и $w(r)$ — весовые коэффициенты и весовая функция соответственно

($w_j > 0$, $\omega > 0$), $u_{\text{aux}}^{(j)}$ и $L^{(j)}$ – значение параметра u_{aux} и функционал L , конкретизированные применительно к j -у эксперименту. Напомним, что последние величины зависят как от зондирующего поля (в т.ч. частоты излучения), так и от типа измерений в j -м эксперименте. Уточним также, что в измерениях, производимых на разных частотах, диэлектрические проницаемости $\epsilon(\mathbf{r})$, $\epsilon_{\text{aux}}(\mathbf{r})$ считаются независимыми от частоты в используемом интервале частот.

Благодаря линейности функционалов $L^{(j)}$ условие (14) преобразуется к линейному соотношению

$$\alpha w(\mathbf{r}) \tilde{\eta}(\mathbf{r}) + \int_0^a K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \eta(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = q(\mathbf{r}). \quad (16)$$

$$(0 \leq r < a).$$

Это – интегральное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{j=1}^N w_j L^{(j)*}(\mathbf{r}) L^{(j)}(\mathbf{r}') \quad (17)$$

и правой частью

$$q(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N w_j \left[u_{\text{aux}}^{(j)} - u^{(j)} \right] L^{(j)*}(\mathbf{r}). \quad (18)$$

Здесь * – комплексное сопряжение, $L^{(j)}(\mathbf{r})$ – ядро функционала $L^{(j)} = \int_0^a L^{(j)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ Решение его отыскивается в явном виде:

$$\tilde{\eta}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N w_j \left[u_{\text{aux}}^{(j)} - u^{(j)} - \chi_j \right] L^{(j)*}(\mathbf{r}) / \alpha w(\mathbf{r}), \quad (19)$$

где $\{\chi_j\}$ – решение системы N линейных алгебраических уравнений:

$$\chi_j + \sum_{k=1}^N a_{jk} \chi_k = \psi_j, \quad (j = 1, 2, \dots, N); \quad (20)$$

$$\psi_j = \sum_{k=1}^N \left[u_{\text{aux}}^{(k)} - u^{(k)} \right] a_{jk}. \quad (21)$$

Подчеркнем, что величины $\{u_{\text{aux}}^{(j)}\}$, $\{L^{(j)}\}$ зависят (нелинейным образом) от функции $\epsilon_{\text{aux}}(\mathbf{r})$. С учетом этого запишем найденное выражение для $\tilde{\eta}(\mathbf{r})$ в форме:

$$\tilde{\eta}(\mathbf{r}) = A \epsilon_{\text{aux}}(\mathbf{r}). \quad (22)$$

Здесь A – нелинейный оператор, который переводит функцию ϵ_{aux} в $\tilde{\eta}$ согласно описанной здесь процедуре нахождения $\tilde{\eta}$. Далее он считается известным.

2.3. Располагая оператором A , искомую функцию $\epsilon(\mathbf{r})$ можно приближенно восстановить по формуле: $\epsilon(\mathbf{r}) \simeq \epsilon_{\text{aux}}(\mathbf{r}) + \tilde{\eta}(\mathbf{r}) = (1 + A)\epsilon_{\text{aux}}(\mathbf{r})$.

По построению она справедлива только тогда, когда функция ϵ_{aux} близка к ϵ . В более общем случае величина $(1 + A)\epsilon_{\text{aux}}$ может заметно отличаться от ϵ , однако ее можно использовать в качестве функции распределения диэлектрической проницаемости нового вспомогательного тела и получить по той же схеме следующую оценку для ϵ . Эту процедуру последовательных уточнений надлежит повторять до выхода на приемлемую точность восстановления ϵ (т.е. до того этапа, когда две последовательные оценки будут различаться на несущественную величину). С алгоритмической точки зрения речь идет об итерационной процедуре Ньютона-Канторовича [3]:

$$\begin{aligned} \epsilon^{(0)} &= \epsilon_0, \\ \epsilon^{(l+1)} &= (1 + A)\epsilon^{(l)}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\epsilon_0(\mathbf{r})$ – начальная оценка профиля диэлектрической проницаемости зондируемого тела, l – номер итерации. Авторами проведены численные исследования предложенного решения обратной задачи применительно к весьма представительному классу восстанавливаемых профилей диэлектрической проницаемости и при использовании данных измерений как в частотной области, так и поляризационных измерений (см. по этому поводу предварительные сообщения в [7, 9]). Эти исследования свидетельствуют о высокой скорости сходимости итерационного процесса (24) при достаточно произвольном выборе начального приближения $\epsilon_0(\mathbf{r})$. Некоторые иллюстративные результаты упомянутых численных исследований приведены ниже.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Авторами проведены численные эксперименты с целью сравнительного анализа возможностей восстановления параметров диэлектрического цилиндра по предложенной схеме при постановке обратной задачи в одной из следующих областей: угловой, частотной или поляризационной. Иными словами, считалось, что в ходе измерений варьируются соответственно азимутальный угол точки наблюдения, частота или поляризационные характеристики зондирующего поля. В качестве информативного параметра использовалась проекция электрического вектора рассеянного поля на заданное направление. Набор "экспериментальных" данных синтезировался путем численного моделирования.

Ниже приведены иллюстративные результаты для обратной задачи в частотной области. Такая постановка наиболее трудна для предложенного алгоритма, так как на каждом итерационном шаге приходится вычислять функцию $\tilde{G}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}', h)$ (точнее – входящие в нее скалярные потенциалы) для каждой частоты зондирования.

В качестве источника зондирующего поля взята нить однородного монохроматического электрического тока, текущего параллельно цилиндру. Геометрически эта нить совпадает с линией $x = 0$, где $y = -s$, $-\infty < z < +\infty$, где $s > a$ – кратчайшее расстояние от нити тока до оси цилиндра. Издаваемое ею перпендикулярное поле, равно как и рассеянное цилиндрическим полем, не зависят от z и полностью определяются единственной

отличной от нуля компонентой электрического вектора. В частности,

$$E_z^{\text{in}}(\vec{R}) \equiv E_z^{\text{in}}(\vec{r}) = -(\pi k/c) I_e H_0^{(1)}(kD),$$

Здесь I_e - комплексная амплитуда тока, $H_0^{(1)}$ - функция Ханкеля, $D = [x^2 + (y+z)^2]^{1/2}$. Информативным параметром служит комплекснозначная величина $E_z^{\text{in}}(\vec{r})$, взятая в точке $z = 0, y = -s, x = 0$ (т.е. на нити тока). Величина k пробегает N равноотстоящих значений из интервала $k_{\text{min}} \leq k \leq k_{\text{max}}$, включая границы этого интервала. Амплитуда I_e считается не зависящей от частоты. Радиус a цилиндра изначально задан.

На описанных ниже рисунках принято $\alpha = 10^{-9}$, $sk_{\text{min}} = 122,8$, $k_{\text{max}}/k_{\text{min}} = 2$, $N = 7$; истинный профиль диэлектрической проницаемости изображен сплошной линией.

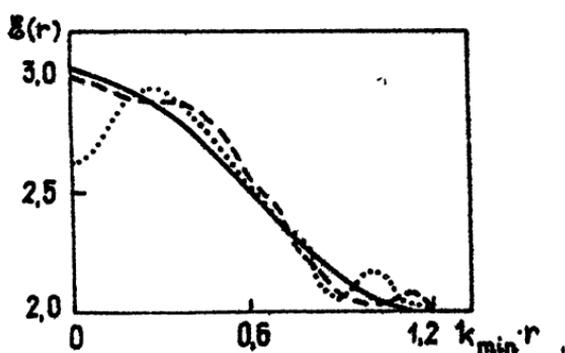


Рис. 2:

Рис.2 изображает результаты восстановления профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r) = 2,5 + 0,5 \cos(\pi r/a)$ радиально-неоднородного цилиндра при $k_{\text{min}}a = 1,2$. Точки (штрихи) показывают результат работы построенного алгоритма после пяти (трех) итераций для начального приближения $\varepsilon_0(r) = 2,5$ ($\varepsilon_0 = 3,0$), $0 \leq r < a$. Из рисунка видно, что удачный выбор начального приближения позволяет значительно повысить эффективность работы алгоритма. При фиксированном интервале частот увеличение набора данных (т.е. количества экспериментов N) повышает точность определения $\varepsilon(r)$ лишь до известного предела. Начиная с $N = 7$ результаты восстановления указанного на рис.2 истинного профиля для разных N на каждой итерации практически не отличаются. Вместе с тем, если при $N = 7$ одна итерация занимает 2 мин. процессорного времени ЭВМ ЕС1060, то при $N = 19$ на это требуется 15,5 мин. Дальнейший рост N связан также с накоплением ошибок округления в процессе вычислений, и как результат - с ухудшением точности нахождения ε .

Рис.3 иллюстрирует определение диэлектрической проницаемости однородного цилиндра, а рис.4 - однородного цилиндра (а) и стенки трубы (б) с заданными внутренним заполнением и толщиной. Точечная (штриховая) линия на рис.3 отвечает 5-й (10-й) итерации для начального приближения $\varepsilon_0(r) = 3,0$, а штрих-пунктирная - 5-й итерации для $\varepsilon_0(r) = 1,5$

($0 \leq r < a$). Штрихи и точки на рис.4 изображают результат нахождения проницаемости соответственно однородного цилиндра и стенки трубы после 5-й итерации и начального приближения для восстанавливаемого параметра, равного 3,0. Видно, что в этих сравнительно простых ситуациях относительная погрешность решения обратной задачи составляет примерно 0,5% уже после пяти итераций.

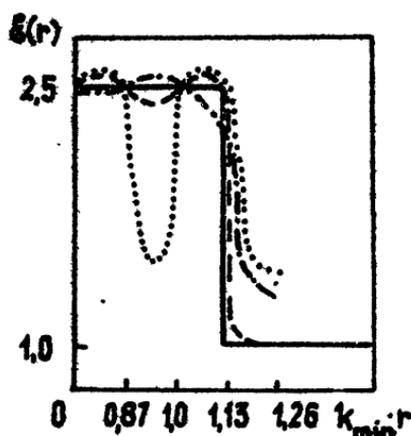


Рис.3.

Проведенные численные эксперименты свидетельствуют об эффективности предложенной схемы для решения обратной задачи в реальном масштабе времени.

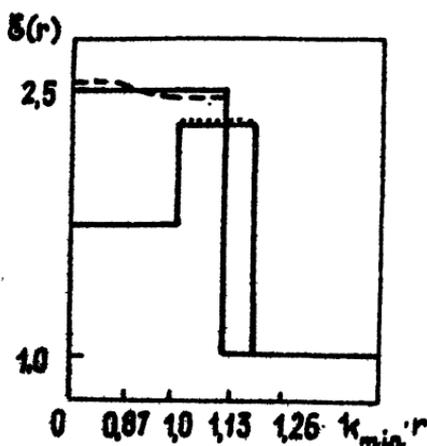


Рис. 4.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Диадная функция Грина $\widehat{G}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}', h)$ при $r \neq r'$ дается следующим выражением:

$$(c/4\pi)\widehat{G}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}', h) = \left[\vec{z}_0 + ib(r)h\nabla_{\perp} \right] \times \\ \times \left[b(r')k^2\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} G_{EH} - b(r')khG_{EE} - ik\vec{z}_0 G_{EE} \right] - \\ - ib(r)k\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \left[b(r')k^2\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} G_{HH} - b(r')khG_{HE} - ik\vec{z}_0 G_{HE} \right].$$

Здесь \vec{z}_0 - орт оси Oz , ∇_{\perp} и ∇'_{\perp} - двумерные операторы "набла", действующие по переменным \vec{r} и \vec{r}' соответственно. Далее, скалярные функции Грина $G_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu}(\vec{r}, \vec{r}', h)$ ($\mu, \nu = E, H$) определены (в том числе и при $\vec{r} = \vec{r}'$) как решение уравнений:

$$D_{11}G_{HH} + hD_{12}G_{EH} = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \\ hD_{21}G_{HH} + D_{22}G_{EH} = 0; \\ D_{11}G_{HE} + hD_{12}G_{EE} = 0, \\ hD_{21}G_{HE} + D_{22}G_{EE} = \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

($0 \leq r, r' < +\infty$), которые всюду непрерывны вместе с величинами (последнее - при $r \neq r'$):

$$b(r) \left[k \frac{\partial G_{H\nu}}{\partial r} - \frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} G_{E\nu} \right], \\ b(r) \left[k \varepsilon_{tot}(r) \frac{\partial G_{E\nu}}{\partial r} + \frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} G_{H\nu} \right]$$

и удовлетворяют условию излучения при $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow +\infty$.

Мы обозначили: $b(r) = [k^2 \varepsilon_{tot}(r) - h^2]^{-1}$, δ - дельта-функция Дирака, r и φ - полярные координаты в плоскости xOy , $\varepsilon_{tot}(r)$ - диэлектрическая проницаемость совокупной среды:

$$\varepsilon_{tot}(r) = \begin{cases} 1, & r > a, \\ \varepsilon_{aux}(r), & 0 \leq r < a, \end{cases}$$

D_{pq} - дифференциальные операторы, понимаемые в обобщенном смысле:

$$D_{11} = k^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r b(r) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{b(r)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 1 \right], \\ D_{22} = k^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varepsilon_{tot}(r) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{b(r) \varepsilon_{tot}(r)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \varepsilon_{tot}(r) \right], \\ D_{21} = -D_{12} = \frac{hb(r)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \dot{b}(r) \equiv \frac{\partial b(r)}{\partial r}.$$

Обратим внимание, что при $h = 0$, когда зондирующее поле не зависит от z , из предыдущего получаем $G_{EH} = G_{HE} \equiv 0$, и диадная функция $\hat{G}_{es}(\vec{r}, \vec{r}'; h)$ сводится к двум скалярным функциям G_{EE} и G_{HH} , что упрощает численные расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Devaney A.J., Oristaglio M.L. // Phys. Rev. Lett. 1983. V.51. N 4. P.237.
2. Roger A. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1981. V.AP-29. N 2. P.232.
3. Канторович Л.В. // ДАН СССР. 1948. Т.59. С.1237.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1985.
5. Nabashy T.M., Chew W.C., Chow E.Y. // Radio Sci. 1986. V.21. P.635.
6. Хрусьов Е.Я. // ЖВМ и МФ. 1985. Т.25. N 4. С.548.
7. Batrakov D., Zhuck N. // Mathematical methods in electromagnetic theory. Proc. 4th Intern.Seminar, 15-24 Sept.1991, Alushta (Ukraine). Test-Radio Press, 1991. P.264.
8. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макрокнопической электродинамики. - Киев: Наукова думка. 1986. - 280 с.
9. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. - М.: Мир, 1978. Т.1. Гл.1.
10. Batrakov D.O., Zhuk N.P., Rapoport D.A. et al. // Proc. Intern. Conference on Composite Materials. - London: Elsevier, 1991. P.1211.

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
3 апреля 1992 г.

AN ITERATIVE SCHEME OF SOLVING AN INVERSE PROBLEM OF PROBING FOR A RADially INHOMOGENEOUS SLAB

D.O. Batrakov, N.P. Zhuck

The paper presents a computer-aided solution to the problem of retrieving complex permittivity profile for radially inhomogeneous cylinder by using radiowave probing data set. The solution is based on a successive generation of estimates for the unknown profile obtainable via minimizing a proper smoothing functional which measures the discrepancy between the experimental data set and the one modelled within the framework of the distorted Born approximation. The proposed algorithm has the advantage that much of the work is done analytically so it appears well-suited for real-time implementation. The effectiveness of this approach is demonstrated by numerical simulation of an experiment on radio wave probing on a discrete set of frequencies.

УДК 621.371:526.2+551.526+528.811+551.501

СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЗАДАЧАХ РАДИОТЕПЛОВОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ И ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

К. П. Гайкович

Совместное решение уравнений переноса излучения и теплопроводности используется для разработки радиометрических методов контроля динамики температурного профиля и теплового потока в пограничном слое атмосферы и поверхностном слое грунта.

Дистанционный радиометрический контроль динамики температурного распределения и теплообмена в системе атмосфера-подстилающая поверхность представляет интерес для решения задач физики атмосферы, метеорологии и распространения радиоволн. Определение высотного температурного профиля $T(z)$ в пограничном слое атмосферы по радиотепловому излучению осуществляется на основе решения уравнения переноса излучения в полупространстве $z \geq 0$:

$$T_x^1(\vartheta) = \frac{1}{\sin \vartheta} \int_0^\infty T(z) \gamma e^{-\gamma z / \sin \vartheta} dz, \quad (1)$$

где γ – коэффициент поглощения, а $T_x^1(\vartheta)$ – яркостная температура нисходящего теплового радиоизлучения атмосферы на частоте в резонансе кислородной линии (около 60 ГГц) в зависимости от угла места. При подповерхностном термическом зондировании используются измерения в надир спектральной зависимости восходящего теплового радиоизлучения грунта $T_x^1(\lambda)$ (λ – длина волны) в ММ-ДМ диапазонах, и температурный профиль определяется из решения уравнения, аналогичного (1):

$$T_x^1(\lambda) = (1 - R) \int_{-\infty}^0 T(z) \gamma(\lambda) e^{\gamma z} dz, \quad (2)$$

где R – коэффициент отражения полупространства $z \leq 0$, λ – длина волны. Толщина зондируемого слоя определяется величиной скин-слоя $d = 1/\gamma$ и составляет около 300 м в атмосфере и единицы-десятки см в грунте.

Уравнения (1), (2) представляют собой интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода, решение которых невозможно без привлечения дополнительной информации о $T(z)$. Метод восстановления профиля температуры в пограничном слое атмосферы был разработан в [1,2], а подповерхностного профиля – в [3-6]. В этих работах алгоритмы решения (1) и (2) основаны на применении метода А.Н.Тихонова, где используется информация о принадлежности $T(z)$ к классам квадратично суммируемых или дифференцируемых функций. Точность восстановления профилей составила 0,3 – 0,5 К.

Новые возможности для решения задачи открываются, если в качестве дополнительной информации использовать тот факт, что распределение температуры не произвольно, а удовлетворяет уравнению теплопроводности для определенных граничных условий. Это позволяет ввести в рассмотрение зависимость яркостной температуры от времени и получить точное аналитическое решение задачи температурного зондирования. Совместное решение уравнений переноса излучения и теплопроводности представляет собой довольно сложную задачу и было получено не сразу. На первом этапе динамику теплового радионизлучения полупространства удалось выразить через граничные условия на поверхности (эволюцию температуры $T_0(t)$ или теплового потока $J_0(t)$) [3]. Позднее полученные уравнения удалось решить сначала численно [5], а потом и аналитически [6].

1. Исходные уравнения. Из уравнений, полученных в [6], динамика температурного профиля в пограничном слое атмосферы определяется по предшествовавшей эволюции яркостной температуры соотношением:

$$T(z, t) = \int_{-\infty}^t T_s^l(\tau) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[z + \frac{\sin \vartheta}{\gamma} \left(\frac{z^2}{2a^2(t-\tau)} - 1 \right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{4a^2(t-\tau)^3}}, \quad (3)$$

где a^2 - коэффициент температуропроводности, $z \geq 0$.

Аналогичное соотношение для поверхностного слоя грунта ($z \leq 0$):

$$T(z, t) = (1 - R) \int_{-\infty}^t T_s^l(\tau) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{z^2}{2a^2(t-\tau)} - 1 \right) - z \right] \frac{d\tau}{\sqrt{4a^2(t-\tau)^3}}. \quad (4)$$

В [6] было получено также выражение для определения теплового потока через поверхность $z = 0$, которое для случаев использования нисходящего и восходящего излучения имеет вид:

$$J_0(t) = \frac{c \sin \vartheta}{\gamma} \left[T_s^l(t) + \frac{\gamma a}{\sin \vartheta} \int_{-\infty}^t T_s^l(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right], \quad (5)$$

$$J_0(t) = \frac{c}{\gamma(1-R)} \left[T_s^l(t) + \gamma a \int_{-\infty}^t T_s^l(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right], \quad (6)$$

где c - теплоемкость (в (5) - воздуха при постоянном давлении; в (6) - грунта), T_s^l - производные яркостной температуры по времени.

Важно отметить, что значения выражений (3), (4) при $z = 0$ нельзя определять простой подстановкой, поскольку интегралы имеют особенность при $t = 0$. Соответствующие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= T_s^l(t) + \frac{\sin \vartheta}{\gamma a} \int_{-\infty}^t T_s^l(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = \\ &= T_s^l(t) - \frac{\sin \vartheta}{\gamma a} \int_{-\infty}^t (T_s^l(\tau) - T_s^l(t)) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$T_0(t) = \frac{1}{1-R} \left[T_s^1(t) + \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^t T_s^1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right] =$$

$$= \frac{1}{1-R} \left[T_s^1(t) - \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^t (T_s^1(\tau) - T_s^1(t)) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)^3}} \right]. \quad (8)$$

Сразу обращает на себя внимание возможность определения из (7) или (8) параметра γa в случае независимых (прямых или ИК) измерений поверхностной температуры $T_0(t)$. Для атмосферы, когда величина γ практически точно известна, тем самым открывается возможность определять коэффициент турбулентной теплопроводности a^2 в зондируемом слое. При измерениях грунта величина γ также с хорошей точностью определяется по данным о его составе, что позволяет и в этом случае определять величину теплопроводности. Отметим также, что для заданного состава грунта величина обоих параметров определяется только влагосодержанием, поэтому из (8) можно получить независимую оценку этой величины.

Уравнения (3)–(6) открывают возможность мониторинга системы атмосфера–подстилающая поверхность по измерениям динамики яркостной температуры только на одной длине волны (угде места), причем интервал зондирования не ограничивается толщиной скин-слоя, а определяется только длительностью наблюдений. Нижний предел в (3)–(8) заменяется на некоторое конечное время t^* такое, что за время $\Delta t = t - t^*$ затухает влияние более ранних моментов времени.

Из решения уравнения теплопроводности можно оценить интервал времени, в течение которого затухает влияние предыстории в эволюции граничных условий на поверхности на текущие значения профиля температуры. Так, полагая, что в момент t^* произошло изменение поверхностной температуры на величину ΔT_0 , имеем, что соответствующее приращение температуры в точке z в момент $t = t^* + \Delta t$ составит

$$\Delta T(z, t) = \Delta T_0 \operatorname{erf} \left(\frac{2a\sqrt{\Delta t}}{z} \right). \quad (9)$$

При $\Delta t = 3,5 z^2/a^2$ $\Delta T = 0,99 \Delta T_0$. То есть время интегрирования, необходимое для достижения некоторой заданной точности (в данном случае лучше 99%), пропорционально квадрату толщины зондируемого слоя. Существует также характерное время, в течение которого эволюция граничных условий полупространства формирует наблюдаемое значение яркостной температуры и за которое влияние условий в более отдаленные моменты времени становится пренебрежимо малым. Это характерное время определяется параметром среды

$$\Gamma = \begin{cases} \frac{\sin^2 \vartheta}{(\gamma a)^2} & (\text{для атмосферы}), \\ \frac{1}{(\gamma a)^2} & (\text{для грунта}). \end{cases} \quad (10)$$

Смысл параметра Γ состоит в том, что за время $\Delta t = 3,5 \Gamma$ профиль температуры с точностью 99% сформируется на толщине скин-слоя d . Для атмосферы $d = \sin \vartheta/\gamma$, а для грунта $d = 1/\gamma$.

2. Восстановление тепловой динамики пограничного слоя атмосферы по измерениям яркостной температуры на частоте 60 ГГц. Пограничный слой атмосферы – это слой, характеристики которого, в частности, температурный режим, формируются под влиянием условий на земной поверхности. Толщина этого слоя, обычно составляющая несколько сот метров, существенно зависит от конкретных условий. Применимость приведенных выше уравнений в данном случае предполагает выполнение условий постоянства параметров среды γ и a^2 как по высоте, так и во времени, а также малость влияния процессов адвекции и выделения скрытой теплоты. При измерениях в центре линии O_2 на частоте около 60 ГГц условие постоянства γ выполнено с высокой точностью в высотном интервале, где формируется излучение. Величина коэффициента турбулентной теплопроводности a^2 является гораздо более изменчивой и обычно возрастает с ростом высоты. Наиболее резко величина a^2 возрастает на первых нескольких метрах от поверхности, поэтому измерения целесообразно выполнять с некоторой высоты над поверхностью и зондировать по возможности более тонкий слой атмосферы на низких углах места. Для атмосферы толщина скин-слоя, в котором формируется излучение (см. выше) меняется в зависимости от угла места ϑ от 0 до 300 м.

Первый этап предлагаемой методики состоит в определении коэффициента (γ_a) из уравнения (7), используя измерения $T_a^1(t)$ и динамики температуры на уровне антенны радиометра $T_0(t)$. Затем, пользуясь тем, что величина γ точно известна, определяется коэффициент a^2 и далее оценивается время интегрирования Δt , необходимое для определения температуры в зондируемом слое. Наконец, из (3), (5) определяется динамика температурного профиля и теплового потока.

Для проверки методики использовались данные радиометрических измерений в процессе формирования ночной приподнятой инверсии температуры (результаты восстановления профиля $T(z)$ по угловой зависимости $T_a^1(\vartheta)$ из решения (1) методом А.Н.Тихонова для этого случая опубликованы в [2]). Инверсия развивалась в процессе ночного выхолаживания, начиная с почти изотермического профиля $T(z) = 288,5$ К в момент $t = 22^h$ местного времени. На рис.1 представлены результаты анализа. Кривые 1 и 2 на рис.1а – соответственно $T_a^1(t)$ на угле места $\vartheta = 5^\circ$ и $T_0(t)$. Пунктир – $T_0(t)$, вычисленная из (7) при значении $a^2 = 7,0 \cdot 10^3$ см²/с. При данном значении a^2 минимизируется среднеквадратичное отклонение восстановленной зависимости $T_0(t)$ от измеренной. Степень близости, до которой удается согласовать эти зависимости, характеризует выполнение сформулированных выше необходимых условий применимости метода. На рис.1б сплошной кривой представлен профиль температуры, восстановленный из (3) для момента $t = 0^h 45^m$. До высоты $z \cong 100$ м этот профиль хорошо согласуется с профилем, восстановленным в [2] на основе метода А.Н.Тихонова (пунктирная кривая 2 на рис.1б). Пунктирной кривой 1 на рис.1б представлен исходный квазиизотермический профиль для момента 22^h. Легко оценить, что профиль в более высоких слоях не мог определяться изменениями $T_0(t)$ за анализируемый период $\Delta t = 2,5^h$ ч, следовательно, формировался под влиянием процессов адвекции или вы-

деления скрытой теплоты. Таким образом, сравнение результатов угломестного зондирования и предложенной методики позволяет определить высоту пограничного слоя, в котором формирование температуры определяется влиянием поверхности.

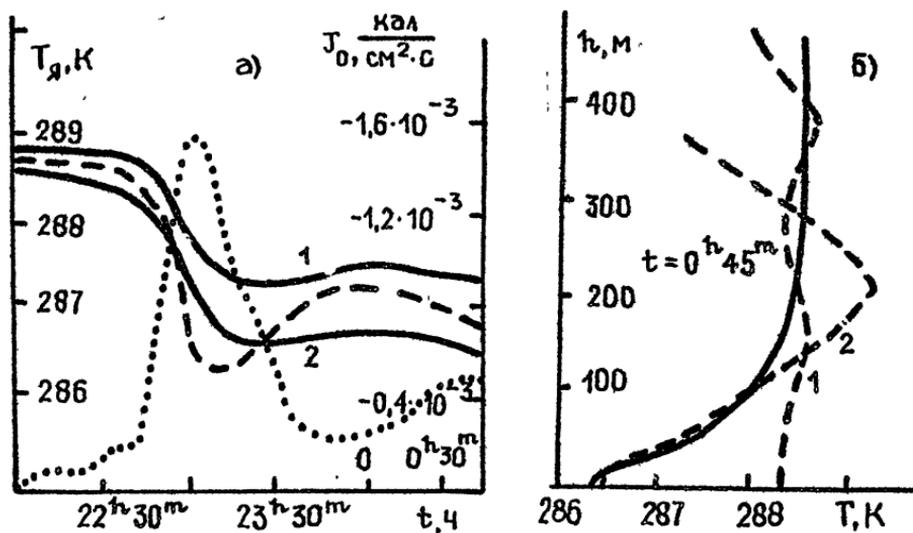


Рис. 1:

Представленный пример удобен тем, что начальное распределение температуры было близко к изотермическому, что исключает влияние предыстории на результаты восстановления. Однако, как правило, такое влияние необходимо учитывать, что удлиняет время наблюдений. Так, при угле места $\vartheta = 5^\circ$ толщина скин-слоя $d = 25$ м, $\Gamma = 0,25^h$ и $\Delta t(99\%) = 3,5 \Gamma = 0,9^h$. То есть время, за которое затухает влияние предыстории на формирование яркостной температуры составляет около одного часа. Для яркостной температуры на угле места $\vartheta = 15^\circ$ это время составляет уже около 7^h . Температура на высоте 100 м формируется под влиянием поверхности за время $\Delta t = 14^h$ (при данном значении a^2). Таким образом, зондирование должно осуществляться по возможности на малых углах места. Следует отметить также, что параметр a^2 может принимать значения в весьма широком диапазоне, поэтому приведенные оценки для других ситуаций могут измениться.

На рис.1а точками представлена определенная из (4) динамика теплового потока $J_0(t)$, которая указывает на наличие резкого максимума в процессе ночного радиационного выхолаживания. Поток тепла направлен из атмосферы в почву, которая быстро охлаждается за счет излучения в ИК диапазоне. Эти результаты представляют особый интерес в свете известных трудностей существующих методов определения теплового потока, предполагающих измерение температуры на нескольких высотах.

3. Радиометрический контроль теплового режима поверхностного слоя грунта. Рассматриваемый случай отличается от зондирования атмосферы прежде всего толщиной скин-слоя, на котором фор-

мируется излучение. Эта толщина определяется в основном влагосодержанием и составляет обычно в ММ-ДМ диапазонах величину порядка длины волны. В абсолютно сухом грунте (как, например, в лунном) толщина скин-слоя составляет порядка 10 – 15 длин волн. Таким образом, обычно излучение формируется в слое толщиной несколько см. Необходимые условия однородности параметров среды по глубине и стационарности для случая грунта выполняются чаще, чем в атмосфере, и эти условия легче контролировать.

Разработка радиометрических методов контроля теплового режима грунта представляет интерес в связи с трудностями прямых измерений, которые требуют стационарных оборудованных площадок, где в грунт вкапываются термометры или датчики. Особенно сложны измерения теплового потока, предполагающие измерение температурного градиента в тонком поверхностном слое, из-за чувствительности к нарушениям структуры среды и размерам датчиков.

Методика радиометрических измерений грунта была разработана в [3-4]. Измерения выполнялись на длинах волн 0,8; 3; 9 и 13 см, причем антенная система размещалась под плоским металлическим экраном, что позволяло устранить влияние отражения от поверхности и подповерхностного рассеяния. При таких измерениях в уравнении (2) следует положить $R = 0$, что исключает наибольшую неопределенность при интерпретации измерений, связанную с неточным знанием параметра R и вклада в излучение переотраженного нисходящего излучения. Далее, по измеренной зависимости $T_x^{\uparrow}(\lambda)$ методом А.Н.Тихонова восстанавливался профиль $T(z)$.

Результаты этих же измерений используются здесь для восстановления суточной динамики температуры и теплового потока на основе уравнений (4), (6), (8), в которых, естественно, тоже следует положить $R = 0$. Из (8) по измерениям $T_x^{\uparrow}(t)$ и поверхностной температуры $T_0(t)$ определялась величина (γa) , далее по параметрам грунта согласно [7] определялась величина γ и вычислялось значение коэффициентов a^2 и Γ .

На рис.2, 3 представлены результаты анализа для длин волн 0,8 и 3 см. На рис.2а, 3а кривая 1 – зависимость $T_x^{\uparrow}(t)$, кривая 2 – результаты прямого измерения динамики $T_0(t)$. Пунктир – $T_0(t)$ из (8) при значении $a^2 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$, минимизирующем отклонение от измеренной зависимости $T_0(t)$. Точки – динамика теплового потока $J_0(t)$, определенная из (6). На рис.2б, 3б – профиль $T(z)$, определенный из (4) для конечного момента наблюдений – $12^{\text{h}}20^{\text{m}}$. Период анализа охватывает интервал времени, начиная с 16^{h} предыдущих суток.

Можно видеть, что на интервале времени $\Delta t \cong 10^{\text{h}}$ наблюдается расхождение между измеренной и восстановленной зависимостью $T_0(t)$ на длине волны 3 см (рис.3а) и между динамикой потока тепла $J_0(t)$, определенной по измерениям на 0,8 см и $J_0(t)$, определенной по измерениям на $\lambda = 3$ см. Это расхождение объясняется влиянием тепловой предыстории на формирование яркостных температур. Действительно, оценки показывают, что при $\lambda = 0,8$ см характерное время $\Gamma = 0,14^{\text{h}}$, а при $\lambda = 3$ см $\Gamma = 2,3^{\text{h}}$. Учитывая, что влияние предыстории затухает за $\Delta t = 3,5 \Gamma$, оказывается что для длины волны 3 см это время примерно согласуется с периодом на-

блюдаемых отклонений. В более поздние моменты результаты на 0,8 и 3 см практически совпадают.

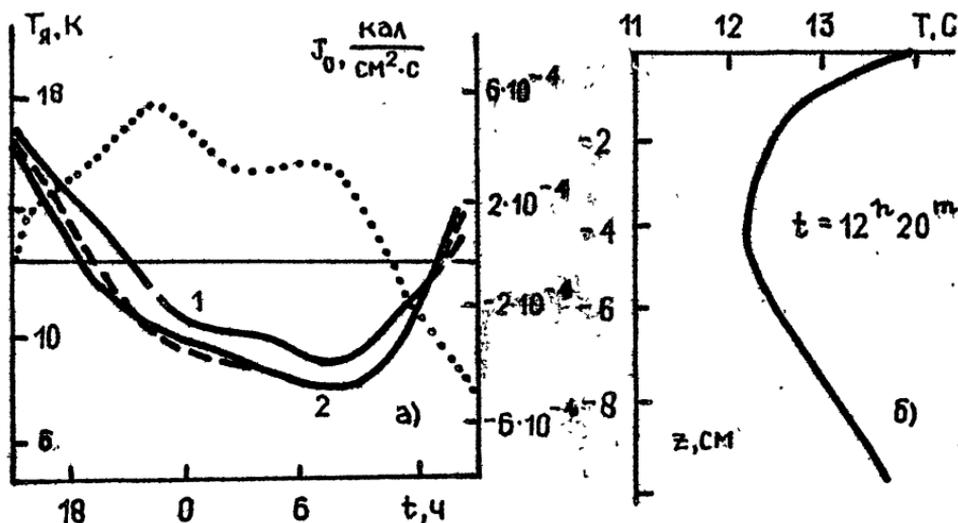


Рис. 2:

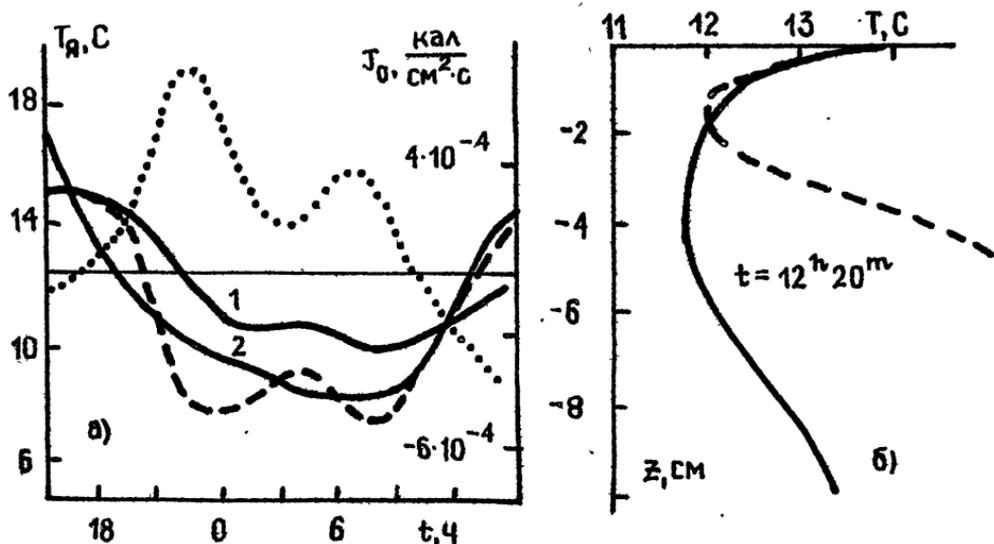


Рис. 3:

Расхождение между профилями температуры $T(z)$, восстановленными по измерениям на двух длинах волны, не превышает 0,5 К. Эти профили близки также к температурному распределению, восстановленному методом А.Н.Тихонова (см. [4] и пунктир на рис.3б) до глубины $z = -3$ см. В более глубоких слоях сказывается влияние тепловой предыстории в предшествующие сутки до начального момента анализа, когда имел место сильный прогрев поверхности.

Результаты определения динамики теплового потока $J_0(t)$, представленные на рис. 2, 3, хорошо отображают особенности ночного радиационного выхолаживания грунта и его утреннего прогрева. Можно, в частности, видеть два максимума выхолаживания, которые, по-видимому, связаны с прояснениями, а также изменение знака теплового потока при начале утреннего прогрева, который приводит к формированию инверсии температуры в поверхностном слое грунта.

Имеющиеся данные измерений на длинах волн 9 и 13 см не могли быть использованы, поскольку время влияния предыстории на яркостные температуры для этих длин волн превосходит выбранный интервал анализа. Однако, в [5] представлены результаты восстановления $T(z)$ и $J_0(t)$ по зависимости $T'_s(t)$ на $\lambda = 9$ см из численного решения интегральных уравнений, на основе которых позднее (в [6]) были получены соотношения (3)–(8). Результаты восстановления качественно и количественно согласуются с представленными в данной работе, но являются более заглаженными (отсутствует минимум в ночной динамике теплового потока). Сглаженность является следствием недостаточной дискретизации по времени при численном решении интегральных уравнений. Ограничения в размерности определялись возможностями ЭВМ. Полученное в [6] совместное решение уравнений переноса излучения и теплопроводности в аналитическом виде исключило все трудности, связанные с размерностью данных.

Заключение. Подводя итоги выполненного рассмотрения, можно сделать вывод, что подход к задачам радиотеплового зондирования атмосферы и подстилающей поверхности, основанный на совместном решении уравнений переноса излучения и теплопроводности оказался весьма плодотворным и перспективным для дальнейшего развития. Предложенные методы контроля динамики профиля температуры и теплового потока при одновременных измерениях атмосферы и поверхности могут позволить разделить составляющие потока тепла из грунта, связанные с излучением, теплообменом с атмосферой и испарением, что позволит лучше понять и контролировать формирование теплового баланса в системе атмосфера–подстилающая поверхность. Возможность определения коэффициента турбулентной диффузии атмосферы по радиометрическим данным позволяет исследовать зависимость этой величины от скорости ветра, температурной стратификации и типа подстилающей поверхности.

Представляется также возможным обобщение развитой в [6] теории на некоторые случаи неоднородной или нестационарной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайкович К.П., Сумин М.И. // Тезисы докл. 7-го Всесоюзн. совещания по радиометеорологии. – М.: ВНИИГМИ, 1986. С.6.
2. Гайкович К.П., Кадыгров Е.Н., Косов А.С., Троицкий А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т.35. N 2. С.130.
3. Гайкович К.П., Резник А.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т.32.

N 11. С.1343.

4. Гайкович К.П., Резник А.Н., Троицкий Р.В. // Изв.вузов. Радиофизика. 1989. Т.32. N 12. С.1467.
5. Гайкович К.П. // Исследование Земли из космоса. 1990. Т 6. С.71.
6. Гайкович К.П. // Изв.вузов. Радиофизика. 1993. Т.36. N 1. С.16-24.
7. Dobson M.S., Ulaby F.T., Hallikainen M.T., El-Rayes M.A. // IEEE. Trans. Geosci.Remote Sensing. 1985. V.23. N 1. P.25.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
14 сентября 1992 г.

**MUTUAL SOLUTION OF EMISSION TRANSFER AND HEAT
CONDUCTIVITY EQUATIONS IN PROBLEMS OF RADIOTHERMAL
REMOTE SENSING OF THE ATMOSPHERE AND UNDERGROUND
SURFACE**

K.P. Gaikovich

The mutual solution of emission transfer and heat conductivity equations is used to work out radiometry methods for monitoring of temperature profile and heat flux dynamics in the atmosphere boundary layer and near-surface soil layer.

УДК 551.510.535

КОНВЕРГЕНТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ИОНОСФЕРЕ

А.А.Понятов

Рассмотрена линейная теория конвергентной неустойчивости (КН) ионосферной плазмы, связанной с неоднородным характером ее регулярного движения. Проведен анализ условий возникновения КН в слоях *E* и *F* ионосферы для вертикальных движений ионов, вызванных различными физическими причинами. Показана возможность генерации мелкомасштабных сильно вытянутых вдоль геомагнитного поля неоднородностей электронной концентрации ($l_{\min} \sim 10 \dots 30$ м). Указано на большую роль в КН высотной зависимости частот соударений.

Впервые вопрос о конвергентной неустойчивости (КН), связанной с неоднородными регулярными движениями заряженных частиц в ионосферной плазме, был поставлен в работе [1], где для сильно вытянутых неоднородностей было найдено $\gamma \propto \text{div} \vec{U}_{i0}$ (здесь γ — инкремент КН и \vec{U}_{i0} — регулярная скорость ионов). Для сильно вытянутых неоднородностей позднее было получено $\gamma \propto \text{div} \vec{U}_{i0}$ [2]. Выражение для произвольной вытянутости в этом подходе представлено в работе [3]. В дальнейшем КН практически не рассматривалась, хотя роль члена $\partial U_{i0z} / \partial z$ на формирование неоднородностей при распространении внутренних волн анализировалась с использованием другого подхода [4]. В данной работе получено полное выражение для инкремента КН на основании методики, предложенной в [5], и проведен анализ роли этой неустойчивости в образовании неоднородной структуры *E* и *F* слоев ионосферы. Предварительные результаты этой работы представлены в [6].

Анализ КН проводится на основании квазигидродинамических уравнений для ионов и электронов [4, 7] по традиционной методике исследования неустойчивостей ионосферной плазмы [7]. Однако, следуя [5], после линеаризации исходных уравнений введем вместо возмущений концентраций заряженных частиц N_1 новую переменную $n_1 = N_1 / N_0$ (все невозмущенные величины снабжены нулевым индексом, а возмущенные — единичным; предполагается, что плазма квазинейтральна, так что невозмущенные и возмущенные концентрации ионов и электронов равны: $N_{i0} = N_{e0} = N_0$, $N_{i1} = N_{e1} = N_1$). Тогда при некоторых упрощениях (подробнее см. [7]) линеаризованные уравнения в линейном приближении имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{U}_{\alpha 1}}{\partial t} + \nu_{\alpha} \vec{U}_{\alpha 1} + (\vec{U}_{\alpha 0} \nabla) \vec{U}_{\alpha 1} - \omega_{\alpha n} [\vec{U}_{\alpha 1} \vec{h}_0] = -\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \Phi - V_{T\alpha}^2 \nabla n_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_1 (\text{div} \vec{U}_{\alpha 0} + \vec{K}_0 \vec{U}_{\alpha 0}) + \vec{U}_{\alpha 0} \nabla n_1 + \text{div} \vec{U}_{\alpha 1} + \vec{K}_0 \vec{U}_{\alpha 1} = 0.$$

где e_{α} , m_{α} , $\omega_{\alpha n}$, ν_{α} , $\vec{U}_{\alpha 0}$, $\vec{U}_{\alpha 1}$, $V_{T\alpha}$ — соответственно заряд, масса, гирочастота ($\omega_{\alpha n} = e_{\alpha} H_0 / m_{\alpha} c$), частота соударений с другими частицами

($\nu_\alpha = \nu_{\alpha n} + \nu_{ei} m_e/m_\alpha$, здесь $\nu_{\alpha n}$ — частота соударений с нейтральными частицами; при таком подходе учет кулоновской частоты соударений ν_{ei} , хотя и не является точным, однако обычно вполне достаточен [8]), регулярная, возмущенная и тепловая скорости ($V_{T\alpha}^2 = \kappa T_\alpha/m_\alpha$, T_α — температура, κ — постоянная Больцмана) частиц сорта α . Для электронов $\alpha = e$, для ионов — $\alpha = i$. \vec{H}_0 — напряженность геомагнитного поля, c — скорость света в вакууме; $\vec{h}_0 = \vec{H}_0/H_0$; $\vec{K}_0 = \nabla N_0/N_0$. Возмущение электрического поля считается потенциальным $\vec{E}_1 = -\nabla \Phi$.

Целесообразность введения переменной n_1 заключается в том, что зависимость коэффициентов дифференциальных уравнений (1) от координат, связанная с соответствующей зависимостью величины N_0 , остается только в уравнении непрерывности и только через величину \vec{K}_0 , которая имеет более слабую зависимость от координат, чем N_0 . В частности, для экспоненциальной аппроксимации $N_0 \propto \exp(-z/L)$ K_0 совсем не зависит от координат. Тем самым улучшаются условия для применения квазилокального подхода, который заключается в представлении всех возмущенных величин в виде Фурье разложения

$$f_1 = \int f_{\vec{k}, \omega} \exp[i(\omega t - \vec{k} \vec{r})] d\omega d\vec{k} \quad (2)$$

с настолько медленно меняющимися амплитудами $f_{\vec{k}, \omega}$, что их производными можно пренебречь. Здесь ω — комплексная частота ($\omega = \omega_r - i\gamma$), \vec{k} — волновой вектор ($k = 2\pi/l$, где l — масштаб неоднородности). При наличии зависимости \vec{K}_0 от координат квазилокальное приближение справедливо при $k \gg K_0$. Необходимость введения величины n_1 подтверждается физической значимостью получаемых в этом случае результатов. Во-первых, теперь $N_1 \propto N_0$, что подтверждается многочисленными экспериментами [8], и, во-вторых, становится полным и физически понятным описание конвергентной неустойчивости, о чем пойдет речь ниже.

После подстановки разложений типа (2) в уравнения (1) из условия существования их нетривиального решения можно получить дисперсионное уравнение, которое для инкремента КН дает:

$$\gamma = -N_0^{-1} \operatorname{div}(N_0 \vec{U}_{i0}) - k^2 D_{\text{ан}}, \quad (3)$$

где $D_{\text{ан}} = [d_{e\theta}/(1 + \Psi_\theta)](m_i \nu_i/m_e \nu_e) D_a$ — коэффициент амбиполярной диффузии в присутствии магнитного поля, $D_a = V_{Ti}^2/\nu_i(1 + T_e/T_i)$, $\Psi_\theta = (m_i \nu_i/m_e \nu_e)(d_{e\theta}/d_{i\theta})(1 + \beta_\alpha^2)$, $d_{\alpha\theta} = \beta_\alpha^2 + \cos^2 \theta$, (θ — угол между \vec{k} и \vec{H}_0), $\beta_\alpha = \nu_\alpha/\omega_{\text{ан}}$. При выводе выражения (3) было использовано условие квазинейтральности:

$$\operatorname{div}(N_0 \vec{U}_{e0}) = \operatorname{div}(N_0 \vec{U}_{i0}). \quad (4)$$

Выражение для ω_d без учета члена, пропорционального D_a , совпадает с полученным ранее [8].

Таким образом инкремент КН определяется не дивергенцией скорости, как это полагалось в предшествующих работах [1–4], а дивергенцией потока, что представляется более справедливым с физической точки зрения. Это приводит к появлению дополнительного члена вида $\vec{K}_0 \vec{U}_{i0}$, который

описывает перенос возмущений вдоль регулярного градиента электронной концентрации, что эквивалентно их относительному углублению. Таким образом имеем чисто конвективную неустойчивость. Здесь важно, чтобы \vec{U}_{i0} была стационарной скоростью, входящей одним из факторов в формирование самого профиля N_0 . Только в этом случае профиль не будет сноситься с этой скоростью целиком, хотя плазма будет "прогоняться" через него, обеспечивая перенос неоднородностей относительно регулярного градиента концентрации. Что касается "старого" члена, то теперь $\gamma \propto \text{div} \vec{U}_{i0}$ независимо от вытянутости неоднородностей ($\cos \theta$), что также представляется справедливым (в [1-4] так было только для несильно вытянутых неоднородностей, когда $\Psi_\theta \gg 1$).

Для проведения анализа КН необходимо определить величину \vec{U}_{i0} , что сопряжено с определенными трудностями из-за взаимной связанности движений электронной и ионной компонент в неоднородной плазме через возникающее внутреннее электрическое поле \vec{E}_n . Для решения этой проблемы поступим следующим образом. Будем считать все величины зависящими только от высоты z , поскольку в подавляющем большинстве случаев в ионосферной плазме именно эта зависимость является определяющей. Тогда уравнение (4), которое теперь имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} (N_0 U_{i0z}) = \frac{\partial}{\partial z} (N_0 U_{e0z}), \quad (5)$$

может быть проинтегрировано по z и использовано для нахождения \vec{E}_n , имеющего в этом случае только z -компоненту. Полагая $N_0 U_{i0z}$ и $N_0 U_{e0z}$ плавными функциями от z , убывающими до нуля на бесконечности, возникающую при этом константу интегрирования C можно выбрать равной нулю. Это очевидно, поскольку в противном случае в итоге будем иметь неустойчивость ($\gamma \neq 0$) даже в отсутствие скоростей $\vec{U}_{\alpha 0z}$ (см. ниже), для чего нет никаких оснований. Об этом же говорит и то, что для спорадического слоя E ниже получены результаты, совпадающие с результатами, полученными на основании совершенно другого подхода [4, 7].

Кроме того имеются и физические основания положить $C \equiv 0$. Во-первых, получающееся уравнение $U_{i0z} = U_{e0z}$ имеет прозрачную физическую интерпретацию, связанную с сутью самой КН, которая заключается в переносе неоднородности как единого целого с сохранением нейтральности. Поэтому при зависимости всех параметров только от z и возникает условие равенства вертикальных компонент скоростей. В противном случае происходило бы разделение зарядов и нарушение нейтральности. Фактически, это означает, что имеющееся только вертикальное внутреннее электрическое поле для обеспечения нейтральности должно выравнивать скорости ионов и электронов по вертикали. Во-вторых, если убрать все движения плазмы кроме диффузионных, то равенство $U_{i0z} = U_{e0z}$ обеспечивается амбиполярностью самой диффузии, следовательно, $C = 0$.

Скорости частиц определяются выражением, следующим из [4, 7]:

$$\vec{U}_{\alpha 0} = (1 + \beta_\alpha^2)^{-1} \{ \beta_\alpha^2 \vec{V}_{\alpha n} + \beta_\alpha [\vec{V}_{\alpha n} \vec{h}_0] + \vec{h}_0 (\vec{V}_{\alpha n} \vec{h}_0) \}.$$

Здесь $\vec{V}_{\alpha n} = \vec{U}_n + e_\alpha \vec{E}_n / (m_\alpha \nu_\alpha) + \vec{g} / \nu_\alpha - D_\alpha \vec{K}_0$, $D_\alpha = V_{T\alpha}^2 / \nu_\alpha$, $\vec{E}_n = \vec{E}_0 + \vec{E}_n$, где \vec{U}_n — регулярная скорость нейтральных частиц; \vec{E}_n и \vec{E}_0 — полное и

внешние электрические поля; из сил неэлектромагнитного происхождения оставлена только гравитационная, характеризующаяся ускорением свободного падения \vec{g} . Систему координат выберем таким образом, чтобы вектор \vec{H}_0 лежал в плоскости (x, z) , тогда ось x будет направлена приблизительно на юг, а ось y — на восток. Выразив с помощью (5) E_{nz} и подставив его в выражение для U_{i0z} , получим:

$$U_{i0z} = (1 + \Psi_\chi)^{-1} (\Psi_\chi \vec{U}_{i0z} + \vec{U}_{e0z}) \simeq \left[(1 + \Psi_\chi^{-1})(1 + \beta_i^2) \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ d_{i\chi} \left(U_{nz} - \frac{g}{\nu_i} - D_\alpha K_0 \right) - \frac{\beta_i \sin \chi \cos^2 \chi}{d_{e\chi}} \left[U_{ny} - \right. \right. \\ \left. \left. - U_{nz} \left(\frac{\beta_e}{\cos \chi} + \frac{\cos \chi}{\beta_i} \right) + \frac{e E_{0y}}{m_i \nu_i} \left(1 + \frac{\beta_i \beta_e}{\cos^2 \chi} \right) + \frac{e E_{0z} \beta_i}{m_i \nu_i \cos \chi} \right] \right\}, \quad (6)$$

Здесь χ — угол между \vec{H}_0 и вертикалью, \vec{U}_{e0z} — значение скорости без учета внутреннего электрического поля. Приближенное равенство получено при использовании хорошо выполняющегося в ионосфере на всех высотах неравенства $m_e/m_i \ll M_e \nu_e / (m_i \nu_i) \ll 1$.

В дальнейшем мы не будем учитывать вклада внешнего электрического поля и будем рассматривать только средние и высокие широты, определяемые неравенством $\Psi_\chi \gg 1$, тогда как в приэкваториальной зоне: $\cos \chi \simeq 0$, $\Psi_\chi \ll 1$ и U_{i0z} становится очень малой. Это связано с тем, что определяющими являются движения вдоль магнитного поля, которое на экваторе горизонтально. В E области, где справедливо неравенство $\nu_i^2 \gg \omega_{in}^2$, выбранный диапазон широт определяется соотношением $\cos^2 \chi \gg m_e \nu_e / m_i \nu_i$, тогда из (6) получим

$$U_{i0z} = U_{nz} - \frac{g}{\nu_i} - D_\alpha K_0 - \frac{\sin \chi}{\beta_i} \left[U_{ny} - U_{nz} \left(\frac{\beta_e}{\cos \chi} - \frac{\cos \chi}{\beta_i} \right) \right]. \quad (7)$$

В F области ионосферы $\nu_i^2 \ll \omega_{in}^2$ и диапазон средних и высоких широт определяется неравенством $\cos^2 \chi \gg \beta_i^2$. В этом случае (6) дает:

$$U_{i0z} = \cos^2 \chi \left(U_{nz} - \frac{g}{\nu_i} - D_\alpha K_0 \right) + \sin \chi \left(U_{nz} \cos \chi - \beta_i U_{ny} \right). \quad (8)$$

Рассмотрим сначала указанную выше конвективную неустойчивость $\gamma \propto K_0 U_{i0z}$. Для минимального масштаба l_{\min} неоднородностей, возникающих в линейном приближении, из критерия неустойчивости $\gamma = 0$ можно получить соотношение

$$l_{\min} = \sqrt{2\pi D_{an} L_0 / U_{i0z}}. \quad (9)$$

где $L_0 = 2\pi / K_0$ — характерный масштаб изменения регулярной концентрации электронов. Совершенно очевидно, что наиболее благоприятные условия, а в большинстве случаев и сама возможность для возникновения КН существуют, когда мал коэффициент диффузии $D_{an} \ll D_{an \max} = D_\alpha$, что приводит к требованию достаточно сильной вытянутости неоднородностей вдоль геомагнитного поля \vec{H}_0

$$l_\perp^2 / l_\parallel^2 \simeq \cos^2 \theta \ll 1, \quad (10)$$

где l_{\perp} и l_{\parallel} — размеры неоднородности соответственно поперек и вдоль H_0 . В E области это возможно на высотах $z \geq 100$ км, где $\beta_e \beta_i \ll 1$. Здесь точный критерий сильной вытянутости имеет вид $\cos^2 \theta \ll \beta_e / \beta_i$. Для упрощения формул воспользуемся более сильным на этих высотах неравенством $\cos^2 \theta \ll \beta_e^2$, тогда получим $D_{\text{ан}} \approx \beta_e \beta_i D_*$. Подставляя в этом случае выражение (7) в (9), оценим l_{\min} для скоростей $U_{\text{ио}}$ различной физической природы. Для этого будем использовать ионосферные данные работы [9], где представлена эмпирическая модель ионосферы для дневных условий летнего сезона в период низкой солнечной активности ($F_{10.7} \leq 100$). Поскольку зависимость l_{\min} от угла χ проста и хорошо видна из выражений (7)–(8), все результаты будут приведены для значения $\chi = 55^\circ$.

Оценки показывают, что в E области гравитационный дрейф ($U_{\text{ио}} \propto -g/\nu_{\text{ин}}$) несущественен, а благодаря горизонтальным движениям нейтрального газа со скоростями $U_{\text{нг}} \sim 50 \dots 100$ м/с на высотах $z \geq 110$ км могут возникать неоднородности с $l_{\min} \sim 30 \dots 50$ м (считалось, что в регулярном слое $E - L_0 \sim 10^4$ м). На масштабах спорадического слоя E в этих условиях возможна генерация неоднородностей с $l_{\min} \leq 10$ м, однако эта оценка может оказаться не совсем корректной из-за сильной неоднородности параметров.

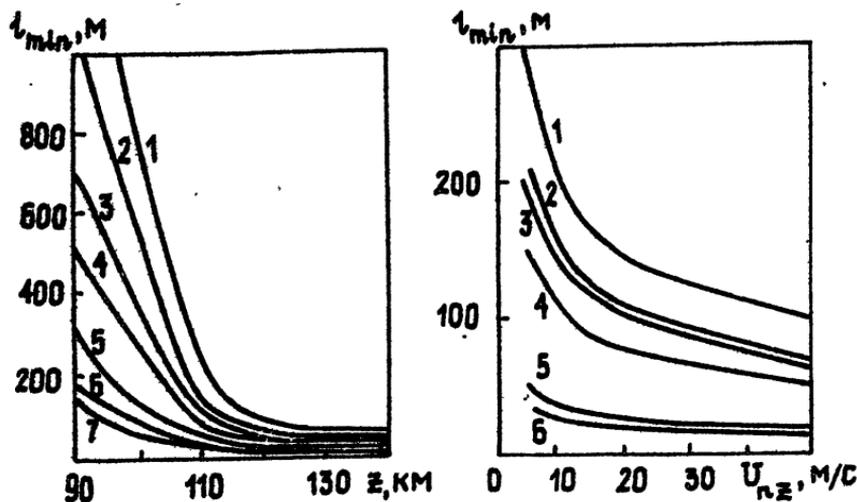


Рис.1, 2:

На рис.1 представлена зависимость l_{\min} от высоты для нескольких значений $U_{\text{нг}}$ и L_0 (кривые 1–3 построены для $L_0 = 10^4$ м для $U_{\text{нг}} = 50, 100, 200$ м/с соответственно. Аналогично кривые 2–4 — для $L_0 = 5000$ м и кривые 5–7 — для $L_0 = 300$ м). Меридианальная компонента $U_{\text{нз}}$ на $z \leq 130$ км дает меньший вклад из-за $\beta_i \geq 1$, а выше — несколько больший, чем $U_{\text{нг}}$. Вертикальные движения нейтрального газа на этих высотах будут существенны, если $U_{\text{нз}} \geq U_{\text{нг}} \sin \chi / \beta_i$. В этом случае $U_{\text{нз}} \sim 10 \dots 20$ м/с приводят к $l_{\min} \sim 70 \dots 100$ м в регулярном E слое и $l_{\min} \sim 10 \dots 20$ м в слое E_s . Отметим, что они всегда играют большую

роль на высотах $z \leq 100$ км, где очень велико β_i . Здесь $D_{\text{ан}} \simeq D_a$, и критерий (10) не имеет никакого значения, однако существование КН возможно в силу малости значения D_a . Это означает, что на этих высотах могут возникать неоднородности произвольной вытянутости с $l_{\text{min}} \sim 100 \dots 200$ м в регулярном слое E и $l_{\text{min}} \sim 20 \dots 40$ м в слое E_s при $U_{\text{нз}} \sim 10 \dots 20$ м/с. На рис.2 приведена зависимость l_{min} от $U_{\text{нз}}$ для высот 90, 100 км и нескольких значений L_0 (кривые 1, 3, 5 построены для $z = 100$ км для $L_0 = 10^4, 5000, 300$ м соответственно, кривые 2, 4, 6 — аналогично для $z = 90$ км).

Особый интерес представляет генерация неоднородностей из-за диффузионного расплывания слоя ($U_{i0z} \propto -D_a K_0$), поскольку, во-первых, этот механизм является постоянно действующим, и, во-вторых, это эффективный механизм нелинейного взаимодействия: расплывание неоднородностей более крупных масштабов приводит к генерации более мелко-масштабных неоднородностей. В E области $l_{\text{min}} = L_0 \sqrt{D_{\text{ан}}/D_a}$ и, следовательно, этот механизм работает только для сильновытянутых неоднородностей на $z \geq 110$ км, где $l_{\text{min}} = L_0 \sqrt{\beta_e \beta_i} \ll L_0$ (выполнение последнего неравенства необходимо для справедливости квазилокального подхода). На высоте 110 км — $l_{\text{min}} \simeq 0,1 L_0$, а на 130 км — $l_{\text{min}} \simeq 0,02 L_0$. Последнее означает, что в регулярной E области могут возникать неоднородности с $l_{\text{min}} \sim 200$ м, а в слое E_s — с $l_{\text{min}} \leq 10$ м.

В F области величина D_a очень велика и возникновение КН возможно только для сильновытянутых неоднородностей (10). Для упрощения формул опять воспользуемся более сильным неравенством $\cos^2 \theta \ll \beta_e^2$, тогда снова $D_{\text{ан}} = \beta_e \beta_i D_a$. В этом случае для диффузионного дрейфа имеем $l_{\text{min}} = (L_0 / \cos \chi) \sqrt{D_{\text{ан}}/D_a}$, и в силу малости фактора $\sqrt{\beta_e \beta_i}$; здесь возможна генерация мелко-масштабных неоднородностей. На высотах $z = 220 \dots 500$ км — $l_{\text{min}} \sim (100 \dots 4) \cdot 10^{-5} L_0$, что при $L_0 \sim 10^5$ м дает $l_{\text{min}} \sim 100 \dots 4$ м.

На высотах F слоя из-за малости величины β_i более существенными оказываются меридианальные движения нейтрального газа, которые при скоростях $U_{\text{нз}} \sim 50 \dots 100$ м/с приводят к образованию неоднородностей с $l_{\text{min}} \sim 10 \dots 80$ м. На рис.3 приведена зависимость l_{min} от z для нескольких значений $U_{\text{нз}}$ и L_0 (кривые 1-4 построены для $L_0 = 10^5$ м для $U_{\text{нз}} = 50, 100, 150, 200$ м/с; кривая 5 — для $L_0 = 4 \cdot 10^4$ м и $U_{\text{нз}} = 200$ м/с). Отметим также возможность образования достаточно мелко-масштабных неоднородностей $l_{\text{min}} \sim 20 \dots 600$ м за счет градиентного дрейфа.

Теперь вернемся к традиционной КН — $\gamma \propto \text{div} U_{i0} = -(dU_{i0z}/dz)$. Подставляя сюда для E области выражение (7) с учетом только горизонтальных движений нейтрального газа и полагая, что $U_{\text{нз}}$ и $U_{\text{ны}}$ зависят от высоты по синусоидальному закону: $U_{\text{нз},y} = U_{\text{н0},y} \sin(z \cdot 2\pi/\lambda)$, получаем, что в этом случае для несильно вытянутых вдоль \vec{H}_0 неоднородностей l_{min} совпадает с характерной толщиной E_s , полученной в теории ветрового сдвига [4, 7]. Таким образом КН описывает образование спорадического слоя E . Наличие в ионосфере более мелко-масштабной циркуляции нейтрального газа (турбулентных вихрей) соответственно приводит к образованию более мелко-масштабных неоднородностей, аналогично ра-

боте [10], где этот вопрос исследуется в нелокальном приближении.

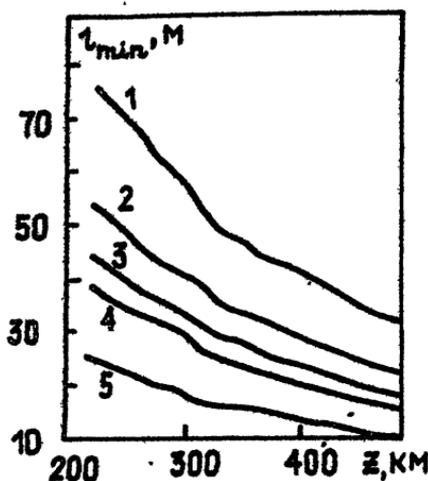


Рис.3:

Существенной оказывается здесь и зависимость от высоты частоты соударений ν_{in} , в отличие от ее учета непосредственно в исходных уравнениях (1), где она оказывается малозначительной [8]. Полагая $\nu_{in} = \nu_{in0} \exp(-z/H_a)$, где $H_a \approx V_{Ti}^2/g$ — высота однородной ионосферы, получим для E области:

$$\gamma \approx -\frac{dU_{i0z}}{dz} \approx \frac{D_a}{H_a} \left[\frac{1}{H_a(1+T_e/T_i)} + K_0 \right] + \frac{\sin \chi}{\beta_i H_a} (U_{ny} + 2U_{nz} \cos \chi / \beta_i),$$

для F области имеем:

$$\gamma \approx -\frac{dU_{i0z}}{dz} \approx \frac{D_a}{H_a} \cos^2 \chi \left[\frac{1}{H_a(1+T_e/T_i)} + K_0 \right] - \beta_i \frac{\sin \chi}{H_a} U_{ny}.$$

Поскольку в E слое $H_a \sim 5...20$ км и в F слое $H_a \sim 50...90$ км, т.е. H_a — одного порядка с L_0 , то все оценки и выводы, сделанные выше, будут справедливы и здесь. Отметим лишь, что для слабо вытянутых неоднородностей КН играет заметную роль при $k \sim K_0, H_a^{-1}$, что требует применения нелокального подхода, как это было сделано в [11] для гравитационного дрейфа. Там было показано, что на таких масштабах этот механизм эффективно нивелирует демпфирующее влияние диффузии.

Таким образом, резюмируя, можно сделать вывод, что КН является эффективным постоянно действующим механизмом генерации сильно вытянутых вдоль геомагнитного поля неоднородностей электронной концентрации, и во многих случаях превосходит возможности градиентно-дрейфовой и Рэлея-Тейлора неустойчивостей [3-5, 7, 8] в формировании мелкомасштабной структуры ионосферы на высотах E и F областей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершман Б.Н. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1963. Т.3. N 5. С.878.
2. Гершман Б.Н. О возможных механизмах возникновения ионосферных неоднородностей. — В кн.: Ветры, дрейфы и неоднородности в ионосфере, М., 1971.
3. Гельберг М.Г. Неоднородности высокоширотной ионосферы. — Новосибирск: Наука СО, 1986.
4. Гершман Б.Н. Динамика ионосферной плазмы. — М.: Наука, 1974.
5. Гершман Б.Н., Понятов А.А. — В кн.: Неустойчивости и волновые явления в системе ионосфера—термосфера. — Горький: ИПФ АН СССР, 1989. С.145.
6. Понятов А.А. О конвергентной неустойчивости в ионосфере. // Тезисы докл. VIII совещания—семинара по проблеме "Неоднородная структура ионосферы". Нижний Новгород, 1991. С.78.
7. Гершман Б.Н., Игнатъев Ю.А., Каменецкая Г.Х. Механизмы образования ионосферного спорадического слоя *E* на различных широтах. — М.: Наука, 1976.
8. Гершман Б.Н., Казимировский Э.С., Кокоуров В.Д., Чернобровкина Н.А. Явление *F* — *spread* в ионосфере. — М.: Наука, 1984.
9. Фаткуллин М.Н., Козлов В.К., Рудина М.П., Гордиенко Г.И., Докучаева А.В. // Ионосферные исследования. — М.: Сов.радио, 1978. Т.25. С.16.
10. Игнатъев Ю.А. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1978. Т.18. N 4. С.731.
11. Гершман Б.Н., Жмур Л.Е. // Изв.вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. N 11. С.1572.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
13 марта 1992 г.

THE CONVERGENT INSTABILITY IN THE IONOSPHERE

A.A. Ponyatov

The linear theory of the ionospheric plasma convergent instability (CI) connected with the inhomogeneous character of plasma motions is considered. The analysis is made of conditions of the CI rise in *E* and *F* regions of the ionosphere for vertical ion motions of the different physical nature. The possibility of the generation of small-scale strongly geomagnetic field-aligned irregularities of a electron density is shown ($l_{\min} \sim 10...30$ m). It is pointed out at the essential role of a height dependance of collisional frequencies in CI.

УДК.621.371.334:537.874.6.72

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ ИСКАЖЕНИЯ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЕМ ПЭВ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ ПАДЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА МЕТАЛЛИЧЕСКУЮ РЕШЕТКУ

А.Н.Долгина, А.А.Ковалев, П.С.Кондратенко

Рассмотрено зеркальное отражение при скользющем падении пучка импульсного лазерного излучения на решетку синусоидального профиля в условиях возбуждения ПЭВ в порядке дифракции с номером $l = -1$. Показано, что переизлучение энергии ПЭВ в зеркальном направлении и процесс диффузионного распытия пучка в определенных условиях могут существенным образом влиять на форму отраженного сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], возбуждение поверхностных электромагнитных волн (ПЭВ) при взаимодействии излучения с металлами может приводить к целому ряду интересных физических явлений. Одним из них является эффект полного подавления металлического отражения, который реализуется на решетках с некоторой оптимальной глубиной профиля при резонансном возбуждении ПЭВ плоской монохроматической волной [2, 3]. В работах [4, 5] была исследована ситуация, когда возбуждение ПЭВ на металлических решетках осуществляется пучками импульсного лазерного излучения при ширине пучка и длительности импульса сравнимых, соответственно, с длиной свободного пробега и временем жизни ПЭВ. В этом случае полного подавления зеркального отражения не происходит. Вместо него, однако, возникают сильные искажения пространственной и временной форм отраженного сигнала. Рассмотрение, проведенное в [4, 5], относится к случаям, когда угол падения излучения Y удовлетворяет условию $\cos Y \sim 1$.

Настоящая работа посвящена исследованию ситуации, которая имеет место при скользющем падении излучения ($\cos Y \ll 1$) на металлическую решетку. В этом случае возбуждение ПЭВ плоской монохроматической волной имеет свою специфику [6], которая проявляется в значительном изменении характерных параметров резонанса по сравнению со случаем $\cos Y \sim 1$. Ниже показано, что, когда возбуждение ПЭВ осуществляется пучками импульсного лазерного излучения, это количественное отличие приводит к качественно новым результатам.

Вычисления проведены для узконаправленных пучков в предположении малости длины волны λ по сравнению с поперечным размером пучка падающего излучения R , т.е.

$$\frac{\lambda}{R} \ll 1. \quad (1)$$

Предварительное сообщение о результатах данной работы было сделано в [7].

1. ПОЛУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Для простоты будем рассматривать ситуацию, когда падающее излучение имеет p -поляризацию, вектор обратной решетки \vec{g} лежит в плоскости падения, а решетка имеет синусоидальный профиль. Введем обозначения для несущей частоты ω_0 и соответствующего ей волнового вектора $k_0 = \omega_0/c$, c — скорость света в вакууме. Для решения задачи падающее поле и зеркально отраженное представим в виде Фурье-разложения по волновым векторам \vec{k} и частотам ω . Амплитуды напряженности электрического поля парциальных волн, падающей $\vec{E}_0(\vec{k}, \omega)$ и соответствующей ей зеркально отраженной $\vec{E}'(\vec{k}', \omega)$, при резонансном возбуждении ПЭВ в порядке дифракции с номером $l = -1$ связаны соотношением [6]

$$\vec{E}'(\vec{k}', \omega) = F(\vec{k}, \omega) E_0(\vec{k}, \omega), \quad (2)$$

где

$$F(\vec{k}, \omega) = \frac{W - \zeta}{W + \zeta} - \frac{2W}{(W + \zeta)^2} \frac{\epsilon^2}{(W_{-1} + \zeta + \frac{\epsilon^2}{W + \zeta})}, \quad (3)$$

$$W = W(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{k} \sqrt{k^2 - (\vec{k} - \vec{n}(\vec{n}\vec{k}))^2}, W_{-1}(\vec{k}, \omega) = W(\vec{k} - \vec{g}, \omega), \quad (4)$$

$k = |\vec{k}| = |\vec{k}'| = \omega/c$, $\vec{k}' = \vec{k} - 2\vec{n}(\vec{n}\vec{k})$, \vec{n} — нормаль к невозмущенной поверхности металла, направленная вглубь его, $\zeta = \zeta' - i\zeta''$ — поверхностный импеданс, $\epsilon = bg/2$, b — амплитуда профиля решетки, $g = |\vec{g}| \approx 2k_0$.

Пространственно-временная структура зеркально отраженного поля существенно зависит от соотношения между углом скольжения $\alpha = \pi/2 - \gamma$ и углом дифракционной расходимости $\alpha_d = 1/k_0 R$. Рассмотрим два предельных случая $\alpha \gg \alpha_d$ и $\alpha \ll \alpha_d$.

Выполнение неравенства $\alpha \gg \alpha_d$ соответствует геометрической ситуации, когда дифракционная расходимость практически не проявляет себя в процессе отражения излучения. В этом случае можно пользоваться понятием пятна облучения, площадь которого соответствует пересечению лазерного пучка с поверхностью металла. Неравенство $\alpha_d \ll \alpha$ гарантирует, что на длине пятна дифракционная расходимость незначительна. Функциональная зависимость поля отраженного излучения от координат и времени получается из формулы (2) путем обратного преобразования Фурье. В качестве переменных интегрирования при этом удобно взять $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ и компоненты двумерного вектора $\vec{\alpha}$, отвечающего проекции волнового вектора \vec{k} на плоскость поперечного сечения падающего пучка. Учитывая, что $|\vec{\alpha}| \leq 1/R$, при вычислении поля отраженного излучения E' на расстоянии u по ходу луча от контрольного поперечного сечения падающего пучка, удовлетворяющего неравенству

$$u \ll k_0 R^2 \quad (5)$$

с точностью до поправок $\sim \alpha_d/\alpha \ll 1$ при подстановке (4) в (3) следует пренебречь линейным по $\vec{\alpha}$ вкладом под знаком корня и квадратичным в W_{-1} . Вычисления дают

$$E'(\vec{v}, u, t) = e^{i(k_0 u - \omega_0 t)} \left\{ \frac{\alpha - \zeta}{\alpha + \zeta} E_0\left(\vec{v} - 2\vec{n}(\vec{n}\vec{v}), 0, t - \frac{u}{c}\right) + \epsilon\left(\vec{v}, t - \frac{u}{c}\right) \right\}, \quad (6)$$

где

$$\varepsilon(\vec{v}, t) = -\frac{2\alpha\varepsilon^2}{(\alpha + \zeta)^2} \int_0^\infty ds e^{is\Delta} f(s, \bar{\zeta}) E_0\left(\vec{v} - 2\bar{n}(\bar{n}\vec{v}) + 2\bar{n}\frac{\alpha s}{k_0}, 0; t - \frac{4s}{\omega_0}\right), \quad (7)$$

$\Delta = W_{-1}^2(\vec{k}_0, \omega_0)$, \vec{v} - двумерный радиус-вектор в поперечном сечении пучка, отсчитанный от его оси, $E_0(\vec{v}, 0; t)$ - распределение поля в контрольном сечении падающего пучка при $u = 0$. Функция $\varepsilon(\vec{v}, t)$ соответствует электрическому полю, переизлученному ПЭВ в зеркальном направлении. Функция $f(s, \zeta)$, определенная соотношениями

$$f(s, \bar{\zeta}) = i\bar{\zeta} \left[e^{p^2} \operatorname{erfc}(p) - \frac{1}{\sqrt{\pi p}} \right], \quad (8)$$

$$\bar{\zeta}^2 = \zeta + \frac{\varepsilon^2}{\alpha + \zeta}, \quad p = e^{-i\frac{\pi}{4}} \bar{\zeta} \sqrt{s}, \quad \operatorname{erfc}(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_p^\infty dp_1 e^{-p_1^2},$$

имеет следующие предельные выражения

$$f(s, \zeta) \approx \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi s}}, \quad s|\zeta|^2 \ll 1,$$

$$f(s, \zeta) \approx 2i\bar{\zeta} e^{i\zeta^2 s} \Theta\left(-\operatorname{Im}(\bar{\zeta} e^{i\frac{\pi}{4}})\right) + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi \zeta^2 s^{3/2}}}, \quad (9)$$

$$s|\zeta| \gg 1, \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Отметим, что при значениях продольной координаты пучка u , удовлетворяющих вместо (5) неравенству $u > k_0 R^2$, отраженное поле с учетом диффузионного расплывания выражается через (6) по законам квазиоптики.

Рассмотрим теперь обратный предельный случай, когда угол скольжения много меньше угла дифракционной расходимости, $\alpha \ll \alpha_d$. Вследствие значительности эффектов диффузионного расплывания пучка понятие лазерного пятна на поверхности металла отсутствует. По этой причине отраженное и падающее излучение на далеких расстояниях от источника не разделяются в пространстве и, распространяясь вдоль металлической поверхности, интерферируют друг с другом.

При проведении обратного преобразования Фурье соотношения (2) в выражениях для W и W_{-1} следует пренебречь вкладом, пропорциональными α , и в W_{-1} под знаком корня учесть квадратичные вектору $\vec{\alpha}$ слагаемые. При выполнении условия $k_0 u |\zeta|^2 \gg 1$ интегрирование по $\vec{\alpha}$ выполняется методом стационарной фазы. Объединяя результат с полем падающего излучения, связанным с распределением поля в контрольном сечении при $u = 0$ в квазиоптическом приближении, получаем выражение для полного поля $E(\vec{v}, u; t) = E_0(\vec{v}, u; t) + E'(\vec{v}, u; t)$ излучения, распространяющегося вдоль поверхности металла синусоидального профиля

$$\begin{aligned}
 E(\vec{v}, u; t) = & \frac{k_0}{2\pi i u} e^{i(k_0 u - \omega_0 t)} \int d\vec{v}' \left\{ \left[e^{\frac{i k_0}{2u} (\vec{v} - \vec{v}')^2} + \frac{\alpha_1 - \zeta}{\alpha_1 + \zeta} e^{\frac{i k_0}{2u} (\vec{v} - \vec{v}' + 2\vec{n}(\vec{n}\vec{v}))^2} \right] \times \right. \\
 & \times E_0\left(\vec{v}', 0; t - \frac{u}{c}\right) - 2\epsilon^2 \int_0^\infty ds \frac{\alpha_2}{(\alpha_2 + \zeta)^2} \frac{u}{\sqrt{u_1 u_2}} e^{i\left[\frac{k_0}{2u_1} (v - v')^2 + \frac{k_0}{2u_2} (s + s')^2 + s\Delta\right]} \times \\
 & \left. \times f(s, \bar{\zeta}) E_0\left(\vec{v}', 0; t - \frac{u_1}{c}\right) \right\}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\alpha_1 = -\frac{z + z'}{u_1}; \quad \alpha_2 = -\frac{z + z'}{u_2}; \quad u_1 = u + \frac{4s}{k_0}; \quad u_2 = u + \frac{2s}{k_0}; \quad \bar{\zeta} = \zeta + \frac{\epsilon^2}{\alpha_2 + \zeta};$$

u — как и ранее, координата, отсчитывающая расстояние до контрольного сечения падающего пучка ($u = 0$), причем теперь она соответствует оси, совпадающей с пересечением плоскости падения и усредненной плоской поверхности раздела; $\vec{v} = \{y, z\}$, ось z направлена вдоль вектора нормали \vec{n} , а y — перпендикулярно осям z и u .

С целью выяснения вопроса о поглощении излучения при скользящем падении полезно иметь выражение для мощности излучения

$$\begin{aligned}
 I(u, t) = & \frac{c}{8\pi} \int d\vec{v} |E(\vec{v}, u; t)|^2. \\
 & (\vec{n}\vec{v}) < 0
 \end{aligned}$$

В результате подстановок в это соотношение формул (6) и (10) при выполнении дополнительного условия $\tan(\alpha, \alpha_d) \ll |\zeta|$ получаем

$$\begin{aligned}
 I(u, t) = & I_0\left(t - \frac{u}{c}\right) + \frac{c}{8\pi} \int d\vec{v} \operatorname{Re} \left[\epsilon^* \left(\vec{v}, t - \frac{u}{c}\right) \times \right. \\
 & \left. \times \left(\epsilon \left(\vec{v}, t - \frac{u}{c}\right) - 2E_0\left(\vec{v} - 2\vec{n}(\vec{n}\vec{v}), 0; t - \frac{u}{c}\right) \right) \right], \quad \alpha \gg \alpha_d; \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I(u, t) = & I_0\left(t - \frac{u}{c}\right) + \frac{c}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^0 dz_1 \left\{ \frac{\sin \left[\frac{k_0(z_1^2 - z^2)}{2u} \right]}{z + z_1} \times \right. \\
 & \times R_0 \left[E_0\left(\vec{v}, 0; t - \frac{u}{c}\right) E_0^*\left(\vec{v}_1, 0; t - \frac{u}{c}\right) \right] + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\bar{\epsilon} \left(\vec{v}, t - \frac{u}{c}\right) e^{\frac{i k_0}{2u} (z^2 - z_1^2)} \times \right. \\
 & \left. \left. \times \left(\frac{1}{z - z_1 - i\delta} \bar{\epsilon}^* \left(\vec{v}_1, t - \frac{u}{c}\right) - \frac{4z_1}{z^2 - z_1^2 - i\delta} E_0^* \left(\vec{v}_1, 0; t - \frac{u}{c}\right) \right) \right] \right\}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\delta \rightarrow +0, \quad \alpha \ll \alpha_d, \quad k_0 u \zeta^2 \bar{\zeta}^2 \gg 1.$$

Здесь $I_0(t) = (c/8\pi) \int d\vec{v} |E_0(\vec{v}, 0; t)|^2$ — поток энергии падающего излучения при $u = 0$; $\vec{v} = \{y, z\}$, $\vec{v}_1 = \{y_1, z_1\}$;

$$\bar{\epsilon}(\vec{v}, t) = \frac{2i\epsilon^2}{\zeta^2} \frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty ds e^{is\Delta} f(s, \zeta) E_0\left(\vec{v}, 0; t - \frac{4s}{\omega_0}\right) \quad (13)$$

— величина, представляющая меру поля, переизлученного ПЭВ в зеркальном направлении.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проанализируем полученные выше зависимости. В случае $\alpha \gg \alpha_d$ физическая картина протекающих процессов аналогична рассмотренной в работах [4, 5]. Как следует из (6)–(9), когда длительность лазерного импульса t_n меньше характерного времени жизни ПЭВ $T \sim (\omega_0 \zeta' \zeta'')^{-1}$, или размер пятна облучения R/α меньше величины cT , имеют место временные и пространственные искажения отраженного сигнала. Так при $t_n \ll T$ в зеркально отраженной волне после окончания действия лазерного импульса должен наблюдаться сигнал длительностью $\sim T$, обусловленный радиационным распадом ПЭВ. Когда $R/\alpha \ll cT$ отраженный пучок уширяется в направлении распространения ПЭВ на величину $\sim \alpha cT$. Как видно отсюда, по сравнению со случаем углов $\alpha \sim 1$, пространственное уширение при скользющем падении ослаблено множителем $\alpha \ll 1$. Напротив, временные зависимости в обоих случаях ($\alpha \ll 1$ и $\alpha \sim 1$) качественно не отличаются.

Ситуация $\zeta' \geq \zeta''$ является специфической для скользящего падения. Как следует из (9), известный экспоненциальный закон радиационного затухания ПЭВ здесь не реализуется, а имеют место степенные зависимости от времени, которые обусловлены возбуждением скользящих волн, рассеянных назад в порядке дифракции с $l = -1$. При этом по сравнению со случаем $\alpha \sim 1$ эффективное время жизни возрастает в ζ''/ζ' раз, что для металлов в оптическом диапазоне может составлять $\sim 10 \div 10^2$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\alpha \ll \alpha_d$. Из (10) следует, что в этом случае пространственно-временная зависимость отраженного поля имеет достаточно сложный вид. Происходит наложение двух эффектов — нелокального взаимодействия, обусловленного возбуждением ПЭВ, и диффузии поля вследствие сильного влияния процесса дифракции.

Введем координату центра пучка $z = -d$ при $u = 0$ ($d > R$). Положим, что выполняется неравенство

$$u \ll k_0 R d. \quad (14)$$

Тогда для поля и потока излучения из (10), (12) следует

$$E(\vec{v}, u; t) = E_0(\vec{v}, u; t), \quad I(u, t) = I_0 \left(t - \frac{u}{c} \right),$$

что естественно, так как при u , удовлетворяющих условию (14), дифракционная расходимость не способна еще обеспечить касание пучком поверхности образца и вызвать отраженную волну.

В случае больших значений u , когда выполняется неравенство

$$u \gg k_0 R d, \quad (15)$$

из (12) для потока энергии получаем

$$I(u, t) = I_0 \left(t - \frac{u}{c} \right) + \frac{c}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^0 dz_1 \operatorname{Im} \left\{ \tilde{\varepsilon} \left(\vec{v}, t - \frac{u}{c} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{z - z_1 - i\delta} \tilde{\varepsilon}^* \left(\vec{v}_1, t - \frac{u}{c} \right) - \frac{4z_1}{z^2 - z_1^2 - i\delta} E_0^* \left(\vec{v}_1, 0; t - \frac{u}{c} \right) \right] \right\}, \delta \rightarrow +0. (16)$$

Второй член в правой части выражения (16), также как и второе слагаемое в формуле (11) для случая $\alpha \gg \alpha_d$, характеризует потери энергии при распространении излучения вдоль поверхности. Эти потери обусловлены двумя причинами — поглощением излучения металлов и рассеянием части излучения под малыми углами скольжения назад в порядке дифракции с $l = -1$. При удалении от поверхности, согласно (10), отраженное поле убывает при $|z| > \min(u/k_0 R, u/|\zeta|)$. Когда $k_0 R |\zeta| \ll 1$ убывание поля происходит по степенному закону $\sim |z|^{-1}$.

Следует отметить, что, несмотря на отсутствие понятия лазерного пятна, взаимодействие пучка с решеткой и, соответственно, его ослабление в диффузионном пределе ($\alpha_d \gg \alpha$) происходит на конечной площади, линейный размер которой вдоль направления распространения, как следует из (10), (12), соответствует $\sim \max(R/\alpha_d, cT)$.

Представляет интерес так же рассмотреть для случая $\alpha_d \gg \alpha$ влияние длительности лазерного импульса на сигнал отраженного излучения. При $t_n \gg T$ и условии $\Delta = -(\zeta'')^2$ из (13) имеем

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{v}, t) \sim \left(\frac{\varepsilon}{\zeta} \right)^2 \frac{\alpha_d}{\zeta'} E_0(\vec{v}, 0; t).$$

В такой ситуации за время действия импульса излучения успевает установиться квазистационарное состояние ПЭВ, и их радиационный распад дает максимальный вклад в зеркально отраженную волну. При этом по сравнению с плоской поверхностью возможно значительное увеличение поглощения лазерного излучения. При малых временах длительности импульса $t_n \ll T$ возбуждение ПЭВ имеет существенно нестационарный характер. В этом случае можно воспользоваться асимптотиками (9) для функции $f(s, \zeta)$. Из них следует, что после окончания действия импульса должно иметь место послесвечение, обусловленное переизлучением энергии, запасенной в ПЭВ.

Авторы благодарят Б.Н.Левинского за полезные обсуждения вопросов, затронутых в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поверхностные поляритоны / Под ред. Аграновича В.М., Милсса Д.Л. — М.: Наука, 1985.
2. Maestre D., Petit R. // Opt. Commun. 1976. V.17. N 2. P.196.
3. Гандельман Г.М., Кондратенко П.С. // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т.38. Вып.5. С.246.
4. Долгина А.Н., Ковалев А.А., Кондратенко П.С. // Письма в ЖТФ.

1988. Т.14. Вып.15. С.1371.

5. Долгина А.Н., Ковалев А.А., Кондратенко П.С., Финкельберг В.М. // ЖТФ. 1990. Т.60. N 6. С.73.
6. Ковалев А.А., Кондратенко П.С., Левинский Б.Н. // Изв.вузов. Радиофизика. 1989. Т.32. N 7. С.915.
7. Долгина А.Н., Ковалев А.А., Кондратенко П.С., Левинский Б.Н. // Тезисы докладов УШ Всесоюзной конференции по взаимодействию оптического излучения с веществом. — Л.: ГОИ, 1990. Т.2. С.150.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт оптико-физических
измерений

Поступила в редакцию
16 марта 1992 г.

**SPATIAL AND TIME DISTORTION OF REFLECTED BEAMS CAUSED
BY SEW GENERATION ON METAL GRATING FOR THE CASE
OF GRAZING INCIDENCE OF RADIATION**

A.N.Dolgina, A.A.Kovalev, P.S.Kondratenko

The grazing incidence of laser beams on a periodic grating and specular reflected wave under the conditions of excitation of the surface electromagnetic wave (SEW) with diffraction order $l = -1$ are considered. It's shown that reemission of the SEW's power in the specular direction and process of the beam diffusion blurring can substantially influence the shape of reflected beam.

УЧЕТ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ИНЕРЦИОННЫХ ЦЕПЕЙ

Н.В.Демин, А.В.Якимов

Развит метод анализа линейных инерционных цепей, испытывающих флуктуации параметров в широком (вплоть до несущей частоты сигнала) диапазоне частот отстройки. В качестве иллюстрации определены флуктуации частоты автоколебаний, вызванные возмущениями реактивных параметров в LC-генераторе и емкостной трехточке.

Одна из проблем, связанных с созданием прецизионных генераторов, заключается в разработке методов расчетов спектров амплитудно-фазовых флуктуаций сигналов в широком диапазоне частот отстройки от несущей. В [1] данная задача решена для учета аддитивных шумов и флуктуаций параметров безынерционных нелинейных элементов. В настоящей работе предлагается развитие подходов, изложенных в [1], для анализа инерционных линейных цепей, параметры которых подвержены флуктуациям.

1. Идею метода можно пояснить простым примером. Рассмотрим преобразование тока $i(t)$ емкостью $C(t) = (1 + \delta C(t))C_0$, имеющей невозмущенное значение C_0 и относительные флуктуации $\delta C(t)$. Представим ток в форме аналитического сигнала [2]:

$$i(t) = (1 + \delta I) \dot{I}_0 \exp(j\omega_0 t). \quad (1)$$

Здесь \dot{I}_0 — комплексная невозмущенная амплитуда сигнала; $\delta \dot{I}(t) = m_i(t) + j\varphi_i(t)$ — относительные флуктуации комплексной амплитуды, $m_i(t)$ — относительные флуктуации амплитуды, $\varphi_i(t)$ — флуктуации фазы, ω_0 — частота сигнала.

Для упрощения анализа допустим финитность спектра возмущений емкости, одновременно предполагая их малость (ограничив, в случае необходимости, рассматриваемый интервал времени):

$$(\delta C^2)_F = 0 \text{ при } 2F > f_0 = \omega_0/2\pi; \quad \overline{\delta C^2} \ll 1. \quad (2)$$

Аналогичное требование накладывается и на амплитудно-фазовые флуктуации, что позволяет исключить из рассмотрения эффекты второго порядка малости.

Отметим, что хотя конденсатор считается инерционным элементом, однако связь между приложенным к нему напряжением и накопленным зарядом является безынерционной. Поэтому интегральное соотношение для тока и напряжения при возмущенной емкости имеет следующий вид:

$$v(t) = \frac{1}{C(t)} \int i(t) dt. \quad (3)$$

Преобразовав это уравнение по Фурье, можно получить следующее соотношение для относительных комплексных флуктуаций амплитуд тока и напряжения:

$$\dot{V}_0 \delta \dot{V}(\Omega) = \dot{Z}_c(\omega_0 + \Omega) \dot{I}_0 \delta \dot{I}(\Omega) - \dot{V}_0 \delta C(\Omega). \quad (4)$$

Здесь $\Omega = \omega - \omega_0$ — частота отстройки от несущей, $\dot{Z}_c = (j\omega C_0)^{-1}$ — импеданс невозмущенной емкости, \dot{V}_0 и $\delta \dot{V}(\Omega)$ — невозмущенное значение и Фурье-образ относительных флуктуаций комплексной амплитуды напряжения $v(t)$.

Уравнение (4) позволяет отметить следующее. Малость флуктуаций позволила описать мультипликативные возмущения реактивности аддитивным шумовым источником напряжения. Его амплитуда представлена последним слагаемым в правой части (4): $\dot{V}_0 \delta C(\Omega)$. Вывод соотношения (4) не требовал предположения о квазистатическом характере флуктуаций емкости. Ограничения на спектр относительных флуктуаций связаны исключительно с принятым упрощением (2).

Уравнение (4) можно привести к иной форме:

$$\dot{I}_0 \delta \dot{I}(\Omega) = \dot{G}_c(\omega_0 + \Omega) \dot{V}_0 \delta \dot{V}(\Omega) + \dot{I}_{ш}(\Omega), \quad (5)$$

где $\dot{G}_c = j\omega C_0$ — проводимость невозмущенной емкости. В данном случае возмущения емкости описываются источником шумового тока, амплитуда которого связана с введенной ранее амплитудой источника шумового напряжения простым соотношением:

$$\dot{I}_{ш}(\Omega) = \dot{G}_c(\omega_0 + \Omega) \dot{V}_{ш}(\Omega). \quad (6)$$

Определив аналогичные (3) соотношения при возмущениях индуктивности $L(t) = (1 + \delta L(t))L_0$ и сопротивления $R = (1 + \delta R(t))R_0$, можно сформулировать общий алгоритм учета широкополосных флуктуаций параметров линейных цепей. Отметим, что условия (2) остаются справедливыми и в общем случае.

2. Процедура учета флуктуаций параметров инерционной цепи, преобразующей квазигармонический сигнал, заключается в следующем. Элемент, испытывающий флуктуации параметра, заменяется эквивалентной схемой, состоящей из невозмущенного элемента и последовательно включенного источника шумового напряжения:

$$\dot{v}_{ш}(t) = \dot{V}_{ш}^{(\lambda)}(t) \exp(j\omega_0 t), \quad \lambda = C, L, R$$

или невозмущенного элемента и включенного параллельно ему источника тока:

$$\dot{i}_{ш}(t) = \dot{I}_{ш}^{(\lambda)}(t) \exp(j\omega_0 t).$$

Фурье-образы амплитуд источников шумового напряжения есть:

$$\dot{V}_{ш}^{(C)}(\Omega) = -\dot{V}_0 \delta C(\Omega), \quad \dot{V}_{ш}^{(L)}(\Omega) = \dot{V}_0 \delta L(\Omega), \quad \dot{V}_{ш}^{(R)}(\Omega) = \dot{V}_0 \delta R(\Omega)$$

— для емкости, индуктивности и сопротивления, соответственно; \dot{V}_0 — комплексная невозмущенная амплитуда напряжения на элементе.

Амплитуда шумового источника тока выражается через амплитуду шумового напряжения соотношением, аналогичным (6):

$$\dot{i}_{ш}^{(\lambda)}(\Omega) = \dot{G}_{\lambda}(\omega_0 + \Omega) \dot{V}_{ш}^{(\lambda)}(\Omega), \quad (7)$$

где $\dot{G}_{\lambda}(\omega)$ — комплексная проводимость невозмущенного элемента.

Дальнейший анализ проводится в соответствии с методом расчета линейных цепей, основанным на уравнениях Кирхгофа.

3. Рассмотрим в качестве иллюстрации эквивалентную схему цепи обратной связи LC-генератора, изображенную на рис.1.

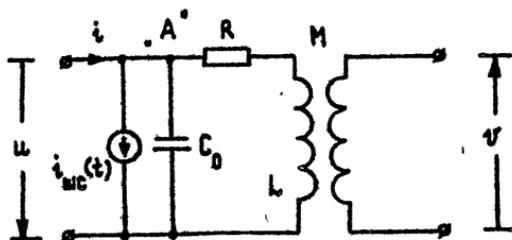


Рис. 1:

Источник шумового тока учитывает возмущения емкости контура $C(t) = (1 + \delta C(t))C_0$. В Фурье-представлении амплитуда шумового тока $\dot{i}_{шс}(t) = \dot{I}_{шс}(t) \exp(j\omega_0 t)$ есть $\dot{I}_{шс}(\Omega) = -j(\omega_0 + \Omega) \dot{U}_0 C_0 \delta C(\Omega)$, где через \dot{U}_0 обозначена невозмущенная комплексная амплитуда напряжения на невозмущенной емкости. Составив уравнения Кирхгофа для ветвей колебательного контура и для токов в узле "А" (рис.1), получим флуктуационное уравнение цепи обратной связи:

$$\dot{I}_0 \delta \dot{I}(\Omega) = \dot{G}_{\tau}(\omega_0 + \Omega) \dot{V}_0 \delta \dot{V}(\Omega) + \dot{I}_{шс}(\Omega), \quad (8)$$

где $\delta \dot{I}(\Omega)$ и $\delta \dot{V}(\Omega)$, \dot{I}_0 и \dot{V}_0 — относительные флуктуации и невозмущенные значения комплексных амплитуд первых гармоник выходного тока $\dot{i}(t)$ усилителя и напряжения обратной связи $v(t)$;

$$\dot{G}_{\tau}(\omega) = \left(1 + jQ(\omega/\omega_1 - \omega_1/\omega) \right) / R_{оо} n_{\tau}$$

— комплексная проводимость цепи обратной связи генератора; ω_1 , $R_{оо}$ и Q — резонансная частота и сопротивление, добротность колебательного контура, $n_{\tau} = M/L$ — коэффициент трансформации.

Преобразование напряжения обратной связи в ток безынерционным усилителем не изменяет фазовых флуктуаций, а относительные флуктуации амплитуды преобразуются с весом, равным нормированной локальной крутизне по первой гармонике γ_1 :

$$\varphi_i = \varphi_v; \quad m_i = \gamma_1 m_v. \quad (9)$$

Из уравнения (8), используя метод [1] и учитывая соотношения (9), определим амплитудно-частотные флуктуации, обусловленные возмущениями емкости колебательного контура:

$$\begin{aligned} m_v(\Omega) &= \dot{T}_{mc}(\Omega) \delta C(\Omega), \\ \nu_v(\Omega) &= j\Omega \varphi_v(\Omega) = \dot{T}_{vc}(\Omega) \delta C(\Omega). \end{aligned}$$

Коэффициенты передачи возмущений емкости в амплитудно-частотные флуктуации напряжения обратной связи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{mc} &= -\frac{2 + jQx(3 - x^2)}{(1 - \gamma_1)(2 - x^2) + jQx(4 - x^2)}, \\ \dot{T}_{vc} &= -\omega_0 \frac{(1 - \gamma_1)(1 - x^2) + x(3 - x^2) + j2Qx}{(1 - \gamma_1)(2 - x^2) + jQx(4 - x^2)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$x = \Omega/\omega_0$ — нормированное значение частоты анализа. Выражения (10) справедливы вплоть до частот отстройки $|x| \leq 1/2$. В квазистатическом приближении ($|x| \ll 1$) соотношения (10) приводят к известному результату:

$$\nu_v^{kb}(\Omega) = -\frac{\omega_0}{2} \delta C(\Omega); \quad m_v^{kb}(\Omega) = -\frac{1}{1 - \gamma_1} \delta C(\Omega). \quad (11)$$

Как следует из выражений (11), возмущения емкости проявляются в частотных флуктуациях значительно сильнее, чем в возмущениях амплитуды. Коэффициенты \dot{T}_{mc} и \dot{T}_{vc} (10), в отличие от своих квазистатических значений, учитывают эффекты кросс-преобразования, характеризуемые мнимыми частями данных коэффициентов. Поскольку в LC-генераторе эффекты кросс-преобразования играют незначительную роль, то и отличие коэффициентов передачи на больших отстройках от своих квазистатических значений невелико.

Однако, в автогенераторах, для которых кросс-преобразования могут вносить более ощутимый вклад, чем в LC-контуре, можно ожидать большего изменения коэффициентов передачи при увеличении частоты отстройки.

4. Перейдем к анализу емкостной трехточки, эквивалентная схема которой, учитывающая возмущения емкости $C_2(t)$, приведена на рис.2.

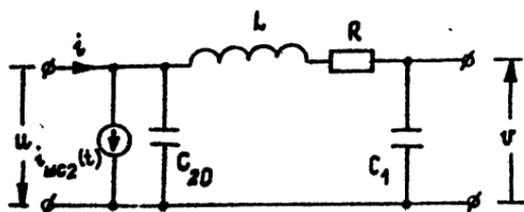


Рис. 2:

Проведя анализ, аналогичный случаю LC-генератора, найдем коэффициенты преобразования в амплитудно-частотные флуктуации напряжения обратной связи:

$$\dot{T}_{mc2} = [-2Q(n-1) + Q(2-n)x^2 + jx(Q^2n-1-Q^2nx^2)]/\Delta, \quad (12)$$

$$\dot{T}_{vc2} = \omega_0[(\gamma_1-1)nQ + (1+n-x^2)Qx^2 + jx(2nQ^2(x^2-1)-1-\gamma_1+x^2)]/\Delta,$$

$$\Delta = [(1-\gamma_1)(2+x^2) - 2x^2(4-x^2)]Q + jx[Q^2(4-x^2)(1-x^2) + 3 + \gamma_1 - x^2],$$

$$n = C_1/(C_1 + C_2).$$

В квазистатическом приближении соотношения (12) дают:

$$\dot{T}_{mc2}^{кв} = -\frac{1-n}{1-\gamma_1}; \quad \dot{T}_{vc2}^{кв} = -\frac{n\omega_0}{2}. \quad (13)$$

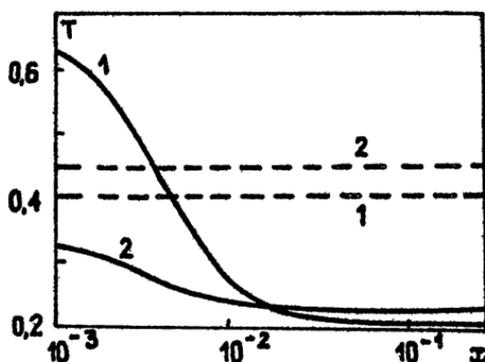


Рис. 3:

На рис.3 приведены зависимости модулей коэффициентов передачи (12) от нормированной частоты анализа: сплошные линии — для амплитудных флуктуаций; штриховые — для частотных, нормированные на величину $\omega_0/2$. Использованы следующие значения параметров: $Q = 50$, $\gamma_1 = 0,7$; $n = 0,8$ (кривые 1) и $n = 0,9$ (кривые 2). Заметим, что чем больше отличие емкости C_2 от емкости последовательного соединения емкостей C_1 и C_2 , определяющей частоту генерации, тем существеннее отличие значений коэффициентов пересчета флуктуаций емкости от квазистатических.

Б. В заключение отметим, что использование аналитического сигнала позволило описать не только медленные, квазистатические возмущения, но и быстрые, сравнимые с частотой генерации, флуктуации параметров линейных инерционных цепей. Алгоритмы, описанные в работе, реализованы на ЭВМ, что дало возможность анализировать сложные генераторные системы в широком диапазоне частот отстройки.

Авторы благодарны В.Н.Кулешову за полезные замечания по существу проблемы, исследуемой в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якимов А.В. // Радиотехника и электроника. 1985. Т.3. N 12. С.2361.
2. Вайштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. — М.: Наука, 1983.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
13 апреля 1992 г.

**DESCRIPTION OF BROADBAND FLUCTUATIONS IN PARAMETERS
OF LINEAR INERTIAL CIRCUITS**

N. V. Demin, A. V. Yakimov

The description of broadband (up to carrier signal frequency) parameters' fluctuations is developed here for linear inertial circuits in oscillators. Frequency fluctuations caused by disturbances in reactive parameters of LC and tapped condenser oscillators are considered as an example.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.371.33

РАССЕЯНИЕ МИЛЛИМЕТРОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
В "ЧИСТОЙ" АТМОСФЕРЕ*Ю.В.Быков, Ю.А.Дрягин, Л.М.Кукин, М.Д.Токман*

Экспериментально обнаружено обратное рассеяние микроволн в визуально чистой атмосфере при помощи аппаратного комплекса, включающего в себя мощный генератор — гиротрон и супергетеродинальный приемник.

В настоящем сообщении обсуждаются результаты пробного эксперимента по обнаружению рассеяния миллиметрового излучения в визуально чистой атмосфере (в т.ч. обратного рассеяния).

Миллиметровый диапазон представляется весьма перспективным для зондирования широкого класса атмосферных объектов, которые являются оптически толстыми для лазерного излучения, но относительно слабо рассеивают радиоволны традиционного для метеорадаров диапазона (сантиметрового, дециметрового). Достигнутые в последние десятилетия успехи в создании мощных коротковолновых генераторов-гиротронов или гироциклотронов позволяют надеяться на успешное решение некоторых задач активного мониторинга атмосферы. Предварительные оценки показывают, что генераторы мощностью 10–100 кВт вместе с приемными системами чувствительностью выше 10^{-14} Вт могут использоваться для зондирования кристаллических и водных облаков, турбулентности ясного неба и различных аэрозольных примесей на расстояниях от нескольких сот метров до нескольких километров, а измерение доплеровского сдвига частоты отраженного сигнала позволило бы оценивать скорость ветра.

В описываемых экспериментах источником излучения являлся гиротрон с выходной мощностью до 10 кВт, работавший в непрерывном режиме на частоте 84 ГГц. Супергетеродинальный приемник имел пороговую чувствительность примерно $5 \cdot 10^{-13}$ Вт при полосе приема 40 МГц и постоянной времени усреднения на выходе $\sim 10^{-3}$ сек. Такая полоса приема соответствовала предполагаемому уходу частоты генератора от одного включения к другому.

Эксперименты по обнаружению рассеяния и измерению его эффективности проводились по бистатической схеме; расстояние между приемной и излучающей антеннами (база) $b \approx 50$ м. Излучение генератора выводилось в виде квазиоптического волнового пучка в сверхразмерном волноводе и направлялось практически вертикально вверх. Эффективный размер апертуры излучателя $D_{\text{пол}} = 60$ мм примерно соответствовал поперечному размеру квазиоптического волнового пучка, что определяет ширину диаграммы направленности излучателя $\Delta\theta_{\text{пол}} \approx 6 \cdot 10^{-2}$ рад. Ширина диаграммы направленности приемной антенны составляла

$\Delta\theta_{\text{пр}} \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$ рад. ($D_{\text{пр}} = 300$ мм). Отсутствие дифракционного "затекания" сигнала в приемный тракт тщательно контролировалось во время эксперимента.

Вращая по азимуту приемную антенну при произвольном угле места, каждый раз удавалось однозначно обнаруживать положение зондирующего луча в пространстве*. При пересечении диаграмм под углом $\theta \approx \pi/2$ сигнал наблюдался в виде "вспышек" с периодом в 1–3 сек. и превышал собственные шумы приемника более, чем на порядок. При квазипараллельном расположении диаграмм (т.е. для обратного рассеяния) частота "вспышек" увеличивалась, сигнал несколько убывал по амплитуде, но становился почти нефлюктуирующим.

Отношение принимаемой мощности $P_{\text{пр}}$ к излучаемой $P_{\text{пол}}$ определяется в рассматриваемом случае ($\Delta\theta_{\text{пол}} \gg \Delta\theta_{\text{пр}}$) следующим соотношением (см., например, [1]):

$$\frac{P_{\text{пр}}}{P_{\text{пол}}} = \gamma \frac{\pi}{4} \frac{D_{\text{пол}}}{R_{\text{пол}}} \lambda \frac{\delta_v(\theta)}{|\sin \theta|}; \text{ если } \theta > \Delta\theta_{\text{пол}}. \quad (1)$$

Здесь $\lambda = 3,6$ мм — длина волны, θ — угол пересечения осей диаграмм направленности антенн, $\delta_v(\theta)$ — дифференциальное сечение рассеяния на угол θ для единицы объема, $R_{\text{пол}}$ — расстояние от излучателя до точки пересечения осей диаграмм направленности двух антенн. Близкий к единице численный коэффициент γ определяется формой диаграммы направленности антенн; для гауссовых диаграмм из [1] имеем $\gamma \approx 1,2 \cdot \pi/4 \approx 0,94$.

Полагая $P_{\text{пр}} \approx (1 \div 5) \cdot 10^{-12}$ Вт, из (1) оцениваем величину дифференциального сечения рассеяния на высотах 50 ÷ 100 м как $\delta_v(\theta) \approx (0,2 \div 1) \cdot 10^{-12}$ см⁻¹. Такая отражательная способность соответствует, например, колмогоровской турбулентности атмосферы с внутренним масштабом менее 3 мм и интенсивностью флуктуаций показателя преломления, соответствующей стандартному коэффициенту C_n^2 порядка $(1 \div 5) \cdot 10^{-12}$ см^{-2/3} (см., например, [2, 3]). Аналогичный по интенсивности сигнал могут вызвать аэрозольные образования, например, пылинки радиусом $\approx 0,1$ мм и с концентрацией порядка нескольких частиц в кубометре. Достаточно надежная идентификация рассеивающих объектов возможна, по-видимому, лишь при использовании дополнительной априорной информации или при работе на нескольких частотах.

Итак, в результате проведенных экспериментов зарегистрировано рассеяние микроволн в визуально чистой атмосфере и измерено дифференциальное сечение рассеяния на высотах 50–150 м.

Отметим, также, что существует техническая возможность для повышения потенциала зондирующего комплекса по крайней мере на три порядка за счет использования более мощного гиротрона и более чувствительного охлаждаемого приемника, а также путем повышения стабильности частоты генератора и соответствующего сужения полосы приемника.

* Сигнал наблюдался на экране осциллографа в виде характерного отклика, повторяющего паразитную модуляцию мощности передатчика из-за недостаточно качественной фильтрации питающего напряжения.

Описанные здесь результаты предварительных экспериментов свидетельствуют о перспективности мониторинга атмосферы в миллиметровом диапазоне длин волн как для исследования физики атмосферы, так и применительно к экологическим задачам.

Авторы благодарны О.С.Моченовой за помощь в работе.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981. Ч.1. Гл.4.
2. Татарский В.И. Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере. — М.: Изд. АН СССР, 1959.
3. Харди К.Р., Кац И. // ТИИЭР. 1969. N 4. с.108.

Институт прикладной физики РАН

Поступила в редакцию
22 декабря 1992 г.

SCATTERING OF MICROWAVES IN CLEAR ATMOSPHERE

Yu. V. Bykov, Yu. A. Dryagin, L. M. Kukin, M. D. Tokman

We present the results of the experimental study of microwave backscattering in clear atmosphere. The experimental set-up included the high-power generator — gyrotron and superheterodyne receiver.

УДК 621.37.1:519.21

О СВЯЗИ МЕЖДУ КИНЕТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ

В.А.Казаков, А.М.Лавров

В [1] получено обобщенное кинетическое уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова относительно условной плотности вероятности немарковского процесса $w(x, t|X, T)$:

$$\frac{\partial w(x, t|X, T)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [A_n(x, t, X, T)w(x, t|X, T)], \quad (2)$$

где кинетические коэффициенты $A_n(x, t, X, T)$ определены согласно [2] через производную от n -ой моментной функции приращения случайного процесса $\alpha_n(\hat{t}|x, t, X, T) = \langle (\hat{x} - x)^n | x, t, X, T \rangle$:

$$A_n(x, t, X, T) = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} [\alpha_n(\hat{t}|x, t, X, T)]_{\hat{t}=t}, \quad (3)$$

X, T – множество фиксированных значений процесса, отражающее его немарковость.

Поскольку коэффициенты (2) для немарковских дифференцируемых процессов вырождаются, то уравнение (1) описывает лишь узкий класс недифференцируемых немарковских процессов. В [3] выведено другое кинетическое уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x, t|X, T)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [B_n(x, t, X, T)w(x, t|X, T)], \quad (4)$$

$$B_n(x, t, X, T) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\alpha_n(i|x, t, X, T)]_{i=t}, \quad (5)$$

коэффициенты (4) которого нетривиальны и для дифференцируемых немарковских процессов, так что класс непрерывных процессов, описываемых уравнением (3), оказывается гораздо более широким. Кинетические уравнения (1), (3) как частный случай описывают и марковские непрерывные процессы. Если обратиться к одномерному гауссовскому марковскому процессу, то по его условной плотности вероятности $w(\hat{x}, \hat{t}|x, t)$ можно вычислить кинетические коэффициенты (2), (4), а затем конкретизировать виды кинетических уравнений (1) и (3). Аналитически можно показать, что уравнение (3) для данного случая получается из уравнения (1) простым дифференцированием по t . В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли и в общем немарковском случае получить уравнение (3) из (1) дифференцированием по t ? Основной результат данной работы заключается в отрицательном ответе на этот вопрос.

В [1] доказано, что для непрерывных недифференцируемых процессов число слагаемых в правой части уравнения (1) не больше двух, т.е.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(A_1 w) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(A_2 w). \quad (6)$$

Тогда уравнение (3) должно иметь не более четырех слагаемых в своей правой части:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}(B_1 w) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_2 w) - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3}(B_3 w) + \frac{1}{24} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(B_4 w). \quad (7)$$

Непосредственно можно проверить, что уравнение (6) получается из (5) дифференцированием по t тогда и только тогда, когда их коэффициенты связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\partial A_1}{\partial t} + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{1}{2} A_2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}, \\ B_2 &= \frac{\partial A_2}{\partial t} + 2A_1^2 + A_1 \frac{\partial A_2}{\partial x} + 2A_2 \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{1}{2} A_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}, \\ B_3 &= 6A_1 A_2 + 3A_2 \frac{\partial A_2}{\partial x}, \quad B_4 = 6A_2^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Покажем, что для кинетических уравнений условия (7) выполняются не всегда.

Рассмотрим гауссов случайный процесс с корреляционными функциями

$$k_1(t) = m(t), \quad k_2(t_1, t_2) = \sigma(t_1)\sigma(t_2)R(t_1, t_2),$$

где

$$\sigma(t) = \sqrt{k_2(t, t)} \text{ и } R(t_1, t_2) = k_2(t_1, t_2)[k_2(t_1, t_1)k_2(t_2, t_2)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Согласно [5], условная плотность распределения имеет вид

$$w(\hat{x}, \hat{t}|x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2(1-R^2)}} \exp \left\{ -\frac{[(\hat{x} - \hat{m}) - \hat{\sigma}\sigma^{-1}R(x - m)]^2}{2\hat{\sigma}^2(1-R^2)} \right\},$$

где $m = m(t)$, $\hat{m} = m(\hat{t})$, $\sigma = \sigma(t)$, $\hat{\sigma} = \sigma(\hat{t})$ и $R = R(\hat{t}, t)$. Кинетические коэффициенты A_n и B_n , вычисленные по этой плотности, таковы:

$$A_1(x, t) = m' + (x - m)(\sigma'/\sigma + \hat{R}'), \quad (9)$$

$$A_2(x, t) = -2\sigma^2 \hat{R}', \quad A_n(x, t) \equiv 0 \quad \forall n \geq 3,$$

$$B_1(x, t) = m'' + (x - m) \left(\frac{\sigma''}{\sigma} + 2\frac{\sigma'}{\sigma} \hat{R}'' \right),$$

$$B_2(x, t) = 2 \left[m' + (x - m) \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \hat{R}' \right) \right]^2 - 2\sigma^2 [\hat{R}'' + (\hat{R}')^2] - 8\sigma\sigma' \hat{R}', \quad (10)$$

$$B_3(x, t) = -12\sigma^2 \hat{R}' \left[m' + (x - m) \left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \hat{R}' \right) \right],$$

$$B_4(x, t) = 24\sigma^4 (\hat{R}')^2, \quad B_n(x, t) \equiv 0 \quad \forall n \geq 5.$$

где обозначено $m^{(k)} = m^{(k)}(t)$, $\sigma^{(k)} = \sigma^{(k)}(t)$ и

$$\hat{R}^{(k)} = \partial^k R(\hat{t}, t) / \partial \hat{t}^k |_{\hat{t}=t}, \quad k = 1, 2.$$

С помощью условий (7) получаем, что уравнение (6) с коэффициентами (9) являются производной по t от уравнения (5) с коэффициентами (8) тогда и только тогда, когда нормированный коэффициент корреляции $R(\hat{t}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{R}'' = (\hat{R}')^2 + (\hat{R}')^1 \quad (11)$$

или более подробно,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \hat{t}^2} \Big|_{\hat{t}=t} = \left[\frac{\partial R}{\partial \hat{t}} \Big|_{\hat{t}=t} \right]^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial R}{\partial \hat{t}} \Big|_{\hat{t}=t} \right].$$

Заметим, что коэффициент корреляции нормальных марковских процессов, характеризующихся условием [6]

$$R(s, \tau)R(\tau, t) = R(s, t) \quad \forall s \geq \tau \geq t,$$

удовлетворяет (10).

Покажем далее, что существуют процессы, для которых уравнение (6) является совершенно самостоятельным, не связанным с (5) через дифференцирование.

Рассмотрим частный случай стационарного гауссова случайного процесса с нулевым математическим ожиданием. Полагая в (8) и (9) $m = 0$, $\sigma = \text{const}$ и $R(\dot{t}, t) = R(\dot{t} - t)$, получаем:

$$A_1(x, t) = R'(0)x, \quad A_2(x, t) = -2\sigma^2 R'(0), \quad (12)$$

$$A_n(x, t) \equiv 0 \quad \forall n \geq 3;$$

$$B_1(x, t) = R''(0)x, \quad B_2(x, t) = 2[R'(0)]^2 x^2 - 2\sigma^2 \{R''(0) + [R'(0)]^2\},$$

$$B_3(x, t) = -12\sigma^2 [R'(0)]^2 x, \quad B_4(x, t) = 24\sigma^4 [R'(0)]^2, \quad (13)$$

$$B_n(x, t) = 0 \quad \forall n \geq 5,$$

где под $R'(0)$ понимаются производные функции $R(\tau)$ в нуле справа. При этом условие (10) переходит в $R''(0) = [R'(0)]^2$.

Вычислим с помощью формул (11) и (12) кинетические коэффициенты для некоторых конкретных случайных процессов.

1. Речевое сообщение [4]. Пусть $R(\tau) = \frac{\alpha e^{-\alpha|\tau|} - \beta e^{-\beta|\tau|}}{\alpha - \beta}$. Тогда $R'(0) = -(\alpha + \beta)$, $R''(0) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ и так как $R''(0) \neq [R'(0)]^2$, то уравнение (6), принимающее в этом случае вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & -(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \frac{\partial}{\partial x}(xw) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{[(\alpha + \beta)^2 x^2 - \sigma^2(2\alpha^2 + 3\alpha\beta + \\ & + 2\beta^2)]w\} + 2\sigma^2(\alpha + \beta)^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3}(xw) + \sigma^4(\alpha + \beta)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \end{aligned}$$

не является производной по t от уравнения ФПК

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial x}(xw) + \sigma^2(\alpha + \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

2. Телеметрическое сообщение [4]. Пусть $R(\tau) = \frac{\alpha e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}}{\alpha - \beta}$. Тогда $R'(0) = 0$, $R''(0) = -\alpha\beta$.

Из (11) получаем: $A_n(x, t) \equiv 0 \quad \forall n > 1$; тогда уравнение ФПК принимает вид $\partial w / \partial t = 0 \Rightarrow w = w(x)$, т.е. w не зависит от t . В этом нет ничего удивительного, так как по теории этому уравнению должна удовлетворять одномерная плотность

$$w(x) = (2\pi\sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/2\sigma^2).$$

Однако мы не сможем найти ее из уравнения ФПК $\partial w / \partial t = 0$.

В отличие от него, уравнение (6), принимающее в данном случае вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha\beta \frac{\partial}{\partial x}(xw) + \sigma^2 \alpha\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (14)$$

нетривиально, т.е. описывает некоторую плотность.

В заключение отметим, что и в этом примере уравнение (13) не является производной от (вырожденного) уравнения ФПК $\partial w / \partial t = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pawula R.F. // IEEE Trans. on Information Theory. 1967. V.IT-13. N 1. P.33.
2. Казаков В.А. // Изв.вузов. Радиофизика. 1986. Т.29. N 11. С.1344.
3. Казаков В.А. // Изв.вузов. Радиофизика. 1987. Т.30. N 11. С.1309.
4. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием радиосигналов. - М.: Сов.радио, 1975. - 704 с.
5. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. - М.: Сов.радио, 1961. - 558 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т.2. - М.: Мир, 1984. - 738 с.

Рязанский радиотехнический
институт

Поступила в редакцию
15 июня 1992 г.

ABOUT THE CONNECTION BETWEEN THE VARIOUS KINETIC EQUATIONS

W.A.Kazakov, A.M.Lawrov

УДК 519.62:621.319.2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СОСТАВЛЯЮЩИХ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В.А.Двинский

Задачи оценивания параметров составляющих колебаний и его спектра требуют [1] различного подхода. Например, для оценки спектральной плотности мощности (СПМ) динамики нелинейных колебательных систем

в регулярном и хаотическом режимах используется [2] свойство возвращаемости изображающей точки в фазовом пространстве. Имеющаяся реализация разбивается на некоторое число интервалов, на каждом из которых сигнал подвергается преобразованию Фурье. Затем проводят усреднение полученных значений СПМ по всем интервалам. Для оценивания параметров составляющих колебаний усреднение ухудшает [1] разрешающую способность, что требует при использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) больших объемов оперативной памяти и, в связи с итерационным характером проводимых по нему вычислений, имеет место дополнительная ошибка из-за округлений на каждой итерации [3]. Ограниченность длительности интервала наблюдения вызывает искажение [4], приводящее к снижению точности определения этих параметров. Путем применения специальных окон удается [5] уменьшить это искажение, что приводит к ухудшению разрешения [6] по частоте. Параметрические методы [1] спектрального анализа, обеспечивают получение более точных значений СПМ сигнала без функций окна. Однако степень разрешения в случае сигналов, содержащих гармонические составляющие с различными частотами, ухудшается по мере уменьшения сигнал/шум.

В работе излагается методика вычисления параметров составляющих квазипериодических колебаний, основанная на аппроксимации отсчетов реализации тригонометрическим полиномом первого порядка с изменяющейся частотой его гармонических функций, позволяющая осуществлять непосредственную обработку каждого отсчета с помощью любых персональных ЭВМ по программе, составленной на языке БЕЙСИК.

Квазипериодический цифровой сигнал $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, содержащий K -гармонических составляющих с периодами, лежащими в заданном интервале, причем K и период каждой составляющей неизвестны, аппроксимируем [7] тригонометрическим полиномом

$$y_j(n) = Y_{j0} + Y_{j1} \sin(h_j n) + Y_{j2} \cos(h_j n), \quad j = \overline{1, m}, \quad (15)$$

где $h_j = 2\pi/N_j T_j$ — шаг дискретизации при N_j — количестве отсчетов для каждой из выбранных составляющих спектрального анализа периода T_j при $m \gg K$. По методу наименьших квадратов [8] составляются суммы

$$\sum_{n=0}^{N_j-1} [x(n) - y_j(n)]^2, \quad j = \overline{1, m}, \quad (16)$$

из условия равенства нулю частных производных, которые получаем из системы из трех уравнений относительно вычисляемых Y_{j0} ; Y_{j1} ; Y_{j2} , $j = \overline{1, m}$.

Алгоритм для обнаружения составляющих сигнала и последующего вычисления их параметров состоит в следующем. Первоначально интервал частот, в котором ожидается появление гармонических составляющих, равномерно разделяется на участки, протяженность которых определяется соотношениями амплитуд и частот составляющих сигнала, количеством обрабатываемых отсчетов. Детальные исследования с контрольным трехчасовым квазипериодическим сигналом, имеющим одинаковые амплитуды составляющих с отношениями частот не менее 0,5, показали, что протяженность участков равна $\pm 3\%$. При этом шаг дискретизации

принимается одинаковым, соответствующим темпу поступления отсчетов, и обеспечивается их выборка за три периода низкочастотного края интервала. Для каждой из выбранных частот анализа также устанавливается количество отсчетов равное трехкратному за период. В результате получаем набор максимумов модулей, частоты анализа которых соответствуют K -составляющим сигнала. Далее группируют участки спектрального анализа у K -составляющих с относительной частотной расстройкой анализа менее $\pm 1\%$, увеличивают на порядок число обрабатываемых периодов сигнала и для максимальных значений модулей производят вычисление коэффициентов при синусах и косинусах каждой из K -составляющих сигнала.

Для уменьшения погрешности, обусловленной ограниченностью длительности интервала наблюдения, вычисляются зависимости Y_{1s}, Y_{2s} для синусоидального сигнала единичной амплитуды от относительной расстройки частоты $\delta\omega$ анализа, характеризующие уровень центрального и боковых лепестков, соответствующих увеличению частоты анализа при равенстве числа отсчетов числу отсчетов за период для $\delta\omega = 0$. Аналогично вычисляются зависимости Y_{1c}, Y_{2c} для косинусоидального сигнала единичной амплитуды. Указанные зависимости по участкам аппроксимируются с помощью сплайнов [8], коэффициенты которых вводятся в программу вычислений. Для каждой из K -составляющих вычисляются отношение числа отсчетов за ее период к общему числу отсчетов, смещение боковых лепестков, пропорциональное этому отношению, и распределение уровней лепестков с учетом значений $Y_{i1}, Y_{i2}, i = \overline{1, K}$. В результате получаем перекрывающееся распределение уровней лепестков и, осуществляя, в зависимости от их знака, складывание или вычитание этих уровней, вычисляем уточненные значения параметров составляющих квазипериодического колебания.

Рассмотрим неавтономный автогенератор с индуктивной обратной связью и резонансным контуром во входной цепи усилительного элемента [9] при аппроксимации его проходной характеристики укороченным полиномом третьей степени. Источник гармонического напряжения с частотой Ω , находящейся с резонансной частотой контура ω_0 в иррациональном отношении, включен в этот контур последовательно. Пренебрегая реакцией выходной цепи усилительного автогенератора и входным сопротивлением этого элемента для $\omega_0 = 1$ можно записать уравнение Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \lambda \cos \Omega t, \quad (17)$$

где μ — малый параметр; λ — относительная амплитуда внешнего воздействия. При $\mu \ll 1, \lambda \ll 1$ установившееся решение уравнения (3) вдали от резонанса [10] в нулевом приближении составит

$$x_0 = \frac{\lambda}{1 - \Omega^2} \cos \Omega t. \quad (18)$$

Численное решение уравнения (3) выполнено по методу Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом 0,01 и обработкой 100 периодов установившегося режима колебаний. При $\mu = 0,01; \lambda = 0,1; \Omega = \sqrt{3}$ для амплитуды

основного режима колебания 2,006, практически совпадающей с таковой для автономного режима. Для устранения влияния лепестков основного колебания использован следующий подход. При $\lambda = 0$ определяются и запоминаются уровни лепестков указанного колебания на частоте внешнего источника, его гармониках и комбинационных частотах. Затем этот источник включается и из вычисленных значений параметров составляющих вычитают уровни лепестков основного колебания. Для первой гармоники спектра внешнего воздействия (первая цифра — с учетом боковых лепестков основного колебания) имеем: $X_{1c} = (-5,08037 + 0,09422)10^{-2} = -0,0498$; $X_{1s} = (1,1863 - 0,8934)10^{-2} = 0,0029$, а уровни остальных и комбинационных составляющих почти на два порядка меньше уровня боковых лепестков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990.
2. Кузнецов С.П., Сотов Л.С. // Радиотехника и электроника. 1990. Т.35, N 11. С.2307.
3. Применение математических методов и ЭВМ. Планирование и обработка результатов эксперимента / Под ред. А.Н.Останина. — Мн.: Высш.шк., 1989.
4. Харкевич А.А. Спектры и анализ. — М.: ГИФМЛ, 1962.
5. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов / Пер. с англ. — М.: Мир, 1982.
6. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. — М.: Наука, 1989.
7. Двинских В.А. // Метрология. 1990. N 7. С.42.
8. Шуп Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике / Пер. с англ. — М.: Высш.шк., 1990.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. / Пер.с нем. — ИЛ, 1950. С.524.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
25 мая 1992 г.

CALCULATION ON PARAMETERS COMPONENT
ALMOSTPERIODICAL OSCILLATIONS

V.A.Dwinskih

УДК 621.378

ФЛУКТУАЦИИ ЧАСТОТЫ ЛАЗЕРНЫХ ИНЖЕКЦИОННЫХ ДИОДОВ*

А.В.Маругин

Эффективность использования полупроводниковых лазерных диодов в качестве источников когерентного ИК-излучения во многом определяется флуктуационными особенностями лазеров в НЧ-области радиоспектра. Одна из наиболее серьезных проблем — относительно высокий уровень частотных флуктуаций излучения в режиме свободной генерации. Задача в данном случае осложняется тем, что и частота генерации, и мощность излучения зависят от одних и тех же физических величин и не могут меняться (а значит и стабилизироваться) независимо друг от друга [1].

На рис.1 представлены кривые, определяющие вклад отдельных физических факторов в результирующий уровень частотных флуктуаций, приводящих к нестабильности частоты генерации полупроводникового лазера $\sigma_y(\tau)$ — вариация Аллена для нормированных флуктуаций частоты, τ — время усреднения (1 — вклад в нестабильность частоты, вносимый спонтанным излучением, 2 — флуктуациями тока накачки лазера, 3 — флуктуациями температуры, 4 — суммарная нестабильность частоты излучения) [2]. Исходя из приведенных зависимостей видно, что в НЧ-диапазоне основными источниками шума частоты генерации можно считать флуктуации рабочих параметров излучателя, т.е. тока инжекции и температуры активного слоя. Именно эти флуктуационные источники и ограничивают эффективность использования инжекционных лазеров в качестве когерентных маломощных источников накачки.

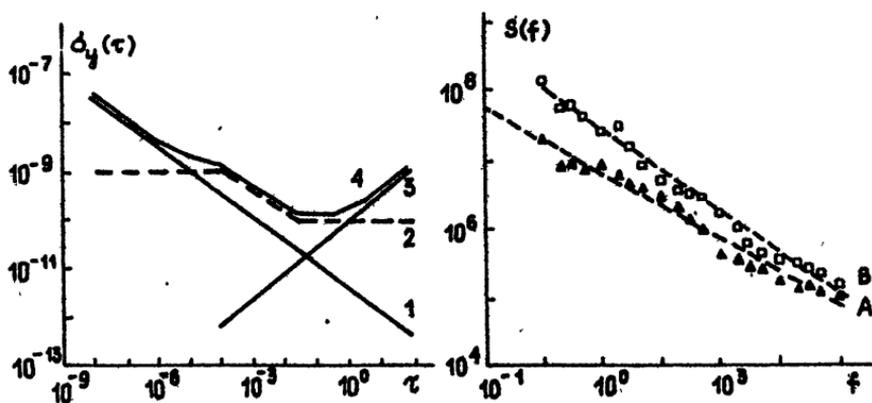


Рис.1, 2:

* Доложено на Всесоюзно-координационном совещании "Низкочастотные шумы в полупроводниковых приборах и устройствах" (поселок Черноголовка Московской области, июнь, 1991 г.)

В данной работе экспериментально исследованы спектральные зависимости $S(f)$ шума оптической частоты одномодовых излучателей на основе GaAlAs-диодов в диапазоне $1 \div 10^5$ Гц, а также долговременные метрологические характеристики $\sigma(\tau)$ на временах усреднения до 100 с. Для измерений использовалась оптическая схема с интерферометром Фабри-Перо с базой $L = 3$ см в качестве частотно-амплитудного конвертора. Опытные образцы мезаполосковых гетеролазеров работали в условиях одночастотного режима генерации ($\lambda = 0,83$ мкм, $I_{пор} \cong 30$ мА). Используемый блок питания лазера представлял собой стабилизатор тока с глубокой отрицательной обратной связью, выполненный на основе малошумящих активных элементов. Контроль рабочих параметров излучателя в процессе исследований осуществлялся на уровне не хуже 0,01 К по температуре и 0,01 мА по току питания. Уровень сигнала на нагрузке фотодетектора измерялся с помощью селективного нановольтметра и цифровых вольтметров.

Спектральная зависимость частотных флуктуаций представлена на рис.2 для двух модификаций лазерных излучателей — с собственным резонатором (А) и с коротким внешним резонатором (В). На основе анализа приведенной зависимости можно утверждать, что в полосе $1 \div 10^4$ Гц частотные шумы генерации носят фликкерный характер с наклоном, несколько превышающим единицу. Для частот $f > 10^4$ Гц начинает наблюдаться плавный переход к "белому" шуму, что по-видимому связано с проявлением квантовых источников флуктуаций (шум носителей, спонтанное излучение).

Для оценки долговременных характеристик излучателей была применена статистическая обработка уходов частоты генерации за времена $0,5 \div 100$ с с помощью дисперсии Аллена. Вариация Аллена $\sigma_y(\tau)$, где τ — время усреднения, характеризует нестабильность частоты в определенном временном масштабе, связана Фурье-преобразованием со спектром частотных флуктуаций и используется для описания статистических свойств стандартов частоты радио- и оптического диапазонов.

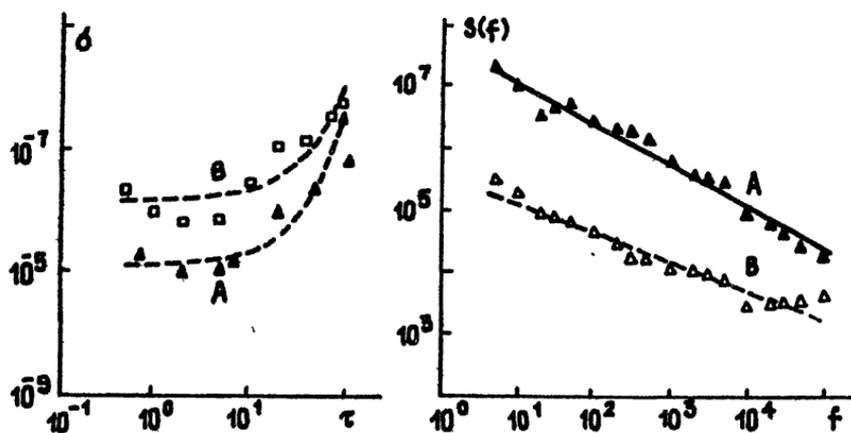


Рис.3, 4:

На рис.3 представлена зависимость нестабильности частоты генерации $\sigma_y(\tau)$ инжекционных лазерных диодов (А — изолированный лазер, В — лазер с внешним резонатором) для исследованных образцов гетеролазеров при $\tau = 0,5 \div 100$ с. Полученные результаты свидетельствуют о достижении минимальной нестабильности частоты излучения у лазера с собственным резонатором на уровне $8 \cdot 10^{-9}$ при временах усреднения $2 \div 5$ с в условиях свободного режима генерации. При увеличении $\tau > 10$ с наблюдается ухудшение метрологических характеристик излучателя за счет температурных вариаций и медленной деградации активного слоя. Таким образом, доминирующее влияние нестабильности тока носителей на результирующий уровень частотного шума имеет место на частотах $f = 10^{-1} \div 10^4$ Гц, на более низких частотах уходы оптической несущей генератора связаны с температурными эффектами.

Следует отметить, что использованная в эксперименте система питания лазера характеризуется нестабильностью тока $\sigma_i(\tau)$ на уровне $1 \div 3 \cdot 10^{-8}$ А в диапазоне $10^{-4} \div 10^{-1}$ с. В приближении стационарной накачки (справедливом для НЧ-диапазона) $\sigma_i(\tau)$ линейно связана с нестабильностью частоты лазера $\sigma_y(\tau)$. Для типичных параметров исследованных образцов лазерных диодов такого рода шумовая модуляция должна привести к результирующей нестабильности $2 \cdot 10^{-10}$ при $\tau = 0,1$ с, что на два-три порядка ниже наблюдаемых на эксперименте значений. Следовательно, представляется возможным улучшение стабильности лазерного источника за счет активной стабилизации по цепи питания излучателя. В качестве дискриминационной кривой может быть выбран склон пика пропускания интерферометра или ячейки поглощения. На рис.4 представлены экспериментальные зависимости $S(f)$ для лазера в свободном режиме генерации (А) и в режиме стабилизации по склону интерферометра с шириной пика пропускания $\Delta\nu = 350$ МГц. За счет активной стабилизации по цепи питания излучателя удается снизить уровень частотных флуктуаций на $25 \div 30$ дБ в диапазоне от 1 до 10^4 Гц. Применение более широкополосной системы обратной связи позволит снизить флуктуации частоты практически на всем фликкерном участке шумового спектра.

В заключение отметим, что снижения уровня частотных флуктуаций и ширины линии моды генерации можно достичь не только электронной обратной связью, но и с помощью внешних селективных элементов. Такая система позволяет за счет подавления дестабилизирующего действия спонтанного излучения понизить ширину линии генерации пропорционально добротности внешнего оптического резонатора. В исследованных в данной работе образцах использование в конструкции внешнего короткого резонатора приводит к уменьшению ширины линии приблизительно в 2-4 раза. Однако долговременные характеристики таких излучателей несколько хуже, чем у изолированных диодов (см. рис.2 и 3). В диапазоне $1 \div 10^3$ Гц разница в уровнях спектральной плотности частотных флуктуаций составила от 4 до 15 дБ, на временах $2 \div 100$ с нестабильность соответственно выше в 3-5 раз. Таким образом, потенциально более эффективные лазеры с внешним резонатором оказываются за счет резкой амплитудно-частотной зависимости более чувствительными к вариациям тока накачки и особенно температуры активного слоя.

В целом для современных образцов полупроводниковых лазеров, работающих в свободном режиме генерации, нестабильность частоты в ИЧ-диапазоне доведена до уровня $\sigma_y(\tau) \sim 10^{-9}$ [3]. Если исключить дестабилизирующее действие температуры, использование исследованных нами образцов лазерных диодов в схеме с активной стабилизацией частоты по стабильному реперу позволяет надеяться на получение суммарной нестабильности частоты на уровне не хуже $\sigma_y(\tau) \sim 10^{-11} \div 10^{-10}$, что вполне удовлетворяет требованиям практического применения этих излучателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsuchida H., Tako T. // Jap.J.Appl.Phys. 1983. V.22, N 7. P.1152.
2. Ohtsu M., Fukada H. // Jap.J.Appl.Phys. 1983. V.22, N 7. P.1157.
3. Kuboki K., Ohtsu M. // IEEE J.Quant.Electron. 1987. V.23, N 4. P.388.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
13 мая 1992 г.

FLUCTUATIONS IN THE FREQUENCY OF INJECTION LASER DIODES

A. V. Marugin

УДК 621.385:6

О РАСЧЕТЕ СИСТЕМ ФОРМИРОВАНИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В РЕЖИМЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ТОКА ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАРЯДОМ

Б.В.Райский, Ш.Е.Цимринг

Численное моделирование электронно-оптических систем в режиме ограничения тока пространственным зарядом (ρ -режиме) помимо расчета электронных траекторий включает нахождение распределения тока на эмиттере. Традиционная схема решения этой задачи базируется на итерационной методике, в которой ток на каждой итерации определяется по закону "трех вторых", исходя из значений потенциала в окрестности

эмиттера. Как известно (см., например, [1]), эта схема в общем некорректна и сходимость процесса достигается лишь при использовании специальных релаксационных процедур. Кроме того, указанный метод применим в принципе лишь к системам с однокомпонентными, чисто электростатическими, однопоточными течениями заряженных частиц, т.к. только в таких системах выполняется закон "трех вторых".

Более универсальный подход к исследованию ρ -режима состоит в непосредственном удовлетворении естественного физического условия (при нулевой начальной скорости частиц)

$$E|_{\Gamma_0} = 0 \quad (19)$$

на нормальную к поверхности эмиттера компоненту электрического поля [1, 2]. В [3] предложен метод, реализующий (1) и основанный на решении системы нелинейных уравнений

$$f(E_i) = \varphi_i(I_1, I_2, \dots, I_N) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

относительно токов I_k в токовых трубках методом Ньютона. Здесь E_i — нормальная к поверхности эмиттера компонента электрического поля в i -ой точке старта, N — число трубок тока. $f(E)$ — специально подобранная функция, обращающаяся в нуль при $E = 0$. Вид функции $f(E)$ существенно влияет на сходимость процесса. Применительно к задаче траекторного анализа в [3] рекомендована функция $f(E) = E^2$. Важным пунктом развитой в [3] методики является также использование диагональной аппроксимации матрицы Якоби с элементами $U_{ik} = \delta f(E_i)/\delta I_k$ и вычисление этой матрицы только на первых двух итерациях. Это, конечно, упрощает решение задачи, хотя и увеличивает погрешность.

В работе [4] использована схема

$$I_k^{(n+1)} = I_k^{(n)} - \frac{I_k^{(n)} - I_k^{(n-1)}}{f(E_k^{(n)}) - f(E_k^{(n-1)})} f(E_k^{(n)}) \quad (21)$$

$$I_k^{(n+1)} = I_k^{(n)} + A_k^{(n)}(I_k^{(n)} - I_k^{(n)}), \quad k = 1 \dots N$$

(n — номер итерации), являющаяся тем вариантом метода секущих, который эквивалентен методу Ньютона с диагональной аппроксимацией матрицы Якоби. Указанная процедура не требует вычисления производных и нуждается лишь в однократном решении системы самосогласованных уравнений (ССУ) пучка на каждой итерации. Наиболее ответственным моментом является обеспечение монотонности итераций по электрическому полю, что, впрочем, существенно и для любых других итерационных методов. В противном случае поля $E_k^{(n)}$ меняют знак и соответствующие трубки тока запираются, что ведет к обрыву итерационного процесса. В [4] монотонность достигалась выбором $f(E) = E^3$, а также с помощью специальной процедуры нахождения релаксационных параметров A_k (см. (3)), регулирующих скорость сходимости итераций. Последняя процедура, к сожалению, базируется на пробных численных экспериментах для каждой конкретной системы.

Ниже предлагается итерационная схема, основанная на методе Бroyдена (см., например, [6]), который является многомерным вариантом метода секущих. При его реализации на каждой итерации должно проводиться только одно решение ССУ. Одновременно здесь квазидиагональная аппроксимация матрицы Якоби не требуется. В принципе возможно получение решения с любой степенью точности при соответствующем решении ССУ. Токи на n -ой итерации вычисляются по формуле

$$I^{(n+1)} = I^{(n)} + s^{(n)}, \quad (22)$$

где I – вектор, составленный из токов в каждой трубке. Значения приращений токов s получаются из решения системы линейных уравнений

$$A^{(n)}s^{(n)} = -f(E^{(n)}). \quad (23)$$

Матрица A , являющаяся эквивалентом матрицы Якоби. Вычисляется не отдельно, а непосредственно в ходе итерационного процесса по рекуррентной формуле:

$$A^{(n+1)} = A^{(n)} + \frac{(y^{(n)} - A^{(n)}s^{(n)})s^{T(n)}}{s^{T(n)}s^{(n)}}, \quad (24)$$

$$y^{(n)} = F^{(n+1)} - F^{(n)},$$

где T – знак транспонирования, а $f(E)$ – упомянутая выше задаваемая функция электрического поля в точках старта. Главным условием при выборе f является обеспечение монотонности итераций по электрическому полю. Согласно результатам численных экспериментов эту зависимость целесообразно выбрать равной

$$f(E) = E^2. \quad (25)$$

Отметим, что использование в (7) $f(E) = E^3$ (ср. [4]) снижает скорость сходимости и приводит к нарушению монотонности итераций в окрестности нулей E .

В начале итерационного процесса (4)–(6) матрица A_0 полагается равной матрице Якоби в квазидиагональном приближении. Для нахождения матрицы достаточно располагать двумя наборами токов и соответствующих электрических полей в точках старта. Начальные векторы токов в трубках принимались равными

$$I_p = \alpha_p I_n, \quad p = 1, 2, \quad (26)$$

где I_n – ленгмюровский ток, вычисленный по закону "трех вторых", а коэффициенты α_p удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \alpha_p \leq 1, \quad |\alpha_1 - \alpha_2| \ll 1. \quad (27)$$

Электрические поля на эмиттере находятся из решений ССУ с указанными распределениями токов. Таким образом, элементы матрицы A_0 находятся по формуле

$$A_{m,n}^{(0)} = \begin{cases} \frac{f(E_m^{(2)}) - f(E_n^{(1)})}{I_m^{(2)} - I_n^{(1)}}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad (28)$$

где $n, m = 1 \dots N$, N – число трубок тока. Итерационный процесс заканчивается аналогично [4] по условию

$$1 - \frac{\|I^{(n+1)}\|}{\|I^{(n)}\|} < \epsilon, \quad (29)$$

где ϵ – задаваемое значение невязки.

ССУ решаются, как обычно, методом последовательных приближений по пространственному заряду. При этом используется только одна итерация (см. [4]), и получаемое решение краевой задачи не является самосогласованным. Однако, по мере сходимости итерационной схемы (4)–(6) начинает выполняться условие (11) и токи изменяются слабо. Поэтому с каждой итерацией все меньше изменяются и траектории. В результате при обеспечении (11) достигается самосогласованное решение краевой задачи для уравнения Пуассона. Такой подход существенно сокращает суммарное время решения задачи (ср., например, [3], где на каждой токовой итерации используется самосогласованное решение полевой задачи).

Отметим, что процедура, связанная с методом Бройдена, является строгой (сходимость решения к точному доказана в [6]). Поэтому величина невязки ϵ в (11) значительно меньше, чем в [4]. Кроме того, сводится до минимума зависимость решения от начального задания токов в трубках. В связи с этим, выбор конкретных значений коэффициентов α_p в качестве начального приближения в (8), (9) слабо влияет на погрешность результата. Наконец, положительной стороной рассматриваемой методики является отсутствие в ней релаксационной процедуры.

Отметим, что для достижения наилучшего приближения после окончания токовых итераций распределение токов фиксируется и находится решение ССУ на полной длине электронного пучка.

На основании изложенной выше методики разработана модификация пакета прикладных программ ЭПОСР [7]. Ниже приводятся результаты тестирования этой программы на примере траекторного анализа системы, формирующей круговой электронный пучок (поток Мельтцера [8]). В табл.1 дана зависимость относительной величины электрического поля на катоде от начального приближения по току. Здесь $t_{j0} = \alpha_1$ (ср. (8), (9)), $t_E = E/E_0$, где E – результирующее электрическое поле на катоде, E_0 – поле при нулевом токе пучка. В третьей колонке величины t_E^2 характеризуют точность решения уравнений (2). В четвертой и пятой колонках приведены соответственно относительная ошибка расчета ленгмюровского тока и число использованных токовых итераций, для достижения невязки $\epsilon = 0.03$ (см. (11)).

Таблица 1

t_{j0}	t_E	t_E^2	δI_n	N_T
0.6	0.08	0.0064	0.009	8
0.8	0.06	0.0036	0.007	5
0.9	0.05	0.0025	0.007	4

Найденная форма электронных траекторий повторяет аналитическую [8] с графической точностью. Отметим, что поток Мельтцера характери-

зутся сильной неравномерностью эмиссионного тока, что выгодно отличается указанную задачу как тестовую.

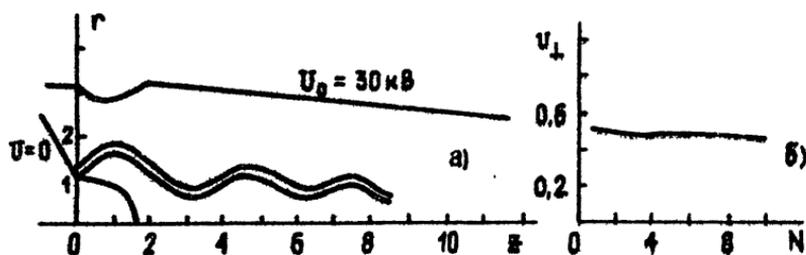


Рис. 1: а). Форма электронных траекторий в магнетронно-инжекторной пушке гиротрона.
б). Распределение осцилляторных скоростей электронов в рабочем пространстве гиротрона (N – номер траектории).

Наконец, приведем результаты расчета магнетронно-инжекторной пушки гиротрона, работающей в ρ -режиме и предназначенной для 12-мм непрерывного гиротрона [9]. На рис.1а приведена форма электродов и электронных траекторий при токе пучка $I_n = 6.8$ А. Распределение поперечных скоростей электронов в рабочем пространстве гиротрона показано на рис.1б. Относительный скоростной разброс составляет $\delta v_{\perp} = 0.11$. Средний питч фактор пучка в рабочем пространстве $g = v_{\perp}/v_{\parallel} = 1.5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головин Г.Т. // ЖВМТФ. 1985. Т.25. N 8. С.1220.
2. Головин Г.Т. // ЖВМТФ. 1983. Т.23. N 8. С.1427.
3. Свешников В.М. Препринт 289. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1988.
4. Мануилов В.Н., Райский Б.В., Цимринг Ш.Е. // Изв.вузов. Радиофизика. 1992. Т.35. N 8–9.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
6. Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988.
7. Мануилов В.Н., Райский Б.В., Цимринг Ш.Е. // Тезисы докладов X Всесоюзного семинара "Методы расчета электронно-оптических систем. Львов, 1990.
8. Lomax R.J. // Journ. Electronics and control. 1957. V.3. N 4. P.367.
9. Гиротрон / Мануилов В.Н., Райский Б.В., Солуянова Е.А.,

Цимринг Ш.Е. // Сборник научных трудов. – Нижний Новгород:
ИПФ РАН, 1993 (в печати).

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию
4 ноября 1992 г.

**ABOUT DESIGN OF SYSTEMS FORMING INTENSE ELECTRON BEAMS
IN SPACE-CHARGE-LIMITED EMISSION REGIME**

B. V. Raisky, Sh. E. Tsimirng