

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ ВЫШЕЙ ШКОЛЫ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ РОССИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

Ежемесячный научно-технический журнал

Издается с апреля 1958 г.

Том 36, № 1

Нижний Новгород

1993

С о д е р ж а н и е

Каневский М.Б., Караваев В.Ю. Спектр радиолокационного сигнала, отраженного морской поверхностью .....	3
Гайкович К.П. Определение распределения температуры однородного полупространства по тепловому радиоизлучению на основе термоэволюционного уравнения .....	16
Караштин А.Н., Цимлинг М.Ш. Низкочастотные токовые неустойчивости в неизотермической магнитоактивной плазме .....	25
Соловьев О.В. К теории береговой рефракции в случае волноводной задачи .....	37
Геворкян Ж.С. Теория переходного излучения в случайно-неоднородной среде .....	51
Мишанина М.Г., Музичук О.В. Влияние интенсивных амплитудных флуктуаций накачки на шумовые характеристики одноконтурного параметрического усилителя .....	65
Нефедов Е.И., Нефедов И.Е., Черникова Т.Ю. Электродинамическая теория связанных реберно-диэлектрических линий .....	74
Власов С.Н. Структура излучения одномодового гиротрона .....	88
Железовский Е.Е., Лазерсон А.Г., Рязанцев А.Л. Двухчастотный генератор с субгармоникой .....	97

НАСТОЯЩИЙ НОМЕР ЖУРНАЛА "РАДИОФИЗИКА" ИЗДАН НА СРЕДСТВА  
АКЦИОНЕРНОГО ОБЩЕСТВА "АКТИВ" (ХОХОЛЬСКИЙ САХАРНЫЙ ЗАВОД  
ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ).

РЕДАКЦИЯ И РЕДКОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА БЛАГОДАРЯТ ЗА ПОМОШЬ.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С. Я. БРАУДЕ, А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ (главный  
редактор), Л. М. ЕРУХИМОВ (зам. главного редактора),  
В. В. ЖЕЛЕЗНИКОВ, В. А. ЗВЕРЕВ, Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ,  
А. И. КОНДРАТЕНКО, Ю. А. КРАВЦОВ, В. Н. КРАСИЛЬНИКОВ,  
А. Н. МАЛАХОВ, В. В. НИКОЛЬСКИЙ, В. Ю. ПЕТРУНЬКИН,  
В. М. ПОЛЯКОВ, А. А. СЕМЕНОВ, С. А. ТАГЕР, В. И. ТАЛАНОВ

Ответственный секретарь редакции К. Б. МУРАШКИНА

Формат 70x108/16. Офсетная бумага. Офсетная печать.  
Усл. печ. л. 9, 10. Усл. кр.-отт. 9, 10. Уч.-изд. л. 10, 20  
Тираж 700 экз. Заказ 663 . Цена 25 р.

---

Адрес редакции: 603600, Нижний Новгород,  
ул. Большая Печерская, д. 25,  
Научно-исследовательский радиофизический институт,  
редакция журнала "Известия вузов. Радиофизика". Телефон 36-01-71

---

Отпечатано с готового набора

Межвузовская типография  
при Нижегородском государственном университете  
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37.

© "Известия высших учебных заведений. Радиофизика", 1993

УДК 621.371.165

## СПЕКТР РАДИОЛОКАЦИОННОГО СИГНАЛА, ОТРАЖЕННОГО МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

*И. Б. Каневский, В. Ю. Караев*

Рассматривается теоретическая задача о спектре радиолокационного сигнала СВЧ-диапазона, отраженного морской поверхностью, с учетом одновременного вклада двух механизмов рассеяния - зеркального и брэгговского. Выполнено исследование характеристик спектра рассеянного поля в зависимости от скорости ветра, угла падения зондирующего излучения, скорости носителя и ширины диаграммы направленности антенны. Полученные результаты свидетельствуют о высокой чувствительности параметров спектра к изменению характеристик волнения.

Спектр рассеянного морской поверхностью радиолокационного сигнала несет больше информации о волнении по сравнению с сечением рассеяния, однако изучен он значительно менее подробно. В работах [1 - 4] (см. также библиографию в [4]) анализируется спектр брэгговской компоненты сигнала, доминирующей при углах падения  $\theta \geq 25^\circ$ , однако при переходе к меньшим углам падения появление квазизеркальной компоненты существенно видоизменяет форму спектра.

В данной работе рассматривается спектр рассеянного поля с учетом одновременного вклада двух механизмов рассеяния - зеркального и брэгговского, исследуются характеристики спектра в зависимости от скорости и направления ветра, угла падения зондирующего излучения, скорости носителя радиолокатора и ширины диаграммы направленности антенны.

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 1. Когерентный радиолокатор бокового обзора расположен на носителе, движущемся со скоростью  $U$  параллельно оси  $Y$ . Угол падения луча -  $\theta_0$ , ширина диаграммы направленности антенны -  $2\delta$ . Углы  $\varphi_B$  и  $\varphi_W$ , определяющие направление ветра и направление распространения крупномасштабного волнения, отсчитываются от оси  $X$ . Расстояние от локатора до центра рассеивающей площадки равно  $R_0$ ;  $\vec{r}_0(x_0, vt)$  - радиус-вектор центра площадки в момент времени  $t$ .

Для описания изменяющегося во времени и пространстве случайного волнового рельефа введем функцию  $\zeta(\vec{r}, t)$ , описывающую отклонение поверхности от равновесного состояния. Она связана с крупномасштабным волнением. Случайная функция  $\xi(\vec{r}, t)$  описывает поле ряби. Волнение считается стационарным и однородным.

Для гравитационной части спектра морского волнения использовалась следующая формула [5]:

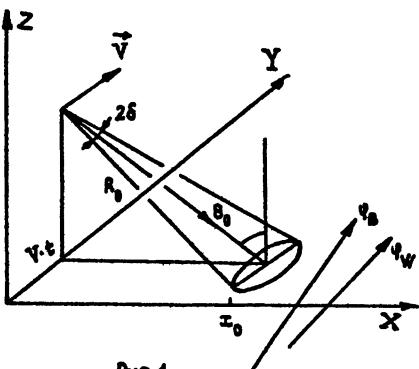


Рис. 4.

$$W(k, \varphi) = \frac{\alpha}{\pi} k^{-4} \exp(-1, 25(k/k_a)^2) \gamma \exp\{-[(\sqrt{k/k_a} - 1)/b]^2\} \times$$

$$x \cos^2(\varphi - \varphi_w), \quad |\varphi - \varphi_w| \leq \pi/2;$$

$$W(k, \varphi) = 0, \quad |\varphi - \varphi_w| > \pi/2,$$

где  $b = 0, 07$  при  $k \leq k_a$  и  $b = 0, 09$  при  $k > k_a$ ;  $\alpha = 0, 0081$ ;  $\gamma = 1$  для развитого ветрового волнения и  $\gamma = 16, 5$  для зыби;  $k_a = 0, 67g/U_{10}^2$ ,  $U_{10}$  - скорость ветра на высоте 10 м.

Для спектра ряби использовалась следующая аппроксимация [6]:

$$W_\xi(k, \varphi, U^*) = 2, 31 \cdot 10^{-5} \cdot U^{*1, 43} (1 + 0, 44 \cdot U^{*0, 03} \cos(2\varphi)) k^{-4, 08},$$

где  $U^*$  - скорость "трения" ( $20 \text{ см/с} < U^* < 60 \text{ см/с}$ ),  $\varphi$  - угол, отсчитываемый от направления ветра,  $k$  - волновое число ряби.

1. Выражение для зеркальной компоненты рассеянного поля имеет следующий вид [7]:

$$E_3(t) = \frac{F(0) |E_s| k}{4\pi R_0 \cos\theta_0} \int d\vec{r} \exp[-2ik\{(x-x_0)\sin\theta_0 -$$

$$-\zeta(\vec{r}, t)\cos\theta_0 + \frac{1}{2R_0}(y-Vt)^2\}] \varphi(\vec{r}-\vec{r}_0) + \text{к. с.}, \quad (1)$$

где  $F(0)$  - Френелевский коэффициент отражения при нормальном

падении;  $E_1$  - амплитуда,  $k$  - волновое число падающего излучения;  $\varphi(\vec{r} - \vec{r}_0)$  - функция, описывающая распределение амплитуды падающего поля по рассеивающей площадке.

Найдем корреляционную функцию зеркальной компоненты рассеянного поля. Считая, что функция распределения высот является гауссовской, мы можем выполнить усреднение по волнению. В полученном выражении подынтегральная функция имеет острый пик при  $(\vec{\rho}, \tau) = 0$  (где  $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r}''$ ,  $\tau = t' - t''$ ). Выполнив разложение корреляционной функции крупномасштабного волнения, находящейся в экспоненте, в ряд и ограничившись тремя членами разложения, получим следующее выражение для корреляционной функции рассеянного поля (подробнее см. [7]):

$$K_3(\tau) = A_0 \frac{\pi}{2k^2 \cos^2 \theta_0 \sqrt{(4|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2)}} \int d\vec{r} \exp(-st^2) \times \\ \times \exp(f) \cos(\omega_D \tau) \varphi^2(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (2)$$

где

$$A_0 = |F(0)|^2 |E_1|^2 k^2 / 4\pi^2 R_0^2 \cos^2 \theta_0,$$

$$K_{\zeta_{\alpha\alpha}} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 K_{\zeta}}{\partial^2 \alpha} \right|_{\vec{\rho}, \tau=0}, \quad K_{\zeta_{\alpha\beta}} = \left. \frac{\partial^2 K_{\zeta}}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{\vec{\rho}, \tau=0}, \quad \alpha, \beta = x, y, t \quad (\alpha \neq \beta).$$

$K_{\zeta}(\vec{\rho}, \tau)$  - корреляционная функция крупномасштабного волнения;

$$f = -\operatorname{tg}^2 \theta_0 / (4|K_{\zeta_{xx}}|) - 1 / [\cos^2 \theta_0 (4|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2)] \times \\ \times [y^2 |K_{\zeta_{xx}}| / (R_0^2) + y K_{\zeta_{xy}} \sin \theta_0 / (R_0) + K_{\zeta_{xy}}^2 \sin^2 \theta_0 / (4|K_{\zeta_{xx}}|)],$$

$$s = 4k^2 \cos^2 \theta_0 |K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}||K_{\zeta_{tt}}| / (4|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2) \times$$

$$\times \left( 4 - \frac{K_{\zeta_{xy}}^2}{|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}|} - \frac{K_{\zeta_{xt}}^2}{|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{tt}}|} - \frac{K_{\zeta_{yt}}^2}{|K_{\zeta_{yy}}||K_{\zeta_{tt}}|} - \right.$$

$$= \frac{K_{\zeta_{xy}} K_{\zeta_{xt}} K_{\zeta_{yt}}}{|K_{\zeta_{xx}}| |K_{\zeta_{yy}}| |K_{\zeta_{tt}}|}.$$

$$\omega_D = 2kVY/(R_0) - kK_{\zeta_{xt}} \sin\theta_0 / (|K_{\zeta_{xx}}|) - 2k/(4|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2) \times$$

$$\times [2yK_{\zeta_{yt}}|K_{\zeta_{xx}}|/(R_0) + yK_{\zeta_{xt}}K_{\zeta_{xy}}/(R_0) + K_{\zeta_{xy}}K_{\zeta_{yt}} \sin\theta_0 + \\ + 0,5K_{\zeta_{xy}}^2 K_{\zeta_{xt}} \sin\theta_0 / (|K_{\zeta_{xx}}|)].$$

Для распределения мощности падающего излучения по морской поверхности примем:

$$\varphi^2(\vec{r} - \vec{r}_0) = \exp\{-[4(x - x_0)^2/\Delta x_0^2] - [4(y - vt)^2/\Delta y_0^2]\}, \quad (3)$$

где  $2\Delta x_0$ ,  $2\Delta y_0$  – размеры рассеивающей площадки, например  $\Delta y_0 \approx R_0 \delta$ .

После интегрирования по  $x$  и  $y$  перейдем к спектру. Выполнив нормировку спектра так, чтобы интеграл от него давал сечение рассеяния, получим следующую формулу:

$$S_3 = \frac{|F(0)|^2 \exp(f_0) \exp\{-(1/4s)[(\omega_{D0} + \omega)^2 Z_1 + (\omega_{D0} + \omega) Z_2]\}}{16\sqrt{\pi} \cos^4 \theta_0 \sqrt{4|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2} \sqrt{s} R_x} \times \\ \times \exp\left[\frac{\delta^2 \sin^2 \theta_0 K_{\zeta_{xy}}^2}{16R_x \cos^4 \theta_0 (4|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2)^2}\right], \quad (4)$$

где

$$Z_1 = 1 - \frac{k^2 \delta^2}{4R_x s} \left[ V - \frac{2K_{\zeta_{yt}}|K_{\zeta_{xx}}| + K_{\zeta_{xt}}K_{\zeta_{xy}}}{4|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2} \right]^2,$$

$$Z_2 = \frac{2k \sin \theta_0 K_{\zeta_{xy}} \delta^2}{4R_x \cos^2 \theta_0 (4|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2)} \left( \frac{2K_{\zeta_{yt}}|K_{\zeta_{xx}}| + K_{\zeta_{xt}}K_{\zeta_{xy}}}{4|K_{\zeta_{xx}}||K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2} - V \right),$$

$$R_x = 1 + \frac{\delta^2 |K_{\zeta_{xx}}|}{4 \cos^2 \theta_0 (4 |K_{\zeta_{xx}}| |K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2)} + \frac{k^2 \delta^2}{4s} \times$$

$$\times \left[ v - \frac{2 K_{\zeta_{yt}} |K_{\zeta_{xx}}| + K_{\zeta_{xt}} K_{\zeta_{xy}}}{4 |K_{\zeta_{xx}}| |K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2} \right]^2,$$

$$f_0 = -\operatorname{tg}^2 \theta_0 |K_{\zeta_{yy}}| / (4 |K_{\zeta_{xx}}| |K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2),$$

$$\omega_{D0} = - \frac{2k \sin \theta_0 (2 |K_{\zeta_{yy}}| K_{\zeta_{xt}} + K_{\zeta_{xy}} K_{\zeta_{yt}})}{4 |K_{\zeta_{xx}}| |K_{\zeta_{yy}}| - K_{\zeta_{xy}}^2}.$$

Для зеркальной компоненты рассеянного поля в интервале углов падения  $\theta_0 \sim 7 + 14^\circ$  зависимость сечения рассеяния от скорости ветра слабая, однако спектр отраженного сигнала чувствителен к изменению скорости ветра, что видно из рис. 2. На рисунке приведена зависимость спектра зеркальной компоненты от скорости ветра при  $\theta_0 = 10^\circ$ ,  $\varphi_u = 0$ ,  $v = 0$ . Вычисления проводились для длины волны падающего излучения  $\lambda = 3$  см, комплексная диэлектрическая проницаемость воды  $\epsilon = 65 - 30i$ . Для скорости ветра на высоте 10 м использовались следующие значения: 7,5, 10, 12,5 м/с. Графики построены для развитого ветрового волнения.

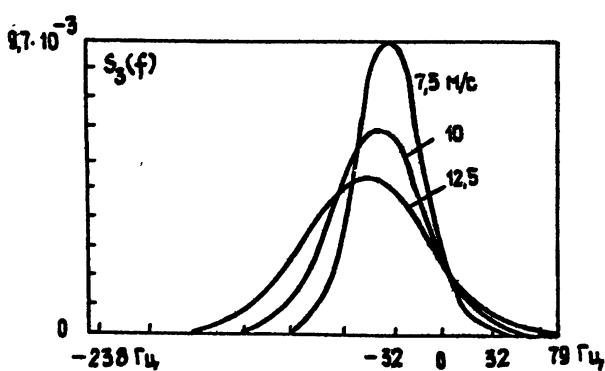


Рис. 2.

Увеличение скорости ветра приводит к незначительному уменьшению сечения рассеяния от 5,3 до 5,2 дБ, в то время как ширина спектра

(на уровне 0,5) увеличивается от 52 до 94 Гц, т.е. почти вдвое.

При движении локатора происходит дополнительное уширение спектра, и это может привести к потере информации о волнении. На рис. 3 изображены спектры, полученные при различной ширине диаграммы направленности:  $2\delta = 0, 1^\circ, 2^\circ$  (или  $0, 0, 4^\circ, 0, 8^\circ$  на уровне 0,5 по мощности) для  $V = 100$  м/с,  $\theta_0 = 15^\circ$ ,  $U_{10} = 10$  м/с,  $\varphi_H = 0$ .

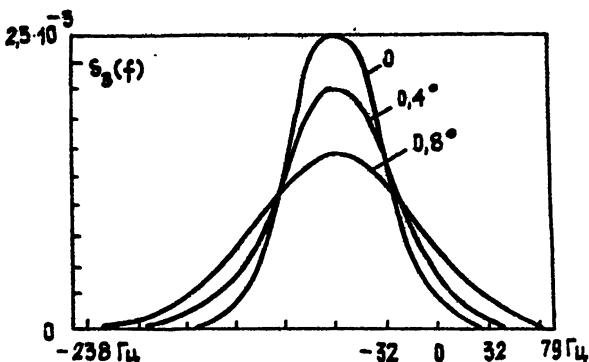


Рис. 3.

Видно, что уширение спектра, связанное с движением носителя, при достаточно узкой диаграмме направленности не приводит к значительному искажению формы спектра. Величина смещения "центра тяжести" спектра относительно несущей частоты не зависит от скорости движения локатора, а определяется углом падения, длиной волны падающего излучения, направлением распространения энергонесущей части волнения и степенью его развития.

Используя спектр отраженного сигнала, можно разделить ветровое волнение и зыбь. Для примера на рис. 4 приведены спектры, полученные при условии равенства энергий развитого ветрового волнения ( $U_{10} = 9,8$  м/с) и зыби. Сечения рассеяния близки: 5, 3 и 5 дБ соответственно, а спектры хорошо различаются.

2. При увеличении угла падения основным становится брэгговский механизм рассеяния ( $\theta_0 \approx 25^\circ - 30^\circ$ ). Комплексную амплитуду брэгговской компоненты рассеянного поля запишем в следующем виде [8]:

$$E_{бр} = A_1 \int d\vec{r} \varphi(\vec{r} - \vec{r}_0) \xi(\vec{r}, t) F_0(\vec{r}, t) \times \quad (5)$$

$$\times \exp\{-2ik[(x - x_0)\sin\theta_0 - \zeta(\vec{r}, t)\cos\theta_0 + 1/(2R_0)(y - vt)^2]\},$$

где  $A_1 = k^2 |E_1| / R_0$ ;  $F_0(\vec{r}, t)$  — функция, учитывающая модуляцию

рассеянного поля уклонами крупномасштабного волнения.

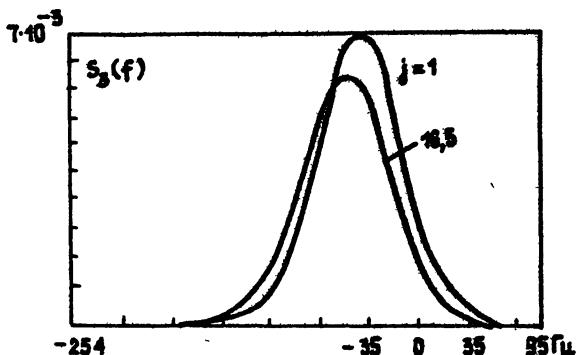


FIG. 4.

Для получения корреляционной функции брэгговской компоненты рассеянного поля необходимо выполнить усреднение по ряби, на которой происходит рассеяние, а затем по крупномасштабному волнению, на котором расположена эта рябь.

Функции  $F_0$ ,  $\varphi$  и  $\zeta$  почти не меняются на пространственно-временном масштабе корреляции ряби. Поэтому выполнив усреднение по ряби, получим следующее выражение для корреляционной функции:

$$-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\rho_x + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\rho_y + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\tau\right)\cos\theta_0 + \frac{1}{2R_\alpha[(y-vt-vt)^2 - (y-vt)^2]}\Big]\Big]\Big\},$$

где  $K_\xi(\vec{r}, t)$  - корреляционная функция ряби. Функция  $\zeta(\vec{r} + \vec{r}_0, t + \tau)$  была разложена в ряд и взяты первые два члена разложения.

Используя эмпирический спектр ряби, выразим корреляционную функцию ряби в выражении (6) через ее спектр.

Выполнив интегрирование полученного выражения по  $d\rho$ ,  $d\hat{x}$ ,  $d\omega$ , где  $\hat{x}$  - волновой вектор ряби, получим следующую формулу:

$$K_{\text{DD}}(\tau) = A_1^2 \int d\vec{r} \, \varphi^2(\vec{r} - \vec{r}_0) F_0^2(\vec{r}, t) \exp(2ikV \tau \cos \theta_0) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{2ik}{R_0} v_{ty}\right) 4\pi^2 W_\xi(\vec{z}_p) \{ \exp[-i\tau(\Omega + \vec{v}_{\text{орб}} \vec{z}_p)] +$$

$$+ \exp[-i\tau(-\Omega + \vec{v}_{\text{орб}} \vec{z}_p)] \}, \quad (7)$$

где  $\vec{v}_{\text{орб}}$  - орбитальная скорость элемента жидкости, а  $v_z = \partial \zeta / \partial t$  - вертикальная составляющая орбитальной скорости;  $W_\xi(\vec{z}_p)$  - спектр ряби;  $\vec{z}_p$  и  $\Omega$  - волновое число и частота, соответствующие резонансной длине волны ряби и связанные дисперсионным соотношением.

В случае зеркального рассеяния поляризация падающего излучения не играет роли. Для брэгговского рассеяния величины вертикальной и горизонтальной составляющей рассеянного поля различаются. Функцию  $F_0^2$  для горизонтальной поляризации определим следующим образом [9]:  $F_0^2 = \cos^2 \theta / \pi^2$ , а для вертикальной поляризации -  $F_0^2 = \epsilon \cos^4 \theta f(\epsilon, \psi) / \pi^2$ , где  $f(\epsilon, \psi) = [(1 + \eta_1 \cos \theta)^2 + \eta_2^2 \cos^2 \theta]^{-1}$ ,  $\eta_1 + i\eta_2 = \sqrt{\epsilon}$ .

Для получения спектра рассеянного поля осталось выполнить усреднение по крупномасштабному волнению, проинтегрировать по площадке рассеяния и перейти к спектру.

Предполагая, что  $(\sin \theta_0 - \theta_x \cos \theta_0) \gg \theta_y \cos \theta_0$ , будем в дальнейшем считать, что  $\vec{z}_p = (2k(\sin \theta_0 - \theta_x \cos \theta_0), 0)$ , где  $\theta_x = \partial \zeta / \partial x$ ,  $\theta_y = \partial \zeta / \partial y$ .

Для совместной функции распределения наклонов  $\theta_x$  и радиальной составляющей орбитальной скорости  $v_{\text{рад}}$  примем:

$$P(v_{\text{рад}}, \theta_x) = A \exp[-(B\theta_x^2 - C\theta_x v_{\text{рад}} + Dv_{\text{рад}}^2)], \quad (8)$$

где  $A, B, C, D$  - коэффициенты двумерной гауссовой функции распределения.

Рассмотрим спектр ряби. Его можно представить в следующем виде:  $W_\xi(\vec{z}_p) = W_1(k, \theta) W_2(\varphi)$ , где  $\varphi$  - угол между направлением луча локатора и направлением ветра.

Для определенности рассмотрим горизонтальную поляризацию падающего излучения. В этом случае зависимость от угла падения содержится в следующем члене:

$$F_0^2 W_1(k, \psi) \approx \cos^4 \theta_0 / (\sin \theta_0 2k)^{4.08}.$$

Разложим это выражение в ряд

$$\pi_0^2 W_1(k, \psi) = \operatorname{ctg}^4 \theta_0 / ((2k)^{4,08} \sin^{0,08} \theta_0) - \\ - (4 \operatorname{ctg}^3 \theta_0 + 4,08 \operatorname{ctg}^5 \theta_0) / (\sin^{0,08} \theta_0) \cdot (2k)^{-4,08} \theta_x + \dots \quad (9)$$

и ограничимся двумя членами ряда, считая, что  $\theta_x$  мало.

Основным будет нулевой член ряда, первый член дает поправку, связанную с учетом того, что рассеивающая поверхность наклонена под углом  $\theta_x$ .

Спектр брэгговской компоненты представим следующим образом:

$$S_{\text{бр}}(\omega) = S_{\text{бр}}^0(\omega) + S_{\text{бр}}^1(\omega).$$

Физический смысл нулевого члена - это рассеяние на плоской шероховатой поверхности, а первый член дает поправку, связанную с тем, что рассеивающая поверхность наклонена.

С учетом всех сделанных предположений спектр брэгговской компоненты рассеянного поля примет следующий вид:

$$S_{\text{бр}}^0(\omega) = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{ctg}^4 \theta_0 W_2(\varphi)}{2 (\sin \theta_0 k)^{0,08} \sqrt{8 \sigma_{\text{рад}}^2 k^2 + v^2 \delta^2 k^2}} \times \quad (10)$$

$$\times \left\{ \exp \left[ - \frac{(\Omega - \omega)^2}{8 \sigma_{\text{рад}}^2 k^2 + v^2 \delta^2 k^2} \right] + \exp \left[ - \frac{(\Omega + \omega)^2}{8 \sigma_{\text{рад}}^2 k^2 + v^2 \delta^2 k^2} \right] \right\};$$

$$S_{\text{бр}}^1(\omega) = \frac{2\sqrt{\pi} \operatorname{ctg}^3 \theta_0 W_2(\varphi) (4 + 4,08 \operatorname{ctg}^2 \theta_0)}{k^{2,08} \sin^{0,08} \theta_0 (8 \sigma_{\text{рад}}^2 k^2 + v^2 \delta^2)^{3/2}} K_{\text{храд}} \times \quad (11)$$

$$\times \left\{ (\Omega - \omega) \exp \left[ - \frac{(\Omega - \omega)^2}{8 \sigma_{\text{рад}}^2 k^2 + v^2 \delta^2 k^2} \right] - (\Omega + \omega) \exp \left[ - \frac{(\Omega + \omega)^2}{8 \sigma_{\text{рад}}^2 k^2 + v^2 \delta^2 k^2} \right] \right\}.$$

где  $\sigma_{\text{рад}}^2$  - дисперсия радиальной составляющей орбитальной скорости, а  $K_{\zeta \text{храд}}$  - совместная корреляционная функция  $\theta_x$  и  $v_{\text{рад}}$ .

Характерный вид зависимости спектра брэгговской компоненты

рассеянного поля от скорости ветра ( $U_{10} = 7, 5; 10; 12, 5$  м/с) при  $\theta_0 = 50^\circ$ ,  $\varphi_H = \varphi_B = 0$ ,  $V = 0$  приведен на рис. 5.

В рамках брэгговской модели рассеяние носит избирательный характер и определяется теми волнами, волновые числа которых удовлетворяют условию  $k_p = 2k \sin\theta$ .

Мы рассматриваем СВЧ-диапазон, брэгговское рассеяние происходит на ряби, покрывающей крупномасштабное волнение. В отсутствие затенений вклад в рассеянное поле дают все элементы волнового профиля крупной волны. Это приводит к тому, что спектр брэгговской компоненты шире спектра зеркальной компоненты, а смещение "центра тяжести" спектра меньше, так как вклад в зеркальную компоненту рассеянного поля дает только склон волны, обращенный к локатору.

Рис. 5.

Наличие в спектре ряби двух резонансных волн, бегущих в противоположных направлениях, приводит к появлению в нулевом приближении суммы двух гауссовых спектров, расположенных на частотах, соответствующих резонансной длине волны ряби. Однако резонансные максимумы для сантиметрового диапазона длин волн падающего излучения не разрешаются вследствие значительной ширины соответствующих доплеровских спектров. Первая поправка, учитывая наклон рассеивающей поверхности, приводит к перераспределению отраженной энергии по спектру.

Учет только первой поправки для спектра брэгговской компоненты приводит к тому, что спектр становится отрицательным на больших частотах (см. формулы (10) и (11)). Этот эффект не оказывает существенного влияния на форму спектра и при необходимости от него можно избавиться путем учета следующих членов разложения в (9).

Для нахождения спектра рассеянного поля необходимо, кроме модуляции рассеянного поля уклонами крупномасштабного волнения, учесть неравномерность распределения ряби по профилю крупной волны. В настоящее время не существует точного аналитического выражения, описывающего неравномерность распределения спектральной плотности ряби. Для оценки влияния этого эффекта на спектр принимаемого

сигнала воспользуемся следующим приближенным выражением [10]:

$$w_\xi(k, \theta_x) = w_\xi(k)(1 - \delta\theta_x), \quad |\delta\theta_x| < 0,5, \quad (12)$$

$$w_\xi(k, \theta_x) = w_\xi(k)[1 - 0,5 \operatorname{sgn}(\delta\theta_x)], \quad |\delta\theta_x| > 0,5,$$

где  $\delta$  - эмпирическая константа,  $\theta_x$  - наклон по ветру. Эта формула, не претендуя на точность, отражает общую закономерность распределения спектральной плотности ряби по профилю крупной волны. Для нахождения константы можно использовать информацию о сечении рассеяния.

С учетом (12) спектр запишется в следующем виде:

$$S_{\text{бр}}(\omega) = S_{\text{бр}}^0(\omega) + S_{\text{бр}}^1(\omega) + S_{\text{бр}}^2(\omega).$$

В формуле (11) для  $S_{\text{бр}}^1(\omega)$  вместо  $\operatorname{ctg}^3\theta_0 \sin^{-0,08}\theta_0 (4 + 4,08 \operatorname{ctg}^2\theta_0)$  появится член:  $\operatorname{ctg}^3\theta_0 \sin^{-0,08}\theta_0 (4 + 4,08 \operatorname{ctg}^2\theta_0) + \delta \operatorname{ctg}^4\theta_0 \sin^{-0,08}\theta_0$ .

Новый член, учитывающий неравномерность распределения ряби по профилю волны, имеет следующий вид:

$$S_{\text{бр}}^2(\omega) = \frac{\operatorname{ctg}^3\theta_0 (4 + 4,08 \operatorname{ctg}^2\theta_0) \delta \sqrt{\pi} w_2(\varphi)}{2 \sin^{0,08}\theta_0 k^{1,08} (8\sigma_{\text{рад}}^2 - v^2 \delta^2)^{3/2}} \times \quad (13)$$

$$\times \left\{ \left[ [2|\zeta_{xx}|(8\sigma_{\text{рад}}^2 + v^2 \delta^2) - 8\zeta_{xt}^2] + \frac{16(\Omega - \omega)^2 K_{\zeta_{xt}}^2}{k^2 (8\sigma_{\text{рад}}^2 + v^2 \delta^2)} \right] \times \right.$$

$$\times \exp \left[ - \frac{(\Omega - \omega)^2}{k^2 (8\sigma_{\text{рад}}^2 + v^2 \delta^2)} \right] + \left[ [2|\zeta_{xx}|(8\sigma_{\text{рад}}^2 + v^2 \delta^2) - 8\zeta_{xt}^2] + \right.$$

$$\left. + \frac{16(\Omega + \omega)^2 K_{\zeta_{xt}}^2}{k^2 (8\sigma_{\text{рад}}^2 + v^2 \delta^2)} \right] \exp \left[ - \frac{(\Omega + \omega)^2}{k^2 (8\sigma_{\text{рад}}^2 + v^2 \delta^2)} \right] \} .$$

На рис. 6 приведены спектры с учетом модуляции спектра ряби крупной волной и без модуляции. При расчетах предполагалось, что  $U_{10} = 10$  м/с;  $\theta_0 = 50^\circ$ ;  $\delta = 0,5$ ;  $\varphi_w = 0$ . При  $\varphi_w = 0$  учет модуляции спектра ряби крупной волной уменьшает влияние модуляции уклонами, а

если  $\varphi_w = 180^\circ$  - усиливает. Характеристики спектров, измеренных при направлении луча локатора по ветру и против, будут различаться.

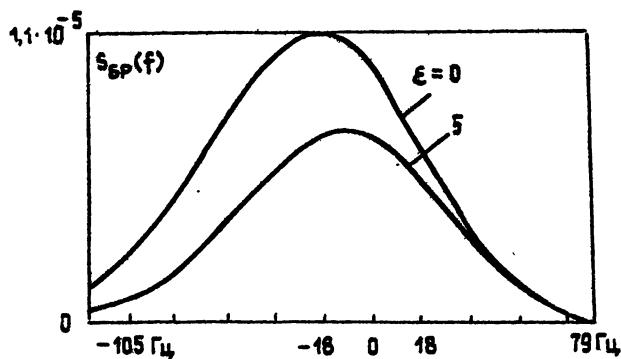


Рис.6.

3. Наименее исследованной областью является интервал углов падения, для которых рассеянное поле находится с учетом обоих механизмов рассеяния. Мы исходили из предположения, что корреляцией между брэгговской и зеркальной компонентой можно пренебречь. В этом случае спектр рассеянного поля является суммой зеркальной и брэгговской компонент:  $S(\omega) = S_3(\omega) + S_{bp}(\omega)$ .

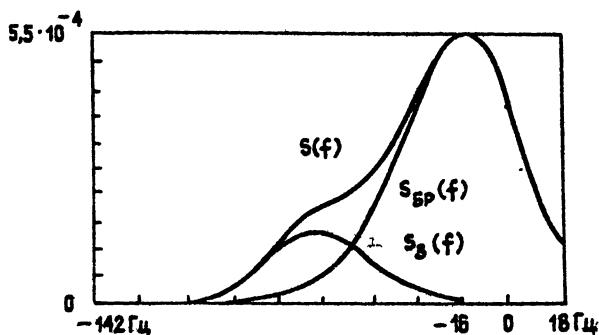


Рис.7.

На рис. 7 приведен спектр рассеянного поля и его составляющие. Вычисления выполнены для  $\theta_0 = 23^\circ$ ,  $U_{10} = 6$  м/с,  $\varphi_w = 0$ . Несмотря на то, что сечение рассеяния при этих условиях определяется в основном брэгговской компонентой ( $\sigma_{bp} = -8,6$  дБ), а учет зеркальной компоненты дает небольшую поправку к сечению ( $\sigma_3 = -14,3$  дБ), полный спектр заметно отличается от спектра брэгговской компоненты. Вклад

зеркальной компоненты будет возрастать при уменьшении угла падения. Проведение измерений спектра отраженного сигнала в переходной области от зеркального к брэгговскому механизму рассеяния позволит уточнить относительный вклад каждого механизма в процесс рассеяния. Возможно, что именно в этом диапазоне углов падения спектр отраженного сигнала является наиболее чувствительным к изменениям параметров морского волнения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс И. М. //Акуст. журн. 1974. Т. 20. Вып. 3. С. 458.
2. Лейкин И. А., Островский И. Е. и др. //Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 3. С. 346.
3. Valenzuela G. R., Laing M. B. //J. Geoph. Res. 1970. V. 75. N 3. P. 551.
4. Plant W. J., Keller W. C. //J. Geoph. Res. 1990. V. 95. N 9. P. 16299.
5. Alpers W. //J. Geoph. Res. 1983. V. 88. N 5. P. 1745.
6. Mazuko H., Ken'ichi Okamoto et al. //J. Geoph. Res. 1986. V. 91. N 11. P. 13065.
7. Dale P. Winebrenner, Hasselmann K. //J. Geoph. Res. 1988. V. 91. N 8. P. 9281.
8. Каневский М. Б. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1985. Т. 21. N 5. С. 544.
9. Дистанционные методы изучения океана. - Горький: ИПФ АН СССР, 1987. С. 5.
10. Donelan M. A., Pierson W. J. //J. Geoph. Res. 1987. V. 92. N 5. P. 4971.

Институт прикладной физики  
РАН

Поступила в редакцию  
30 июля 1991 г.

## SPECTRUM OF A RADAR SIGNAL BACKSCATTERED FROM SEA SURFACE

M. B. Kanevsky, V. Yu. Karaev

The theoretical problem on microwave signal spectrum, taking into account and Bragg scattering is considered. Investigations of backscattered field spectrum characteristics depending on wind velocity, incidence angle of radar beam, radar velocity and antenna beamwidth are fulfilled. The results obtained testify to high sensitivity of spectrum characteristics relative to variations of sea surface parameters.

УДК 621.371 :526.2+551.526

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ОДНОРОДНОГО  
ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПО ТЕПЛОВОМУ РАДИОИЗЛУЧЕНИЮ  
НА ОСНОВЕ ТЕРМОЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ**

К. П. Гайкович

Получено аналитическое решение задачи определения температурного профиля полупространства по эволюции яркостной температуры его теплового радиоизлучения на основе совместного решения уравнения переноса излучения и теплопроводности.

**1. Введение.** Дистанционное определение температурного распределения среды по тепловому радиоизлучению применяется для решения задач геофизики, радиоастрономии, медико-биологической диагностики, а также для зондирования атмосферы. Все расширяется круг задач подповерхностного зондирования. Наиболее существенным отличием от атмосферных задач, которое вызывает и наибольшие трудности, является наличие при подповерхностном зондировании отражения и рассеяния от границ раздела. При этом вариации яркостных температур среды, связанные со спектральной и температурной зависимостью коэффициента отражения, часто превосходят эффект, связанный с глубинной неоднородностью температуры.

Возможно, именно поэтому задачи подповерхностного зондирования начали впервые решаться в радиоастрономии, где, например, вариации яркостной температуры Луны составляют 150 - 200 К и существенно превосходят вариации, связанные с неопределенностью коэффициента отражения ( $\leq 10$  К) [1]. Дальнейшее развитие эти задачи получили в медицинских приложениях при радиометрическом зондировании внутренней температуры тела, где был применен контактный метод, использующий компенсирующее подшумливание [2, 3] и решена проблема формирования теплового излучения многослойной среды [4]. Проявился большой интерес и к возможностям подповерхностного зондирования в геофизических задачах [5]. Заметное практическое продвижение в этом

направлении было достигнуто в работах [6, 8], где конкурирующие факторы отражения и рассеяния были устраниены с помощью специальной методики измерений, основу которой составляет прием излучения антенной системой, расположенной под плоским металлическим экраном. С помощью этой методики решались задачи зондирования термически стратифицированного поверхностного слоя водной среды [6], температурного профиля грунта в летних и зимних условиях [7, 8].

Перечисленные проблемы сводятся к решению задачи определения температурного профиля  $T(z)$  полупространства  $z \leq 0$  по яркостным температурам  $T_{\text{я}}$  теплового радиоизлучения

$$T_{\text{я}}(\lambda) = (1 - R) \int_{-\infty}^0 T(z) \gamma(\lambda) \exp[\gamma(\lambda) z] dz, \quad (1)$$

$\gamma$  – коэффициент поглощения среды,  $\lambda$  – длина волны,  $R$  – коэффициент отражения (в дальнейшем полагаем  $R = 0$ ). Трудность решения (1) связана с тем, что это уравнение Фредгольма 1-го рода является некорректным и его решение невозможно без использования дополнительной информации о  $T(z)$  [9]. В конкретной физической ситуации эта информация может иметь тот или иной специфический вид, который и определяет метод регуляризации (1). При термическом зондировании атмосферы обычно используется статистическая информация о среднем профиле температуры и его ковариационных межуровневых связях (так называемый метод "статистической регуляризации") [10], а также регрессионные методы [11]. Иногда бывает известен вид функции  $T(z)$ , как например, при зондировании структуры внутренних волн в атмосфере [12] или при измерениях промерзшего грунта [8]. Тогда задача сводится к решению возникающей системы уравнений относительно параметров, определяющих эту функцию. В других случаях известно, что  $T(z)$  принадлежит к компактному классу функций (монотонных, выпуклых, с ограниченной вариацией). Тогда решение получается путем минимизации невязки градиентными методами [13]. Весьма эффективны методы Тихонова [9], использующие квадратичную суммируемость или существование производных  $T(z)$ , основанные на минимизации регуляризирующего функционала (метод обобщенной невязки [9]). Этот подход с успехом применялся в [6 – 8].

Новые возможности дистанционного зондирования открываются, если использовать тот факт, что подповерхностное температурное распределение не произвольно, а удовлетворяет уравнению теплопроводности для определенных граничных условий. Это позволяет

ввести в рассмотрение и использовать временную зависимость яркостной температуры. Оказывается возможным получить аналитическое решение уравнения (1).

**2. Термоэволюционные уравнения для яркостной температуры.** Идея использования уравнения теплопроводности для решения (1) возникла еще в первых работах по подповерхностному зондированию Луны, где в (1) подставлялось известное решение уравнения теплопроводности для периодического граничного условия [1]. В [7, 14] было получено совместное решение уравнений переноса излучения и теплопроводности для произвольных граничных условий в виде интегральных соотношений между наблюдаемыми яркостными температурами и предшествовавшей эволюцией температуры (или теплового потока) поверхности. Эти соотношения получили название термоэволюционных уравнений.

В случае, когда граничное условие для температуры  $T(z, t)$  полупространства  $z \leq 0$  ( $t$  - время) с коэффициентом температуропроводности  $a^2$  имеет вид

$$T(0, t) = T_0(t), \quad (2)$$

для яркостной температуры справедливо первое термоэволюционное уравнение

$$T_y(t) = \int_{-\infty}^t T_0(\tau) \left[ \frac{\gamma a}{\sqrt{\pi}(t-\tau)} - (\gamma a)^2 \operatorname{erfc}(\gamma a \sqrt{t-\tau}) \exp[(\gamma a)^2(t-\tau)] \right] d\tau. \quad (3)$$

Если задать граничное условие для потока тепла  $J_0$  через поверхность  $z = 0$  в виде

$$\frac{dT}{dz}(0, t) = - \frac{1}{k} J_0(t), \quad (4)$$

получается второе термоэволюционное уравнение

$$T_y(t) = - \int_{-\infty}^t J_0(\tau) \frac{a^2 \gamma}{k} \operatorname{erfc}(\gamma a \sqrt{t-\tau}) \exp[(\gamma a)^2(t-\tau)] d\tau, \quad (5)$$

$k$  - коэффициент теплопроводности.

Уравнения (3) и (5) использованы в [7, 14] для решения ряда задач дистанционного зондирования температурной динамики и теплообмена поверхности с атмосферой. В частности, уравнения (3) и (5) решались численно как линейные интегральные уравнения Вольтерра

1-го рода (с переменным верхним пределом) относительно  $T_0(\tau)$  или  $J_0(\tau)$ . Далее, из известных решений уравнения теплопроводности определялась динамика подповерхностного профиля  $T(z, t)$ . При этом важно отметить, что восстановление осуществлялось по наблюдениям  $T_z$  только на одной длине волны.

Однако решение интегральных уравнений (3) и (5) численными методами является довольно сложной задачей, в которой при вычислениях на ПЭВМ среднего класса неизбежны ограничения на размерность величин. Это обстоятельство, а также желание получить более глубокие результаты стимулировало поиск аналитического решения (3) и (5), которое позволило бы непосредственно вычислять профиль  $T(z, t)$  по заданной динамике  $T_z(t)$ : Вывод этого результата и составляет основное содержание работы.

3. Решение термозвуковых уравнений. Будем исходить из уравнения (5). Перепишем его в сокращенном виде

$$T_z(t) = - \int_{-\infty}^t J_0(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (6)$$

и продифференцируем по  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{dT_z}{dt} &= - \frac{a^2 \gamma}{K} J_0(t) - \frac{a^2 \gamma}{K} \int_{-\infty}^t J_0(\tau) (\gamma a)^2 \times \\ &\times \left[ \frac{k}{a^2 \gamma} K(t, \tau) - \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma a \sqrt{t-\tau}} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Замечая, что в (7) второе слагаемое с точностью до множителя совпадает с (6), имеем

$$\frac{dT_z}{dt} = (\gamma a)^2 T_z - \frac{a^2 \gamma}{K} J_0(t) + \frac{a^2 \gamma}{K} \frac{(\gamma a)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t J_0(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (8)$$

Обозначив  $\chi = \frac{\gamma a}{\sqrt{\pi}}$ ,  $f(t) = - \frac{k}{a^2 \gamma} \left( \frac{dT_z}{dt} - (\gamma a)^2 T_z \right)$ , можно

переписать (8) как

$$J_0(t) = \chi \int_{-\infty}^t J_0(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + f(t) \quad (9)$$

- уравнение Вольтерра 2-го рода с ядром абелевского типа. Для его решения используем метод итерированных ядер [15]. Выполним конволюцию (свертку) левой и правой частей уравнения (9) с ядром интеграла в (9). Имеем

$$x \int_{-\infty}^t J_0(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = x^2 \pi \int_{-\infty}^t J_0(\tau) d\tau + x^2 \int_{-\infty}^t f(t) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (10)$$

В силу уравнения (9)

$$x \int_{-\infty}^t J_0(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = J_0(t) - f(t), \quad (11)$$

так что (10) принимает вид

$$J_0(t) = (\gamma a)^2 \int_{-\infty}^t J_0(\tau) d\tau + f(t) + \frac{\gamma a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t f(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (12)$$

Дифференцируя (12) по времени, имеем

$$\frac{dJ_0}{dt} = (\gamma a)^2 J_0 + f'(t) + \frac{\gamma a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t f'(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (13)$$

Уравнение (13) легко интегрируется:

$$J_0(t) = \int_{-\infty}^t f'(\tau) \exp[(\gamma a)^2(t-\tau)] \operatorname{erfc}(-\tau a \sqrt{t-\tau}) d\tau. \quad (14)$$

Далее, подставим в (14) выражение  $f' = -\frac{k}{a^2 \gamma} (T''_y - (\gamma a)^2 T'_y)$ ,

$$J_0(t) = \frac{k}{a^2 \gamma} \int_{-\infty}^t (\gamma a)^2 T'_y(\tau) \exp[(\gamma a)^2(t-\tau)] \operatorname{erfc}(-\tau a \sqrt{t-\tau}) d\tau - \quad (15)$$

$$- \frac{k}{a^2 \gamma} \int_{-\infty}^t T''_y(\tau) \exp[(\gamma a)^2(t-\tau)] \operatorname{erfc}(-\tau a \sqrt{t-\tau}) d\tau$$

и проинтегрируем второе слагаемое в (15) по частям

$$J_0(t) = \frac{k}{a^2 \gamma} \left[ \int_{-\infty}^t (\gamma a)^2 T_R'(\tau) \exp[(\gamma a)^2(t-\tau)] \operatorname{erfc}(-\gamma a \sqrt{t-\tau}) d\tau - \right. \quad (16)$$

$$\left. - T_R'(\tau) \exp[(\gamma a)^2(t-\tau)] \operatorname{erfc}(-\gamma a \sqrt{t-\tau}) \right|_{-\infty}^t -$$

$$- \int_{-\infty}^t (\gamma a)^2 T_R'(\tau) \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma a \sqrt{t-\tau}} + \exp[(\gamma a)^2(t-\tau)] \operatorname{erfc}(-\gamma a \sqrt{t-\tau}) d\tau \right).$$

В результате получается формула обращения для уравнения (5):

$$J_0(t) = - \frac{k}{a^2 \gamma} \left( T_R'(t) + \gamma a \int_{-\infty}^t T_R'(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right). \quad (17)$$

Решение уравнения (3) получается из известного выражения, связывающего  $J_0(t)$  и  $T_0(t)$  [16]:

$$T_0(t) = - \frac{a}{k} \int_{-\infty}^t J_0(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}. \quad (18)$$

Подставив (17) в (18), имеем

$$T_0(t) = T_z(t) + \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^t T_R'(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}. \quad (19)$$

Выражения (17) и (19) позволяют определить эволюцию температурного профиля  $T(z, t)$  на основе решений уравнения теплопроводности. Так, подставляя (19) в известное соотношение [16],

$$T(z, t) = - \int_{-\infty}^t T_0(\tau) \frac{z}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau, \quad (20)$$

имеем

$$T(z, t) = - \int_{-\infty}^t T_R'(\tau) \frac{z}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau - \quad (21)$$

$$- \int_{-\infty}^t \left( \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^\tau T_R'(s) \frac{ds}{\sqrt{\pi(\tau-s)}} \right) \frac{z}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau.$$

Изменяя порядок интегрирования во втором слагаемом (21) и выполняя необходимые преобразования, имеем

$$T(z, t) = - \int_{-\infty}^t T_{\text{я}}(\tau) \frac{z}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau + \quad (22)$$

$$+ \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^t T'_{\text{я}}(\tau) \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}.$$

И, наконец, интегрируя второе слагаемое (22) по частям, получаем искомое соотношение:

$$T(z, t) = \int_{-\infty}^t T_{\text{я}}(\tau) \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \left[ -z - \frac{1}{\gamma} \left( 1 - \frac{z^2}{2a^2(t-\tau)} \right) \right] \times (23)$$

$$\times \frac{d\tau}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}}.$$

Таким образом, профиль температуры представляется в виде интеграла от эволюции яркостной температуры, т. е. задача одноволнового температурного зондирования имеет точное решение и является корректной (на что указывали результаты численного решения уравнений (3) и (5) [14]). Следует отметить, что максимальная глубина зондирования при использовании (23) не ограничена толщиной скин-слоя, как при решении (1) без учета уравнения теплопроводности.

Рассмотрим асимптотическое поведение полученных уравнений при неограниченном росте коэффициента поглощения среды ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), когда из (1) следует  $T_{\text{я}} \approx T_0$  (полагая  $R = 0$ ). Уравнение (23) при этом переходит в соотношение (20), уравнение (19) дает естественный результат  $T_0(t) = T_{\text{я}}(t)$ , а уравнение (17) переходит в выражение

$$J_0(t) = - \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t \frac{dT_0}{d\tau}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}, \quad (24)$$

которое представляет собой известное соотношение между эволюцией потока тепла и поверхностной температурой (см., например, в [16]).

Таким образом, можно отметить, что полученные уравнения весьма

компактны и имеют ясный физический смысл.

Полученные результаты открывают новые возможности радиометрического зондирования. Одноволновый контроль температурного распределения среды, температуры поверхности и потока тепла через границу полупространства реализуется на основе соотношений (17), (19) и (24). Более широкие возможности использования этих уравнений по сравнению с методом численного интегрирования уравнений (3) и (5), реализованным в [14], вполне очевидны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонова Т. В., Троицкий В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 9. С. 1273.
2. Троицкий В. С., Аранжереев В. А., Густов А. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 29. № 1. С. 62.
3. Гайкович К. П., Троицкий Р. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 31. № 9. С. 1104.
4. Bardati F., Solimini D. // Radio Sci. 1983. V. 18. N 6. P. 1393.
5. Кондратьев К. Я., Шульгина В. М. // ДАН СССР. 1971. Т. 200. № 1. С. 88.
6. Гайкович К. П., Резник А. Н., Сумин М. И., Троицкий Р. В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1987. Т. 23. № 7. С. 761.
7. Гайкович К. П., Резник А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 11. С. 1343.
8. Гайкович К. П., Резник А. Н., Троицкий Р. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 12. С. 1467.
9. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягода А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. - М.: Наука, 1983.
10. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. // УФН. 1970. Т. 102. № 3. С. 345.
11. Westwater E.R., Srocezy W.B. // J. Climate Applied Meteorology. 1984. V. 23. № 5. P. 689.
12. Гайкович К. П., Троицкий А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 2. С. 103.
13. Василенко Н. А., Гайкович К. П., Сумин М. И. // ДАН СССР. 1986. Т. 290. № 6. С. 1332.
14. Гайкович К. П. // Исследование Земли из космоса. 1990. № 6. С. 71.
15. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1975.
16. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988.

DETERMINATION OF THE TEMPERATURE DISTRIBUTION IN HOMOGENEOUS  
HALF-SPACE BY THERMAL RADIOEMISSION ON THE BASE  
OF THERMOEVOLUTION EQUATION

K. P. Gaikovich

On the base of mutual solution of thermal conductivity and radiation transfer equations the solution of the problem of half-space temperature profile determination by evolution of its brightness temperature is obtained.

УДК 533. 9. 082. 7

**НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ТОКОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ  
МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ**

**А. Н. Карапшин, М. И. Цимринг**

Исследовано возбуждение токовых неустойчивостей нижней ионосферы для неоднородностей с произвольной степенью вытянутости вдоль магнитного поля с учетом возмущений температуры электронов и зависимости частоты столкновений электронов от их температуры. Обнаружено, что при достаточно сильной температурной зависимости частоты столкновений электронов пороговая скорость фарли-бунемановской неустойчивости имеет минимум при конечной степени вытянутости неоднородностей. Найдена коротковолновая граница возбуждения токовых неустойчивостей.

Низкочастотные токовые неустойчивости в ионосферной плазме ранее рассматривались в целом ряде работ (см., например, [1 - 4]). В работах [3, 4] было показано, что на развитие неустойчивостей может оказать существенное влияние учет возмущений температуры электронов. В то же время в этих работах пренебрегалось различными факторами: термодиффузией и теплопроводностью в [3], джоулевым разогревом электронов поляризационным электрическим полем [4, 5], зависимостью частоты столкновений электронов от температуры и др. В настоящей работе мы рассмотрим возбуждение токовых неустойчивостей в неоднородной слабоионизованной магнитоактивной плазме с учетом перечисленных факторов для неоднородностей с произвольной степенью вытянутости вдоль магнитного поля и масштабом поперек магнитного поля. Примем, что электроны замагничены, а ионы - незамагничены, причем выполнено условие  $\nu_e \nu_1 / \Omega_{Be} \Omega_{Vi} \ll 1$  ( $\nu_e, \nu_1, \Omega_{Be}, \Omega_{Vi}$  - соответственно частоты столкновений электронов с нейтральными частицами, ионов с нейтральными частицами и гирочастоты электронов и ионов). В ионосфере такая плазма соответствует условиям  $B$ -слоя на высотах 100 - 110 км.

# 1. Развитие токовых неустойчивостей в неоднородной плазме

Рассмотрим следующую задачу. В линейно-неоднородном слое замагниченной плазмы дрейфуют электроны со скоростью  $\vec{v}_e$  поперек направления магнитного поля.

Линеаризуем уравнения диффузии и теплопроводности плазмы относительно малых возмущений концентрации плазмы  $\delta N$  и температуры электронов  $\delta T_e$  от состояния равновесия. Вид исходных уравнений, значения кинетических коэффициентов при условии замагниченности электронов ( $v_e \ll \Omega_{B_0}$ ) и незамагниченности ионов ( $v_i \gg \Omega_{B_0}$ ), а также при учете зависимости частоты столкновений электронов от температуры приведены в [4].

Поляризационное поле, возникающее при стратификации плазмы, будем считать потенциальным и определим его, используя условие квазинейтральности плазмы  $N_e \approx N_i = N$ , из уравнения [4]

$$\operatorname{div} \delta \vec{j}_i = \operatorname{div} \delta \vec{j}_e, \quad (1)$$

где  $\delta \vec{j}_i$ ,  $\delta \vec{j}_e$  - плотности потока ионов и электронов соответственно.

1.1. Гидродинамическое описание ионов. Рассмотрим масштабы плазменных неоднородностей, достаточно крупные по сравнению с длиной свободного пробега ионов  $k_{l_i} \ll 1$ . В этом случае для последних можно использовать гидродинамическое описание.

Разлагая малые возмущения по плоским волнам  $\exp(-i\omega t + ik\vec{r})$ , получим следующую систему уравнений:

$$\left[ -i\omega + \frac{i\vec{k}\vec{v}_0 - i\beta k_{\perp} v_i + (1+\beta)k_{\perp}^2 D(1+\eta_{l_i})}{1+\eta_0(1-i\eta_0 k_{\perp} v_i / k_{\perp}^2 D + i\eta_{l_i})} \right] \frac{\delta N}{N_0} + \frac{(1+\alpha + (1-\alpha)\eta_{l_i})k_{\perp}^2 D}{1+\eta_0(1-i\eta_0 k_{\perp} v_i / k_{\perp}^2 D + i\eta_{l_i})} \frac{\delta T_e}{T_{e0}} = 0; \quad (2)$$

$$\left[ -i\frac{2}{3} \alpha k|v_0| - i\frac{2}{3} \frac{(1+\alpha + (1-\alpha)\eta_{l_i})k_{\perp}^2 D}{1+\eta_0(1-i\eta_0 k_{\perp} v_i / k_{\perp}^2 D + i\eta_{l_i})} \eta_0 \vec{k}\vec{v}_0 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3} \left[ \frac{(1+\beta)(1+\alpha+(1-\alpha)\eta_1)k_1^2 D}{1+\eta_0(1-i\eta_0 k_1 v_1/k_1^2 D + i\eta_1)} \right] \frac{\delta N}{N_0} + \\
& + \left[ -i\omega + ik\vec{v}_0 + (p + \tilde{p}\eta_1)k_1^2 D + \delta v_0 - \right. \\
& \left. - \frac{2}{3} \frac{(1+\alpha+(1-\alpha)\eta_1)k_1^2 D}{1+\eta_0(1-i\eta_0 k_1 v_1/k_1^2 D + i\eta_1)} \eta_0 \right] \frac{\delta T}{T_{e0}} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $\eta_0 = v_e v_i / \Omega_{Be} \Omega_{Bi}$ ,  $\eta_1 = (\Omega_{Be}^2 / v_e^2) k_{||}^2 / k_1^2$ ,  $D = \rho_e^2 v_e$ ,  $\beta = T_{e0} / T_{e0}$ ,  $v_1 = \frac{\rho_e}{L} v_{Te}$ ,  $k_{||}, k_1$  –

соответственно продольная и поперечная составляющие волнового вектора неоднородностей,  $\rho_e$  – гирорадиус электронов,  $\delta$  – доля энергии, отдаваемая электроном при столкновении с тяжелой частицей

$$p = (7 + 2\alpha(\alpha + 3))/3, \quad \tilde{p} = (7 + 2\alpha(\alpha - 3))/3.$$

Частота столкновений электронов предполагается зависящей от электронной температуры по степенному закону:  $v_e \sim T_e^\alpha$  [8].

В (2), (3) не учитываются возмущения температуры ионов вследствие того, что ионы имеют высокую теплопроводность поперек магнитного поля (отношение поперечных ионного и электронного коэффициентов теплопроводности по порядку величины составляет  $\Omega_{Be} v_i / \Omega_{Bi} v_e \gg 1$ ), а также из-за малого времени релаксации температуры ионов за счет столкновений (отношение времен релаксации ионной и электронной температур имеет порядок  $\delta v_e / v_i \ll 1$ ).

Уравнения (2), (3) получены в приближении невысоких частот возмущений  $\omega < kv_{Ti} \ll v_1$ , т. е. при пренебрежении инерцией ионов. Учесть инерцию ионов можно путем замены  $v_1 \rightarrow v_1 - i\omega$ . При этом область применимости (2), (3) расширяется на частоты  $\omega \leq kv_{Ti}$ .

Полагая частоту комплексной  $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$ , получаем дисперсионное уравнение из условия равенства нулю детерминанта системы (2), (3). При  $\gamma = 0$  получаем, что пороговая скорость неустойчивости  $v_p$  определяется из следующей системы уравнений:

$$H = k_1^2 c_s^2 - \omega_p^2 - \frac{\Delta\omega + \omega \eta_0 [1 + \eta_1 + 2(1+\alpha+(1-\alpha)\eta_1)^2 (k_1 \rho_e)^2 v_e / 3v_1]}{4 k_1^2 D \tau} \Delta\omega -$$

$$-\frac{p + \tilde{p}\eta_1 + \delta\nu_e(1+\eta_1)/k_1^2 D}{\lambda} \omega\nu_1 \frac{\vec{k}_1 \vec{v}_1}{k_1^2 D} = 0; \quad (4)$$

$$L = \Delta\omega_p + \frac{[A - 2(1+\alpha + (1-\alpha)\eta_1)k|v_0|/3\vec{k}\vec{v}_{00}]k_1^2 D/\tau}{(k_1^2 c_s^2 - \omega^2)(1+\eta_1) + (p + \tilde{p}\eta_1)k_1^2 D/\tau + \delta\nu_e/\tau - \omega\nu_1 \vec{k}_1 \vec{v}_1/k_1^2 D} \omega\eta_0 = 0, \quad (5)$$

где  $c_s = [(T_e + T_i)/M]^{1/2}$  — скорость ионного звука,  $\Delta\omega_p = \omega - kv_p$ ,

$$A = (p + \tilde{p}\eta_1)(1+\eta_1) - \frac{2}{3}(1+\alpha + (1-\alpha)\eta_1)^2 + \delta\nu_e(1+\eta_1)/k_1^2 D.$$

Частота и инкремент неустойчивости находятся из решения следующей системы:

$$H + \left\{ k_1^2 c_s^2 - \omega^2 + [(p + \tilde{p}\eta_1)k_1^2 D + \delta\nu_e] \left[ \frac{1}{\tau} + \nu_1(1+\eta_1) \right] - \frac{\nu_1 \omega k_1 v_1}{k_1^2 D} \right\} \frac{\gamma}{Ak^2 D} = 0; \quad (6)$$

$$L + \frac{[2\Delta\omega/\tau + (\omega + \Delta\omega)(1+\eta_2)\nu_1]\gamma}{(k_1^2 c_s^2 - \omega^2)(1+\eta_1) + (p + \tilde{p}\eta_1)k_1^2 D/\tau + \delta\nu_e - \omega\nu_1 k_1 v_1/k_1^2 D} = 0. \quad (7)$$

В левых частях (6), (7) в выражениях для  $H$  и  $L$  вместо  $\Delta\omega_p$  следует подставить  $\Delta\omega = \omega - \vec{k}\vec{v}_0$ . Положим в уравнениях (4) — (7)

$$\eta_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad \alpha = 0, \quad (8)$$

т. е. рассмотрим возбуждение бесконечно вытянутых вдоль магнитного поля неоднородностей в однородной плазме в предположении, что частота столкновений электронов не зависит от температуры электронов.

Принимая, что  $\gamma \ll \omega$ , находим частоту и инкремент неустойчивости:

$$\omega = \frac{\vec{k}\vec{v}_0}{1 + \eta_0 [1 - \frac{5}{3} \beta^{-1} (kl_1)^2 (1 - k^2 c_s^2 / \omega^2)]}; \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{\omega^2 - k^2 \frac{5T_e + T_i}{M} + \frac{[k^2 \frac{10T_e/3 + T_i}{M} - \omega^2][\omega^2 - k^2 c_s^2]}{\omega^2 k^2 v_{T1}^2} \frac{5}{3} \beta (kl_1)^2}{[1 - \frac{\omega^2 - k^2 c_s^2}{\omega^2}]^2 (7/3\beta + 1) (kl_1)^2 [1 + \eta_0]} \tau. \quad (10)$$

При  $k_1 = 0$  (9), (10) совпадают с результатами работы [6], полученными в предположениях (8) и в нулевом приближении по  $k_1$ . В то же время при не слишком малых значениях  $k_1$ , пороговая скорость фарли-бунемановской неустойчивости меньше указанного в [6] значения  $c^* = \{(T_e + 5T_i/3)/M\}^{1/2}$ . Так, на высотах ионосфера порядка 110 км, для параметров, указанных ниже (см. табл. 1), величина пороговой скорости составляет 570 м/с при  $k \sim 1,6 \cdot 10^{-2}$  см $^{-1}$ , в отличие от величины 675 м/с, приведенной в [6]. Инкремент неустойчивости соответственно увеличивается. С ростом поперечного волнового числа, как видно из (9), (10), пороговая скорость неустойчивости несколько уменьшается, а инкремент увеличивается до тех пор, пока не начнут проявляться кинетические эффекты бесстолкновительного затухания на ионах, рассмотренные в следующем параграфе. Результаты численного исследования неустойчивости при произвольных параметрах  $\eta_1$ ,  $\alpha$ ,  $v_1$  на всем пространственном спектре возбуждения приводятся в п. 3.

Таблица 1

Высота	100 км	110 км
$v_e$ (с $^{-1}$ )	$4.2 \cdot 10^4$	$10^4$
$v_i$ (с $^{-1}$ )	$1.6 \cdot 10^4$	$2.6 \cdot 10^3$
$v_{Te}$ (см/с)	$5.6 \cdot 10^6$	$6.4 \cdot 10^6$
$v_{Ti}$ (см/с)	$3.3 \cdot 10^4$	$3.7 \cdot 10^4$
$\Omega_{Be}$ (с $^{-1}$ )		$10^7$
$\Omega_{Bi}$ (с $^{-1}$ )		$2 \cdot 10^2$
$\eta_0$	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$
$\delta$		$10^{-3}$

1.2. Воздействие мелкомасштабных неоднородностей. Кинетическое описание ионов. Гидродинамическое описание ионов, принятное в п. 1.1, пригодно на масштабах неоднородностей  $k_1 \ll 1$ . Для исследования возбуждения более мелких масштабов ( $k_1 \sim 1$ ) необходимо кинетическое описание ионов. Для таких масштабов регулярной неоднородностью плазмы можно пренебречь (критерий такого пренебрежения  $k^2 l_{i,L} \ll \Omega_{Be}/v_e$  для мелкомасштабных неоднородностей

приводит к неравенству  $L/l_1 \ll \Omega_{Be}/\nu_i$ , справедливому в нижней ионосфере).

Кинетическое уравнение для функции распределения запишем в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{M} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} = -\nu_i (f_1 - (M/2\pi T_{i0})^{3/2} e^{-\frac{Mv^2}{2T_{i0}}}). \quad (11)$$

Здесь  $f_1$  - функция распределения ионов, столкновительный член используется в форме модельного интеграла БГК [7].

Представим функцию распределения ионов в виде:  $f_1 = f_{0i} + \delta f_1$ , где в качестве невозмущенной используется максвелловская функция распределения  $f_{0i} = N_0 (M/2\pi T_{i0})^{1/2} e^{-\frac{Mv^2}{2T_{i0}}}$ .

Решая линеаризованное уравнение (11) относительно малых возмущений  $\delta f_1 = \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$ , находим возмущение плотности потока ионов  $\delta j_{1\perp} = \int \delta f_1 d\vec{v}$ . Для случая сильно вытянутых вдоль магнитного поля неоднородностей  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ :

$$\delta j_{1\perp} \approx -\frac{N_0}{k_{\perp}} \left[ (\omega + i\nu_i) \frac{e\varphi_c}{T_{i0}} + i\nu_i \frac{\delta N}{N_0} \right] (1 - zS(z)), \quad \delta j_{1\parallel} \approx 0, \quad (12)$$

где  $\delta N = \int \delta f_1 d\vec{v}$ ,  $z = \Omega + i\theta = \frac{\omega + i\nu_i}{2^{1/2} k_{\perp} v_{Ti}}$ ; функция  $S(z) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-t^2)}{z - t} dt$ .

Подставляя (12) в (1), получаем потенциал поляризационного поля:

$$\varphi_c = -\frac{eN_0}{k\hat{k}} \left\{ -i\frac{\eta}{\eta_0} k v_0 \frac{\delta N}{N_0} + (k\hat{D}_1 \vec{k} - k\hat{D}_e \vec{k}) \frac{\delta N}{N_0} - k\hat{D}_{Te} \vec{k} \frac{\delta T_e}{T_{e0}} \right\}, \quad (13)$$

где  $\eta = \eta_0 \frac{i\nu_i}{\omega + i\nu_i} \frac{1}{2\theta^2(1 - zS(z))}$ .

Считая выполненным условие  $\omega < \nu_i$ , разложим величину  $\eta$  в ряд по малому параметру  $\omega/\nu_i$  и сохраним два первых члена:

$$\eta = \eta_0 (f_0 + i f_1 \omega / \nu_i),$$

где

$$f_0 = \frac{1/2\theta^2}{1 - \pi^{1/2} \theta e^{\theta^2} \operatorname{erfc}(\theta)},$$

$$f_1 = \frac{1}{2\theta^2} \left[ \frac{1 + 2\theta^2}{1 - \pi^{1/2}\theta e^{\theta^2} \operatorname{erfc}(\theta)} - \frac{\pi^{1/2}\theta e^{\theta^2} \operatorname{erfc}(\theta)}{(1 - \pi^{1/2}\theta e^{\theta^2} \operatorname{erfc}(\theta))^2} \right],$$

$\operatorname{erfc}(\theta)$  – дополнительный интеграл вероятности.

При  $kL_1 \ll 1$  имеем  $f_0 \approx 1$ ,  $f_1 \approx -1$  и  $\eta \approx \eta_0(1-i\omega/\nu_1)$ . В этом случае (13) совпадает с аналогичным выражением в гидродинамическом приближении [3]. При  $kL_1 \gg 1$ ,  $f_0, f_1 \approx (kL_1)^2$  и  $\eta \approx \eta_0(kL_1)^2(1+i\omega/\nu_1)$ .

Таким образом, переход к кинетическому описанию ионов сводится в данном случае к замене в уравнениях (2), (3), записанных для однородной среды  $\eta_0 \rightarrow \eta$ . Решая модифицированные уравнения, аналогично п. 2.1, получаем, что пороговая скорость неустойчивости определяется системой уравнений:

$$\tilde{H} = k_1^2 c_s^2 + \omega^2 f_1 - \quad (14)$$

$$-\frac{\Delta\omega_p + \omega\eta_0\{(1+\eta_1)f_0 - 2[1+\alpha + (1-\alpha)\eta_1]^2 f_1 (k_1 \rho_0)^2 \nu_0 / 3\nu_1\}}{A k_1^2 D \tau} = 0;$$

$$\tilde{L} = \Delta\omega_p + \frac{[\Delta f_0 - 2(1+\alpha + (1-\alpha)\eta_1)k_1 \nu_0 / 3k\nu_0 \eta_0] k_1^2 D / \tau}{(k_1^2 c_s^2 + \omega^2 f_1)(1+\eta_1) + (p+\bar{p}\eta_1)k_1^2 D / \tau + \delta\nu_0 / \tau} = 0. \quad (15)$$

Частота и инкремент неустойчивости находятся из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{H} + \frac{\tau}{A k_1^2 D} &\{k_1^2 c_s^2 + \omega^2 f_1 + [(p+\bar{p}\eta_1)k_1^2 D + \delta\nu_0] \times \\ &\times [1/\tau + \nu_1 f_0 (1 + \eta_1)]\} = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\tilde{L} + \frac{2\Delta\omega/\tau + (\omega + D\omega)(1+\eta_1)\nu_1 f_0}{(2k_1^2 c_s^2 + \omega^2 f_1)(1+\eta_1) + (p+\bar{p}\eta_1)k_1^2 D / \tau + \delta\nu_0 / \tau} \tau = 0. \quad (17)$$

В левых частях (16), (17) в выражениях для  $\tilde{H}$  и  $\tilde{L}$  вместо  $\Delta\omega_p$  следует подставить  $\Delta\omega = \omega - k\nu_0$ .

## 2. Обсуждение

Здесь приводятся результаты расчетов возбуждения неустойчивости при произвольных параметрах  $\eta_1, \alpha, \nu_1$  и поперечном волновом числе

неоднородностей. При  $k_1 l > 1$  решались уравнения (4)-(7), при  $k_1 l \ll 1$  - уравнения (14)-(17). Расчеты производились для условий кочкой ионосферы на высотах 100, 110 км. Необходимые ионосферные параметры приведены в табл. 1.

На рис. 1а изображены зависимости пороговой скорости от поперечного волнового числа при  $\alpha = 0,8$  (в условиях нижней ионосферы  $\alpha \approx 5/6$  [8]),  $k_{\parallel}/k_1 = 0$  на высоте 110 км для различных степеней неоднородности плазмы (1-  $L = 10$  км, 2-  $L = 50$  км, 3 - однородная среда). Характерная кривая зависимости  $v_p(k_1)$  в неоднородной плазме включает в себя область, где превалирует градиентно-дрейфовая неустойчивость ( $k_1^2 l \ll \Omega_{Be}/v_0$ ), в которой  $v_p = k_1^2$ ; промежуточный участок ( $k_1 l \ll 1$ ), где в основном действует фарли-бунемановский механизм неустойчивости, и коротковолновую область ( $k_1 l \gg 1$ ), где пороговая скорость неустойчивости резко возрастает вследствие бесстолкновительного затухания на ионах. При  $k_1 l \approx 0,86$  неустойчивость невозможна. В однородной среде

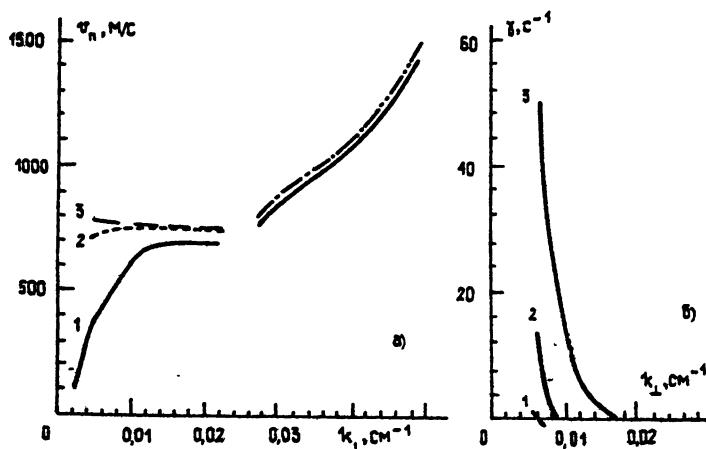
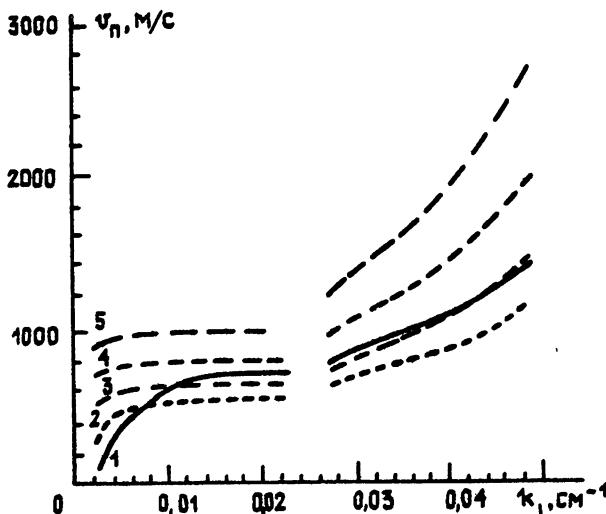


Рис. 1.

градиентно-дрейфовая неустойчивость не развивается и пороговая скорость при  $k_1 l \ll 1$  слабо зависит от поперечного волнового числа, несколько снижаясь с его ростом (в соответствии с формулой (10)). С уменьшением масштаба регулярной неоднородности плазмы пороговая скорость в области возбуждения градиентно-дрейфовой неустойчивости падает, а ширина этой области возрастает. На рис. 1б показана зависимость инкремента неустойчивости от поперечного волнового числа на высоте 110 км,  $L = 10$  км,  $k_{\parallel} = 0$ ,  $\alpha = 0,8$  при скоростях дрейфа электронов  $v_0 = 500$  м/с (1); 600 м/с (2); 700 м/с (3). С ростом

надпороговости инкремент возрастает сначала плавно, а с превышением пороговой скорости фарли-бунемановской неустойчивости - достаточно резко. Аналогично ведет себя и ширина пространственного спектра возбуждения неустойчивости.

На рис. 2 приведена зависимость пороговой скорости от поперечного волнового числа  $v_p(k_\perp)$  на высотах 110 км при  $\alpha = 0, 8$ ;  $L = 10$  км для различных значений  $k_\parallel/k_\perp$ : 0 (1);  $2 \cdot 10^{-3}$  (2);  $4 \cdot 10^{-3}$  (3);  $6 \cdot 10^{-3}$  (4);  $8 \cdot 10^{-3}$  (5). Весьма интересно изменение характера зависимости  $v_p(k_\perp)$  с уменьшением степени вытянутости неоднородностей. В промежуточной области волновых чисел при  $k_\parallel/k_\perp \approx 3 \cdot 10^{-3}$  пороговая скорость минимальна.



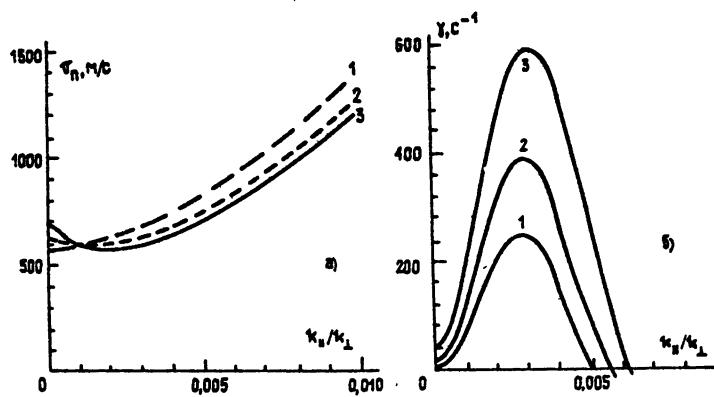


Рис. 3.

0, 4; 3 - 0, 8. На рис. 4б  $\alpha = 0, 8$ , кривая 1 соответствует  $v_0 = 800$  м/с; 2 - 820 м/с; 3 - 850 м/с. Из сравнения рис. 3 и 4 видно, что на высоте 100 км отмеченная немонотонная зависимость  $v_n(k_z/k_{\perp})$  выражена слабее, чем на высоте 110 км. Пороговая скорость возбуждения поперечных возмущений на высоте 100 км несколько выше, чем при 110 км. Последнее обстоятельство связано с тем, что с уменьшением высоты сильно увеличиваются частоты столкновений заряженных частиц с нейтральными  $v_0$  и  $v_1$ , что приводит к росту параметра  $\eta_0$  и пороговой скорости  $v_n \sim 1 + \eta_0$  (см. (10)).

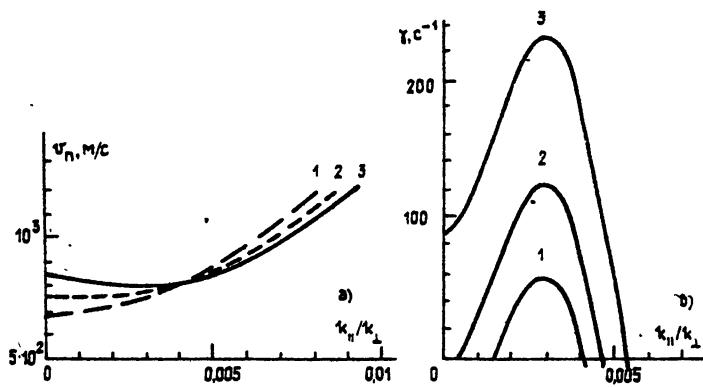


Рис. 4.

В заключение перечислим основные результаты этой работы. Нами рассмотрено возбуждение токовых неустойчивостей в нижней ионосфере при учете возмущений температуры электронов. В отличие от других работ неустойчивость исследована при произвольной степени вытянутости неоднородностей; при учете зависимости электронной частоты столкновений от температуры электронов и регулярного градиента концентрации плазмы. Отметим, что показанная нами немонотонная зависимость пороговой скорости и инкремента неустойчивости от  $k_{\parallel}/k_{\perp}$  при  $\alpha \sim 1$  (см. рис. 3, 4) может объяснить конечную вытянутость мелкомасштабных неоднородностей нижней ионосферы, наблюдавшуюся в ряде экспериментов [9 - 11]. Последняя особенность ранее не была объяснена в рамках линейной теории [12]. Соответствующий анализ, проведенный при кинетическом описании ионов, позволяет определить коротковолновую границу спектра линейного возбуждения фарли-бунемановской неустойчивости, где она подавляется за счет ионного затухания Ландау.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Farley D.T. //JGR. 1963. V.68. P.6083.
2. Rogister A., D'Angelo N. //JGR. 1970. V.75. P.3879.
3. Фельдштейн А. Я. //Геомагнетизм и аэрономия. 1980. Т.20. С.333.
4. Гуревич А. В., Карапшин А. Н. //Геомагнетизм и аэрономия. 1984. Т.24. С.885.
5. Зарницкий Ю. Ф., Кустов А. В. //В сб. Распространение радиоволн в возмущенной ионосфере, КФАН: ПГИ. 1989, С.35.
6. Pecseli H.L., Primdehl F., Bahnsen A. //JGR. 1989. T.94. С.5337.
7. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. //Волны в магнитоактивной плазме. - М.: Наука, 1970. С.65.
8. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. - М.: Наука, 1973. С.50.
9. Lee K., Kennel C.I., Kindel J.M.//Radio Sci. 1973. V.21. P.1339.
10. Ossakow S.L. et al.//JGR. 1975. v.80. P.142.
11. Wang T.N.C., Tsunoda R.T. //JGR. 1975. v.80. P. 2172.
12. Fejer B.G., Kelley M.C. Rev. Geophys. Space Phys. 1980. V.18. P.401.

LOW-FREQUENCY CURRENT INSTABILITIES  
IN NONISOTHERMAL MAGNETOACTIVE PLASMA

*A. N. Karashtin, M. Sh. Tsimring*

The excitation of current instabilities of low ionosphere is investigated for arbitrary field aligned irregularities with electron temperature perturbations and temperature dependence of electron collisional frequency taken into account. It is shown that the minimum value of threshold velocity of Farly-Buneman instability is reached at finite aligned irregularities for sufficiently strong temperature dependence of electron collisional frequency. The short-length cut-off of current instabilities is determined.

УДК 538. 566

## К ТЕОРИИ БЕРЕГОВОЙ РЕФРАКЦИИ В СЛУЧАЕ ВОЛНОВОДНОЙ ЗАДАЧИ

*О. В. Соловьев*

На примере простой нерегулярной волноводной задачи (распространение волн в импедансном волноводе, одна из стенок которого состоит из двух частей с различными импедансами) продемонстрированы возможности метода, изложенного в предыдущих работах. Уточнены ранее известные результаты. Получено решение в случае трассы распространения волн, проходящей вдоль границы раздела двух сред. Рассмотрены плоская и сферическая модели волноводного канала. Приведены результаты численных расчетов.

Данная работа ставит своей целью проиллюстрировать на примере классической задачи о двухкусочной трассе возможности метода, предложенного ранее в [1]. Отметим, что задача о распространении земной волны над двухкусочной трассой, получившая в литературе название теории береговой рефракции, была рассмотрена в огромном количестве работ, из которых мы выделим [2 - 4]. Тем не менее мы попробуем по-новому взглянуть на ставшие уже классическими задачи и в то же время получить на основе [1] некоторые новые результаты в тех областях изменения параметров задачи, где не работают прежние приближения, а также определить количественные оценки сделанных ранее предположений. Мы не будем ограничиваться исследованием распространения земной волны, а рассмотрим задачу о поле вертикального электрического диполя в плоском импедансном волноводе, одна из стенок которого, будь то земная или ионосферная, состоит из двух частей с различными импедансами  $\delta_0$  и  $\delta_1$ , а свойства другой определяются постоянным импедансом. Таким образом, рассматриваемая нами модель может соответствовать как учету земных неоднородностей типа суши - моря, так и ионосферных, например, с определенной долей условности, неоднородности типа день - ночь. Условность данной модели состоит в том, что мы не учитываем геометрию переходной

области соприкосновения сред с различными импедансами, предполагая, что эти различия можно описать неоднородным по площади импедансом геометрически регулярных стенок волновода. Все рассуждения для наглядности проведем в рамках плоской модели импедансного волновода и только в заключении укажем, какие изменения необходимы при рассмотрении сферической модели импедансного волновода.

Полученные нами формулы работают в пределах применимости приближенных импедансных условий [5], которые мы обсуждать не будем, однако отметим, что область применимости полученного решения может быть определена только в случае, если известно точное решение соответствующей задачи дифракции. В частности, для того случая, когда граница раздела сред и трасса распространения пересекаются под прямым углом, можно воспользоваться результатами работы [6], где в строгой постановке была рассмотрена двумерная задача дифракции на прямоугольной структуре, состоящей из двух клиньев: идеально проводящего и имеющего с ним общую грань диэлектрического клина. Из результатов [6] следует, что различия в импедансном и точном решении задачи проявляются только в непосредственной близости от ребра клиновидной структуры на расстоянии порядка длины волны в диэлектрическом клине. Результаты [6] указывают на правомочность применимости импедансной постановки задачи всюду за исключением малой окрестности ребра системы - окрестности, сравнимой с длиной волны в диэлектрическом клине.

Итак, в нашей модели неоднородность и земной, и ионосферной стенок волновода описывается одинаково - неоднородным по площади импедансом. Поэтому не существует принципиальной разницы в том, на какую - верхнюю или нижнюю (для сферического волновода: внешнюю или внутреннюю) - стенку волновода поместить неоднородность. Для определенности все дальнейшие рассуждения мы проведем для неоднородности, расположенной на нижней стенке волновода.

Ограничимся скалярной постановкой задачи, которая преобладает в работах по исследованию распространения земной волны на неоднородных трассах [4, 7] и сущность которой состоит в пренебрежении деполяризацией поля при отражении от нерегулярности волновода.

Итак, рассмотрим модельную задачу, в которой электромагнитное поле, возбуждаемое вертикальным электрическим диполем с полным дипольным моментом  $P_0$  в области  $D$ , ограниченной поверхностями  $S_3$  и  $S_4$ , определяется однокомпонентным вектором Герца  $\vec{H} = \vec{P}e_z$ . Волноводное пространство (область  $D$ ) обладает свойствами вакуума. В декартовой системе координат  $(x, y, z)$  (или цилиндрической  $(r, \varphi, z)$ , связанной с источником) поверхность  $S_3$  задается уравнением  $z = 0$ ,

поверхность  $S_u$  - уравнением  $z = h$ . Источник располагается в точке  $(-\Gamma/2, 0, z_0)$ , точка наблюдения есть  $(\Gamma/2, 0, z)$ . Искомая функция  $\Pi(x, y, z)$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца внутри волновода и импедансным граничным условиям

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = ik\delta(M)\Pi|_{n \in S_3, S_u}, \quad (1)$$

где  $k$  - волновое число в вакууме,  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к области  $D$ ,  $\delta(M)$  - неоднородный по площади поверхностный импеданс в точке  $M$ , принадлежащей рассматриваемой поверхности. Зависимость от времени принята в виде  $\exp(-i\omega t)$ . Считаем, что свойства поверхности  $S_u$  определяются постоянным импедансом  $\delta_u$ , а поверхность  $S_3$  состоит из двух полуплоскостей  $S_0$  и  $S_1$  с импедансами  $\delta_0$  и  $\delta_1$  соответственно. Геометрия задачи представлена на рис. 1, где изображена поверхность  $S_3$  и спроектированные на нее источник и точка наблюдения. Граница между областями с различными импедансами описывается уравнением

$$y = \alpha(x - x_0). \quad (2)$$

Считая для определенности  $x_0 \geq 0$ , заметим, что результаты для случая  $x_0 < 0$  можно получить, используя теорему взаимности, меняя местами источник и точку наблюдения.

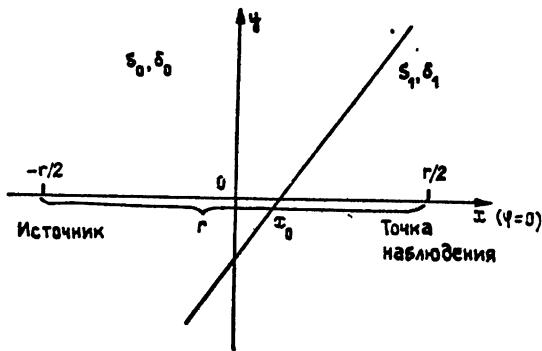


Рис. 1.

Следуя [1], перейдем от дифференциального уравнения с помощью теоремы Грина к интегральному уравнению, определяющему искомое поле. Выбирая в качестве функции Грина  $\Pi_0(\vec{R}, \vec{R}')$  выражение для вектора Герца задачи о поле вертикального электрического диполя в регулярном волноводе толщиной  $h$  с однородными импедансами стенок  $\delta_u$  и  $\delta_0$ , можно получить

$$\Pi(\vec{R}) = \Pi_0(\vec{R}) + \frac{i k \epsilon_0}{P_0} \iint_{S_1} \Pi(\vec{R}') \Pi_0(\vec{R}, \vec{R}') (\delta_1 - \delta_0) dS', \quad (3)$$

где  $\vec{R}$  – радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{R}'$  – радиус-вектор точки интегрирования на поверхности  $S_1$ ,  $\Pi_0(\vec{R})$  – поле в точке наблюдения в регулярном волноводе толщиной  $h$  и однородными импедансами стенок  $\delta_1$  и  $\delta_0$ ,  $\Pi_0(\vec{R}, \vec{R}')$  получается из выражения для  $\Pi_0(\vec{R})$ , если источник поместить в точку  $\vec{R}'$ . Поступая аналогично [1], перейдем от уравнения для вектора Герца  $\Pi$  к уравнению для функции ослабления  $V$ , которая отличается от  $\Pi$  быстроосцилирующим множителем, описывающим поле диполя над идеально проводящей плоскостью:

$$\Pi(\vec{R}) = \frac{P_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} V(\vec{R}), \quad \Pi(\vec{R}') = \frac{P_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr'}}{r'} V(\vec{R}'),$$

$$\Pi_0(\vec{R}, \vec{R}') = \frac{P_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} V_0(\vec{R}, \vec{R}'), \quad r_1 = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')},$$

$\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Введем эллиптические координаты  $u, v$  на поверхности  $S_3$ :

$$x' = \frac{r}{2} \operatorname{ch} u \cos v, \quad y' = \frac{r}{2} \operatorname{sh} u \sin v, \quad r_1 + r' = r \operatorname{ch} u, \quad dS' = r_1 r' du dv.$$

Тогда (3) можно записать в виде

$$V(\vec{R}) = V_0(\vec{R}) + \frac{ikr}{2\pi} (\delta_1 - \delta_0) \iint_{S_1} V(\vec{R}') V_0(\vec{R}, \vec{R}') \times \quad (4)$$

$$\times \exp[ikr(\operatorname{ch} u - 1)] du dv.$$

Здесь необходимо отметить, что возможны два варианта задания области изменения координат  $u$  и  $v$  для описания всей плоскости  $u, v$ . Первый – это  $-\infty < u < \infty$ ,  $0 \leq v \leq \pi$ , и второй –  $0 \leq u < \infty$ ,  $-\pi \leq v \leq \pi$ . В конкретных задачах тот или иной вариант может оказаться предпочтительнее. Для начала остановимся на первом варианте.

Заметим, что в выбранной системе координат  $u, v$  выражение для описания границы (2) между полуплоскостями будет состоять из двух частей:  $u_1(v)$  описывает часть прямой (2) из области  $u \rightarrow \infty$  до точки касания с гиперболой  $v = v_1$  и  $u_2(v)$  описывает часть той же прямой от отмеченной точки в область  $u \rightarrow -\infty$ :

$$e_1^{(v)} = [-2\alpha x_0/r + \sqrt{(2\alpha x_0/r)^2 + \sin^2 v - \alpha^2 \cos^2 v}] (\sin v - \alpha \cos v)^{-1},$$

$$e_2^{(v)} = [-2\alpha x_0/r - \sqrt{(2\alpha x_0/r)^2 + \sin^2 v - \alpha^2 \cos^2 v}] (\sin v - \alpha \cos v)^{-1},$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{(2\alpha x_0/r)^2 + \sin^2 v - \alpha^2 \cos^2 v} \geq 0; \quad (5)$$

$$\cos v_1 = \sqrt{[1 + (2\alpha x_0/r)^2] (1 + \alpha^2)^{-1}}. \quad (6)$$

Из (6), в частности, видно, что при  $x_0 > r/2$  точки  $v_1$  не существует. Этот случай соответствует границе, располагающейся за точкой наблюдения, он будет рассмотрен отдельно.

Координата  $u$  в подынтегральном выражении (4) оказывается координатой, поперечной трассе распространения, именно по ней мы и произведем приближенное интегрирование, как это сделано в [1]. Обозначая  $f(u, v) = V(\vec{R}') V_0(\vec{R}, \vec{R}')$ , запишем

$$\iint_{S_1} f(u, v) \exp[ikr(\chi u - 1)] du dv = \int_0^1 dv \int_{-\infty}^{\infty} \dots du + \quad (7)$$

$$+ \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{u_1(v)}^{\infty} \dots du + \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{-\infty}^{u_2(v)} \dots du,$$

где  $v_2$  определяется гиперболой, асимптота которой параллельна нашей границе раздела:  $\operatorname{tg} v_2 = \alpha$ . Следуя [1], интегралы в бесконечных и полубесконечных пределах (7) можно оценить асимптотически по большому параметру  $kr \gg 1$  [8], поскольку в этом случае функцию  $f(u, v)$  можно считать медленно меняющейся на фоне быстро осциллирующей  $\exp(ikr \chi u)$ .

Произведя необходимые вычисления с учетом членов порядка  $O(1/\sqrt{kr})$  и  $O(1/kr)$  и отбрасывая члены следующего порядка малости  $-O((kr)^{-3/2})$ , можно выразить значение искомой функции в точке наблюдения  $\vec{R}$  через значения поля на двух линиях (а не на всей полуплоскости  $S_1$ ): на части линии трассы, в основном проходящей по  $S_1$  (соответствующей  $u = 0$  — седловой точке для интеграла по поперечной координате), и на границе раздела сред  $u_1(v)$  и  $u_2(v)$ :

$$v(\vec{R}) = v_0(\vec{R}) + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{kr}}{2\pi} (\delta_1 - \delta_0) \left\{ \sqrt{2\pi} \int_0^1 f(0, v) dv + \right. \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{v_1}^{v_2} dv \left[ f(0, v) \left( \sqrt{2} Q(\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \beta_1) - \exp \left[ i \left( kr(\text{chu}_1(v) - 1) + \frac{\pi}{4} \right) \right] / 2\beta_1 \right) \right] + \\
& + \int_{v_1}^{\pi - v_2} dv \left[ f(0, v) \left( \sqrt{2} Q(\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \beta_2) + \exp \left[ i \left( kr(\text{chu}_2(v) - 1) + \frac{\pi}{4} \right) \right] / 2\beta_2 \right) \right] + \\
& + \int_{v_1}^{v_2} dv f(u_1(v), v) \frac{\exp[i(kr(\text{chu}_1(v) - 1) + \pi/4)]}{\sqrt{kr} \sinh(u_1(v))} - \\
& - \int_{v_1}^{\pi - v_2} dv f(u_2(v), v) \frac{\exp[i(kr(\text{chu}_2(v) - 1) + \pi/4)]}{\sqrt{kr} \sinh(u_2(v))} \Big\} + O((kr)^{-3/2}).
\end{aligned}$$

В формуле (8)

$$Q(x) = \int_x^\infty \exp(-y^2) dy, \quad \beta_i = \sqrt{kr} \sinh(u_i(v)/2), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, с точностью до членов порядка  $O((kr)^{-3/2})$ , от двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью (3) мы приходим к одномерному интегральному уравнению Фредгольма II рода с ограниченным ядром (8). Можно рассматривать (8) и как систему интегральных уравнений, в которой искомыми являются функции  $v(0, v)$ ,  $v(u_1(v), v)$ ,  $v(u_2(v), v)$ .

Для выяснения физического смысла отдельных слагаемых в правой части (8) рассмотрим возможные предельные случаи. Начнем с того случая, когда направление трассы распространения оказывается нормальным границе раздела сред. Это соответствует  $\alpha \rightarrow \infty$ , что в свою очередь дает  $v_1 = \arccos(2x_0/r)$ ,  $v_2 = \pi/2$ . Тогда

$$\iint_{S_1} f(u, v) \exp[ikr(\text{chu} - 1)] du dv = \int_0^1 dv \int_{-\infty}^\infty \dots du + \quad (9)$$

$$+ \int_{v_1}^{\pi/2} dv \left[ \int_{u_1(v)}^{\infty} \dots du + \int_{-\infty}^{u_2(v)} \dots du \right].$$

Если при этом  $x_0 \rightarrow 0$ , т. е. граница раздела сред находится как раз посередине расстояния между источником и точкой наблюдения, в правой части (9) останется вообще только одно первое слагаемое (так как  $v_1 \rightarrow \pi/2$ ). Это говорит о том, что если теперь оценить интеграл по поперечной координате  $u$  с точностью  $O((kr)^{-3/2})$ , то влияние границы раздела из рассмотрения выпадет. Для определения решения в точке наблюдения достаточно, чтобы было известно значение  $f(u, v)$  только на части трассы распространения ( $u = 0$ ), проходящей по полуплоскости  $S_1$  ( $0 \leq v \leq \pi/2$ ). Вообще в связи с этим можно обратить внимание на то, что в любом случае, если граница раздела между полуплоскостями совпадает с какой-либо координатной линией  $v = \text{const}$  эллиптической системы координат, то влияние на поле в точке наблюдения она не оказывает (с точностью  $O((kr)^{-3/2})$ ).

В этом же пределе  $\alpha \rightarrow \infty$  обратим внимание на случай  $x_0 \geq r/2$ , что соответствует границе раздела сред, находящейся за точкой наблюдения. В этом варианте область изменения координат  $u$  и  $v$  удобнее будет задавать в виде  $0 \leq u < \infty$ ,  $-\pi \leq v \leq \pi$ . Если уравнение границы в декартовых координатах записать в виде  $x = (r/2)(1 + \alpha)$ , где  $\alpha \geq 0$ , то  $u(v)$  определится из соотношения  $\text{ch}u(v) = (1 + \alpha)/\cos v$ , а интегральное уравнение (4) можно будет переписать в виде

$$V(r) = V_0(r) + \frac{\sqrt{kr}}{\pi} (\delta_1 - \delta_0) \int_0^{\pi/2} \exp(ikr\beta) \left\{ V\left(\frac{r}{2}(1 + \cos v)\right) \times \right. \\ \left. \times V_0\left(\frac{r}{2}(1 - \cos v)\right) \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\pi} \nu(p) - \frac{i}{p} \right] - V\left(\frac{r}{2}(1 + \cos v + \beta)\right) \times \right. \\ \left. \times V_0\left(\frac{r}{2}(1 - \cos v + \beta)\right) \frac{\cos v}{\sqrt{kr(\sin^2 v + 2\alpha + \alpha^2)}} \right\} dv, \quad (10)$$

где  $\beta = (1 + \alpha - \cos v)/\cos v$ ,  $p = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{kr}\beta$ ,  $\nu(y) = (\sqrt{\pi}/2)e^{-y^2} v(iy)$ ,  $v(y)$  — интеграл вероятностей комплексного аргумента,  $kr \gg 1$ .

В этих обозначениях расстояние от точки наблюдения до границы раздела областей будет  $\alpha(r/2)$ . Как следует из соотношения (10), для

определения поля в точке  $\vec{R} = (r, \varphi = 0, z)$  необходимо знать функцию ослабления на двух линиях: на границе областей с импедансами  $\delta_0$  и  $\delta_1$ , а также на половине трассы распространения (от ее центра до точки наблюдения). Достаточно очевидно из физических соображений, что в данном случае можно воспользоваться методом последовательных приближений и оценить  $v(\vec{R})$ , подставив на место искомой функции в подынтегральном выражении соответствующие значения невозмущенного поля  $v_0(r)$ . После этого перейти в подынтегральном выражении от переменного  $v$  к переменной  $\beta$ . При этом интегрированию по  $v$  в пределах  $[0, \pi/2]$  будет соответствовать также вещественный контур интегрирования  $[\alpha, \infty]$  на комплексной плоскости  $\beta$ :

$$v(r) = v_0(r) + \frac{\sqrt{kr}}{\pi} (\delta_1 - \delta_0) \int_{\alpha}^{\infty} \exp(ikr\beta) \left\{ v_0 \left( \frac{r}{2} \frac{2 + \alpha + \beta}{1 + \beta} \right) v_0 \left( \frac{r}{2} \frac{\beta - \alpha}{1 + \beta} \right) \times \right. \\ \times \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{3\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\pi} v(p) - \frac{i}{p} \right] - v_0 \left( \frac{r}{2} \frac{1 + \alpha + (1 + \beta)^2}{1 + \beta} \right) \times \\ \left. \times v_0 \left( \frac{r}{2} \frac{(1 + \beta)^2 - (1 + \alpha)}{1 + \beta} \right) \frac{1}{\sqrt{kr\beta(2 + \beta)}} \right\} \frac{(1 + \alpha)d\beta}{(1 + \beta)\sqrt{2 + \beta + \alpha}\sqrt{\beta - \alpha}}. \quad (11)$$

Вещественная ось плоскости  $\beta$  оказывается контуром стационарной фазы для интеграла в (11), седловой точкой будет  $\beta = \alpha$ . Анализ показывает, что медленно меняющимися в подынтегральном выражении можно считать все функции, кроме  $e^{ikr\beta}/\sqrt{\beta - \alpha}$ , и вынести их из под знака интеграла в седловой точке. Оставшийся интеграл вычисляется точно:

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\exp(ikr\beta)}{\sqrt{\beta - \alpha}} d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{kr}} \exp[i(kr\alpha + \pi/4)].$$

В результате можно записать решение на первом шаге метода последовательных приближений:

$$v(r) = v_0(r) + \frac{(\delta_1 - \delta_0) \exp[i(kr\alpha + \pi/4)]}{\sqrt{2\pi(1 + \alpha)}} \times \quad (12)$$

$$\times \left\{ \frac{v_0(kr)}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\frac{3\pi}{2}} v(e^{-\frac{1}{4}\frac{\pi}{2}} \sqrt{kr\alpha}) + \frac{1}{\sqrt{kr\alpha}} \right] - \right.$$

$$- V_0 \left( kr \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right) V_0 \left( \frac{kr\alpha}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{kr\alpha(2+\alpha)}} \Biggr) + O((kr)^{-3/2}).$$

В предельном случае  $\alpha \rightarrow 0$  (точка наблюдения приближается к границе раздела сред) возможно аналитически сосчитать сумму бесконечного ряда последовательных приближений (при условии  $|(\delta_1 - \delta_0)/2| < 1$ ):

$$V(r) = V_0(r) [1 + (\delta_1 - \delta_0)/2]^{-1}. \quad (13)$$

Численные расчеты по формуле (12) показывают, что при движении точки наблюдения к границе функция ослабления  $V(r)$  (ее модуль и аргумент) приближается к значению, определяемому (13), осциллируя около  $V_0(r)$ . Причем размах этих осцилляций не превышает величины, следующей из (13). Таким образом, на границах  $\delta_0 = (0, 3773 - 0, 3773i) \cdot 10^{-3}$  и  $\delta_1 = (0, 0774 - 0, 0734i)$ , определяемых проводимостями  $\sigma_0 = 4 \text{ S/m}$  и  $\sigma_1 = 10^{-4} \text{ S/m}$ , для частоты  $f = 20,5 \text{ кГц}$  получаем:  $(|V| - |V_0|)/|V_0| \sim 0,04$ ,  $\arg V - \arg V_0 \sim 0,035 \text{ [рад]}$ . При этом, как видно из (13), эти величины не зависят от расстояния источника до границы раздела сред. Заметим также, что эти оценки определяют порядок величин, которыми пренебрегается в методе Фейнберга при расчете многокусочных земных трасс [4].

Рассмотрим другой предельный случай  $\alpha \rightarrow 0$ , что соответствует трассе, идущей вдоль границы раздела сред. Попытки исследования этого случая предпринимались в [3, 7], однако решение данной проблемы, доведенное до численных результатов, нам не известно. Итак, при  $\alpha \rightarrow 0$  в формуле (7) будем иметь  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$  и

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} f(u, v) \exp[ikr(chu - 1)] du dv = \\ & = \int_0^{\pi} dv \int_{-\infty}^{u_2(v)} f(u, v) \exp[ikr(chu - 1)] du. \end{aligned}$$

При этом  $u_2(v) = 0$  и в результате асимптотического интегрирования по поперечной координате  $u$  можно получить

$$V(\vec{R}) = V_0(\vec{R}) + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} (\delta_1 - \delta_0)}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{kr} \int_0^{\pi} V(\vec{R}') V_0(\vec{R}, \vec{R}') \Big|_{\vec{R}' \in u=0} dv. \quad (14)$$

Если в качестве функции Грина взять  $V_1(\vec{R}, \vec{R}')$  - функцию ослабления, соответствующую регулярному волноводу с импедансом  $\delta_1$  на нижней стенке, то, поступая аналогично, можно прийти к уравнению

$$V(\vec{R}) = V_1(\vec{R}) + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} (\delta_0 - \delta_1)}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{kr} \int_0^\pi V(\vec{R}') V_1(\vec{R}, \vec{R}') \Big|_{\vec{R}' \in u=0} dv. \quad (15)$$

Складывая (14) и (15), получим

$$V(\vec{R}) = \frac{V_0(\vec{R}) + V_1(\vec{R})}{2} + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} (\delta_1 - \delta_0)}{4\sqrt{2\pi}} \sqrt{kr} \int_0^\pi V(\vec{R}') \times \quad (16)$$

$$\times [V_0(\vec{R}, \vec{R}') - V_1(\vec{R}, \vec{R}')] dv, \quad kr > 1.$$

Соотношение (16) уточняет аналогичную формулу из [7], которая содержит только первую скобку из (16), представляющую собой полусумму так называемых одномерных функций ослабления  $V_0$  и  $V_1$ , записанных для однородных трасс соответственно с импедансами  $\delta_0$  и  $\delta_1$ .

Если от переменной интегрирования  $v$  перейти к переменной  $kr'$  по формуле  $kr' = (kr/2)(\sin v + \cos v)|_{v=0} = (kr/2)(1 + \cos v)$ , то уравнение (16) можно будет переписать в виде неоднородного уравнения Вольтерра

$$V(kr) = \frac{V_0(kr) + V_1(kr)}{2} + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} (\delta_1 - \delta_0)}{4\sqrt{2\pi}} \sqrt{kr} \int_0^{kr} V(kr') \times \quad (17)$$

$$\times \frac{V_0(k(r - r')) - V_1(k(r - r'))}{\sqrt{kr'} k(r - r')} d(kr'),$$

которое достаточно эффективно решается с помощью следующего алгоритма:

$$V(x_N) = \frac{V_0(x_N) + V(x_N)}{2} + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} (\delta_1 - \delta_0) \sqrt{x_N}}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^N V(x_{k-1}) \times$$

$$\times \int_{x_{k-1}}^x \frac{V_0(x_n - r) - V_1(x_n - r)}{\sqrt{r}(x_n - r)} dr,$$

где  $x_n = Nd = kr$ ,  $d$  - шаг интегрирования,  $N$  - число точек интегрирования,  $V(x_0) = V(0) = 1$  - по определению функции ослабления  $V(r)$ . Шаг интегрирования выбирается удовлетворяющим условию  $d \leq \lambda/3$ , где  $\lambda$  - длина волны в вакууме.

В качестве примера приведем результаты расчетов для частоты  $f = 20,5$  кГц. Источник и приемник располагаются на нижней стенке приземного волновода ( $z_0 = z = 0$ ) на границе областей с проводимостями  $\sigma_0 = 4$  С/м,  $\sigma_1 = 10^{-4}$  С/м. Для определения импеданса ионосферы и высоты  $h$  волновода использовались дневные профили электронной концентрации  $N_e(z)$  и эффективной частоты соударений  $\nu_e(z)$  [9]. Значения регулярных функций ослабления  $V_0$  и  $V_1$  вычислялись путем суммирования ряда нормальных волн [10], который при  $kr \leq 1$  сшивался с точностью  $10^{-4}$  с представлением  $V_0$  и  $V_1$  в виде суммы земной волны и пяти членов ряда многократно отраженных волн. Результаты расчетов приведены на рис. 2 и 3, где представлены зависимости от расстояния вдоль трассы  $|V(kr)|$ ,  $|V_0(kr) + V_1(kr)|/2$  и  $\arg V(kr)$ ,  $\arg[V_0(kr) + V_1(kr)]$ .

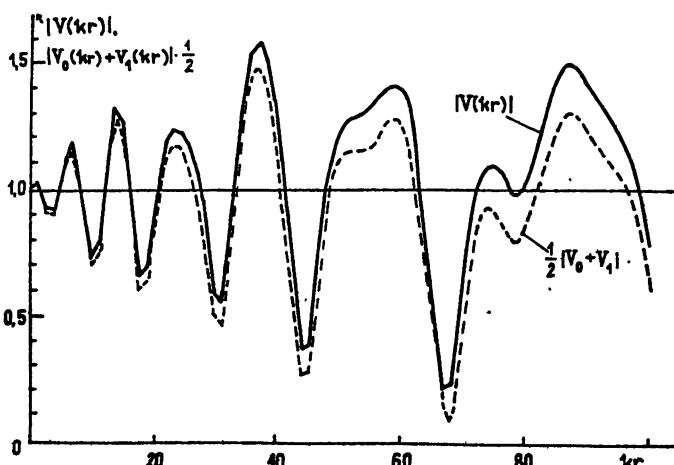


Рис. 2.

Как видно, уже на незначительных (для данной частоты) расстояниях ( $kr = 100$  соответствует для  $f = 20,5$  кГц  $r \sim 238$  км) влияние интегрального слагаемого в формуле (17) оказывается заметным

и нарастает с ростом  $kr$ , что, вообще говоря, следовало ожидать, глядя на формулу (17). Анализ представленных кривых показывает, что отличие  $|V(kr)|$  от  $|V_0(kr) + V_1(kr)|/2$  может достигать в некоторых точках 40 - 50%. Максимальное значение разности  $\arg V(kr) - \arg[V_0(kr) + V_1(kr)]$  оказывается порядка 0,9 радиана на рассмотренной трассе.

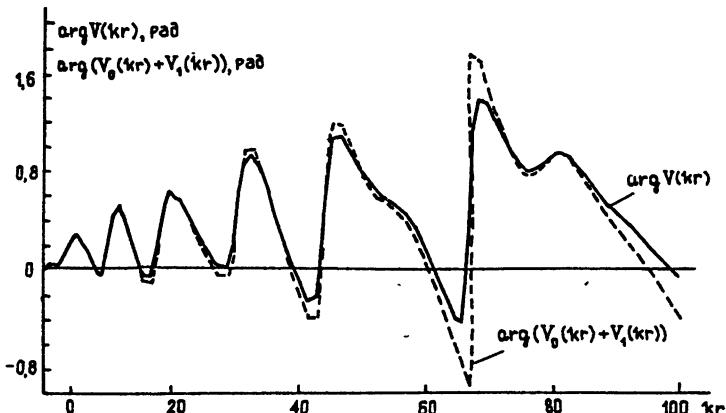


Рис. 3

Остановимся теперь на случае трассы, идущей на расстоянии  $y = y_0$  вдоль границы раздела сред с импедансами  $\delta_0$  и  $\delta_1$ . Если выполняется условие

$$\sqrt{2kr} \operatorname{sh}(u(v)/2) > 1, \quad (18)$$

то одномерное интегральное уравнение запишется в виде

$$V(\vec{R}) = V_0(\vec{R}) - \frac{\delta_1 - \delta_0}{2\pi} \int_0^\pi dv f(u(v), v) \frac{\exp[ikr(\operatorname{chu}(v) - 1)]}{\operatorname{sh} u(v)}. \quad (19)$$

В данном случае  $\operatorname{sh} u(v) = 2y_0/r \sin v$ ,  $\operatorname{chu}(v) = \sqrt{1 + a/\sin^2 v}$ ,  $a = (2y_0/r)^2$  и условие (18) применимости (19) сводится к условию  $(y_0/r)\sqrt{2kr} > 1$ . Оценить влияние такой границы на поле в точке наблюдения можно методом последовательных приближений (условия  $|\delta_1 - \delta_0|/2 < 1$  для этого достаточно), подставляя вместо искомой функции  $V$  в подынтегральное выражение свободный член  $V_0$ . Получающийся интеграл по  $dv$  оценим по методу стационарной фазы, с

учетом того, что седловой точкой оказывается  $v = \pi/2$  (или  $x = 0$ ).  
Тогда

$$V(\vec{R}) = V_0(\vec{R}) - \frac{(\delta_1 - \delta_0)}{\sqrt{2\pi kr}} \frac{\sqrt{1+a}}{a} f(u(v), v) \Big|_{v=\pi/2} \times \quad (20)$$

$$\times \exp[ikr(\sqrt{1+a} - 1) + i\frac{\pi}{4}].$$

Если обратить внимание на фазовый набег второго члена в (20), то становится ясно, что полученное в таком виде решение есть суперпозиция прямого поля и поля, отраженного по законам геометрической оптики от границы раздела сред.

Таким образом, на примере простой нерегулярной задачи (распространение над плоскостью, состоящей из двух частей) показана возможность исследования проблемы при помощи метода, предложенного в [1]. Метод позволяет достаточно простым и наглядным образом уточнить ранее известные результаты и довести до конца решение в случае трассы, проходящей по границе раздела двух сред.

В заключение отметим основные моменты, учет которых необходим при решении аналогичной задачи для случая сферической модели волновода. Во-первых, в качестве искомой функции теперь следует рассматривать радиальную компоненту вектора Герца  $\hat{H} = \hat{P}_\rho$  (вводится сферическая система координат  $\rho, \theta, \psi$  с осью  $\theta = 0$ , проходящей через источник). Во-вторых, под  $P_0(\vec{R})$  и  $P_0(\vec{R}, \vec{R}')$  следует понимать решение регулярной сферической волноводной задачи, которое может быть заимствовано, например, из [11]. И, наконец, в-третьих, отметим, что все рассуждения, проведенные ранее для плоского случая, остаются в силе с учетом того, что (как показано в [1]) в формулах необходимо учитывать дополнительный множитель

$$M = \left( \frac{\sin r'/b}{r'} \frac{\sin r_1/b}{r_1} \frac{r^2}{2} \operatorname{sh} u \sin v \right) \times \quad (21)$$

$$\times \left[ \left( \cos \frac{r' - r_1}{b} - \cos \frac{r}{b} \right) \left( \cos \frac{r}{b} - \cos \frac{r' + r_1}{b} \right) \right]^{-1/2}.$$

который определяет геометрическую сходимость волн за счет сферичности волновода. В формуле (21)  $r$ ,  $r'$ ,  $r_1$  - расстояния между источником и точкой наблюдения, между источником и точкой интегрирования, между точкой интегрирования и приемником,

отсчитываемые вдоль поверхности сферы радиуса  $b$ , по которой проходит граница между областями с импедансами  $\delta_0$  и  $\delta_1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев О. В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 9. С. 1078.
2. Гринберг Г. А., Фок В. А. В кн.: Исследования по распространению радиоволн. Сб. 2. - М.: Изд. АН СССР, 1948. С. 69.
3. Калинин Ю. К. //Труды ИЗМИРАН. 1960. Вып. 17. С. 50.
4. Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. - М.: Наука, 1961. - 546 с.
5. Леонтович М. А. В кн.: Исследования по распространению радиоволн. Сб. 2. - М.: Изд. АН СССР, 1948. С. 5.
6. Макаров Г. И., Созонов А. П. //Вестник ЛГУ. 1985. № 25. С. 85.
7. Пылаев А. А., Тихомиров Н. П. В кн.: Проблемы дифракции и распространения волн. Межвуз. сб. - Л.: Гос. ун-т, 1981. Вып. 18. С. 155.
8. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и распространение волн. - М.: Мир, 1978. Т. 1. С. 457.
9. Иткина М. А., Котик Д. С., Кротова З. Н. и др. Препринт НИРФИ № 162. - Горький, 1983.
10. Макаров Г. И., Новиков В. В. В кн.: Проблемы дифракции и распространения волн. Межвуз. сб. - Л.: Гос. ун-т, 1968. Вып. 7. С. 19.
11. Макаров Г. И., Новиков В. В., Рыбачек С. Т. В кн.: Проблемы дифракции и распространения волн. Межвуз. сб. - Л.: Гос. ун-т, 1969. Вып. 9. С. 3.

Санкт-Петербургский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
9 октября 1991 г.

## TO THE THEORY OF COASTAL REFRACTION IN THE CASE OF WAVEGUIDE PROPAGATION PROBLEM

O. V. Solov'ev

The possibilities of the method, described in previous works, are shown. For example, a simple propagation problem is examined where waves propagate in impedance waveguide, one wall of which consists of two parts with different surface impedances. Earlier obtained results are improved. A solution is obtained of the problem of wave propagation along the boundary of media with different surface impedances. Flat-earth and spherical-earth models of the Earth-ionosphere waveguide are considered. The details of the computational procedure are presented as well as numerical results.

УДК 538.56

## ТЕОРИЯ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ж. С. Геворкян

Построена теория излучения заряженной частицы, движущейся в случайно-неоднородной коррелированной среде. Показано, что излучение изотропно и неполяризовано. Исследована частотная зависимость интенсивности излучения и предсказан пик в области длин волн  $\lambda \sim \delta\epsilon^2 a$  (где  $\delta\epsilon^2$  - флуктуация диэлектрической проницаемости,  $a$  - радиус корреляции случайного поля).

## 1. Введение

В предыдущей статье [1] мы рассмотрели излучение заряженной частицы, движущейся в случайно-неоднородной среде. При этом случайное поле диэлектрической проницаемости считалось гауссово-распределенным с  $\delta$ -образной корреляционной функцией ("белый шум"). Это означает, что проведенное в [1] рассмотрение справедливо только в области длин волн  $\lambda \gg 2pa$ . Таким образом, вопрос об излучении в области коротких длин волн  $\lambda \ll 2pa$  остался открытым.

Напомним, что интенсивность излучения в случае длинных волн определяется диффузией псевдофотонов и имеет вид [1]

$$I(\theta, \omega) = \frac{3e^2}{2cv\epsilon_0} \frac{dL^2}{l^3} \left( \frac{2c^2}{v^2\epsilon_0} \ln \frac{\gamma v}{a\omega} - 1 \right), \quad (1)$$

где  $v$  - скорость частицы,  $\epsilon_0$  - средняя диэлектрическая проницаемость,  $\gamma^{-1} = (1 - v^2\epsilon_0/c^2)^{1/2}$ ,  $l$  - длина свободного пробега,  $L$  - характерный размер системы,  $d$  - путь, пройденный частицей в среде. Кстати, заметим, что в [1], при принятом там определении флуктуационной части диэлектрической проницаемости, в формулах для интенсивности содержится лишний множитель  $1/\epsilon_0^2$ . Формула (1) немного видоизменена по сравнению с [1] и записана

через величины, которые обычно используются в работах по излучению. Отметим некоторые особенности (1). Во-первых, излучение изотропно и интенсивность резко зависит от частоты. Напомним, что при  $\lambda > 2\pi a$   $I(\omega) \sim \omega^{-4}$  (рэлеевское рассеяние) и поэтому с ростом частоты интенсивность резко возрастает. Во-вторых, в (1) содержится большой дополнительный  $dL^2/1^3$ , 1 множитель по сравнению, в частности, с формулой для переходного излучения на границе сред (см., например, [2]). И, наконец, в (1) имеет место логарифмическая зависимость интенсивности излучения в ультраквантитативистском случае. Естественно возникает вопрос, насколько вышеуказанные особенности связаны с принятым приближением  $\lambda > 2\pi a$ , и в частности, не связана ли изотропность излучения с изотропностью рэлеевского рассеяния. Мы знаем (см., например, [3]), что в обратном пределе,  $\lambda < 2\pi a$ , рассеяние на каждом отдельном шарике резко анизотропно. Интересным является также вопрос о частотной зависимости излучения в области коротких длин волн,  $\lambda < 2\pi a$ .

В ранее выполненных работах (см., например, [2, 4, 5] и ссылки в них) рассеяние псевдофотона учитывалось только в борновском приближении. Ниже будет показано, что в коррелированном случае также основным является вклад многократного рассеяния.

В задаче об излучении заряда в случайно-неоднородной среде есть несколько характерных величин с размерностью длины. Причем мы рассматриваем ситуацию, когда выполняются следующие неравенства:  $R \gg l_{in} > L \gg 1 \gg \lambda$ . Здесь  $R$  - расстояние до точки наблюдения,  $l_{in}$  - неупругая длина свободного пробега фотона в среде. В [1] мы также считали, что  $\lambda \gg 2\pi a$ .

В настоящей работе мы рассматриваем излучение заряженной частицы в коррелированном случайному поле с любым соотношением между  $\lambda$  и  $a$ . Это позволяет нам исследовать также область коротких  $\lambda < 2\pi a$  длин волн.

В качестве физической реализации, в частности, в оптическом диапазоне можно указать системы, где наблюдается пик в обратном рассеянии света [6].

## 2. Постановка задачи

Уравнения Максвелла в среде с учетом движущегося в ней заряда имеют вид

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi e}{c} \delta(\vec{r} - \vec{r}_t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi e \delta(\vec{r} - \vec{r}_t), \quad \text{div} \vec{B} = 0.$$

Из (2) можно получить уравнение относительно напряженности электрического поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ :

$$\text{rotrot} \vec{E} = -\frac{4\pi e\vec{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{vt}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (3)$$

В фурье-представлении уравнение (3) принимает форму

$$\nabla^2 \vec{E} - \text{grad div} \vec{E} + (\omega^2/c^2) \vec{D} = \vec{j}(\vec{r}, \omega), \quad (4)$$

где  $\vec{j}$  - источник, который при движении заряда по оси  $z$  имеет вид

$$\vec{j}(\vec{r}, \omega) = (4\pi e \omega \vec{v}/\nu c^2) \delta(x) \delta(y) \exp(-i\omega z/v). \quad (5)$$

Используя материальное уравнение, которое при пренебрежении пространственной дисперсией есть  $\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$ , окончательно получаем уравнение относительно  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ :

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, \omega) - \text{grad div} \vec{E}(\vec{r}, \omega) + (\omega^2/c^2) \epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{j}(\vec{r}, \omega). \quad (6)$$

Флуктуирующую диэлектрическую проницаемость будем считать гауссово-распределенной с произвольной корреляционной функцией

$$\epsilon(\vec{r}, \omega) \approx 1 + \epsilon_1(\vec{r}, \omega), \quad \langle \epsilon_1 \rangle = 0, \quad (7)$$

$$(\omega^4/c^4) \langle \epsilon_1(\vec{r}, \omega) \epsilon_1(\vec{r}', \omega) \rangle = B(\omega, |\vec{r} - \vec{r}'|).$$

Здесь для простоты считаем  $\epsilon_0 \equiv 1$ . Как и в [1], разделим поле  $\vec{E}$  на две части  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$ , причем  $\vec{E}_0$  - фоновое поле, созданное движущимся зарядом в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0$ , а  $\vec{E}_1$  - поле излучения, связанное с флуктуациями диэлектрической проницаемости. В соответствии с вышесказанным поля  $\vec{E}_0$  и  $\vec{E}_1$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\nabla^2 \vec{E}_0 - \text{grad div} \vec{E}_0 + (\omega^2/c^2) \vec{E}_0 = \vec{j}(\vec{r}, \omega), \quad (8a)$$

$$\nabla^2 \vec{E}_1 - \text{grad div} \vec{E}_1 + (\omega^2/c^2) \epsilon_1 \vec{E}_1 = -(\omega^2/c^2) \epsilon_1 \vec{E}_0. \quad (8b)$$

Тензор излучения определяем следующим образом:

$$I_{ij}(\vec{R}, \omega) = \langle E_{ii} E_{jj}^* \rangle. \quad (9)$$

Здесь  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по реализациям случайного поля  $\epsilon_1$ . Чтобы выполнить это усреднение, удобно выразить тензор излучения (9) через функции Грина уравнения (8б):

$$I_{ij}(\vec{R}, \omega) = \frac{\omega^4}{c^3} \int \langle G_{1g}(\vec{R}, \vec{r}_1) G_{jf}^*(\vec{R}, \vec{r}_2) \epsilon_1(\vec{r}_1) \epsilon_1(\vec{r}_2) \rangle \times \\ \times E_{0g}(\vec{r}_1) E_{0f}^*(\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (10)$$

где  $G$  - запаздывающая функция Грина псевдофотона в среде, которая удовлетворяет уравнению

$$\left[ (v^2 + k^2) \delta_{in} - \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_n} + \epsilon_1(\vec{r}) \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{in} \right] G_{nj}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta_{ij} \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (11)$$

Здесь введено обозначение  $k = \omega/c$  и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

### 3. Функция Грина псевдофотона в коррелированном случайном поле

Свободная функция Грина псевдофотона имеет вид (см., например, [1])

$$G_{ij}^0(q) = (\delta_{ij} - q_i q_j k^{-2}) / (k^2 - q^2 - i\delta). \quad (12)$$

Усредненная в приближении когерентного потенциала функция Грина удовлетворяет уравнению

$$G_{ij}(\vec{q}) = G_{ij}^0 + G_{in}^0(\vec{q}) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} G_{nn}^0(\vec{q} - \vec{p}) B(p) G_{nj}(\vec{q}). \quad (13)$$

В матричной форме решение уравнения (13) имеет вид

$$\hat{G}(\vec{q}) = [\hat{G}^{0-1} - \hat{\Lambda}]^{-1}, \quad (14)$$

где матрицы  $\hat{G}^{0-1}$  и  $\hat{\Lambda}$  определяются следующим образом:

$$\hat{G}_{nn}^{0-1}(\vec{q}) = (k^2 - q^2) \delta_{nn} + q_n q_n, \quad \Lambda_{nn}(\vec{q}) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} G_{nn}^0(|\vec{q} - \vec{p}|) B(p). \quad (15)$$

Из соображений симметрии ясно, что

$$\Lambda_{nn}(\vec{q}) = \Sigma(q) \delta_{nn} + q_n q_n \Sigma_1(q). \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (14), для средней функции Грина псевдофотона получаем следующее выражение:

$$G_{ij}(\vec{q}) = \frac{\delta_{ij}}{k^2 - q^2 - \Sigma(q)} - \frac{q_i q_j (1 - \Sigma_1)}{(k^2 - q^2 - \Sigma)(k^2 - \Sigma - \Sigma_1 q^2)}. \quad (17)$$

Как видно из (17), функция Грина имеет два полюса: при  $q^2 = k^2 - \Sigma$  и  $q^2 = (k^2 - \Sigma)/\Sigma_1$ . Однако при слабом рассеянии,  $\Sigma_1, \Sigma \rightarrow 0$ , основной вклад будет давать первый полюс. По этой причине в дальнейшем приближенно будем считать, что функция Грина в приближении когерентного потенциала имеет вид

$$G_{ij}(q) = (\delta_{ij} - q_i q_j k^{-2}) / [k^2 - q^2 - i \operatorname{Im}\Sigma(q)]. \quad (18)$$

Здесь мы опустили также  $\operatorname{Re}\Sigma$ . Это, как обычно, приводит к несущественной перенормировке параметров. Длина свободного пробега псевдофотона в среде определяется как  $l = k/\operatorname{Im}\Sigma(k)$ . Подробное исследование длины свободного пробега проводится ниже.

#### 4. Тензор излучения в коррелиированном случайном поле

Теперь, когда мы знаем среднюю функцию Грина, можем приступить к вычислению тензора излучения (10). В пределе слабого рассеяния  $k l \gg 1$  отбор диаграмм для тензора излучения такой же, как и в случае "белого шума" [1]. Следовательно, для тензора излучения из (10) имеем

$$I_{ij} = I_{ij}^0 + I_{ij}^D,$$

где

$$I_{ij}^0(\vec{R}) = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 G_{iq}^0(\vec{R}, \vec{r}_1) G_{jf}^{0*}(\vec{R}, \vec{r}_2) B(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) E_{0g}(\vec{r}_1) E_{0q}^*(\vec{r}_2),$$

$$I_{ij}^D(\vec{R}) = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 d\vec{r}_5 d\vec{r}_6 G_{im}^0(\vec{R}, \vec{r}_3) G_{jn}^{0*}(\vec{R}, \vec{r}_4) P_{mnhs}(\vec{r}_3, \vec{r}_4, \vec{r}_5, \vec{r}_6),$$

$$G_{hg}(\vec{r}_5, \vec{r}_1) G_{sf}^*(\vec{r}_6, \vec{r}_2) E_{0g}(\vec{r}_1) E_{0f}^*(\vec{r}_2) B(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), \quad (19)$$

$P$  - диффузионный пропагатор, определяемый суммой лестничных диаграмм:

$$P_{\text{mnhs}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) = \sum \begin{array}{c} m, \vec{r}_1 \\ \hline | & | & | & | \\ n, \vec{r}_2 & & s, \vec{r}_4 \\ h, \vec{r}_3 \end{array}$$

Здесь пунктиром обозначен коррелятор случайного поля  $B(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ , а сплошной линией - усредненная функция Грина (18). Отметим, что в (19) функции Грина, содержащие в аргументах координаты точки наблюдения  $\vec{r}$ , являются свободными. Интегрирование ведется по системе с флуктуирующей диэлектрической проницаемостью. На больших расстояниях от системы  $R \gg r$ , используя (12), можно получить

$$G_{ij}^0(\vec{R}, \vec{r}) = [(\delta_{ij} - n_i n_j)/4\pi R] \exp[ik(R - nr)], \quad (20)$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор в направлении точки наблюдения  $\vec{R}$ . Вычислим сначала вклад многократного рассеяния в интенсивность излучения  $I^D$ , который, как и вслучае "белого шума", оказывается главным.

Как видно из диаграмм, диффузионный пропагатор можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_{\text{mnhs}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) &= \\ &= B(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) B(|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|) P_{\text{mnhs}}(\vec{R}', \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{r}_3 - \vec{r}_4), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\vec{R}' = (1/2)(\vec{r}_3 + \vec{r}_4 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ . Подставляя (20) и (21) в (19) и произведя замену переменных в (19) по формулам

$$\vec{R}' = (1/2)(\vec{r}_3 + \vec{r}_4 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (22)$$

$$\vec{p}_1 = \vec{r}_3 - \vec{r}_4, \quad \vec{p}_2 = \vec{r}_5 - \vec{r}_6, \quad \vec{r}_6 = \vec{r}_6'$$

получаем

$$\begin{aligned} I_{ij}^D(\vec{R}) &= \frac{(\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn} - n_j n_n)}{16\pi^2 R^2} \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{R}' d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{r}_6 \exp(-ikn\vec{p}_1) \times \\ &\times B(\vec{p}_1) B(\vec{p}_2) P_{\text{mnhs}}(\vec{R}', \vec{p}_1, \vec{p}_2) G_{hg}(\vec{p}_2 + \vec{r}_6 - \vec{r}_1) G_{sf}^*(\vec{r}_6 - \vec{r}_2) \times \end{aligned}$$

$$\times E_{0g}(\vec{r}_1) E_{0f}^*(\vec{r}_2) B(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \quad (23)$$

Отметим, что якобиан линейного преобразования (22) равен единице. В фурье-представлении имеем из (23)

$$I_{ij}^D(\vec{R}) = \frac{(\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn} - n_j n_n)}{16\pi^2 R^2} \int \frac{d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 d\vec{q}_3 d\vec{q}_4}{(2\pi)^{12}} B(q_1) B(q_2), \quad (24)$$

$$P_{\text{minhs}}(\vec{K} = 0, k\vec{n} = \vec{q}_1, \vec{q}_2 + \vec{q}_3) G_{bg}(\vec{q}_3) G_{sf}^*(\vec{q}_3) B(|\vec{q}_4 - \vec{q}_3|) E_{0g}(\vec{q}_4) E_{0f}^*(\vec{q}_4).$$

Как показано в Приложении, фурье-образ диффузионного пропагатора при  $\vec{K} \rightarrow 0$  (голдстоуновская мода) в приближении слабого рассеяния  $kL \gg 1$  можно представить в виде

$$P_{\text{minhs}}(\vec{K}, \vec{p}, \vec{q}) = \frac{6\pi}{k} \frac{1}{K^2 L^2} \frac{\text{Im}G_{hs}(\vec{p}) \text{Im}G_{hs}(\vec{q})}{\text{Im}\Sigma(\vec{q})}. \quad (25)$$

Как следует из (24) и (25), интенсивность излучения, как и в случае "белого шума" [1], расходится. Эта расходимость, как отмечалось в [1], связана с диффузией псевдофотона и с тем, что интегрирование по системе проводится в бесконечных пределах. При учете конечных размеров системы  $L$  минимально возможный импульс в системе будет  $K_{\text{min}} \sim 1/L$ .

Для дальнейших вычислений приведем полезное соотношение, следующее из (15) и (16):

$$\int \text{Im}G_{hs}(\vec{p}) B(|\vec{p} - \vec{q}|) \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} = \delta_{hs} \text{Im}\Sigma(\vec{q}) + q_h q_s \text{Im}\Sigma_1(\vec{q}). \quad (26)$$

Подставляя (25) в (24) и интегрируя с помощью (26) по  $\vec{q}_1$  и  $\vec{q}_2$ , получаем

$$I_{ij}^D(\vec{R}) = \frac{3}{8\pi R^2 k} \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{K_{\text{min}}^2 L^2} \int \frac{d\vec{q}_3 d\vec{q}_4}{(2\pi)^6} [\delta_{hs} \text{Im}\Sigma(\vec{q}_3) + q_{3h} q_{3s} \text{Im}\Sigma_1(\vec{q}_3)] \times \\ \times G_{bg}(\vec{q}_3) G_{sf}^*(\vec{q}_3) B(|\vec{q}_4 - \vec{q}_3|) E_{0g}(\vec{q}_4) E_{0f}^*(\vec{q}_4). \quad (27)$$

В пределе слабого рассеяния,  $kL \gg 1$ , можно использовать следующие приближенные соотношения, вытекающие из (18):

$$G_h G_{hg} \approx 0, \quad \text{Im} \sum(q) G_{sf}^*(\vec{q}) G_{sg}(\vec{q}) = \text{Im} G_{fg}(\vec{q}). \quad (28)$$

Используя (28) и (26), для интенсивности излучения (27) окончательно находим выражение

$$\begin{aligned} I_{1j}^D(\vec{R}) &= \frac{3}{8\pi R^2 k} \frac{L^2}{l^2} (\delta_{1j} - n_1 n_j) \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \times \\ &\times [ |E_0(\vec{q})|^2 \text{Im} \sum(q) + |\vec{q} E_0|^2 \text{Im} \sum_l(q) ]. \end{aligned} \quad (29)$$

Формула (29) является обобщением результата [1] на случай произвольных корреляционных функций. Интересно, что это обобщение оказалось таким простым и сохранило основные особенности некоррелированного случая, а именно: из-за большого  $L^2/l^2 \gg 1$  дополнительного (по сравнению со вкладом однократного рассеяния) множителя вклад многократного рассеяния является определяющим. Это неудивительно, потому что фундаментальное явление диффузии имеет место при любом виде корреляционной функции. Из (29) также следует, что интенсивность излучения  $I^D(\theta, \omega) = (c/2) I_{11}^D(\vec{R}) R^2$  является изотропной, что также связано с диффузией. И, наконец, тензорная зависимость  $\delta_{1j} - n_1 n_j$  остается неизменной по сравнению со случаем "белого шума". Поэтому здесь также излучение является неполяризованным [1].

Для дальнейших вычислений нам нужно найти фоновое поле  $\hat{E}_0$ . Решив уравнение (8а), находим

$$E_{01}(\vec{q}) = \frac{8\pi^2 e\omega}{ic^2} \left[ \frac{v_1}{k^2 - q^2} - \frac{v q_z q_1}{k^2 (k^2 - q^2)} \right] \delta(\omega - q_z v). \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29) и интегрируя с помощью  $\delta$ -функции по  $q_z$ , получим

$$\begin{aligned} I^D(\omega) &= \frac{6\pi}{k} \frac{L^2}{l^2} \frac{e^2 \omega^2 d}{c^3} \left( \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{[(1 - k_0^2/k^2)^2 + k_0^2 q^2/k^4] \text{Im} \sum(\sqrt{k_0^2 + q^2})}{(q^2 + k_0^2 - k^2)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{k_0^2}{k^4} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \text{Im} \sum_l(q) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь введено обозначение  $k_0 = \omega/v$ .

Для дальнейшего продвижения в вычислениях, в принципе, нужно задавать корреляционную функцию, через которую выражаются  $\text{Im}\Sigma$  и  $\text{Im}\Sigma_1$  (см. (26)). Однако в наиболее интересном ультрапараллелистическом случае результат можно найти в общем виде. Как следует из (31) при  $k_0 \rightarrow k$ , главный вклад будет давать первый член, который содержит особенность при малых  $q$ . В первом члене основной вклад в интеграле по  $\vec{q}$  будут давать значения  $\vec{q}$ , близкие к нулю. Полагая  $\vec{q} = 0$  в аргументе  $\text{Im}\Sigma$  (это можно сделать при  $a^2 k_0^2 \ll r^2$ ) и вынося  $\text{Im}\Sigma$  за знак интеграла, находим

$$I^D(\omega) = \frac{3e^2}{c} \frac{L^2 d}{\text{Im}(\omega)} \left( 2 \ln \frac{r^2}{a\omega} - 1 \right). \quad (32)$$

При выносе  $\text{Im}\Sigma$  из-под интеграла возникает известная логарифмическая расходимость при больших импульсах, которую мы обрезали на значениях  $1/a$ . При более аккуратных вычислениях с помощью явных выражений для  $\text{Im}\Sigma$  результат (32) изменяется несущественно.

Таким образом, мы показали, что для ультрапараллелистических заряженных частиц  $r^2 \gg a^2 k^2$  интенсивность излучения определяется универсальной формулой (32), справедливой как в области длинных  $ka \ll 1$ , так и в области коротких  $ka \gg 1$  длин волн.

В случае медленных зарядов в области  $ka \ll 1$  интенсивность определяется формулой (1), а в области  $ka \gg 1$  интенсивность излучения экспоненциально мала.

Как видно из (32), частотная зависимость интенсивности излучения, в основном, определяется длиной свободного пробега в среде. Поэтому в следующем разделе мы рассмотрим эту зависимость.

## 5. Длина свободного пробега и частотная зависимость интенсивности излучения

Как было сказано выше, длина свободного пробега определяется формулой  $l(k) = k/\text{Im}\Sigma(k)$ . Полагая корреляционную функцию гауссовой,  $B(q) = B_0 \exp(-a^2 q^2/2)$ , из (26) находим

$$\text{Im}\Sigma(q) = \frac{B_0}{4\pi a^2} \exp\left(\frac{-a^2 q^2 - a^2 k^2}{2}\right) \left[ \frac{\text{sh}(a^2 kq)}{q} - \frac{\text{ch}(a^2 kq)}{a^2 kq^2} + \frac{\text{sh}(a^2 kq)}{a^4 k^2 q^3} \right].$$

(33)

$$Im \Sigma_1(q) = \frac{B_0}{4\pi a^2} \exp\left(\frac{-a^2 k^2 - a^2 q^2}{2}\right) \left[ \frac{3 \operatorname{ch}(a^2 kq)}{a^2 k q^4} - \frac{3 \operatorname{sh}(a^2 kq)}{a^4 k^2 q^5} - \frac{\operatorname{sh}(a^2 kq)}{q^3} \right].$$

В принципе с помощью (33) можно определить частотную зависимость длины свободного пробега. Однако получающиеся формулы громоздки и неудобны. По этой причине мы будем исследовать длину свободного пробега при асимптотических значениях параметра  $ka$ . Из (33) для длины свободного пробега находим

$$l(k) = \begin{cases} 6\pi/B_0, & ak \ll 1 \\ 4\pi a^2 k^2 / B_0, & ak \gg 1 \end{cases}. \quad (34)$$

Чтобы найти частотную зависимость длины свободного пробега, надо выяснить физический смысл  $B_0$ . Из определения корреляционной функции ясно, что  $B_0 \sim k^4 \delta \epsilon^2 a^3$  (где  $\delta \epsilon^2 = \langle (\epsilon(\vec{r}) - 1)^2 \rangle$  - дисперсия диэлектрической проницаемости). Если, например, случайное поле создано с помощью хаотически разбросанных шариков с радиусом  $a$  и с диэлектрической проницаемостью  $b$ , то  $\delta \epsilon^2 \approx na^3 b^2$  ( $n$  - концентрация шариков). Из (34) следует

$$l(\omega) = \begin{cases} 6\pi c^4 / \omega^4 \delta \epsilon^2 a^3, & aw/c \ll 1 \\ 4\pi c^2 / \omega^2 a \delta \epsilon^2, & aw/c \gg 1 \end{cases}. \quad (35)$$

Как видно из (35), с увеличением частоты падение длины свободного пробега (рост интенсивности излучения) замедляется. С другой стороны, мы должны потребовать, чтобы  $2\pi l(\omega) \gg \lambda$ , что является условием применимости нашего рассмотрения. Это условие приводит к ограничению области применимости результата (35) со стороны высоких частот  $\omega \ll 4\pi c / a \delta \epsilon^2$  ( $\lambda \gg a \delta \epsilon^2$ ). Однако формула для интенсивности излучения применима и в области  $\lambda \ll a \delta \epsilon^2$  (здесь, однако, длина свободного пробега уже не определяется выражением (35)). Это связано с тем, что в этой области также выполняется условие слабого рассеяния  $2\pi l \gg \lambda$  (см., например, [7]). В этом можно легко убедиться, например, в ситуации с хаотически разбросанными шариками. Здесь, в области длин волн  $\lambda \ll a \delta \epsilon^2$ , длину свободного пробега можно оценить как  $l \sim 1/\sigma$  (где  $\sigma$  - сечение рассеяния света на шарике). В этой области частот применимо ВКБ-приближение, где с повышением частоты сечение рассеяния уменьшается (см., например, [3]) и приближается к геометрическому

пределу  $2\pi a^2$ . Поэтому здесь  $2\pi l \sim a/\pi a^3 \gg a \gg \lambda$  (так как  $\pi a^3 \ll 1$ ). В результате спектр волн излучения можно разделить на три части. В области  $\lambda > 2\pi a$  длина свободного пробега  $l$  при увеличении длины волны растет как  $\lambda^4$  (область рэлеевского рассеяния). В области  $a\delta\varepsilon^2 \ll \lambda \ll 2\pi a$  рост  $l$  с увеличением  $\lambda$  замедляется. И, наконец, при  $\lambda \ll a\delta\varepsilon^2$  рост  $l$  с увеличением  $\lambda$  сменяется спадом. По этой причине при  $\lambda = a\delta\varepsilon^2$  длина свободного пробега будет минимальной. Так как интенсивность излучения ведет себя как  $I(\lambda) \sim l^{-3}(\lambda)$ , то соответственно при  $\lambda = a\delta\varepsilon^2$  она будет максимальной (см. рис. 1).

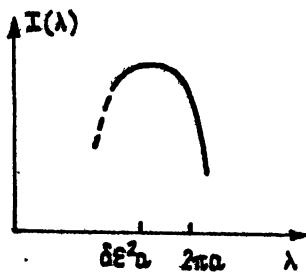


Рис. 1.

При дальнейшем уменьшении длины волны (пунктир) нужно учитывать резкую зависимость  $\delta\varepsilon^2$  от частоты, что приведет к более резкому спаду интенсивности.

Мы рассмотрели задачу об излучении заряженной частицы в коррелированном случайном поле диэлектрической проницаемости. Было показано, что, как и в случае "белого шума", основным механизмом излучения является диффузия псевдофотона. При этом мы указали простой способ (см. Приложение) нахождения диффузационной моды (голдстоуновская мода) для векторного поля в коррелированном случайном поле. В ультраквантитативистском случае получена общая формула для интенсивности излучения, описывающая как область длинных, так и область коротких длин волн. Из этой формулы следует, что частотная зависимость интенсивности излучения в основном определяется частотной зависимостью длины свободного пробега в среде. На основе анализа этой зависимости мы предсказываем пик в интенсивности излучения на длинах волн  $\lambda = a\delta\varepsilon^2$ .

Отметим, что здесь мы не учитываем частотную зависимость  $\delta\varepsilon^2$ , поэтому утверждение о наличии пика в интенсивности излучения справедливо только в такой области длин волн, где можно пренебречь этой зависимостью. Однако формула (32) имеет общий характер (т. е. учитывает частотную дисперсию), поэтому для любой конкретной зависимости из нее можно находить частотную зависимость

интенсивности излучения.

При рассмотрении излучения мы пренебрегли поглощением, считая, что  $I_{in}(\omega) \gg L$ . При выполнении обратного неравенства в формулах для интенсивности  $L$  заменяется на  $I_{in}$ . Так как  $I_{in}$  зависит от частоты, то это приведет к изменению частотной зависимости интенсивности излучения.

Что касается флуктуаций интенсивности излучения, то они, как и в случае "белого шума", будут порядка самой интенсивности.

В заключение автор выражает благодарность В. Аракеляну за полезные обсуждения результатов работы.

### Приложение

#### Голдстоуновская мода для векторного поля в коррелированном случайном поле

Решение задачи о нахождении диффузационного пропагатора в коррелированном случайном поле для скалярного случая выполнено в [8]. Прямое обобщение [8] на случай векторного поля сопряжено с большими трудностями. Мы укажем простой путь нахождения голдстоуновской моды в векторном случае. Для наших целей этого достаточно, потому что интенсивность излучения в основном определяется голдстоуновской модой.

Используя рис. 1 и представление (21), можно получить следующее интегральное уравнение относительно диффузационного пропагатора:

$$P_{mhs}(\vec{K}, \vec{q}, \vec{q}') = (2\pi)^3 G_{mh}\left(\vec{q} + \frac{\vec{K}}{2}\right) G_{hs}^*\left(\vec{q}' - \frac{\vec{K}}{2}\right) \delta(\vec{q} - \vec{q}') + \quad (\text{II. 1})$$

$$+ G_{mf}\left(\vec{q} + \frac{\vec{K}}{2}\right) G_{ng}^*\left(\vec{q}' - \frac{\vec{K}}{2}\right) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} P_{fghs}(\vec{K}, \vec{q} - \vec{p}, \vec{q}').$$

Преобразуем уравнение (II. 1) к виду

$$\begin{aligned} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} [\delta_{mf} \delta_{ng} \delta(\vec{p} - \vec{q}) - f_{mfg}(\vec{q}, \vec{K}) B(|\vec{p} - \vec{q}|)] P_{fghs}(\vec{K}, \vec{p}, \vec{q}') = \\ = (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{q}') f_{mhs}(\vec{q}', \vec{K}), \end{aligned} \quad (\text{II. 2})$$

где

$$f_{mnfg}(\vec{q}, \vec{K}) = G_{mf}\left(\vec{q} + \frac{\vec{K}}{2}\right) G_{ng}^*(\vec{q} - \frac{\vec{K}}{2}). \quad (\text{II. 3})$$

Умножая обе стороны уравнения на  $\delta_{mn}$  и суммируя по  $m$  и  $n$ , после интегрирования по  $\vec{q}$  находим

$$\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[ \delta_{fg} - \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} f_{fg}(\vec{q}, \vec{K}) B(|\vec{p} - \vec{q}|) \right] P_{fghs}(\vec{K}, \vec{p}, \vec{q}') = f_{hs}(\vec{q}'). \quad (\text{II. 4})$$

Здесь  $f_{hs}(\vec{q}, \vec{K}) = f_{mnhs}(\vec{q}, \vec{K})$ . Голдстоуновский моду ищем в следующем виде:

$$P_{fghs}(\vec{K} \rightarrow 0, \vec{p}, \vec{q}') = P_{fg}(\vec{K}, \vec{p}) f_{hs}(\vec{q}'), \quad (\text{II. 5})$$

где

$$f_{hs}(\vec{q}) = f_{hs}(\vec{q}, 0) = \text{Im}G_{hs}(\vec{q}) / \text{Im}\Sigma(\vec{q}).$$

Подставляя (II. 5) в (II. 4), получаем уравнение относительно  $P_{fg}$ :

$$\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[ \delta_{fg} - \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} f_{fg}(\vec{q}, \vec{K}) B(|\vec{p} - \vec{q}|) \right] P_{fg}(\vec{K}, \vec{p}) = 1. \quad (\text{II. 6})$$

Можно убедиться, что функция  $P_{fg}(\vec{K}, \vec{p}) = A(K) \text{Im}G_{fg}(\vec{p})$  при  $\vec{K} \rightarrow 0$  является решением уравнения (II. 6). Для этого разложим функцию  $f_{fg}$  по  $K$  и проинтегрируем с помощью (26) выражение по  $\vec{p}$ :

$$A(K) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{(\vec{q}\vec{K})^2 \text{Im}G_{fg}(\vec{q}) \delta_{fg}}{\text{Im}^2\Sigma(\vec{q})} = 1. \quad (\text{II. 7})$$

После взятия интеграла находим

$$A(K) \approx (6\pi/k)(1/K^2 l^2). \quad (\text{II. 8})$$

Используя (II. 5) и (II. 8), окончательно для голдстоуновской моды получаем выражение

$$P_{mnhs}(\vec{K} \rightarrow 0, \vec{p}, \vec{q}) \approx \frac{6\pi}{K} \frac{1}{K^2 l^2} \frac{\text{Im}G_{mn}(\vec{p}) \text{Im}G_{hs}(\vec{q})}{\text{Im}\Sigma(\vec{q})}, \quad (\text{II. 9})$$

что совпадает с (25).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Атаян С.Р., Геворкян Ж.С. //ИЭТФ. 1990. Т. 98. Вып. 5(11); Phys. Lett. A. 1990. V. 144. N 4, 5. P. 273.
2. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. - М.: Наука, 1984. С. 25.
3. Исимару А. Распространение и рассеяние волны в случайно-неоднородных средах. - М.: Мир, 1981. Т. 1. С. 36.
4. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. - Ереван: АН Армении, 1969.
5. Рыков В.А., Тамойкин В.В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1970, Т. 13. N 3. С. 356.
6. Van Albada M. P., Lagendijk A. //Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. N 26. P. 2692; Wolf P. E., Maret G. //Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. N 26. P. 2696.
7. John S., Stephen M. J. //Phys. Rev. B. 1983. V. 28. N 11. P. 6358.

Институт радиофизики и электроники  
АН Армении

Поступила в редакцию  
9 октября 1991 г.

### THEORY OF THE TRANSITION RADIATION IN A RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

Zh. S. Gevorkyan

The theory of the transition radiation emitted by a charged particle moving in a randomly inhomogeneous correlated medium is developed. The radiation is shown to be isotropic and unpolarized. The frequency dependence of the intensity of radiation is investigated and at the wavelength region  $\lambda \sim \delta\epsilon^2 a$  (where  $\delta\epsilon^2$  is the fluctuation of dielectric constant and  $a$  is the correlation radius of random field) a peak is predicted.

УДК 625.375.7.01

## ВЛИЯНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ АМПЛИТУДНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ НАКАЧКИ НА ШУМОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОКОНТУРНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ

М. Г. Мишанина, О. В. Музычук

Рассмотрено влияние шумовой амплитудной модуляции накачки на характеристики одноконтурного параметрического усилителя. Использованный метод матричных цепных дробей позволил снять традиционные ограничения на интенсивность и время корреляции шума. Исследована зависимость шумовых характеристик усилителя от добротности системы, сигнально-шумовых характеристик входного процесса, интенсивности и времени корреляции шумовой накачки в широком диапазоне изменений указанных параметров. Численным образом оценена область и скорость сходимости использованного метода.

1. Как известно, широкий круг задач статистической радиофизики и радиотехники допускает точное решение для случая, когда шумовые воздействия на динамическую систему являются дельта-коррелированными [1]. Существуют также методы, позволяющие осуществить адекватное статистическое описание для относительно малых и широкополосных случайных сил (см., например, [1-3]). Ясно, однако, что для реальных случайных воздействий эти ограничения могут не выполняться.

В работе [4] сделана попытка снять указанные ограничения при рассмотрении статистических характеристик одноконтурного параметрического усилителя: шумовая модуляция накачки считалась гауссовым процессом с произвольной шириной спектра. Метод цепных дробей дал возможность рассчитать энергетические характеристики системы с чисто шумовым входом. Однако при наличии гармонического входного сигнала моменты выхода не представимы цепными дробями. В этом случае можно использовать матричные цепные дроби [5]. Использованный ниже метод позволил получить достоверные количественные результаты для представляющих интерес характеристик системы (в частности, для отношения сигнал/шум) при любых интенсивностях и временах корреляции шумовой накачки. Метод применим и для анализа статистических характеристик более сложных систем с интенсивными шумами.

2. Как известно, динамические уравнения одноконтурного параметрического усилителя с шумами в накачке статистически эквивалентны уравнению осциллятора с флуктуациями собственной частоты:

$$y + 2hy' + \Omega^2[1 + z(t)]y = \Omega^2x(t). \quad (1)$$

Представим входной и выходной сигналы, а также накачку соответственно в виде

$$x(t) = x_s \sin(\Omega t) + x_c \cos(\Omega t),$$

$$y(t) = u \sin(\Omega t) + v \cos(\Omega t), \quad (2)$$

$$z(t) = z_s \sin(2\Omega t) + z_c \cos(2\Omega t),$$

считая, что входной процесс и накачка содержат гармоническую составляющую и шумовую амплитудную модуляцию

$$x_{s,c}(t) = x_{s,c}^0 + \xi_{s,c}(t), \quad z_{s,c}(t) = m_{s,c}^0 + \alpha_{s,c}(t). \quad (3)$$

Усреднив по периоду колебаний, придем к флуктуационным уравнениям

$$u' + (1 + \alpha_s)u + (Q/2)(\alpha_s u + \alpha_c v) = Q[x_c^0 + \xi_c(t)], \quad (4)$$

$$v' + (1 + \alpha_c)v + (Q/2)(\alpha_c u - \alpha_s v) = -Q[x_s^0 + \xi_s(t)],$$

где  $\alpha_s = 0,5Q(m_s^0 + m_c^0)$ ,  $\alpha_c = 0,5Q(m_c^0 - m_s^0)$ , а штрих означает производную по безразмерному времени  $\theta = ht$ ,  $Q$  — добротность контура.

Ограничимся для простоты рассмотрением накачки, гармоника которой имеет фиксированную фазу, соответствующую синус-компоненте\* ( $z_c = 0$ ). При этом уравнения для огибающих развязываются. Синус-огибающую зададим вспомогательным стохастическим уравнением (ниже для краткости  $\alpha \equiv \alpha_s$ )

$$\dot{\alpha} + \Pi\alpha = \eta(t), \quad (5)$$

где  $\eta(t)$  — гауссов дельта-коррелированный шум,  $\Pi$  — ширина спектра огибающей  $\alpha(t)$ .

Усреднив уравнения (4) и записав с учетом (5) соответствующие уравнения для совместных кумулянтов \*\* шумовой накачки и огибающих

\* Поскольку нас интересуют только энергетические характеристики, это предположение не принципиально.

\*\* Определение и свойства кумулянтовых скобок см. в [7].

выходного сигнала (методика получения подобных уравнений изложена в [6]), придем к следующей бесконечной цепочке:

$$\langle u \rangle' + (1 + p)\langle u \rangle + 0,5\langle u_1 \rangle = Qx_c^0,$$

$$\tau\langle u_k \rangle' + [k + (1 + p)\tau]\langle u_k \rangle + 0,5\tau\langle u_{k+1} \rangle = -k\mu\langle u_{k-1} \rangle, \quad (6)$$

$$\langle v \rangle' + (1 - p)\langle v \rangle + 0,5\langle v_1 \rangle = -Qx_s^0,$$

$$\tau\langle v_k \rangle' + [k + (1 - p)\tau]\langle v_k \rangle + 0,5\tau\langle v_{k+1} \rangle = -k\mu\langle v_{k-1} \rangle \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где переменные  $\langle u_k \rangle$ ,  $\langle v_k \rangle$  связаны с совместными кумулянтами соотношениями

$$\langle u_k \rangle = Q^k \langle \alpha^{[k]}, u \rangle, \quad \langle v_k \rangle = (-1)^k Q^k \langle \alpha^{[k]}, v \rangle.$$

Введенные в (6) безразмерные параметры

$$p = 0,5m_s^0 Q, \quad \tau = h/\Pi, \quad \mu = 0,5\langle \alpha^2 \rangle Q^2 \tau \quad (7)$$

имеют смысл эффективной амплитуды гармонической составляющей накачки относительно времени корреляции и эффективной мощности шумовой составляющей накачки.

Решение цепочек уравнений (6) представимо цепными дробями [2, 3], сходящимися, как показывает численный анализ, в области средней устойчивости системы  $\mu < 2(1 - p)$ , которая не зависит от времени корреляции  $\tau$ . Аналогично записываются цепочки уравнений для вторых моментов огибающих  $\langle u^2 \rangle$ ,  $\langle v^2 \rangle$ , в которые кроме совместных кумулянтов  $\langle \alpha^{[k]}, u^2 \rangle$ ,  $\langle \alpha^{[k]}, v^2 \rangle$  войдут и переменные из системы (6).

3. Для решения этих систем перейдем к матричной записи, введя двумерные кумулянтные векторы со следующими компонентами:

$$\vec{U}_1 = (\langle u \rangle; \langle u^2 \rangle), \quad \vec{U}_2 = (\langle u_1 \rangle; \langle u_1^2 \rangle), \dots, \quad \vec{U}_n = (\langle u_{n-1} \rangle; \langle u_{n-1}^2 \rangle),$$

$$\vec{V}_1 = (\langle v \rangle; \langle v^2 \rangle), \quad \vec{V}_2 = (\langle v_1 \rangle; \langle v_1^2 \rangle), \dots, \quad \vec{V}_n = (\langle v_{n-1} \rangle; \langle v_{n-1}^2 \rangle),$$

здесь обозначено

$$\langle u_k^2 \rangle = Q^k \langle \alpha^{[k]}, u^2 \rangle, \quad \langle v_k^2 \rangle = (-1)^k Q^k \langle \alpha^{[k]}, v^2 \rangle.$$

Введем также "невозмущенные" векторы, описывающие систему в отсутствие шума в накачке,

$$\vec{U}_0 = (u_0; \langle I \rangle_0), \quad \vec{V}_0 = (v_0; \langle I \rangle_0).$$

$u_0 = \Omega x_c^0$ ,  $v_0 = -\Omega x_c^0$ ,  $\langle I \rangle_0 = 0$ ,  $\text{БПЗД}_\xi$ ,  $D_\xi/2\pi$  – спектральная мощность входного шума.

Соответствующая матричная цепочка, как и система (6), имеет вид трехчленного взаимодействия

$$A_1 \vec{U}_1 + B_1 \vec{V}_2 = C_1 \vec{U}_0,$$

.....

$$A_n \vec{U}_n + B_n \vec{V}_{n+1} = C_n \vec{U}_{n-1}.$$

Выпишем для наглядности первые две строки из цепочки (8):

$$(1 + p)\langle u \rangle + 0,5\langle u_1 \rangle = u_0,$$

$$-u_0\langle u \rangle + (1 + p)\langle u^2 \rangle + \langle u_1^2 \rangle = 2\langle I \rangle_0,$$

$$[1 + (1 + p)\tau]\langle u_1 \rangle + 0,5\tau\langle u_2 \rangle = -\mu\langle u \rangle,$$

$$-2u_0\langle u \rangle + [1 + 2(1 + p)\tau]\langle u_1^2 \rangle + \tau\langle u_2^2 \rangle = -2\mu\langle u^2 \rangle,$$

общий вид матриц  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$ ,  $C_{n+1}$  определяется соотношениями

$$A_{n+1} = \begin{vmatrix} n + \tau(1 + p) & 0 \\ -2u_0\tau & n + 2\tau(1 + p) \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$$B_{n+1} = \tau \begin{vmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad C_{n+1} = -\mu\tau \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Соответствующие матрицы для векторов  $\vec{v}_n$  отличаются от (9) лишь заменой  $p$  на  $-p$  и  $u_0$  на  $v_0$ .

Решение цепочки (8) для вектора  $\vec{U}_1$  представимо матричной цепной дробью

$$\vec{U}_1 = \frac{C_1 \vec{U}_0}{A_1 C_2} + \frac{B_1 C_2}{A_2 + \frac{B_2 C_3}{A_3 + \dots}}. \quad (10)$$

Это представление дает рекуррентную процедуру отыскания искомого вектора (см. подробнее в [5])

$$\tilde{A}_n = A_n, \quad \tilde{A}_{k-1} = A_{k-1} + B_{k-1}(\tilde{A}_k)^{-1}C_k, \dots, (k = n, n - 1, \dots, 2),$$

$$\vec{U}_1 = (\tilde{\mathbf{A}}_1)^{-1} \mathbf{C}_1 \vec{U}_0. \quad (11)$$

которую нетрудно реализовать на компьютере. Здесь  $n$  - номер приближения,  $\mathbf{A}^{-1}$  - обратная матрица.

4. Как показывает численный анализ, указанная процедура сходится во всей области среднеквадратичной устойчивости параметрического усилителя

$$r + \mu < 1, \quad (12)$$

не зависящей от времени корреляции шумовой накачки. Скорость сходимости уменьшается с ростом  $t$  и резко замедляется вблизи границы устойчивости (12).

Практический интерес представляют следующие характеристики усилителя:

$$\langle I \rangle_g = 0,5(\langle u \rangle^2 + \langle v \rangle^2), \quad \langle I \rangle = 0,5(\langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle), \quad (13)$$

$$s/n = \langle I \rangle_g (\langle I \rangle - \langle I \rangle_g)^{-1},$$

где  $\langle I \rangle_g$  - средняя интенсивность гармонической составляющей,  $\langle I \rangle$  - полная средняя интенсивность выходного сигнала,  $s/n$  - отношение сигнал/шум. На рис. 1 и 2 показаны результаты расчета указанных характеристик с помощью выражений (10), (11). Номер приближения выбирался автоматически по заданной точности  $10^{-3}$ . Интенсивность параметрического шума считалась довольно большой.

На рис. 1 показана зависимость отношения сигнал/шум от относительного времени корреляции шума накачки. Параметрами графиков являются интенсивности гармонической  $r$  и шумовой  $\mu$  составляющих, амплитуды синус- и косинус-составляющих входного сигнала полагались равными единице ( $u_0 = v_0 = 1$ ), а входной шум равным нулю. Исходная кривая 1 соответствует "средним" величинам гармонической и шумовой компонент накачки, кривая 2 - относительно слабому шуму, 3 - сильному, 4 - относительно слабой гармонике в накачке, 5 - сильной. Отметим, что параметры кривых 3 и 5 очень близки к границе среднеквадратичной устойчивости системы.

Как видно из рисунка, отношение сигнал/шум увеличивается с ростом  $t$  (при фиксированном  $\mu$ ) и уменьшается с ростом как шумовой, так и гармонической составляющих накачки.

Представляет практический интерес выяснить зависимость отношения сигнал/шум от добротности "холодной" системы. При этом следует иметь в виду, что параметры  $u_0, v_0, \langle I \rangle_g$ , как и эффективные мощности гармонической и шумовой компонент накачки, растут с

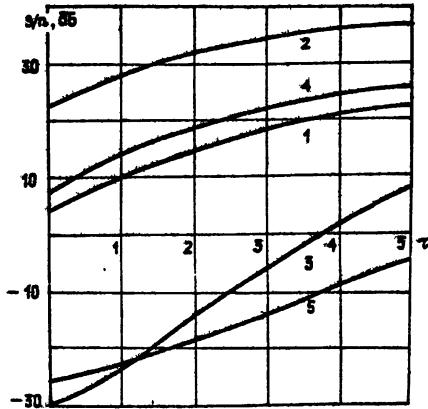


Рис. 1.

Кривая 1 -  $p = 0, 3, \mu = 0, 4$ ;  
 кривая 2 -  $p = 0, 3, \mu = 0, 1$ ;  
 кривая 3 -  $p = 0, 29, \mu = 0, 7$ ;  
 кривая 4 -  $p = 0, 1, \mu = 0, 4$ ;  
 кривая 5 -  $0, 59, \mu = 0, 4$ .

увеличением  $Q$ , а относительное время корреляции шума убывает:

$$\langle I \rangle_0 = I_1 Q, \quad p = p_1 Q, \quad \mu = \mu_1 Q, \quad \tau = \tau_1 / 2Q,$$

где обозначено

$$I_1 = \Omega D_\xi / 2, \quad p_1 = m_0 / 2, \quad \mu_1 = \langle \alpha^2 \rangle \tau_1 / 4, \quad \tau_1 = \Omega / \Pi.$$

Отсюда следует, что реальный шум накачки с заданной дисперсией и временем корреляции при достаточно большой добротности нельзя считать малым, а при малой добротности - белым \*.

Отметим, что для случая  $\delta$ -коррелированной накачки результаты легко находятся аналитически:

$$\langle u \rangle = u_0 (1 + p - \mu / 2)^{-1}, \quad \langle u^2 \rangle = (\langle I \rangle_0 + u_0 \langle u \rangle) (1 + p - \mu)^{-1} \quad (14)$$

(соответствующие выражения для  $\langle v \rangle$  и  $\langle v^2 \rangle$  получаются заменой  $p$  на  $-p$ ).

Зависимость отношения сигнал/шум от добротности системы во всем диапазоне ее изменения до границы устойчивости показана на рис. 2а, б. Параметрами кривых на рис. 2а являются коэффициенты  $p_1$ ,

\* В работе [8] рассматривались близкие вопросы в рамках известного приближения Буре (или второго приближения, в нашей терминологии), условия применимости которого содержат ограничения на величину и время корреляции шума.

$\mu$ ,  $I_1$ , характеризующие, соответственно, интенсивности гармонической, шумовой накачки и входного шума. Величина гармоники входного сигнала не изменялась. Видно, что с увеличением интенсивности входного шума оптимальная добротность увеличивается, а с ростом шума накачки уменьшается. Рост гармонической составляющей накачки смещает максимум кривых в противоположную сторону.

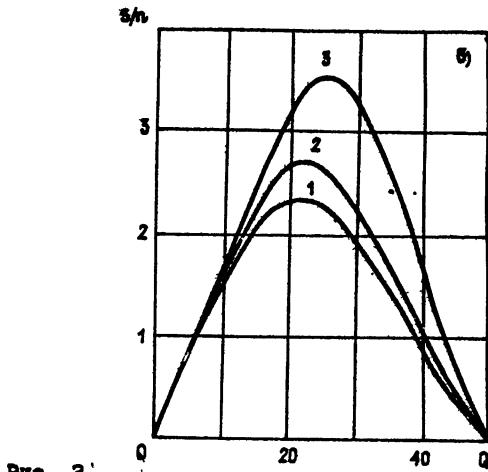
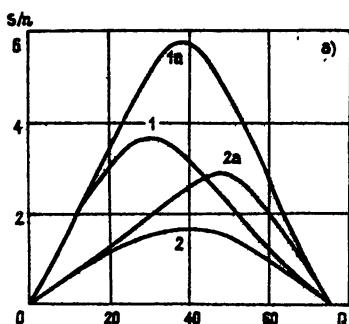


Рис. 2.

а) Кривые 1, 2 -  $\mu = 0,01$ ,  $p = 0,003$ ; кривая 1 -  $I_1 = 0,01$ ,  
кривая 2 -  $I_1 = 0,04$ . Кривые 1a, 2a -  $\mu = 0,003$ ,  $p = 0,01$ ;  
кривая 1a -  $I_1 = 0,01$ , кривая 2a -  $I_1 = 0,03$ .

Всюду  $\tau_1 = 100$ ,  $\alpha_s^2 = \alpha_c^2 = 0,04$ .

б) Кривая 1 -  $\tau_1 = 0$ ; кривая 2 -  $\tau_1 = 20$ , кривая 3 -  $\tau_1 = 100$ .  
Всюду  $p = \mu = 0,01$ ,  $I_1 = 0,01$ .

Параметром кривых на рис. 2б является "абсолютное" время корреляции шума  $\tau_1$ . Кривая 1, построенная на основании формул (13), (14), соответствует белому шуму. Как видно из графиков, наибольшее отличие результатов от реального и белого шумов имеет место как раз в области оптимальной добротности, хотя при достаточно малых  $Q$ , как и вблизи границы устойчивости, белошумовая модель достаточно адекватна.

На рис. 3 показана зависимость скорости сходимости использованного метода матричных цепных дробей от относительного времени корреляции шума. Здесь  $n$  - номер приближения, обеспечивающего заданную абсолютную точность  $10^{-3}$  (для наглядности вместо дискретных точек проведены кривые). Параметром графиков является величина  $D = 0,5 < \alpha^2 > Q^2$ . Поскольку  $\mu = D\tau$ , то на рис. 3 можно смотреть и как на зависимости скорости сходимости от эффективной

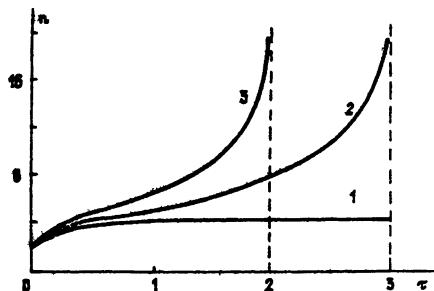


Рис. 3.  
Кривая 1 -  $D = 0, 1$ , кривая 2 -  $D = 0, 33$ ,  
кривая 3 -  $D = 0, 5$ .

мощности шума. Пунктиром показана граница среднеквадратичной устойчивости. Видно, что сходимость замедляется с ростом  $\tau$  (или с ростом  $\mu$ ) и ухудшается в непосредственной близости к границе устойчивости. В то же время при относительно малых  $\tau$  для достижения приемлемой точности вполне достаточно двух-трех приближений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. -М.: Наука, 1978.
2. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. -М.: Наука, 1980.
3. Диментберг М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. -М.: Наука, 1980.
4. Музычук О. В. //Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 6. С. 1139.
5. Музычук О. В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 2. С. 169.
6. Музычук О. В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 10. С. 1246.
7. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. -М.: Сов. радио, 1978.
8. Бочков Г. Н., Дубков А. А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 6. С. 869.

Нижегородский  
архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию  
3 октября 1991 г.

THE INFLUENCE OF INTENSIVE AMPLITUDE PUMP FLUCTUATIONS  
ON THE ONE-CIRCUIT PARAMETRIC AMPLIFIERS NOISE CHARACTERISTICS

*M. G. Mishanina, O. V. Muzychuk*

The influence of stochastic amplitude modulation of pump on one-circuit parametric amplifiers characteristics is considered. Matrix chain fraction method makes it possible to take away usual limitations for intensity and correlation time of the noise. The influence of amplifiers noise characteristics on quality factor, signal-noise characteristics of the input process, intensity and correlation time of stochastic pump have been investigated for a wide band of these parameter changes. The calculational estimations for the region and the speed of converge of the method used have been made.

УДК 621.372.826: 621.315.61.06

## ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗАННЫХ РЕБЕРНО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

*Е. И. Нефедов, И. Е. Нефедов, Т. Ю. Черникова*

Построена электродинамическая теория экранированной модели связанных идентичных реберно-диэлектрических линий, пре назначенных для непосредственного использования в объемных интегральных схемах (ОИС) КВЧ диапазона как в виде линии передачи, так и в качестве основы для создания элементной базы ОИС КВЧ. Основу анализа составляет система интегральных уравнений, алгебраизация которой производится по методу Бубнова - Галеркина. Искомые поля представляются в виде разложений по полиномам Чебышева 1-го и 2-го рода, что позволяет непосредственно учесть особенности электромагнитного поля вблизи ребер рассматриваемой линии передачи. Редукция системы линейных алгебраических уравнений производится по ходу численного эксперимента. Получены данные по двум основным (четной и нечетной) волнам и нескольким высшим типам волн. Произведены оценки ранее полученных приближенных результатов (по методу поперечного резонанса, разложение по неполной системе и др.).

Освоение диапазона миллиметровых и субмиллиметровых волн (диапазон КВЧ) для нужд систем сверхбыстрой обработки информации (ССОИ), функционирующих непосредственно на КВЧ, настоятельно требует изучения электродинамических свойств как "традиционных", так и новых, оригинальных типов линий передачи (ЛП). В последние годы ССОИ сначала на СВЧ, а ныне и на КВЧ строятся на основе плоскостных и объемных интегральных схем (ОИС) [1 - 4]. На западе ОИС называют трехмерными ИС [5]. Одной из перспективных для ОИС КВЧ является реберно-диэлектрическая линия (РДЛ), предложенная и разработанная применительно к этому направлению исследований и приложений [6 - 9]. При создании элементной базы ССОИ в КВЧ диапазоне большое значение имеют связанные системы РДЛ. Некоторые частные примеры связанных РДЛ показаны на рис. 1, где (а-д) - фрагменты одного этажа экранированной ОИС КВЧ с разными типами связанных РДЛ, среди которых:

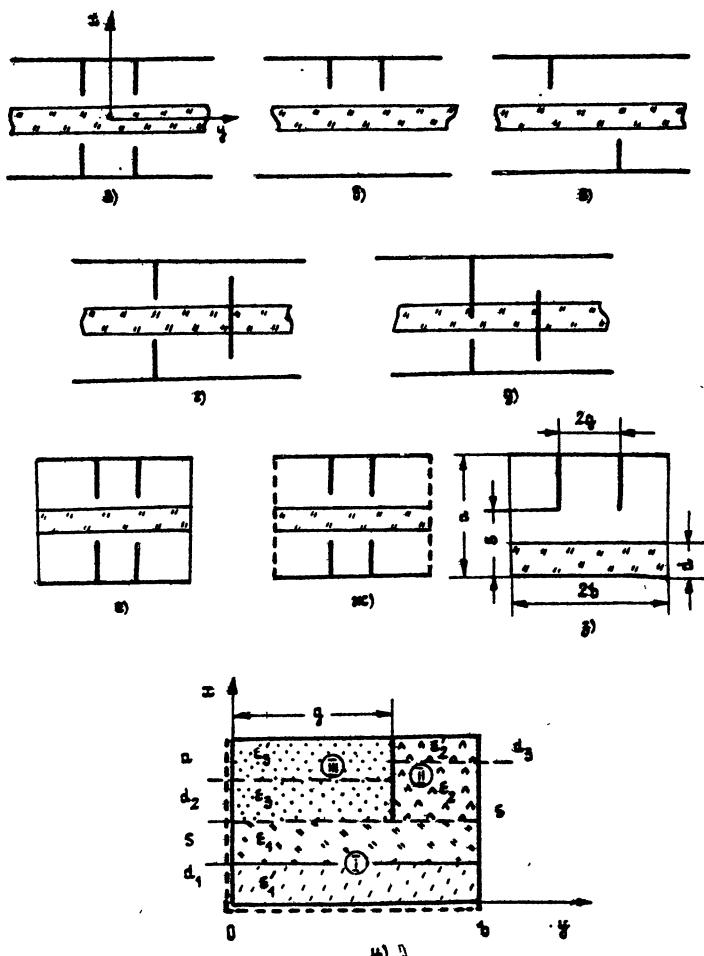


Рис. 1.

система связанных симметричных РДЛ (а), связанных несимметричных РДЛ (б, в), системы связанных РДЛ и ленточной линии (г, д), модели связанных РДЛ с гипотетическими вертикальными электрическими (е, з) и магнитными (ж) стенками, (и) - расчетная многослойная модель системы связанных РДЛ, где толстыми сплошными линиями показаны электрические стеки, а двойными (сплошные + пунктирные) - стеки либо электрические, либо магнитные. В целом это весьма широкий класс электродинамических структур КВЧ диапазона, на основе которого строятся различные базовые элементы ОИС для ССОИ. В настоящей работе на электродинамическом уровне строгости рассматриваются некоторые

системы связанных РДЛ. Одна из существенно более простых моделей связанных РДЛ была рассмотрена ранее [10].

## 1. СВЯЗАННЫЕ РДЛ. МОДЕЛЬ. МЕТОД АНАЛИЗА

Основной концепцией построения ССОИ КВЧ на базе ОИС является единый для каждого этажа ОИС однородный плоскопараллельный магнитодиэлектрический волноподдерживающий слой. Рабочей волной служит низшая поверхностная волна (в РДЛ) или  $\pi$ -волна (в ленточной линии) [8]. В пределах одного этажа ОИС рабочая волна направляется с помощью ребер (лент). Горизонтальные экраны (рис. 1, а-д) являются прерогативой длинноволновой части КВЧ диапазона; в коротковолновой части их может не быть, так как при достаточно заметном значении замедления рабочей волны протяженность ее поля по вертикальной координате у мала (порядка длины волны) и горизонтальные экраны между этажами ОИС могут отсутствовать. Поле рабочей волны РДЛ носит двумерно-поверхностный характер, т.е. по координатам  $x, y$  его интенсивность уменьшается по экспоненциальному закону [8], а стало быть, в расчетную модель могут быть введены гипотетические вертикальные электрические (рис. 1, е) или ( $u$ ) магнитные (рис. 1, ж) боковые стенки. Таким образом, математической моделью одиночной, а равно и связанных РДЛ может служить закрытая модель, к которой применимы хорошо зарекомендовавшие себя численные методы [1, 7, 8]. В основу анализа рассматриваемых в работе систем связанных РДЛ положена "стандартная" схема, широко применяемая в электродинамике СВЧ и КВЧ: система интегральных уравнений - метод Бубнова - Галеркина - система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и ее последующая редукция, составляющая предмет численного эксперимента (см., например, [1, 7, 8]). Эта схема расчета применительно к одиночной РДЛ была подробно изложена в [8] и поэтому здесь мы укажем только на некоторые отличительные особенности, не повторяя, естественно, материала [8]. Разумеется, желательно было бы получить аналитические или, на "худой конец", численно-аналитические результаты, которые способствовали бы наиболее эффективным для САПР математическим моделям, однако получение таких результатов является весьма сложной и многотрудной задачей, хотя в принципе и возможной (ср., например, аналитическую и численно-аналитическую теорию полосково-щелевых структур, построенную в [11, 12]).

В случае симметричных связанных РДЛ (рис. 1, а) система имеет две плоскости симметрии  $x=0$  и  $y=0$ , в которых могут быть установлены электрические или магнитные экраны. В силу симметрии структуры

рассматривается четвертая часть сечения связанных РДЛ, представленная на рис. 1, на котором сплошными линиями показаны электрические экраны, а пунктирными - магнитные. При этом экран в плоскости  $x = 0$  определяет поляризацию волны: электрический экран соответствует волнам с "вертикальной" поляризацией электрического поля, а магнитный - с "горизонтальной". Электрический экран в плоскости  $y = 0$  определяет нечетные (по  $y$ ) волны, а магнитный - четные. Поперечное сечение модели (рис. 1, u) рассматриваемой системы состоит из трех частичных областей (они помечены римскими цифрами), каждая из которых содержит два плоских слоя.

Как и ранее, для представления полей воспользуемся  $x$ -компонентой электрического и магнитного векторов Герца (ср. [8]), что определяется удобством записи полей в частичных областях:

$$\Pi^{pq}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{pq} X_n^{pq}(x) Y_n^{pq}(y) e^{i\omega z}, \quad (1)$$

где  $p = \{e, m\}$  определяет принадлежность функции к электрическому ( $e$ ) и магнитному ( $m$ ) вектору Герца, I, II, III - номера частичных областей,  $\omega$  - постоянная распространения (вдоль  $z$ ). Функции  $X_n^{pq}(x)$  и  $Y_n^{pq}(y)$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца, граничным условиям на контуре поперечного сечения линии и поверхности ребра, а также на границах частичных областей за исключением линии  $x = s$  и условиям непрерывности тангенциальных границ раздела диэлектрических слоев компонент электрического и магнитного полей.

## 2. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Поля на границе  $x = s$  представим как и ранее (см., например, [13])

$$E_y(y)|_{x=s} = f_1(y) e^{i\omega z}, \quad y \in [0, b], \quad (2)$$

$$E_z(y)|_{x=s} = i f_2(y) e^{i\omega z}, \quad y \in [0, b].$$

Система интегральных уравнений относительно  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$  получается, когда приравниваются  $y$ - и  $z$ -компоненты (тангенциальные) магнитного поля на линии раздела частичных областей  $x = s$ . Вид этих уравнений совпадает с приведенными в § 2.5 [13] и поэтому мы здесь не будем их повторять, а ограничимся только указаниями на имеющие место отличия.

Неизвестные поля представим в виде разложения по полиномам Чебышева 1-го и 2-го рода, учитывая особенность электромагнитного поля вблизи ребра при  $x = s$ ,  $y = g$  (когда ребро находится в однородном диэлектрике):

$$f_1(y) = [1 - (\frac{y}{g})^2]^{-1/2} \sum_{j=1}^{\infty} V_j^1 \xi_j^1(y) + [1 - (\frac{b-y}{c})]^{-1/2} \sum_{j=1}^{\infty} V_j^2 \xi_j^2(y), \quad (3)$$

$$f_2(y) = [1 - (\frac{y}{g})^2]^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} V_j^1 \theta_j^1(y) + [1 - (\frac{b-y}{c})]^2 \sum_{j=1}^{\infty} V_j^2 \theta_j^2(y),$$

где

$$\xi_j^1(y) = \begin{cases} T_{2j-2g_1}(\frac{y}{g}), & 0 < y < g \\ 0, & g < y < b \end{cases}, \quad \xi_j^2(y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < g \\ T_{2j-2+g_3}(\frac{b-y}{c}), & g < y < b \end{cases}, \quad (4)$$

$$\theta_j^1(y) = \begin{cases} U_{2j-1-g_1}(\frac{y}{g}), & 0 < y < g \\ 0, & g < y < b \end{cases}, \quad \theta_j^2(y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < g \\ U_{2j-1-g_3}(\frac{b-y}{c}), & g < y < b \end{cases},$$

$g_1$ ,  $g_3$  – индексы граничных условий при  $y = 0$  и  $y = b$  соответственно. Если имеется магнитная стенка  $g_1 = g_3 = 1$ , если электрическая, то  $g_1 = g_3 = 0$ . Чтобы получить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), надо умножить 1-е интегральное уравнение сначала на  $\xi_1^1(y)$  и проинтегрировать с соответствующим этим функциям весом от нуля до  $b$ , потом на  $\xi_1^2(y)$ . Затем последовательно умножить 2-е интегральное уравнение на  $\theta_1^1(y)$  и  $\theta_1^2(y)$  и интегрировать аналогичным образом. Далее, приравнивая определитель СЛАУ к нулю, получим дисперсионное уравнение для определения постоянных распространения собственных волн связанных РДЛ:

$$\det |D(h, k)| = 0. \quad (5)$$

### 3. МОДЕЛИ. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Отработка модели. Сравнение с результатами по упрощенным моделям. Построение строгой (даже как отмечалось выше, численной) электродинамической теории связанных РДЛ заняло много времени, в то время как насущные потребности построения и проектирования ССОИ на КВЧ требовали хотя бы приближенных данных. Поэтому на первоначальном этапе системы связанных РДЛ анализировались методом поперечного резонанса, а потом разложением в ряды только по системе продольно-магнитных ДМ-волн. Эти результаты представлены на рис. 2 в виде зависимостей замедления  $h/k$  от расстояния между отдельными РДЛ, составляющими связанный структуру РДЛ. (Здесь  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $h$ - продольное волновое число.) Значение  $h/k=1$  является границей между быстрыми (волноводными,  $h/k < 1$ ) и медленными ( $h/k > 1$ ) волнами. Для выбранных значений геометрических и физических параметров (они даны в подписи к рис. 2 (и к др. рис.) в системе существует, как видно, одна быстрая (волноводная) и две медленных волны. При этом самые верхние кривые на рис. 2 соответствуют четным (по  $y$ ) волнам (при  $y = 0$  имеется магнитный экран). Ниже располагаются кривые, соответствующие нечетным волнам (при  $y = 0$  - электрический экран), самые нижние кривые относятся к быстрым четным волнам и непосредственного интереса для ОИС КВЧ не представляют, хотя и позволяют определить полосу одноволнового режима (со стороны быстрых волн). Из приведенных на рис. 2 результатов видно, что метод поперечного резонанса (штрих-пунктирные кривые), основанный на достаточно точно знании реактивности диафрагмы в волноводе с магнитодиэлектрическим слоем [10], дает результаты с ошибкой в несколько процентов. Несколько худшие результаты (однако того же порядка, что и метод поперечного резонанса) получаются, если использовать неполную систему функций волновода со слоем, например, как это было сделано для данных рис. 2, когда в разложении мы ограничились только системой продольно-магнитных волн ЛМ (штриховые кривые). Возможно несколько странным покажется факт, что приближенные подходы в предельных случаях дают верные результаты. Так, при  $g/b = 1$  (правая сторона рис. 2) "замедление" в точности соответствует его значению для прямоугольного волновода, частично заполненного диэлектриком [14] (значения  $h/k = 1,022$  и  $1,186$  для нечетных и четных волн соответственно). В другом предельном случае, когда  $g/b = 0$ , полученные результаты соответствуют симметричной РДЛ [8] (левая часть рис. 2; значения  $h/k = 1,025$  и  $1,214$  для нечетных и четных волн соответственно).

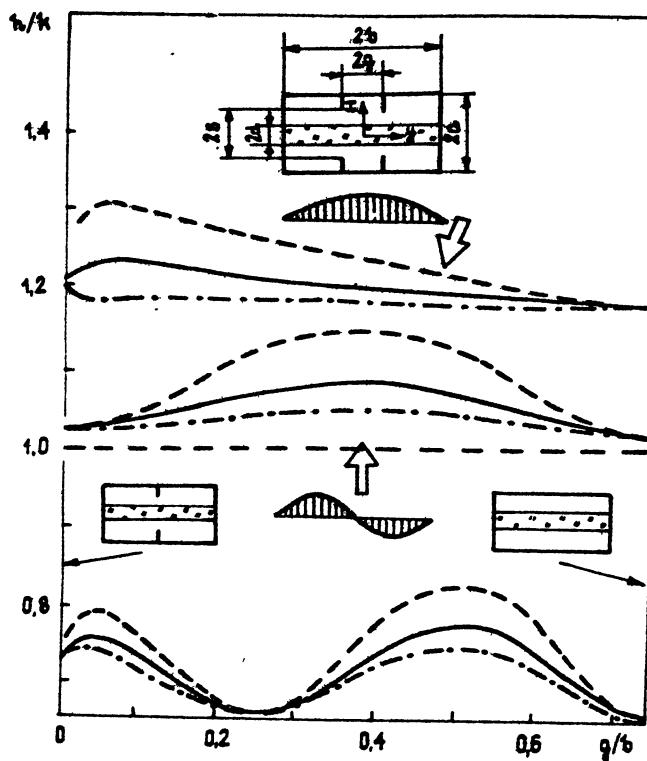


Рис. 2.

Таким образом, имея в распоряжении матрицу рассеяния двух бесконечно протяженных (вдоль  $z$ ) диафрагм при нормальном (вдоль оси  $y$ ) падении на эту систему одной из собственных волн плоского волновода (ср. [15]), можно с точностью до 1-3 % определить значение относительной постоянной распространения волн в РДЛ. Такой подход возможен и вполне оправдан с точки зрения построения эффективных математических моделей ЛП и базовых элементов на их основе для САПР ССОИ, непосредственно функционирующих на КВЧ.

**3.2. Замечание о численном решении дисперсионного уравнения (5).** Корнями дисперсионного уравнения (5) являются постоянные распространения  $h$  основных (четной и нечетной) и высших типов волн рассматриваемой экранированной системы связанных РДЛ. При получении результатов, как обычно при использовании процедуры Бубнова - Галеркина, было проведено большое количество численных экспериментов по определению необходимого числа  $N$  членов в рядах (1) и количества функций  $M, L$ , "адекватно" аппроксимирующих поле на

границах частичных областей. В целом особых отличий от результатов численных экспериментов по одиночной РДЛ не отмечено, однако было показано, что несколько увеличивается необходимое число  $M = L$  до 5 - 7 и  $N$  до 50 при точности до единиц третьего знака. В остальном же оценки остаются прежними. Процедура численного эксперимента подробно описывалась в [8] и здесь мы ее повторять не будем, ограничившись настоящим замечанием.

3.3. Анализ некоторых численных результатов. Как видно из приведенных на рис. 2 результатов, влияние расстояния между взаимодействующими РДЛ по разному оказывается на симметричных волнах. Однако это влияние кажущееся, ибо и в том и в другом случаях волна более чутко реагирует, когда "возмущение" (ребром) производится в максимуме ее электрического поля. Для четной волны это  $g/b = 0$  (ребро РДЛ в центральной плоскости), а для нечетной -  $g/b = 1/2$  (ребра связанных РДЛ также попадают в максимум электрического поля).

Зависимость замедления четной и нечетной (по  $y$ ) волн как функции расстояния между ребрами идентичных симметричных РДЛ показаны на рис. 3. Левая сторона рис. 3 соответствует прямоугольному волноводу, частично заполненному диэлектриком ( $s/a = 0$ ) со значениями замедлений  $n/k = 1,023$  и  $1,188$  для нечетных и четных волн (при  $d/a = 0,2$ ) соответственно. При малых длинах ребер их влияние на замедление, естественно, мало, но по мере приближения конца ребра к поверхности слоя это влияние становится заметным, причем проявляется по разному для четных и нечетных волн. Так, для нечетных волн близость ребер к поверхности проявляется сильнее при относительно больших ( $g/b \sim 1/2$ ) расстояниях между обеими РДЛ, а у четных - при малых. Впрочем, при непосредственной близости концов ребер в поверхности слоя зависимости для разных  $g/b$  перестают быть заметными функциями от параметров, наблюдается резкий рост замедления волн обоих типов (рис. 3). Электромагнитное поле как бы вталкивается (вдавливается) внутрь слоя. Аналогичная, в принципе, картина наблюдается в одиночной РДЛ [8], хотя может быть и не столь ярко выраженная. Стоит, впрочем, отметить, что предельный случай  $s/d = 1$  (ребра РДЛ касаются поверхности слоя) является весьма сложным для анализа (ср. [15]), ибо избранная вычислительная схема оказывается в этом случае неустойчивой\* (ср. также [8]). Такая же ситуация наблюдалась и для одиночной РДЛ и,

\*Случай касания ребра поверхности слоя требует, строго говоря, тщательного самостоятельного исследования. Так, например, в [15] для этого случая специально был разработан вариант метода квазиполного обращения оператора, что позволило, в частности, получить тестовые данные для свертки результатов, найденных проекционными процедурами.

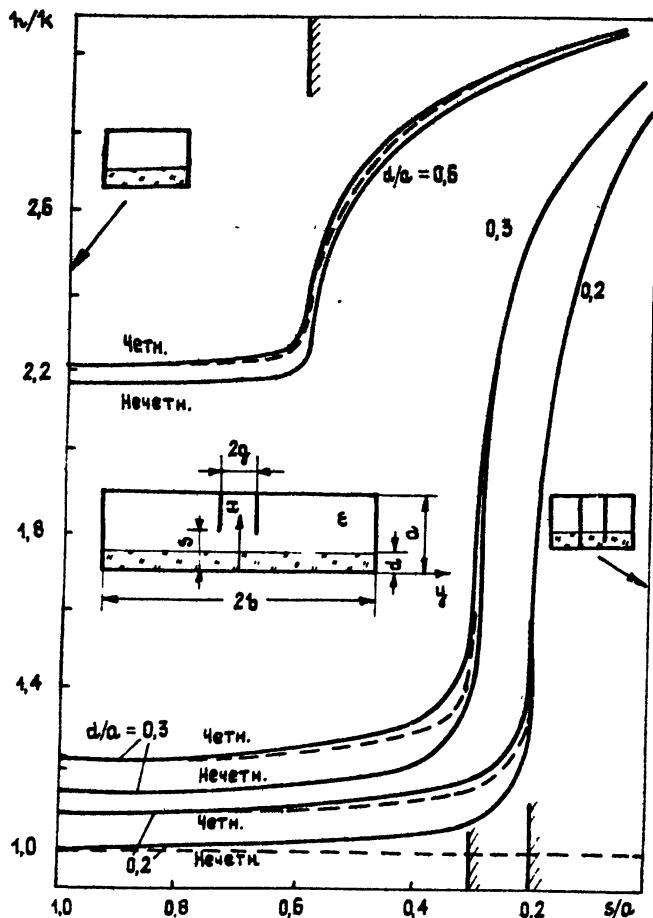


Рис. 3.

также как и там, здесь данные для  $s/d = 1$  получаются интерполяцией результатов, устойчивых при  $s/d = 1 + \delta$ , когда  $\delta/d \ll 1$ . Для наглядности и сравнения на рис. 3 штриховыми линиями нанесены замедления одиночной РДЛ ( $g/b = 1$ ) [8].

Интересно посмотреть на те же зависимости  $h/k = h/k(s/a)$ , что и на рис. 3, но при разных значениях расстояния  $2g$  между РДЛ. Соответствующие численные данные приведены на рис. 4. Из них видно, что довольно заметная разница между значениями  $g/b$  (0,04 и 0,20) более влияет на нечетные, чем на четные волны. При этом при малых расстояниях между линиями ( $g/b = 0,04$ ) различие замедлений для четных проявляется гораздо более заметно, чем для нечетных. Это естественно,

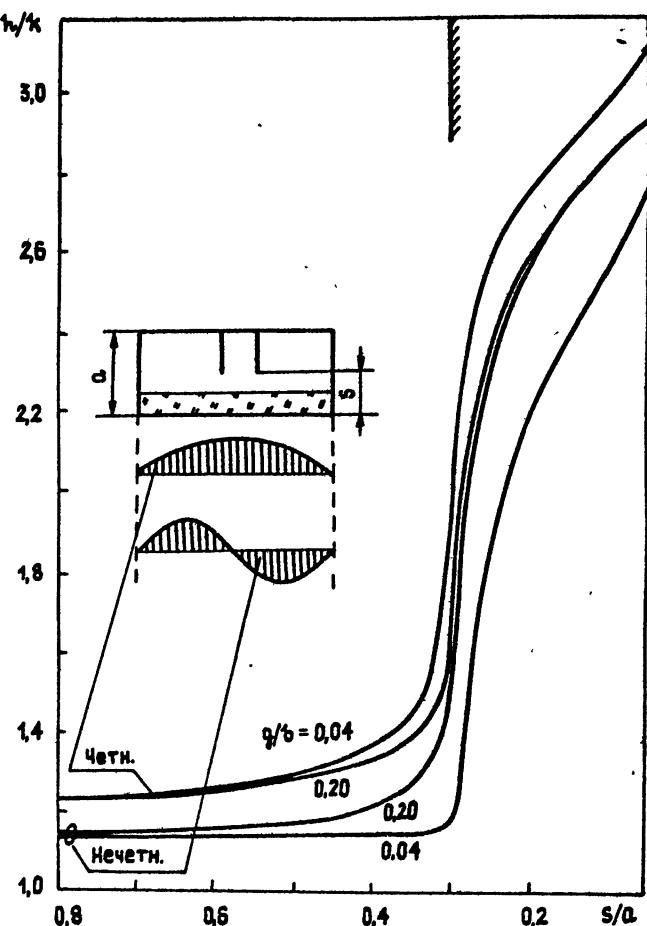


Рис. 4.

ибо влияние "электрического" ребра на нечетный тип волны (электрическая стенка при  $y = 0$ ) при его приближении к плоскости симметрии значительно меньше, чем в случае, когда оно приближается к магнитной стенке (четный тип волны). По разному ведут себя эти же зависимости и после погружения ребер в диэлектрический слой. Так, при достаточно разнесенных РДЛ ( $g/b = 0,2$ ) замеделения четного и нечетного типов практически совпадают, а для близкорасположенных РДЛ, напротив, это различие существенно увеличивается.

Одним из основных вопросов при создании теории связанных ЛП является установление влияния расстояния между ЛП на свойства их связанный системы. В определенной степени ответ на этот вопрос дает

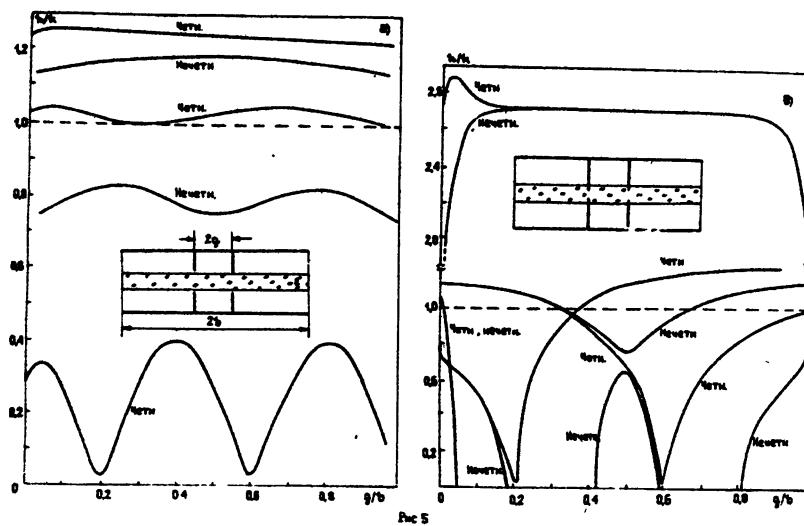


Рис. 5

результаты, представленные на рис. 5, где показаны зависимости замедления нескольких типов волн связанных РДЛ от расстояния между двумя идентичными симметричными РДЛ. Рассмотрены два случая, когда ребра обеих РДЛ находятся на удалении от слоя (рис. 5а) и когда они утоплены в волноподдерживающий слой (рис. 5б). В обоих случаях геометрические и физические параметры системы выбраны так, что из медленных волн ( $h/k > 1$ ) по существу остались только две низших волны. Левые стороны рисунка соответствуют одиночным РДЛ, правые - волноводам с частичным диэлектрическим заполнением. Приведенные кривые в этих предельных случаях начинаются (заканчиваются) в соответствующих точках. Для четных волн РДЛ это точки 1, 241 (рис. 5а) и 2, 715 (рис. 5б) и т. д. Видно, что расстояние между РДЛ по-разному оказывается в обоих случаях: при  $s/a = 0,6$  (рис. 5а) замедления четных и нечетных волн слабо зависят от  $g$  во всем диапазоне изменения  $g$ . В случае утопленных в диэлектрик ребер резкое отличие замедлений четных и нечетных волн отмечается при малых  $g$  (РДЛ близки), однако уже при

$g/b \approx 0,2$  это различие исчезает и замедления волн совпадают. Последнее обстоятельство может оказаться полезным при расчетах различных базовых элементов ОИС СВЧ и КВЧ диапазонов (см., например, [1, 4, 13, 16]), ибо здесь отмечено известное явление выравнивания фазовых скоростей четной и нечетной волн, позволяющее реализовать, например, весьма широкополосные направленные ответвители.

Для полноты картины на рис. 5 приведены и некоторые данные по быстрым волнам ( $h/k < 1$ ), однако здесь они являются волнами паразитного типа и подробно не анализируются, хотя и позволяют, например, в определенной мере судить о ширине зоны режима медленных волн. Для СВЧ диапазона (условно) они, конечно, интересны и подробный анализ такого рода зависимостей желателен.

В завершении данного цикла исследований связанных РДЛ приведем некоторые данные по случаю малых  $g/b$  (рис. 6) и набора других параметров. Кроме непосредственного значения для связанных РДЛ этот случай представляет интерес для моделирования РДЛ с конечной толщиной ребра, что может оказаться существенным для КВЧ диапазона, а прямое нахождение замедления с учетом толщины ребра может оказаться затруднительным (см., например, [17]). На рис. 6 представлены данные только по четному типу волны (при  $y = 0$  магнитная стенка). Видно, что с увеличением частоты зависимости  $h/k = h/k(g/b)$  (при прочих равных условиях, естественно) становятся более плавными при  $g/b < 1$  (кривые 1, 2). Удаление ребра от поверхности слоя также способствует более плавному ходу зависимости (кривые 2, 3), что вполне понятно, ибо при увеличении расстояния между ребрами ослабляется его влияние на поле волны слоя. Аналогично ведут себя кривые зависимости замедления при разных  $\epsilon$  (кривые 2, 4).

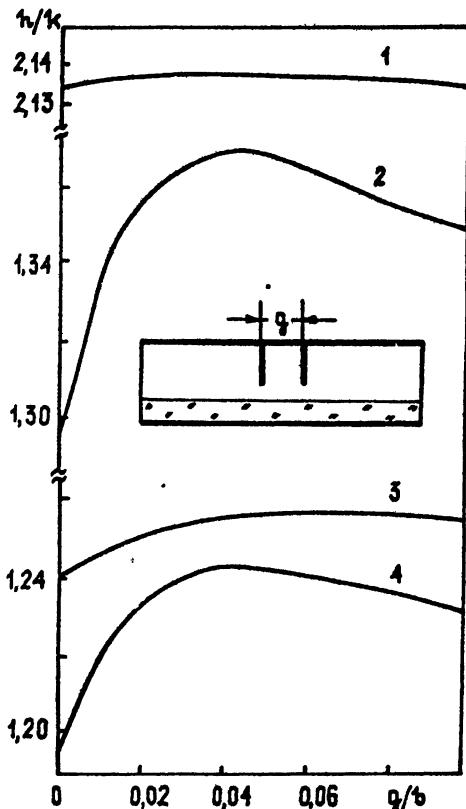


Рис. 6.

#### 4. Заключение

Построенная теория позволяет получить отчетливую физическую картину явлений в связанных РДЛ, необходимую и весьма полезную при построении теории математических моделей базовых элементов ОИС КВЧ. Приведенные численные результаты, развитые и опробованные алгоритмы и реализованные программы позволяют непосредственно приступить к проектированию таких основных базовых элементов ОИС КВЧ как направленные ответвители, делители каналов, межэтажные переходы и мн. др. Разумеется, класс связанных РДЛ гораздо шире, чем набор структур, рассмотренных здесь, и многие практически интересные и нужные задачи и структуры еще ждут своего рассмотрения. Отметим среди них устройство управления, связанные системы из неидентичных РДЛ, а также ЛП других классов и, наконец, широкий набор неоднородностей на связанных РДЛ, трансформаторы сопротивлений, фильтры и многие другие устройства пассивного и активного типа для КВЧ и оптического диапазонов, столь необходимых для построения систем сверхбыстрой обработки информации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гвоздев В.И., Нефедов Е.И. Объемные интегральные схемы СВЧ. - М.: Наука, 1985.
2. Гвоздев В. И., Нефедов Е. И., Тихонов А. Н. //Вопросы кибернетики: теория и практика создания САПР РЭА/ Под ред. Б. В. Бункина. - -М. :Изд. АН СССР. 1988. С. 49.
3. Нефедов Е. И. Радиоэлектроника наших дней. - М. :Наука, 1986.
4. Bhat B., Koul S.K. Analysis, design and applications of fin lines.-Arteck House. 1987.
5. Техника и технология интегральных схем будущего // ТИИЭР. 1986. Т.76. № 12. С.1.
6. Реберная диэлектрическая линия / В. И. Гвоздев, Е. И. Нефедов, А. Д. Симонов и др. //А. с. N 1390664 от 20. 11. 88. - Опубл. в БИ, 1988, N 15.
7. Реберно-диэлектрическая линия /Н. Н. Арганашвили, В. И. Гвоздев, Е. Е. Нефедов и др. /ДАН СССР. 1988. Т. 303. N 1. С. 97.
8. Нефедов Е. И., Черникова Т. Ю. //Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 12. С. 1525.
9. Гвоздев В. И., Нефедов Е. И., Черникова Т. Ю. и др. // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. N 2. С. 298.
10. Черникова Т.Ю. К теории связанных реберно-диэлектрических линий передачи //В кн."Автоматизированное проектирование устройств СВЧ": сб. научн. тр. / Под ред. В. В. Никольского. -М. : МИРЭА; 1989, с. 79.
11. Неганов В. А. //Радиотехника и электроника. 1986. Т 31. N 3. С. 479; 1989. Т. 34. N 11. С. 2251.

12. Неганов В.А., Нефедов Е. И. //ДАН СССР. Т. 299. № 5. с. 1124.
13. Афромеев В.И., Привалов В.Н., Яшин А.А. Согласующие устройства гибридных и полупроводниковых интегральных СВЧ схем / Отв.ред. Е.И.Нефедов. - Киев: Наукова думка, 1989.
14. Егоров Ю.В. Частично заполненные прямоугольные волноводы.-М.: Сов. радио. 1967.
15. Нефедов Е. И., Чохонелидзе М. Т. Дифракция поверхностных волн экранированной линии на симметричной диафрагме и перегородке // Препринт N15 (544).-М.: изд.ИРЭ АН СССР. 1990.
16. Нефедов Е. И., Коэловский В. В., Згурский А. В. Микрополосковые излучающие и резонансные устройства. -Киев: Техника, 1990.
17. Курушин Е. П., Нефедов Е. И. Электродинамика анизотропных волноведущих структур. - М.: Наука, 1983.

Институт радиотехники и электроники  
РАН

Поступила в редакцию  
19 июня 1991 г.

### ELECTRODYNAMIC THEORY OF CONNECTED FINNED DIELECTRIC LINES

*E.I.Nefedov, I.E.Nefedov, T.Yu.Chernikova*

The electrodynamic theory is built for a screened model of the connected identical finned dielectric lines designed to operate directly in three-dimensional integrated circuits (TDIC) for EHF ranges as the lines of transmission and foundation for EHF TDIC base elements. The analysis is based on a set of integral equations, its algebraization using the Bubnov - Galerkin method. The required fields are presented as the first and the second type Chebyshev approximations taking account of the features of the electromagnetic field near the fins of transmission lines. Reduction of a set of the linear algebraic equations is reached in the numerical experiment. The data were obtained from two main (even and odd) waves and the most high ones. The approximate results (method of cross-section resonance, basic function approximation) obtained earlier are estimated.

УДК 621.385.69

## СТРУКТУРА ИЗЛУЧЕНИЯ ОДНОМОДОВОГО ГИРОТРОНА

С. Н. Власов

Рассматривается стационарная структура поля излучения из гиротрона с аксиально - симметричными резонатором и электронным пучком. Исследование ведется на основе уравнений неоднородной струны для поля и уравнения движения электронов для амплитуды их поперечного импульса. Показано, что в таком гиротроне на его выходе имеются как моды, которые являются закритическими для резонатора, так и моды, бегущие через резонатор.

В гиротронах - мощных приборах миллиметрового диапазона длин волн - используются резонаторы в виде труб переменного диаметра [1, 2]. Площадь их поперечного сечения существенно превышает квадрат длины волны  $\lambda$ . Такие резонаторы возбуждаются винтовыми электронными потоками на высших, бегущих по азимутальной координате  $\phi$ , модах с частотами  $\omega_s$ , близкими к одной из гармоник циклотронного резонанса  $n\omega$

$$(\omega_s - \omega_{n\perp}) \leq \Delta\omega, \quad (1)$$

где  $\omega_n = |e|H_0/m_e c \gamma$  - циклотронная частота,  $\Delta\omega$  - полоса циклотронного резонанса,  $n$  - номер гармоники,  $H_0$  - величина магнитостатического поля,  $\gamma = (1 - \beta^{(0)2})^{-1/2}$  - релятивистский масс-фактор,  $\beta^{(0)2} = \beta_1^{(0)2} + \beta_{||}^{(0)2}$ ,  $\beta^{(0)} = v^{(0)}/c$  - отношение скорости электронов к скорости света  $c$ , индекс (0) относится к величинам на входе в пространство взаимодействия, индексы 1 и || принадлежат к составляющим вектора, перпендикулярным и параллельным направлению  $H_0$ ,  $e$  и  $m_e$  - заряд и масса электрона. В дальнейшем мы ограничимся первой гармоникой  $n = 1$  и слаборелятивистским случаем  $\beta \ll 1$ . По радиальной координате возбуждаемые моды имеют каустику с радиусом

$$R_s = cm/\omega_s$$

( $m$  - азимутальный индекс,  $c$  - скорость света), близкую к сред-

нему радиусу электронного потока  $R_e$  - расстоянию от оси резонатора до центра электронной траектории:

$$R_s \approx R_e.$$

В рабочем режиме, несмотря на сверхразмерность резонатора, гиротроны являются одночастотными приборами [3]. Их излучение при наличии аксиальной симметрии резонатора и пушки может быть представлено в виде суперпозиции мод полого волновода с одним азимутальным  $m$  и различными радиальными индексами  $p$ . Одна из этих мод с индексом  $p_0$  является преобладающей и называется рабочей. В случае простейшего резонатора гиротрона в виде цилиндра длиной  $L_p$  с радиусом  $R_p$ , сопряженным с выходным конусом с углом раскрыва  $\theta$  (рис 1а) с одной стороны и достаточно крутым, обеспечивающим закритическое сужение для всех мод, конусом с другой, излучение добавочных мод с индексами  $p < p_0$  возникает внутри резонатора (его цилиндрической части); излучение мод с индексами  $p > p_0$ , у которых собственная частота выше частоты генерации, возникает в выходном конусе резонатора, где имеется критическое сечение и, как известно из теории полых волноводов [4], существует квазирезонансная структура с протяженностью поля,

$$L_k \approx 2\nu_{n,p}^{1/3} \theta^{-1/3} \lambda, \quad (2)$$

где  $\nu_{n,p}$  - поперечный индекс-корень производной функции Бесселя  $J'(\nu_{n,p}) = 0$ . В современных гиротронах  $\nu_{n,p} \approx 20 + 60$  и  $\theta \approx 0,05 + 0,1$ , так что длина  $L \approx 1 + 2\lambda$  является достаточной для излучения электронного пучка, модулированного рабочей модой. В настоящей работе исследуется теоретически излучение мод с  $p \neq p_0$ , имеющее место и в полом волноводе вследствие зависимости его диаметра от продольной координаты, причем пренебрегается трансформацией мод друг в друга.

Рассмотрим взаимодействие трех мод с радиальными индексами  $p_0, p_{0+1}$  с амплитудами  $f_i$ , которые зависят от продольной координаты и определяются в результате взаимодействия электронного пучка с полем ("нефиксированная структура поля" в терминологии [5]). Согласно [5], для величины  $p_t$ , связанной с орбитальным моментом электрона  $p_z$ ,

$$p_t = e^{-i\omega_0 t} (p_x + i p_y) / |p_z^{(0)}|,$$

имеем уравнение

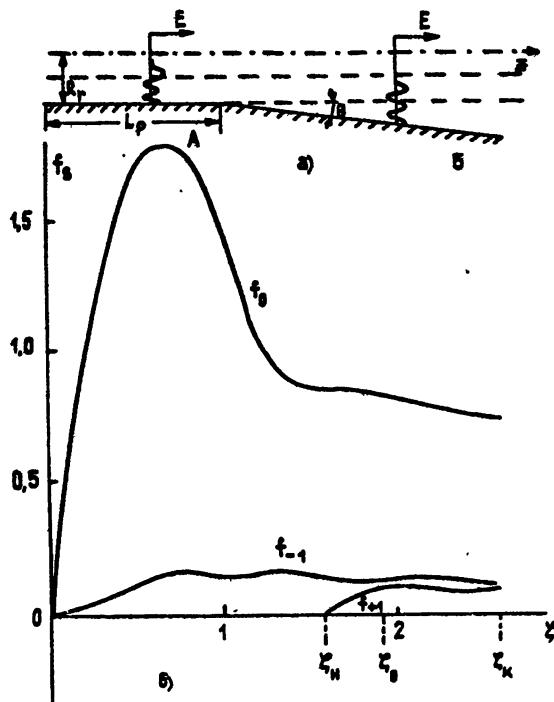


Рис. 1.

- а) Профиль резонатора, усредненная траектория электронов (пунктир), поперечная структура полей в сечениях А и Б.  
 б) Зависимость амплитуд функций  $f_z$  от продольной координаты.

$$dp_t/d\zeta + iM(\Delta + |p_t|^2 - 1)\hat{p}_\zeta = i(f_0A_0 + f_{-1}A_{-1} + f_{+1}A_{+1}), \quad (3)$$

где  $p_x$  и  $p_y$  - поперечные компоненты орбитального момента в декартовой системе координат,  $\zeta/L_p$  - нормированная на длину резонатора продольная координата,  $M = L_p\beta_{\perp}^{(0)2}\omega_h/2c\beta_{||}^{(0)}$  - отношение длины резонатора к нормированной длине взаимодействия  $L = 2c\beta_{||}^{(0)2}/\omega_h\beta_{\perp}^{(0)2}$ , обычно используемой в теории гиротрона [5, 6],  $\Delta = 2(\omega_0 - \omega)/\beta^{(0)2}\omega_h$  - нормированная отстройка между  $\omega$  и невозмущенной циклотронной частотой  $\omega_h$ .

В отличие от [3, 5, 6] имеются дополнительные множители  $\lambda$ . Их появление обусловлено необходимостью учета конечной протяженности взаимодействия электронного пучка и электромагнитного поля моды. В первых работах по гиротронам [1] предполагалось, что эффективное взаимодействие прекращается, когда электроны выходят из резонансного магнитного поля. В современных гиротронах резонансная область

оказывается много больше длины резонатора, но имеется другой механизм обрезания взаимодействия, обусловленный пространственным разделением электронного пучка и высокочастотного поля. Пространственное разделение вызвано существованием у резонатора выходного конуса, где структура моды, согласно методу поперечных сечений, меняется, постепенно расширяясь. Эффект поясняется рис. 1а, где показан профиль резонатора, усредненная траектория электронного пучка (пунктир) и амплитудная структура поля в двух поперечных сечениях. Вследствие этого эффекта взаимодействие изменяется. Характер изменения зависит от величины  $R_0$  - "места встречи" электронного пучка в резонаторе. При "встреле" в первый от оси максимум функции возбуждения (часто встречающийся случай) множитель у рабочей моды монотонно убывает на длине

$$L_0 \approx \lambda v / 4\theta m,$$

сравнимой с длиной резонатора. При "встреле" в более далекие максимумы множители  $\lambda_s$  имеют осциллирующий характер.

Электромагнитное поле в гиротроне представим, согласно [5], в виде

$$\vec{E} = 2 \operatorname{Re} \sum_s (F_s \vec{E}_s),$$

где  $\vec{E}_s$  - собственные функции, выражющиеся через мембранные функции  $\Psi$ , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta\Psi + k_1^2 \Psi = 0$$

и граничным условиям на контуре резонатора  $d\Psi/d\vec{N} = 0$ , где  $\vec{N}$  - нормаль к поверхности резонатора;

$$\vec{E}_s = [\vec{z}_0 \operatorname{grad}_\perp \Psi_s].$$

Функции  $f_s$  связаны с  $\Psi_s$  соотношением

$$f_s = |e| \lambda \Psi_s N / (p_{\perp}^{(0)} \omega_{\perp}^{(0)} \beta_{\perp}^{(0)2}),$$

где  $\lambda$  - составляющая поля  $\vec{E}_s$ , синхронно врачающаяся с электронами [5].

Для функций  $f_0$  и  $f_{-1}$  имеем следующие уравнения:

$$\frac{d^2 f_0}{d\zeta^2} + r_0^2 f_0 = I_{p_0} \langle p_t \rangle \lambda_0. \quad (4a)$$

$$\frac{d^2 f_{-1}}{d\zeta^2} + \gamma_{-1}^2 f_{-1} = I_p \langle p_t \rangle A_{-1}, \quad (46)$$

где  $I_p = e \beta_{||}^{(0)} \beta_{\perp}^{(0)} \epsilon J_{n,p+1}^2 (\nu_{n,p} R_e / R_p) M^3 / (mc^3 J_n^2 (kR_p) [k^2 R_p^2 - n^2])$  - безразмерный ток, знак  $\pm$  - определяется совпадением или несовпадением направлений вращения электронов и моды;  $\gamma_s^2(\zeta)$  - квадрат безразмерного волнового числа:

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 &= (\omega^2/c^2 - \nu_{n,p_0}^2/R_p^2) L_p^2 + \nu_{n,p_0}^2 L_p^3 R_p^{-3} \theta F(\zeta) = \\ &= G_0 + Q_0 F(\zeta), \end{aligned}$$

где  $F(\zeta) = 0$  при  $\zeta < 1$ ,  $F(\zeta) = \zeta - 1$  при  $\zeta > 1$ ;

$$\gamma_{-1}^2 = (\omega^2/c^2 - \nu_{n,p_0-1}^2/R_p^2) L_p^2 + \nu_{n,p_0-1}^2 L_p^3 R_p^{-3} \theta F(\zeta).$$

Поскольку  $p < \nu_{n,p} \approx \nu_{n,p\pm 1}$ , то для  $\nu_{-1}$  имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{-1}^2 &\approx (\omega^2/c^2 - \nu_{n,p_0-1}^2/R_p^2) L_p^2 - 2\nu_{n,p_0-1} L_p^2 / R_p^2 + \\ &+ 2\nu_{n,p_0-1} L_p^3 R_p^{-3} \theta F(\zeta) = G_0 + Q_{-1} - Q_{-1} F(\zeta). \end{aligned}$$

Величина  $\langle p_t \rangle$  представляет собой, как обычно, усредненный по фазе влета в пространство взаимодействия нормированный поперечный импульс электронов. Границным условием для  $p_t$  в (3) при  $\zeta = 0$  является отсутствие модуляции электронного пучка на входе

$$p_t = e^{i\theta_0}; \quad 0 < \theta_0 < 2\pi.$$

Для функций  $f_0$  и  $f_{-1}$  граничным условием в силу достаточно быстрого роста закритичности являются равенства  $f_0 = f_{-1} = 0$ . На правом конце необходимо поставить условие излучения

$$df_s/d\zeta = -i\gamma_s(\zeta) f_s. \quad (5)$$

Для функции  $f_{+1}$  можно выписать уравнение, аналогичное (4a),  
(4б);

$$\frac{d^2 f_{+1}}{d\zeta^2} + r_{+1}^2 f_{+1} = I_{p_0+1} \langle p_t \rangle A_{+1}, \quad (6)$$

$$r_{+1}^2 \approx Q_0 - Q_{-1} + Q_{+1} F(\zeta).$$

Поскольку в используемых гиротронах

$$\nu_{n,p}^2 \lambda / (2\pi\nu_{n,p}^2 L_p \theta) \approx 1,$$

то  $Q_{-1} \approx Q_{+1} \approx Q \approx 2\delta\nu k L_p^2 / R_p$ , где  $\delta\nu \approx \nu_{n,p+1} - \nu_{n,p} \approx \nu_{n,p} - \nu_{n,p-1}$  и  $Q_{\pm 1}$  пропорциональны "Френелевскому" числу резонатора.

При  $\zeta < \zeta_0 = 2 - G_0/Q$   $r_{+1}^2 < 0$  и интегрирование (6) в "лоб" невозможно из-за быстрого нарастания ошибок. Поэтому для  $f_{+1}$  ставились следующие условия:  $f_{+1} = 0$  при  $\zeta < \zeta_H < \zeta_0$ , где  $\zeta_0 = \zeta_H$  выбиралось равным ширине резонансной области (3). На правом конце  $f_{+1}$  удовлетворяла условию излучения (5). Конечная точка интервала  $\zeta_K$  выбиралась достаточно далеко, так что отрезок интегрирования включал в себя область излучения моды с индексом  $p_0 + 1$ . При расчете было принято  $\zeta_K = 2, 6$ .

Система (3), (4a), (4b), (6) может быть исследована только численно. Она определяет собственные частоты и структуры типов колебаний. Собственный вектор имеет шесть скалярных компонент, в качестве которых выбирались величина  $G_0$  и значения действительных  $\operatorname{Re} f_0$ ,  $\operatorname{Re} f_1$ ,  $\operatorname{Re} f_{-1}$  и минимых частей  $\operatorname{Im} f_1$ ,  $\operatorname{Im} f_{-1}$  производных  $f_z$  при  $\zeta = 0$  и при  $\zeta = \zeta_H$  соответственно. Значение  $\operatorname{Im} f_0$  выбиралось равным нулю. Решения находились методом спуска.

Конкретный вид функций  $A_n$  принимался следующим:

$$A_0 = 1, \quad A_{-1} = \alpha_{-1}, \quad A_{+1} = \alpha_{+1} \quad \text{при } z < L_p;$$

$$A_0 = \exp(-2[z - L_p]^2/L_p^2), \quad A_{-1} = \alpha_{-1} \exp(-2[z - L_p]^2/L_p^2)$$

$$\text{при } L_p < z < L_k;$$

$$A_{+1} = 1, 2\alpha_{+1} \exp(-Dt^2/L_p^2) \quad \text{при } L_p < z < 1, 5L_p;$$

$$A_{+1} = 1, 2\alpha_{+1} \exp(-2t^2/L_p^2) \quad \text{при } 1, 5L_p < z < L_k,$$

где  $t = z - 1, 5L_p$ ,  $D = 4\ln(1, 2)$ .

Сложный выбор функции  $A_{+1}$  обусловлен тем, что вне резонатора она имеет максимум, для описания которого введено число 1, 2, показывающее во сколько раз увеличивается взаимодействие с электронным пучком моды с индексом  $p_0 + 1$  на коническом переходе. Коэффициенты  $\alpha_{-1}$  и  $\alpha_{+1}$  введены для описания эффектов смещения "встрела" электронного пучка. Смешая место "встрела", можно сильно уменьшить один из коэффициентов  $A_{+1}$ .

Прежде чем переходить к изложению результатов численных расчетов, относящихся к полной системе, остановимся на результатах интегрирования уравнений (3), (4а) при  $\alpha_{-1} = \alpha_{+1} = f_{-1} = f_{+1} = I_{p_0 - 1} = I_{p_0 + 1} = 0$ . Исследования проводились при использовании восьми электронных групп по  $\theta_0$ . Они показали, что гиротрон имеет высокий КПД при определенном соотношении безразмерной длины  $M$ , расстройки  $\Delta$  и тока  $I_0$ . В качестве исходной была выбрана система с параметрами  $M = 8$ ,  $\Delta = 0,7$  и  $I_0 = 25$ , близкими к границе мягкого и жесткого режима [6] при достаточно высокой эффективности  $\eta_1 = 0,56$ . При уменьшении тока до  $I_0 = 19$  поперечный КПД  $\eta_1$  достигал величины  $\eta_1 = 0,68$ , но при еще большем уменьшении тока решение исчезало. С увеличением  $I_0$  эффективность уменьшалась до  $\eta_1 = 0,11$  при  $I_0 = 40$ . При увеличении расстройки  $\Delta$  эффективность несколько увеличивалась при одновременном увеличении тока, достигала максимума, а затем уменьшалась. При небольшом увеличении длины  $M$  эффективность возрастала.

Проведенные расчеты мощности излучения мод с  $p_0 - 1$  и  $p_0 + 1$  при  $Q = 80$ ,  $\alpha_{-1} = \alpha_{+1} = 0,8$ , что соответствует параметрам современных гиротронов  $L/\lambda \approx 5$  и  $v_{\text{w.p.}} \approx 60$ , показали, что они достигают значений 4% и 1%, соответственно, при снижении эффективности до  $\eta_1 = 0,54$ . При  $\alpha_{-1} = 0$  мощность моды с  $p_0 + 1$  составляла  $\approx 3\%$  при возрастании  $\eta_1$  до  $\eta_1 = 0,58$ . При уменьшении сверхразмерности резонатора гиротрона уменьшается  $v_{\text{w.p.}}$ , увеличивается  $Q$  и уменьшаются параметры  $\alpha_{\pm 1}$ , что приводит к существенному снижению трансформации (на порядок при уменьшении  $v_{\text{w.p.}}$  до значений  $\approx 30\%$ ).

Аналогичные эффекты искажения структуры поля гиротрона имеют место при несимметрии электронного пучка. В простейшем случае зависимости плотности тока  $i$  от азимутальной координаты

$$i = i_0(1 + \alpha \cos\Psi),$$

где  $i_0$  — средняя плотность,  $\alpha$  — параметр несимметрии. Для мод,

отличающихся от рабочей по азимутальному индексу на единицу, будем иметь систему уравнений, близкую к (3), (4). Мода с более низким азимутальным индексом возбуждается внутри резонатора, а мода с более высоким азимутальным индексом возбуждается в конусном волноводе. В отличие от аксиально-симметричного гиротрона, в несимметричной системе моды с индексами  $m \pm 1$  являются связанными благодаря параметрическому взаимодействию в электронном пучке. Модуляция электронного пучка на моде с индексом  $m + 1$  возникает внутри резонатора, но излучается в электромагнитное поле вне резонатора. Правые части уравнений для этого случая несколько отличаются от правых частей (3), (4). Эффект трансформации в моды, отличающиеся азимутальными индексами, имеет такой же порядок, как и в моды, отличающиеся радиальными индексами. Его увеличение обусловлено уменьшением при определенном  $\nu_r$  параметра  $Q$  в 2 - 3 раза, а уменьшение появлением малого параметра  $\alpha$ , который, по-видимому, в реальных гиротронах имеет величину  $\approx 0,2 + 0,4$ .

Исследованные эффекты ограничивают мощность, получаемую с одного гиротрона традиционной конструкции. При увеличении сечения резонатора излучение из гиротрона приобретает сложную структуру, зависящую от тонких деталей "встрела". Использование такого излучения затруднено.

Отмеченные эффекты ограниченности длины взаимодействия электронного пучка с определенной модой волновода могут объяснить структуру излучения из гиротрона при отсутствии в полосе циклотронного резонанса мод резонатора и ограничивают коэффициент усиления гироусилителей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юллатов В. К. //Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 9-10. С. 1414.
2. Юллатов В. К. // Сб.: Гиротрон. - Горький: ИПФ АН СССР. 1981.
3. Гольденберг А. Л., Павельев А. Б., Хижняк В. И. //Сб.: Гиротрон. - Горький, ИП ФАН СССР, 1989.
4. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно-меняющимися параметрами. - М.: Изд. АН СССР, 1961.
5. Братман В. Л. и др. //Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 4. С. 622.
6. Нусинович Г. С., Эрм Р. Э. //Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1972. Вып. 8. С. 55.

# STRUCTURE RADIATION SINGLEMODE GYROTRON

S. N. Vlasov

The stationary structure of the gyrotron's radiation is investigated. The gyrotron has axially symmetric resonator and axially symmetrical electron beam. The calculations are based on the inhomogeneous string equation for field and equations for transverse pulse of the electrons. It is shown, the gyrotron's radiation has both evanescent modes and modes running through the resonator.

УДК 621.373.1

## ДВУХЧАСТОТНЫЙ ГЕНЕРАТОР С СУБГАРМОНИКОЙ

Е. Е. Железовский, А. Г. Лазерсон, А. Л. Рязанцев

Проведен теоретический анализ автоколебаний генератора с нелинейной емкостью на входе (выходе) нелинейного усилителя. Рассмотрено возбуждение двухчастотных колебаний с интенсивной субгармонической составляющей. Приведены экспериментальные результаты, подтверждающие возможность одновременного генерирования гармонической и субгармонической компонент с близкими величинами амплитуд.

В публикациях по радиофизике и теории колебаний (см., например, [1, 2]) достаточно детально проанализированы режимы монохроматических (регулярных одночастотных) колебаний автоколебательных систем. Усложнение спектра выходного сигнала автогенераторов обычно связывают с релаксационным характером колебаний, автомодуляционными процессами или возбуждением высших гармонических и комбинационных составляющих [3 - 5]. В последнее время, в связи с исследованиями стохастических автоколебаний [6, 7], начал проявляться интерес к возбуждению субгармонических составляющих спектра. Субгармонические колебания небольшого уровня наблюдаются в реальных конструкциях стохастических генераторов (например, в [8]). В то же время представляет интерес возможность возбуждения интенсивных субгармоник в автоколебательных системах, что и является предметом настоящих исследований.

## 1. Уравнения автогенератора с нелинейной емкостью

Атогенераторы регулярных колебаний имеют в своем составе активный многополосник (нелинейный усилитель), колебательную систему и цепь положительной обратной связи. Полупроводниковые элементы, входящие в состав активных многополосников, обычно содержат обедненные области пространственного заряда ( $p$  -  $n$ -переходы, барьеры Шоттки и т. д.), представляющие собой емкости, нелинейно зависящие от величины приложенного напряжения. На рис. 1, в соответствии с [1],

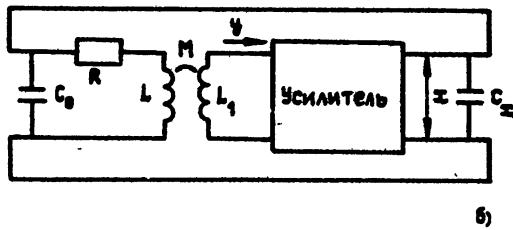
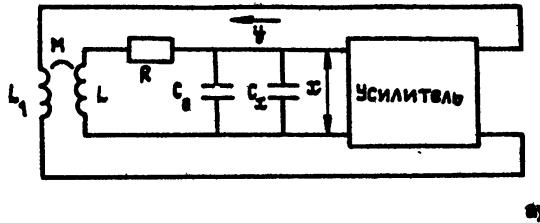


Рис. 1.

приведены схемы автогенераторов с нелинейной емкостью во входной (рис. 1а) или выходной (рис. 1б) цепи нелинейного усилителя. Здесь использованы следующие обозначения:  $x$  - переменное напряжение на входе или выходе нелинейного усилителя;  $i$  - переменный ток в цепи обратной связи (рис. 1а) или выходной цепи (рис. 1б) нелинейного усилителя;  $C_0$ ,  $L$ ,  $R$  - постоянная емкость, индуктивность и сопротивление колебательного контура;  $C_x$  - нелинейная емкость на входе (рис. 1а) или выходе (рис. 1б) активного многополюсника;  $M$  - коэффициент взаимной индукции.

Уравнение колебаний для обеих схем автогенератора имеет один и тот же вид. Действительно, в пренебрежении токами в цепях управляющих электродов нелинейного усилителя, уравнение Кирхгофа для контура схемы рис. 1а

$$x + iR + L \frac{di}{dt} = M \frac{dy}{dt},$$

$$i = C(x)\dot{x},$$

где  $C(x) = C_0 + C_x(x)$  - емкость входной цепи усилителя;  $y = f(x)$  - нелинейная вольт-амперная характеристика (ВАХ) усилителя.

Для схемы рис. 1б уравнения Кирхгофа аналогичны, если полагать, что  $C(x)$  - емкость выходной цепи нелинейного усилителя, а  $x = \varphi(y)$  - его нелинейная импедансная характеристика. Учитывая, что

$$\frac{di}{dt} = \frac{dC}{dx} \dot{x}^2 + C\ddot{x},$$

в обоих случаях получаем

$$\dot{x} + \frac{RC - M(dy/dx)}{LC} \dot{x} + \frac{dC/dx}{C} \dot{x}^2 + \frac{1}{LC} x = 0, \quad (1)$$

что позволяет в дальнейшем анализировать только схему рис. 1а.

Полагая для крутизны нелинейной ВАХ  $\frac{dy}{dx} = S_0 + S(x)$  и обозначая

$$\frac{dC}{dx} = \frac{dC_x}{dx}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}, \quad \frac{MS_0}{LC_0} = \eta,$$

$$\frac{MS(x)}{LC_0} = F_1(x), \quad \frac{C_x(x)}{C_0} = F_2(x),$$

можем записать

$$\dot{x} + \frac{\eta + F_1(x) - (R/L)F_2(x)}{1+F_2(x)} \dot{x} + \frac{dF_2(x)/dx}{1+F_2(x)} \dot{x}^2 + \frac{\omega_0^2}{1+F_2(x)} x = 0. \quad (2)$$

## 2. Приближенный анализ двухчастотного генератора

Рассмотрим возможность существования двухчастотного режима генерации на основе уравнения (2). С этой целью представим функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ , описывающие нелинейные характеристики усилителя и емкости, в виде полиномов по  $x$ , ограничиваясь степенями  $x$  не выше второй, что позволяет провести качественный анализ работы генератора. Уравнение (2) в этом случае приобретает вид

$$\dot{x} + (\eta - p_1 x - p_2 x^2) \dot{x} + (\bar{q}_1 + 2\bar{q}_2 x) \dot{x}^2 + \omega_0^2 (1 - \bar{q}_1 x - \bar{q}_2 x^2) x = 0. \quad (3)$$

Здесь  $p_1, p_2$  – коэффициенты разложения множителя при  $\dot{x}$ ;  $\bar{q}_1, \bar{q}_2$  – коэффициенты разложения функции  $F_2(x)$ , причем члены  $\bar{q}_1 x, \bar{q}_2 x^2$  малы по сравнению с единицей.

Переходя к безразмерным переменным

$$u = x\sqrt{p_2/\eta} \quad (p_2 > 0); \quad \tau = \omega_0 t,$$

получим

$$\dot{u} + \mu(1-pu-u^2)\dot{u} + (q_1+2q_2u)\dot{u}^2 + (1-q_1u-q_2u^2)u = 0, \quad (4)$$

где  $\mu = \eta/\omega_0$ ,  $p = p_1/\sqrt{\eta p_2}$ ,  $q_1 = \bar{q}_1\sqrt{\eta/p_2}$ ,  $q_2 = \bar{q}_2\sqrt{\eta/p_2}$ .

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$u = a \cos(\tau + \varphi) + b \cos\left(\frac{\tau}{2} + \psi\right), \quad (5)$$

где  $a, b$  - амплитуды основной частоты и субгармоники,  $\varphi, \psi$  - их фазы соответственно.

Подставляя (5) в (4) и используя метод гармонического баланса, получим систему алгебраических уравнений для  $a, b, \varphi, \psi$ :

$$\{ua[\frac{1}{2}(\frac{a^2}{2}+b^2)-1]\cos\varphi + \frac{q_2 a}{4}(a^2+5b^2)\sin\varphi\} + \frac{b^2}{4}(\mu p \cos 2\psi + \frac{5}{2}q_1 \sin 2\psi) = 0,$$

$$\{ua[\frac{1}{2}(\frac{a^2}{2}+b^2)-1]\sin\varphi - \frac{q_2 a}{4}(a^2+5b^2)\cos\varphi\} + \frac{b^2}{4}(\mu p \sin 2\psi - \frac{5}{2}q_1 \cos 2\psi) = 0, \quad (6)$$

$$\{[\frac{3}{2} - q_2(a^2 + \frac{5}{4}b^2)] - a(q_1 \cos\varphi - \frac{\mu p}{2} \sin\varphi)\}\cos\psi +$$

$$+ \{\mu[\frac{1}{2}(a^2 + \frac{b^2}{2}) - 1] - a(q_1 \sin\varphi + \frac{\mu p}{2} \cos\varphi)\}\sin\psi = 0,$$

$$\{[q_2(a^2 + \frac{5}{4}b^2) - \frac{3}{2}] - a(q_1 \cos\varphi - \frac{\mu p}{2} \sin\varphi)\}\sin\psi +$$

$$+ \{\mu[\frac{1}{2}(a^2 + \frac{b^2}{2}) - 1] + a(q_1 \sin\varphi + \frac{\mu p}{2} \cos\varphi)\}\cos\psi = 0.$$

Исключая  $\varphi$  и  $\psi$ , получим

$$\{[\frac{3}{2} - q_2(a^2 + \frac{5}{4}b^2)]^2 + \mu^2[\frac{1}{2}(a + \frac{b^2}{2}) - 1]^2 = a^2 Q_1^2, \quad (7)$$

$$\frac{q_2^2 a^2}{4}(a^2 + 5b^2)^2 + \mu^2 a^2 [\frac{1}{2}(\frac{a^2}{2} + b^2) - 1]^2 = b^4 Q_2^2,$$

где

$$Q_1^2 = q_1^2 + \frac{\mu^2 p^2}{4}; \quad Q_2^2 = \frac{\mu^2 p^2}{4} - \frac{25}{64}q_1^2.$$

Первое из этих уравнений может быть использовано для получения связи между амплитудами основной и субгармонической составляющих, в то время как второе - для нахождения одной из этих амплитуд, например,  $a$  как функции параметров системы. Так, решая первое уравнение относительно  $b^2$ , получим

$$b_{1,2}^2 = \frac{30q_2 + 4\mu^2 - a^2(2\mu^2 + 80q_2^2) \pm 8\sqrt{D}}{\mu^2 + 25q_2^2}, \quad (8)$$

где

$$D = a^4 \left\{ \frac{\mu^4}{16} + \mu^2(5q_2 - 1) + 4q_2^2(25q_2^2 - 1) \right\} - 2a^4 \left\{ [10q_2^2 - 6q_2 - \frac{7}{4}\mu^2 - 2Q_1^2] + \left( \frac{15}{4}q_2 + \frac{\mu^2}{2} \right)^2 + (4\mu^2 + 9) \right\}.$$

Для существования решения вида (5) необходимо, чтобы  $D$  и числитель в выражении (8) были неотрицательны. Это накладывает определенные условия на параметры системы, а именно,

$$q_2 \geq \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{10}\mu^2 + \frac{4}{5}Q_1^2 + \frac{9}{25}}, \quad \mu > 0. \quad (9)$$

Легко видеть, что эти условия выполняются при любых  $q_1$  и  $p$ .

Таким образом, видим, что для существования в автогенераторе колебаний на основной частоте и ее субгармонике необходимо, чтобы параметр нелинейной емкости  $q_2$  был достаточно велик. Исследуем теперь возможность существования режима колебаний с примерно одинаковыми амплитудами основной частоты и ее субгармоники. Положим  $a = b$  и найдем  $a$  из второго уравнения (7):

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{3\mu} \left\{ \frac{3}{2}(\mu^2 - q_2^2) + Q_2 \pm \left[ \left( \frac{3}{2}(\mu^2 - q_2^2)Q_2 \right)^2 - \frac{9}{4}\mu^4 \right]^{1/2} \right\}. \quad (10)$$

Оба значения амплитуды действительны и положительны при  $\mu^2 > 2$ , либо при  $\mu^2 < 2$ ,  $Q_2 > 3\mu^2(2 - \mu^2)$  (заметим, что, как следует из второго уравнения (7),  $Q_2 > 0$ ). Таким образом, при различных сочетаниях параметров  $\mu$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $p$ , когда выполняются условия (9) вместе с указанными выше, существуют два режима, в которых амплитуда основной частоты равна амплитуде субгармоники. При  $\mu > 1$  одно из значений  $a$  в (10) стремится к нулю, а другое - к значению  $a = 2/\sqrt{3}$  (заметим, что оно меньше, чем амплитуда одиночастотных колебаний  $a_0 = 2$  в генераторе Ван дер Поля без нелинейной емкости). Такое же решение получается при  $q_2^2 = Q_2$ , откуда следует, что значения параметра  $\mu$ , при которых возможны колебания на основной частоте и субгармонике равной амплитуды, определяются соотношением

$$\mu p \geq 2 \left[ q_2^2 + \left( \frac{5}{8} q_1 \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (11)$$

При критическом значении параметра  $\mu = \mu_{kp} = \frac{2}{p} \sqrt{q_2^2 + \left( \frac{5}{8} q_1 \right)^2}$  интегральная мощность колебаний генератора равна  $(2/3)P_0$ , где  $P_0$  - мощность сдвоих частотных колебаний генератора Ван дер Поля.

### 3. Результаты эксперимента

Для подтверждения возможности создания двухчастотного генератора с близкими величинами основной и субгармонической компонент выходных колебаний изготовлен экспериментальный макет. Его электрическая схема представлена на рис. 2а, на котором обозначены:  $vt$  - биполярный транзистор,  $C_{cb}$  и  $C_b$  - разделительные конденсаторы цепи обратной связи и выхода соответственно. В качестве входных и выходных нелинейных емкостей использованы емкости обедненной области пространственного заряда  $p$  -  $n$ -переходов биполярного транзистора, являющегося активным элементом (нелинейным усилителем) экспериментального макета. Слева от места подключения транзистора показана схема его питания униполярным напряжением, справа (вместе с отводами коллектора и базы) - высокочастотная часть схемы. Конструктивно макет генератора выполнен в микрополосковом гибридно-интегральном исполнении: на припаянной к металлическому теплоотводу поликоровой пластине методом напыления (с последующим травлением) нанесена топология кольцеобразной несимметричной неоднородной микрополосковой линии. Особенности топологии для двух различающихся по частоте модификаций макета показаны на рис. 2б и 2в.

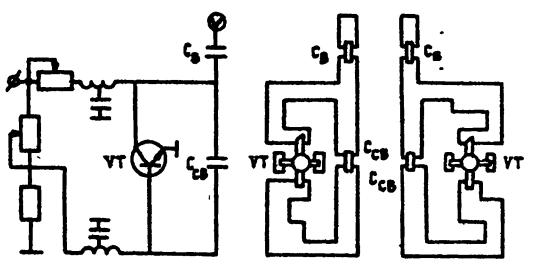


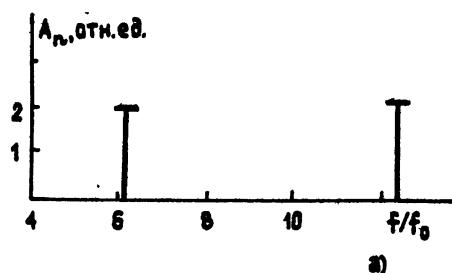
Рис. 2.

Электрическая схема (а) и особенности топологии (б, в) экспериментального макета (б) и его модификации (в).

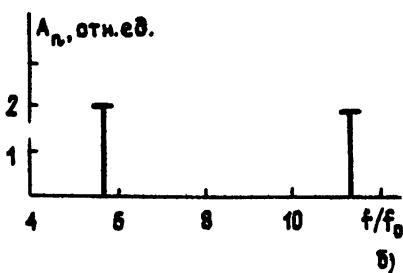
В разрывы противолежащих участков кольцеобразной микрополосковой линии впаяны навесные элементы генератора: транзистор  $vt$  и

разделительный конденсатор  $C_{cb}$  цепи обратной связи. В разрыв микрополосковой линии выхода включен второй разделительный конденсатор  $C_b$ .

При подаче на транзистор питающих напряжений макет рис. 2б генерирует двухчастотные колебания. Спектр выходных колебаний иллюстрирует рис. 3а, на котором обозначены:  $A_n$  - амплитуда (в относительных единицах)  $n$ -й компоненты регулярного двухчастотного ( $n=1, 2$ ) колебания,  $f$  - частота колебания,  $f_0$  - частота нормирования. Амплитуды основной (на рис. 3а справа) и субгармонической компонент отличаются незначительно, что подтверждает теоретический вывод о



а)



б)

Рис. 3.  
Спектр выходных колебаний экспериментального макета (а),  
и его модификации (б).

возможности одновременной генерации близких по амплитуде гармонической и субгармонической составляющих. Изменение топологии (в основном за счет протяженности и ширины отрезков кольцеобразной микрополосковой линии) приводит к смещению спектра по частотному диапазону. Спектр выходных колебаний такого модифицированного макета представлен на рис. 3б. Колебания обоих экспериментальных макетов устойчивы к изменению условий эксплуатации. В частности, генерация близких по амплитуде основной и субгармонической компонент имела место при изменении вдвое и более величин питающих напряжений и при изменении температуры окружающей среды не менее, чем  $-50^{\circ}\text{C}$  до  $+80^{\circ}\text{C}$ . При этом не происходило срывов генерации и изменения характера колебаний. Что касается возбуждения стохастических

колебаний (хаотическая динамика транзисторного генератора рассмотрена, например, в [10]), то они наблюдались лишь в весьма узких интервалах питающих напряжений. Уменьшению неравномерности их спектральной характеристики и повышению ее устойчивости к изменению условий эксплуатации способствовало изменение параметров кавесных элементов и топологии относительно оптимальной для двухчастотного режима с близкими амплитудами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. - М. : Наука, 1980. - 360 с.
2. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. - М. : Наука, 1984. - 432 с.
3. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. - М. : Наука, 1976. - 384 с.
4. Калинин В. И., Герштейн Г. М. Введение в радиофизику. - М. : Гостехиздат, 1957. - 660 с.
5. Дворников А. А., Уткин Г. М. Фазированные автогенераторы радиопередающих устройств. - М. : Энергия, 1980. - 176 с.
6. Рабинович М. И. //УФН. 1978. Т.125. С. 123.
7. Feigenbaum M.J. //Los Alamos Sci. 1980. V.1. P.4.
8. Железовский Е. Е., Тихомиров А. А. //Радиотехника и электроника. 1983. Т.28. № 11. С. 22.
9. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. - М. :Наука, 1969. - 380 с.
10. Дмитриев А. С., Иванов В. П., Лебедев М. Н. //Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 5. С. 10.

Научно-производственное объединение  
"Алмаз"

Поступила в редакцию  
9 октября 1991 г.,  
после переработки  
9 июня 1992 г.

## A TWO-SIGNAL OSCILLATOR WITH INTENSE SUBHARMONIC

E. E. Zhelezovskij, A. G. Laserson, A. L. Ryazantsev

Two-signal autooscillations in the system with nonlinear capacity in the input (output) circuit of the nonlinear amplifier are studied. Both experimental and theoretical results show that basic frequency and its subharmonic tone with comparable amplitudes can be excited in such systems.