

УДК 537.533

О РАСЧЕТЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В РЕЖИМЕ ОГРАНИЧЕНИЯ  
ТОКА ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАРЯДОМ*В. Н. Мануилов, Б. В. Райский, Ш. Е. Цимринг*

Методика расчета основана на прямом удовлетворении условию нулевого нормального электрического поля на эмиттере с помощью итерационной процедуры, исключающей необходимость получения самосогласованных решений уравнений стационарного пучка на отдельных итерациях. Особенностью описываемой методики является также использование при решении краевой задачи вспомогательных сеток потенциалов и пространственных зарядов, а также исключение холостых узлов вспомогательной сетки потенциалов. Метод эффективен при анализе криволинейных пучков и тестирован на примере расчета пучка Мельтцера с круговыми траекториями и сильно неоднородным поперечным распределением тока.

1. Численное моделирование электронно-оптических систем в режимах ограничения тока пространственным зарядом ( $\rho$ -режимах) включает задачи нахождения распределения плотности тока на эмиттере  $j_e$  и расчета электронных траекторий. Тесная связь указанных задач определяется общей самосогласованностью проблемы анализа интенсивных пучков заряженных частиц. Возникающие математические модели и требования к точности расчета, вместе с тем, далеко не равнозначны для конкретных систем. Так, для пучков с криволинейными траекториями частиц особенности распределения  $j_e$  существенным образом влияют на структуру всего потока, включая скоростное распределение, и могут привести к его радикальной перестройке (см., например, [1], где рассматриваются винтовые пучки МЦР). Естественно, что в таких случаях требования к точности расчета  $j_e$  значительно возрастают. Отметим, что вариации  $j_e$  приводят к сильным возмущениям не только кулоновского, но и собственного магнитного поля.

В последние годы при решении стационарных задач получили распространение методы вычисления  $j_e$ , базирующиеся на прямом удовлетворении условия, накладываемого на нормальную к поверхности эмиттера компоненту электрического поля

$$E_{en} = 0. \quad (1)$$

Такой подход, согласно [2], ослабляет общую некорректность задачи за счет стабилизации в процессе вычислений электрического поля в зоне больших градиентов. Условие (1) выражено в [3] через интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно  $j_e$ . Однако непосредственное применение сформулированного в [3] итерационного алгоритма требует чрезмерно больших ресурсов ЭВМ. В основном это связано с необходимостью дополнительно получать на каждой итерации  $N$  самосогласованных решений краевой задачи для уравнения Пуассона, где  $N$  - число разбиений зоны эмиссии на трубки тока.

В [4] предложен метод, основанный на решении системы нелинейных уравнений

$$E_{ei} = f_i(I_{e1}, I_{e2}, \dots, I_{eN}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

относительно токов  $I_{ek}$  в токовых трубках. Здесь  $E_{ei}$  - нормальная к поверхности эмиттера компонента электрического поля в  $i$ -й точке старта,  $N$  - число трубок тока. Решение уравнений (2) выполняется в [4] методом Ньютона и связано, в общем, с необходимостью вычисления  $N^2$  элементов матрицы

$$\left| \left| \frac{\partial E_{ei}}{\partial I_{ek}} \right| \right|, \quad i, k = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

При использовании конечно-разностной методики это приводит к необходимости получать на каждой ньютоновской итерации  $2N$  вспомогательных решений самосогласованной краевой задачи для уравнения Пуассона с заданными токами  $I_{ek} + \delta I_{ek}$ . Однако важным пунктом развитой в [4] методики является установление возможности представления матрицы (3) в квазидиагональной и даже диагональной форме. В последнем случае на каждой итерации нужно находить только два самосогласованных решения.

Отметим, что представляет интерес вариант Бroyдена метода секущих [5], в котором матрица Якоби должна непосредственно вычисляться только на нулевой итерации (это, однако, требует проведения  $2N$  самосогласованных решений уравнений пучка, включающих решение краевой задачи). Последующие итерации связаны только с вычислением матрицы, эквивалентной матрице Якоби в методе секущих, из рекуррентных соотношений, что требует лишь однократного решения

краевой задачи на каждой итерации. Определенные сложности в смысле сходимости процесса здесь вызывает включение в алгоритм необходимой релаксационной процедуры (см. ниже уравнение (5)).

В работах [2-4] при решении краевых задач используется метод конечных разностей (сеток). Искомые функции в прикатодной области характеризуются большими градиентами, и, согласно, например, [2], для получения приемлемой точности необходимо использовать весьма мелкие сетки, что существенно повышает требования к ресурсам ЭВМ. Ниже описывается методика, также использующая алгоритм, близкий к [4]. Но при решении краевой задачи применяется метод вспомогательных зарядов и вспомогательных сеток вместе с исключением холостых зарядов в узлах вспомогательной сетки потенциалов (программа ЭПОС, [6]). Наконец, на каждой отдельной итерации по току исключается процедура получения самосогласованного решения краевой задачи. Все это резко упрощает нахождение полного самосогласованного решения. Итерационная схема решения уравнений типа (2) основана на методе секущих. Кроме того, развивается релаксационная процедура, способствующая повышению устойчивости вычислений. В качестве тестовой задачи ниже рассматривается анализ системы формирования пучка с круговыми траекториями (потока Мельтцера) с сильной неоднородностью поперечного распределения тока.

2. Вычисление распределения тока на эмиттере  $I_k$  в токовых трубках ведется по следующей схеме:

$$I_k^{*(n+1)} = I_k^{(n)} - \frac{I_k^{(n)} - I_k^{(n-1)}}{F_k^{(n)} - F_k^{(n-1)}} F_k^{(n)}; \quad (4)$$

$$I_k^{(n+1)} = I_k^{(n)} + A_k^{(n)} (I_k^{*(n+1)} - I_k^{(n)}), \quad (5)$$

где  $n = 1, 2, \dots$  - номер итерации. Итерационный процесс заканчивается по условию

$$\max_k |I_k^{(n+1)} / I_k^{(n)} - 1| < \varepsilon, \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  - задаваемая относительная погрешность. Уравнение (5) образует релаксационную процедуру, способствующую повышению устойчивости схемы. Релаксационный параметр  $A_k^{(n)}$  определен ниже. Отметим, что при  $A_k^{(n)} = 1$  схема, определенная уравнениями (4), (5), реализует метод

секущих (см., например, [7]). Функции  $F_k = F(E_k)$  обращаются в нуль на эмиттере при  $E_k = 0$ , т. е. в  $\rho$ -режиме.

$$F_k(E_k) = 0. \quad (7)$$

Условие (7) заменяет (1). Конкретно вид  $F(E)$  выбирается таким образом, чтобы обеспечить условие сходимости метода Ньютона

$$F_k \frac{\partial F_k}{\partial E_k} > 0,$$

являющегося предельным по отношению к методу секущих при малых изменениях величин  $I_k$ . В [4] принято  $F(E) = E^2$ . Здесь функция  $F$  выбирается как

$$F(E) = E^3. \quad (8)$$

Необходимо иметь в виду, что при использовании развиваемой методики и, в частности, при исключении процедуры получения самосогласованных решений уравнений пучка на каждой итерации электрическое поле в некоторых точках эмиттера может менять знак, что ведет к запиранию соответствующих трубок тока и к неустойчивости вычислительного процесса. Чтобы избежать этого, помимо применения релаксационной процедуры (5) желательно иметь достаточно большие значения второй производной  $d^2F(E)/dj^2$ . Эти соображения заставляют предпочесть функцию  $F(E) = E^3$  (ср. рис. 1, на котором изображены зависимости трех функций  $F(E)$  от плотности тока для плоского диода, и Приложение).

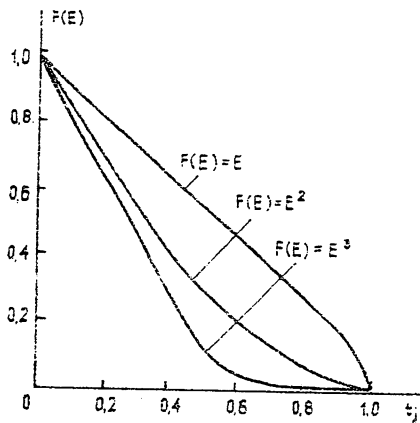


Рис. 1.

Для начала итерационного процесса необходимо располагать значениями  $I_k^{(0)}$ ,  $F_k^{(0)}$ ,  $I_{k'}^{(1)}$ ,  $F_k^{(1)}$ . В рассматриваемой методике  $I_k^{(0)}$  и  $F_k^{(0)}$  (нулевая итерация) относятся к холодной системе, т.е.  $I_k^{(0)} = 0$ , а  $F_k$  определяются из решения краевой задачи для уравнения Лапласа. Распределение токов  $I_k^{(1)}$  (первая итерация) выбираются из оценки

$$I_k^{(1)} = (0,5 + 0,7) I_{лк}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

где  $I_{лк}$  - ленгмюровский ток эквивалентного плоского диода для  $k$ -й трубки тока, определяемый формулой

$$I_{лк} = 2,33 \cdot 10^{-6} \frac{S_k}{I_k^2} U_k^{3/2}. \quad (10)$$

В (10)  $S_k$  - площадь той части эмиттера, которая относится к  $k$ -й трубке тока,  $U_k$  - потенциал (для холодной системы) в точке, отстоящей от  $k$ -го участка на расстоянии  $l_k$ . Значения  $F_k$  определяются с помощью (8), где величины  $E_k$  находятся в результате решения краевой задачи для уравнения Пуассона методом вспомогательных зарядов и вспомогательных сеток с исключением холостых узлов сетки потенциалов. Указанная процедура соответствует программе ЭПОС [6]. При этом заполнение вспомогательной сетки пространственного заряда производится в процессе решения уравнений движения на нулевой итерации и задании величин токов  $I_k = I_k^{(1)}$  в трубках. Значения  $U_k$  в (10) также находятся на нулевой итерации. Отметим, что при анализе протяженных систем в [6] вводится также вспомогательная сетка укрупненных зарядов пучка для ускоренного учета дальних взаимодействий. Однако на стадии вычисления распределения тока эмиттера нет необходимости учитывать поле объемных зарядов в дальних областях пучка. Поэтому сетка крупных зарядов на этой стадии не используется, а интегрирование траекторий ведется лишь в сравнительно короткой прикатодной области.

На следующих итерациях вычисление  $F_k^{(n)}$  производится аналогичным образом, лишь с той разницей, что значения токов в токовых трубках берутся не из (9), (10), а из итерационных формул (4), (5).

Отметим, что рассматриваемые здесь решения краевой задачи для уравнения Пуассона на каждой итерации не являются самосогласованными, т.е. не соответствуют реальным траекториям частиц при задаваемом распределении тока по токовым трубкам. Однако

по мере сходимости итерационной схемы (4), (5) начинает выполняться условие (6) и токи на последовательных итерациях меняются слабо. Поэтому с каждой итерацией все меньше изменяются и траектории. В результате при обеспечении (6) достигается не только сходимость по распределению токов на эмиттере, но и по траекториям, а следовательно, и самосогласованное решение краевой задачи. Эта особенность методики существенно ускоряет итерационный процесс. На каждой итерации по  $I_k$  краевая задача решается только один раз.

3. Итерационный параметр  $A_k^{(n)}$  рассчитывается по формуле

$$A_k^{(n)} = \alpha t_{Ek}^{(n)3} + \beta D_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

где  $t_{Ek}^{(n)}$  - отношение электрического поля в точках старта на  $n$ -й итерации к холодному полю (полю на нулевой итерации). Отметим, что по мере возрастания  $n$  значения  $A_k^{(n)}$  уменьшаются и, в принципе, стремятся к нулю. Второе слагаемое в (11) способствует выравниванию сходимости к нулю электрического поля в отдельных точках катода,

$$D_k = \frac{t_{Ek}^{(n)} - t_{Emin}^{(n)}}{t_{Emax}^{(n)} - t_{Emin}^{(n)}}, \quad (12)$$

где

$$t_{Emax}^{(n)} = \max\{t_{Ek}^{(n)}\}, \quad t_{Emin}^{(n)} = \min\{t_{Ek}^{(n)}\}. \quad (13)$$

Максимальные и минимальные значения  $t_{Emin}^{(n)}$  и  $t_{Emax}^{(n)}$  находятся на каждой итерации. Константы  $\alpha$  и  $\beta$  подбираются в результате численных экспериментов. Эта процедура - наиболее трудный пункт предлагаемой методики. Ясно, что с ростом  $\alpha$  и  $\beta$  итерационный процесс ускоряется, но одновременно увеличивается вероятность запираания отдельных трубок тока, когда поля  $E_k^{(n)}$  меняют знак.

Отметим, что итерационный процесс целесообразно останавливать несколько раньше, чем выполнится условие (1) (соответственно (8)) во избежание запираания трубок тока. Согласно рис. 1 в окрестности  $\rho$ -режима относительно большим вариациям электрического поля на катоде соответствуют весьма малые изменения тока. Так что по оценкам для получения погрешности по токам  $I_k$  меньше 3% достаточно иметь средний коэффициент понижения электрического поля на эмиттере

$$t_E^{(n)} = \frac{1}{N} \sum t_{Ek}^{(n)} \leq 0, 2. \quad (14)$$

4. Завершающий этап траекторного анализа выполняется после нахождения распределения токов и состоит в получении самосогласованного решения краевой задачи (уравнения Пуассона, уравнений движения и непрерывности) на полной длине системы. Процедура решения на этом этапе полностью соответствует программе ЭПОС. Завершение итерационного процесса в этом случае определяется условиями сходимости конечных координат или скоростей частиц на траекториях (ср. [8, 9]).

5. Ниже приводятся некоторые результаты тестирования рассматриваемого метода и соответствующего пакета программ (ЭПОСР, язык Фортран-77) на примере плоско-симметричной ЭОС, формирующей пучок с круговыми траекториями (поток Мельтцера; см., например, [10]).

Форма электродов (см. рис. 2) была получена методом синтеза [10] по программе, описанной в [11]. На рис. 2 электроды показаны жирными линиями. Область пучка обозначена концентрическими окружностями - траекториями частиц, а эмиттер - двойной штриховкой. Рассматривались три варианта, в которых весь поток разбивался на 9, 18 и 36 трубок тока. Для вычисления электрического поля в области, занимаемой пучком, использовались квадратные вспомогательные сетки потенциала и сетка объемного заряда с одинаковыми шагами. Длина шагов выбиралась одинаковой для всех вариантов и составляла 0,02 от ширины эмиттера. Естественно, что число "холостых" узлов вспомогательных сеток потенциала было тем большим, чем меньше число трубок тока.

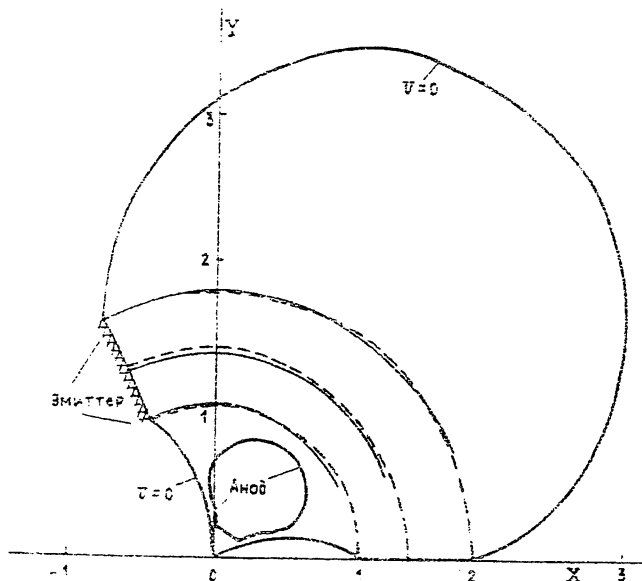


Рис. 2

Согласно [10] распределение плотности ленгмюровского тока на катоде

$$j \sim 1/r^5. \quad (15)$$

где  $r$  - радиус точки на эмиттере. В рассматриваемом примере значения радиусов, соответствующие концам эмиттера, составляли 0,5 и 1,0, что соответствует перепаду плотности тока на краях эмиттера в 32 раза. На рис. 3 приведено сравнение теоретической зависимости (15) с распределением плотности тока, полученным численным моделированием для случая разбиения электронного пучка на 18 трубок тока.

Оптимизированные значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  принимались одинаковыми для каждого разбиения и равными соответственно 1,2 и 0,5. Самосогласованные значения  $t_{\text{эк}}$  составили 0,21; 0,18; и 0,17. Как следует из результатов, относящихся к распределениям плотности тока типа рис. 3, величина полного тока отличается от ленгмювской на 3%. Завышенные значения плотности тока на краях эмиттера объясняются погрешностью определения электрического поля в углах, образованных эмиттером и фокусирующими пирсовскими электродами при использовании метода вспомогательных зарядов. Она может быть уменьшена путем увеличения числа последних.

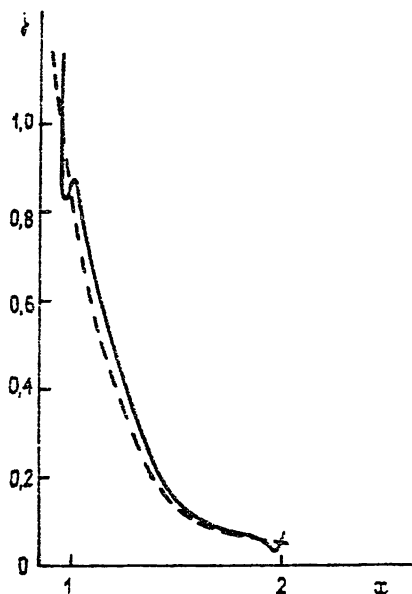


Рис. 3.

Электронные траектории, задаваемые в методе синтеза и полученные в результате траекторного анализа, показаны на рис. 2 штриховыми и сплошными линиями соответственно. При вычислениях использовались 18 трубок тока. Это число оказалось приемлемым для сходимости траекторного анализа и получения достаточно точного распределения плотности тока по поперечному сечению пучка (см. выше). Из рис. 2 видно, что ЭОС симметрична относительно плоскости  $\varphi_c = \pm\pi/3$ . В точке пересечения траекторий с этой плоскостью скорости электронов и потенциал должны проходить через максимумы. По данным траекторного анализа указанные величины достигали максимума примерно при  $\varphi = 1,02 \varphi_c$ .



Полное время счета составляло соответственно 34, 38 и 41 минут для указанных выше разбиений на трубки тока на ЭВМ ЕС-1037.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

### О ВЫБОРЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ $F(E)$

Рассмотрим для простоты в качестве модели плоский диод и введем безразмерные параметры электрического поля на катоде и тока:

$$t_E = \frac{E_k}{E_k^{(0)}}, \quad t_j = \frac{j}{j_D}, \quad (\text{П. 1})$$

где  $E_k^{(0)}$  - поле в холодной системе,  $j_D$  - ленгмюровский ток плоского диода,  $j$  и  $E_k$  - соответственно ток и поле на катоде в плоском диоде.

Интегрируя самосогласованные уравнения для плоского диода при нулевых начальных скоростях, нетрудно получить следующие зависимости  $t_j$  и  $t_E$  относительно безразмерного времени пролета  $\Phi$ :

$$t_j = \frac{3\Phi - 2}{\Phi^2}, \quad t_E = \frac{4}{3}(1 - \Phi) \frac{1}{\Phi^2}, \quad (\text{П. 2})$$

где  $\Phi = T/T_\rho$ ,  $T$  - время пролета,  $T_\rho$  - время пролета через диод в  $\rho$ -режиме ( $T_\rho = \sqrt{2\eta U_a/3d}$ ,  $d$  - расстояние катод - анод,  $U_a$  - анодное напряжение). Соотношения (П. 2) позволяют получить следующие зависимости первых двух производных функций  $t_E$ ,  $t_E'$ ,  $t_E''$  по  $t_j$  (они обозначаются штрихами):

$$t_E' = \frac{2\Phi(\Phi - 2)}{9(1 - \Phi)}, \quad t_E'' = \frac{1}{27} \frac{\Phi^4(2\Phi - \Phi^2 - 2)}{(1 - \Phi)^3}, \quad (\text{П. 3})$$

$$(t_E^2)' = \frac{16}{27} \frac{\Phi - 2}{\Phi}, \quad (t_E^2)'' = \frac{16}{81} \frac{\Phi^2}{(1 - \Phi)},$$

$$(t_E^3)' = \frac{32}{27} \frac{(\Phi - 2)(\Phi - 1)}{\Phi^3}, \quad (t_E^3)'' = \frac{16}{81} \frac{(6 - 6\Phi + \Phi^2)}{1 - \Phi}.$$

Здесь функция  $t_E^2$  соответствует выбору для  $F=E^2$ , принятому в [4].

а  $t_E^3$  - выбору для  $F$  в (8). Как видно из (П.3) и рис. 1, где показаны соответствующие зависимости,  $t_E'' \leq 0$ , а  $(t_E^2)''$  и  $(t_E^3)''$  положительны ввиду очевидного неравенства  $\Phi \leq 1$ . Наибольшим является  $(t_E^3)''$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мануилов В. Н., Цимринг Ш. Е. //Радиотехника и электроника. 1978. Т.23. N 7. С.1486.
2. Головин Г. Т. //ЖВМТФ. 1985. N.25. N 8. С.1220.
3. Головин Г. Т. //ЖВМТФ. 1983. N.23. N 6. С.1427.
4. Свешников В. М. Препринт ВЦ СО АН СССР N 289. - Новосибирск, 1988.
5. Дж. Деннис, Р. Шнабель. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. - М.: Мир, 1988. С. 188.
6. Лыгин В. К., Мануилов В. Н., Цимринг Ш. Е. //Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1987. Вып. 7. С. 36.
7. Калиткин М. И. Численные методы. - М.: Наука, 1978. С. 512.
8. Лыгин В. К., Цимринг Ш. Е. //Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. N 9. С. 1363.
9. Мануилов В. Н., Цимринг Ш. Е. //Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т.24. N 4. С.491.
10. Harker K.J. //J.Appl. Phys. 1960. V.31. P.2165.
11. Вашковский А. В. и др. //Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. N 4. С. 783.

Институт прикладной физики  
АН России

Поступила в редакцию  
16 апреля 1991 г