

УДК 621.391.01

**ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ЛЕВИНСОНА
И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЕШЕТЧАТЫЕ ФИЛЬТРЫ**

Д. И. Леховицкий

Известный алгоритм Н. Левинсона отыскания треугольных сомножителей матриц, обратных теплицевым, обобщается на случай корреляционных матриц произвольной структуры. На этой основе синтезируются универсальные решетчатые фильтры, пригодные для использования в системах обработки сигналов различного вида и назначения.

1. Введение и постановка задачи

Как известно, в многоканальных приемных системах различного назначения пространственно-временная обработка (обнаружение, измерение, разрешение и т. д.) сигналов на фоне гауссовых внешних и внутренних помех связана с формированием тех или иных функций от корреляционной матрицы (КМ) помех на выходах каналов приема. Эти системы часто проектируются так, что соответствующая КМ обладает определенной спецификой структуры. Таковы, например, центрально-симметричные антенные решетки (AP), порождающие персимметричные КМ [1, 2], линейные эквидистантные AP из идентичных элементов или системы междупериодной обработки импульсных РЛС с постоянным периодом посылок, приводящие к теплицевым КМ [2-7], и т. д.

Специализированные алгоритмы обработки, в которых корректно учитывается априорная информация о специфике КМ, обеспечивают существенные преимущества по сравнению с "универсальными" синтезированными без ее учета [1-8]. Однако при нарушении исходных предпосылок, в силу целого ряда причин весьма вероятных на практике, эффективность этих специализированных алгоритмов может резко снижаться [9], в связи с чем ориентация на их использование может оказаться практически неоправданной.

В этих условиях актуальной является задача отыскания таких

методов обработки, которые позволили бы не только реализовать дополнительные возможности, вытекающие из специфики КМ, но и при ее нарушении могли бы быть достаточно просто преобразованы в "универсальные", слабочувствительные к этим нарушениям. Решение этой задачи способствовало бы также унификации и, следовательно, упрощению аппаратуры обработки для систем различного вида и назначения.

В данной работе, представляющей собой развитие [5], обосновывается возможность и целесообразность использования для этой цели методов решетчатой фильтрации, к настоящему времени получивших широкое распространение в системах с теплицевыми КМ [6, 10-12].

Решетчатые структуры устройств обработки вытекают из специфической факторизации, которую допускают треугольные сомножители матриц, обратных теплицевым. В свою очередь эта факторизация является следствием рекуррентных соотношений Левинсона [13], лежащих в основе "быстрых" методов обращения теплицевых матриц [14].

Теоретической основой для расширения области применимости решетчатых структур является возможность обобщения рекурсий Левинсона и на случай КМ общего вида. Это обобщение и последующий синтез на его основе универсальных решетчатых фильтров (РФ) составляют основное содержание данной статьи.

2. Математическое обоснование обобщенного алгоритма Левинсона

Классический алгоритм Левинсона [6, 7, 13, 14, 20] описывает способ рекуррентного вычисления строк (столбцов) одновременно двух нижних треугольных матриц $\vec{H} = \{h_{ij}\}_{1, j=1}^M$ и $\vec{N} = \{n_{ij}\}_{1, j=1}^M$, $h_{ij} = n_{ij} = 0$ при $j > i$, однозначно задающих сомножители верхне-нижнего и нижне-верхнего треугольных разложений

$$\vec{\Psi} = \vec{H}^* \vec{H}, \quad \vec{\Psi} = \vec{N} \vec{N}^* \quad (1)$$

матрицы $\vec{\Psi} = \{\omega_{ij}\}_{1, j=1}^M = \vec{\Phi}^{-1}$, обратной теплицевой матрице $\vec{\Phi} = \{f_{ij}\}_{1, j=1}^M$. В (1) и далее звездочка (*) обозначает операцию эрмитового сопряжения.

Мы обобщаем его для решения той же задачи, но в случае произвольной эрмитовой $M \times M$ матрицы $\vec{\Phi}$, удовлетворяющей требованию "строгой несингулярности" - положительности как детерминанта, так и

всех главных миноров всех порядков*. Это требование, как известно, всегда выполняется для КМ физически реальных случайных процессов. Важность рассматриваемой задачи обусловлена тем, что функции от матриц, обратных КМ, играют центральную роль в широком классе алгоритмов обработки сигналов на фоне помех [6-8, 19].

Рассмотрим 1-ю ($l \in 1, M + 1 - m$) эрмитову главную подматрицу m -го ($m \in 1, M$) порядка $\vec{\Phi}^{(m)}(l)$ исходной матрицы $\vec{\Phi}$, равную

$$\vec{\Phi}^{(m)}(l) = \{f_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m+1-1} = \vec{E}_m^*(l) \vec{\Phi} \vec{E}_m(l), \quad (2)$$

где $\vec{E}_m(l)$ — $M \times m$ -матрица с $v-m$ ($v \in 1, m$) столбцом, совпадающим с $(v+1-1)-m$ столбцом $\vec{e}_{v+1-1}^{(m)}$ единичной $M \times M$ матрицы \vec{I}_M .

Обратная к ней матрица $\vec{\Psi}^{(m)}(l) = \{\omega_{ij}^{(m)}(l)\}_{i=1, j=1}^m = \{\vec{\Phi}^{(m)}(l)\}^{-1}$ допускает аналогичные (1) разложения вида

$$\vec{\Psi}^{(m)}(l) = \vec{H}^{(m)*}(l) \vec{H}^{(m)}(l) \quad \text{и} \quad \vec{\Psi}^{(m)}(l) = \vec{N}^{(m)*}(l) \vec{N}^{(m)}(l), \quad (3)$$

где $\vec{H}^{(m)}(l)$ и $\vec{N}^{(m)}(l)$ — нижние треугольные $m \times m$ матрицы с действительными положительными диагональными элементами.

Обозначим через $\vec{B}_m^*(l) = \{b_i^{(m)}(l)\}_{i=1}^m = \vec{e}_m^{(m)*} \vec{H}^{(m)}(l)$ последнюю ($m-1$) строку нижней треугольной матрицы $\vec{H}^{(m)}(l)$ и через $\vec{A}_m^*(l) = \{a_1^{(m)}(l)\}_{i=1}^m = \vec{e}_1^{(m)*} \vec{N}^{(m)*}(l)$ — первую строку верхней треугольной матрицы $\vec{N}^{(m)*}(l)$. Из (3) следует, что

$$b_m^{(m)}(l) \vec{B}_m^*(l) = \vec{\Psi}_m^{(m)*}(l), \quad (b_m^{(m)}(l))^2 = \omega_{mm}^{(m)}(l), \quad (4)$$

$$a_1^{(m)}(l) \vec{A}_m^*(l) = \vec{\Psi}_1^{(m)*}(l), \quad (a_1^{(m)}(l))^2 = \omega_{11}^{(m)}(l),$$

поэтому

$$\vec{B}_m^*(l) = (b_m^{(m)}(l))^{-1} \vec{\Psi}_m^{(m)*}(l), \quad \vec{A}_m^*(l) = (a_1^{(m)}(l))^{-1} \vec{\Psi}_1^{(m)*}(l), \quad (5)$$

т. е. векторы $\vec{B}_m^*(l)$ и $\vec{A}_m^*(l)$ пропорциональны соответственно последней $\vec{\Psi}_m^{(m)*}(l) = \vec{e}_m^{(m)*} \vec{\Phi}^{(m)}(l)$ и первой $\vec{\Psi}_1^{(m)*}(l) = \vec{e}_1^{(m)*} \vec{\Phi}^{(m)}(l)$ строкам матрицы $\vec{\Phi}^{(m)}(l)$ и, в силу (5) и (2), являются решениями систем

*При этом, в отличие от [15], мы не используем понятия теплицевого ранга смещения, характеризующего степень "близости" анализируемой матрицы к теплицевой.

$$\vec{B}^*(1) \vec{E}^*(1) \vec{\Phi} \vec{E}(1) = (b_1^{(m)}(1))^{-1} \vec{e}_1^{(m)*}, \quad (6)$$

$$\vec{A}^*(1) \vec{E}^*(1) \vec{\Phi} \vec{E}(1) = (a_1^{(m)}(1))^{-1} \vec{e}_1^{(m)*}.$$

Нетрудно убедиться, что набор векторов $\vec{B}^*(1)$ и $\vec{A}^*(M+1-m)$ при $m = 1, 2, \dots, M$ однозначно определяет матрицы \vec{H} и \vec{N} в (1). Действительно, пусть $\vec{h}_1^{(m)} = \{h_1^{(m)}\}_{i=1}^n$ и $\vec{n}_1^{(m)} = \{n_1^{(m)}\}_{i=1}^n$ обозначают n -мерные векторы, составленные из ненулевых элементов m -й строки матрицы \vec{H} и $(M+1-m)$ -й строки матрицы \vec{N}^* соответственно, так что $\vec{e}_1^{(m)*} \vec{H} = \vec{h}_1^{(m)} \vec{E}(1)$ и $\vec{e}_{M+1-m}^{(m)*} \vec{N}^* = \vec{n}_1^{(m)} \vec{E}(M+1-m)$. Очевидно, что набор этих векторов при $m \in 1, M$ определяет матрицы \vec{H} и \vec{N} . Для каждого из них, в соответствии с (1), справедливы равенства

$$\vec{H}^* \vec{E}^*(1) \vec{\Phi} = \vec{e}_1^{(M)*} \vec{H}^{*-1}, \quad \vec{N}^* \vec{E}^*(M+1-m) \vec{\Phi} = \vec{e}_{M+1-m}^{(M)*} \vec{N}^{*-1}.$$

Умножая справа первое из них на $\vec{E}(1)$ и второе — на $\vec{E}(M+1-m)$, получим

$$\vec{H}^* \vec{E}^*(1) \vec{\Phi} \vec{E}(1) = (h_1^{(m)})^{-1} \vec{e}_1^{(m)*}, \quad (7)$$

$$\vec{N}^* \vec{E}^*(M+1-m) \vec{\Phi} \vec{E}(M+1-m) = (n_1^{(m)})^{-1} \vec{e}_1^{(m)*},$$

где мы учли, что диагональные элементы матрицы, обратной треугольной, обратны соответствующим диагональным элементам обращаемой матрицы.

Из сопоставления (7) и (6) следует, что $\vec{h}_1^{(m)} = \vec{B}_1^*(1)$, $\vec{n}_1^{(m)} = \vec{A}_1^*(M+1-m)$, поэтому определение сомножителей (1) может быть сведено к отысканию набора векторов $\vec{B}_1^*(1)$ и $\vec{A}_1^*(M+1-m)$ при всех $m \in 1, M$.

При $m = 1$ и любых $l \in 1, M$, как следует из (5), (2),

$$\vec{B}_1^*(1) = b_1^{(1)}(1) = \vec{A}_1^*(1) = a_1^{(1)}(1) = (\omega_{11}^{(1)}(1))^{1/2} = f_{11}^{-1/2}. \quad (8)$$

Для рекуррентного отыскания векторов $\vec{B}_1^*(1)$ и $\vec{A}_1^*(M+1-m)$ при последующих значениях $m \geq 2$ представим матрицу $\vec{\Phi}^{(m)}(1)$ (2) в виде окаймляющей матрицы

$$\vec{\Phi}^{(m)}(1) = \begin{vmatrix} \vec{\Phi}^{(m-1)}(1) & \vec{U} \\ -\frac{f_{\nu\nu}}{U} & f_{\nu\nu} \end{vmatrix}, \quad \nu = m + 1 - 1, \quad (9a)$$

$$\vec{\Psi}^{(m)}(1) = \begin{vmatrix} f_{11} & \vec{v}^* \\ \vec{v} & \vec{\Phi}^{(m-1)}(1+1) \end{vmatrix} \quad (9b)$$

для матриц $\vec{\Phi}^{(m-1)}(1)$ и $\vec{\Phi}^{(m-1)}(1+1)$, где

$$\vec{U} = \{u_i\}_{i=1}^{m-1} = \vec{E}_{m-1}^*(1) \vec{\Phi}_{m+1-1}^{(m-1)}, \quad \vec{v} = \{v_i\}_{i=1}^{m-1} = \vec{E}_{m-1}^*(1+1) \vec{\Phi}_1, \quad (10)$$

а $\vec{\Phi}_\mu = \vec{\Phi} \vec{e}_\mu^{(m)}$ — μ -й столбец исходной матрицы $\vec{\Phi}$.

Используя известные формулы обращения блочных матриц (см., например, [20]), для представления (9a) получим

$$\vec{\Psi}^{(m)}(1) = \begin{vmatrix} \vec{\Phi}^{(m-1)}(1) + d\vec{\Psi}^{(m-1)}(1)\vec{U}\vec{U}^*\vec{\Phi}^{(m-1)}(1) & -d\vec{\Psi}^{(m-1)}(1)\vec{U} \\ -d\vec{U}^*\vec{\Phi}^{(m-1)}(1) & d \end{vmatrix}, \quad (11)$$

$$d = (f_{\nu\nu} - \vec{U}^*\vec{\Phi}^{(m-1)}(1)\vec{U})^{-1}, \quad \nu = m + 1 - 1,$$

откуда следует, что первая строка $\vec{\Psi}_1^{(m)*}(1)$ матрицы $\vec{\Psi}^{(m)}(1)$ равна

$$\vec{\Psi}_1^{(m)*}(1) = \{\vec{\Psi}_1^{(m-1)*}(1) + \varepsilon(-d\vec{U}^*\vec{\Phi}^{(m-1)}(1)), ed\}, \quad (12a)$$

$$\varepsilon = -\vec{\Psi}_1^{(m-1)*}(1)\vec{U} = \omega_{1m}^{(m)}(1)/d \quad (12b)$$

или, учитывая вид последней строки $\vec{\Psi}_n^{(m)*}(1)$ в (11),

$$\vec{\Psi}_1^{(m)*}(1) = \{\vec{\Psi}_1^{(m-1)*}(1), 0\} + \varepsilon\vec{\Psi}_n^{(m)*}(1), \quad (13)$$

где первое слагаемое представляет собой m -мерную строку, состоящую из $(m-1)$ -мерной строки, дополненной справа нулем.

Обращая (9b), получим

$$\vec{\Psi}^{(m)}(1) = \begin{vmatrix} d_1 & -d_1\vec{v}^*\vec{\Phi}^{(m-1)}(1+1) \\ -d_1\vec{\Psi}^{(m-1)}(1+1)\vec{v} & \vec{\Psi}^{(m-1)}(1+1)+d_1\vec{\Psi}^{(m-1)}(1+1)\vec{v}\vec{v}^*\vec{\Phi}^{(m-1)}(1+1) \end{vmatrix},$$

$$d_1 = (f_{11} - \vec{v}^* \vec{\Psi}^{(m-1)} (I + 1) \vec{v})^{-1}, \quad (14)$$

откуда последняя строка равна

$$\vec{\Psi}_m^{(m)*}(1) = \{ \delta d_1, \vec{\Psi}_{m-1}^{(m-1)*}(1 + 1) + \delta (-d_1 \vec{v}^* \vec{\Psi}^{(m-1)}(1 + 1)) \}, \quad (15a)$$

$$\delta = -\vec{\Psi}_{m-1}^{(m-1)*}(1 + 1) \vec{v} = \omega_{11}^{(m)}(1)/d_1 \quad (15b)$$

или, учитывая вид первой строки в (14),

$$\vec{\Psi}_m^{(m)*}(1) = \{ 0, \vec{\Psi}_{m-1}^{(m-1)*}(1 + 1) \} + \delta \vec{\Psi}_1^{(m)*}(1); \quad (16)$$

где первое слагаемое — m -мерная строка, состоящая из $(m - 1)$ -мерной строки, дополненной нулем слева.

Объединяя (13), (16), получим пару рекуррентных соотношений

$$\vec{\Psi}_m^{(m)*}(1) = (1 - \varepsilon \delta)^{-1} (\{ 0, \vec{\Psi}_{m-1}^{(m-1)*}(1 + 1) \} + \delta \{ \vec{\Psi}_1^{(m-1)*}(1), 0 \}), \quad (17)$$

$$\vec{\Psi}_1^{(m)*}(1) = (1 - \varepsilon \delta)^{-1} (\{ \vec{\Psi}_1^{(m-1)*}(1), 0 \} + \varepsilon \{ 0, \vec{\Psi}_{m-1}^{(m-1)*}(1 + 1) \}),$$

от которых, используя (4), (5), перейдем к строкам $\vec{B}_m^*(1)$ и $\vec{A}_m^*(1)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega_{mm}^{(m)}(1)} \vec{B}_m^*(1) &= (1 - \varepsilon \delta)^{-1} \left(\sqrt{\omega_{m-1,m-1}^{(m-1)}(1 + 1)} \{ 0, \vec{B}_{m-1}^*(1 + 1) \} + \right. \\ &\quad \left. + \delta \sqrt{\omega_{11}^{(m-1)}(1)} \{ \vec{A}_{m-1}^*(1), 0 \} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega_{11}^{(m)}(1)} \vec{A}_m^*(1) &= (1 - \varepsilon \delta)^{-1} \left(\sqrt{\omega_{11}^{(m-1)}(1)} \{ \vec{A}_{m-1}^*(1), 0 \} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sqrt{\omega_{m-1,m-1}^{(m-1)}(1 + 1)} \{ 0, \vec{B}_{m-1}^*(1 + 1) \} \right). \end{aligned}$$

Учтем теперь равенства

$$\omega_{mm}^{(m)}(1) = d, \quad \omega_{11}^{(m)}(1) = d_1, \quad \omega_{m-1,m-1}^{(m-1)}(1 + 1) = d - d_1 |\delta|^2,$$

$$\omega_{11}^{(m-1)}(1) = d_1 - d |\varepsilon|^2, \quad (19)$$

непосредственно вытекающие из сопоставления первых и последних диагональных элементов представлений (11), (14) матрицы $\vec{\Psi}^{(m)}(1)$ и

определений (12б), (15б).

Тогда (18) после очевидных преобразований перепишется в виде [5]

$$\vec{B}_m^*(1) = s_m(1) \{0, \vec{B}_{m-1}^*(1+1)\} + \alpha_m(1) \{\vec{A}_{m-1}^*(1), 0\}, \quad (20)$$

$$\vec{A}_m^*(1) = c_m(1) (\{\vec{A}_{m-1}^*(1), 0\} + \beta_m(1) \{0, \vec{B}_{m-1}^*(1+1)\}),$$

где введены обозначения

$$\alpha_m(1) = \delta \sqrt{d_1/d} = \omega_{11}^{(m)}(1) / \sqrt{dd_1}, \quad (21a)$$

$$\beta_m(1) = \varepsilon \sqrt{d/d_1} = \omega_{11}^{(m)}(1) / \sqrt{dd_1} = \alpha_m^*(1);$$

$$s_m(1) = c_m(1) = (1 - \varepsilon \delta)^{-1/2} = (1 - |\alpha_m(1)|^2)^{-1/2}, \quad (21b)$$

а запись $\{0, \vec{Z}_{m-1}^*(\cdot)\}$ или $\{\vec{Z}_{m-1}^*(\cdot), 0\}$, как и ранее, означает m -мерную строку, состоящую из $(m-1)$ -мерной строки $\vec{Z}_{m-1}^*(\cdot)$, дополненной нулем слева или справа соответственно.

Двучленные формулы (20) могут использоваться в качестве искомых рекурсы m -го ($m \geq 2$) шага для одновременного вычисления строк $\vec{A}_m^*(1)$ и $\vec{B}_m^*(1)$ по $\vec{A}_{m-1}^*(1)$ и $\vec{B}_{m-1}^*(1+1)$, если связывающие их скалярные параметры $\alpha_m(1) = \beta_m^*(1)$ выразить через величины, которые могут быть вычислены после завершения $(m-1)$ -го шага.

Используя (21a), (19), (15б), (5), получим $\alpha_m(1) = -\gamma \vec{B}_{m-1}^*(1+1) \vec{\Phi}_1$, где $\gamma = (\omega_{11}^{(m)}(1) \omega_{m-1,m-1}^{(m-1)}(1+1) / \omega_{mm}^{(m)}(1))^{1/2}$. Поскольку

$$\omega_{11}^{(\nu)}(\mu) = \frac{\det \vec{\Phi}^{(\nu-1)}(\mu+1)}{\det \vec{\Phi}^{(\nu)}(\mu)}, \quad \omega_{\nu\nu}^{(\nu)}(\mu) = \frac{\det \vec{\Phi}^{(\nu-1)}(\mu)}{\det \vec{\Phi}^{(\nu)}(\mu)}, \quad (21b)$$

где $\det \vec{X}$ - детерминант матрицы \vec{X} , то $\gamma = \sqrt{\omega_{11}^{(m-1)}(1)} = \alpha_1^{(m-1)}(1)$ и, в силу (10),

$$\alpha_m(1) = -\alpha_1^{(m-1)}(1) \vec{B}_{m-1}^*(1+1) \vec{E}_{m-1}^*(1+1) \vec{\Phi}_1. \quad (22a)$$

Аналогичным образом на основании (21a), (19), (12б), (5), (10) можно получить другой способ определения $\alpha_m(1)$:

$$\beta_m(1) = -\vec{B}_{m-1}^{(m-1)}(1+1) \vec{A}_{m-1}^*(1) \vec{E}_{m-1}^*(1) \vec{\Phi}_{m+1-1} = \alpha_m^*(1). \quad (22b)$$

Итоговый способ рекуррентного формирования треугольных сомножителей (1) матрицы $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}^{-1}$ по заданной матрице $\hat{\Phi}$ определяется формулами (8), (22а), (или (22б)), (21б) и (20). Для удобства последующих ссылок мы объединим их в виде алгоритма

$$\hat{B}_1^*(1) = b_1^{(1)}(1) = \hat{A}_1^*(1) = a_1^{(1)}(1) = f_{11}^{-1/2}, \quad l \in 1, M \quad (m = 1), \quad (23a)$$

$$\alpha_m(l) = -a_1^{(m-1)}(l) \hat{B}_{m-1}^*(l+1) \hat{E}_{m-1}^*(l+1) \hat{\Phi}_1 = \beta_m^*(l); \quad (23b)$$

$$s_m(l) = c_m(l) = (1 - |\alpha_m(l)|^2)^{-1/2}; \quad m \in 2, M, \quad (23b)$$

$$\hat{B}_m^*(l) = s_m(l) (\{0, \hat{B}_{m-1}^*(l+1)\} + \alpha_m(l) \{\hat{A}_{m-1}^*(l), 0\}), \quad l \in 1, M+1-m, \quad (23c)$$

$$\hat{A}_m^*(l) = c_m(l) (\{\hat{A}_{m-1}^*(l), 0\} + \beta_m(l) \{0, \hat{B}_{m-1}^*(l+1)\}) \quad (23d)$$

который назовем обобщенным алгоритмом Левинсона (ОАЛ). В нем на каждом шаге рекурсии по $m \in 1, M$ вычисляются ненулевые элементы m -й строки матрицы $\hat{H} (\hat{H}_m^* = \hat{B}_m^*(1))$ и $(M+1-m)$ -й строки матрицы $\hat{N} (\hat{N}_m^* = \hat{A}_m^*(M+1-m))$, а также вспомогательные векторы $\hat{B}_m^*(l)$ ($l \in 2, M+1-m$) и $\hat{A}_m^*(l)$ ($l \in 1, M-m$), требующиеся для последующих шагов алгоритма. По завершении процесса ($m = M$) оказываются одновременно сформированными как матрица \hat{H} , так и матрица \hat{N} разложений (1), на что в общем случае затрачивается (в главном члене) $2,5 M^3/3$ операций комплексного умножения, т. е. практически столько же, сколько требуется для их отыскания при использовании наиболее "экономных" из известных алгоритмов для эрмитовых матриц общего вида [16], с. 175.

3. ОАЛ в случае КМ с симметрией элементов относительно побочной диагонали

Специфика КМ подобного рода, примеры которых уже упоминались в разд. 1, порождает определенные взаимосвязи между скалярными и векторными параметрами, вычисляемыми по (23а) – (23д). Учет этих взаимосвязей упрощает ОАЛ и вытекающий из него универсальный РФ (разд. 4). Рассмотрим для иллюстрации ряд примеров.

1. Пусть КМ является персимметричной [1-4, 14], т. е. удовлетворяет условиям

$$\vec{\Phi} = \vec{\Pi}_M \vec{\Phi}^T \vec{\Pi}_M = \vec{\Pi}_M \vec{\Phi}^T \vec{\Pi}_M \quad f_{i,j} = f_{M+1-j, M+1-i}, \quad i, j \in 1, M, \quad (24)$$

означающим равенство исходной матрицы с полученной в результате поворота исходной относительно побочной диагонали.

Здесь $\vec{\Pi}_M$ - $M \times M$ ортогональная ($\vec{\Pi}_M \vec{\Pi}_M^T = \vec{I}_M$) симметричная ($\vec{\Pi}_M = \vec{\Pi}_M^T$) матрица перестановок с единицами на побочной диагонали (и нулями в остальных позициях), (T) и ($-$) - символы соответственно транспонирования и замены элементов на комплексно-сопряженные.

В этом случае матрица $\vec{\Phi}^{(m)}(1)$ (2) равна $\vec{\Phi}^{(m)}(1) = \vec{E}_M^*(1) \vec{\Pi}_M \times \times \vec{\Phi}^T \vec{\Pi}_M \vec{E}_M(1)$, так что $\vec{\Pi}_M \vec{\Phi}^{(m)}(1) \vec{\Pi}_M = \vec{\Pi}_M \vec{E}_M^*(1) \vec{\Pi}_M \vec{\Phi}^T \vec{\Pi}_M \vec{E}_M(1) \vec{\Pi}_M$. Отсюда и из легко проверяемого равенства

$$\vec{\Pi}_M \vec{E}_M^*(1) \vec{\Pi}_M = \vec{E}_M^*(M+2-m-1) \quad (25)$$

следует, что $\vec{\Phi}^{(m)}(1) = \vec{\Pi}_M \vec{\Phi}^{(m)-}(v) \vec{\Pi}_M$, $\vec{\Psi}^{(m)}(1) = \vec{\Pi}_M \vec{\Psi}^{(m)-}(v) \vec{\Pi}_M$, $v = M+2-m-1$, поэтому на основании (4), (5)

$$\vec{B}_M^*(1) = \vec{A}_M^T(v) \vec{\Pi}_M, \quad \vec{A}_M^*(1) = \vec{B}_M^T(v) \vec{\Pi}_M, \quad b_M^{(m)}(1) = a_1^{(m)}(v), \quad (26)$$

$$a_1^{(m)}(1) = b_M^{(m)}(v).$$

Подставляя эти равенства в (22a), (22б) и учитывая, что в условиях (24) $\vec{\Phi}_1 = \vec{\Pi}_M \vec{\Phi}_{M+1-1}^T$, $\vec{\Phi}_{M+1-1} = \vec{\Pi}_M \vec{\Phi}_M^T$, получим

$$\alpha_m(1) = \alpha_m(v), \quad s_m(1) = c_m(1) = s_m(v) = c_m(v), \quad v = M+2-m-1. \quad (27)$$

Тем самым симметрия (24), снижающая примерно вдвое число независимых параметров (элементов) КМ, приводит к простым взаимосвязям (равенствам (26), (27)) между параметрами ОАЛ. Это позволяет определять их по (23а)-(23д) только при $l \in 1, [(M+2-m)/2]$ ($[x]$ - целая часть x), что приводит к аналогичному (примерно вдвое) уменьшению объема вычислений.

Б. В качестве второго примера рассмотрим теплицеву КМ $\vec{\Phi} = \{f_{i,j}\}_{i=1, j=1}^M$ с первым столбцом $\vec{\Phi}_1 = \vec{\rho} = \{\rho_i\}_{i=0}^{M-1}$, полностью определяющим всю эту матрицу ($f_{i,j} = f_{j,i} = \rho_{i-j}$, $i \in 1, M$; $j \in 1, i$).

В этом случае $\vec{\Phi}^{(m)}(1) = \vec{\Phi}^{(m)}(1) = \vec{\Phi}^{(m)} = \{f_{i,j}\}_{i=1, j=1}^M$ для всех $i \in 1, M+1-m$ и, кроме того, $\vec{\Phi}^{(m)} = \vec{\Pi}_M \vec{\Phi}^{(m)-} \vec{\Pi}_M$, $\vec{\Psi}^{(m)} = \vec{\Pi}_M \vec{\Psi}^{(m)-} \vec{\Pi}_M$ в силу персимметрии ведущей (угловой) подматрицы $\vec{\Phi}^{(m)}$ любого порядка

Л В связи с этим, как следует из (6),

$$\vec{B}_n^*(1) = \vec{B}_n^*(1) = \vec{B}_n^*, \quad \vec{A}_n^*(1) = \vec{A}_n^*(1) = \vec{A}_n^*, \quad \vec{B}_n^* = \vec{A}_n^T \vec{\Pi}_n, \quad l \in 1, M+1-m, \quad (28)$$

так что матрицы \vec{H} и \vec{N} в (1) определяются только одним из наборов ($\vec{B}_n^* = \vec{H}_n^* = \vec{N}_n^T \vec{\Pi}_n$ или $\vec{A}_n^* = \vec{N}_n^* = \vec{H}_n^T \vec{\Pi}_n$, $m \in 1, M$), который может быть сформирован по алгоритму, вытекающему из (23) с учетом (28) и имеющему вид

$$\vec{B}_1^* = b_1^{(1)} = \vec{A}_1^* = a_1^{(1)} = \rho_0^{-1/2}, \quad m = 1; \quad (29a)$$

$$\alpha_m = -a_1^{(m-1)} \vec{B}_{m-1}^* \vec{E}_{m-1}^*(2) \vec{\rho} = -a_1^{(m-1)} \sum_{l=1}^{m-1} b_l^{(m-1)} \rho_l, \quad (29b)$$

$$s_m = c_m = (1 - |\alpha_m|^2)^{-1/2}, \quad m \in 2, M. \quad (29b)$$

$$\vec{B}_m^* = s_m (\{0, \vec{B}_{m-1}^*\} + \alpha_m \{\vec{A}_{m-1}^*, 0\}); \quad \vec{A}_m^* = \vec{B}_m^T \vec{\Pi}_m. \quad (29c)$$

При выводе (29б) мы использовали (28), (23б) и равенство $\vec{E}_{m-1}^*(1 + 1)\vec{\Phi}_1 = \vec{E}_{m-1}^*(2)\vec{\Phi}_1 = \vec{E}_{m-1}^*(2)\vec{\rho}$, справедливо в силу теплицевости рассматриваемой КМ.

Алгоритм (29а)-(29г) представляет собой "нормализованный" вариант алгоритма Левинсона для эрмитовых теплицевых матриц [20], с. 216, что и объясняет наше название для алгоритма (29а)-(29д). Количество операций умножения в (29а)-(29г) составляет в главном члене $1,5 M^2$, т.е. по сравнению с (23а)-(23д) уменьшается во столько же раз, во сколько число параметров, задающих теплицеву КМ (и обратную к ней), меньше числа параметров КМ общего вида.

В. Пусть элементы ρ_l корреляционной последовательности (автокорреляционной функции (АКФ)) удовлетворяют рекуррентному соотношению $\rho_l = \sum_{i=1}^p \varphi_i \rho_{l-i}$ ($l \geq 1$) и, следовательно,

$$\vec{E}_{m-1}^*(1) \vec{\Phi} \vec{E}_p^*(1) \vec{\varphi} = \vec{E}_{m-1}^*(2) \vec{\rho}, \quad (30a)$$

т.е. $\vec{\Phi}$ является КМ стационарного процесса авторегрессии (AP) p -го порядка с вектором коэффициентов $\vec{\varphi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^p$ [17]. В этом случае в (29б) $\alpha_m = -a_1^{(m-1)} \vec{B}_{m-1}^* \vec{E}_{m-1}^*(1) \vec{\Phi} \vec{E}_p^*(1) \vec{\varphi} = -a_1^{(m-1)} \vec{e}_{m-1}^{(M)} \vec{H} \vec{\Phi} \vec{E}_p^*(1) \vec{\varphi} =$

$$= -\alpha_1^{(m-1)} \vec{e}_{m-1}^{(m)} \vec{H}^{m-1} \vec{E}_p(1) \vec{\phi} .$$

Отсюда видно, что при $m > p + 1$ в (29а)-(29г)

$$\alpha_m = 0, \quad s_m = c_m = 1, \quad \vec{B}_m^* = \{0, \vec{B}_{m-1}^*\}, \quad \vec{A}_m^* = \{\vec{A}_{m-1}^*, 0\},$$

$$p + 1 < m \leq M,$$

(30б)

т.е. матрицы \vec{H} и \vec{N} в этом случае являются ленточными с шириной ленты $p + 1$, а матрица $\vec{\Phi}(1)$ - ленточной с шириной ленты $2p + 1$ [17]. В основной части процедуры (29а)-(29г) при $M > p$ выполняется только p шагов ($m \in 2, p + 1$) с затратой примерно $1.5p(p + 3)$ операций умножения. В частности, для процессов с экспоненциальной АКФ ($\rho_1 = \rho_1^{11}, p = 1$) в основной части выполняется только один шаг ($m = 2$).

Г. В качестве следующего примера рассмотрим стационарный процесс АР "бесконечного" порядка ($p \rightarrow \infty$) с гауссовой АКФ вида

$$\rho_i = c^i e^{j\omega_0 i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (30в)$$

широко использующейся, в частности, при описании междупериодных флуктуаций мешающих отражений в импульсных РЛС [19]. В этом случае упрощение ОАЛ достигается за счет более простого формирования α_m ($m \in 2, M$), чем по (29б).

Чтобы определить α_m , здесь удобно воспользоваться (21а), переписав его с учетом (19), (21в) в виде

$$\alpha_m = (-1)^{m-1} \frac{\det \vec{G}^{(m-1)}}{\det \vec{\Phi}^{(m-1)}} , \quad (30г)$$

где $\vec{G}^{(m-1)} = \{g_{ii}\}_{i=1}^{m-1}$ - матрица алгебраического дополнения f_{1m} , элементы которой равны

$$g_{ii} = f_{1+1, i} = \rho_{i-1+1} = c^{(i-1+1)} e^{j\omega_0 (i-1+1)} = c^{2i} \rho_1 f_{11} c^{-2i}.$$

Отсюда следует, что $\vec{G}^{(m-1)} = \vec{D}^{(m-1)} \rho_1 \vec{\Phi}^{(m-1)} \vec{D}^{(m-1)}^{-1}$, где $\vec{D}^{(m-1)} = \text{diag}\{d_i\}_{i=1}^{m-1}$ - диагональная матрица с элементами $d_i = c^{2i}$ на главной диагонали. Поэтому $\det \vec{G}^{(m-1)} = \det [\vec{D}^{(m-1)} \vec{\Phi}^{(m-1)}] \times \det [\rho_1 \vec{\Phi}^{(m-1)}] = \rho_1^{m-1} \det \vec{\Phi}^{(m-1)}$ и, следовательно,

$$\alpha_n = (-\rho_1)^{m-1} = (-Ce^{j\omega_0})^{m-1} = \alpha_2 \alpha_{n-1}, \quad \alpha_2 = -\rho_1, \quad (30d)$$

т.е. процесс с гауссовой АКФ приводит к экспоненциальной (по модулю) последовательности α_m ($m \in 2, M$) в ОАЛ*. Учет этого снижает число умножений в (29а)-(29г) до $\approx M^2$.

Ограничиваюсь приведенными примерами (перечень которых можно существенно расширить), отметим отличительную особенность ОАЛ — простоту учета и использования для упрощения вычислений специфики КМ, обусловленной той или иной симметрией ее элементов относительно побочной диагонали. Это связано с тем, что лежащий в основе ОАЛ анализ всех ($l \in 1, M + 1 - m$) главных подматриц m -го ($m \in 1, M$) порядка ("скольжение" вдоль главной диагонали) выявляет именно эту специфику КМ и при ее наличии приводит к появлению простейших взаимосвязей (равенств) типа (26), (27), (28), (30б), (30д) между параметрами исходной процедуры (23а)-(23д), соответствующей КМ общего вида. В других методах отыскания сомножителей (1) указанные взаимосвязи в аналогичных случаях носят существенно более сложный характер.

4. Блочно-диагональная факторизация и универсальные решетчатые фильтры

Процедура (23а)-(23д) явно определяет матрицы \hat{H} и \hat{N} , а в сочетании с (1) — и матрицу $\hat{\Psi} = \hat{\Phi}^{-1}$. Однако в большинстве задач обработки требуются не сами эти матрицы, а те или иные функции от них: билинейные или квадратичные формы, детерминанты, собственные значения (векторы), решения систем и т. д. [19]. Все эти функции могут быть получены и без непосредственного определения самих матриц за счет операций со слабозаполненными сомножителями, задающими их факторизованное представление.

ОАЛ (23а)-(23д) порождает специальную факторизацию матриц, обратных КМ, отличающуюся от широко используемых факторизаций Гаусса, Краута и т. п. [16]. Это отличие приводит и к специальной (решетчатой) структуре базирующихся на ней устройств обработки.

Для отыскания структуры сомножителей матриц \hat{H} и \hat{N} можно поступить следующим образом. Возьмем произвольный M -мерный вектор

*Этот результат был впервые получен в [18], однако его доказательство в [18] существенно сложнее приведенного.

$\vec{Z} = \{z_i\}_{i=1}^N$ и сформируем $2M$ -мерный вектор $\vec{G} = \{g_i\}_{i=1}^{2M}$, равный

$$\vec{G} = \vec{W}\vec{Z} = \begin{vmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \end{vmatrix}, \quad \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{H} \\ \vec{N} \end{vmatrix}, \quad \vec{P} = \vec{H}\vec{Z}, \quad \vec{Q} = \vec{N}\vec{Z}, \quad (31)$$

пользуясь (23а)–(23д) и полагая вначале, что $\alpha_1(1)$ (и, следовательно, $\beta_1(1) = \alpha_1^*(1)$ и $s_1(1) = c_1(1)$ (23в)) известны при всех $m \in 2, M$ и $l \in 1, M + 1 - m$. Считая $\vec{G}_0 = \vec{Z}$, на каждом шаге рекурсии по $m \in 1, M$ будем формировать $2M$ -мерный вектор $\vec{G}_m = \vec{\Gamma}_m \vec{G}_{m-1}$ так, чтобы $\vec{G}_m = \vec{G}$ (31), при этом матрица преобразования m -го шага $\vec{\Gamma}_m$ определит m -й сомножитель матрицы \vec{W} (31) и, тем самым, структуру m -й ступени фильтра, реализующего (31).

Введем скаляры

$$p_m(l) = \vec{B}_m^*(l)\vec{E}_m^*(l)\vec{Z}, \quad q_m(l) = \vec{A}_m^*(l)\vec{E}_m^*(l)\vec{Z}, \quad m \in 1, M, \quad l \in 1, M+1-m \quad (32)$$

и расположим их на месте соответственно $(m+2l-2)$ -го и $(m+2l-1)$ -го элементов вектора $\vec{G}_m = \{g_i^{(m)}\}_{i=1}^{2M}$:

$$g_{m+2l-2}^{(m)} = p_m(l), \quad g_{m+2l-1}^{(m)} = q_m(l). \quad (33)$$

Поскольку $p_m(l) = \vec{e}_m^{(M)*}\vec{H}\vec{Z} = \vec{e}_m^{(M)*}\vec{P}$ и $q_m(M+1-m) = \vec{e}_{M+1-m}^{(M)*}\vec{N}\vec{Z} = \vec{e}_{M+1-m}^{(M)*}\vec{Q}$, то задача формирования векторов \vec{P} и \vec{Q} в (31) и, следовательно, вектора \vec{G} сводится к формированию векторов

$$\{p_m(l)\}_{m=1}^M = \{g_m^{(m)}\}_{m=1}^M = P, \quad \{q_m(M+1-m)\}_{m=1}^M = \{g_{2M+1-m}^{(m)}\}_{m=1}^M = \vec{\Pi}_M \vec{Q}. \quad (34)$$

При $m = 1$ из (32) получим

$$p_1(l) = q_1(l) = s_1(l)z_l, \quad l \in 1, M, \quad (35)$$

где мы доопределили $s_1(l) = c_1(l)$, исходя из (23а), как

$$s_1(l) = b_1^{(1)}(l), \quad c_1(l) = \alpha_1^{(1)}(l). \quad (36)$$

В силу (33) $\vec{G}_1 = \{p_1(l), q_1(l)\}^T$ ($l \in 1, M$), так что $2M \times M$ матрица $\vec{\Gamma}_1$ равна

$$\tilde{\Gamma}_1 = \tilde{C} \tilde{D}_1, \quad \tilde{C} = \tilde{I}_M \otimes \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \tilde{D}_1 = \text{diag}\{s_i(1)\}_{i=1}^M, \quad (37)$$

где \otimes - символ кронекеровского произведения [20], с. 80, $\text{diag}\{a_i\}_{i=1}^M$ - диагональная матрица с M -элементами (возможно - матричными) a_i на диагонали.

Для $m \geq 2$, воспользовавшись (32), (20) и очевидными равенствами

$$\{0, \tilde{B}_{m-1}^*(\cdot)\} \tilde{E}_m^*(1) = \tilde{B}_{m-1}^*(\cdot) \tilde{E}_{m-1}^*(1+1), \quad (38)$$

$$\{\tilde{A}_{m-1}^*(\cdot), 0\} \tilde{E}_m^*(1) = \tilde{A}_{m-1}^*(\cdot) \tilde{E}_{m-1}^*(1),$$

получим

$$\left. \begin{array}{l} p_m(1) = s_m(1) \{p_{m-1}(1+1) + \alpha_m(1) q_{m-1}(1)\} = s_m(1) \hat{p}_m(1) \\ q_m(1) = c_m(1) \{q_{m-1}(1) + \beta_m(1) p_{m-1}(1+1)\} = c_m(1) \hat{q}_m(1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \in 2, M \\ l \in 1, M+1-m \end{array} \quad (39)$$

или

$$\tilde{\Omega}_m''(1) = \begin{vmatrix} p_m(1) \\ q_m(1) \end{vmatrix} = \tilde{B}_m(1) \tilde{\Omega}'_m(1); \quad \tilde{\Omega}'_m(1) = \begin{vmatrix} \hat{p}_m(1) \\ \hat{q}_m(1) \end{vmatrix} = \mathfrak{S}_m(1) \tilde{\Omega}_m(1); \quad (40)$$

$$\tilde{B}_m(1) = \begin{vmatrix} s_m(1) & 0 \\ 0 & c_m(1) \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{S}_m(1) = \begin{vmatrix} \alpha_m(1) & 1 \\ 1 & \beta_m(1) \end{vmatrix}, \quad \tilde{\Omega}_m(1) = \begin{vmatrix} q_{m-1}(1) \\ p_{m-1}(1+1) \end{vmatrix}. \quad (41)$$

Структура фильтра, в котором реализуются эти соотношения, показана на рис. 1а. Штриховой линией обведен "элементарный решетчатый фильтр" (ЭРФ) [5], преобразующий входной вектор $\tilde{\Omega}_m(1)$ в вектор $\tilde{\Omega}'_m(1)$, который затем преобразуется в выходной вектор $\tilde{\Omega}''_m(1)$. Фильтр (рис. 1а) в целом мы далее обозначаем как ЭРФ $H_m(1)$ (с "нормированием").

В m -й ступени содержится $(M+1-m)$ таких ЭРФ H , причем, как следует из (34), (40), на верхнем выходе первого из них ($i=1$) формируется m -я компонента $p_m(1)$ вектора \tilde{P} , а на нижнем выходе последнего - $(M+1-m)$ -я компонента $q_{m+1-m}(M+1-m)$ вектора \tilde{Q} , которые в последующих преобразованиях не участвуют. На остальных выходах этих ЭРФ H формируются "промежуточные" компоненты $g_i^{(m)} (m+1 \leq i \leq 2M-m)$ вектора \tilde{G}_m (33), использующиеся на последующих шагах преобразований (в последующих ступенях). Тем самым матрица Γ_m имеет вид

$$\tilde{\Gamma}_m = \tilde{D}_m \tilde{B}_m, \quad \tilde{D}_m = \begin{vmatrix} \tilde{I}_{m-1} & & & \\ & \tilde{D}_m & & \\ & & \tilde{I}_{m-1} & \\ & & & \tilde{I}_{m-1} \end{vmatrix}, \quad \tilde{B}_m = \begin{vmatrix} \tilde{I}_{m-1} & & & \\ & \tilde{B}_m & & \\ & & \tilde{I}_{m-1} & \\ & & & \tilde{I}_{m-1} \end{vmatrix}, \quad m \in 2, M, \quad (42)$$

где $\tilde{D}_m = \text{diag } \{\tilde{D}_m(l)\}_{l=1}^{M+1-m}$, $\tilde{B}_m = \text{diag } \{\tilde{B}_m(l)\}_{l=1}^{M+1-m}$.

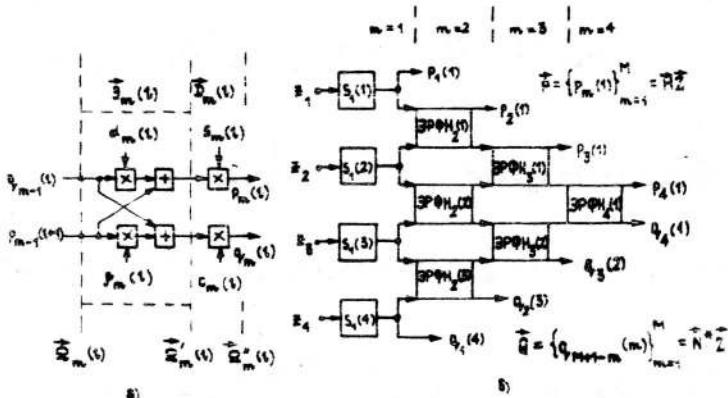


Рис. 1.

Проведенное рассмотрение показывает, что обобщенные рекурсыи (20) фактически означают возможность разложения матрицы \tilde{W} (31) в произведение

$$\tilde{W} = \tilde{D}_M \tilde{B}_M \tilde{D}_{M-1} \tilde{B}_{M-1} \dots \tilde{D}_2 \tilde{B}_2 \tilde{C} \tilde{D}_1 = \prod_{m=1}^M \tilde{\Gamma}_m \quad (43)$$

блочно-диагональных матриц \tilde{D}_m ($m \in 1, M$) и \tilde{B}_m ($m \in 2, M$), определяемых соотношениями (42), (41), и матрицы "раздвоения" \tilde{C} (37), или, что эквивалентно, возможность формирования из произвольного вектора \tilde{Z} вектора $\tilde{G} = \tilde{W}\tilde{Z}$ решетчатым фильтром (рис. 1б, $M = 4$) [21, 5], матричная импульсная характеристика m -й ($m \in 1, M$) ступени которого совпадает с $\tilde{\Gamma}_m$.

Представление (43), (42), (41), (37) (которые по аналогии с (23а)–(23д) можно назвать обобщенной факторизацией Левинсона (ОФЛ), как и РФ (рис. 1) (понимаемый далее как синоним ОФЛ), а также их разновидности, порождаемые отличными от (33) порядками заполнения вектора \tilde{G}_m , являются универсальными, поскольку при их синтезе никаких ограничений на структуру КМ не накладывалось. В общем случае они определяются и действительными ($s_1(1)$, $1 \in 1, M$) и $M(M-1)/2$ комплексными параметрами $\alpha_m(l)$ ($m \in 2, M$; $l \in 1, M+1-m$),

что соответствует числу независимых элементов эрмитовой матрицы общего вида, и в этих условиях эквивалентны другим способам факторизации (с отличной от (37), (42) структурой сомножителей) [16, 20].

Положительные свойства ОФЛ (РФ) проявляются при наличии специфики в КМ (разд. 3), поскольку она "наследуется" сомножителями ОФЛ (ступенями РФ). Наследование заключается в том, что закономерности расположения одинаковых элементов на m -й ($m \in 1, M$) диагонали исходной матрицы $\hat{\Phi}$ переносятся на расположение одинаковых блоков $\hat{D}_m(1)$ и $\hat{S}_m(1)$ (41) в диагоналях матриц \hat{D}_m и \hat{S}_m (42) (и, соответственно, на расположение одинаковых ЭРФ и в m -й ступени РФ). Так, для персимметричных КМ симметрия попарно равных элементов m -й диагонали относительно ее центра (24) в соответствии с (27) переходит в симметрию попарно равных блоков (41) относительно центрального блока соответствующих матриц (42) (в симметрию расположения одинаковых ЭРФ и m -й ступени РФ относительно ее центрального ЭРФ и). Это же свойство сохраняется для блочно-теплицевых $M \times M$ матриц с $M = k^r$ и $r \times r$ теплицевыми блоками в первом k -мерном блочном столбце. В частности, при $r = 2$ равенство всех элементов нечетных диагоналей порождает равенство всех диагональных блоков (41) в \hat{D}_m и \hat{S}_m (42) при нечетных m , а чередование равных элементов в четных диагоналях $\hat{\Phi}$ приводит к такому же чередованию равных блоков (41) в \hat{D}_m и \hat{S}_m (42) при четных m . При $r = 1$, т.е. в случае теплицевой матрицы $\hat{\Phi}$, равенство всех элементов каждой диагонали $\hat{\Phi}$ в соответствии с (28), (29а)-(29г), (36), (37) приводит к равенствам

$$\hat{D}_1 = \hat{I}_M s_1, \quad \hat{D}_m = \hat{I}_{M+1-m} \otimes \hat{D}_1(1), \quad \hat{S}_m = \hat{I}_{M+1-m} \otimes \hat{S}_1(1) \quad (m \in 2, M), \quad (44)$$

т.е. к равенству параметров всех ЭРФ и каждой ступени РФ (рис. 1). В этом случае можно перейти [21, 5] к эквивалентному "временному" РФ (рис. 2), описывающемуся рекуррентными соотношениями

$$P_1(t) = q_1(t) = s_1 z(t) \quad (m = 1) \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} P_m(t) &= s_m(P_{m-1}(t - T) + \alpha_m q_{m-1}(t)) \\ q_m(t) &= c_m(q_{m-1}(t) + \beta_m P_{m-1}(t - T)) \end{aligned} \right\} \quad m \in 2, M.$$

Эта структура была предложена впервые в [10] и стала к настоящему времени классической для задач обработки стационарных процессов различной природы [6, 12, 7]. Эквивалентность здесь понимается в том

смысле, что в любой момент времени t вектор $\hat{P}(t) = \{p_m(t)\}_{m=1}^M$ выходных сигналов РФ (рис. 2), возбуждаемого сигналом $z(t)$, в точности совпадает с вектором $\hat{P} = \{p_m(1)\}_{m=1}^M$ выходных сигналов РФ (рис. 1), возбуждаемого вектором $\hat{Z} = \{z_i\}_{i=1}^N$ с $z_1 = z(t - (1 - 1)T)$.

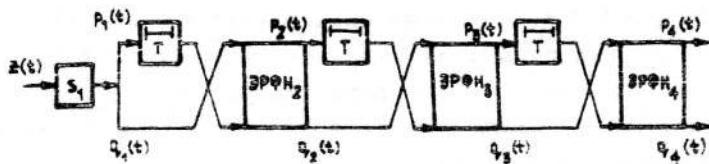


Рис.2.

Отметим, что эквивалентность в указанном смысле можно обеспечить не только в случае теплицевой, но и в случае произвольной КМ, если с периодом T менять параметры ЭРФ H_m m -й ступени РФ (рис. 2) так, чтобы в моменты $t = (m - l)T$ ($l \in 1, M + 1 - m$) они совпадали с параметрами ЭРФ $H_m(l)$ РФ (рис. 1) [5].

Из ОФЛ (43) для матрицы \tilde{W} легко получить и ОФЛ для матрицы $\tilde{\Psi} = \tilde{W}^{-1}$. Действительно, как следует из (31), (1), $\tilde{W}^* \tilde{W} = 2\tilde{\Psi}$, поэтому

$$\tilde{W}^* = \tilde{D}_1 \tilde{C}^T \tilde{B}_2^* \tilde{D}_2 \dots \tilde{B}_{M-1}^* \tilde{D}_{M-1} \tilde{B}_M^* \tilde{D}_M, \quad (46a)$$

$$\tilde{\Psi} = (1/2) \tilde{W}^* \tilde{W} = (1/2) \tilde{D}_1 \tilde{C}^T \tilde{B}_2^* \tilde{D}_2 \dots \tilde{B}_M^* \tilde{D}_M \tilde{B}_M \dots \tilde{D}_2 \tilde{B}_2^* \tilde{D}_1, \quad (46b)$$

что порождает решетчатые структуры специалистов функций матрицы $\tilde{\Psi}$. Пример РФ, формирующего на основе (46а) вектор $\tilde{R} = 2\tilde{\Psi}\tilde{Z}$, показан на рис. 3 [5, 22]. Он состоит из РФ (рис. 1), формирующего вектор \tilde{G} (31), и "обращенного" РФ (справа от штриховой линии) с факторизованной матричной импульсной характеристикой, совпадающей с ОФЛ (46а) матрицы \tilde{W} , который преобразует вектор \tilde{G} в вектор \tilde{R} . В ЭРФ H_m этого РФ, в отличие от рис. 1а, нормирование предшествует ЭРФ H_m^* , в котором по сравнению с соответствующими ЭРФ параметры заменены на комплексно-сопряженные, что прямо следует из вида ОФЛ для матрицы \tilde{W} . Число независимых параметров РФ (рис. 1, 3) совпадает, определяясь структурой КМ, а появление дополнительной специфики (разд. 3) "отслеживается" за счет появления простейших дополнительных взаимосвязей (равенств) между ними.

Именно такое "наследование свойств" исходной КМ выгодно

отличает ОФЛ от других способов факторизации, а его универсальность обуславливает принципиальную возможность использования РФ для решения задач, сформулированных выше (разд. 1, 4).

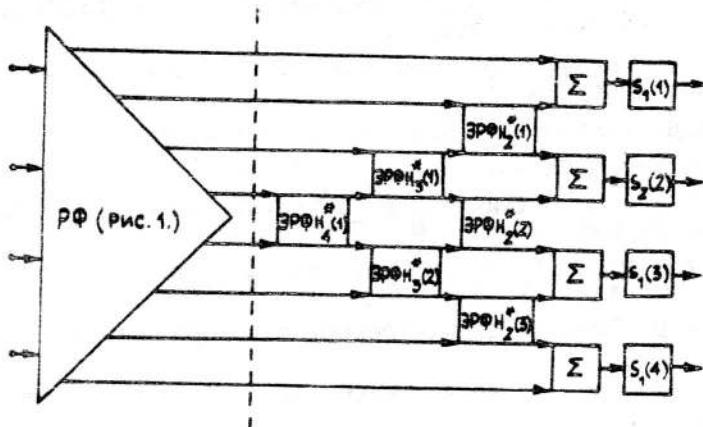


Рис. 3.

Основное значение РФ заключается в возможности вычисления на его основе любых функций от матриц \hat{H} , \hat{N} или $\hat{\Psi}$, особенно эффективного при наличии специфики в КМ, без явного определения самих этих матриц (которые, конечно, также можно получить с помощью РФ, но которые, как правило, не представляют самостоятельного интереса). Для этого необходимо предварительно определить его параметры (сомножители (43)), но, естественно, без использования формул типа (22а), (29б), связывающих их с векторами $\hat{B}^*(1)$ или $\hat{A}^*(1)$ (строками матриц \hat{H} или \hat{N}). Рассмотрению соответствующих способов отыскания этих параметров, в том числе и в условиях априорной неопределенности, планируется посвятить следующую публикацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nitzberg R. // IEEE Trans. Aerosp. Electr. Syst. 1980. V. 16. N 1.
2. Зарицкий В. И., Кокин В. Н., Леховицкий Д. И. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 7. С. 863.
3. Либанов Е. И., Лихарев В. А. // Радиотехника. 1983. N 5. С. 53.
4. Кошевой В. М. // Радиоэлектроника. 1982. Т. 25. N 9. С. 71.
5. Леховицкий Д. И., Зарицкий В. И. и др. Препринт РТИ АН СССР N 8610. М., 1987.
6. Фридландер Б. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. N 8. С. 54.

7. Кей С. М., Марпл С. П. // ТИИЭР. 1981. Т. 69. № 11. С. 5.
8. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информационных систем. - М.: Сов. радио, 1977.
9. Абрамович Ю. И., Качур В. Г. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 7. С. 1547.
10. Burg J. P. In: Modern Spectrum Analysis/Ed. D. G. Childers. - New-York: IEEE Press. 1978. P. 34.
11. Burg J. P. In: Modern Spectrum Analysis/Ed. D. G. Childers. - New-York: IEEE Press. 1978. P. 42.
12. Мосунов В. Б. // Зарубежная радиоэлектроника. 1985. № 5. С. 3.
13. Levinson N. // J. Math. Phys. 1947. V. 25. P. 261.
14. Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е. Вычислительные процессы с тетрапицевыми матрицами. - М.: Наука, 1987.
15. Delsarte F. // Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Proc. -Paris, 1982. P. 1717.
16. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977.
17. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. - М.: Мир, 1974. Вып. 1.
18. Джаковитти Дж., Скарано Дж. // ТИИЭР. 1987. Т. 75. № 7. С. 106.
19. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. - М.: Радио и связь, 1984.
20. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 1984.
21. Sharman K. C., Durrani T. S. // Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc. -Boston, Mass., New York: 1983. V. 1. N 4. P. 348.
22. Кузин С. С., Леховицкий Д. И. // Радиотехника. 1989. № 6. С. 33.

Поступила в редакцию
16 октября 1989 г.,
в окончательном варианте
28 марта 1991 г.

LEVINSON GENERALIZED ALGORITHM AND UNIVERSAL LATTICE FILTERS

D. I. Lekhovitsky

Levinson familiar algorithm for searching the triangular factors of matrices reverse to Toeplitz matrices is generalized for the case of correlation matrices of arbitrary structure. On this basis the universal lattice filters are synthesized which are suitable for utilization in signal processors of different types and purposes.