

УДК 550.385.37:550.388.2

ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ГЕОМАГНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ E-СЛОЯ ИОНОСФЕРЫ

В. В. Сурков

Исследуется влияние распределения по высоте проводимостей Холла и Педерсена на дисперсионные уравнения низкочастотных геомагнитных возмущений (ГМВ). Рассматриваются однослойная и двухслойная модели области E-ионосферы с учетом влияния проводимости земли и излучения волн в магнитосферу. Анализируются вид дисперсионных уравнений и физические механизмы распространения ГМВ вдоль E-слоя в зависимости от ориентации геомагнитного поля.

Локальное возбуждение проводящего E-слоя ионосферы приводит к генерации низкочастотных геомагнитных возмущений (ГМВ), которые распространяются на далекие расстояния. Источником возбуждения ионосферы может быть, например, акустическая волна, образующаяся при землетрясении и наземных промышленных взрывах. Проблема дальнего распространения ГМВ с частотами $1 - 0,001$ Гц и характерными скоростями $5 - 25$ км/с обсуждалась во многих работах. Так, в [1-4] данное явление связывают с возникновением гиротропных волн, распространяющихся вдоль E-слоя в направлении, задаваемом вектором геомагнитного поля. Дисперсионное уравнение, полученное в приближении бесконечно узкого слоя, показывает, что гиротропные волны обладают дисперсией и затуханием. В слое конечной толщины с проводимостью Холла σ_H , не имеющей поперечной компоненты ($\sigma_{\perp} = 0$), существует спектр гиротропных волн [4]. В вертикальном магнитном поле решения уравнений имеют неволновой характер [2, 3, 5].

Иной тип граничных условий, при которых сохраняется магнитный момент системы возбуждаемых в ионосфере токов, приводит к решениям диффузионного типа [6]. При этом радиус возмущенной области увеличивается со временем по закону $r \sim \sqrt{t}$. Исследование ГМВ и структуры токов в слое конечной толщины с проводимостями σ_H и σ_{\perp} в

присутствии идеально проводящей земли показывает, что фронт возмущений распространяется диффузионным образом, но за ним возникают затухающие колебания [7, 8]. Максимум этих колебаний распространяется с групповой скоростью около 20 км/с, соответствующей частоте вблизи минимума коэффициента затухания основной колебательной моды.

Цель настоящей работы состоит в дальнейшем исследовании дисперсионных уравнений ГМВ в низкочастотной области для разных моделей ионосферы и ориентаций магнитного поля земли.

1. Постановка задачи. Выберем систему координат с осью z , направленной вертикально вверх. Точка $z = 0$ соответствует нижней границе ионосферы, а уровень $z = -l_0$ отвечает поверхности земли, обладающей бесконечной проводимостью. Напряженность геомагнитного поля имеет вид: $\vec{H}_0 = H_0(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_z)$. Будем рассматривать ГМВ, не зависящие от координаты y , возбуждаемые в ионосфере сторонними токами плотности \vec{j}^c . Полагая продольную проводимость плазмы бесконечной, запишем квазистационарные уравнения Максвелла для возмущений геомагнитного ($\delta\vec{H} = \vec{H}$) и геоэлектрического полей:

$$\frac{c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \sigma_H (E_z \cos\theta - E_x \sin\theta) + \sigma_{\perp} E_y + j_y^c,$$

$$\frac{c}{4\pi} \Delta H_y = \sigma_{\perp} (E_z \cos\theta - E_x \sin\theta) - \sigma_H E_y + j_z^c \cos\theta - j_x^c \sin\theta, \quad (1)$$

$$E_x = -E_z \operatorname{tg}\theta,$$

где использованы обозначения

$$\Delta = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial z}, \quad \sigma_H \approx \frac{e^2 N}{m_e \omega_H}, \quad \sigma_{\perp} \approx e^2 N \left(\frac{\nu_{en}}{m_e \omega_H^2} + \frac{1}{m_i \nu_{in}} \right).$$

Здесь σ_{\perp}, σ_H - электропроводности Педерсена и Холла, m_e и m_i - массы электрона и иона, ν_{en} и ν_{in} - частоты столкновений электронов и ионов с нейтралами, ω_H - гирочастота электронов, N - концентрация заряженных частиц.

Исключим из (1) при помощи уравнений Максвелла компоненты \vec{E} . Учитывая, что σ_H и σ_{\perp} зависят только от z , получаем после ряда преобразований следующую систему:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = D_2 \hat{\Delta} H_z + D_1 \hat{\Delta} \frac{\partial H_y}{\partial x} + J_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial x} = \hat{\Delta} \left(D_2 \hat{\Delta} \frac{\partial H_y}{\partial x} - D_1 \hat{\Delta} H_z + J_2 \right),$$

где использованы обозначения

$$D_1 = \frac{c^2}{4\pi} \frac{\sigma_H}{\sigma_H^2 + \sigma_1^2}, \quad D_2 = D_1 \frac{\sigma_1}{\sigma_H}, \quad \hat{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$J_1 = - \frac{c}{\sigma_H^2 + \sigma_1^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_H (j_z^c \cos \theta - j_x^c \sin \theta) - \sigma_1 j_y^c \right],$$

$$J_2 = \frac{c}{\sigma_H^2 + \sigma_1^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_1 (j_x^c \sin \theta - j_z^c \cos \theta) - \sigma_H j_y^c \right].$$

В магнитосфере вместо (2) используем уравнения для магнитного поля в холодной бесстолкновительной плазме

$$\hat{\Delta} H_z = \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad \hat{\Delta}^2 H_y = \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}, \quad v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi N m_1}}, \quad (3)$$

где v_A - скорость альфвеновской волны в низкочастотном пределе.

В атмосфере справедливы уравнения ($-1_0 < z < 0$)

$$\hat{\Delta} H_z = 0, \quad \hat{\Delta} H_y = 0. \quad (4)$$

Граничные условия задачи следующие: на поверхности земли $z = -1_0$ обращается в нуль H_z , на нижней границе ионосферы $z = 0$ непрерывны H_x, H_y, H_z и равна нулю нормальная составляющая плотности тока j_z , на верхней границе $z = 1$ функции H_x, H_y, H_z, j_z непрерывны, а при $z \rightarrow \infty$ они ограничены.

Применим к уравнениям (2)-(4) преобразование Фурье по x и t с параметрами k и ω . В результате уравнения (2) приобретают вид ($0 < z < 1$)

$$-i\omega h_z = k^2 D_2 \hat{\Delta} h_z + i k^2 D_1 \hat{\Delta} h_y + I_1, \quad (5)$$

$$\omega h_y = k^2 \hat{A} (i D_2 \hat{A} h_y - D_1 \hat{B} h_z) + \hat{A} I_2.$$

Здесь h_y, h_z, I_1, I_2 - Фурье-образы функций H_y, H_z, J_1, J_2 , а \hat{A} и \hat{B} - образы операторов \hat{a} и \hat{b} :

$$\hat{a} = i \cos \theta + \sin \theta \frac{d}{d\nu}, \quad \hat{b} = \frac{d^2}{d\nu^2} - 1, \quad \nu = kz.$$

Фурье-преобразование выражений (2), (3) дает:

$$\hat{B} h_z = 0, \quad \hat{B} h_y = 0, \quad -l_0 < z < 0, \quad (6)$$

$$\hat{B} h_z + \frac{\omega^2}{k^2 v_A^2} h_z = 0, \quad \hat{A}^2 h_y + \frac{\omega^2}{k^2 v_A^2} h_y = 0, \quad z > l. \quad (7)$$

Если известны источники возбуждения ионосферы, то уравнения (5)-(7) определяют решение задачи в Фурье-представлении. Интересуясь дисперсионными уравнениями ГМВ, опустим в (5) слагаемые I_1, I_2 . Характер решения (5)-(7) зависит от конкретного вида функций $\sigma_H(z), \sigma_I(z)$.

2. Однослойная модель ионосферы. Проводимости Холла и Педерсена достигают максимальных значений внутри E-слоя ионосферы (высоты 100 - 130 км в дневное время) и быстро убывают вне этого слоя. Поэтому вначале рассмотрим упрощенную модель, согласно которой величины σ_H, σ_I постоянны в интервале высот $0 < z < l$ и равны нулю вне этой области [7, 8]. Преобразуя для этого случая (5), приходим к следующему уравнению:

$$\sin^2 \theta \frac{d^4 h_z}{d\nu^4} + i \sin 2\theta \frac{d^3 h_z}{d\nu^3} - \left[1 - \frac{\text{imp}(1 + \sin^2 \theta)}{1 + m^2} \right] \frac{d^2 h_z}{d\nu^2} -$$

$$- i \sin 2\theta \left(1 + \frac{\text{imp}}{1 + m^2} \right) \frac{dh_z}{d\nu} + \left[\cos^2 \theta - \frac{\text{imp}(1 + \cos^2 \theta) + p^2}{1 + m^2} \right] h_z = 0,$$

$$m = \sigma_I / \sigma_H, \quad p = \omega / D_1 k^2.$$

Решение системы уравнений (6)-(8) для компоненты h_z , обращаемое в нуль при $z = -l_0$ и ограниченное при $z \rightarrow \infty$, имеет вид

$$h_z = c_0 \operatorname{sh}(w + s_0) \quad (-s_0 < w < 0), \quad s_0 = kl_0;$$

$$h_z = \sum_{n=1}^4 c_n e^{\lambda_n w} \quad (0 < w < s), \quad s = kl; \quad (9)$$

$$h_z = c_5 e^{-\gamma w} \quad (w > s), \quad \gamma = \sqrt{1 - \omega^2/k^2 v_A^2}.$$

причем $\operatorname{Re} \gamma > 0$ при $k^2 > \omega^2/v_A^2$. Компонента h_y в слое $0 < z < 1$ выражается через решение (9) в виде

$$h_y = -\frac{1+m^2}{p} \hat{a} \left(\hat{b} + \frac{imp}{1+m^2} \right) h_z,$$

а при $z > 1$ имеем решение в виде уходящей альфвеновской волны

$$h_y = c_6 \exp \left[\frac{iw}{\sin \theta} \left(\frac{\omega}{kv_A} - \cos \theta \right) \right].$$

При $\theta = 0$, как следует из уравнения (7), коэффициент c_6 обращается в нуль. Функции $\lambda_n = \lambda_n(p, m, \theta)$ являются корнями характеристического уравнения, отвечающего дифференциальному уравнению (8). Неизвестные коэффициенты $c_0 - c_5$ определяются из требований непрерывности при $z = 0$ и $z = 1$ функций h_z и dh_z/dz (вытекает из условия непрерывности h_x). Кроме того, учтем, что $j_z(0) = 0$, а h_y и E_x непрерывны при $z = 1$. Исключая с помощью последних двух условий неизвестный коэффициент c_6 , приходим к соотношениям

$$\hat{a} \left(\hat{b} + \frac{imp}{1+m^2} \right) h_z \Big|_{w=0} = 0, \quad \left(\hat{a} - \frac{i\omega}{kv_A} \right) \left(\hat{b} + \frac{imp}{1+m^2} \right) h_z \Big|_{w=s} = 0.$$

Если пренебречь излучением волн в магнитосфере ($v_A \rightarrow \infty$), то второе соотношение эквивалентно условиям $j_z(1) = 0$, $h_y(1) = 0$, которые означают отсутствие токов в магнитосфере.

Система алгебраических уравнений относительно $c_0 + c_5$ имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю. Понижая порядок определителя с шестого до четвертого, получаем

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \operatorname{th} s_0 - 1 & \lambda_2 \operatorname{th} s_0 - 1 & \lambda_3 \operatorname{th} s_0 - 1 & \lambda_4 \operatorname{th} s_0 - 1 \\ (\lambda_1 + \gamma) e^{\lambda_1 s} & (\lambda_2 + \gamma) e^{\lambda_2 s} & (\lambda_3 + \gamma) e^{\lambda_3 s} & (\lambda_4 + \gamma) e^{\lambda_4 s} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ g_1 e^{\lambda_1 s} & g_2 e^{\lambda_2 s} & g_3 e^{\lambda_3 s} & g_4 e^{\lambda_4 s} \end{vmatrix} = 0,$$

$$b_n = F_n f_n, \quad g_n = F_n (F_n - i\omega/kv_A), \quad F_n = \lambda_n + [\operatorname{imp}/(1 + m^2)] - 1, \quad (10)$$

$$f_n = \lambda_n \sin \theta + i \cos \theta, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

где $\lambda_n = \lambda_n(p, m, \theta)$ являются корнями уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^4 \sin^2 \theta + i \lambda \sin 2\theta \left(\lambda^2 - \frac{\operatorname{imp}}{1 + m^2} - 1 \right) - \lambda^2 \left[1 - \frac{\operatorname{imp}(1 + \sin^2 \theta)}{1 + m^2} \right] = \\ = \frac{\operatorname{imp}(1 + \cos^2 \theta)}{1 + m^2} - \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Соотношения (10), (11) определяют неявным образом искомую дисперсионную зависимость $\omega(k)$.

Заметим, что для неограниченной среды ($l \rightarrow \infty$), заполненной плазмой, в уравнениях (8) следует пренебречь производными. В этом предельном случае $\lambda = 0$. Получаем известное уравнение [2]

$$\omega = \frac{D_1 k^2}{2} \left[-im(1 + \cos^2 \theta) \pm \sqrt{4\cos^2 \theta - m^2 \sin^4 \theta} \right]. \quad (12)$$

При больших k и углах, меньших критического $\theta_c = \arccos[(\sqrt{1+m^2}-1)/m]$, мода со знаком плюс перед радикалом переходит в уравнение, описывающее альфвеновские волны, а мода со знаком минус - в уравнение, описывающее БМЗ [2]. Для $\theta > \theta_c$ распространение ГМВ имеет диффузионный характер.

Рассмотрим случай горизонтального геомагнитного поля, когда

$\theta \rightarrow 0$. При этом корни уравнения (11) ведут себя следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{iq}{s}, \quad q = s \sqrt{\frac{(ip-m)^2 + 1}{m(ip-m)-1}}; \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1}{\sin\theta} \left(i \pm \sqrt{-\frac{imp}{1+m^2}} \right). \quad (13)$$

Подстановка (13) в (10) приводит с точностью до экспоненциально малых членов к уравнению

$$\operatorname{tg} q (q^2 \operatorname{th} s_0 - s\beta) = q(s + \beta \operatorname{th} s_0), \quad \beta = \sqrt{s^2 - \omega^2 l^2 / v_A^2}. \quad (14)$$

Для отыскания корней уравнения (14) численными методами использовались параметры $\sigma_H = 4\sigma_1 = 10^{-3}$ См/м, $l = 30$ км, $l_0 = 100$ км, $v_A = 300$ км/с. Исследовалась основная мода колебаний, которой отвечает ветвь решения (14), удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} q < \pi$. Расчеты показали, что при $s < s_* \approx 0,075$ зависимость $\omega(k)$ чисто мнимая, причем имеются две различные ветви, которые соединяются при $s = s_*$. Таким образом, в этом интервале изменения s процессы распространения ГМВ имеют характер диффузии.

Для случая, когда $s > s_*$, на рис. 1 показан коэффициент затухания δ (кривая 1), а на рис. 2 - групповая скорость v_g и фазовая v_f скорости (кривые 1, 3 соответственно). Отметим близость этих результатов с аналогичными зависимостями [7], полученными при тех же параметрах, но без учета излучения волн в магнитосферу ($v_A \rightarrow \infty$). Это объясняется тем, что в рассматриваемом диапазоне частот выполняется неравенство $|\omega| \ll kv_A$. При этом $\beta \approx s$, а формула (14) переходит в дисперсионное уравнение [7, 8], которое может быть записано в виде

$$\omega = -iD_2 \left(k^2 + \frac{q^2}{2l^2} \right) \pm D_1 \sqrt{k^2 \left(k^2 + \frac{q^2}{l^2} \right) - \frac{q^4 m^2}{4l^4}}, \quad (15)$$

где $q(s)$ находится из (14). Для $s \ll 1$ и $l/l_0 \ll 1$, полагая в (14) $q \ll 1$ (основная мода), находим

$$q^2 = \frac{s}{\operatorname{th} s_0} (1 + s + \operatorname{th} s_0). \quad (16)$$

Выражения для δ , v_g , v_f , полученные с помощью (15), (16), хорошо аппроксимируют графики на рис. 1, 2.

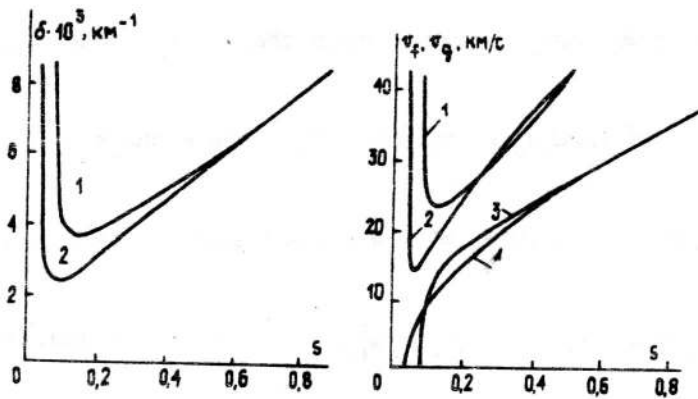


Рис. 1.2.

Приближение идеальной проводимости земли может нарушаться, если глубина скин-слоя ГМВ превосходит толщину верхнего слоя осадочных пород (2-3 км), обладающего большой электропроводностью ($\sigma = 1 - 0,01$ См/м). Ниже электропроводность земли падает и лишь на глубине около 400 км достигает прежнего значения. При этом возможно появление новых мод ГМВ с эффективным расстоянием до ионосферы $l_0 = 500$ км [9]. Результаты расчетов с данным значением l_0 показаны на рис. 1 (кривая 2) и 2 (кривые 2, 4 для v_g и v_f соответственно). Видно, что коэффициент затухания данного типа ГМВ оказывается ниже. Его минимальное значение $\delta^{-1} \approx 430$ км при $s \approx 0,07$. Групповая скорость ГМВ в данной области s также меньше: $v_g \approx 14$ км/с.

В случае вертикального геомагнитного поля ($\theta = \pi/2$) корни уравнения (11) следующие:

$$\lambda_{1,2} = \pm \alpha_1, \quad \alpha_1 = \left[\frac{1}{2} \left(1 + 2\xi + \sqrt{1 - 4\xi^2/m^2} \right) \right]^{1/2}, \quad \xi = - \frac{imp}{1+m^2}, \quad (17)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \alpha_2, \quad \alpha_2 = \left[\frac{1}{2} \left(1 + 2\xi - \sqrt{1 - 4\xi^2/m^2} \right) \right]^{1/2},$$

а дисперсионное уравнение (10) преобразуется к виду

$$\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \{ \text{th} s_0 [(d_2 \text{sh} \alpha_2 s - \mu F_2 \text{ch} \alpha_2 s) (\gamma \text{ch} \alpha_1 s + \alpha_1 \text{sh} \alpha_1 s) -$$

$$\begin{aligned}
& - (d_1 \operatorname{sh} \alpha_1 s - \mu F_1 \operatorname{ch} \alpha_1 s) (\gamma \operatorname{ch} \alpha_2 s + \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2 s) + d_2 \operatorname{sh} \alpha_2 s \operatorname{ch} \alpha_1 s - \\
& - d_1 \operatorname{sh} \alpha_1 s \operatorname{ch} \alpha_2 s + \mu \gamma (F_1 \operatorname{sh} \alpha_2 s \operatorname{ch} \alpha_1 s - F_2 \operatorname{sh} \alpha_1 s \operatorname{ch} \alpha_2 s) = (18), \\
& = [2\gamma d_1 d_2 + \mu \alpha_1 \alpha_2 (F_1^2 + F_2^2)] \operatorname{ch} \alpha_1 s \operatorname{ch} \alpha_2 s - \\
& - [\gamma (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \mu F_1 F_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)] \operatorname{sh} \alpha_1 s \operatorname{sh} \alpha_2 s - 2d_1 d_2 (\gamma + \mu), \\
& d_{1,2} = \alpha_{1,2} F_{1,2}, \quad F_{1,2} = \alpha_{1,2}^2 - \xi - 1, \quad \mu = i\omega l / s v_A.
\end{aligned}$$

Заметим, что равенство (18) выполняется при одном из условий: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2$. Анализ (9) показывает, что эти решения следует отбросить, так как соответствующие зависимости $\omega(k)$ не являются полюсами решения (9). Учитывая это обстоятельство и полагая, что $|\alpha_1|s \ll 1$, $|\alpha_2|s \ll 1$, преобразуем (18) в области малых s к виду

$$\begin{aligned}
\omega = - \frac{iD_2 s}{l^2 \operatorname{th} s_0} \frac{\psi(1 + s \operatorname{th} s_0) + (s + \operatorname{th} s_0) [\psi^2 + \varepsilon^2 (1 - s^2) (1 - \operatorname{th}^2 s_0) / \operatorname{th}^2 s_0]^{1/2}}{\psi^2 - \varepsilon^2 (s + \operatorname{th} s_0)^2 / \operatorname{th}^2 s_0}, \\
\psi = \frac{m^2 (1 + \varepsilon)}{m^2 + \varepsilon (1 + m^2)}, \quad \varepsilon = \frac{D_2}{l v_A}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Отсутствие реальной части в зависимости (19) указывает на преобладание диффузионных процессов распространения ГМВ, которые ведут к затуханию сигналов во времени.

В пределе $s, s_0 \rightarrow 0$ выражение (19) приобретает вид

$$\omega = - \frac{iD_2}{l l_0 [\psi - \varepsilon (1 + l/l_0)]}.$$

Отсюда видно, что при условиях $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon \ll m^2$ излучение БМЗ и альфвеновских волн слабо влияет на дисперсионные уравнения ГМВ в низкочастотной области. Подставляя использованные выше параметры, находим, что $\varepsilon \approx 0,02$. Поэтому в дальнейшем излучение не учитываем, полагая $v_A \rightarrow \infty$ в уравнениях (7).

3. Двухслойная модель E-области. Пик проводимости Холла в реальной ионосфере располагается ниже по высоте пика проводимости Педерсена. Поэтому представляет интерес изучение модели в виде двух слоев с разными типами проводимости плазмы. Задача для двух бесконечно узких слоев решалась в [3]. Ниже будет показано, что учет проводимости земли и конечности толщины слоев заметно влияет на дисперсионные характеристики ГМВ.

Пусть в интервале высот $0 < z < l_1$ σ_H - постоянно, а $\sigma_{\perp} = 0$; в области $l_1 < z < l$ $\sigma_H = 0$, а σ_{\perp} - постоянно. Для $z < 0$ и $z > l$ $\sigma_H = \sigma_{\perp} = 0$. Проводимость земли ($z = -l_0$) и продольную проводимость в ионосфере считаем бесконечными. В этом случае исходная система уравнений, в которой опущены неоднородные члены, имеет вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = D_H \hat{G} \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial x} = -D_H \hat{G} \hat{\Delta} H_z, \quad D_H = \frac{c^2}{4\pi\sigma_H}, \quad 0 < z < l_1, \quad (20)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = D_{\perp} \hat{\Delta} H_z, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = D_{\perp} \hat{G}^2 H_y, \quad D_{\perp} = \frac{c^2}{4\pi\sigma_{\perp}}, \quad l_1 < z < l.$$

Применяя к (20) преобразование Фурье по x и t , получаем

$$r h_z = -\hat{\Delta} h_y, \quad r h_y = -\hat{\Delta} B h_z, \quad r = \omega/D_H k^2, \quad 0 < z < l_1, \quad (21)$$

$$-i m r h_z = \hat{B} h_z, \quad -i m r h_y = \hat{\Delta}^2 h_y, \quad l_1 < z < l.$$

В интервалах $z > l$ и $-l_0 < z < 0$ справедливы уравнения (6), (7). Граничные условия для (6), (7), (21): непрерывность h_z , h_y , dh_z/dz на границах слоев. Кроме того, эти функции обращаются в нуль при $z \rightarrow \infty$, $h_z(-l_0) = 0$, а нормальная составляющая плотности тока равна нулю при $z = 0$ и $z = l$.

Решение уравнений (6), (7), (21) для компоненты h_z в случае горизонтального геомагнитного поля ($\theta = 0$) имеет вид

$$h_z = c_0 \operatorname{sh}(w + s_0), \quad w = kz, \quad -s_0 < w < 0,$$

$$h_z = c_1 e^{\alpha w} + c_2 e^{-\alpha w}, \quad \alpha = \sqrt{1 - r^2}, \quad 0 < w < s_1, \quad (22)$$

$$h_z = c_3 e^{\rho w} + c_4 e^{-\rho w}, \quad \rho = \sqrt{1 - i m r}, \quad s_1 < w < s,$$

$$h_z = c_5 e^{-|z|}, \quad z > s_2; \quad s_1 = kl_1, \quad s = kl.$$

Анализ решений показывает, что в холловском слое $0 < z < l_1$, где отлична от нуля компонента h_y , возникают "кольцевые" токи j_x, j_z . Линейные токи имеются в обоих слоях, причем на границе $z = l_1$ они испытывают скачок.

Определяя неизвестные коэффициенты $c_0 + c_5$ в (22) с помощью граничных условий, приходим к дисперсионному уравнению вида

$$\frac{\tanh(s - s_1)}{\rho} = - \frac{(\alpha \tanh s_1 + 1) \alpha \tanh s_0 + \tanh s_1 + \alpha}{(\rho^2 + \alpha \tanh s_1) \alpha \tanh s_0 + \rho^2 \tanh s_1 + \alpha}. \quad (23)$$

Решения уравнения (23) $\omega_n = \omega_n(k)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) задают спектр собственных колебаний ГМВ в ионосфере. Проанализируем его отличия от спектра, полученного для однослойной ионосферы в горизонтальном геомагнитном поле. В пределе $s_1 \rightarrow 0$ уравнение (23) переходит в (14), где следует положить $D_1 = 0$. В пределе $(s - s_1) \rightarrow 0$ (23) совпадает с (14) при $D_2 = 0$. Для основной моды формулу (23) можно упростить, полагая $|\alpha|s_1 \ll 1, |\rho|(s - s_1) \ll 1$. В итоге получаем приближенное уравнение

$$\omega_1(k) = \frac{D_H k^2 [-im(s - s_1)(s_1 + \tanh s_0) \pm \sqrt{G}]}{2s_1 \tanh s_0 (s - s_1 + 1)}, \quad (24)$$

$$G = 4s_1 \tanh s_0 (s - s_1 + 1)^2 (1 + s_1)(1 + \tanh s_0) - (s - s_1)^2 (s_1 + \tanh s_0)^2 m^2,$$

у которого имеется отличная от нуля реальная часть. С помощью (24) нетрудно рассчитать фазовую и групповую скорости и коэффициент затухания основной моды.

Эти зависимости представлены на рис. 3, 4 при следующих параметрах: $\sigma_H = 4\sigma_1 = 10^{-3}$ См/м, $l = 2l_1 = 30$ км. Цифрами 1, 2 обозначены функции δ и v_g при $l_0 = 100$ и 500 км соответственно, цифрами 3, 4 - v_f при тех же значениях l_0 . Сплошными линиями 1-4 показаны результаты численных расчетов основной моды по формуле (23), пунктиром - приближенные зависимости, отвечающие уравнению (24). Как видно из рис. 3, 4, соотношения (24) дают хорошую аппроксимацию решений (23) в области $s \approx 0, 4$.

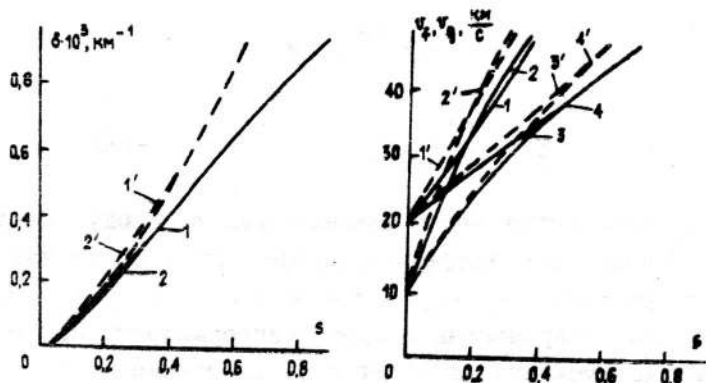


Рис. 3.4.

Сравнение с рис. 1, 2 показывает, что различие спектров существенно при $s < 0,1$. Для этой области получились следующие зависимости:

$$\delta = \frac{mk^2}{2\sqrt{l_1 l_0}} (l - l_1)(l_0 + l_1), \quad v_f = v_* \left(1 + \frac{kl_*}{2}\right), \quad (25)$$

$$v_g = v_*(1 + kl_*), \quad v_* = D_H / \sqrt{l_1 l_0}, \quad l_* = l_0 + 2l - l_1,$$

из которых видно, что при $s \rightarrow 0$ $|\operatorname{Re}\omega| \gg |\operatorname{Im}\omega|$, причем $\delta \rightarrow 0$, а $v_f = v_g \approx 20$ км/с (при $l_0 = 100$ км). При отсутствии холловского слоя ($l_1 = 0$) решения вида (25) не существуют.

Соотношения (25), по существу, описывают низкочастотную альфвеновскую моду в слоистой среде. В этом можно убедиться, совершая предельный переход к неограниченной среде: $l = l_1 \rightarrow \infty$, $l_0 \rightarrow \infty$, при котором формулы (25) соответствуют дисперсионному уравнению (12) при $\theta = 0$.

Для вертикального геомагнитного поля решение уравнений (6), (7), (21) имеет вид

$$h_z = c_0 \operatorname{sh}(w + s_0), \quad -s_0 < w < 0,$$

$$h_z = c_1 e^{\lambda_1 w} + c_2 e^{-\lambda_1 w} + c_3 e^{\lambda_2 w} + c_4 e^{-\lambda_2 w}, \quad 0 < w < s_1,$$

$$h_z = c_5 e^{\rho w} + c_6 e^{-\rho w}, \quad h_y = c_7 \operatorname{sh} \alpha (s - w), \quad s_1 < w < s, \quad (26)$$

$$h_z = c_8 e^{-|w|}, \quad w > s,$$

$$\lambda_{1,2} = [(1 \pm \sqrt{1 + 4r^2})/2]^{1/2}, \quad \alpha = \sqrt{-imr}.$$

Компонента h_y выражается через решения для h_z всюду, кроме области $s_1 < w < s$. Неизвестные коэффициенты находятся с помощью граничных условий: непрерывность h_z , dh_z/dz при $w = 0$, $w = s_1$, $w = s$; обращение в нуль j_z на поверхностях E-слоя; непрерывность при $w = s_1$, E_x , j_z . Последние два условия приводят к соотношениям вида

$$-\hat{B} \left. \frac{dh_z}{dw} \right|_{w=s_1^-} = rh_y \left. \right|_{w=s_1^+}, \quad im\hat{B}h_z \left. \right|_{w=s_1^-} = \left. \frac{dh_y}{dw} \right|_{w=s_1^+}$$

Дисперсионное уравнение, соответствующее данному случаю, может быть записано в виде определителя девятого порядка. После ряда преобразований порядок определителя понижается до четвертого:

$$\begin{vmatrix} Q_1(-\lambda_1) & Q_1(\lambda_1) & Q_1(-\lambda_2) & Q_1(\lambda_2) \\ Q_2(\lambda_1) & Q_2(-\lambda_1) & Q_2(\lambda_2) & Q_2(-\lambda_2) \\ Q_3(-\lambda_1) & Q_3(\lambda_1) & Q_3(-\lambda_2) & Q_3(\lambda_2) \\ Q_4(\lambda_1) & Q_4(-\lambda_1) & Q_4(\lambda_2) & Q_4(-\lambda_2) \end{vmatrix} = 0, \quad (27)$$

$$Q_1(\lambda) = 1 + \lambda \operatorname{th} s_0, \quad Q_2(\lambda) = e^{\lambda s_1} [\rho(1 + \lambda) + (\rho^2 + \lambda) \operatorname{th} \rho(s - s_1)],$$

$$Q_3(\lambda) = (1 - \lambda^2) \left[\lambda + \frac{imr}{\alpha} \operatorname{th} \alpha (s - s_1) \right] e^{-\lambda s_1}, \quad Q_4(\lambda) = \lambda(1 - \lambda^2).$$

Для основной ветви возбуждения ионосферы при малых s, s_1 уравнение (27) с точностью до квадратичных членов запишется так:

$$4\rho\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \{ imr(s - s_1)[1 + s + \operatorname{th} s_0[1 + s_1 + \rho^2(s - s_1)]] - s_1^2\lambda_1^2\lambda_2^2 \operatorname{th} s_0 \} = 0.$$

Отсюда получаем следующую зависимость:

$$\omega(k) = - \frac{imD_H k(1 - l_1)(1 + s)(1 + ths_0)}{ths_0 [l_1^2 + m^2(1 - l_1)^2]}, \quad (28)$$

которая указывает на диффузионный характер распространения ГМВ в вертикальном магнитном поле земли.

Сравнительный анализ двух моделей ионосферы показал, что дисперсионные уравнения ГМВ при низких частотах существенно зависят от распределения по высоте E -слоя проводимостей Холла и Педерсена. Большое влияние оказывает также ориентация вектора напряженности геомагнитного поля.

Затухание ГМВ обусловлено, в основном, диссипативными процессами, возникающими при распространении токов в проводящем E -слое ионосферы и в проводящей земле.

Излучение волн в магнитосферу слабо отражается на дисперсионных уравнениях.

В вертикальном магнитном поле земли дисперсионные зависимости (19), (28) имеют сходный характер независимо от строения E -слоя. Они описывают процессы диффузии в гиротропном слое системы токов и ГМВ, для которых характерно затухание во времени и отсутствие осцилляций.

Затухание ГМВ велико и в случае горизонтального геомагнитного поля, если пики проводимостей σ_H и σ_{\perp} располагаются на одинаковой высоте. В области $s > s_*$, где $\text{Re}\omega$ отлична от нуля, ГМВ распространяются в виде затухающих колебаний, коэффициенты затухания и групповые скорости которых имеют минимумы для всех колебательных мод, причем вблизи минимума основной моды $v_g = 23 + 14 \text{ км/с}$.

Если максимум σ_{\perp} располагается выше холловского слоя, то при малых s $|\text{Re}\omega| \gg |\text{Im}\omega|$. Основная мода ГМВ имеет групповую и фазовую скорости около 20 км/с и коэффициент затухания $\delta \sim 10^{-4} \text{ км}^{-1}$ при частоте 0,1 Гц и $l_0 = 100 \text{ км}$. Распространяется она вдоль холловского слоя в направлении геомагнитного поля. Ее затухание обусловлено как проникновением поля в слой Педерсена, так и влиянием проводимости земли. Предельный переход показывает, что в неограниченной среде этот тип ГМВ преобразуется в альфвеновскую волну. Возможно также появление низкочастотной ионосферной моды,

обусловленной отражением от проводящего слоя в земле на глубине 400 км. Ее скорость около 10 км/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. М., Федорович Г. В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. N 5. С. 495.
2. Голиков Ю. В. и др. //Геомagnetизм и аэрономия. 1985. Т. 25. N 5. С. 824.
3. Сорокин В. М., Яценко А. К. //Геомagnetизм и аэрономия. 1988. Т. 28. N 4. С. 655.
4. Сорокин В. М. //Геомagnetизм и аэрономия. 1987. Т. 27. N 6. С. 925.
5. Борисов Н. Д. //Геомagnetизм и аэрономия. 1988. Т. 28. N 3. С. 469.
6. Горбачев Л. П., Семенова Т. А. Препринт МИФИ 044-89. М., 1989.
7. Сурков В. В. //Геомagnetизм и аэрономия. 1990. Т. 30. N 1. С. 121.
8. Сурков В. В. //Геомagnetизм и аэрономия. 1990. Т. 30. N 5. С. 806.
9. Сурков В. В. Препринт МИФИ 018-90. М., 1990.

Московский инженерно-физический
институт

Поступила в редакцию
5 февраля 1991 г.

DISPERSION EQUATIONS OF THE LOW-FREQUENCY GEOMAGNETIC DISTURBANCES IN E-LAYER OF THE IONOSPHERE

V. V. Surkov

Dispersion equations of the low-frequency geomagnetic disturbances (LGD) depending on height distribution of the Hall and Pedersen conductivities are investigated. One-layer and two-layer models of E-region of the ionosphere are considered with account of the conductivity of the earth and wave radiation in the magnetosphere. A form of the dispersion equations and physical mechanisms of LGD propagations along E-layer are analysed as dependent on geomagnetic field orientation.